Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Onízio Ferreira de Jesus

O USO DE PLANILHAS DO EXCEL APLICADAS A TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Jataí

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: **Onízio Ferreira de Jesus**

Título do trabalho: **O Uso de Planilhas do Excel Aplicadas a Tópicos de Geometria Analítica.**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Flávio Gomes de Moraes.

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 28 / 12 / 18

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Onízio Ferreira de Jesus

O USO DE PLANILHAS DO EXCEL APLICADAS A TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Trabalho de Conclusão de Curso elaborado sob orientação do Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes e coorientação da Prof.ª Dra. Luciana Aparecida Elias, apresentado à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - UFG

Regional de Jataí

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes

Coorientador: Prof.ª Dra. Luciana Aparecida Elias

Jataí

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Jesus, Onízio Ferreira de
O Uso de Planilhas do Excel Aplicadas a Tópicos de Geometria Analítica. [manuscrito] / Onízio Ferreira de Jesus. - 2018.
243 f.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes; co-orientadora Dra. Luciana Aparecida Elias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), , 2018.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. TIC. 2. Planilhas eletrônicas. 3. Pontos. 4. Retas. 5. Distâncias. I. Moraes, Flávio Gomes de, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 **www.jatai.ufg.br/matematica**

UFG

PROFMAT

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Onízio Ferreira de Jesus – Ao décimo sétimo dia do mês de dezembro do ano de dois mil e dezoito (17/12/2018), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes – Orientador, Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva e Prof. Dr. Jair Pereira de Melo Junior, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no prédio da Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás – Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"O USO DE PLANILHAS DO EXCEL APLICADAS A TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15:50 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Roberta Cristina Ferreira Zago, Secretária da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí – UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Flávio Gomes de Moraes

Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes
Profmat UFG/REJ
Presidente

Gecirlei Francisco da Silva

Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva
Profmat UFG/REJ
Membro Interno

Prof. Dr. Jair Pereira de Melo Junior
UNIRV/RIO VERDE
Membro Externo

Onízio Ferreira de Jesus, graduou-se em Ciências Físicas e Biológicas - Licenciatura Curta, pela Universidade Estadual de Goiás (UEG), Unidade de Quirinópolis, em 1992 e em Matemática - Licenciatura Plena, pela mesma Universidade em 1996. Cursou Pós-Graduação "Lato Sensu" em Matemática Superior, pelas Faculdades Integradas de Patrocínio (FIP/MG) em 2002. Foi professor da Universidade Estadual de Goiás-UEG (Quirinópolis-GO), do Colégio Estadual Belmiro Soares (Paranaiguara-GO), do Colégio Estadual São Simão e do Colégio Estadual Pres. Costa e Silva (São Simão-GO). Atualmente atua como docente na Escola Municipal de Ensino Fundamental Geraldo Sírio, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Colégio Estadual Rui Antônio da Silva, no Ensino Médio, no município de Turvelândia-GO.

Este trabalho é dedicado a todos os meus familiares pela compreensão que tiveram e pelo incentivo e apoio que me deram e a todos os meus professores e orientadores, que me ensinaram e ajudaram com todo suporte necessário para que eu concluísse mais uma grande etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado saúde, sabedoria e por sempre ter iluminado e guiado o meu caminho me dando força e coragem para concretizar este trabalho.

Aos professores orientadores pela paciência e dedicação na orientação e correção deste trabalho, dando todo suporte necessário.

Aos demais professores pela contribuição e colaboração nos ensinamentos que foram tão importantes.

Aos meus familiares pelo amor, carinho, incentivo, compreensão, paciência e apoio incondicional em todos os momentos de estudos e pesquisas.

Aos colegas e amigos, pelas alegrias e tristezas compartilhadas e pela ajuda recebida nos momentos difíceis.

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, de algum modo, me ajudaram a alcançar mais um degrau da minha vida.

Resumo

JESUS, Onízio Ferreira de. **O Uso de Planilhas do Excel Aplicadas a Tópicos de Geometria Analítica.** 2018. 243 p. Dissertação - Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Regional Jataí, Universidade Federal de Goiás. Jataí, GO.

Este trabalho apresenta uma introdução ao uso do computador como uma das “Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC” na educação matemática e dentro desta perspectiva, a utilização do software para criação de planilhas eletrônicas, na versão “Excel 2016”. Será apresentado também um tutorial básico sobre os principais assuntos necessários para criação dessas planilhas com explicações detalhadas de todos os passos necessários para a inclusão de fórmulas e funções, bem como de formatações básicas, como alterar a cor e o tipo de fontes, a cor do plano de fundo; a largura de colunas, a altura de linhas, mesclar, alinhar, formatar células, inserir ou remover bordas, proteger planilha, renomear, salvar, concatenar e muito mais. O objetivo é a sua utilização como ferramenta auxiliar ou instrumento pedagógico no processo ensino-aprendizagem aplicados aos alunos do Ensino Médio de forma inovadora e lúdica na transmissão de conteúdos abordados sobre tópicos de Geometria Analítica e, consequentemente, da Matemática. Isto proporciona aulas mais criativas e dinâmicas, que visa despertar nos educandos uma participação motivadora em busca do conhecimento. Após cada tópico da referida geometria, uma planilha será criada para o desenvolvimento dos conteúdos propostos, auxiliando na resolução de exercícios e na aprendizagem. Espera-se estimular o interesse, a curiosidade, a receptividade e o envolvimento dos estudantes no ensino da Matemática. Com isso, poderão ainda, além de utilizá-las no processo educacional, aplicá-las em outras áreas também, como no controle do orçamento doméstico ou em áreas profissionais, no controle financeiro, comercial e muito mais.

Palavras-chave: TIC. Planilhas Eletrônicas. Pontos. Retas. Distâncias.

Abstract

JESUS, Onízio Ferreira de. **The Use of Excel Spreadsheets Applied to Analytic Geometry Topics.** 2018. 243 p. Dissertation - Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Regional Jataí, Universidade Federal de Goiás. Jataí, GO.

This work presents an introduction to the use of computer as one of the "Information and Communication Technologies - ICT" in mathematics education and from this perspective, the use of spreadsheet software in the "Excel 2016" version. There will also be a basic tutorial on the main subjects needed to create these spreadsheets with detailed explanations of all the necessary steps for the inclusion of formulas and functions, as well as basic formatting, such as changing font color and type, the background color, width of columns, height of rows, merge, align, format cells, insert or remove borders, protect spreadsheets, rename, save, concatenate and more. The objective is to use it as an auxiliary tool or pedagogical instrument in the learning teaching process applied to the students of the High School in an innovative and playful way in the transmission of contents covered on topics of Analytical Geometry and, consequently, Mathematics. This provides more creative and dynamic classes, which aims to awaken in students a motivating participation in search of knowledge. After each topic of said geometry, a spredsheet will be created for the development of the proposed contents, assisting in the resolution of exercises and in learning. It is hoped to stimulate the interest, the curiosity, the receptivity and the involvement of the students in the teaching of mathematics. With this, besides using them in the educational process, apply them in other areas as well, such as controlling the domestic budget or in professional areas, financial control, commercial and much more.

Keywords: ICT. Spreadsheets. Points. Straight. Distances.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O autor é professor de Matemática na Escola Municipal de Ensino Fundamental Geraldo Sírio, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Colégio Estadual Rui Antônio da Silva, no Ensino Médio, no município de Turvelândia - GO. Por isso, decidiu elaborar o seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), baseado em sua experiência prática em sala de aula e utilizou o aplicativo **"Excel 2016"**[1], por ser bem popular em criação de planilhas eletrônicas, que também faz gráficos, tabelas, cálculos, desenhos e muito mais, mas foi utilizado neste trabalho apenas as ferramentas básicas necessárias para um bom desempenho das planilhas que aqui foram criadas. Também foi escolhido pelo fato de que muitos alunos têm computador em casa e podem aprender a usá-lo para fins didáticos no processo ensino-aprendizagem. A decisão da escolha do Excel se deu pelo fato de que, além de executar vários cálculos diferentes, o autor percebeu que quando se utilizava o aplicativo com os alunos para resolver problemas, eles se sentiram mais motivados e interessados em resolver as atividades propostas com bem mais entusiasmo, visto que há dificuldade em aprender pelos métodos tradicionais. Esta é uma estratégia que, se for bem aplicada, melhora, e muito, o conhecimento e o interesse dos alunos pelas aulas. Para isso, é preciso que o Laboratório de Informática da Escola esteja em pleno funcionamento.

O objetivo geral é implementar o computador como uma das TICs e o software Excel 2016, para criar planilhas e aplicá-las na resolução de problemas sobre tópicos de geometria analítica, inclusive os aplicados em vestibulares, ENEM e concursos, além de usar estes conhecimentos na vida cotidiana em casa ou no trabalho.

Pelo fato do Excel ser uma ferramenta muito útil e poder realizar vários tipos de cálculos, sendo possível a sua utilização no Ensino Médio, este trabalho contemplou apenas alguns conteúdos da Geometria Analítica. Com isso, decidiu-se pelo tema: **"O Uso de Planilhas do Excel Aplicadas a Tópicos de Geometria Analítica"**, onde foram criadas detalhadamente, através de um tutorial básico de Excel, várias planilhas que efetuaram diversos tipos de cálculos e resolveram problemas, como visto mais adiante.

O capítulo 1 foi sobre a implementação do computador como uma tecnologia

[1] É um aplicativo de criação de planilhas eletrônicas da Microsoft Office na versão 2016, que roda no Sistema Operacional Windows.

no ensino básico , que começou com uma definição de TICs e suas áreas de utilização. Em seguida, realizou-se um breve relato sobre o programa "ProInfo". Depois, discutiu sobre o uso das TICs na Educação Matemática e, por último, trouxe um breve histórico da evolução do aplicativo "Excel".

O capítulo 2 foi usado na prática, uma das tecnologias: o computador. O software utilizado foi a versão **"Excel 2016"**, que é um dos aplicativos do pacote da **"Microsoft Office"**, do sistema operacional **"Windws 10"**. Outras versões do Excel e do Windows podem ser usadas de forma semelhante. Iniciou com um tutorial básico do Excel, onde foi explicado, com detalhes, os procedimentos necessários para a criação de uma planilha com a finalidade de resolver problemas de Geometria Analítica, como por exemplo: abrir o aplicativo, selecionar células, linhas, colunas, mesclar, alterar largura de coluna, altura de linha e cor de preenchimento do plano de fundo, alinhar, formatar, inserir ou remover bordas, ocultar e/ou re-exibir linhas e/ou colunas, bloquear/desbloquear células, proteger planilha, renomear, salvar, inserir fórmulas ou funções e concatenar, etc.

No capítulo 3, no início de cada seção, foi realizada uma abordagem teórica sobre o conteúdo estudado com exemplos de atividades ou problemas, que foram resolvidos da forma tradicional. Num segundo momento foi criada uma planilha que permite resolver os mesmos problemas aplicados anteriormente, com instruções detalhadas do início até a sua finalização, passo a passo, inclusive com algumas formatações básicas de texto e de plano de fundo para melhorar a aparência da mesma. Ao concluir a planilha e utilizá-la na resolução de problemas da seção foi mostrada uma ou mais figuras do resultado final de sua criação e utilização.

Os principais conteúdos de Geometria Analítica abordados neste capítulo foram: plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento de reta, baricentro de um triângulo, condição de alinhamento de três pontos, área e perímetro de um triângulo, coeficientes: angular e linear, equações: geral, fundamental e reduzida da reta, posição relativa de duas retas no plano cartesiano, ponto de intersecção de duas retas concorrentes, ângulo formado entre duas retas e distância entre ponto e reta.

Também foram utilizadas algumas planilhas criadas neste capítulo que resolveram problemas aplicados em vestibulares, no ENEM e em concursos públicos, encontrando a alternativa correta, após digitar os dados necessários do problema utilizado na planilha que encontrou a resposta certa. Observe que, às vezes, foi necessário fazer algumas adaptações, como por exemplo, transformar um número fracionário em número decimal ou vice-versa. Como quase todas as planilhas foram criadas para representar um número na forma decimal com arredondamento de até seis casas decimais, se o número for fracionário, foi necessário fazer a transformação para número decimal ou formatar a célula da planilha para a categoria “fração”.

Por fim, no capítulo 4, constou as considerações finais sobre todo o processo de desenvolvimento do trabalho e uma reflexão sobre a utilização do Excel para resolver problemas de Geometria Analítica.

Com a aplicação prática deste trabalho, educadores e educandos serão capazes de, além de criar planilhas e utilizá-las na resolução de problemas de Geometria Analítica no processo ensino-aprendizagem, de aplicar estes conhecimentos em outras áreas também, como em casa, para controlar o orçamento doméstico ou na área profissional, onde várias empresas as utilizam nas áreas financeira, comercial ou industrial, para elaboração de fluxo de caixa, controle de gastos e de estoques, pagamentos e recebimentos diversos, cálculos de preços e muito mais.

1 A Implementação do Computador como uma Tecnologia no Ensino Básico

1.1 TICs, definição e áreas de utilização

Quando se pensa em "Teconologia" na educação não é correto pensar que é só o computador, pois, segundo (KENSKI, 2007), engloba tudo "...que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações." Assim, é necessário se ter uma visão mais ampla desse conceito porque "Tecnologia" também são: "...lápis, cadernos, canetas, lousas, giz e muitos outros produtos, equipamentos e processos que foram planejados e construídos para que possamos ler, escrever, ensinar e aprender." (KENSKI, 2007), além de câmera digital, retroprojetor,TV, vídeo, aparelho de som, CD, DVD, pen drive e muitos outros.

Diante do exposto, será apresentada uma definição para "Tecnologia", de acordo com (JESUS; LIMA, 2018):

> "A palavra tecnologia é de origem grega. O prefixo "techne" significa "ofício" e o sufixo "logia" corresponde a "que diz". Tecnologia é um elemento bastante abrangente que envolve entre outros, o conhecimento técnico/científico e as ferramentas, os processos e materiais criados e/ou utilizados a partir de tal conhecimento." (JESUS; LIMA, 2018).

Já para Kenski, a "Tecnologia" é um: "... conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade." (KENSKI, 2007). Para concluir a ideia de "Tecnologia", ainda segundo Kenski, "Para construir qualquer equipamento - uma caneta esferográfica ou um computador -, os homens precisam pesquisar, planejar, e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias." (KENSKI, 2007, p.24).

Inserida nesse contexto, tem-se as Tecnologias de Informação e Comunicação - TICs, as quais são amplamente aplicadas a educação. De acordo com (PACIEVITCH, 2018):

> "Tecnologia da informação e comunicação (TIC) pode ser definida como um conjunto de recursos tecnológicos, utilizados de forma

> integrada, com um objetivo comum. As TICs são utilizadas das mais diversas formas, na indústria (no processo de automação), no comércio (no gerenciamento, nas diversas formas de publicidade), no setor de investimentos (informação simultânea, comunicação imediata) e na educação (no processo de ensino aprendizagem, na Educação a Distância)." (PACIEVITCH, 2018).

Embora as TICs possam ser utilizadas em várias áreas, o foco deste trabalho será sua utilização apenas na área da educação, mas evidentemente, utilizar-se-á, para o desenvolvimento deste trabalho, o computador, instalado com o sistema operacional "**Windows 10**", juntamente com um dos aplicativos do pacote da **"Microsoft Office"**[1], que é o **"Excel 2016"**, mas também pode-se utilizar outras versões do Windows e do Excel.

1.2 Programa Nacional de Tecnologia Educacional-ProInfo

Os programas governamentais em relação ao uso da informática na educação, começaram bem antes da criação do **"Programa Nacional de Informática na Educação (ProInfo)"**.

Entre um dos principais programas que envolve a informática no Brasil, está a criação da "Secretaria Especial de Informática (SEI)" conforme o Art. 1º do Decreto nº 84.067, de 02 de Outubro de 1979, como segue:

> "É criada, como órgão complementar do Conselho de Segurança Nacional, a Secretaria Especial de Informática, SEI, com a finalidade de assessorar na formulação da Política Nacional de Informática (PNI) e coordenar sua execução, como órgão superior de orientação, planejamento, supervisão e fiscalização, tendo em vista, especialmente, o desenvolvimento científico e tecnológico no setor."(BRASIL, 1979).

.

Em novembro de 1982 foi criado o "Centro de Informática do MEC - CENIFOR." (MORAES, 1997).

Em 1983, no âmbito da SEI, foi criada a "Comissão Especial Informática na Educação" nº 11/83, através da Portaria SEI/CSN/PR nº 001/83. Esta comissão aprovou o "Projeto Brasileiro de Informática na Educação (EDUCOM)" (MORAES, 1997), que teve como uma de suas ações, a criação do projeto "FORMAR" em 1987,

[1] É um pacote de aplicativos muito úteis contendo Word, Excel, PowerPoint, Access, Outlook, entre outros.

cujo objetivo era a "capacitação de professores da rede pública." Outros projetos foram o "CIEd[2] e CIET[3]", responsáveis pela "implantação de centros de informática educativa para atendimento às escolas de 1º e 2º graus da rede pública." (MORAES, 1997).

Em 1989, foi criado o "Programa Nacional de Informática Educativa (PRONINFE)", através da "Portaria nº 549 de 13 de Outubro de 1989," com objetivo de: "apoiar o desenvolvimento e a utilização de informática educativa nas áreas de ensino de 1º, 2º e 3º graus e de educação especial..." (BRASIL, 1994). Este programa de governo foi o antecessor do "ProInfo."

Finalmente, depois de alguns programas educacionais de informática criados anteriormente, o "Ministério da Educação e do Desporto" criou o "**Programa Nacional de Informática na Educação (ProInfo)**", através da "Portaria nº 522, de 09 de Abril de 1997", conforme o Art. 1º e Parágrafo único:

> " Fica criado o Programa Nacional de Informática na Educação – ProInfo, com a finalidade de disseminar o uso pedagógico das tecnologias de informática e telecomunicações nas escolas públicas de ensino fundamental e médio pertencentes às redes estadual e municipal.
>
> Parágrafo único. As ações do ProInfo serão desenvolvidas sob responsabilidade da Secretaria de Educação a Distância deste Ministério, em articulação com a secretarias de educação do Distrito Federal, dos Estados e dos Municípios." (BRASIL, 1997).

Ainda sobre o Programa ProInfo, segundo Takashashi:

> "O Programa Nacional de Informática na Educação (ProInfo) do MEC é a iniciativa central do País na introdução das tecnologias de informação e comunicação na escola pública como ferramenta de apoio ao processo ensino-aprendizagem." (TAKAHASHI, 2000)

Em seguida, esta portaria foi regulamentada pelo então Presidente da República, Luiz Inácio Lula da Silva, através do "Decreto nº 6.300, de 12 de Dezembro de 2007" e que, de agora em diante, passa a ter uma nova nomenclatura, conforme o Art. 1º do referido Decreto: "O Programa Nacional de Tecnologia Educacional - ProInfo, executado no âmbito do Ministério da Educação, promoverá o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas redes públicas de educação básica." (BRASIL, 2007).

[2] Centro de Informática Educativa
[3] Centro de Informática na Educação Técnica

Ainda sobre o mesmo decreto, no Parágrafo único, ao Art. 1º, destaca-se aqui os objetivos do ProInfo e segue também o Art. 2º:

> I - promover o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas escolas de educação básica das redes públicas de ensino urbanas e rurais;
>
> II - fomentar a melhoria do processo de ensino e aprendizagem com o uso das tecnologias de informação e comunicação;
>
> III - promover a capacitação dos agentes educacionais envolvidos nas ações do Programa;
>
> IV - contribuir com a inclusão digital por meio da ampliação do acesso a computadores, da conexão à rede mundial de computadores e de outras tecnologias digitais, beneficiando a comunidade escolar e a população próxima às escolas;
>
> V - contribuir para a preparação dos jovens e adultos para o mercado de trabalho por meio do uso das tecnologias de informação e comunicação; e
>
> VI - fomentar a produção nacional de conteúdos digitais educacionais.
>
> Art. 2o O ProInfo cumprirá suas finalidades e objetivos em regime de colaboração entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, mediante adesão.

No Estado de Goiás, em 1998, o "Programa Estadual de Informática na Educação - ProInfo", foi instituido pela SEDUC/GO[4], hoje SEDUCE/GO, através do "Decreto nº 4.985, de 16 de Dezembro de 1998" e que foram criados também os "NTEs"[5], com objetivo principal de capacitar professores para o uso da informática na educação.

Veja o texto do Art. 1º do referido Decreto:

> "Ficam criados os Núcleos de Tecnologia Educacional - NTE, indicados no Anexo Único, como unidades escolares estaduais, com funcionamento nos três turnos, sendo-lhes asseguradas as condições pedagógicas, administrativas e financeiras para o ensino da informática e para o acompanhamento e avaliação dos projetos pedagógicos de informática, bem como a manutenção e a plena utilização dos equipamentos dos NTE e dos laboratórios de informática implantados nas Unidades Escolares da sua jurisdição, previstos no Programa Estadual de Informática na Educação." (GOIÁS, 1998).

O anexo único citado acima, consta o nome de 11 (onze) "NTEs" criados por força do Decreto, na época.

---

[4] Secretaria de Estado da Educação de Goiás
[5] Núcleos de Tecnologia Educacional

Hoje, depois de 20 anos de sua implantação, os NTEs estão consolidados e cumpriu sua missão de capacitar os professores para trabalhar com o computador.

Através do ProInfo, muitas escolas adquiriram os laboratórios de informática e os professores, após participarem do curso de capacitação promovido pelos NTEs, passaram a utilizar o computador como uma ferramenta pedagógica com os etudantes.

Será destacado também mais dois programas estaduais utilizados nas escolas que é de muita utilidade. Um deles é o "Sistema de Gestão Escolar (**SIGE**)", criado em 1999 e consolidado "em todas as escolas em 2004 se tornando um sistema prioritário nas unidades escolares" (SOUZA, 2016). O outro sistema é o "Sistema de Apoio ao Professor (**SIAP**)", que "foi criado para ser utilizado pelos professores como diário eletrônico". (SOUZA, 2016).

1.3 O uso do computador como uma das TICs na educação Matemática

São diversas Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) e recursos computacionais que podem ser usadas na Educação Matemática. Dentre elas, estão os ***"Softwares*[6] *Matemáticos"***. Na internet, há vários deles que realizam as mais diversas tarefas. A maioria são gratuitos. Basta escolher o *software* de acordo com a finalidade, copiar ou instalar no computador e utilizar. Alguns podem ser executados online mesmo.

Um dos exemplos é o **"Hot potatoes"**, que permite aos professores, elaborar atividades interativas, que vem com um pacote de várias ferramentas, tais como:

> "...***JCloze*** que é um jogo de incógnitas, devendo-se clicar na interrogação para encontrar as dicas; o ***JMath*** tem, no lado esquerdo, os itens propostos já no lado direito, está a interrogação e propostas de eventuais respostas; o ***JQuiz*** relaciona perguntas com alternativas, uma ou mais podem ser a resposta; o ***JCross*** é extremamente parecido com o jogo de palavras cruzadas; o ***JMix*** é um jogo de ordenar as palavras; e, por fim, o ***The Masher*** é um software que pode englobar os demais ***softwares.***" (SOUZA, 2015).

Outro *Software* muito importante é o **"Geogebra"**[7], que resolve equações e

[6] É um conjunto de elementos lógicos do computador (programas) que realizam ou executam tarefas.

[7] É um *software* matemático que engloba geometria, álgebra, gráficos, tabelas, e muitos outros cálculos e construções.

faz gráficos de funções, cria figuras geométricas, analisa dados, possui visualização de objetos em 2D e 3D, além de possuir uma interface[8] com muitas ferramentas para executar as mais variadas tarefas, inclusive criação de jogos educativos. É um *software* gratuito que pode ser baixado e instalado no computador ou ainda, pode ser utilizado on-line no site www.geogebra.org, sem nenhuma instalação no computador. No youtube, há vários cursos e tutoriais que explicam como utilizá-lo. Assim, ele é um excelente *software* que pode ser usado com finalidades didáticas em sala de aula no processo de ensino e aprendizagem, como afirma (PETLA, 2008), o Geogebra foi "criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, com início do projeto em 2001 na University of Salzburg."

Outro exemplo também é o **"CD Supercalculador Matemático"**, onde foram reunidos vários *sofwares* em um único CD com várias fórmulas e funções que calcula os resultados automaticamente e podem ser utilizados no processo ensino-aprendizagem. O CD foi "Desenvolvido para servir como apoio a professores e alunos na realização de cálculos matemáticos, o Supercalculador Matemático confere agilidade para efetuar cálculos nas principais áreas da Matemática, como Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Estatística." (SUPEERCALCULADOR..., 2018). Ele não é gratuito e pode ser adquirido em dois sites: https://www.somatematica.com.br/shopping/produto.php?id=184 e https://www.virtuous.com.br/produto.php?id=184. Veja na tabela 1, os conteúdos abrangidos pelo referido CD:

[8] Tela de abertura com menus, barra de ferramentas, janela de álgebra, janela de visualização, entre outros

Tabela 1 – CD Supercalculador Matemático.

Softwares Matemáticos	**Conteúdos**
ARITMÉTICA	Potenciação e Radiciação; Porcentagens; Logarítmos; M.M.C.; M.D.C.; Divisores; Fatores Primos; Sistemas de Medidas; Frações.
ÁLGEBRA	Análise Combinatória; Equações do 1º, 2º, 3º e 4º Graus; Determinantes e Operações com Matrizes; Progressões Aritméticas (PA); Progressões Geométricas (PG).
GEOMETRIA	Teorema de Pitágoras; Geometria Plana (áreas); Geometria Espacial (áreas e volumes); Geometria Analítica.
TRIGONOMETRIA	Funções Trigonométricas; Lei dos Senos; Lei dos Cossenos; Redução de Arco.
ESTATÍSTICA	Moda, Média e Mediana; Média Aritmética, Geométrica e Harmônica; Média Ponderada; Desvio Padrão e Variância.

Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Assim como os três casos apresentados acima, existem milhares de outros na internet. Basta pesquisar e encontrar exatamente aquele que atende aos objetivos de estudos procurado. Existem também muitos sites específicos de matemática e alguns até com atividades interativas on-line, inclusive com jogos, desafios, curiosidades e muito mais, além de sites de universidades que possuem o "Ambiente Virtual de Aprendizagem (**AVA)**" utilizados para ministrar cursos on-line, inclusive a "Educação a Distância (**EAD**)".

Como sugestão, na tabela 2, há vários *softwares* com descrição de sua utilização, que podem ser aplicados na educação matemática, tanto por professores, quanto por alunos, de forma interativa, lúdica, dinâmica e atrativa.

A maioria deles pode ser encontrado no site "https://www.somatematica.com.br/softwares.php", mas lembre-se, o que será exposto abaixo é apenas uma pequena contribuição de *softwares* educacionais que podem ser utilizados como material didático pedagógico diferenciado no ensino da matemática.

Tabela 2 – Softwares Matemáticos.

Softwares Matemáticos	Descrição
AllerCalc 2.11	Calculadora com diversas funções.
Análise Combinatória	Calcula arranjos, combinações e permutações.
Calc Prompter	Calcula expressões numéricas.
Círculo Trigonométrico	Calcula seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de um ângulo e ilustra o círculo trigonométrico.
Multiplicação de Polinômios	Efetua a multiplicação entre dois polinômios.
Números Primos	Identifica os números primos em um intervalo e faz fatoração.
Planilha de Equações	Resolve equações do segundo grau.
Planilha de Equações do 3º Grau	Resolve equações do terceiro grau.
Planilha Matemática Financeira	Resolve diversos problemas que envolve a Matemática Financeira.
Plot Weigly	Constrói gráfico de qualquer grau e também de funções trigonométricas.
Poly 1.10	Visualizador de sólidos geométricos bidimensionais e tridimensionais.
Progressão Aritmética	Calcula os elementos da PA, interpolação, soma, ângulos internos e lados de um triângulo em PA.
Regra de Cramer	Resolve sistemas lineares de segunda até quinta ordem pela Regra de Cramer.
Shape Calculator	Calcula áreas, perímetros e volumes de diversas figuras planas e espaciais.

Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

1.4 O uso do Excel como uma TIC

Nas TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação), podemos utilizar vários aplicativos de computadores para os mais diversos fins. Dentre eles, este trabalho contempla um em específico: o **Excel**, que é um aplicativo pertencente ao pacote da **Microsoft Office**, do sistema operacional **Windows**.

Para quem usa o sistema operacional Linux, a planilha eletrônica deste sistema, que pertence ao pacote da BrOffice.org, recebe o nome de **Calc**. "*O Calc é um programa freeware e gratuito que faz parte do LibreOffice e possibilita a criação,edição e apresentação de planilhas eletrônicas.*" (BERVIAN, 2011). Este aplicativo é semelhante ao **Excel**.

Para entender melhor sobre o Excel, observe o que está escrito no site: "Cursos de Informática Básica", conforme segue:

> "O **Excel** é um aplicativo que permite a criação e o gerenciamento de planilhas eletrônicas. Esse programa é comercializado com o pacote de programas para escritório chamado **Microsoft Office**, possuindo diversos programas conhecidos, como Word, Power Point e Access, por exemplo.
>
> Uma **planilha eletrônica** é uma grade com linhas e colunas formando uma matriz bidimensional. Cada coluna é identificada por uma letra, e cada linha por um número. A intersecção de uma linha com uma coluna é chamada de célula." (QUE..., 2018).

Os primeiros relatos sobre o desenvolvimento de planilhas "similares" ao Excel, datam de 1960, conforme relato abaixo:

> "...trabalho pioneiro em planilhas de computador ocorreu na década de 1960. Já em 1964, Richard Mattessich na Universidade da Califórnia publicou um programa de planilha eletrônica escrito em Fortran. A primeira planilha eletrônica bem sucedido comercialmente foi inventado em 1979 por Dan Bricklin e Bob Frankston. Foi chamado VisiCalc e foi escrito para rodar em computadores Apple II ... em 1983 a Lotus Development Corporation lançou um programa de planilha eletrônica chamado Lotus 1-2-3 que rapidamente ultrapassou VisiCalc em popularidade. Durante o mesmo período, a Microsoft desenvolveu um programa de planilha eletrônica chamado Multiplan." (HISTÓRIA..., 2018).

Observe que até 1983 apareceram vários aplicativos de planilhas eletrônicas, como o programa de planilha eletrônica, em 1964, escrito em Fortran, que é uma linguagem de programação, VisiCalc em 1979, Lotus 1-2-3 e Multiplan em 1983. Entretanto, nemhum deles tinha o nome Excel e só em 1984 surgiu a primeira menção ao nome Excel, conforme relatado por (MEYER, 2013):

> "Em 1984 foi lançado o primeiro Macintosh (MAC), lançado pela Apple, e eles precisavam de um novo programa, inovador, para estimular suas vendas. Foi então que a Microsoft iniciou o projeto de desenvolvimento do Excel, programa que tinha como intuito superar o atual adversário que estava ganhando espaço no mercado, o Lotus 123, em todas as suas funcionalidades. Logo em 1985, a Microsoft lançou a versão 1.0 para a plataforma MAC, lançando sua versão 2.0 para Windows somente em 1987." (MEYER, 2013).

Já a versão 3.0 foi lançada em 1990, que passou a ter uma nova versão em média a cada 2 ou 3 anos, até chegar ao Excel 2016, que é a penúltima versão disponível. A última já está em fase de teste, que é o Excel 2019:

> "Versões para Windows...
>
> - 1990: Excel 3.0
> - 1992: Excel 4.0
> - 1993: Excel 5.0 (Office 4.2 e 4.3)
> - 1995: Excel 7.0 (Office 95)
> - 1997: Excel 8.0 | Excel 97 (Office 97)
> - 1999: Excel 9.0 | Excel 2000 (Office 2000)
> - 2001: Excel 10.0 | Excel XP (Office XP)
> - 2003: Excel 11.0 | Excel 2003 (Office 2003)
> - 2007: Excel 12.0 | Excel 2007 (Office 2007)
> - 2010: Excel 14.0 | Excel 2010 (Office 2010)
> - 2013: Excel 15.0 | Excel 2013 (Office 2013)
> - 2016: Excel 16.0 | Excel 2016 (Office 2016)".
>   (LOPES, 2016)

À cada versão atualizada do Excel eram acrescentadas melhorias mas sempre mantendo a base da planilha que é trabalhar com linhas e colunas (células). A atualização mais significativa, desde então, ocorreu na versão Excel 5.0, em 1993. Veja porque:

> "Com a versão 5.0, o Excel incluiu o Visual Basic for Applications – VBA. Uma linguagem de programação baseada no Visual Basic que adiciona a capacidade de automatizar tarefas no Excel e fornecer funções definidas pelo usuário, para uso em planilhas. O VBA é uma adição poderosa ao aplicativo e inclui um ambiente de desenvolvimento integrado – IDE, totalmente caracterizado.". (EDIVALDO, 2017).

Assim, o **Excel** se torna uma ferramenta muito poderosa para criar e usar planilhas eletrônicas, para executar as mais variadas atividades e usar para diversos fins, nas diferentes tecnologias. Quanto ao seu uso, verifica-se ainda, que:

> "O aplicativo Excel é usado para realizar uma infinidade de tarefas como: cálculos simples e complexos, criação de lista de dados, elaboração de relatórios e gráficos sofisticados, projeções e análise de tendências, análises estatísticas e financeiras, além de trazer incorporado uma linguagem de programação baseada em Visual Basic." (SIGNIFICADO..., 2018).

Com o intuito de dar um suporte aos professores que optarem pela utilização do Excel em suas aulas, será feito, no próximo capítulo, um breve tutorial do mesmo, apresentado de forma simples e prática com muitas ilustrações.

2 Tutorial Básico de Introdução ao Excel 2016

Neste capítulo, será apresentado apenas um tutorial básico de introdução ao **Excel 2016**, do que será necessário para aplicar nas atividades que envolvem cálculos, funções e formatações desenvolvidas no capítulo 3, com o uso do **Excel** em conteúdos de **Geometria Analítica.**

O Sistema Operacional utilizado aqui para exemplificar todas as atividades desenvolvidas é o **Windows 10**.

Uma observação importante é que existem várias formas de salvar uma pasta de trabalho do Excel, que podem ser através: do clique na guia **"Arquivo > Salvar"**, ou **"Arquivo > Salvar Como"**; do clique no ícone **"Salvar"** na **"Barra de Ferramentas de Acesso Rápido"** e de usar as **"Teclas de Atalho"**. Assim, são quatro formas de salvar uma pasta de trabalho, mas no tutorial a ser apresentado no referido capítulo, apenas uma delas será mostrada. Isto vale para todos os demais tutoriais deste trabalho. Geralmente, a forma escolhida é a mais usada ou a mais simples, com detalhes de sua execução, passo a passo, com apresentação das referidas figuras explicativas de como realizá-las.

2.1 Abertura da pasta de trabalho em branco do Excel 2016

Para abrir uma planilha do **Excel 2016**, dentre as várias formas existentes, será mostrada a mais usual e para isso, faça o seguinte:

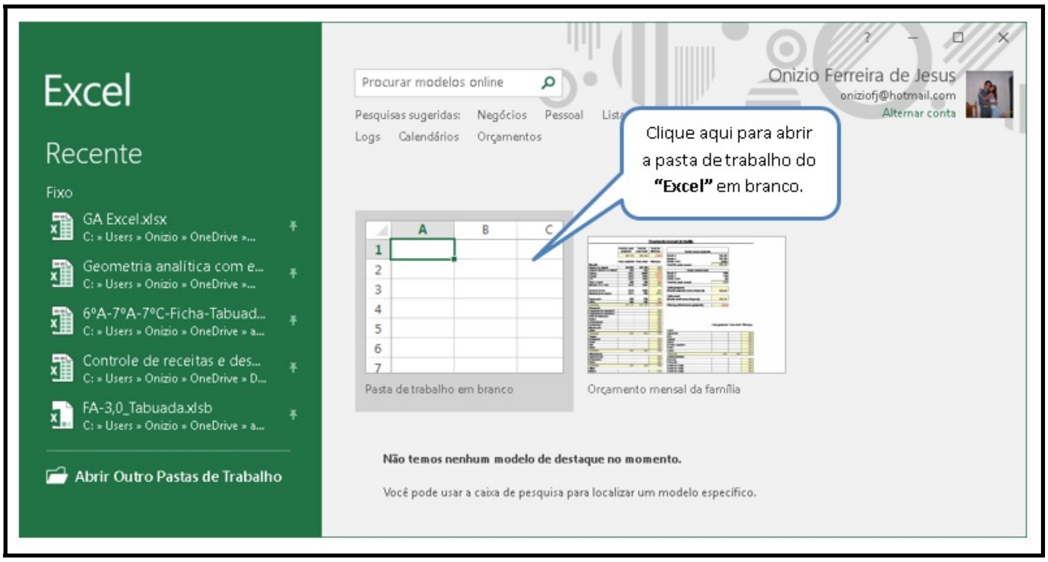
- Clique na caixa de pesquisa, na barra de tarefas, do lado direito do botão iniciar e digite: **Excel**, como mostra na figura 1

Figura 1 – Caixa de pesquisa.

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Após digitar **Excel** na caixa de pesquisa, tecle **"Enter"** no teclado, para exibir a janela como mostra a figura 2 e clique no local indicado;

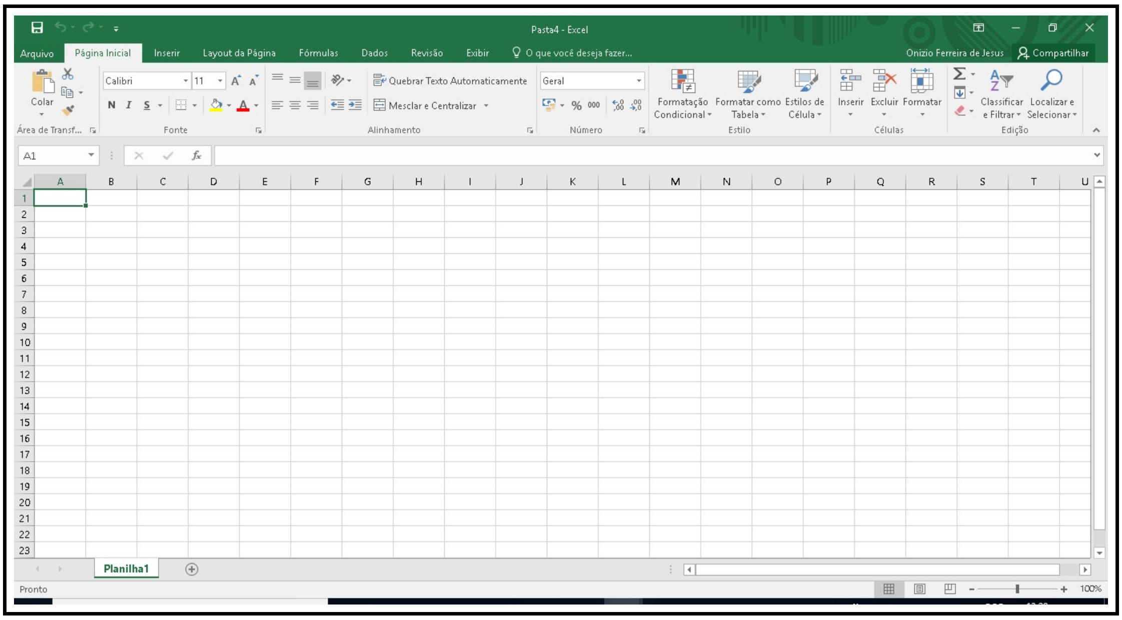
Figura 2 – Janela de abertura da pasta de trabalho do Excel 2016 em branco.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Após clicar no local indicado acima em **"Pasta de trabalho em branco"**, a referida pasta do aplicativo Excel 2016 será aberta, como mostra a figura 3

Figura 3 – Tela de abertura da pasta de trabalho do Excel 2016.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

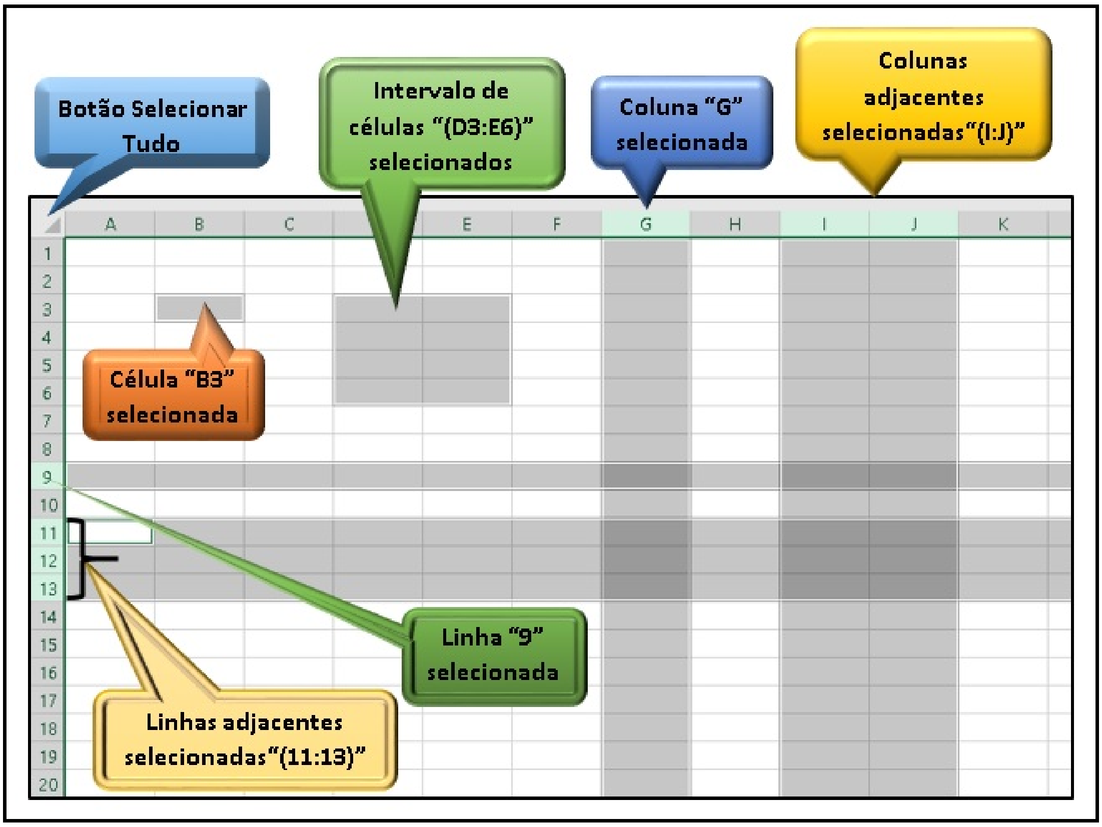
2.2 Selecionar células, intervalos de células, linhas, colunas e planilha

Para selecionar toda a planilha, células, linhas, colunas e intervalo de células, numa planilha do Excel, faça o seguinte:

- **Para selecionar uma única célula:** Clique na célula que deseja selecionar ou pressione as setas de direção para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda, até chegar na célula desejada. Neste exemplo, a célula selecionada é **"B3"**, onde **"B"** é a coluna e **"3"** é a linha e o cruzamento da coluna **"B"** com a linha **"3"**, forma a célula **"B3"**, como mostra a figura 4;
- **Para selecionar um intervalo de células:** Clique na primeira célula sem soltar o mouse e arraste até ao final do intervalo desejado, que nesse exemplo, é **"(D3:E6)"**, ou seja, são todas as células que vai do intervalo de **"D3"** até **"E6"**, como mostra a figura 4.

Veja cada um dos casos na figura 4, onde a cor cinza representa as células selecionadas.

Figura 4 – Selecionar células, intervalos, linhas e colunas.

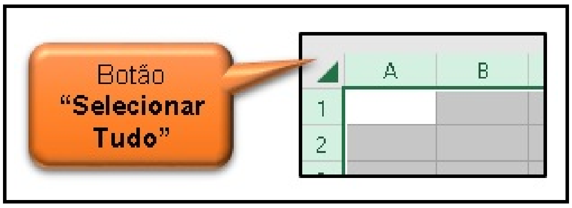


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- **Para selecionar uma única linha ou coluna**: Clique no título da linha ou coluna que deseja selecionar. Neste exemplo, a linha selecionada é a **"9"** e a coluna **"G"**, como mostrada na figura 4
- **Para selecionar várias linhas ou colunas adjacentes**: Clique no título da primeira linha ou coluna sem soltar e arraste o ponteiro do mouse até a linha ou coluna desejada. Neste exemplo, as linhas selecionadas são **"(11:13)"**, ou seja, vai da linha **"11"** até a **"13"**, as colunas são, **"(I:J)"**, ou seja, vai da coluna **"I"** até a **"J"**, como mostrada na figura 4
- **Para selecionar várias linhas ou colunas não adjacentes**: Clique no título da primeira linha ou coluna e depois mantenha a tecla **"Ctrl"** pressionada e vai clicando no título das demais linhas ou colunas que desejam selecionar;
- **Para selecionar linhas ou colunas até o final da planilha:** Clique no título da linha ou coluna e pressione as teclas **"Ctrl"** + **"Shift"** + **"seta para para baixo"** (para linhas) ou **"seta para a direita"**(para colunas);

- **Selecionar toda a planilha:** Clique no botão **"Selecionar Tudo"**, como mostra a figura 5

Figura 5 – Botão **"Selecionar tudo"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

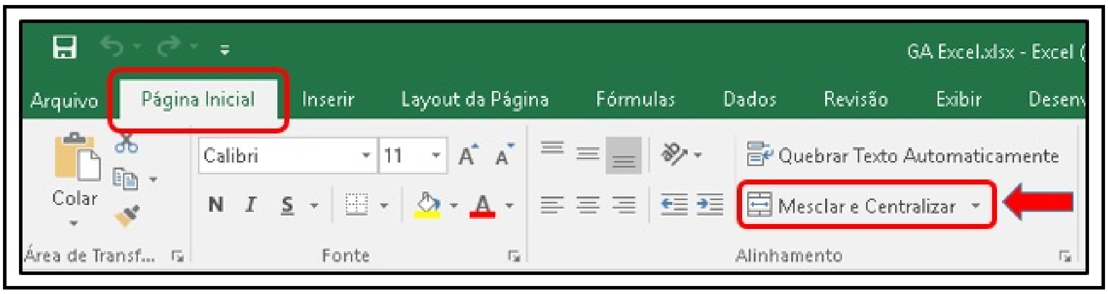
2.3 Mesclar células

Segundo o suporte da Microsoft, "*A mesclagem combina duas ou mais células para criar uma nova célula maior. Essa é uma excelente maneira de criar um rótulo que se estende por várias colunas.*" (MESCLAR..., 2018).

Para mesclar células na planilha do Excel, faça o seguinte:

- Selecione as células ou grupo de células que desejam mesclar;
- Clique na guia ***"Página Inicial"***, no grupo ***"Alinhamento"*** e em ***"Mesclar e Centralizar"*** como mostra o retângulo vermelho na figura 6;

Figura 6 – Mesclar células.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Para desfazer a mesclagem de células mescladas, faça o seguinte:

- Selecione as células mescladas que deseja desfazer a mesclagem;
- Clique na guia ***"Página Inicial"***, no grupo ***"Alinhamento"*** e em ***"Mesclar e Centralizar"***.

2.4 Alterar a largura da coluna e a altura da linha

Para fazer a alteração da largura da coluna e da altura da linha é necessário saber quais são os valores possíveis de cada uma, para que se possa fazer a alteração dentro dos limites possíveis.

Estes valores são encontrados dentro das várias possibilidades na internet conforme segue:

> "Em uma planilha, você pode especificar uma largura de coluna de 0 (zero) a 255. Esse valor representa o número de caracteres que podem ser exibidos em uma célula formatada com a fonte padrão... A largura padrão da coluna é de 8,43 caracteres. Se uma coluna tiver largura igual a 0, ela ficará oculta.
>
> É possível especificar a altura da linha de 0 (zero) a 409. Esse valor representa a medida da altura em pontos (1 ponto é igual a aproximadamente 1/72 de polegada ou 0,035 cm). A altura padrão da linha é de 12,75 pontos (cerca de 1/6 de polegada ou 0,4 cm). Se uma linha tiver altura igual a 0, ela ficará oculta." (AIOSA, 2011)

Para alterar a largura da coluna, arrastando o mouse, faça o seguinte:

- Leve o ponteiro do mouse até o limite do lado direito do título da coluna até ficar com a aparência de uma cruz, como mostra a seguir 

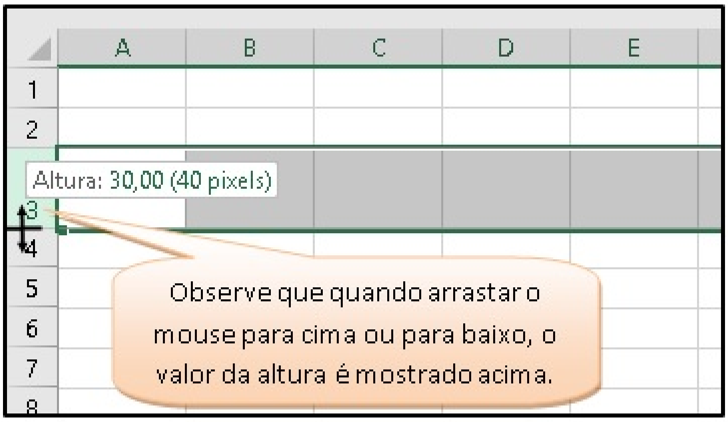
, onde o ponteiro do mouse foi colocado entre as colunas **B** e **C**, para aumentar ou diminuir a largura da coluna **B**;
- Quando o ponteiro do mouse virar uma cruz, clique no lado esquerdo do mouse, segure e arraste para a direita para aumentar o tamanho da coluna ou para a esquerda para diminuir, até ficar do tamanho desejado;
- Se for alterar a largura de várias colunas, primeiro selecione todas clicando no título da coluna e arrastando ou segurando a tecla "**Ctrl**" do teclado e clicando nas colunas a serem selecionadas. Depois é só levar o ponteiro do mouse no limite do lado direito do título de uma das colunas selecionadas, até ficar com aparência de uma cruz, clicar no lado esquerdo do mouse, segurar e arrastar para aumentar ou diminuir o tamanho da coluna.

Para alterar a altura da linha, arrastando o mouse, faça o seguinte:

- Leve o ponteiro do mouse até o limite inferior do título da linha 3, como mostra o exemplo da figura 7, até ficar com a aparência de uma cruz;

- Quando o ponteiro do mouse virar uma cruz, clique no lado esquerdo do mouse, segure e arraste para cima (que diminui a altura da linha) ou para baixo (que aumenta a altura da linha), até ficar na altura desejada;
- Se for alterar a altura de várias linhas, primeiro selecione-as com cliques no título das linhas. Depois é só levar o ponteiro do mouse no limite inferior do título de uma das linhas selecionadas, até ficar com aparência de uma cruz, clicar no lado esquerdo do mouse, segurar e arrastar para aumentar ou diminuir, até a linha ficar com a altura desejada, como mostra a figura 7

Figura 7 – Planilha após alteração da altura da linha com mouse.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

2.5 Alinhamentos (centralizar, alinhar à direita, à esquerda, em cima, no meio e embaixo)

Você pode fazer fazer vários tipos de alinhamentos verticais e horizontais de um texto que foi digitado dentro de uma célula do Excel.

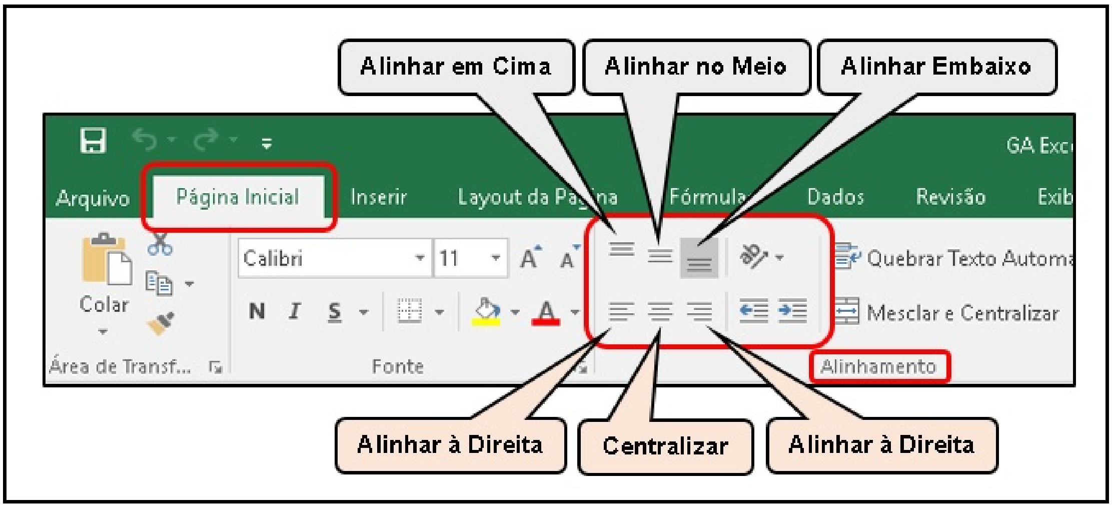
Para fazer os referidos alinhamentos, faça o seguinte:

- Selecione as células com o texto que você deseja alinhar:
- Clique na guia **"Página Inicial"** e no grupo **"Alinhamento"**, escolha uma das opções de alinhamentos a seguir:
  - Alinhamento vertical: **"Alinhar em Cima"**, **"Alinhar no Meio"** e **"Alinhar Embaixo"**;

– Alinhamento horizontal: **“Alinhar à Esquerda”**, **“Centralizar”** e **“Alinhar à Direita”**;

Veja as opções de alinhamentos descritos acima na figura 8

Figura 8 – Alinhamentos.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

2.6 Formatar texto em células

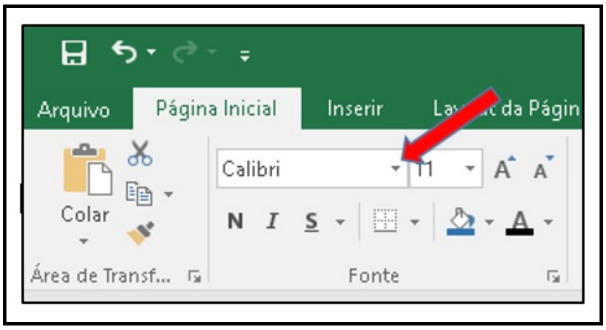
Você pode fazer vários tipos de formatações em um texto contido numa célula do Excel, como por exemplo: alterar o tipo, o tamanho e a cor da fonte, aplicar negrito, itálico, sublinhado, subscrito, sobrescrito reduzir para caber etc.

Para formatar o texto inserido em uma célula, faça o seguinte:

1. Alterar o tipo da fonte.

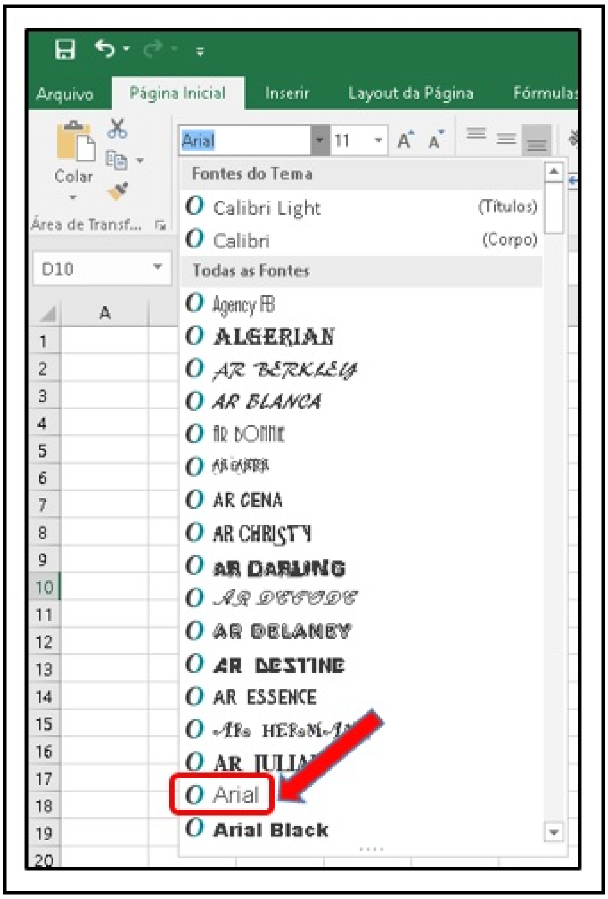
   - Clique nas células a serem alteradas o tipo da fonte para selecioná-las;
   - Clique na guia **“Página Inicial”** e no grupo **“Fonte”**, clique na setinha à direita para exibir a janela **“Fontes do Tema”**, como indica a seta vermelha na figura 9.

Figura 9 – Setinha indicando tipo de fonte.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Figura 10 – Tipo de fonte **Arial**.



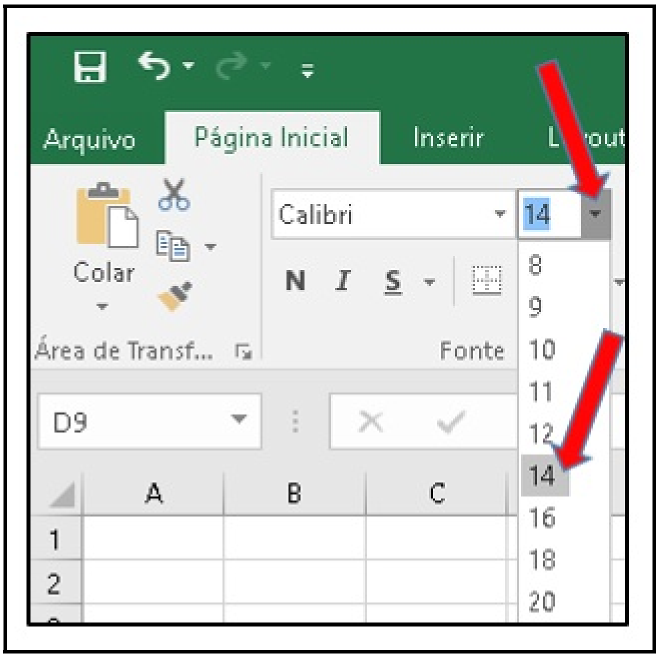
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Na janela que abrir, clique no tipo de fonte que desejar, que neste exemplo, é **"Arial"**, como mostra o retângulo e a seta vermelha na figura 10.

2. Alterar o tamanho da fonte.

- Clique nas células a serem alteradas o tamaho da fonte para selecioná-las;
- Clique na guia **"Página Inicial"** e no grupo **"Fonte"**, clique na setinha à direita para exibir as opções de **"tamanho da fonte"** e clique no que desejar, que neste exemplo, é **"14"**, como indica a seta vermelha na figura 11.

Figura 11 – Tamanho da fonte.

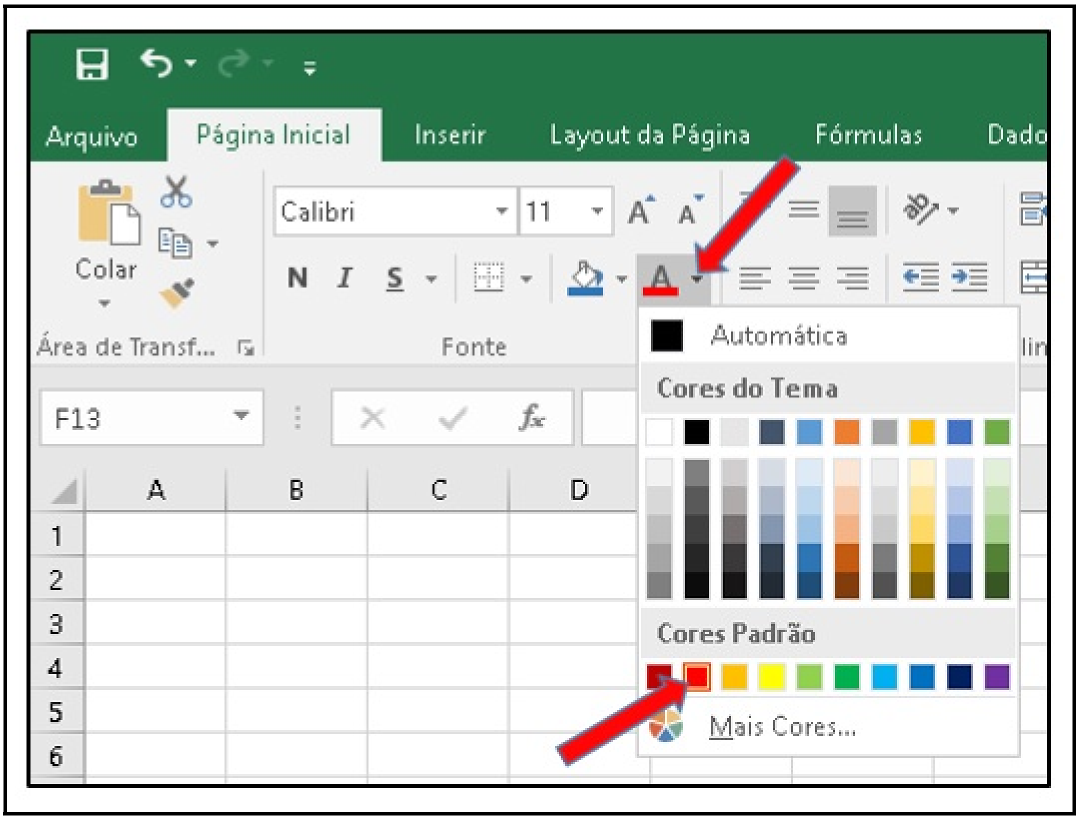


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3. Alterar a cor da fonte.

- Clique nas células a serem alteradas a cor da fonte para selecioná-las;
- Clique na guia **"Página Inicial"** e no grupo **"Fonte"**, clique na setinha à direita do ícone **"Cor da Fonte"** para exibir a janela **"Cores do Tema"**, como indica a seta vermelha superior na figura 12;
- Na janela que abrir, clique na cor escolhida de sua preferência e que neste exemplo, será a cor **"Vermelha"**, como indica a seta vermelha inferior na figura 12.

Figura 12 – Alterar a cor da fonte.

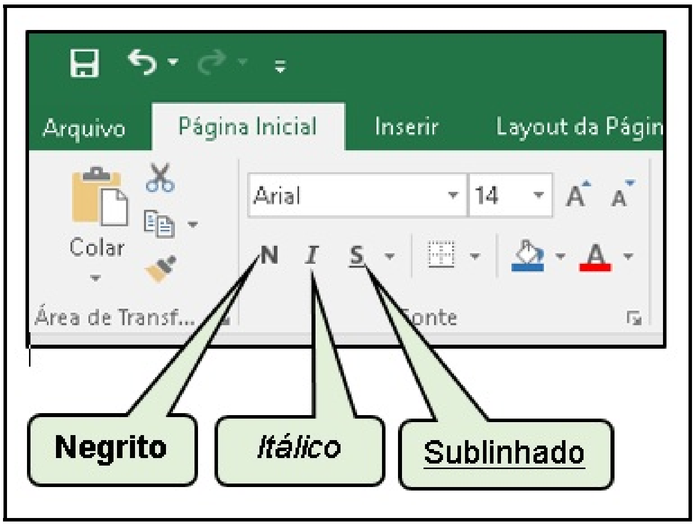


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

4. Aplicar negrito, itálico ou sublinhado.

   - Clique nas células a serem alteradas com negrito, itálico ou sublinhado para selecioná-las;
   - Clique na guia **"Página Inicial"** e no grupo **"Fonte"**, clique na opção **"Negrito"**, **"Itálico"** ou **"Sublinhado"**, conforme o caso de aplicação, como indicado na figura 13;

Figura 13 – Aplicar negrito, itálico, sublinhado.

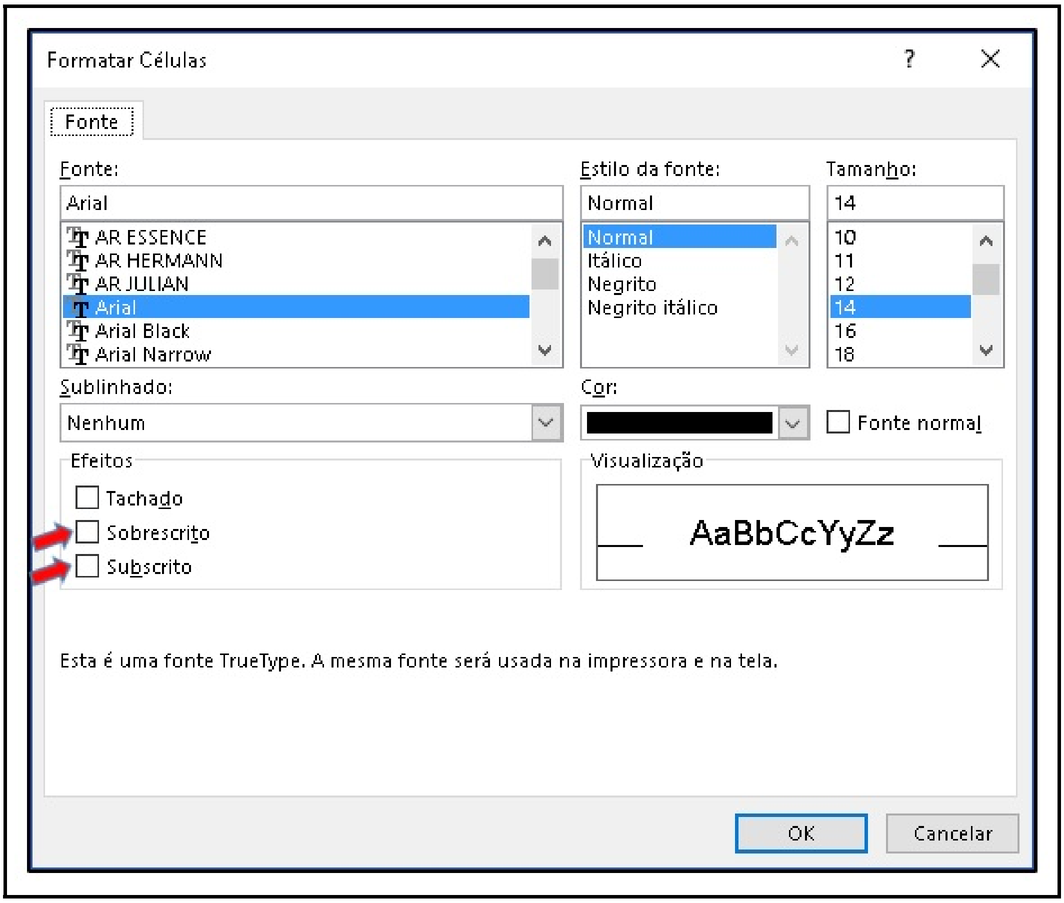


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

5. Formatar texto como subscrito ou sobrescrito.

   - Selecione o texto a ser formatado com $_{subscrito}$ ou ^{sobrescrito} na célula da planilha;
   - Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"1"**, ou ainda como outra opção, **"Ctrl"** + **"Shift"** + **"F"**, para exibir a janela **"Formatar Células"**;
   - Na janela aberta, em **"Efeitos"**, marque a caixa **"Sobrescrito"** ou **"Subscrito"**, conforme o caso, como indicado com setas vermelhas na figura 14 e clique em **"OK"**

Figura 14 – Formatar texto com subscrito ou sobrescrito.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

6. Reduzir para caber

   Quando um texto digitado é maior que a largura da célula, a parte inicial e final do texto digitado não fica visível.

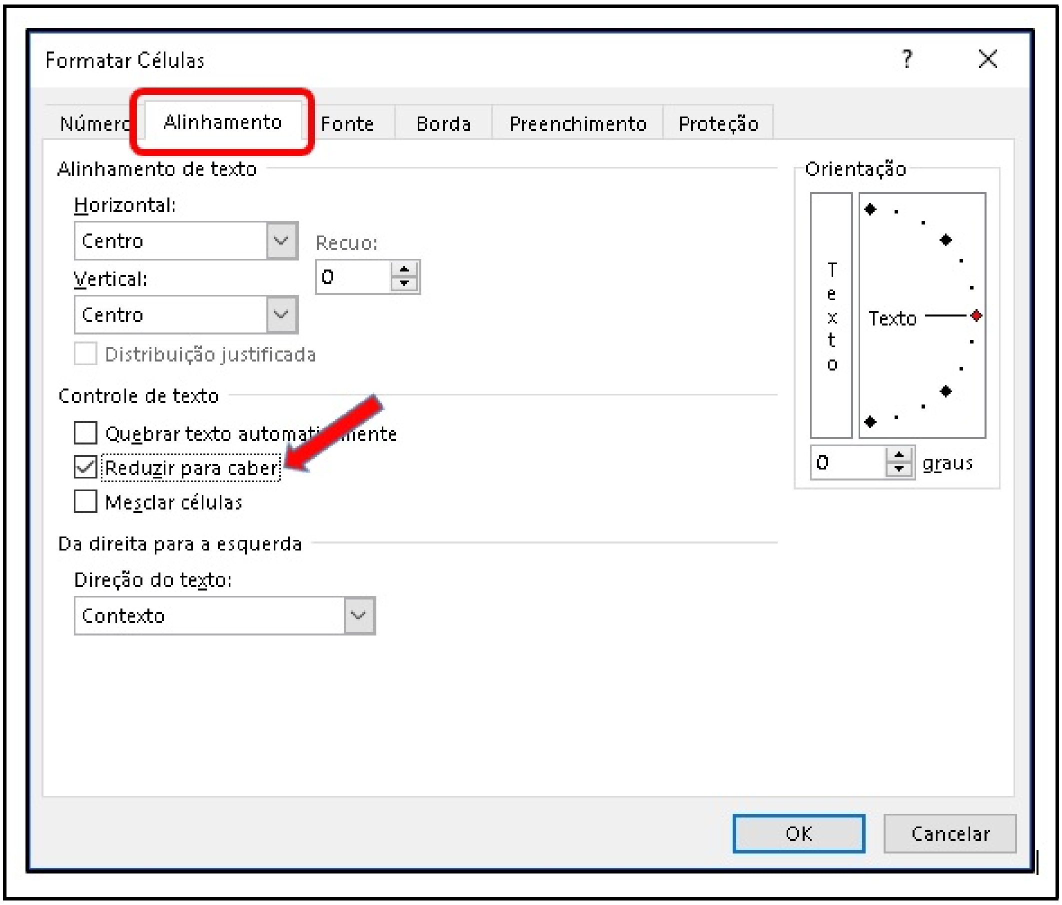
   Para resolver este problema basta configurar a célula para que ela reduza o tamanho da fonte do texto até que caiba dentro da célula.

   Para isso, faça o seguinte:

   - Clique na célula que deseja que o conteúdo seja reduzido para caber dentro da mesma, para selecioná-la;
   - Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar Células"**;
   - Na janela aberta, clique na guia **"Alinhamento"** e em **"Controle de texto"**, clique no quadradinho em branco à esquerda de **"Reduzir para**

caber" para marcá-lo e depois clique em **"OK"** conforme mostra a figura 15.

Figura 15 – Reduzir para caber.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

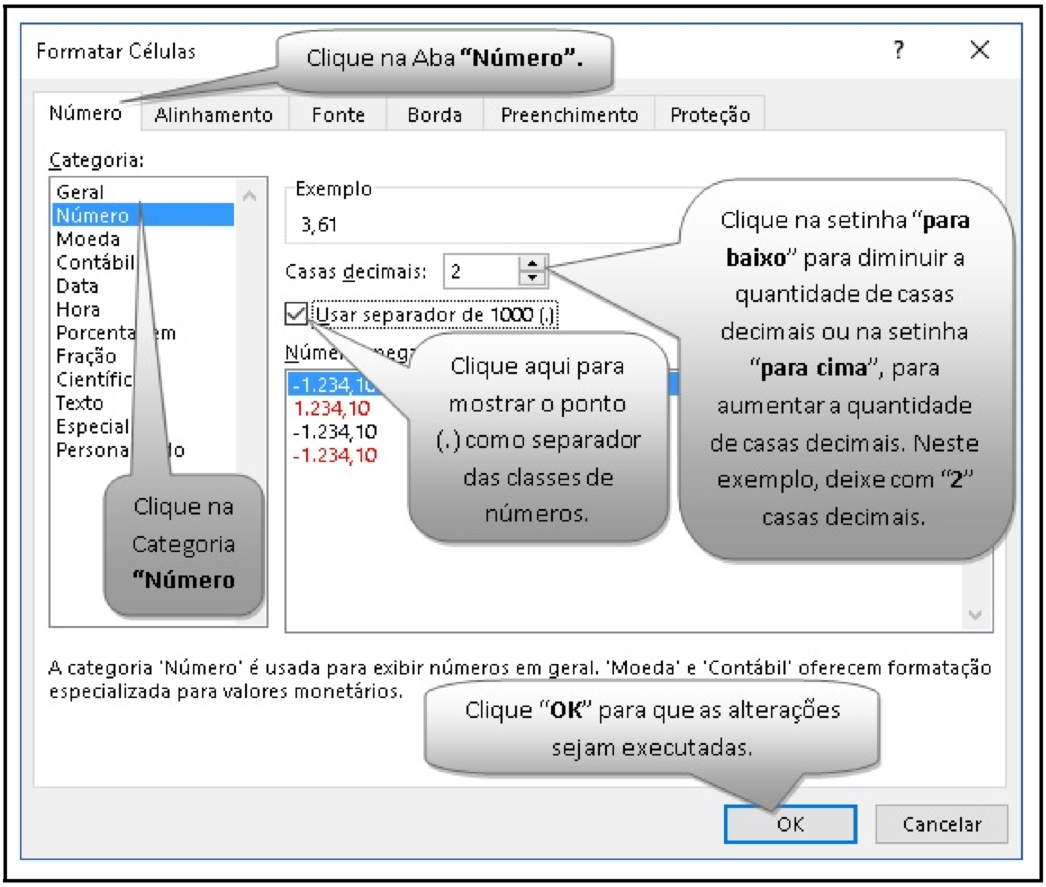
7. Formatar células para mostrar números com uma, duas, ou mais casas decimais.

   Se for necessário que uma célula mostre um número com uma, duas, três ou mais casas decimas, é necessário formatar esta célula para "número" e escolher quantas casas decimais será apresentada.

   Neste exemplo, será formatada para que a célula mostre duas casas decimais.

   Para formatar uma célula que mostre um número com duas casas decimais na planilha do Excel, siga todos os passos apresentados na figura 16

Figura 16 – Formatar número com duas casas decimais.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

2.7 Alterar a cor de preenchimento do plano de fundo das células

Como esta formatação é opcional, segue apenas uma sugestão, onde poderá ser feita de outras formas sem ser a apresentada aqui, ou até mesmo, deixar sem fazer.

Outra observação importante também é que estas formatações não interferem em nada nos cálculos realizados na planilha. É apenas para melhorar o designer da mesma.

Você pode alterar a cor do plano de fundo das células, linhas ou colunas, da seguinte forma:

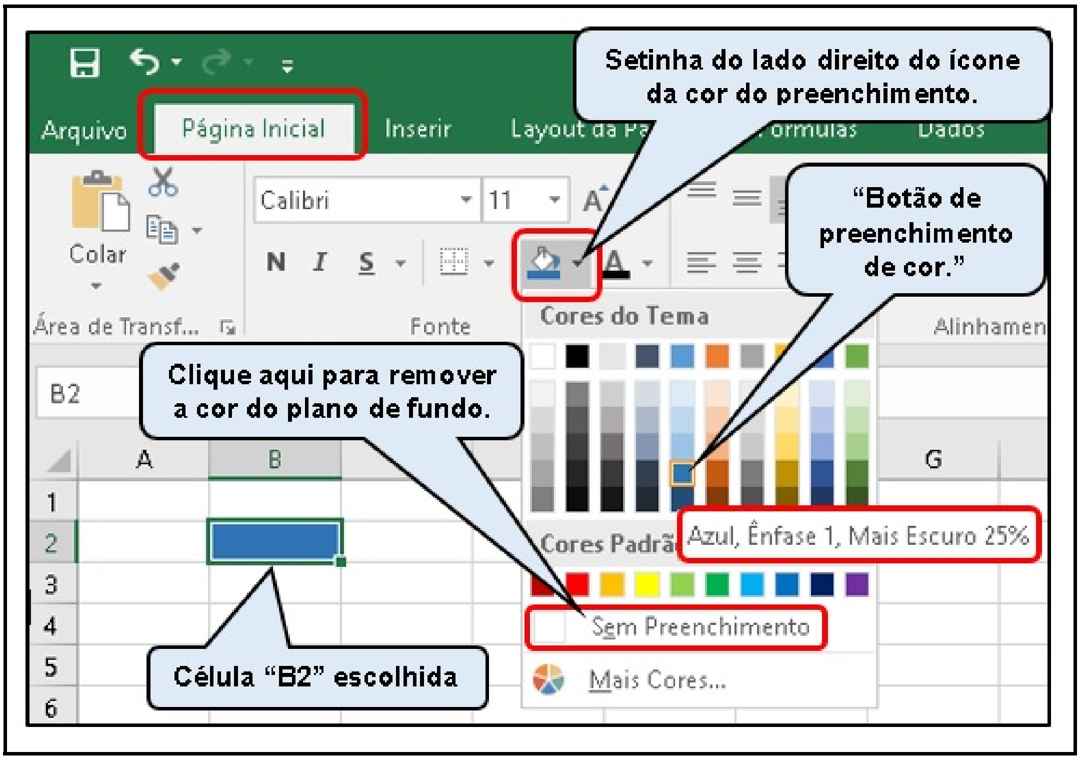
- Clique na célula ou grupo de células, linhas, colunas etc, que deseja alterar a cor do plano de fundo, para selecioná-las;

- Neste exemplo, será selecionada a célula **"B2"**;
- Clique na guia **"Página Inicial"** e no grupo **"Fonte"**, clique na setinha do lado direito do ícone da **"Cor do Preenchimento"**, para exibir a **"Janela de Cores"**;
- Na janela exibida, clique no **"Botão de Preenchimento de Cor"** da cor escolhida que, neste exemplo, será a cor **"Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%"**, como mostra a figura 17

Para remover a cor do plano de fundo, siga os passos:

- Selecione a referida célula ou células, clique na guia **"Página Inicial"** e no grupo **"Fonte"**, clique na setinha do lado direito do ícone da **"Cor do Preenchimento"**;
- Na janela aberta, clique em **"Sem Preenchimento"**, como mostra a figura 17

Figura 17 – Cor de preenchimento do plano de fundo.

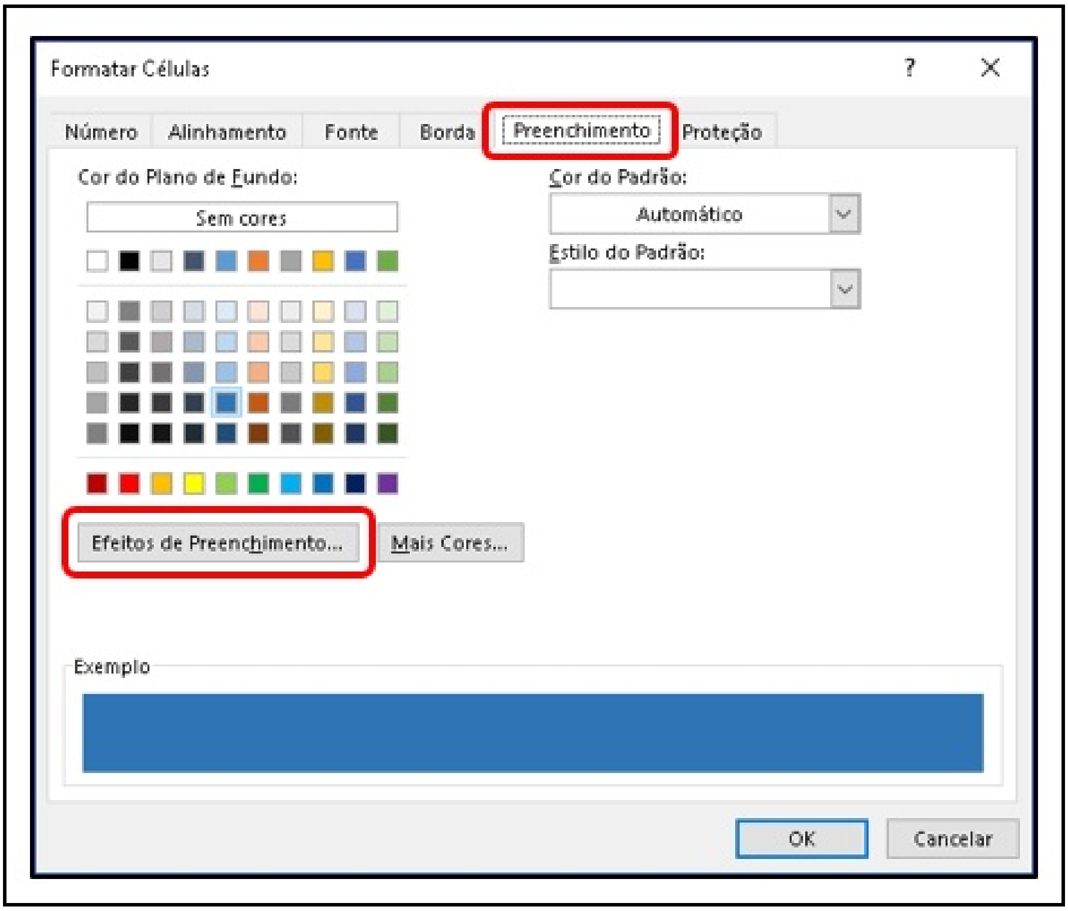


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Para alterar a cor do plano de fundo com efeitos de preenchimento com duas cores, faça o seguinte:

- Clique nas referidas células para selecioná-las;
- Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar Células"**. Esta janela também pode ser exibida com as teclas **"Ctrl"** + **"Shift"** + **"F"**;
- Em seguida, clique na guia **"Preenchimento"** e depois em **"Efeitos de Preenchimento..."** como indicado nos retângulos vermelhos, na figura 18, para exibir a referida janela;

Figura 18 – Janela formatar células com efeitos de preenchimento.



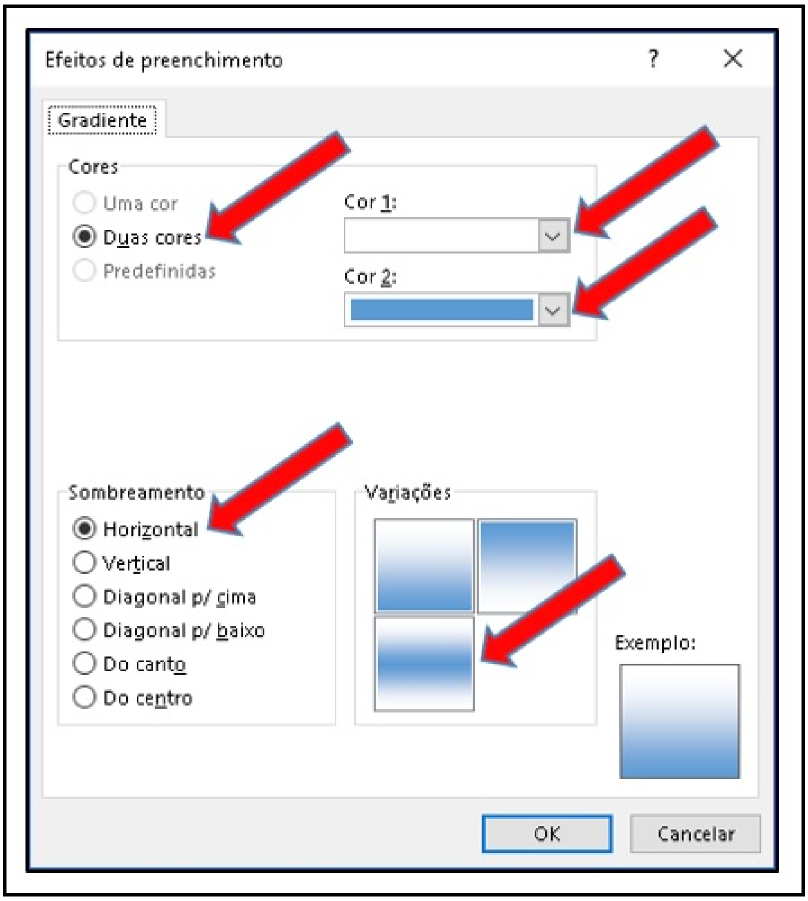
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Na janela **"Efeitos de Preenchimento"** aberta, em **"Cores"**, escolha a opção **"Duas cores"**;

- Em **"Cor 1"**, clique na setinha à direita, para escolher a primeira cor e faça a mesma coisa para a **"Cor 2"** e escolher a segunda cor;
- Em sombreamento, escolha a opção **"Horizontal"**;
- Em variações, escolha a terceira opção e clique em **"OK"**.

Todas as escolhas citadas acima, estão sinalizadas com uma seta vermelha, conforme mostra a figura 19

Figura 19 – Janela efeitos de preenchimento.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

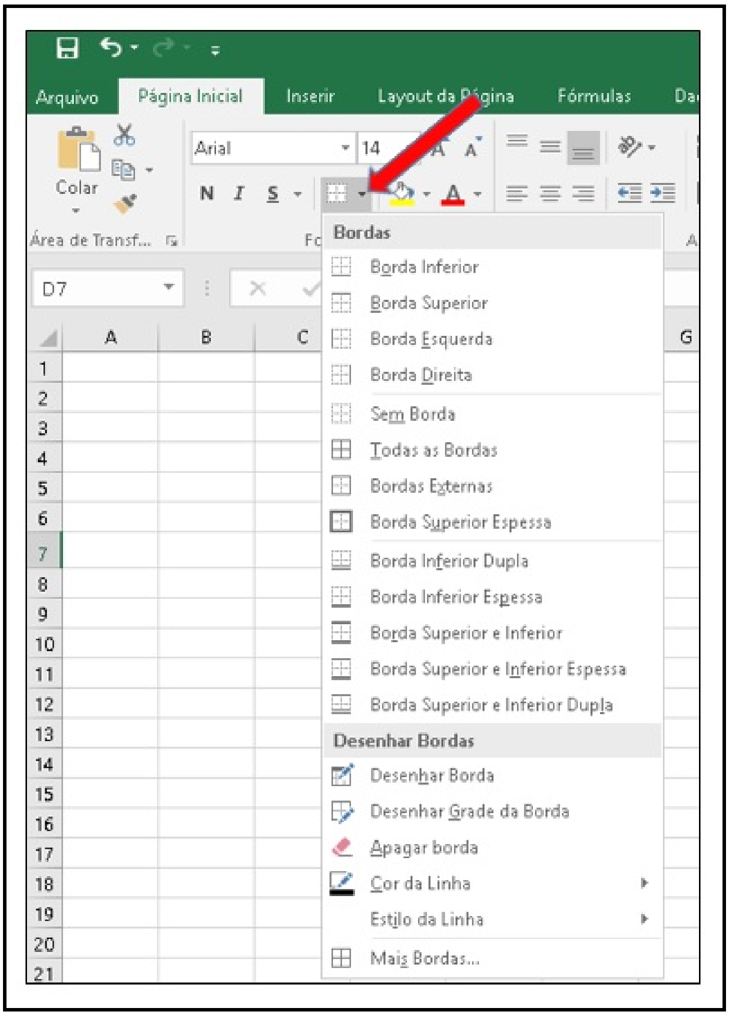
2.8 Inserir ou remover bordas de células

Você pode inserir ou remover vários tipos de bordas em volta de uma célula ou intervalo de células, que também são formatações opcionais.

Para inserir algum tipo de borda numa célula ou intervalo de células, faça o seguinte:

- Clique na célula ou intervalo de células para selecioná-las;
- Clique na guia **“Página Inicial”** e no grupo **“Fonte”**, clique na setinha do lado direito do ícone de **“Bordas”**;
- No menu suspenso que abrir, clique no tipo (estilo) de borda que desejar, conforme mostra a figura 20;

Figura 20 – Menu suspenso de bordas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Se for inserir **“Bordas Externas”** em uma célula ou intervalos de células selecionadas de forma mais rápida, basta pressionar as teclas **“Ctrl”** + **“Shift”** + **“7”**.

Para remover algum tipo de borda numa célula ou intervalo de células, faça o seguinte:

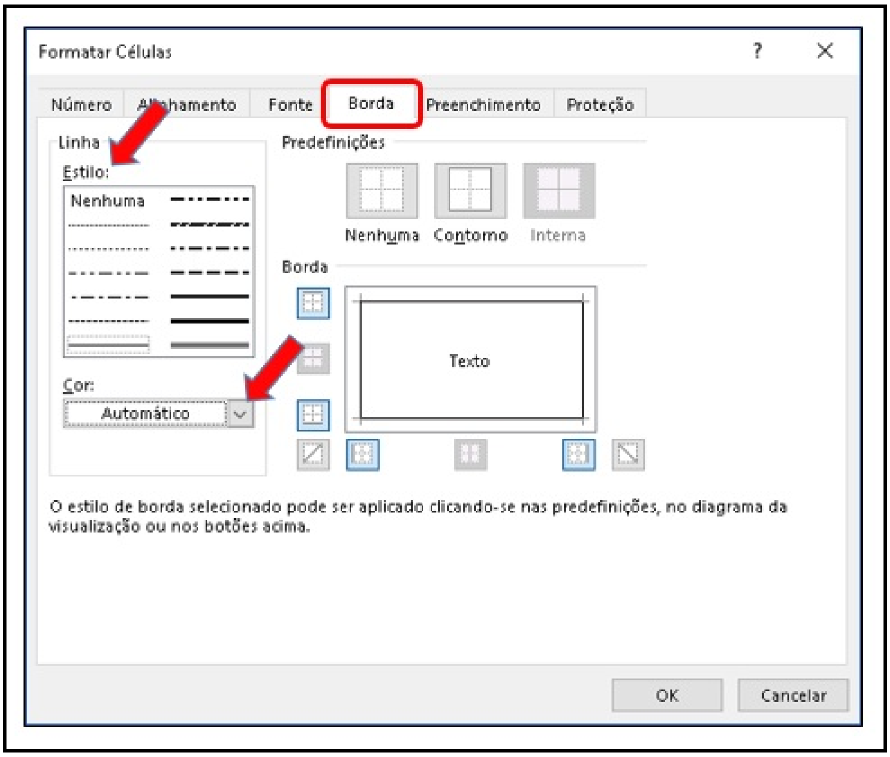
- Clique na célula ou intervalo de células para selecioná-las;
- Clique na guia **“Página Inicial”** e no grupo **“Fonte”**, clique na setinha do lado direito do ícone de **“Bordas”**;
- No menu suspenso que abrir, clique em “ Sem Borda ”.

Você pode também mudar o estilo e a cor da borda de uma célula ou intervalo de células.

Para isso, faça o seguinte:

- Selecione a célula ou intervalo de células com borda ou bordas que deseja mudar o estilo ou a cor da mesma;
- Pressione as teclas **“Ctrl”** + **“1”**, ou ainda, **“Ctrl”** + **“Shift”** + **“F”**, para exibir a janela **“Formatar células”**, conforme mostra a figura 21;
- Na janela que abrir, clique na guia **“Borda”**;
- Em **“Estilo”**, clique no estilo escolhido, conforme as opções que mostra a figura 21;
- Em **“Cor”**, clique na setinha à direita para exibir **“Cores do Tema”** e clique na cor escolhida;

Figura 21 – Estilo e cor de bordas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

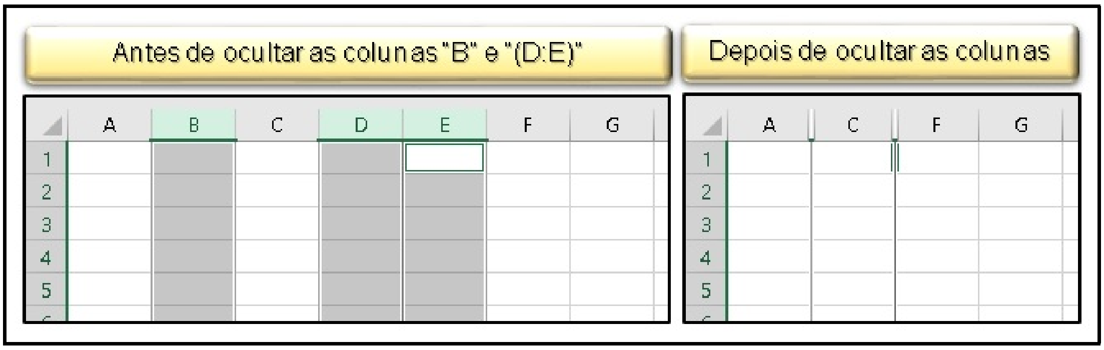
2.9 Ocultar e/ou reexibir linhas e/ou colunas

Para ocultar uma linha e/ou coluna ou intervalo de linhas e/ou colunas, faça o seguinte:

- Clique no título da linha e/ou coluna ou do intervalo de linhas e/ou colunas a serem ocultadas, para selecioná-las;
- Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"9"** para ocultarem as linhas e **"Ctrl"** + **"0"** para colunas;

No exemplo da figura 22 as colunas **"B"** e **"(D:E)"** foram ocultadas. No quadro à esquerda da referida figura, mostra as colunas selecionadas antes de serem ocultadas e no quadro à direita, mostra o resultado das colunas após serem ocultadas. O exemplo apresentado aqui foi de colunas, mas o mesmo vale também para linhas. Veja como fica o antes e o depois.

Figura 22 – Antes e depois de ocultar colunas.



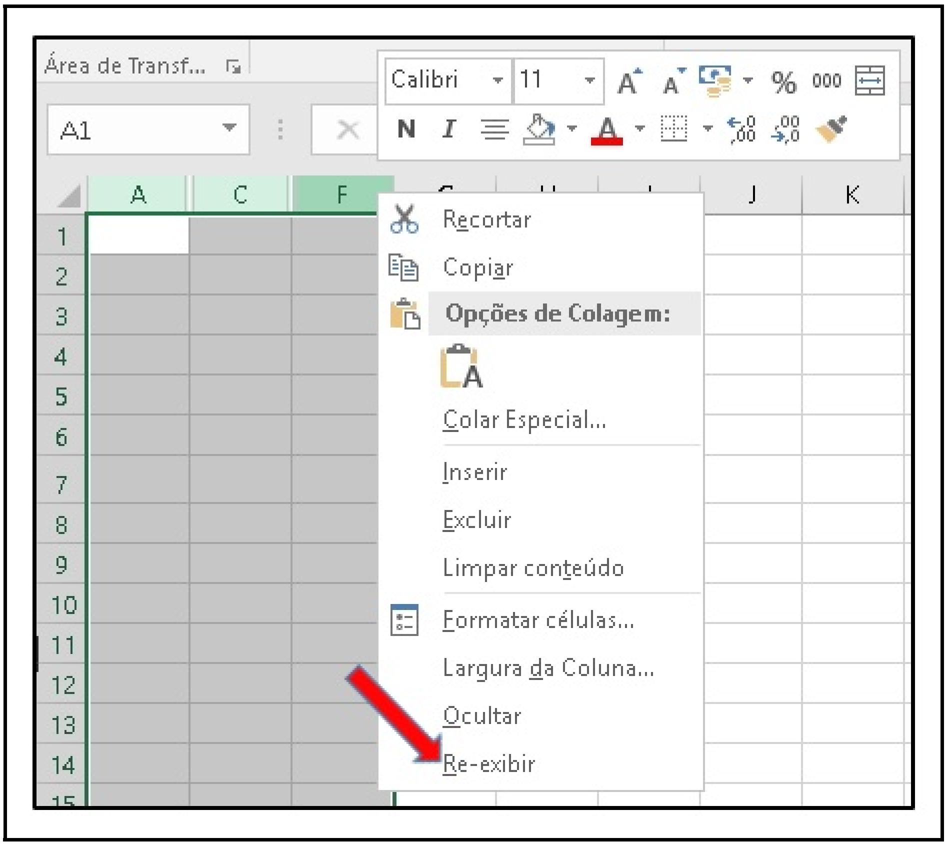
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Para reexibir uma linha e/ou coluna ou intervalo de linhas e/ou colunas que foram ocultadas, faça o seguinte:

- Clique nas linhas e/ou colunas adjacentes às linhas e/ou colunas que foram ocultadas para selecioná-las;
- Clique com o lado direito do mouse sobre qualquer uma das linhas e/ou colunas selecionadas para exibir a janela suspensa;
- Na janela que abriu, clique na opção **"Re-exibir"**, como mostra a figura 23.

Com isso, todas as linhas e/ou colunas que foram ocultadas, voltam a serem exibidas novamente.

Figura 23 – Reexibir colunas ocultadas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Você também pode ocultar de uma determinada linha até a linha final que é a linha número “1.048.576”. (ESPECIFICAÇÕES..., 2018). Para isso, faça o seguinte:

- Clique na primeira linha a ser ocultada para selecioná-la;
- Pressione as teclas **“Ctrl”** + **“Shift”** + **“Seta para baixo”** para selecionar todas as demais linhas até o final;
- Clique com o lado direito do mouse em qualquer linha selecionada e na janela que aparecer, clique em **“Ocultar”**.

O mesmo pode ser feito para ocultar de uma determinada coluna até a coluna final que é a coluna **“XFD”**, que equivale a “16.384 colunas.” (ESPECIFICAÇÕES..., 2018). Para isso, faça o seguinte:

- Clique na primeira coluna a ser ocultada para selecioná-la;

- Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"Shift"** + **"Seta para a direita"** para selecionar todas as demais colunas até o final;
- Clique com o lado direito do mouse em qualquer coluna selecionada e na janela que aparecer, clique em **"Ocultar"**.

Você ainda pode usar:

- **"Ctrl"** + **"Seta para a direita"**: vai para a coluna final da planilha;
- **"Ctrl"** + **"Seta para a esquerda"**: volta para a primeira coluna da planilha;
- **"Ctrl"** + **"Seta para baixo"**: vai para a linha final da planilha;
- **"Ctrl"** + **"Seta para cima"**: volta para a primeira linha da planilha;

2.10 Bloquear / desbloquear células e também proteger a planilha

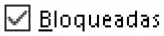
Nas células onde serão digitados os dados após a conclusão da planilha devemos desbloqueá-las e depois proteger a planilha.

A proteção das células é necessária porque se não for protegida poderá sofrer alterações do que foi digitado e se for especificamente na fórmula ou função a planilha deixa de funcionar corretamente.

Por padrão todas as células já vem bloqueadas e se proteger a planilha as mesmas não aceitarão alterações. Para que alguma célula seja editada após a proteção, antes de proteger a planilha, deve-se desbloqueá-las para poder editá-las.

Para desbloquear células, faça o seguinte:

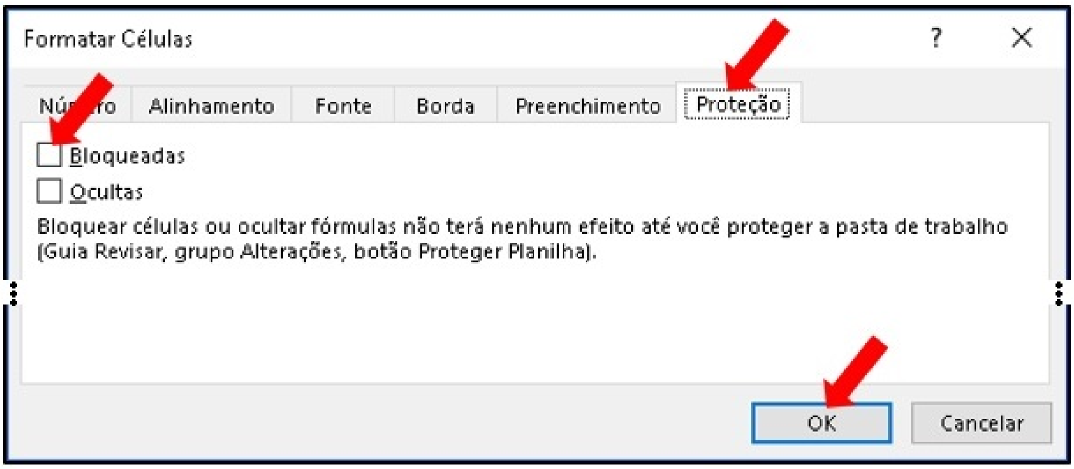
- Clique na primeira célula a ser desbloqueada, pressione a tecla **"Ctrl"** sem soltar e clique nas demais células a serem desbloqueadas, para selecioná-las;
- Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"1"**, ou ainda, **"Ctrl"** + **"Shift"** + **"F"**, para exibir a janela**"Formatar células"**;
- Na janela que abrir, clique na última aba que é **"Proteção"**;

Observe que a opção **“Bloqueadas”** já aparece com o quadrinho marcado, como segue: 

.

- Agora, clique dentro do quadradinho para desmarcar a marcação de **“Bloqueadas”** para que as células selecionadas fiquem desbloqueadas;
- Clique em **“OK”** para que as alterações sejam executadas, como mostra a figura 24, onde as setas vermelhas indicam o local que deverão ser clicados;

Figura 24 – Desbloquear células.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Observe também que após clicar no quadradinho de **“Bloqueadas”**, a marcação desaparece, ficando com o quadradinho em branco, sem nenhuma marcação.

Agora que as células selecionadas foram desbloqueadas, onde serão digitados os dados na planilha, devemos **“Proteger a Planilha”**, para que as demais células que não foram desbloqueadas fiquem bloqueadas.

Para isso, faça o seguinte:

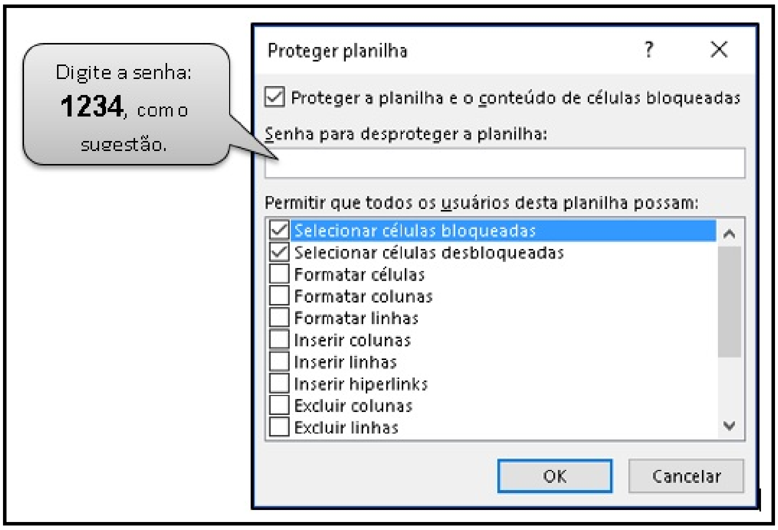
- Clique na guia ***“Revisão”*** e no grupo ***“Alterações”***, clique em **“Proteger Planilha”**, como mostra a figura 25;

Figura 25 – Faixa de Opções:**"Proteger Planilha"**.

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Na janela que for exibida, digite a senha: **1234**, como sugestão, ou outra de sua preferência no local indicado na figura 26 e clique em **"OK"** para exibir a janela **"Confirmar senha"**;

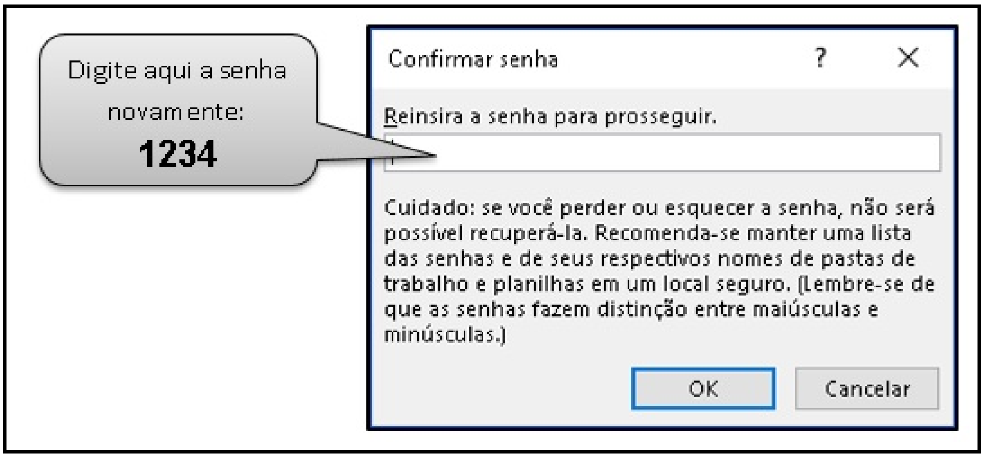
Figura 26 – Digitar a senha na janela **"Proteger planilha"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Na janela que for exibida, digite a mesma senha novamente, como mostra a figura 27 e clique em **"OK"** para concluir a proteção da planilha.

Figura 27 – Confirmar a senha na janela **“Confirmar senha”**.

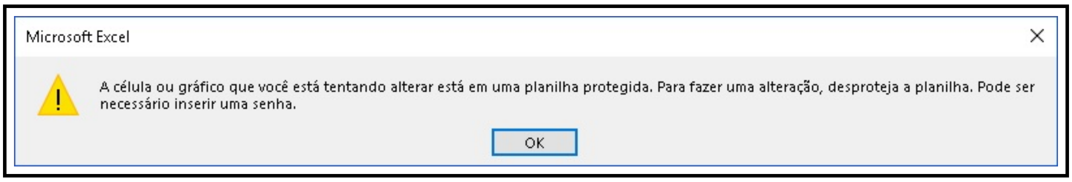


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Pronto, a planilha está protegida com todas as células bloqueadas para digitação, com exceção das células selecionadas desbloqueadas anteriormente, onde serão digitados os dados na planilha.

Se alguém tentar digitar alguma coisa nas células bloqueadas, a seguinte mensagem aparece, como mostra a figura 28. Para continuar, basta clicar em **“OK”**.

Figura 28 – Mensagem de planilha protegida.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

2.11 Renomear planilha

Para renomear uma planilha, siga as etapas:

- Clique duas vezes com o botão esquerdo do mouse na guia da planilha, em cima do nome **Planilha1** como se vê na figura seguinte: 
;
- Digite o novo nome para a planilha, que neste exemplo, será: **Novo Nome**, para identificar a planilha a ser criada;

- Após digitar o novo nome, tecle **"Enter"** no teclado para concluir a ação, como se vê na figura 

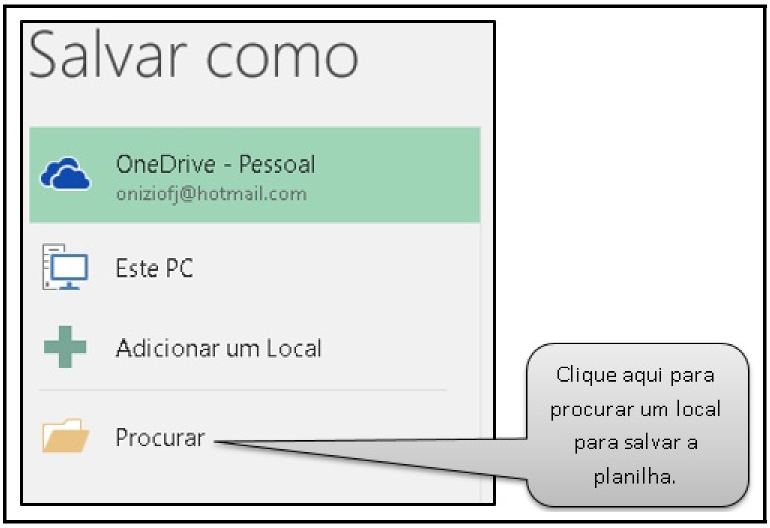
;

2.12 Salvar pasta de trabalho

Para salvar a pasta de trabalho do Excel, com planilhas, faça o seguinte:

- Clique na guia **"Arquivo"** e em seguida na opção **"Salvar"**;
- Escolha o local onde for salvar a pasta de trabalho, dentre as várias opções como mostra a figura 29. Nesta sugestão, clique em procurar para exibir a janela de **"Salvar Como"**;

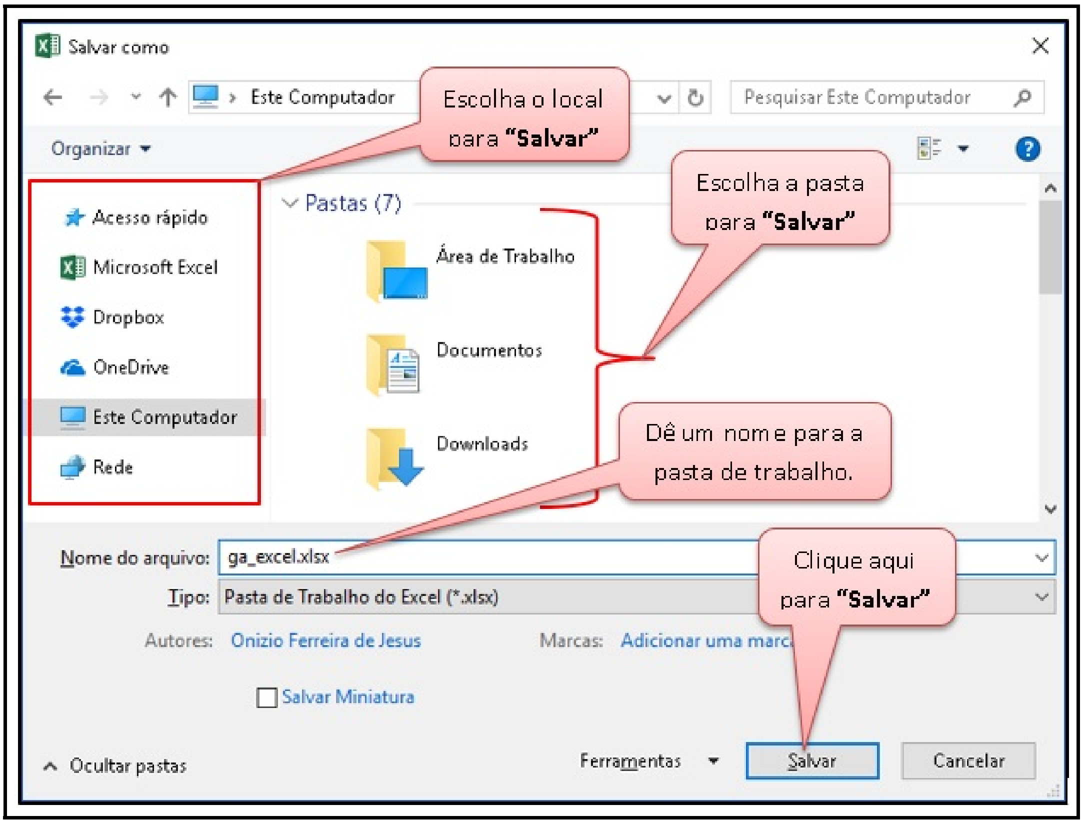
Figura 29 – Procurar um local para salvar pasta de trabalho.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Na janela que abrir, escolha um local à esquerda (Este Computador, por exemplo); uma pasta à direita (Documentos, por exemplo); dê um nome para a pasta de trabalho, como mostra a figura 30 e clique no botão **"Salvar"**;

Figura 30 – Salvar pasta de trabalho.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

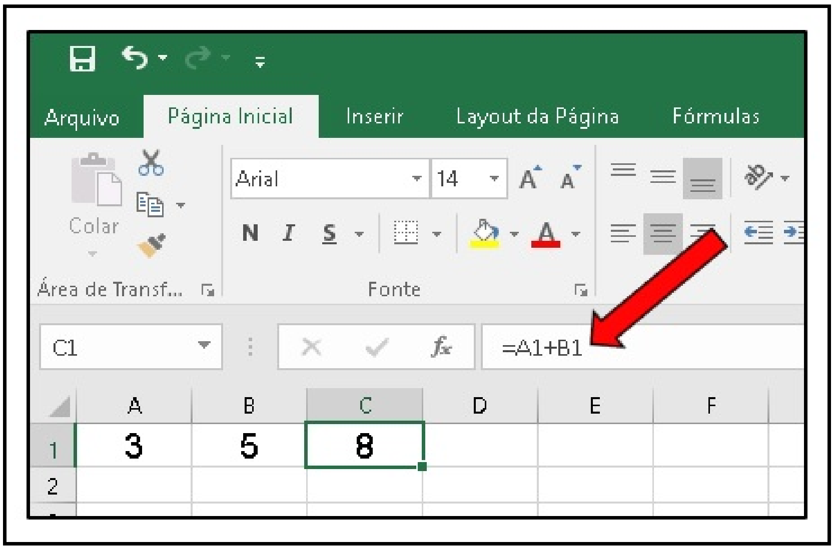
Após salvar a pasta de trabalho pela primeira vez, se fizer alguma alteração e precisar salvar novamente, não precisa repetir os passos acima. Basta clicar no ícone .

2.13 Inserir fórmulas ou funções

Como visto no capítulo 1, a célula é a interseção da linha com a coluna. As linhas são representadas por números sequenciais e as colunas por letras em ordem alfabética.

Para inserir uma fórmula ou função na planilha do Excel, inicialmente digita-se o sinal de igual (=) e, em seguida, digita-se a fórmula ou função e utiliza-se **"Operadores"**. Como exemplo, na célula **"C1"**, digite: **= A1 + B1**. Em **"A1"**, digite: **3** e em **"B1"**, digite: **5**. Assim, a célula **"C1"** mostra o resultado da soma das células **"A1"** e **"B1"**, calculado automaticamente, que neste exemplo, é **8**, como mostra a figura 31. Observe também que quando clica na célula **"C1"** a fórmula digitada aparece na **“Barra de fórmulas”**, como destacado por uma seta vermelha na referida figura.

Figura 31 – Barra de fórmulas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Os principais **“Operadores”** estão listados abaixo: (+) Soma; (-) Subtração; (*) Multiplicação; (/) Divisão; (%) Porcentagem; (ˆ) Potenciação; (=) Igual a; (>) maior que; (<) menor que;(>=) Maior ou Igual a; (<=) Menor ou Igual a; (<>) Diferente de; (&) Concatenar etc.

2.14 Concatenar

Concatenar, em resumo, é unir o conteúdo de duas ou mais células em uma única célula.

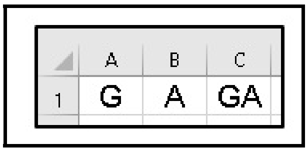
Segundo Bijora:

> “O Excel apresenta uma configuração chamada ’"concatenar"(ou "concat", nas versões mais recentes do programa) capaz de unir informações de diversas células em apenas uma. O recurso é útil para criar textos variáveis, como formulários e requerimentos. Dessa forma, ao alterar um nome ou valor na célula referenciada, a frase será atualizada automaticamente, sem a necessidade de editá-la.” (BIJORA, 2018)

Veja um exemplo simples:

- clique na célula **"A1"** e digite: **G**; clique na célula **"B1"** e digite: **A**; clique na célula **"C1"** e digite: **=A1&B1**. O resultado é **GA**, como mostra a figura 32.

Figura 32 – Concatenar GA.



	A	B	C
1	G	A	GA

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Se alterar a célula **"A1"** ou **"B1"**, automaticamente é atualizada na célula **"C1"**, sem a necessidade de digitar esta alteração na referida célula.

Em um outro exemplo, mais elaborado, será concatenado a equação reduzida da reta $y = 2x + 3$, digitando cada um dos caracteres em uma célula da linha 1, da seguinte maneira:

- Na célula **"A1"**, digite: **"y"**; Na célula **"B1"**, digite: **"="**; Na célula **"C1"**, digite: **"2"**; Na célula **"D1"**, digite: **"x"**; Na célula **"E1"**, digite: **"+"**; Na célula **"F1"**, digite: **"3"**.

Observe que cada caractere foi digitado em uma célula do Excel. Deve-se concatenar as células **"(A1:F1)"** para obter o resultado: **"y = 2x + 3"** em uma única célula. Para isso, insere-se a função para concatenar, que pode ser feito de uma das seguintes maneiras:

- **=CONCATENAR(texto1;texto2;texto3...)**

- **=texto1&texto2&texto3...**

Para inserir espaço entre uma célula e outra, se necessário, deve-se concatenar um espaço entre aspas " ", como usado no 2º e 3º itens abaixo:

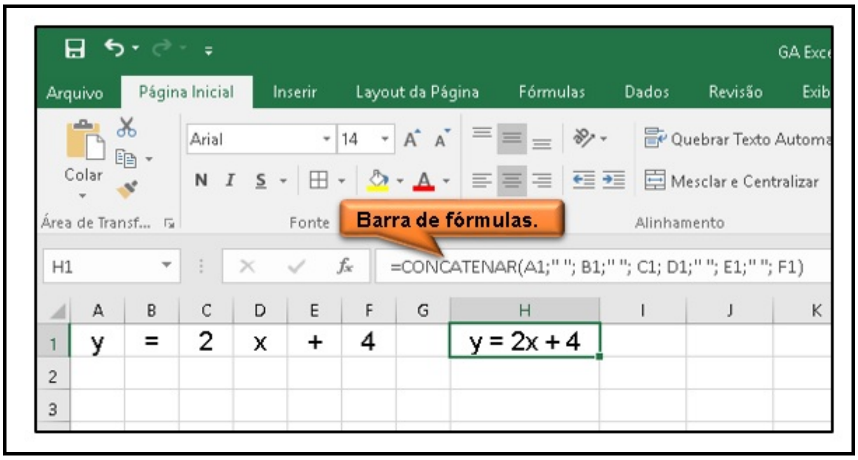
- Altere a largura das colunas **"(A1:G1)"** para **"5,00"** e da coluna **"H1"** para **"15,00"**;

- Na célula **"H1"**, digite: **=CONCATENAR(A1; " "; B1; " "; C1; D1; " "; E1 ;" "; F1)**

- O mesmo resultado acima também pode ser obtido digitando na mesma célula, a função: **=A1&" "&B1&" "&C1&D1&" "&E1&" "&F1**

Observe que quando você clica na célula **"H1"**, a função digitada aparece na **"Barra de Fórmulas"**, conforme mostra a figura 33

Figura 33 – Concatenar.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

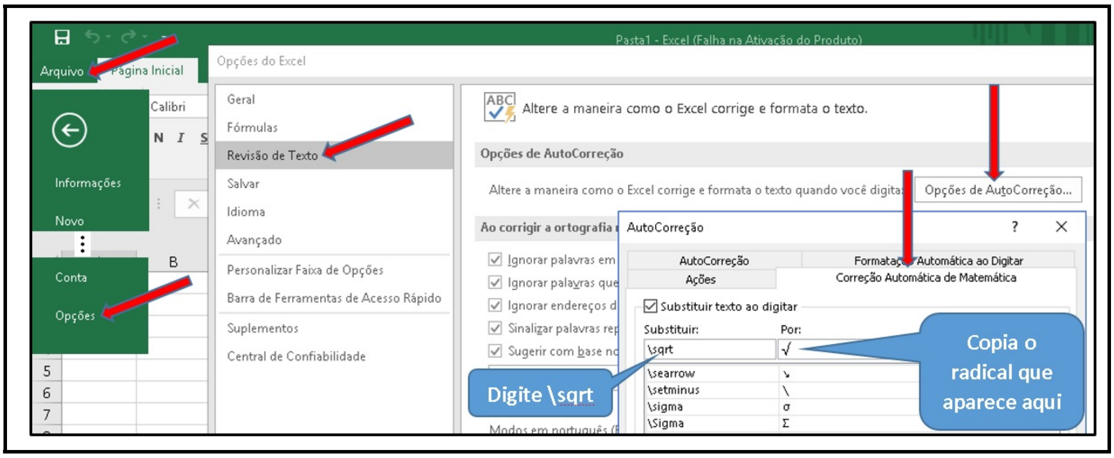
2.15 Inserir símbolos matemáticos e frações em células

Para inserir o símbolo do radical da raiz quadrada, ou outros símbolos matemáticos, numa célula do Excel, faça o seguinte:

- Clique em: **"Arquivo > Opções > Revisão de Texto > Opções de AutoCorreção > Correção Automática de Matemática"**, como mostra a seta vermelha na figura 34;

- Na janela **"AutoCorreção"**, faça como mostra os dois balões azuis na figura 34.

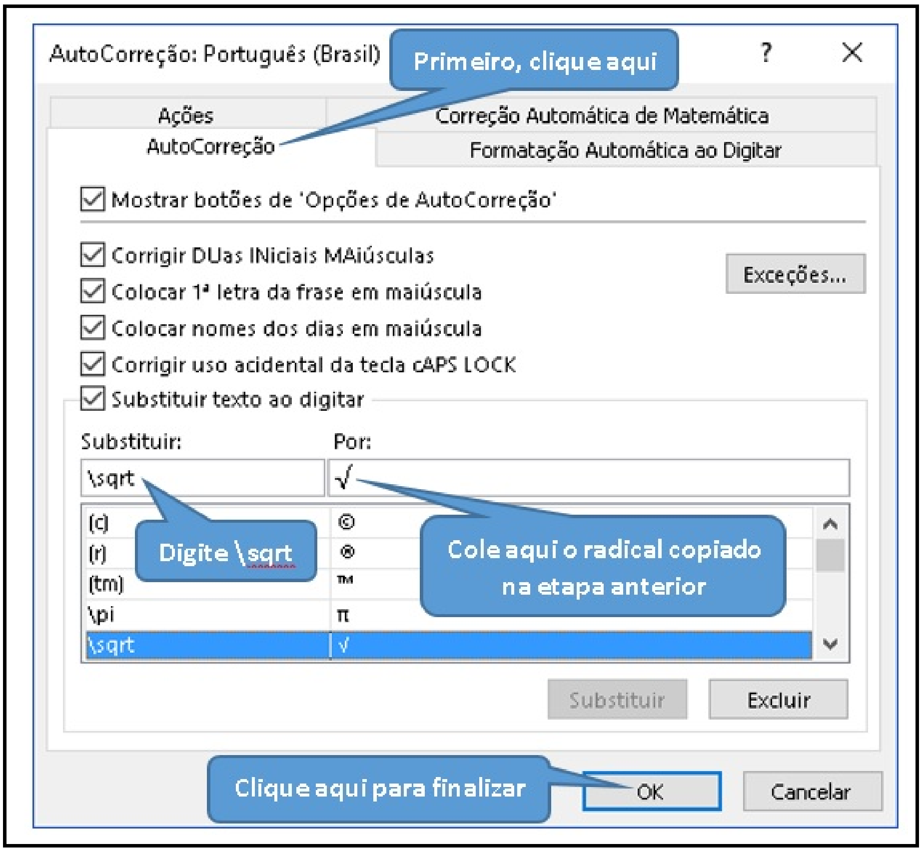
Figura 34 – Radical 1.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Ainda na janela **"AutoCorreção"** faça como indicado na figura 35 e clique em "**OK**" na próxima janela que aparecer para habilitar a digitação do radical nas células das planilhas do Excel.

Figura 35 – Radical 2.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Assim, para digitar e aparecer $\sqrt{3}$ em uma célula, siga os passos: “digite \sqrt” + “ pressione a barra de espaço” + “pressione backspace” + “digite 3” + “tecle Enter”.

Para habilitar alguns outros símbolos matemáticos que podem ser usados no Excel faça os mesmos procedimentos realizados anteriormente, substituindo apenas o texto “\sqrt” em “Correção Automática de Matemática”, na janela “AutoCorreção” pelos textos conforme a tabela 3:

Tabela 3 – Símbolos Matemáticos que podem ser habilitados no Excel.

Substituir:	Por:	Significado
\cbrt	$\sqrt[3]{}$	Raíz cúbica.
\qdrt	$\sqrt[4]{}$	Raíz quarta.
\doubleN	$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
\doubleZ	$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
\doubleQ	$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
\doubleI	$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
\doubleR	$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
\cong	$\cong$	Aproximadamente igual a.
\equiv	$\equiv$	É congruente a.
\neq	$\neq$	Diferente de.
\forall	$\forall$	Para todos, para qualquer que seja.
\in	$\in$	Pertence.
\notelement	$\notin$	Não pertence.
<=	$\leq$	Menor ou igual a.
>=	$\geq$	Maior ou igual a.
+ -	$\pm$	Mais ou menos.
\pi	π	Pi.
\alpha	α	Alfa.
\beta	β	Beta.
\theta	θ	Teta.

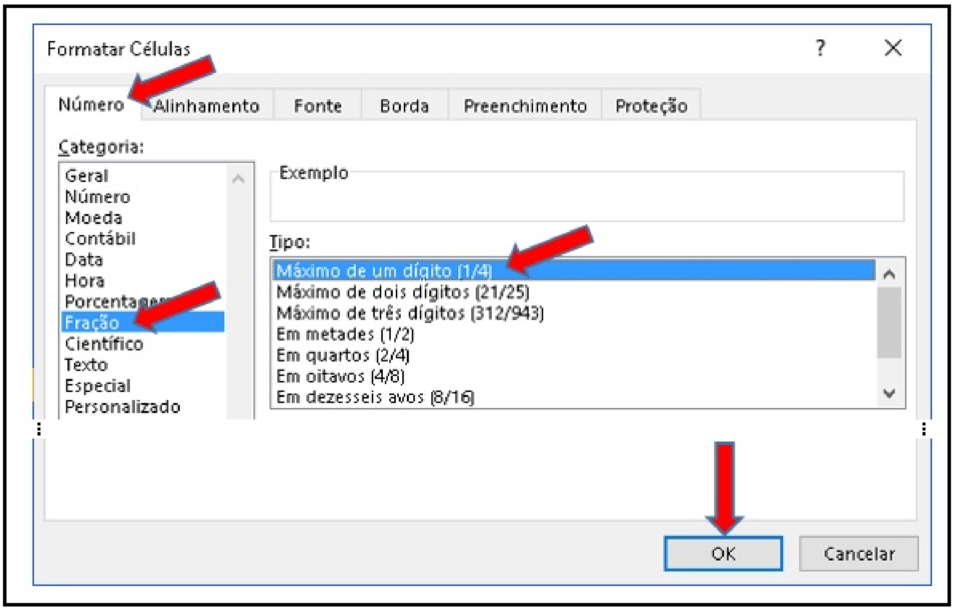
Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Por padrão, os resultados de operações no Excel são apresentados em números inteiros e decimais. Para efetuar operações com frações próprias e mistas, todas as células envolvidas nas operações têm que ser formatadas na categoria “**Fração**” e para as próprias e impróprias, na categoria “**Personalizado**” e tipo “**?/?**”.

Para fazer a formatação das células e efetuar operações com frações própria e mista, siga os passos abaixo:

- Selecione todas as células a serem formatadas para frações próprias e mistas;
- Pressione as teclas “**Ctrl**” + “**1**” para exibir a janela “**Formatar Células**”;
- Clique em “**Número**”, na categoria “**Fração**” e em tipo, escolha uma das opções apresentadas. Para finalizar, clique em “**OK**”, como mostra a figura 36.

Figura 36 – Formatação para fração própria e mista.



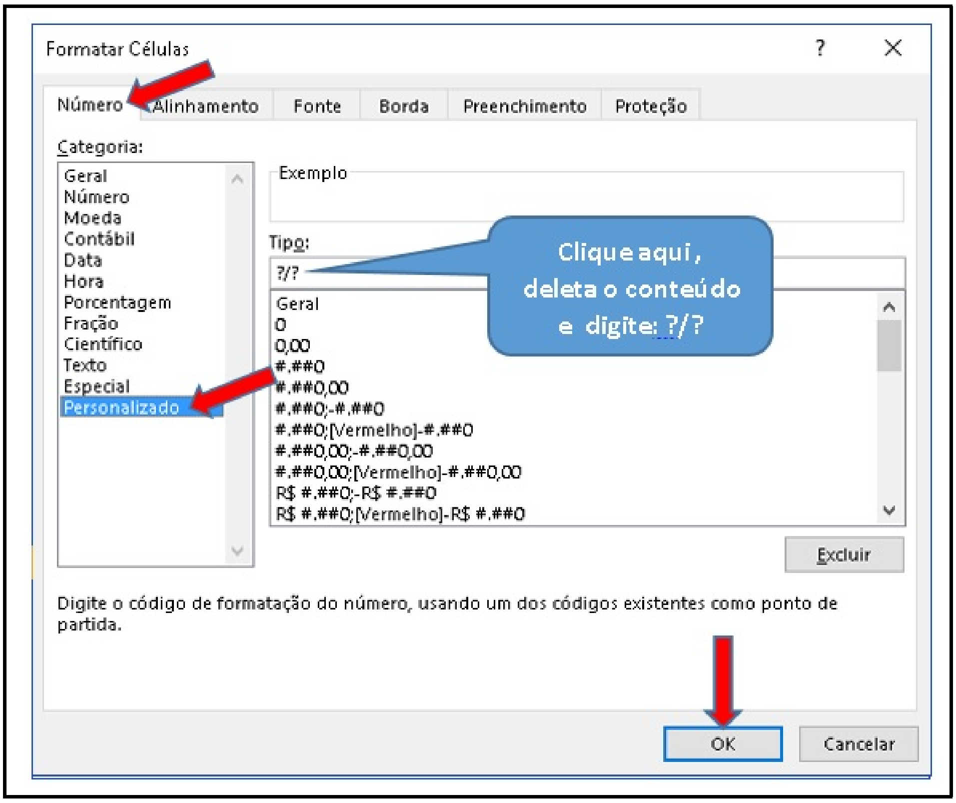
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Observe que se digitar uma fração imprópria na célula formatada da forma acima, o Excel transforma para fração mista. Como exemplo, se digitar "**7/3**" na célula, o Excel converte para "**2 1/3**".

Para fazer a formatação das células e efetuar operações com frações própria e imprópria, faça o seguinte:

- Selecione todas as células a serem formatadas para frações próprias e impróprias;
- Pressione as teclas "**Ctrl**" + "**1**" para exibir a janela "**Formatar Células**";
- Clique em "**Número**", na categoria "**Personalizado**" e em tipo, clique logo abaixo, deleta o conteúdo e digite: "**?/?**". Depois, clique em "**OK**", como mostra a figura 37.

Figura 37 – Formatação para fração própria e imprópria.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Feito esta rápida exposição de ferramentas do Excel, através do tutorial com as referidas ilustrações, será abordado agora o estudo de tópicos de geometria analítica usando as planilhas do Excel no tratamento de tais conteúdos.

3 Geometria Analítica

A **Geometria Analítica** é uma área da matemática que faz um estudo da **Geometria** por meio da utilização da **Álgebra** e analisa os resultados desta relação nos dois campos de conhecimentos. Ainda, segundo Silva:

> "Geometria analítica é o ramo da Matemática que estuda a geometria plana e espacial por meio de processos algébricos. Isso significa que toda a geometria euclidiana pode ser estudada por meio dos procedimentos estabelecidos pela geometria analítica. Dessa forma, ela cria para a geometria euclidiana novas técnicas que podem ser usadas para a demonstração de teoremas, criação e demonstração de propriedades etc." (SILVA, 2018b).

Entretanto, para bem compreendê-la, é necessário ter pelo menos uma noção de como ela surgiu, como foi sua evolução histórica e quem foram os responsáveis pela sua criação. Porém, na sua história, há algumas versões entre os autores, mas acredita-se que o pai da geometria é René Descartes (filósofo e matemático francês). Veja a seguir o que Joamir Roberto de Souza escreveu em seu livro sobre o assunto:

> "Não há consenso sobre quando se deu início ao estudo da geometria analítica. Enquanto alguns historiadores defendem que práticas que levam a esse ramo da Matemática já eram do conhecimento de gregos, egípcios e romanos, outros creditam aos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat(1601-1665) o início do estudo sistemático dessa ciência." (SOUZA, 2013, p.150)

E ainda, Joamir, ressalta as contribuições que Descartes e Fermat deram, bem como suas obras publicadas:

> "A maior contribuição de Descartes foi publicada em sua famosa obra **Discurso sobre o método**. Nela Descartes procura defender o uso da razão matemática na condução das ciências, em detrimento das práticas puramente experimentais. Essa obra era acompanhada de três apêndices, sendo que o último deles, intiulado **La geómétrie**, apresenta as ideias que fundamentaram o estudo da geometria analítica. Já Fermat, que trabalhava paralela e independentemente de Descartes, realizou estudos relacionados a equações que representavam curvas matemáticas em um plano." (SOUZA, 2013, p.150)

Já para Dante foi René Descartes que realizou pesquisas no campo da matemática. Dante afirma que:

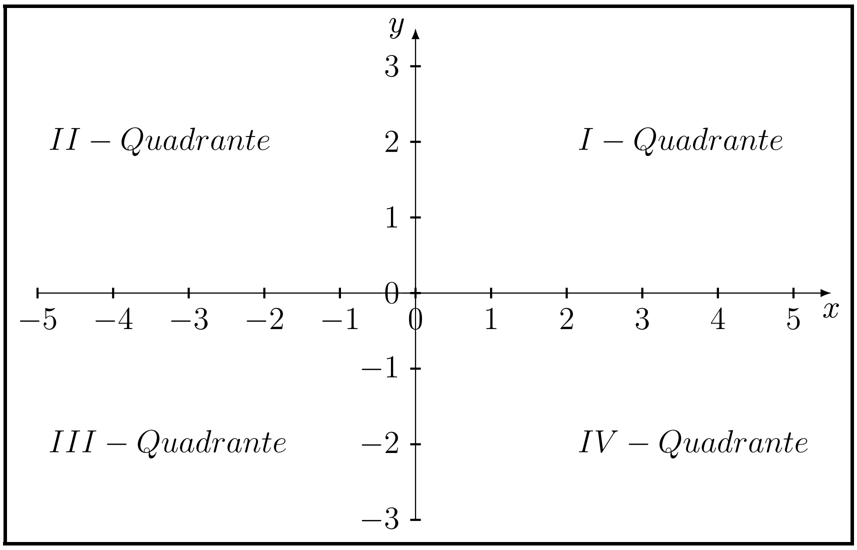
> "No campo da Matemática, Descartes escreveu *La Geométrie*, na qual introduziu as bases da Geometria analítica, como as idéias de eixos e de coordenadas que permitiram traduzir um problema geométrico para a linguagem algébrica e, reciprocamente, dar uma interpretação geométrica a determinadas equações." (DANTE, 2008, p.395)

Desse modo, para entender melhor a geometria analítica é necessário compreender a sua base de eixos e de coordenadas introduzido por Descartes. Esses eixos e coordenadas são estudados no plano cartesiano, como será visto a seguir.

3.1 Plano cartesiano

O plano cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares que pertencem a um plano em comum: um eixo na horizontal, chamado de ***eixo x*** ou eixo das abscissas e outro na vertical, chamado de ***eixo y*** ou eixo das ordenadas. Esse sistema de coordenadas foi criado por Descartes com o objetivo de localizar pontos. Cada ponto $\boldsymbol{P}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ no plano cartesiano, com $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$, é representado por um par ordenado entre parênteses, onde o primeiro número se refere ao valor no eixo $\boldsymbol{x}$ (abscissa) e o segundo número se refere ao valor no eixo $\boldsymbol{y}$ (ordenada). Esses dois eixos coordenados se cruzam num ponto chamado de origem (0, 0) e dividem o plano cartesiano em 4 regiões chamadas quadrantes: I Quadrante, com sinais $(+,+)$; II Quadrante, com sinais $(-,+)$; III Quadrante, com sinais $(-,-)$ e IV Quadrante, com sinais $(+,-)$, conforme mostra a figura 38.

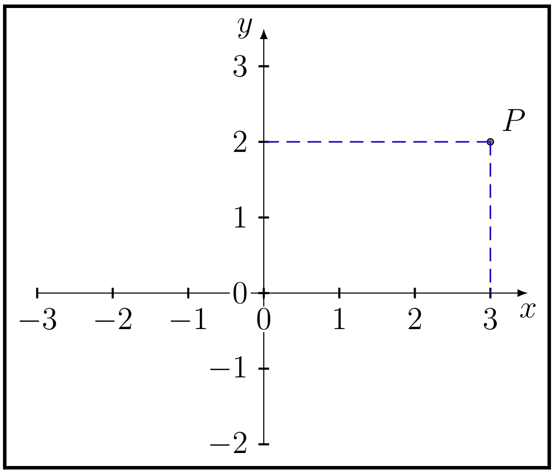
Figura 38 – Representação do plano cartesiano e seus quadrantes.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Abaixo está representado o ponto $\boldsymbol{P(3,\ 2)}$ no plano cartesiano, onde 3 é o valor de $\boldsymbol{x}$ e o 2 é o valor de $\boldsymbol{y}$.

Figura 39 – Representação de um ponto no plano cartesiano.

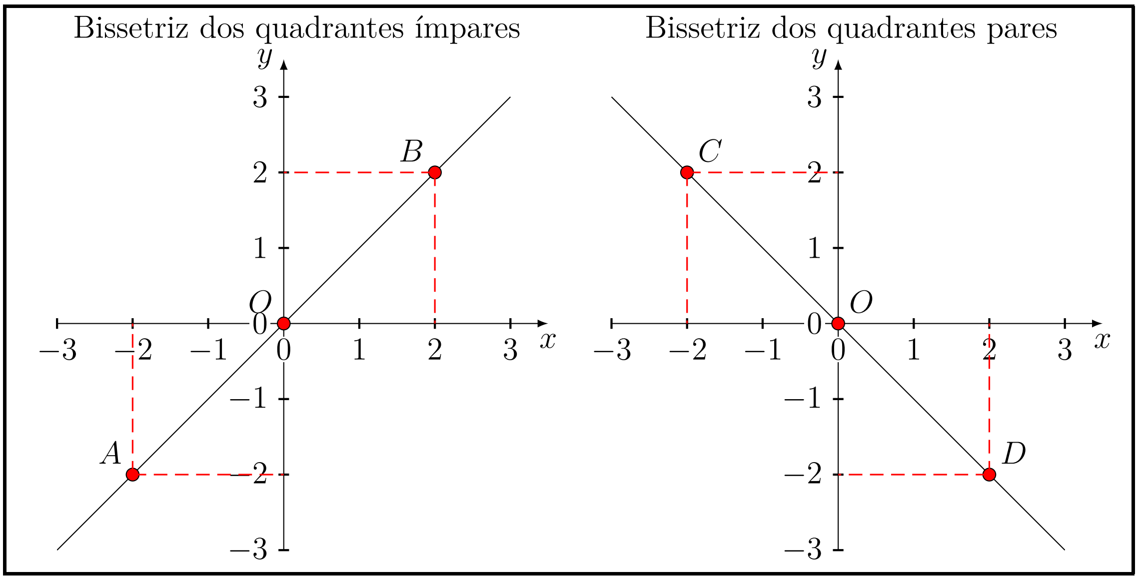


Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

No plano cartesiano quando traçamos uma reta por 2 pontos, onde as ordenadas são iguais as abscissas, ou seja, $x = y$, ou quando possuem ordenadas de sinais opostos às abscissas, ou seja, $x = -y$, estas retas formam bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente, como mostra a figura 40.

Segundo (LEONARDO, 2013), "*No plano cartesiano, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**. Já a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares***".

Figura 40 – Bissetrizes.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

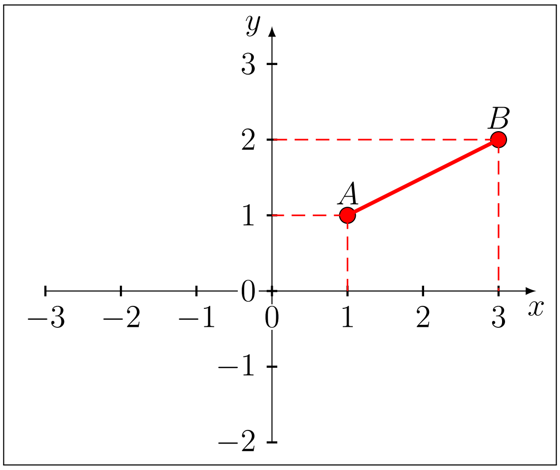
Sobre algumas das utilizações do plano cartesiano na prática, segundo Silva, segue:

> "O Plano Cartesiano é muito utilizado na construção de gráficos de funções, onde os valores relacionados à x constituem o domínio e os valores de y, a imagem da função. A criação do Sistema de Coordenadas Cartesianas é considerada uma ferramenta muito importante na Matemática, facilitando a observação do comportamento de funções em alguns pontos considerados críticos.
>
> Podemos associar o Plano Cartesiano com a latitude e a longitude, temas relacionados aos estudos geográficos e à criação do atual sistema de posicionamento, o GPS. O Sistema de Posicionamento Global permite que saibamos nossa localização exata na terra, desde que tenhamos em mão um receptor de sinais GPS, informando a latitude, a longitude e a altitude com o auxilio de satélites em órbita da Terra. Um exemplo de utilização do GPS são os aviões, que para não se colidirem são monitorados e informados em qual rota devem seguir viagem." (SILVA, 2018d).

Seja A um ponto inicial sobre uma reta r e B um ponto final contido na mesma reta e não coincidente com A. A parte da reta que está entre os pontos A e B é chamada de segmento de reta de extremidades A e B, representado por $\overline{AB}$.

Como exemplo será representado no plano cartesiano da figura 41 um segmento de reta $\overline{AB}$, sendo o ponto inicial $\boldsymbol{A(1,\ 1)}$ e o ponto final $\boldsymbol{B(3,\ 2)}$.

Figura 41 – Segmento de reta $\overline{AB}$.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

No que segue serão apresentados alguns conceitos básicos de geometria analítica, os quais serão abordados posteriormente, com o auxílio de planilhas do Excel.

3.2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por $d_{\overline{AB}}$ ou d(A, B), é a medida do comprimento do segmento de reta de extremidades A e B.

3.2.1 Distância entre dois pontos na reta numérica.

Na reta numérica, seja A o ponto inicial e B o ponto final, sua distância será o módulo do ponto final menos o ponto inicial, ou seja,

$$\boxed{d_{\overline{AB}} = |B - A|}$$

Dada a reta numérica x abaixo e sendo $A = 2$ e $B = 8$, a distância do ponto A ao ponto B é dada por:

Figura 42 – Reta numérica.

Fonte: Elaborado pelo autor no Overleaf.

$$d_{\overline{AB}} = |B - A|$$
$$d_{\overline{AB}} = |8 - 2|$$
$$d_{\overline{AB}} = |6|$$
$$\boxed{d_{\overline{AB}} = 6\ u.m.}$$

3.2.1.1 Distância entre dois pontos na reta numérica, usando o **"Excel 2016"**

.

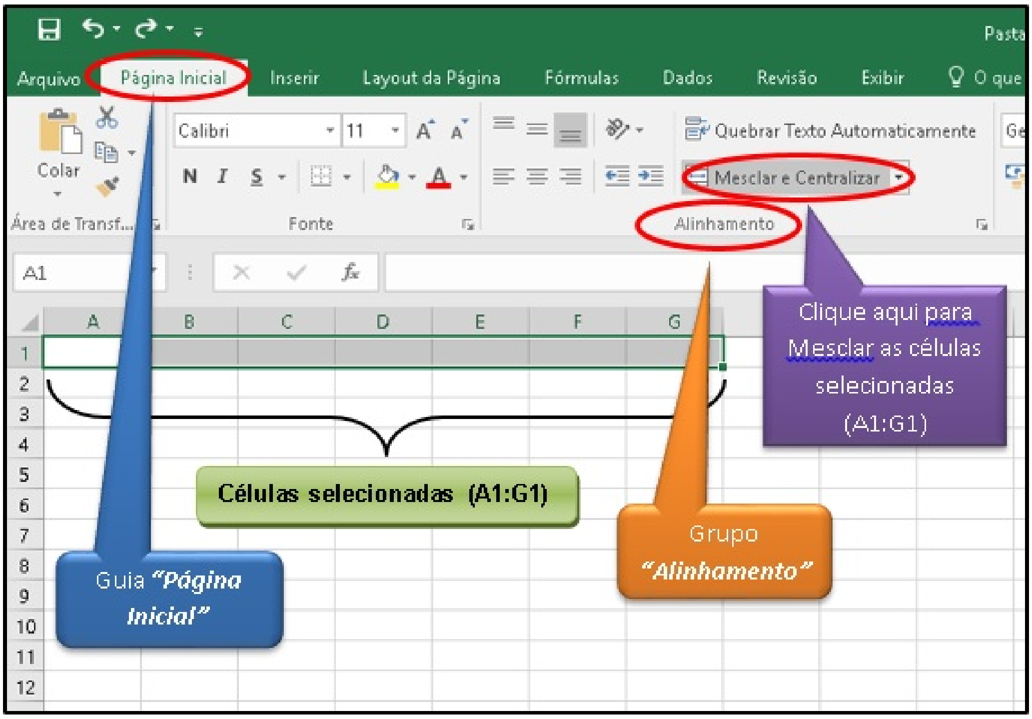
Para abrir o Excel 2016 proceda da mesma forma como mostrado na introdução ao Excel, no capítulo 2. De agora em diante, sempre que for fazer algo no aplicativo, considera-se que esteja na tela de abertura, como mostrado na figura 3.

Com o Excel aberto, inicia-se a digitação dos dados na planilha, que pode ser feito de várias formas, principalmente no que se refere à formatação da planilha, pois, cada um pode dar o seu "toque" pessoal. O que será apresentado aqui é apenas uma sugestão dentre as várias possíveis.

Assim, para calcular a distância entre dois pontos na reta numérica usando o Excel, considere dois pontos quaisquer ***A*** e ***B***, contidos nela e faça os seguintes passos:

- Selecione as teclas **(A1:G1)**, que é um intervalo de células em linha de **A1** até **G1** e mescle-as, clicando na guia ***"Página Inicial"***, no grupo ***"Alinhamento"*** e em ***"Mesclar e Centralizar"*** como mostrado na figura 43. Lembre-se que na introdução ao Excel vimos que a letra se refere à coluna e o número se refere à linha. Assim, por exemplo, na célula **"A1"**, **A** indica a coluna e **1** a linha.

Figura 43 – Selecionar e mesclar no Excel.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Faça os mesmos procedimentos acima para selecionar e mesclar as células:
  - **(B2:C2)**, intervalo de células em linha de **B2** até **C2**;
  - **(E2:F2)**, intervalo de células em linha de **E2** até **F2**;
  - **(E3:E4)**, intervalo de células em coluna de **E3** até **E4**;
  - **(F3:F4)**, intervalo de células em coluna de **F3** até **F4**.

- Nas células mescladas **(A1:G1)**, digite: "Distância entre dois pontos na reta numérica.";
- Nas células mescladas **(B2:C2)**, digite: "Pontos";
- Nas células mescladas**(E2:F2)**, digite: "Distância entre A e B.";
- Nas células mescladas **(E3:E4)**, digite: "d(A,B) ="
- Na célula **B3**, digite: "A", em referência ao primeiro ponto;
- Na célula **C3**, digite: "B", em referência ao segundo ponto;

Veja na figura 44 como ficou até agora a planilha, após executar os passos acima. Note que ainda não foi feito nenhuma formatação.

Figura 44 – Distância entre dois pontos na reta numérica, antes da fórmula e formatação.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Distância entre dois pontos na reta numérica							
2		Pontos			Distância entre A e B			
3		A	B					
4					d(A,B) =			
5								

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Para calcular a distância entre dois pontos quaisquer na reta numérica, considere, como exemplo, o ponto $\boldsymbol{A} = -2$ e o ponto $\boldsymbol{B} = 7$ e siga os passos abaixo:

- Na célula **B4**, digite o valor do ponto $\boldsymbol{A}$, que no exemplo acima é "-2";
- Na célula **C4**, digite o valor do ponto $\boldsymbol{B}$, que no exemplo acima é "7";
- Nas células mescladas **(F3:F4)**, digite a função: **"=ABS(C4-B4)"**.

  Observação: Toda função ou fórmula no Excel, começa com o sinal de igual"=" e **=ABS** singnifica módulo de um número; Já o que vem entre parênteses**(C4-B4)** é a fórmula para efetuar uma subtração, que neste exemplo, **C4** é o ponto final, que é "7" e **B4** é o ponto inicial, que é "-2".

Observe como fica a figura 45, após executar os passos acima:

Figura 45 – Distância entre dois pontos na reta numérica, depois da fórmula e antes de qualquer formatação.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Distância entre dois pontos na reta numérica							
2		Pontos			Distância entre A e B			
3		A	B					
4		-2	7		d(A,B) =	9		
5								

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

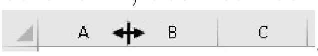
Note que a função "=ABS(C4-B4)" já está funcionando. Nas células **B4** e **C4**, poderão ser digitados quaisquer valores numéricos para os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, respectivamente, que o Excel calcula o valor da função inserida, ou seja, no nosso exemplo, a distância entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Confira também que nas células mescladas **(F3:F4)** não aparece a função digitada, e sim, o resultado do cálculo efetuado pela função. Quando se altera os valores dos pontos, automaticamente o Excel efetua o novo cálculo e mostra o resultado nas células mescladas **(F3:F4)**.

Agora, para melhorar a aparência da planilha, pode-se fazer algumas alterações, como alterar a largura das colunas e das linhas, fazer o devido alinhamento (centralizar, alinhar à direita, alinhar à esquerda, justificar), alterar o tamanho e o tipo da fonte, alterar a cor do fundo e da fonte, colocar bordas e alterar a espessura da linha da borda, ocultar colunas e linhas vazias etc. Como são inúmeras as possibilidades de formatação, lembre-se do fato também em que a execução de um comando, às vezes, tem duas, três ou mais formas diferentes. Assim, será apresentado aqui apenas uma sugestão.

Para uma sugestão de foramatação, siga os passos:

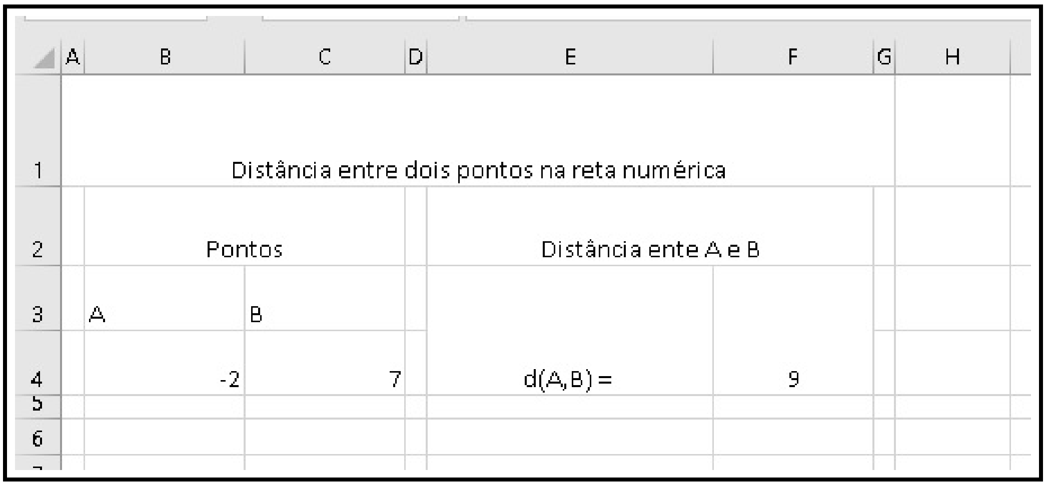
1. **Alterar a largura das colunas e das linhas.**

   Para alterar a largura da coluna e a altura da linha você pode usar a faixa de opções, arrastar o mousse, usar o clique direito do mouse ou usar o "AutoAjuste", como mostrado na seção 2.4. Neste exemplo, para alterar a largura da coluna **A**, faça o seguinte:

   - Leve o ponteiro do mouse até o limite do lado direito do título da coluna **A**, até ficar com a aparência de uma cruz, como mostra a seguir 
, para diminuir a largura da coluna **A**;
   - Quando o ponteiro do mouse virar uma cruz, clique no lado esquerdo do mouse, segure e arraste para a esquerda para diminuir a largura da coluna, até aparecer o valor 1,00 logo acima como mostra a seguir 
;
   - Repita os mesmos passos anteriores para diminuir a largura das colunas **D** e **G** para 1,00 e para aumentar a largura das colunas **B**, **C** e **F** para 12,00 e da coluna **E** para 22,00.
   - Agora, aumente a altura da linha **1** para 46,50, da linha **2** para 33,00, das linhas **3** e **4** para 27,00 e da linha **5**, diminua para 9,75.

A figura 46, mostra o formato da planilha com as alterações feitas até o momento.

Figura 46 – Distância entre dois pontos na reta após alterar linhas e colunas.



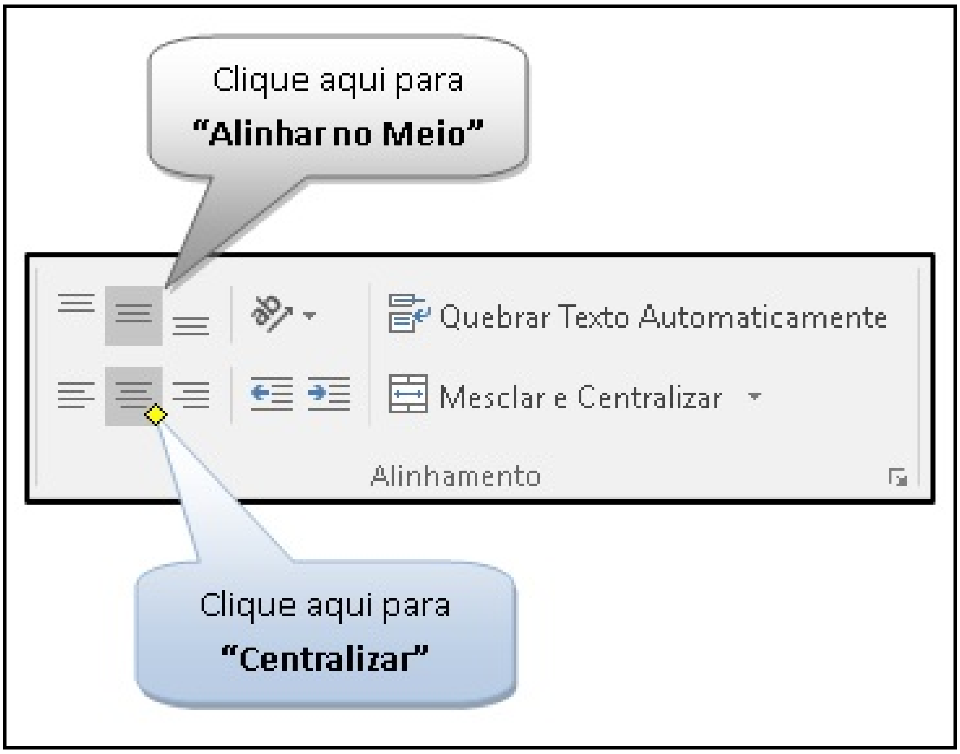
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

2. **Alinhamento (alinhar no meio, centralizar, alinhar à direita, alinhar à esquerda)**.

   Para melhorar o visual da planilha, pode-se ainda fazer os devidos alinhamentos, como mostrado no tutorial do Excel na seção 2.5, como **"Alinhar no Meio"**, **"Centalizar"**, **"Alinhar à Direita"**, **"Alinhar à Esquerda"**, seguindo os passos:

   - Segure a tecla **"Ctrl"** e clique nas células mescladas **(A1:G1), (B2:C2) e (E2:F2)**, para selecioná-las e selecione também as células **(B3:C4)**. Para isso, ainda segurando a tecla **"Ctrl"**, clique na célula **B3** com o esquerdo do mouse, segure e arraste até a célula **C4**;
   - Na guia ***"Início"***, no grupo ***"Alinhamento"***, clique em **"Alinhar no Meio"**, na parte superior e em **"Centralizar"**, na parte inferior, como mostra na figura 47;

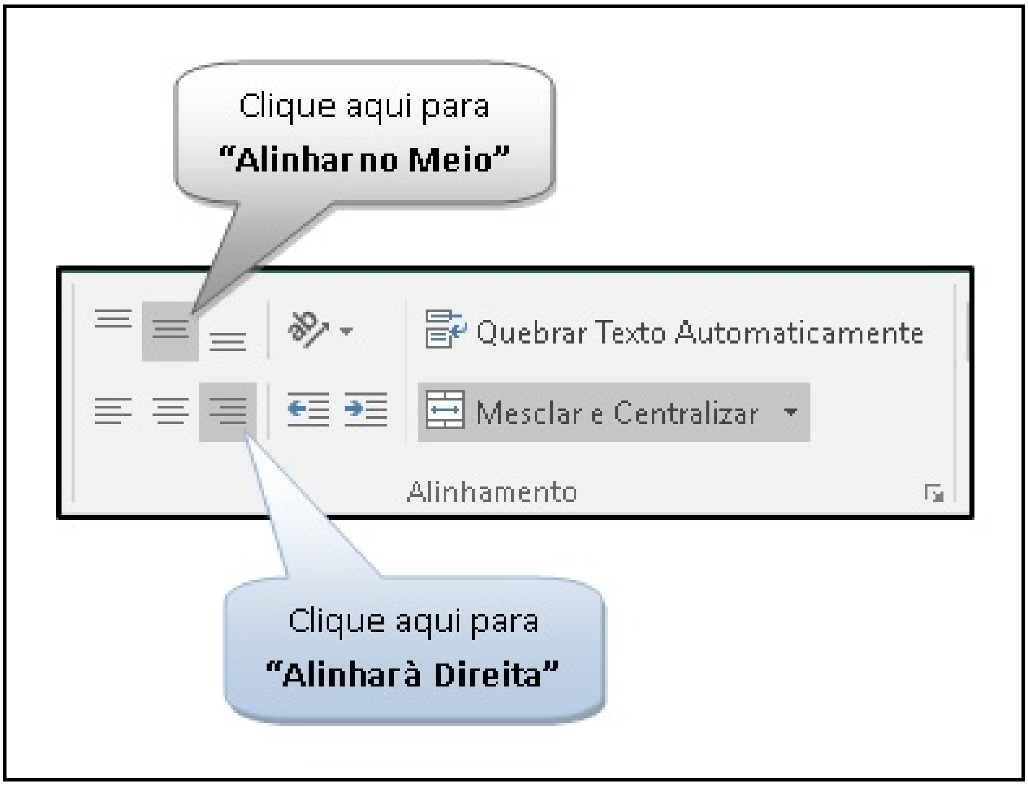
Figura 47 – **“Alinhar no Meio”** e **“Centralizar”**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Depois clique na célula mesclada **(E3:E4)** para selecioná-la;
- Na guia ***“Início”***, no grupo ***“Alinhamento”***, clique em **“Alinhar no Meio”**, na parte superior e em **“Alinhar à Direita”**, na parte inferior, como mostra na figura 48;

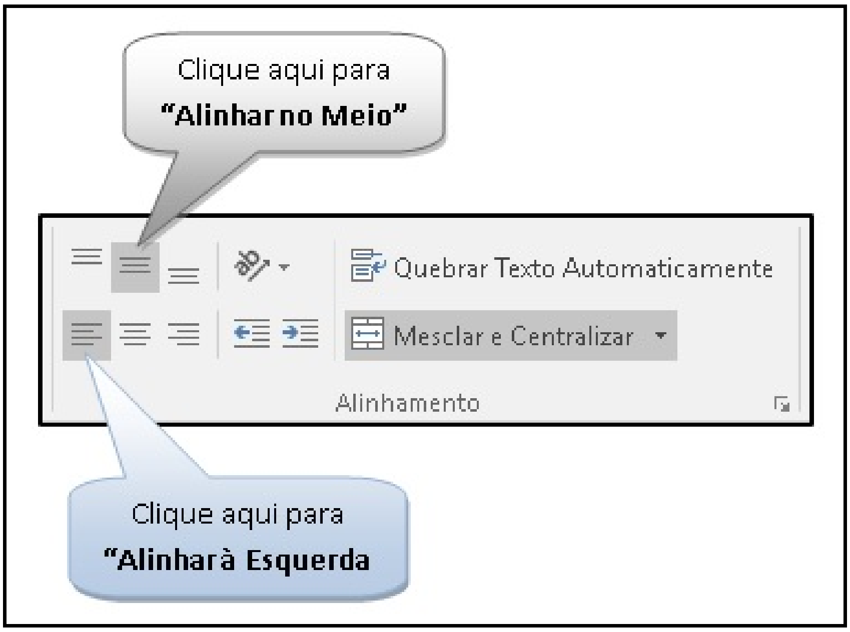
Figura 48 – **"Alinhar no Meio"** e **"Alinhar à Direita"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Em seguida, clique na célula mesclada **(F3:F4)** para selecioná-la;
- Na guia ***"Início"***, no grupo ***"Alinhamento"***, clique em **"Alinhar no Meio"**, na parte superior e em **"Alinhar à Esquerda"**, na parte inferior, como mostra na figura 49;

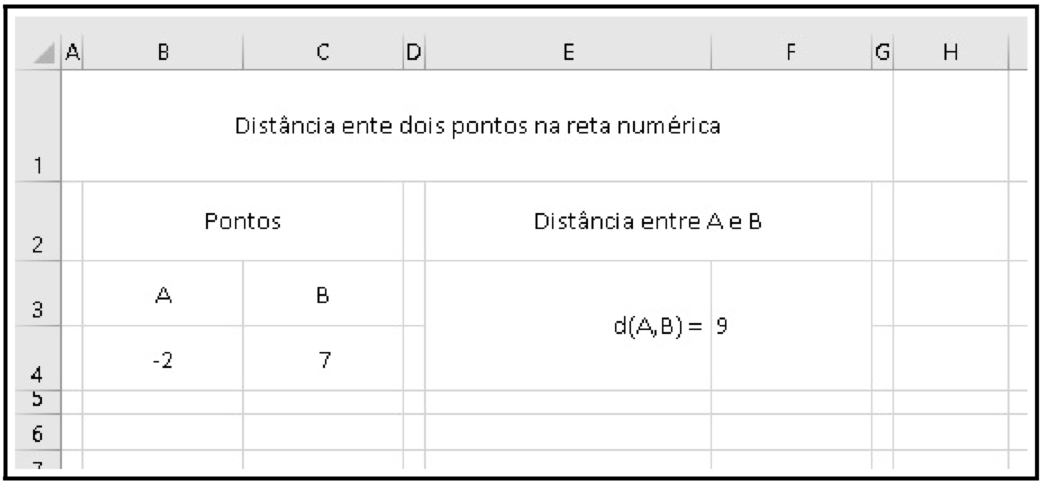
Figura 49 – **"Alinhar no Meio"** e **"Alinhar à Esquerda"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Observe na figura 50 como fica a planilha até o momento, após efetuar os referidos alinhamentos mostrado anteriormente.

Figura 50 – "Distância entre dois pontos na reta, após alinhamento".



Distância ente dois pontos na reta numérica			
Pontos		Distância entre A e B	
A	B	d(A,B) =	9
-2	7		

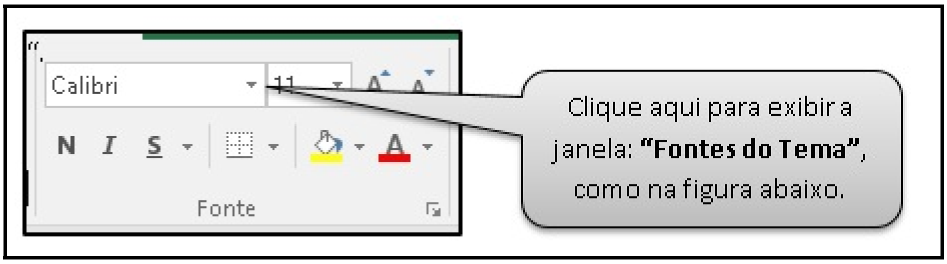
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3. **Alterar o tamanho, a cor, o tipo de fonte e a cor do plano de fundo das células.**

   Para alterar o tamanho e o tipo da fonte, faça o seguinte:

- Clique na tecla mesclada **A1** para selecioná-la;
- Na guia ***"Início"***, no grupo ***"Fonte"***, clique na setinha, como mostra a figura 51, para exibir a janela **"Fontes do Tema"**;

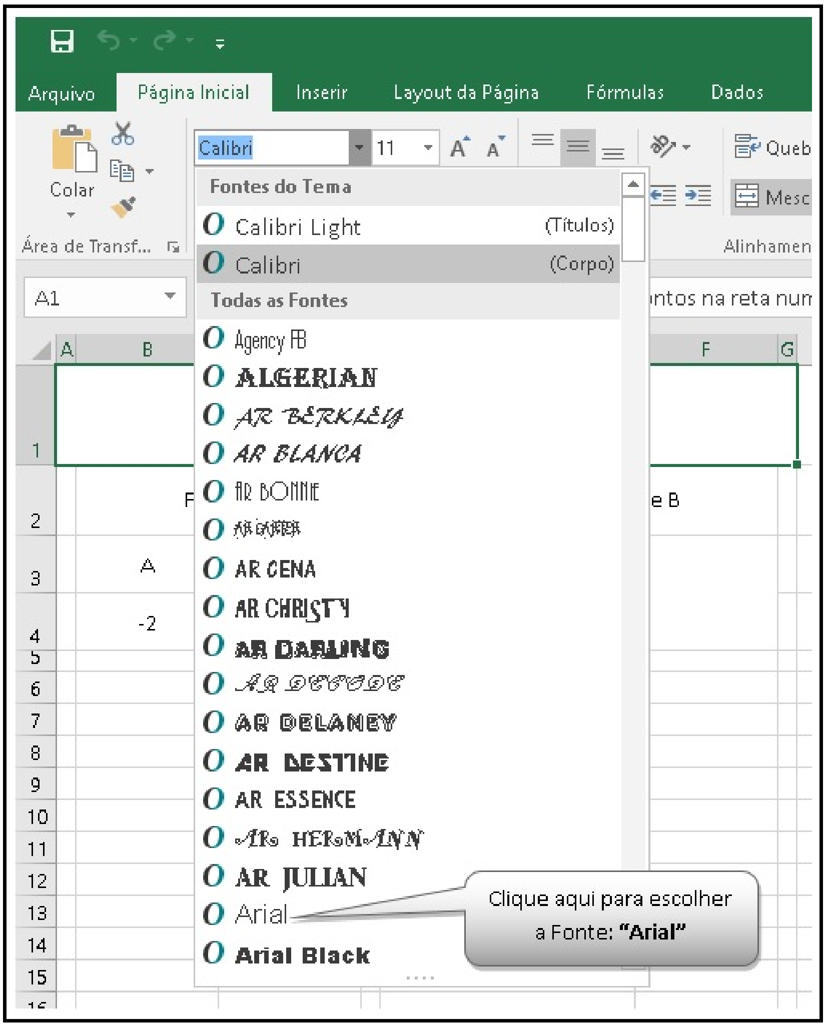
Figura 51 – Alterar o tipo de fonte.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Após exibir a janela **"Fontes do Tema"**, escolha o tipo de fonte que desejar, que nesse exemplo, é **"Arial"**, como mostra a figura 52

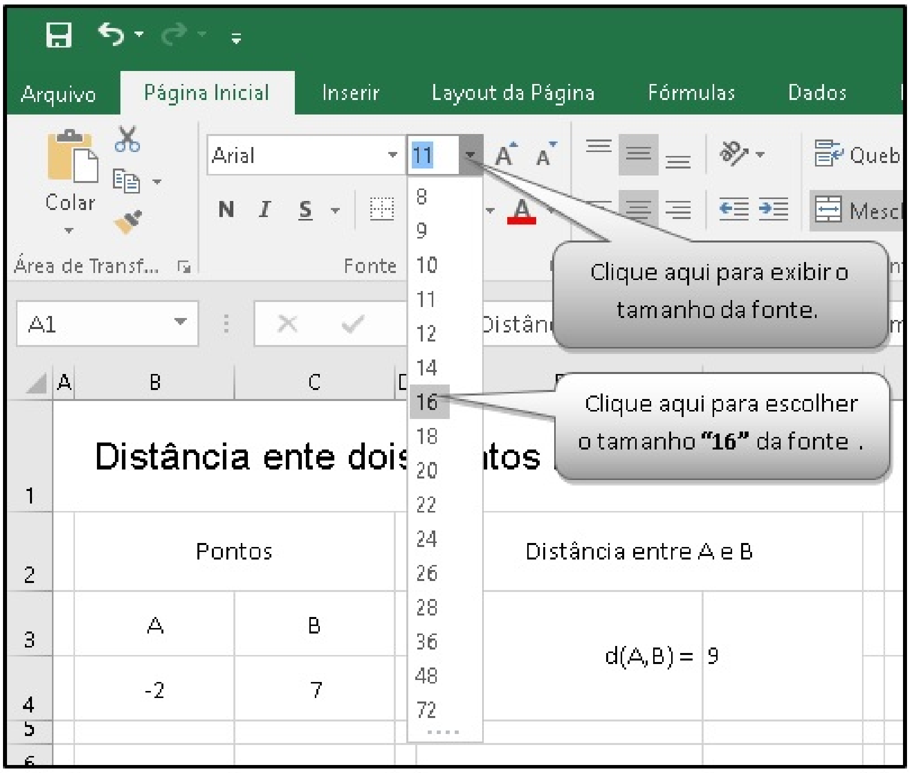
Figura 52 – Alterar o tipo de fonte para **"Arial"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Em seguida, na guia ***"Início"***, no grupo ***"Fonte"***, clique na setinha, depois do tamanho da fonte e escolha o tamanho **"16"**, como mostra a figura 53

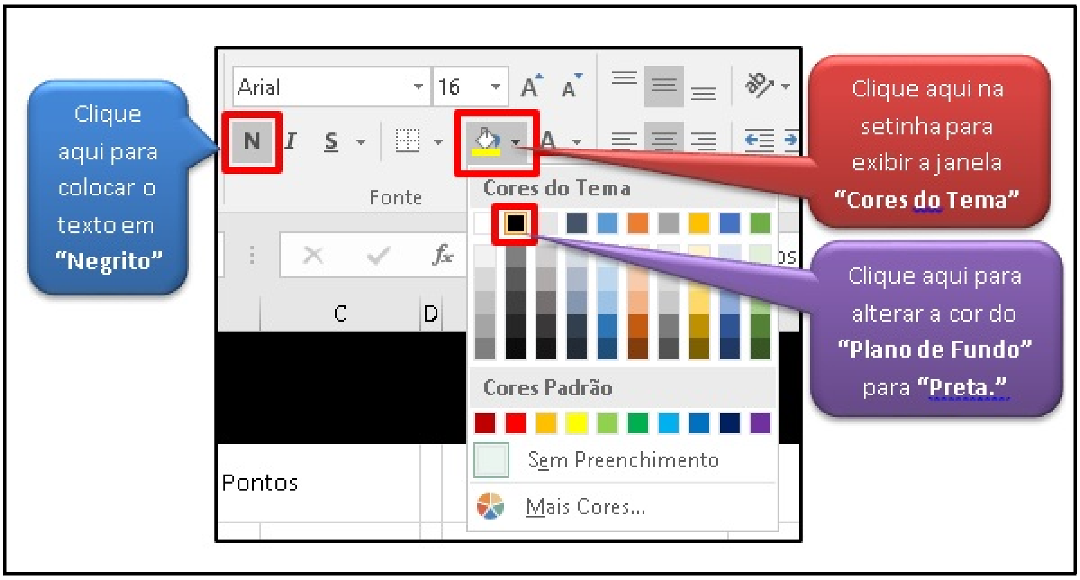
Figura 53 – Alterar o tamanho da fonte para **“16”**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Agora, na guia ***“Início”***, no grupo ***“Fonte”***, clique em “**Negrito**”;
- Altere a cor do plano de fundo para preta. Para isso, na guia ***“Início”***, no grupo ***“Fonte”***, clique na setinha do lado direito do ícone “**Cor do Preenchimento**” e escolha a cor desejada, que nesse exemplo é preta, como mostra a figura 54

Figura 54 – Alterar a cor do **"Plano de Fundo"**.



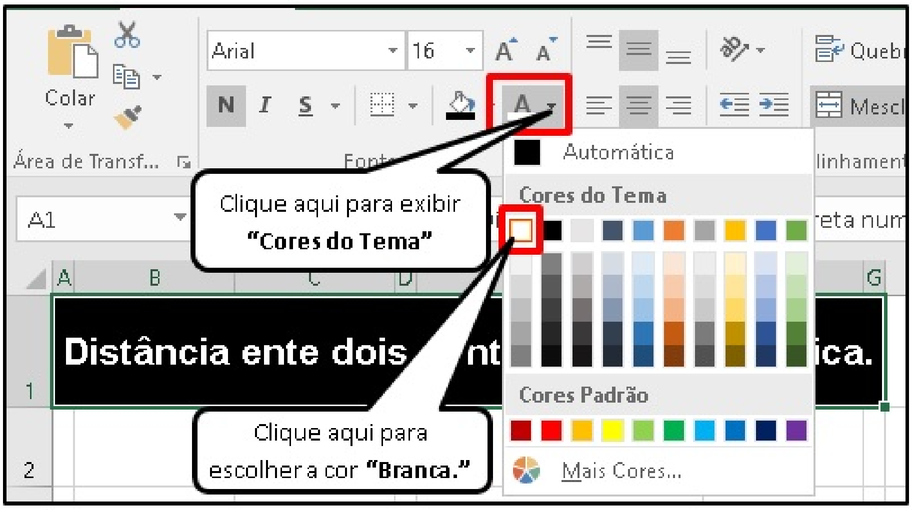
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Observe que as células mescladas **"(A1:G1)"** selecionadas ficaram totalmente pretas. Isto porque a **"Cor do Plano de Fundo"** foi alterada para **"Preta"**, que é mesma cor da fonte do texto digitado nas referidas células. Com isso, devemos alterar a cor da fonte, que neste exemplo, será **"Branca"**.

Para fazer a referida alteração, faça o seguinte:

- Altere a cor da fonte para **"Branca"**. Na guia ***"Início"***, no grupo ***"Fonte"***, clique na setinha do lado direito do ícone **"Cor da Fonte"** para exibir **"Cores do Tema"** e escolha a cor desejada, que nesse exemplo é **"Branca"**, como mostra a figura 55

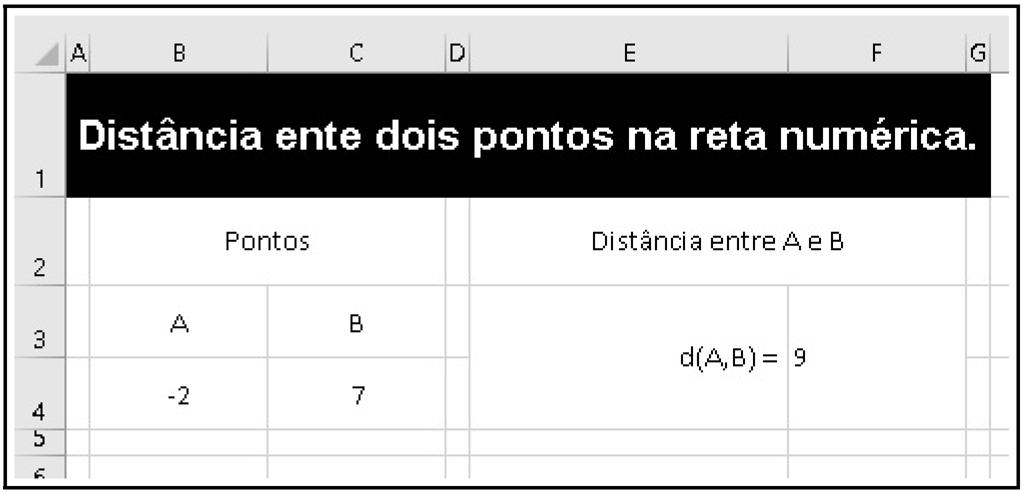
Figura 55 – Alterar a **"Cor da Fonte"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Verifique como ficou a planilha na figura 56 após executar as alterações da figura 55:

Figura 56 – Distância entre dois pontos na reta após alterar a **"Cor do Plano de Fundo e da Fonte"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Em seguida, altere o tamanho, o tipo, a cor da fonte e a cor do plano de fundo das células da linha **"2"**, como segue:

- Com as células mescladas **"(B2:C2)"** e **"(E2:F2)"** selecionadas, altere o tipo de fonte para **"Arial"**, a cor para **"Branca"**, o tamanho para **"16"** e clique em **“Negrito”**;

- Altere a **“Cor do Preenchimento”** do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Escuro 25%”**, como mostra a figura 57 ou outra de sua preferência;

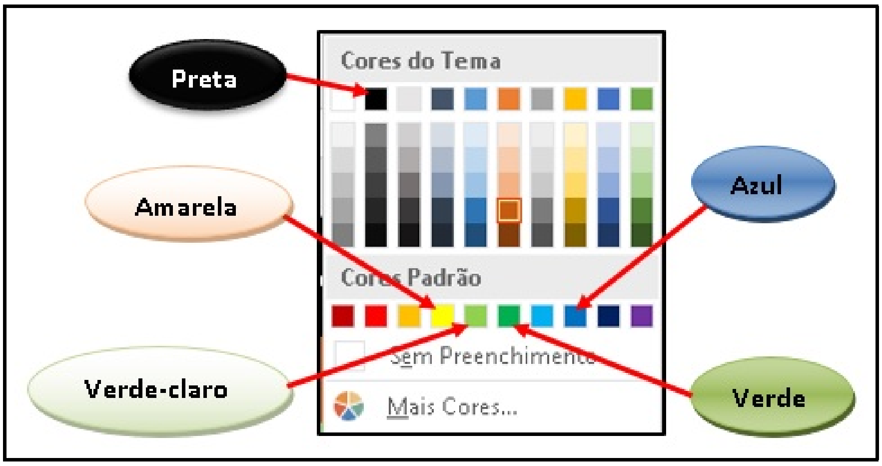
Figura 57 – Alterar a **“Cor do Plano de Fundo: Laranja”**.

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Agora, faça as formatações das linhas **“3”** e **“4”**, que serão vistas nas figuras 58 e 59, como segue:

- Selecione as células **“B3”**, **“C3”**, **“B4”**, **“C4”** e as células mescladas **“(E3:E4)”** e **“(F3:F4)”**, altere o tipo de fonte para **“Arial”**, o tamanho para **“20”** e Clique em **“Negrito”**;
- Selecione agora somente as células **“B3”** e **“C3”** e altere a **“Cor de Fonte”** para **“Amarela”** e a **“Cor do Preenchimento”** para **“Azul”**;
- Selecione novamente somente as células **“B4”** e **“C4”** e altere a **“Cor do Preenchimento”** para **“Verde”**;
- Agora selecione apenas as células mescladas **“(E3:E4)”** e **“(F3:F4)”** e altere a **“Cor do Preenchimento”** para **“Verde-claro”**;
- Altere a **“Cor do Preenchimento”** das células **“A2”, “D2”, “G2”, “A3”, “D3”, “G3, “A4”, “D4”, “G4”** e **“(A5:G5)”** para **“Preta”**.

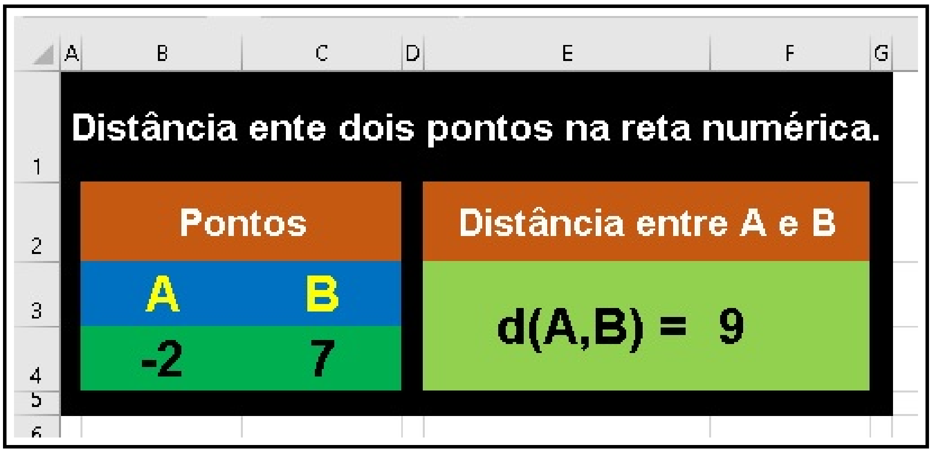
Figura 58 – Alterar a **“Cor do Plano de Fundo: várias cores”**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

A figura 59 mostra como ficou a planilha após as formatações acima.

Figura 59 – Distância entre dois pontos na reta numérica após alterações de fontes e plano de fundos.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

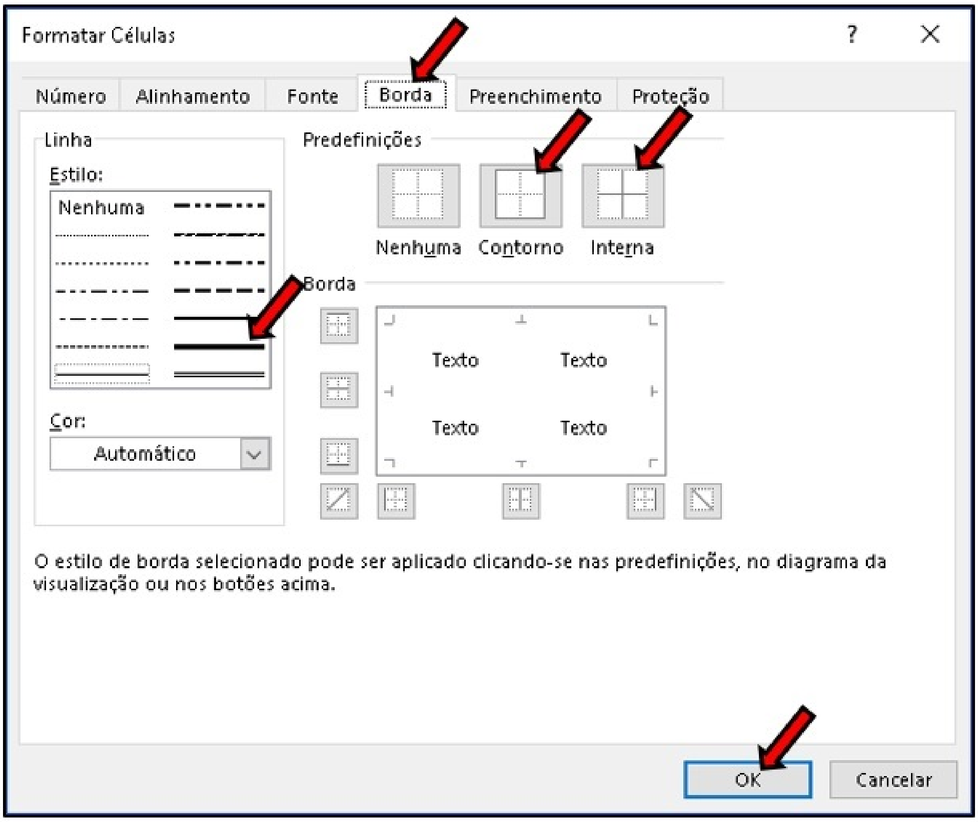
4. **Inserir bordas.**

   Para inserir bordas, faça o seguinte:

   - Pressione e segure a tecla **“Ctrl”** e clique com o botão esquerdo do mouse nas células mescladas **“(B2:C2)”** e **“(E2:F2)”** e nas células **“(B3:C4)”** para selecioná-las;
   - Pressione as teclas **“Ctrl”** + **“1”** para exibir a janela **“Formatar células”**;

- Na janela que abrir clique em todos os locais indicados com uma seta vermelha, conforme a figura 60, para inserir as referidas bordas.

Figura 60 – Janela **"Formatar Células"**.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Veja como fica a planilha após inserir as bordas como sugerido acima.

Figura 61 – Distância de dois pontos na reta, após inserir bordas.

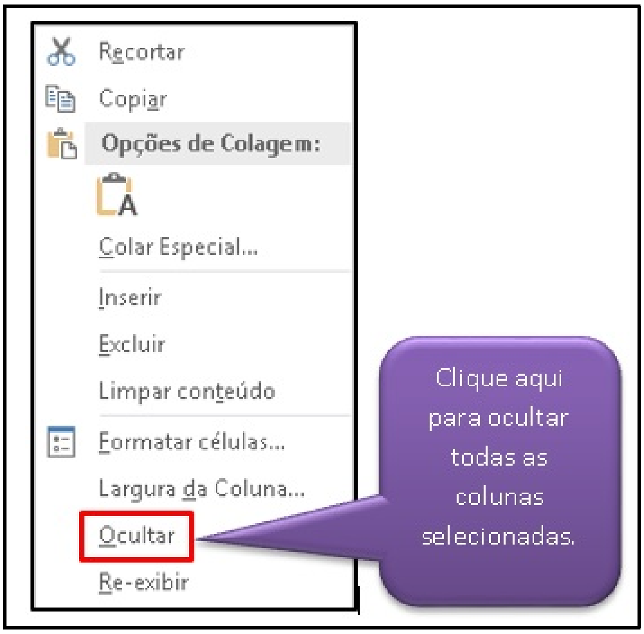
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

5. **Ocultar linhas e colunas.**

   A planilha está praticamente pronta. No entanto, pode-se ocultar as linhas e colunas que não foram utilizadas, tornando-a menor. Todas essas formatações são opcionais sendo uma questão de estética e visualização.

   - Para ocultar as colunas, faça o seguinte:
     - Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da letra **H** para selecionar esta coluna;
     - Pressione e segure as teclas **"Ctrl"** e **"Shift"** e em seguida, pressione na setinha para a direita no teclado ➡ para selecionar todas as colunas não utilizadas;
     - Clique com o botão direito do mouse em qualquer coluna selecionada para exibir a janela conforme a figura 62
     - Clique em **"Ocultar"** para ocultar todas as colunas selecionadas conforme mostra a figura 62.

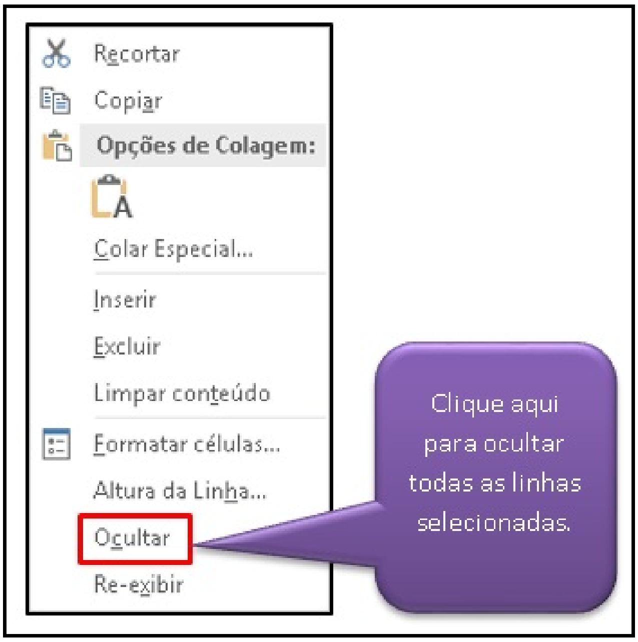
Figura 62 – Ocultar colunas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

- Para ocultar as linhas, faça o seguinte:
  - Clique com o botão esquerdo do mouse em cima do número da linha **6** para selecionar esta linha;
  - Pressione e segure as teclas **"Ctrl"** e **"Shift"** e em seguida pressione na setinha para baixo no teclado ⬇ para selecionar todas as linhas não utilizadas;
  - Clique com o botão direito do mouse em qualquer linha selecionada para exibir a janela conforme a figura 63
  - Clique em **"Ocultar"** para ocultar todas as linhas selecionadas, conforme mostra a figura 63.

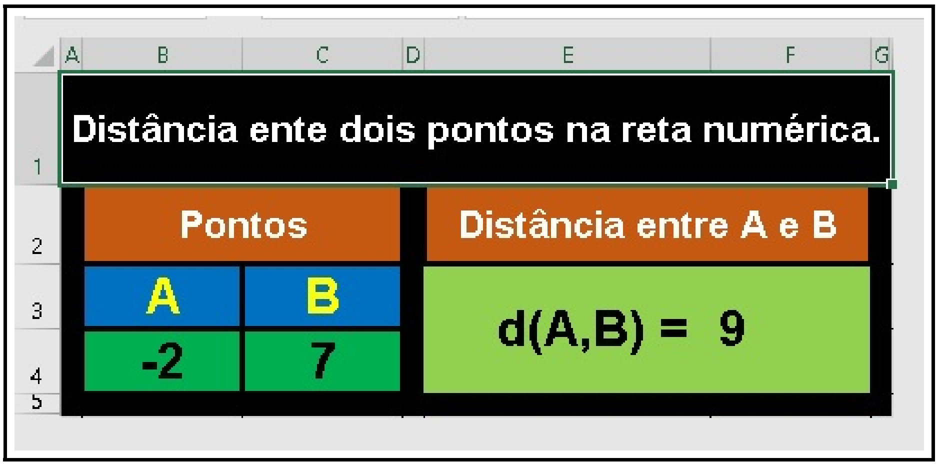
Figura 63 – Ocultar linhas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Perceba na figura 63 como fica a planilha após ocultar colunas e linhas que não foram utilizadas.

Figura 64 – Distância entre dois pontos na reta numérica após todas as formatações (Planilha).



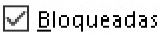
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

6. **Proteger planilhas.**

   Agora todas as células vão ser protegidas, com exceção das células **"B4"** e **"C4"**, que serão desbloqueadas e digitados os valores dos pontos para efetuar o cálculo da distância e as demais ficarão bloqueadas para que não sofra nenhum tipo de alteração.

Para isso, faça o seguinte:

- Clique e segure o botão esquerdo do mouse em cima da célula **"B4"** e arraste até a célula **"C4"** para selecionar as duas células que serão desbloqueadas;
- Pressione as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar células"**;
- Na janela que abrir, clique na última aba que é **"Proteção"**;

Veja que a opção **"Bloqueadas"** já aparece com o quadrinho marcado, como segue: 

.

- Agora, clique dentro do quadrinho para desmarcar a marcação de **"Bloqueadas"** para que as células selecionadas fiquem desbloqueadas;
- Clique em **"OK"** para que as alterações sejam executadas.

Observe na figura 24 como fica a janela após concluir os passos acima. A seta vermelha indica onde deverão ser clicados. Observe também que após clicar no quadrinho de **"Bloqueadas"**, a marcação desaparece, ficando com o quadrinho branco, sem nenhuma marcação.

Agora que as duas células foram desbloqueadas, onde serão digitados os valores dos pontos **"A"** e **"B"**, vamos bloquear a planilha para que as demais células que não foram desbloqueadas fiquem bloqueadas. Para isso, siga os passos da seção 2.10 e observe as figuras 25, 26 e 27.

Pronto, a planilha está protegida com todas as células bloqueadas para digitação, com exceção das duas células citadas anteriormente, onde serão digitados os valores dos pontos para que o excel calcule a distância entre eles.

Se alguém tentar digitar alguma coisa nas células bloqueadas, a seguinte mensagem aparece, como mostra a figura 28, na seção 2.10. Para continuar, basta clicar em **"OK"**.

As alterações proteger planilha e desbloquear células não alteram a aparência visual da planilha mostrada anteriormente na figura 64, que ainda continua a mesma. A diferença só aparece quando tentar digitar algum dado na célula bloqueada, onde aparece a mensagem da figura 28.

7. **Renomear uma planilha**

   Para renomear uma planilha, faça o seguinte:

   - Clique duas vezes com o botão esquerdo do mouse na guia da planilha, em cima do nome **Planilha1** como se vê na figura seguinte: 

;
   - Digite o novo nome para a planilha, que neste exemplo, será: **D2pr**, para representar a planilha da distância de dois pontos na reta numérica;
   - Após digitar o novo nome, tecle **"Enter"** no teclado para concluir a ação, como se vê na figura seguinte: 

.

8. **Salvar a planilha**.

   Para salvar uma planilha (pasta de trabalho), faça o seguinte:

   - Clique na guia **"Arquivo"** e em seguida na opção **"Salvar"**;
   - Escolha o local onde for salvar o planilha, dentre as várias opções como mostra a figura 29. Nesta sugestão, clique em procurar para exibir a janela de **"Salvar Como"**;
   - Na janela que abrir, escolha um local à esquerda (Este Computador, por exemplo); uma pasta à direita (Documentos, por exemplo); dê um nome para a pasta de trabalho, como mostra a figura 30 e clique no botão **"Salvar"**;

Com isso, conclui-se a primeira planilha que usa o **Excel 2016** para calcular a distância entre dois pontos na reta numérica com todas as suas fórmulas, funções e dados digitados, além das formatações, da proteção da planilha etc, com o passo a passo de cada etapa, bem como as figuras mostradas etapa por etapa.

Todas as demais planilhas que serão criadas aqui seguirão aproximadamente o mesmo padrão desde o início de sua criação até a finalização.

Por isso, nas próximas planilhas criadas, não serão mais mostrados todas as etapas com figuras em cada uma delas, mostrando passo a passo como concluí-la. Será mostrada a figura, apenas na conclusão da planilha, ou em alguma etapa que se fizer necessária, mas terão todos os passos escritos, até se chegar à conclusão da mesma.

Para as versões anteriores do Excel, os dados digitados, as fórmulas e as funções são as mesmas apresentadas aqui. Há alguma mudança apenas na formatação, na localização de algum comando para fazer alguma tarefa e no designer da tela de abertura, com poucas mudanças significativas.

3.2.2 Distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Já no plano cartesiano, se a reta que contem os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ for paralela ao **eixo *x***, ou seja, $y_A = y_B$, a distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B, isto é:

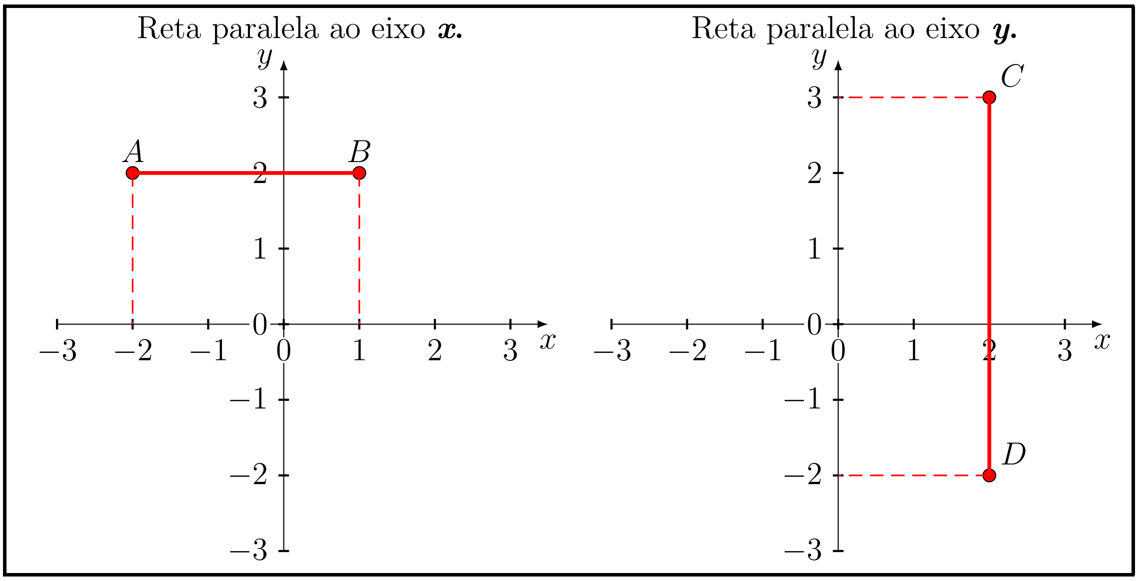
$$\boxed{d_{\overline{AB}} = |x_B - x_A|} \tag{3.1}$$

Se a reta que contem os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ for paralela ao **eixo *y***, ou seja, $x_A = x_B$, a distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre as ordenadas de A e B, isto é:

$$\boxed{d_{\overline{AB}} = |y_B - y_A|} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.2.1 - Considere os dois planos cartesianos da figura 65 e encontre a distância do ponto A ao B e de C ao D.

Figura 65 – Retas paralelas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Resolução:

Na figura 65 à esquerda, a reta que contem os pontos $A(-2,2)$ e $B(1,2)$, é paralela ao **eixo** $\boldsymbol{x}$ e à direita, a reta que contem os pontos $C(2,3)$ e $D(2,-2)$, é paralela ao **eixo** $\boldsymbol{y}$.

Para calcular $d_{\overline{AB}}$ e $d_{\overline{CD}}$, utilizamos as fórmulas (3.1) e (3.2).

Segue abaixo, à esquerda, a resolução de $d_{\overline{AB}}$ e à direita, de $d_{\overline{CD}}$:

$$d_{\overline{AB}} = |x_B - x_A|$$
$$d_{\overline{AB}} = |1 - (-2)|$$
$$d_{\overline{AB}} = |1 + 2|$$
$$d_{\overline{AB}} = |3|$$
$$\boxed{d_{\overline{AB}} = 3\ u.m.}$$

onde $u.m.$ é a unidade de medida.

$$d_{\overline{CD}} = |y_D - y_C|$$
$$d_{\overline{CD}} = |3 - (-2)|$$
$$d_{\overline{CD}} = |3 + 2|$$
$$d_{\overline{CD}} = |5|$$
$$\boxed{d_{\overline{CD}} = 5\ u.m.}$$

onde $u.m.$ é a unidade de medida.

3.2.2.1 Teorema de Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras é um dos resultados mais importantes da Matemática.

> "Pitágoras de Samos, mais conhecido simplesmente por Pitágoras, foi um filósofo e matemático grego que viveu há cerca de 2.500 anos. Ele é tido como o responsável pela descoberta e demonstração de uma relação existente entre o tamanho dos lados de triângulos retângulos..., denominado Teorema de Pitágoras, considerado uma das principais descobertas da Matemática." (SILVA, 2018a)

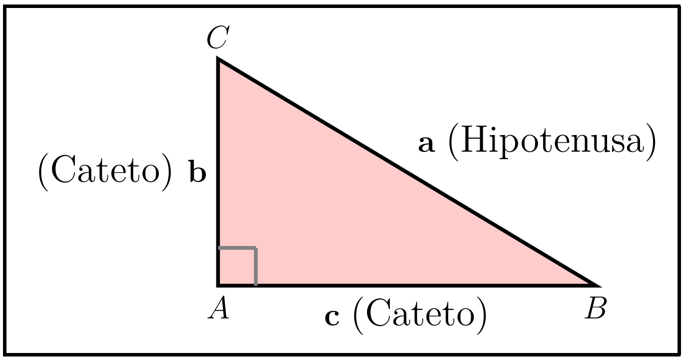
Segue abaixo e enunciado do referido Teorema:

Teorema 3.2.2.1 *"O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma do quadrado das medidas dos catetos" (TEOREMA..., 2018).*

Em relação ao Teorema de Pitágoras, Silva afirma e esclarece que:

> O Teorema de Pitágoras é considerado uma das principais descobertas da Matemática. Ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo. Vale lembrar que o triângulo retângulo pode ser identificado pela existência de um ângulo reto, isto é, que mede 90º. O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e localiza-se opostamente ao ângulo reto. (SILVA, 2018e)

Figura 66 – Triângulo retângulo.



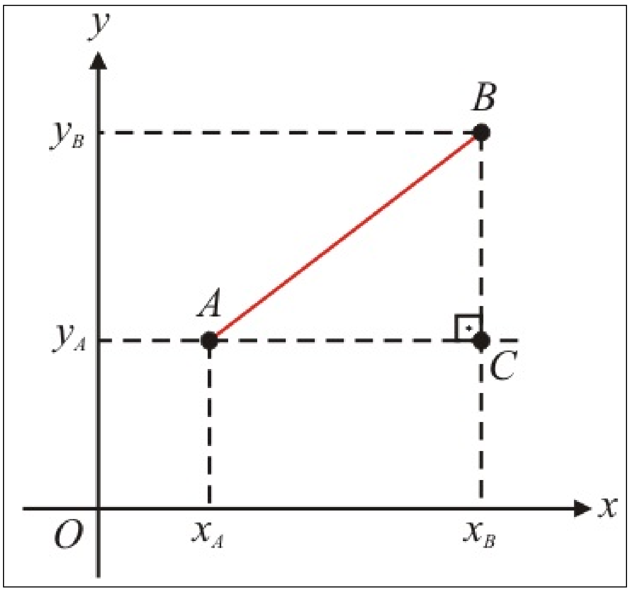
Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Analisando o triângulo retângulo da figura 66 acima, verifica-se que a hipotenusa é o lado $\overline{BC}$, que é oposto ao ângulo reto Â e os catetos são os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Também pode-se escrever $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Com isso, representa-se o Teorema de Pitágoras através da seguinte equação:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \tag{3.3}$$

Figura 67 – Distância de dois pontos no plano cartesiano.



Fonte: (KILHIAN, 2013).

O Teorema de Pitágoras é importante no estudo da Geometria Analítica, pois, para calcular a distância entre dois pontos, **A** e **B** no plano cartesiano, utiliza-se este teorema, que será aplicado ao triângulo retângulo **ABC**.

Pelo Teorema de Pitágoras (3.3): $(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2$

Sabemos que $\overline{AC} = |x_B - x_A|$ e que $\overline{BC} = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$, $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$ e $(\overline{AB})^2 = (d_{\overline{AB}})^2$,

temos: $(d_{\overline{AB}})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Portanto, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$\boxed{d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \tag{3.4}$$

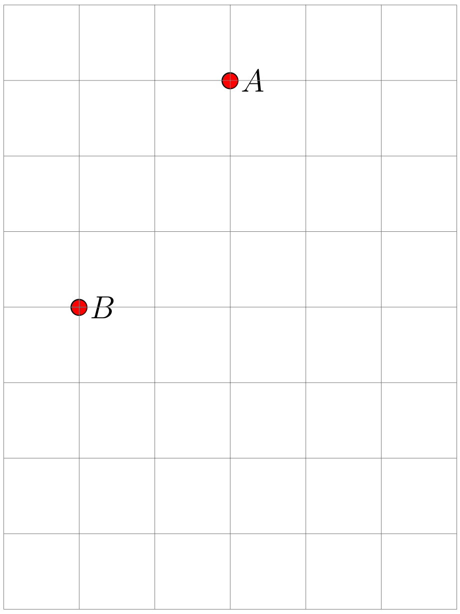
Com esta fórmula, calcula-se a distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano.

Sabemos também que o perímetro de um triângulo é a soma de todos os lados do mesmo. Considere $2p$ como o perímetro do triângulo ABC, que é dado pela fórmula:

$$\boxed{2p = d_{\overline{AB}} + d_{\overline{BC}} + d_{\overline{AC}}} \tag{3.5}$$

Exemplo 3.2.2 - Na figura 68, considere um plano cartesiano sobre a malha quadriculada, onde o eixo x está sobre a última linha de cima para baixo e y, sobre a primeira linha da esquerda para a direita. Uma formiga está no ponto A e precisa ir ao ponto B para se alimentar. Qual é a menor distância que ela deverá percorrer?

Figura 68 – Malha quadriculada.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Resolução:

Observando a figura 68, temos $A(3,7)$ e $B(1,4)$. Para resolver este exemplo, utiliza-se a fórmula (3.4). Substituindo as coordenadas desses pontos, temos:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(1-3)^2 + (4-7)^2}$$
$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$$
$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{4+9}$$
$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{13} \text{ u.m.}$$

ou

$$\boxed{d_{\overline{AB}} \cong 3,61 \text{ u.m.}}$$

Obs. Resultado com aproximação de duas casas decimais.

3.2.2.2 Distância entre dois pontos no plano cartesiano, usando o **Excel 2016**

.

De agora em diante todos os passos e etapas serão semelhantes ao que foi visto anteriormente na criação da planilha para calcular a distância entre dois pontos na reta numérica. Então, não serão colocadas aqui figuras no passo a passo, apenas as que forem realmente necessárias. Mas o texto explicando passo a passo de como construir a planilha será mostrado aqui. Caso não consiga fazer alguma etapa, volte à subsubseção 3.2.1.1 e tire suas dúvidas.

Para fazer a planilha que permite calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, proceda da seguinte forma:

- Abra a pasta de trabalho **“ga-excel”**, criada anteriormente;
- Clique no sinal de + no lado direito do nome da planilha criada anteriormente **“D2pr”** na guia da planilha, para criar uma nova planilha, como mostra a figura seguinte: 

- Renomeie a **“planilha1”** criada para **“D2ppc”**. Esta planilha será usada para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano;

Observação 3.2.1 - *Estas etapas, referentes aos três itens anteriores, serão as mesmas em todas as planilhas criadas posteriormente, com apenas adaptações de nomes. Portando, não serão mais citadas. Quando for criar uma nova planilha, já considere que a pasta de trabalho* ***“ga-excel”*** *esteja aberta, que uma nova* ***“planilha1”*** *já tenha sido criada e haverá apenas a renomeação da mesma.*

Continuando, temos:

- Selecione as células **“(B1:J1)”**, mescle-as e digite: **Distância entre dois pontos no plano cartesiano.**;
- Nas células: **“B2”**, digite: **“Pontos”**, em **“C2, C3 e C4”**, digite: **“(”**, em **“D2”**, digite: **“x”**, em **“E2, E3 e E4”**, digite: **“;”**, em **“F2”**, digite: **“y”**, em **“G2, G3 e G4”**, digite: **“)”**; em **“B3”**, digite: **“A”**; em **“B4”**, digite: **“B”**;
- Selecione as células **“(H2:J2)”**, mescle-as e digite: **Distância entre A e B**;
- Selecione as células **“(H3:H4)”**, mescle-as e digite: $d_{\overline{AB}}$, selecionando AB e formatando a fonte para “subscrito”. Para inserir o traço em cima de AB, clique em: **Inserir** > **Formas** > **Linha** e ajuste o tamanho desejado;

- Selecione as células **"(I3:I4)"**, mescle-as e digite: **=SE(INT(J3)=J3;"=";"≅")**. Esta função analisa se o resultado é igual ou aproximado;
- Selecione as células **"(J3:J4)"**, mescle-as e digite: **=ARRED(RAIZ((D4-D3)ˆ 2+(F4-F3)ˆ 2);2)**. Esta é a função do **Excel** que será usada para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, com aproximação de duas casas decimais se for o caso, utilizando a fórmula 3.4.

Para resolver o exemplo 3.2.2, utilizando a planilha criada, faça o seguinte:

- Na célula **"D3"**, digite: **3**, em **"D4"**, digite: **1**, em **"F3"**, digite: **7** e em **"F4"**, digite: **4**. Observe que já aparece o resultado $d_{\overline{AB}} \cong 3,61$;

  Faça agora, as seguintes formatações:
- Selecione as células **"(B1:J4)"**, centralize e alinhe ao meio;
- Selecione as células mescladas **"(H3:H4)"** e alinhe à direita;
- Selecione as células mescladas **"(I3:I4)"** e centralize e alinhe ao meio;
- Selecione as células mescladas **"(J3:J4)"** e alinhe à esquerda;
- Diminua a largura das colunas **"A, C, E, K"** para: **"1,00"** e das colunas **"G, I"** para: **"3,00"**.
- Aumente a largura da coluna **"B"** para **"11,00"**, das colunas **"H, J"** para **"15,00"**;
- Aumente a largura das linhas **"1, 2, 3, 4"** para **"28,50"**;
- Diminua a largura linha **"5"** para **"9,00"**;
- Selecione as células **"(B1:J4)"** e altere a tipo de fonte para **"Arial"**;
- selecione as células **"B1, B2, H3"** e aumente o tamanho da fonte para **"16"**; as células **"(C2:G4), (B3:B4)"**, as células mescladas **"(H3:J4)"** e aumente o tamanho da fonte para **"22"**;
- Selecione as células **"(B1:J4)"** e clique em **"Negrito"**;

Veja que a planilha já está funcionando. Será realizada mais algumas formatações apenas para melhorar a aparência, como alterar as cores das fontes, dos planos de fundo e inserir **“Borda Superior Espessa”**, 

, como segue:

- Selecione as células mescladas **“(B1:J1)”**, altere a cor do plano de fundo para **“Azul-escuro”**, a cor da fonte para **“Branca.”** e insere **“Borda Superior Espessa”**;
- Selecione as células **“(B2:G2)”** e altere a cor do plano de fundo para **‘Roxo‘**, a cor da fonte para **“Branca”** e insere **“Borda Superior Espessa”**;
- Selecione as células mescladas **“(H2:J2)”** e altere a cor do plano de fundo para **“Azul”**, a cor da fonte para **“Branca”** e insere **“Borda Superior Espessa”**;
- Selecione as células **“(B3:G3)”**, altere a cor do plano de fundo para **“Azul-claro”** e insere **“Borda Superior Espessa”**;
- Selecione as células **“(B4:G4)”**, altere a cor do plano de fundo para **“Verde”** e insere **“Borda Superior Espessa”**;
- Selecione as células mescladas **“H3, I3, J3”**, altere a cor do plano de fundo para **“Verde-claro”** e insere **“Borda Superior Espessa”**;
- Selecione as células **“(A1:A4)”**, **“(A5:K5)”** e **“(K1:K4)”** e altere a cor do plano de fundo para **“Preto”**;
- Ocultar as colunas da **L** até a coluna final e as linhas da **6** até a linha final;
- Desbloqueie as células **“D3”** e **“F3”**, onde serão digitadas as coordenadas do ponto **A** e as células **“D4”** e **“F4”**, onde serão digitadas as coordenadas do ponto **B**. Em seguida proteja a planilha com a senha **“1234”**, como sugestão;
- Salve a planilha, clicando no ícone .

Veja como ficou a planilha para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, após todas as formatações, como mostra a figura 69.

Figura 69 – Distância entre dois pontos no plano cartesiano (Planilha).

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

No exemplo 3.2.2, foi calculada a distância aproximada entre os pontos $A(3, 7)$ e $B(1, 4)$.

Para calcular a distância entre dois pontos diferentes dos dados no exemplo acima basta digitar nas células **"D3"** e **"F3"** a abscissa **x** e a ordenada **y** do primeiro ponto e nas células **"D4"** e **"F4"** a abscissa **x** e a ordenada **y** do segundo ponto. Verifique que o resultado será mostrado nas células mescladas **"(H3:J4)"**, com aproximação de duas casas decimais, se for o caso.

Caso queira mudar também os nomes dos pontos **A** e **B** para outros nomes, é só desbloquear as células **"B3"** e **"B4"**, antes de proteger a planilha, para aceitar digitar outros nomes para os dois pontos dados. Também é necessário desbloquear as células mescladas **"(H2:J2)"** para que possa alterar os nomes dos pontos **A** e **B** para os novos nomes.

3.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Ponto Médio é o ponto que divide o segmento de reta exatamente ao meio. É o ponto de equilíbrio do referido segmento.

Sejam A e B, dois pontos do plano cartesiano, com coordenadas cartesianas $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e seja M o ponto médio do segmento de reta de extremidades A e B, com coordenadas cartesianas $M(x_M, y_M)$.

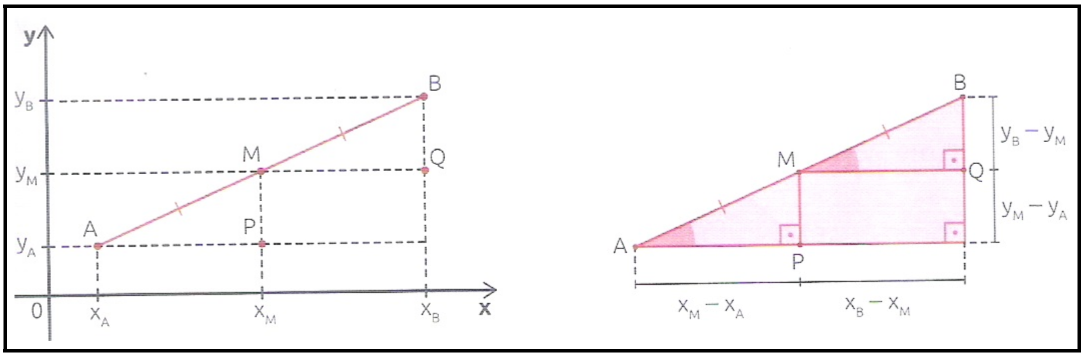
Observe como calcular as coordenadas do ponto médio **M**, segundo (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p.103):

> ...Vamos considerar inicialmente um segmento de reta qualquer com extremidades em A e B, em que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são

> distintos e $M(x_M, y_M)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$. Considerando os pontos $P(x_M, y_A)$ e $Q(x_B, y_M)$, temos os triângulos retângulos APM e MQB com hipotenusas $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ de mesma medida, pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$, e temos os ângulos agudos $P\hat{A}M$ e $Q\hat{M}B$ congruentes, porque $\overline{AP}$ e $\overline{MQ}$ são paralelos. Logo, pelo caso lado ângulo ângulo oposto (LAA_O), os triângulos APM e MQB são congruentes".

A figura 70 mostra os detalhes do texto citado acima, onde temos, à esquerda, os pontos extremos A e B e o ponto médio M, contidos no segmento de reta $\overline{AB}$ e mais os pontos P e Q com suas respectivas coordenadas cartesianas e à direita, a formação dos triângulos retângulos APM e MQB e que $x_P = x_M$, $x_Q = x_B$, $y_P = y_A$ e $y_Q = y_M$.

Figura 70 – Ponto médio no plano cartesiano.



Fonte: (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p.103).

Como os triângulos retângulos APM e MQB são congruentes, aplica-se:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{MQ}} \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QB}}$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{MQ} \qquad \overline{MB} \cdot \overline{PM} = \overline{AM} \cdot \overline{QB}$$

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MQ}}{\overline{MB}} \qquad \overline{PM} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{QB}}{\overline{MB}}$$

como **M** é ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{AM} = \overline{MB}$. Segue que,

como **M** é ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{AM} = \overline{MB}$. Segue que,

$$\overline{AP} = \frac{\cancel{\overline{MB}} \cdot \overline{MQ}}{\cancel{\overline{MB}}} \qquad \overline{PM} = \frac{\cancel{\overline{MB}} \cdot \overline{QB}}{\cancel{\overline{MB}}}$$

$$\boxed{\overline{AP} = \overline{MQ}} \qquad \boxed{\overline{PM} = \overline{QB}}$$

Como $\overline{AP} = x_M - x_A, \overline{MQ} = x_B - x_M, \overline{PM} = y_M - y_A$ e $\overline{QB} = y_B - y_M$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{MQ} \\ x_M - x_A &= x_B - x_M \\ 2x_M &= x_A + x_B \\ &\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PM} &= \overline{QB} \\ y_M - y_A &= y_B - y_M \\ 2y_M &= y_A + y_B \\ &\boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}} \end{aligned}$$

Portanto, o ponto médio de $\overline{AB}$, em que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é:

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)} \tag{3.6}$$

Com esta fórmula calcula-se o ponto médio entre dois pontos extremos de um segmento de reta quaisquer do plano cartesiano.

Exemplo 3.3.1 - Determine o ponto de intersecção da mediatriz com com o segmento de reta de extremidades $A(1, -7)$ e $B(3, -5)$.

Resolução:

A mediatriz é uma reta perpendicular a um segmento de reta, interceptando-o exatamente ao meio, ou seja, no ponto médio do segmento. Assim, para resolver este exemplo, utiliza-se a fórmula (3.6), que calcula o ponto médio:

$$\begin{gathered} M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \\ M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-7-5}{2}\right) \\ M\left(\frac{4}{2}, \frac{-12}{2}\right) \\ \boxed{M(2, -6)} \end{gathered}$$

Este exemplo também poderia ser resolvido utilizando separadamente as fórmulas para calcular $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ e depois formar o par ordenado com as coordenadas do ponto $M(x_M, y_M)$.

3.3.1 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, usando o **Excel 2016**

Para fazer a planilha que permite calcular as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no plano cartesiano, proceda da seguinte forma:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"PM"**. Esta planilha será usada para calcular o **Ponto Médio** entre dois pontos extremos em um segmento de reta no plano cartesiano.

A planilha a ser criada é muito semelhante ao que foi feito na subsubseção 3.2.2.2 e, portanto, será utilizada boa parte da formatação da planilha criada nesta subseção.

Será criada uma cópia da planilha anterior **"D2ppc"** e feita as devidas adaptações, aproveitando assim, quase todas as formatações e alterando apenas as células necessárias.

Para isso, faça o seguinte:

- Clique na aba da planilha em **"D2ppc"**;
- Selecione toda a planilha, clicando no botão **"Selecionar tudo"**, como mostra a figura 5;
- Pressione e segure a tecla **"Ctrl"** e em seguida, mais a tecla **"C"**, para copiar toda a planilha;
- Agora clique na aba da planilha em **"PM"** para selecioná-la;
- Clique no botão **"Selecionar tudo"**, como visto anteriormente;
- Pressione e segure a tecla **"Ctrl"** e em seguida, mais a tecla **"V"**, para colar toda a planilha;

Pronto! A planilha já foi copiada. Agora deve-se fazer as seguintes alterações:

- Clique em cima do texto **"Distância entre dois pontos no plano cartesiano."** e o altere. Digite: **"Ponto Médio de um segmento de reta."**;
- Da mesma forma, altere o texto **"Distância entre A e B."** para **"Ponto Médio."**

- Clique nas células mescladas **“(H3:H4)”** e digite: **“M”**.
- Clique nas células mescladas **“(I3:I4)”** e digite a seguinte função:

  =“(”&(D3+D4)/2&“;”&“ ”&(F3+F4)/2&“)”

  Esta é a função do Excel usada para calcular o par ordenado formado pelas coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, que substitui a fórmula (3.6).

O exemplo 3.3.1 resolvido anteriormente foi o de determinar o ponto médio do segmento de reta de extremidades $A(1,-7)$ e $B(3,-5)$. Faremos o mesmo exemplo usando esta planilha. Então, devemos substituir as coordenadas dos pontos da planilha anterior, pelos pontos acima para calcular as coordenadas do ponto médio usando o Excel.

Resolução no Excel:

Para isto, faça o seguinte:

- Substitua as coordenadas do ponto $A(1,-7)$, digitando “$1''$ na célula **“D3”** e “$7''$ na célula **“F3”**;
- Substitua as coordenadas do ponto $B(3,-5)$, digitando “$3''$ na célula **“D4”** e “ $-5''$ na célula **“F4”**;
- Diminua a largura da coluna **“H”** para **“15,00”**;
- Aumente a largura da coluna **“I”** para **“23,00”**;

Observe como está a planilha, após as alterações acima, como mostra a figura 71

Figura 71 – Ponto médio de um segmento de reta (Planilha).

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Esta planilha já está funcionando corretamente, mas ainda é necessário protegê-la e salvá-la. Faça isso, assim como foi feito na subsubseção 3.2.1.1

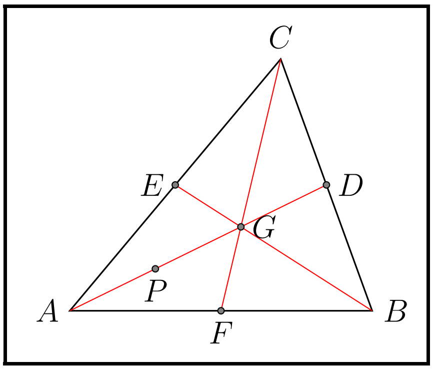
3.4 Baricentro de um triângulo

Inicialmente é necessário entender o que é mediana de um triângulo. Segundo (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p.104), "*Mediana de um triângulo é um segmento de reta cujas extremidades são um dos vértices do triângulo e o ponto médio do lado oposto a ele.*"

Agora é possível entender a definição de baricentro. Segundo (BARROSO, 2013, p.622), "*O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção de suas três medianas.*"

Existe uma importante relação que diz que o baricentro "*...divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão de 2 para 1, a partir do vértice do triângulo para o ponto médio do lado oposto ao vértice.*" (BARROSO, 2013, p.622) e ainda que "*O baricentro corresponde ao centro de equilíbrio de um triângulo.*" (SOUZA, 2013, p.155).

Figura 72 – Medianas e baricentro de um triângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Verifica-se no triângulo ABC da figura 72, conforme definições citadas acima, que as medianas são os segmentos de retas: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Todas ligam o vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto ao vértice.

Já o ponto de intersecção das três medianas, determinam o ponto G, que é o baricentro do triângulo ABC, que divide a mediana em dois segmentos na razão de 2 para 1, a partir do vértice para o ponto médio e que ele é o centro de gravidade do triângulo, podendo equilibrá-lo com um alfinete apoiado em seu baricentro.

Para mostrar que o baricentro G divide a mediana $\overline{AD}$ em dois segmentos de medidas na razão de 2 para 1 e obter $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GD}$, como se viu na figura 72, antes, temos que mostrar que as três medianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ divide o triângulo ABC em seis triângulos menores de mesma área.

Para isso, considere o triângulo ABG. Como F é o ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{GF}$ é mediana do triângulo ABG e divide esse triângulo em dois triângulos de mesma área, AFG e BFG, pois, ambos têm bases de mesma medida ($\overline{AF} = \overline{BF}$, porque F é ponto médio) e mesma altura. Assim, a área do triângulo AFG "$A_{(AFG)}$" é igual a área do triângulo BFG "$A_{(BFG)}$". Denotaremos essa área por A_1.

De forma análoga, no triângulo BCG, $\overline{GD}$ é a mediana e divide o referido triângulo, em dois triângulos de mesma área: $A_{(BDG)} = A_{(CDG)} = A_2$.

Da mesma forma, no triângulo ACG, onde $\overline{GE}$ é a mediana, temos: $A_{(AEG)} = A_{(CEG)} = A_3$.

Considere agora, o triângulo ABC e a mediana $\overline{AD}$. Assim:

$$A_{(ABD)} = A_{(ACD)}$$

$$A_{(AFG)} + A_{(BFG)} + A_{(BDG)} = A_{(AEG)} + A_{(CEG)} + A_{(CDG)}$$

$$A_1 + A_1 + \cancel{A_2} = A_3 + A_3 + \cancel{A_2} \;\Rightarrow\; \cancel{2}A_1 = \cancel{2}A_3 \;\Rightarrow\; \boxed{A_1 = A_3}$$

No triângulo ABC e mediana $\overline{BE}$, temos:

$$A_{(ABE)} = A_{(BCE)}$$

$$A_{(AEG)} + A_{(AFG)} + A_{(BFG)} = A_{(BDG)} + A_{(CDG)} + A_{(CEG)}$$

$$\cancel{A_3} + A_1 + A_1 = A_2 + A_2 + \cancel{A_3} \;\Rightarrow\; \cancel{2}A_1 = \cancel{2}A_2 \;\Rightarrow\; \boxed{A_1 = A_2}$$

Ora, se $A_1 = A_2$ e $A_1 = A_3$, então $A_2 = A_3$. Logo, todas as áreas dos triângulos menores são iguais.

Para mostrar que $\overline{AG} = 2\overline{GD}$, considere o triângulo ACD, que é formado por três triângulos de mesma área A, sendo sua área total igual a $3A$. Observe que o triângulo ACG de base $\overline{AG}$, tem área igual a $2A$, pois, é a soma das áreas dos triângulos AEG e CEG. Já o triângulo CDG, de base $\overline{GD}$, tem área igual a A.

Como a fórmula para calcular a área de um triângulo é $\dfrac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$A_{(CDG)} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{\overline{GD} \cdot h}{2} \tag{3.7}$$

$$A_{(ACG)} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 2A = \frac{\overline{AG} \cdot h}{2} \tag{3.8}$$

Substituindo o resultado de 3.7 em 3.8, obtemos:

$$2A = \frac{\overline{AG} \cdot h}{2} \Rightarrow \cancel{2}\frac{\overline{GD} \cdot h}{\cancel{2}} = \frac{\overline{AG} \cdot h}{2} \Rightarrow \overline{GD} \cdot \cancel{h} = \frac{\overline{AG} \cdot \cancel{h}}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{AG} = 2\overline{GD}}$$

Logo, o baricentro G, divide a mediana em dois segmentos de medidas na razão de 2 para 1.

Para determinar as coordenadas de forma geral do baricentro, considere o triângulo da figura 72 e o ponto P como ponto médio do segmento de reta $\overline{AG}$. Note que D é o ponto médio de $\overline{BC}$. Assim:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} \quad e \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} \tag{3.9}$$

Como P é o ponto médio do segemnto de reta $\overline{AG}$, temos:

$$x_P = \frac{x_A + x_G}{2} \quad e \quad y_P = \frac{y_A + y_G}{2} \tag{3.10}$$

Observe também que G é o ponto médio do segmento de reta $\overline{PD}$, então:

$$x_G = \frac{x_P + x_D}{2} \qquad \text{e} \qquad y_G = \frac{y_P + y_D}{2}$$

$$2x_G = x_P + x_D \quad e \quad 2y_G = y_P + y_D \tag{3.11}$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.11), vem:

$$\begin{aligned}
2x_G &= x_P + x_D & \text{e} \quad 2y_G &= y_P + y_D \\
2x_G &= \frac{x_A + x_G}{2} + \frac{x_B + x_C}{2} & \text{e} \quad 2y_G &= \frac{y_A + y_G}{2} + \frac{y_B + y_C}{2} \\
2x_G &= \frac{x_A + x_G + x_B + x_C}{2} & \text{e} \quad 2y_G &= \frac{y_A + y_G + y_B + y_C}{2} \\
4x_G &= x_A + x_G + x_B + x_C & \text{e} \quad 4y_G &= y_A + y_G + y_B + y_C \\
4x_G - x_G &= x_A + x_B + x_C & \text{e} \quad 4y_G - y_G &= y_A + y_B + y_C \\
3x_G &= x_A + x_B + x_C & \text{e} \quad 3y_G &= y_A + y_B + y_C
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$

Assim, o baricentro $G(x_G, y_G)$ é dado por:

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)} \tag{3.12}$$

Exemplo 3.4.1 - Um paisagista fez um jardim gramado de forma triangular em em seu quintal, cujos vértices possuem as coordenadas $A(2,7), B(5,3)$ e $C(2,2)$ em metros. Ele deseja colocar um aspersor para molhar a grama exatamente no meio do jardim, num ponto equidistante dos pontos A, B e C. Em que local deve fixar o aspersor?

Resolução:

O local onde vai ser fixado o aspersor é o baricentro do triângulo. Para determinar as coordenadas do baricentro G, substitui os pontos A, B e C que são vértices do triângulo ABC na fórmula (3.12). Assim:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$
$$G\left(\frac{2+5+2}{3}, \frac{7+3+2}{3}\right)$$
$$G\left(\frac{9}{3}, \frac{12}{3}\right)$$
$$\boxed{G(3,4)}$$

Logo, o paisagista precisa fixar o aspersor exatamente no ponto $G(3,4)$

3.4.1 Baricentro de um triângulo, usando o **Excel 2016**

Para fazer a planilha que permite calcular as coordenadas do baricentro de um triângulo, tendo os seus vértices, utilizando o **Excel 2016**, proceda da seguinte forma:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"Baric"**. Esta planilha será usada para calcular as coordenadas do **baricentro** de um triângulo;
- Em seguida, faz-se uma cópia da planilha anterior **"PM"** seguindo todos os passos descritos na subseção 3.3.1.

Na planilha copiada, faz-se as seguintes alterações:

- Clique em cima do texto **“Ponto Médio de um segmento de reta.”** e o altere. Digite: **“Baricentro de um triângulo”**;
- Da mesma forma, altere o texto **“Ponto Médio.”** para **“Baricentro.”** e **“Pontos”** para **“Vértices”**;
- Clique com o botão direito do mouse em cima do número da linha **“4”** e em seguida clique na opção **“Inserir”** na janela que exibir, para incluir mais uma linha;
- Selecione as células **“(B3:G3)”**, copie e cole nas células **“(B4:G4)”**;
- Na célula **“B4”**, digite: **“B”** e na célula **“B5”** digite: **“C”**;
- Selecione as células **“(B4:G4)”** e altere a cor do plano de fundo para: **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 40%”**
- Clique nas células mescladas **“(H3:H4)”** e digite: **“G”**.
- Altere a largura das colunas **“B”** e **“H”** para **“12,00”** e **“I”** para **“23,00”**;
- Clique nas células mescladas **“(I3:I4)”**, digite a seguinte função: **=“(”& ARRED((D3+D4+D5)/3;1)&“;”&“ ”&ARRED((F3+F4+F5)/3;1)&“)”** e tecle **“Enter”**.

A função acima do Excel é a que calcula as coordenadas do baricentro com uma casa decimal, se for o caso, que substitui a fórmula (3.12).

Na sequência serão digitadas as coordenadas dos vértices do triângulo dado no exemplo 3.4.1, da seção 3.4, cujos vértices são $A(2,7), B(5,3)$ e $C(2,2)$.

Resolução no Excel:

Para isso, faça o seguinte:

- Nas células **“D3”** digite: **“2”** e **“F3”** digite: **“7”**, que são as coordenadas do vértice A;
- Nas células **“D4”** digite: **“5”** e **“F4”** digite: **“3”**, que são as coordenadas do vértice B;

- Nas células **"D5"** digite: **"2"** e **"F5"** digite: **"2"**, que são as coordenadas do vértice C;
- Proteja a planilha e salve-a, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Observe na figura 73 como ficou a planilha após efetuar todas as alterações solicitadas. Ela está pronta para calcular as coordenadas do baricentro de um triângulo. Basta inserir as coordenadas dos vértices do triângulo na planilha.

Figura 73 – Baricentro de um triângulo (Planilha).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Baricentro de um triângulo.								
2		Vértices	(	x	;	y	)	Baricentro		
3		A	(	2	;	7	)	G (3; 4)		
4		B	(	5	;	3	)			
5		C	(	2	;	2	)			

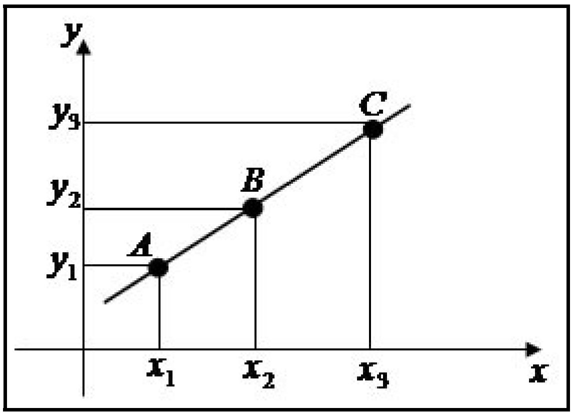
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.5 Condição de alinhamento de três pontos

Seja $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos quaisquer no plano cartesiano.

Verifique que na figura 74 que os três pontos A, B e C estão alinhados e, portanto, são colineares.

Figura 74 – Três pontos alinhados.



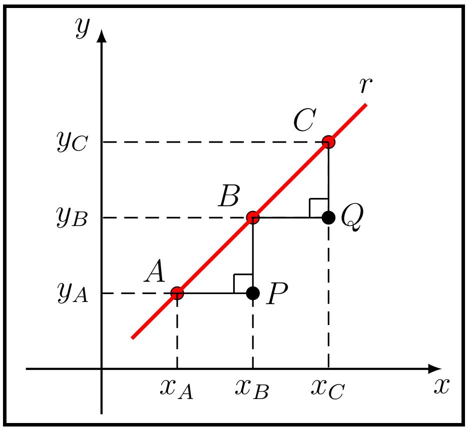
Fonte: (SILVA, 2018c).

Segue abaixo duas proposições que envolvem pontos alinhados.

Proposição 3.5.1 - *Três pontos A, B e C estão alinhados ou são colineares se, e somente se, pertencerem à mesma reta.*

Para demonstrar esta proposição, considere três pontos distintos no plano cartesiano $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Suponha que eles estejam alinhados ou são colineares e que pertencem à mesma reta r não paralela a nenhum dos eixos coordenados. Assim, obtém-se a seguinte representação gráfica conforme a figura 75.

Figura 75 – Reta contendo dois pontos A, B e C.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Observe que os ângulos $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são congruentes (iguais a 90°) e $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}C$ também são pela condição de paralelismo em que os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ são paralelos ao eixo x. Desta forma, pelo critério AA (Ângulo, Ângulo), os triângulos APB e BQC são semelhantes. Então, pelo Teorema de Tales, obtém-se:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{QC}} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

Aplicando a propriedade das proporções, vem:

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) = (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) - (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A) = 0$$

Desenvolvendo os produtos aplicando a propriedade distributiva, segue que:

$$x_By_C - x_By_B - x_Ay_C + x_Ay_B - (x_Cy_B - x_Cy_A - x_By_B + x_By_A) = 0$$

$$x_By_C - \cancel{x_By_B} - x_Ay_C + x_Ay_B - x_Cy_B + x_Cy_A + \cancel{x_By_B} - x_By_A = 0$$

$$x_By_C - x_Ay_C + x_Ay_B - x_Cy_B + x_Cy_A - x_By_A = 0$$

$$\boxed{x_Ay_B + x_By_C + x_Cy_A - x_Ay_C - x_By_A - x_Cy_B = 0} \tag{3.13}$$

Logo, a equação 3.13 é uma condição suficiente para o alinhamento dos pontos A, B e C. Consequentemente, pertencem à mesma reta.

Proposição 3.5.2 - *Se três pontos: $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, então o determinante D da matriz formada pelas suas coordenadas cartesianas é igual a 0 (zero).*

No caso desta proposição, basta mostrar que o determinante D da matriz formada pelos pontos A, B e C é equivalente à equação 3.13 da proposição anterior. Para isso, faça o seguinte:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Pela "Regra de Sarrus", repete-se as duas primeiras colunas e somam-se a multiplicação das três diagonais principais e diminuem-se pela multiplicação das três diagonais secundárias.

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 & x_A & y_A \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \\ x_C & y_C & 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$$

$$D = x_A y_B + y_A x_C + x_B y_C - x_C y_B - y_C x_A - x_B y_A$$

$$\boxed{\mathrm{D} = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_A y_C - x_B y_A - x_C y_B} \tag{3.15}$$

Observe que o primeiro termo da equação 3.13 corresponde ao determinante D da equação 3.15 e são equivalentes. Assim, $D = 0$.

Logo, se três pontos A, B e C estão alinhados, então o determinante $D = 0$. Além disso, a recíproca também é verdadeira: Se $D = 0$, então os pontos A, B e C estão alinhados ou são colineares.

Exemplo 3.5.1 -- Verifique se os pontos $A(0,1), B(-3,2)$ e $C(4,3)$ são vértices de um triângulo.

Resolução:

Para verificar se os pontos A, B e C são vértices de um triângulo, eles não podem ser colineares e, portanto, o determinante D tem que ser diferente de 0 (zero). Então, calcula-se o determinante formado pelos três pontos, utilizando a fórmula (3.14):

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a "Regra de Sarrus", temos:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

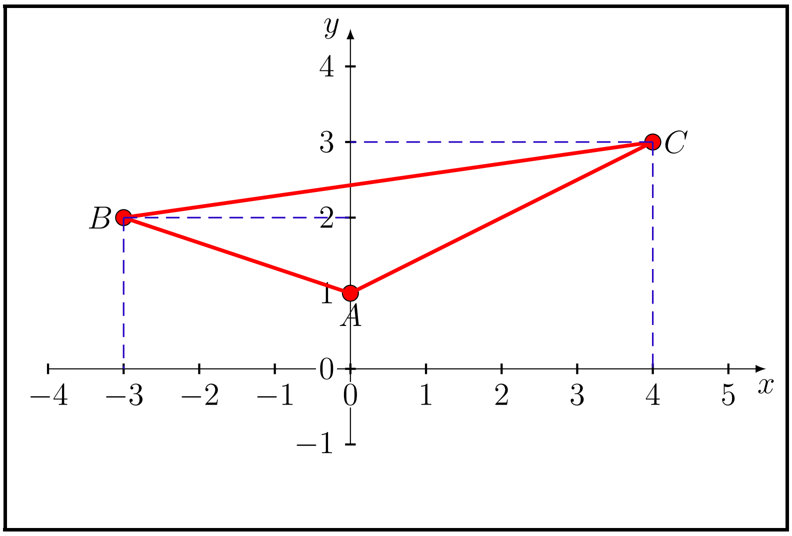
$$\mathrm{D} = 0.2.1 + 1.1.4 + 1.(-3).3 - 4.2.1 - 3.1.0 - 1.(-3).1$$

$$\mathrm{D} = 0 + 4 - 9 - 8 - 0 + 3$$

$$\boxed{D = -10}$$

Como D $\neq 0$, então os pontos A, B e C **não** são colineares e, portanto, são vértices de um triângulo, como se vê também na figura 76:

Figura 76 – Três pontos não alinhados no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Exemplo 3.5.2 - Os pontos $A(-1,-2), B(1,2)$ e $C(3,6)$ são colineares?

Resolução:

Para saber se os pontos A, B e C são colineares, pela proposição 3.5.1, eles tem que pertencer à mesma reta e pela proposição 3.5.2, o determinante formado por eles tem que ser igual a 0 (zero). Então, calculando o determinante D formado pelos três pontos, temos:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

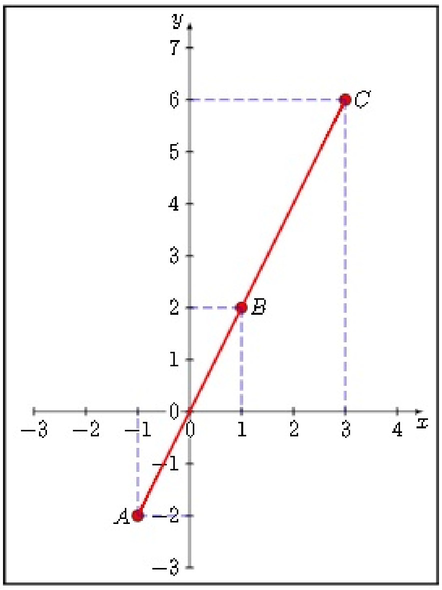
$$D = (-1).2.1 + (-2).1.3 + 1.1.6 - 3.2.1 - 6.1.(-1) - 1.1.(-2)$$

$$D = -2 - 6 + 6 - 6 + 6 + 2$$

$$\boxed{D = 0}$$

Como D = 0, então os pontos A, B e C **são colineares**, como se vê também na figura 77.

Figura 77 – Três pontos alinhados.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

3.5.1 Condição de alinhamento de três pontos, usando o **Excel 2016**

Para criar uma planilha que permite identificar se três pontos estão alinhados, utilizando o **Excel 2016**, proceda da seguinte forma:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"Ca3p"**. Esta planilha será usada para verificar se três pontos estão alinhados ou não.
- Em seguida, faz-se uma cópia da planilha anterior **"Baric"** seguindo todos os passos descritos na subseção 3.3.1.

Na planilha copiada, faz-se as seguintes alterações:

- Clique em cima do texto **"Baricentro de um triângulo."** e o altere. Digite: **"Condição de alinhamento de três pontos."**;
- Da mesma forma, altere o texto **"Baricentro."** para **"Valor do Determinante."** e altere também a cor da fonte para **"Amarela"**, altere o texto **"Vértices"** para **"Pontos"**;

- Selecione as células mescladas **“(H3:I5)”**, clique na guia ***“Página Inicial”***, no grupo ***“Alinhamento”*** e em ***“Mesclar e Centralizar”*** para desmesclar as referidas células;
- Selecione as células **“(H4:I4)”** e mescle-as, clicando na guia ***“Página Inicial”***, no grupo ***“Alinhamento”*** e em ***“Mesclar e Centralizar”***;
- De forma análoga, mescle as células **“(H5:I5)”**;
- Clique nas células mescladas **“(H4:I4)”**, digite: **“Resultado”**; altere o tamanho da fonte para **“16”** e a cor da fonte para **“Amarela”**;
- Selecione as células **“(H3:I3)”** e altere a cor do plano de fundo para: **“Azul, Ênfase 5, Mais Claro 40%”**;
- Selecione as células **“(H4:I4)”** e altere a cor do plano de fundo para: **“Vermelho escuro”**;
- Selecione as células **“(H5:I5)”** e altere a cor do plano de fundo para: **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 80%”**;
- Clique na célula **“H3”**, digite: “**D =**” e alinhe à direita;
- Clique na célula **“I3”**, digite a função: **=D3*F4+F3*D5+D4*F5-D5*F4-F5* D3-D4*F3** e tecle **“Enter”**. Esta é a função que permite calcular o determinante da matriz formada pelos três pontos, o qual permite afirmar se eles são colineares ou não;
- Clique com o botão direito do mouse na célula **“I3”** e escolha a opção **“Formatar células”**. Na janela que abrir clique na aba **“Número”** e na categoria **“Número”** para formatar esta célula para número. Depois alinhe a referida célula à esquerda;
- Clique nas células mescladas **“(H5:I5)”** e digite a função: **“=SE(I3=0;"Os pontos estão alinhados";"Os pontos NÃO estão alinhados")”** e altere o tamanho da fonte para **“16”**. Esta é a função que diz se os pontos estão alinhados ou não, de acordo com o resultado do determinante que é mostrado na célula **“I3”**;
- Altere a largura das colunas **“B”** para **“10,00”** e **“H”** para **“23,00”**;
- Proteja a planilha e salve-a, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Na sequência serão digitadas as mesmas coordenadas dos três pontos dados no mesmo exemplo 3.5.1, da seção 3.5, para verificar se são vértices de um triângulo, cujos pontos são $A(0,1), B(-3,2)$ e $C(4,3)$.

Resolução no Excel:

Para isso, faça o seguinte:

- Nas células **"D3"** digite: **"0"** e **"F3"** digite: **"1"**, que são as coordenadas do vértice A;
- Nas células **"D4"** digite: **"$-$3"** e **"F4"** digite: **"2"**, que são as coordenadas do vértice B;
- Nas células **"D5"** digite: **"4"** e **"F5"** digite: **"3"**, que são as coordenadas do vértice C;
- Salve a planilha.

Veja como ficou a planilha com o resultado do exemplo acima, que calculou o determinante da matriz formada pelos três pontos dados e verificou se estão alinhados ou não, como mostra a figura 78

Logo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

Figura 78 – Condição de alinhamento de três pontos: não alinhados (Planilha).

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

De forma análoga, resolva o exemplo 3.5.2, que é para verificar se os pontos $A(-1,-2), B(1,2)$ e $C(3,6)$ são colineares, conforme a seção 3.5.

Veja como ficou a planilha com o resultado do exemplo acima, que calculou o determinante da matriz formada pelos três pontos dados e verificou se estão alinhados ou não, como mostra a figura 79.

Portanto, os pontos A, B e C são colineares.

Figura 79 – Condição de alinhamento de três pontos: alinhados (Planilha).

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.6 Área e perímetro de um triângulo

É possível calcular o perímetro e a área de um triângulo qualquer, tendo os três vértices, através da geometria, utilizando o determinante da matriz formada pelos três pontos (vértices).

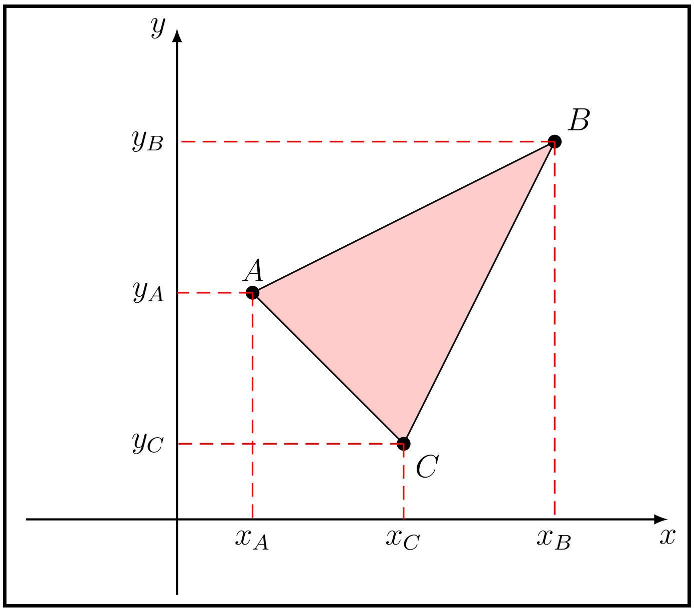
Observação 3.6.1 *Lembre-se que o perímetro de um triângulo ABC é a soma dos lados e, portanto: $2p = d_{\overline{AB}} + d_{\overline{BC}} + d_{\overline{AC}}$, considerando o perímetro como $2p$.*

Proposição 3.6.1 *A **área A** de um triângulo qualquer de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dado por: $A = \dfrac{|D|}{2}$, onde D é o determinante da matriz formada pelos pontos A, B e C.*

Assim:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow x_A y_B + y_A x_C + x_B y_C - x_C y_B - y_C x_A - x_B y_A.$$

Figura 80 – Área do triângulo ABC.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Veja a representação gráfica no plano cartesiano dos vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $c(x_C, y_C)$ de um triângulo qualquer, como mostra a figura 80.

Observe que a área do triângulo é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \tag{3.16}$$

onde b é a base e h é a altura.

Na figura 80, considere:

$$b = \overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \tag{3.17}$$

A altura h do triângulo ABC é dada pela distância do ponto A à equação da reta $\overline{BC}$. Assim:

$$h = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3.18}$$

.

Determine a equação da reta que passa pelos pontos B e C, através do determinante D da matriz formada por esses dois pontos, como segue:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \\ x_C & y_C & 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot y_B + y \cdot x_C + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B - y_C \cdot x - x_B \cdot y = 0$$

$$\underbrace{(y_B - y_C)}_{a} x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b} y + \underbrace{x_B y_C - x_C y_B}_{c} = 0 \tag{3.19}$$

Substitue-se (3.19) em (3.18):

$$h = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B y_C - x_C y_B|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} \tag{3.20}$$

Substitue-se (3.20) e (3.17) em (3.16):

$$A = \frac{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \cdot \dfrac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B y_C - x_C y_B|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}}{2}$$

$$A = \frac{\cancel{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}} \cdot \dfrac{|y_B x_A - y_C x_A + x_C y_A - x_B y_A + x_B y_C - x_C y_B|}{\cancel{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}}}{2}$$

$$A = \frac{|x_A y_B + y_A x_C + x_B y_C - x_C y_B - y_C x_A - x_B y_A|}{2}$$

Observe que o resultado que está dentro do módulo é o determinante D da matriz formada pelos três pontos vértices do triângulo, como visto em (3.14). Logo:

$$\boxed{\text{A} = \frac{|D|}{2}} \tag{3.21}$$

Como exemplo, resolva o seguinte exemplo:

Exemplo 3.6.1 - Paulo vai pintar uma parte do fundo da parede da sala formando uma região triangular cujos vértices são $A(4, 0), B(-1, 1)$ e $C(-3, 3)$ em metros. Qual será a área pintada?

Resolução:

Para resolver este exemplo, primeiro calcula-se o determinante da matriz formada pelos vértices do triângulo, com a fórmula do determinante (3.14), como segue:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de **"Sarrus"**, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = 4.1.1 + 0.1.(-3) + 1.(-1).3 - (-3).1.1 - 3.1.4 - 1.(-1).0$$

$$D = 4 + 0 - 3 + 3 - 12 - 0$$

$$\boxed{D = -8}$$

Agora para calcular a área do triângulo utiliza-se a fórmula (3.21). Substituindo o valor de determinante D, temos:

$$A = \frac{|-8|}{2} \quad \Rightarrow \quad A = |-4| \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 4}$$

Logo, a área da parede da sala que será pintada será de 4 m^2.

Exemplo 3.6.2 - Considerando o exemplo anterior, se Paulo for fixar uma fita contornando o triângulo desenhado na parede da sala, quantos metros de fita ele deverá comprar aproximadamente?

A medida do comprimento da fita que contorna o triângulo é o perímetro "$2p$", conforme proposição 3.6.1, que é calculado utilizando as fórmulas (3.5) e (3.4), com $A(4,0), B(-1,1)$ e $C(-3,3)$. Segue que:

$$2p =$$
$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} + \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$2p = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(-3-(-1))^2 + (3-1)^2} + \sqrt{(-3-4)^2 + (3-0)^2}$$

$$2p = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2} + \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} + \sqrt{(-7)^2 + (3)^2}$$

$$2p = \sqrt{25+1} + \sqrt{4+4} + \sqrt{49+9}$$

$$\boxed{2p = \sqrt{26} + \sqrt{8} + \sqrt{58} \text{ u.m.}}$$

ou ainda, com aproximação de duas casas decimais:

$$2p \cong 5,10 + 2,83 + 7,61$$

Logo, Paulo deverá comprar aproximadamente 15,54 m de fita.

$$\boxed{2p \cong 15,54 \text{ u.m.}}$$

3.6.1 Área de um triângulo, usando o **Excel 2016**

Para criar a planilha que permite calcular a área de um triângulo através de seus vértices, utilizando o **Excel 2016**, proceda da seguinte forma:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"APT"**. Esta será usada para calcular a área e o perímetro de um triângulo através de seus três vértices.
- Em seguida, faz-se uma cópia da planilha **"Baric"** seguindo todos os passos descritos na subseção 3.3.1.

Na planilha copiada, faz-se as seguintes alterações:

- Clique em cima do texto **"Baricentro de um triângulo."** e o altere. Digite: **"Área e perímetro de um triângulo."** e altere o tamanho da fonte do texto para **"15"**;
- Da mesma forma, altere o texto **"Baricentro."** para **"Área do triângulo ABC."**;
- Clique nas células **"(H3:I3)"** e na guia **"Página Inical"**, no grupo **"Alinhamento"**, clique em **"Mesclar e Centralizar"** para desfazer a mesclagem anterior;
- Agora, mescle as células **"(H4:I4)"**, digite: **"Perímetro do triângulo ABC"**, altere o tamanho da fonte do texto para **"16"**, altere a cor do plano de fundo para **"Azul"** e a cor da fonte para **"Branca"**;
- Clique nas células **"I3, I5"** para selecioná-las. Depois pressione as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar Células"**;
- Na janela que abrir, clique na guia **"Número"**, na categoria **"Geral"** e depois em **"OK"**;

- Alinhar à direita as células **"H3, H5"** e à esquerda as células **"I3, I5"**;

- Clique na célula **"H3"**, digite a função: **=SE(INT(I3)=I3; "A ="; "A ≅")** e tecle **"Enter"**. Esta é a função que analisa se **A** é igual ou aproximado;

- Clique na célula **"H5"**, digite a função: **=SE(INT(I5)=I5; "2p ="; "A ≅")** e tecle **"Enter"**. Esta é a função que analisa se **2p** é igual ou aproximado;

- Clique na célula **"I3"**, digite a função: **=ARRED((ABS(D3*F4+F3*D5 +D4*F5-D5*F4-F5*D3-D4*F3))/2;2)** e tecle **"Enter"**. Esta é a função que permite calcular o valor real ou aproximado da área de um triângulo no Excel com arredondamento de duas casas decimais;

- Clique na célula **"I5"**, digite a função: **=ARRED(RAIZ((D4-D3)^2+(F4-F3)^2)+RAIZ((D5-D3)^ 2+(F5-F3)^ 2)+RAIZ((D5-D4)^ 2+(F5-F4)^ 2);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor real ou aproximado do perímetro **"2p"** do mesmo triângulo com arredondamento de duas casas decimais;

Observe também que as funções acima do Excel são as que substituem as fórmulas (3.4), (3.5) e (3.21).

Em seguida, faça o seguinte:

- Altere a largura das colunas **"H"** e **"I"** para **"21,00"**;

- Desbloqueie as células: **"B3, B4, B5, H3, H5"**.

- Proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Em seguida, usando a planilha do Excel, resolva os exemplos 3.6.1 e 3.6.2, da seção 3.6, cujos vértices são $A(4,0), B(-1,1)$ e $C(-3,3)$.

Resolução no Excel:

Para isso, faça o seguinte:

- Nas células **"D3"** digite: **"4"** e **"F3"** digite: **"0"**, que são as coordenadas do vértice A;

- Nas células **"D4"** digite: **"$-$1"** e **"F4"** digite: **"1"**, que são as coordenadas do vértice B;

- Nas células **"D5"** digite: **"−3** e **"F5"** digite: **"3"**, que são as coordenadas do vértice C;
- Salve a planilha clicando no ícone .

Observe como ficou a planilha na figura 81 que calculou a área exata e o perímetro aproximado de um triângulo.

Figura 81 – Área e perímetro de um triângulo (Planilha).

Área e perímetro de um triângulo.						
Vértices	(	x	;	y	)	Área do triângulo ABC
A	(	4	;	0	)	A = 4
B	(	-1	;	1	)	Perímetro de triângulo ABC
C	(	-3	;	3	)	2p ≅ 15,54

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.7 Equação geral da reta

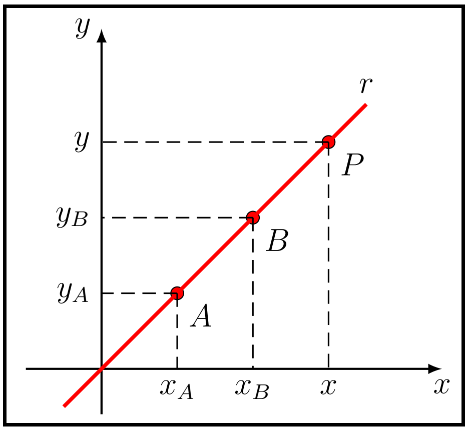
Sejam dois pontos com coordenadas conhecidas $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, não coincidentes e seja um terceiro ponto genérico $P(x, y)$ de coordenadas desconhecidas, todos contidos numa mesma reta do plano cartesiano. Pela geometria analítica pode-se determinar a equação geral dessa reta utilizando conceitos relacionados a matrizes.

Em relação à definição, segundo Paiva, segue que:

> "Toda reta do plano cartesiano xOy é gráfico de uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáves e a, b e c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulas. Reciprocamente, toda equação dessa forma representa uma reta do plano cartesiano. Essa equação é chamada de **equação geral** da reta."(PAIVA, 2013, p.57).

Para determinar a equação geral da reta formada por dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencentes à reta r, como se observa na figura 82.

Figura 82 – Reta contendo dois pontos A e B e um ponto genérico P.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

$$\underbrace{(y_A - y_B)}_{a} x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b} y + \underbrace{x_A . y_B - x_B . y_A}_{c} = 0$$

Como, nesse caso, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos chamados de coeficientes. Assim, podemos fazer:

$$a = (y_A - y_B) \tag{3.23}$$

$$b = (x_B - x_A) \tag{3.24}$$

$$c = x_A . y_B - x_B . y_A \tag{3.25}$$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta:**

$$\boxed{\boldsymbol{ax + by + c = 0}} \tag{3.26}$$

Como exemplo, resolva o seguinte problema:

Exemplo 3.7.1 - (PM Paraná – Cops 2010). Considere uma colisão de dois veículos. Num sistema de coordenadas cartesianas as posições finais destes veículos após a colisão são dadas nos pontos $A(2, 2)$ e $B(4, 1)$. Para compreender como ocorreu a colisão é importante determinar a trajetória retilínea que passa pelos pontos A e B.

Essa trajetória é dada pela equação:

a) x – y = 0

b) x + y – 5 = 0

c) x – 2y + 2 = 0

d) 2x + 2y – 8 = 0

e) x + 2y – 6 = 0

Resolução:

Para resolver este problema, calcula-se o determinante da matriz formada pelos dois pontos, usando a fórmula do determinante e igualando a 0 (zero), como segue:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo os pontos $A(2, 2)$ e $B(4, 1)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de **"Sarrus"**, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x.2.1 + y.1.4 + 1.2.1 - 4.2.1 - 1.1.x - 1.2.y = 0$$

$$2x + 4y + 2 - 8 - x - 2y = 0$$

$$2x - x + 4y - 2y + 2 - 8 = 0$$

$$\boxed{x + 2y - 6 = 0}$$

Portanto, a resposta correta é a letra **“e”**.

3.7.1 Equação geral da reta, usando o **Excel 2016**

Para fazer a planilha que permite calcular os valores dos coeficientes (constantes reais) a, b e c e determinar a equação geral da reta, utilizando o **Excel 2016**, proceda da seguinte forma:

- Crie a **“planilha1”** e renomeie-a para **“EGR”**. Esta planilha será usada para calcular os valores dos coeficientes (constantes reais) a, b e c e determinar a equação geral da reta.

Nesta planilha, inicia-se agora a formatação para inserir os dados na mesma, conforme segue:

- Altere a largura das colunas **“C, E, G”** para **“1,00”**; das colunas **“A, H, L, N”** para **“2,00”**; das colunas **“D, F, I, J, K”** para **“7,00”**; da coluna **“B”** para **“10,00”** e da coluna **“M”** para **“32,00”**;
- Altere a largura das linhas **“2, 3, 4”** para **“27,00”**;
- Na célula **“B2”**, digite: **“Pontos”**; em **“B3”**, digite: **“A”**; em **“B4”**, digite: **“B”**; em **“C2, C3 e C4”**, digite: **“(”**; em **“D2”**, digite: **“x”**; em **“E2, E3, E4”**, digite: **“;”**; em **“F2”**, digite: **“y”** e em **“G2, G3, G4”**, digite: **“)”**;
- Mesclar e centralizar as células **“(I2:K2)”** e as células **“(M3:M4)”**;
- Nas células mescladas **“(I2:K2)”**, digite: **“Coeficientes”**
- Na célula **“I3”**, digite: **“a”**; em **“J3”**, digite: **“b”**; em **“K3”**, digite: **“c”**; em **“M2”**, digite: **“Equação geral da reta”**;
- Selecione as células **“(B2:M4)”**, clique em **“Página Inicial”** na faixa de opções; na guia **“Alinhamento”**, clique em **“Alinhar no Meio”** e em **“Centralizar”** e na guia **“Fonte”**, clique em **“Negrito”**;
- Ainda com as células acima selecionadas, altere a fonte para **“Arial”** e o tamanho da fonte para **“20”**.

- Em seguida, altere o tamanho da fonte das células **"B2"** e **"M2"** e das células mescladas **"(I2:K2)"** para **"16"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Preta"**, das células: **"(A1:N1), (A5:N5), (A2:A4), (H2:H4), (L2:L4), (N2:N4)"**;
- Altere também a cor do plano de fundo para **"Azul"** e a cor da fonte para **"Branca"**, das células: **"(B2:G2)"**, **"M2"** e das células mescladas: **"(I2:K2)"**;
- Agora altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Claro 40%**, das células: **"(B3:G3)"** e **"(I3:K3)"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 5, Mais Claro 80%"**, das células: **"(B4:G4); (I4:K4)"** e das células mescladas: **"(M3:M4)"**;
- Selecione as células **"(B3:G3)"**, clique em **"Página Inicial"** na faixa de opções; na guia **"Fonte"** e na setinha de **"Bordas"**, clique em **"Borda Superior"** e depois em **"Borda Inferior"**;
- Selecione agora as células **"(I3:K4)"** e clique em **"Todas as Bordas"**;
- Selecione as células **"(B3:B4)"**, clique em **"Página Inicial"** na faixa de opções e em **"Alinhar à Direita"** na guia **"Alinhamento"**;
- Ocultar as colunas da **"P"** até a coluna final e as linhas da **6** até a linha final;

Insere-se as fórmulas e funções para calcular os valores dos coeficientes a fim de determinar a equação geral da reta, depois desbloquear as células onde serão digitadas as coordenadas dos pontos A e B, proteger a planilha e, por fim, salvar.

Vimos na seção 3.7 que o coeficiente $a = y_A - y_B$, $b = x_B - x_A$ e $c = x_A \times y_B - x_B \times y_A$. Na planilha criada o valor de x_A será digitado na célula **"D3"**, de y_A na célula **"F3"**, de x_B na célula **"D4"** e de y_B na célula **"F4"**. Assim $a = F3 - F4$, $b = D4 - D3$ e $c = D3 \times F4 - D4 \times F3$.

Agora basta inserir os resultados acima na planilha, conforme segue:

- Clique na célula **"I4"** e digite: "**=F3−F4**" e tecle **"Enter"** para calcular o valor do coeficiente a;
- Clique na célula **"J4"** e digite: "**=D4−D3**" e tecle **"Enter"** para calcular o valor do coeficiente b;

- Clique na célula **“K4”** e digite: **“=D3*F4−D4*F3”** e tecle **“Enter”** para calcular o valor do coeficiente c;
- Nas células mescladas **“(M3:M4)”**, digite: =**I4&“x”&SE(J4>=0;“ + ”;“ ”)&J4&“y”&SE(K4>=0;“ + ”;“ ”)&K4&“ = 0”**. Esta é a função que determina a equação geral da reta.

E, finalizando a planilha, temos:

- Desbloqueie as células **“B3”** e **“B4”**, onde serão digitados os nomes do pontos, as células **“D3”** e **“F3”**, onde serão digitadas as coordenadas do ponto A e as células **“D4”** e **“F4”**, onde serão digitadas as coordenadas do ponto B;
- Em seguida, proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Utilize a planilha e resolva o exemplo 3.7.1 apresentado na seção 3.7, onde objetivo principal era determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(2, 2)$ e $B(4, 1)$

Resolução no Excel:

Para isso, faça o seguinte na planilha:

- Clique na célua **“D3”**, digite: **“2”**, na célua **“F3”** e digite: **“2”**, que são as coordenadas do ponto A;
- Clique na célua **“D4”**, digite: **“4”**, na célua **“F4”** e digite: **“1”**, que são as coordenadas do ponto B;
- Salve a planilha, clicando no ícone .

Veja o resultado apresentado na planilha após digitar as coordenadas dos pontos dados acima, conforme mostra a figura 83:

Figura 83 – Equação geral da reta (Planilha).

Pontos(x ; y)	Coeficientes			Equação geral da reta
A(2 ; 2)	a	b	c	1x + 2y-6 = 0
B(4 ; 1)	1	2	-6	

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

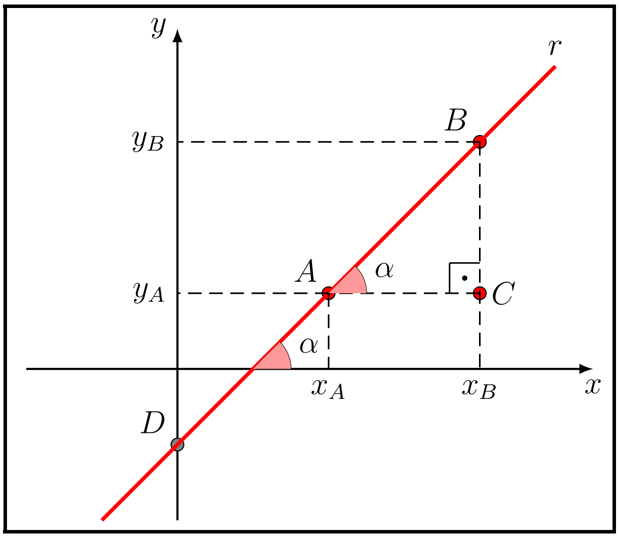
3.8 Equações fundamental e reduzida da reta

A equação fundamental da reta é toda equação da forma $\boldsymbol{y - y_A = m(x - x_A)}$, onde $\boldsymbol{m}$ representa a inclinação da reta em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$, expressa pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja: $\boldsymbol{m = tg}\alpha$, onde α é o ângulo formado entre o eixo x e a reta que contem os pontos A e B.

Já a equação reduzida da reta é da forma $\boldsymbol{y = mx + n}$, onde $\boldsymbol{m}$ é o coeficiente angular da reta em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{n}$ é o coeficiente linear que representa o valor numérico por onde a reta intercepta o eixo $\boldsymbol{y}$.

Para determinar as duas equações acima considere a figura 84 e os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, com $x_A \neq x_B$, contidos na reta r e um ponto de intersecção da mesma com o eixo y em $D(0, n)$. Considere também um ponto $C(x_B, y_A)$ fora desta reta, formando com os pontos A e B, um triângulo ABC retângulo em C.

Figura 84 – Reta contendo dois pontos quaisquer A e B e um coeficiente angular α.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Sabe-se, pela trigonometria que:

$$tg\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} \implies tg\alpha = \frac{d_{\overline{CB}}}{d_{\overline{AC}}} \implies tg\alpha = \frac{y_B - y_C}{x_C - x_A}$$

como na figura 84, $y_C = y_A$ e $x_C = x_B$ e $m = tg\alpha$, substituindo, temos:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} \tag{3.27}$$

Esta é a fórmula que será usada para calcular o valor do coeficiente angular m de uma reta r, tendo dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, com $x_A \neq x_B$.

Observação 3.8.1 - *Se r é paralela ao eixo x, temos: $\alpha = 0°$. Então $m = tg0° \Rightarrow$ m = 0.*

Observação 3.8.2 - *Se r é paralela ao eixo y, o coeficiente angular não é definido.*

Para determinar a equação fundamental da reta r não vertical que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem declividade m, considere um ponto genérico $P(x, y)$ dessa reta. Assim, partindo da fórmula do coeficiente angular m em (3.27) e substituindo na fórmula, B por P, temos:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}.$$

Multiplicando ambos os membros por $(x - x_A)$, temos:

$$m(x - x_A) = \frac{y - y_A}{\cancel{x - x_A}}\cancel{(x - x_A)}$$
$$m(x - x_A) = y - y_A$$

Ou seja:

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)} \tag{3.28}$$

No caso de determinar a equação reduzida da reta, considere a equação acima e, ainda, um ponto pertencente à reta que intercepta o eixo y no ponto $D(0, n)$. Tomando $A(x_A, y_A) = D(0, n)$ na equação fundamental, temos:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - n = m(x - 0)$$
$$y - n = mx - 0$$
$$\boxed{y = mx + n}. \tag{3.29}$$

Esta é a equação reduzida da reta, sendo m o coeficiente angular (declividade da reta) e n o coeficiente linear (ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas), com m e $n \in \mathbb{R}$ e x e y são as coordenadas de um ponto qualquer da reta.

Observação 3.8.3 *O coeficiente linear é o número real n, onde a reta intercepta o eixo y, sendo $x = 0$ e $y = n$.*

Então, para escrever uma equação da reta na forma reduzida, basta ter o valor do coeficiente angular m e do coeficiente linear n.

Tendo a equação geral da reta (3.26), determinada a partir de 2 pontos dados, é possível determinar o coeficiente angular m e o coeficiente linear n, isolando o y na referida equação, como segue:

$$ax + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad by = -ax - c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Assim:

$$\boxed{m = \frac{-a}{b}} \tag{3.30}$$

$$\boxed{n = \frac{-c}{b}} \tag{3.31}$$

Para detrminar o coeficiente linear n, tendo dois pontos A e B, substitui-se (3.25) e (3.24) em (3.31), obtendo:

$$n = \frac{-(x_A.y_B - x_B.y_A)}{x_B - x_A} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{-x_A.y_B + x_B.y_A}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{n = \frac{x_B.y_A - x_A.y_B}{x_B - x_A}} \tag{3.32}$$

É possível também determinar o valor do coeficiente linear, tendo um ponto $A(x_A, y_A)$ e o coeficiente angular m. Para isso, isola-se o y na equação fundamental da reta (3.28), como segue:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - y_A = m.x - m.x_A$$

$$y = m.x - m.x_A + y_A$$

$$y = m.x \underbrace{-m.x_A + y_A}_{n}$$

Assim:

$$\boxed{n = -m.x_A + y_A}. \tag{3.33}$$

Como exemplo, resolva o exemplo abaixo:

Exemplo 3.8.1 - Determine a equação reduzida da reta que satisfaz as seguintes condições:

a) Passa pelos pontos $A(-1, 7)$ e $B(2, 1)$;

b) Tem declividade -5 e passa pelo ponto $A(2, 1)$.

c) Sua equação geral da reta é $6x - 2y - 8 = 0$;

d) Sendo $\sqrt{2}\,x + 3y - 2 = 0$ sua equação geral;

Resolução:

- a) Para calcular o coeficiente angular m, utiliza-se a fórmula:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Substituindo os pontos $A(-1, 7)$ e $B(2, 1)$, temos:

$$m = \frac{1 - 7}{2 - (-1)}$$
$$m = \frac{-6}{3}$$
$$m = -2$$

Para calcular o coeficiente linear n utiliza-se qualquer uma das duas fórmulas abaixo, já que agora o valor de m é conhecido. Na fórmula do quadro da esquerda, utiliza-se os dois pontos $A(-1, 7)$ e $B(2, 1)$ e na fórmula do quadro da direita, utiliza-se o coeficiente angular $m = -2$ e qualquer um dos dois pontos dados, neste caso, o ponto $A(-1, 7)$. Substituindo, temos:

$n = \frac{x_B.y_A - x_A.y_B}{x_B - x_A}$ $n = \frac{2.7 - (-1).1}{2 - (-1)}$ $n = \frac{14 + 1}{2 + 1}$ $n = \frac{15}{3}$ $n = 5$	$n = -m.x_A + y_A$ $n = -(-2).(-1) + 7$ $n = -2 + 7$ $n = +5$ $n = 5$

Substituindo os coeficientes m e n na equação reduzida da reta, temos:

$$y = m.x + n$$
$$\boxed{y = -2x + 5}.$$

- b) Como a declividade é -5, então o coeficiente angular é $m = -5$.

Para calcular o valor do coeficiente linear n, utiliza-se a fórmula:

$$n = -m.x_A + y_A$$

substituindo $m = -5$ e o ponto $A(2, 1)$ na fórmula, temos:

$$n = -(-5).2 + 1$$

$$n = 10 + 1$$
$$n = 11$$

Substituindo os coeficientes m e n na equação reduzida da reta, temos:

$$y = m.x + n$$
$$\boxed{y = -5x + 11}.$$

- c) Na equação geral da reta dada, os valores dos coeficientes são: $a = 6$, $b = -2$ e $c = -8$. Substituindo esses valores na fórmula do coeficiente angular m no quadro da direita e do coeficiente linear n no quadro da esquerda, temos:

$m = \frac{-a}{b}$ $m = \frac{-6}{-2}$ $m = 3$	$n = \frac{-c}{b}$ $n = \frac{-(-8)}{-2}$ $n = -4$

Substituindo os coeficientes inteiros m e n na equação reduzida da reta, temos:

$$y = m.x + n$$
$$\boxed{y = 3x - 4}.$$

- d) Substituindo os coeficientes: $a = \sqrt{2}$, $b = 3$ e $c = -2$, temos:

$m = \frac{-a}{b}$ $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$	$n = \frac{-c}{b}$ $n = \frac{-(-2)}{3}$ $n = \frac{2}{3}$

Substituindo os coeficientes reais m e n na equação reduzida da reta, temos:

$$y = m.x + n$$
$$\boxed{y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{2}{3}}$$

3.8.1 Equação reduzida da reta, usando o **Excel 2016**

Agora será criada uma planilha que permite determinar a equação reduzida da reta: (3.29), utilizando o **Excel 2016**.

Para isso, faça o seguinte:

- Crie uma planilha e renomeie-a para **"Eqr"**. Esta será usada para determinar a equação reduzida da reta;
- Altere a largura das colunas **"A, C, E, G, H, K, R, U, W, Y, AA, AB, AE"** para **"1,00"**; das colunas **"B, L, N, P, V"** para **"5,00"**; das colunas **"I, M, O, Q, S, AC"** para **"6,00"**, das colunas **"D, F, X, Z"** para **"8,00"** e das colunas **"J, T, AD"** para **"10,00"**;
- Altere a altura das linhas **"1, 3, 8, 10"** para **"9,00"**; das linhas **"4, 5, 6, 7"** para **"25,50"** e da linha **"2, 9"** para **"30,00"**;
- Mesclar e centralizar, as células: **"(B2:AD2), (B4:J4), (L4:T4), (V4:AD4), (I5:J5), (S5:T5), (AC5:AD5), (L6:Q6), (L7:Q7), (V7:X7), (Y7:AA7), (B9:J9), (L9:T9), (V9:AD9)"**;
- Clique nas células mescladas **"B2"** e Digite: **"Equação reduzida da reta."**; em **"B4"**, Digite: **"1 - Tendo 2 pontos"**; em **"L4"**, Digite: **"2 - Tendo equação geral da reta"**; em **"V4"**, Digite: **"3 - Tendo $A(x, y)$ e m"**; em **"B5, V5"**, Digite: **"Pt"**; em **"C5, C6, C7, W5, W6"**, Digite: **"("**; em **"D5, X5"**, Digite: **"x"**; em **"E5, E6, E7, Y5, Y6"**, Digite: **";"**; em **"F5, Z5"**, Digite: **"y"**; em **"G5, G6, G7, AA5, AA6"**, Digite: **")"**; em **"I5, S5, AC5"**, Digite: **"Coeficientes"**; em **"L5"**, Digite: **"a ="**; em **"N5"**, Digite: **"b ="**; em **"P5"**, Digite: **"c ="**; em **"B6, V6"**, Digite: **"A"**; em **"B7"**, Digite: **"B"**; em **"I6, S6, AC6, V7"**, Digite: **"m ="**; em **"I7, S7, AC7"**, Digite: **"n ="**; em **"L6"**, Digite: **"Equação geral da reta"**;
- Selecione toda a planilha e altere o tipo de fonte para **"Arial"**, o tamanho para **"16"**, clique em **"Negrito"**, **"Alinhar ao Meio"** e **"Centralizar"**;
- Selecione as células mescladas **"J6, T6, AD6, J7, T7, AD7"** e clique em **"Alinhar à Esquerda"**;
- Selecione as células mescladas **"V7"** e clique em **"Alinhar à Direita"**;

- Altere o tamanho da fonte das células mescladas **“I5, S5, AC5”** para **“12”** e das células **“B2, B9, L9,V9”** para **“24”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Preta”**, das células **“(A1:AE1), (B3:AD3), (B8:AD8), (A10:AE10), (A2:A9), (H5:H7), (K4:K9), (R 5:R7), (U4:U9), (AB5:AB7), (AE2:AE9)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 5, Mais Escuro 50%”**, das células mescladas **“B2”** e altere a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Verde, Ênfase 6, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas **“B4”** e altere a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Verde, Ênfase 6, Mais Claro 40%”**, das células **“(B5:G5), (I5:J5)”** e insere **“Bordas Externas”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Verde, Ênfase 6, Mais Claro 60%”**, das células **“(B6:G6), (I6:J6)”** e insere **“Bordas Externas”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Verde, Ênfase 6, Mais Claro 80%”**, das células **“(B7:G7), (I7:J7)”** e insere **“Bordas Externas”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Verde, Ênfase 6, Mais Escuro 50%”**, das células mescladas **“B9”** e altere a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Laranja, Ênfase 2, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas **“L4”** e altere a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 40%”**, das células **“(L5:Q5), (S5:T5)”** e insere **“Bordas Externas”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 60%”**, das células **“L6, (S6:T6)”** e insere **“Bordas Externas”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 80%”**, das células **“L7, (S7:T7)”** e insere **“Bordas Externas”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Laranja, Ênfase 2, Mais Escuro 50%”**, das células mescladas **“L9”** e altere a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **‘Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas **“V4”** e altere a cor da fonte para **“Branca”**;

- Altere a cor do plano de fundo para '**Azul, Ênfase 1, Mais Claro 40%**", das células **"(V5:AA5), AC5"** e insere **"Bordas externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para '**Azul, Ênfase 1, Mais Claro 60%**", das células **"(V6:AA6), (AC6:AD6)"** e insere **"Bordas externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para '**Azul, Ênfase 1, Mais Claro 80%**", das células **"(V7:AA7), (AC7:AD7)"** e insere **"Bordas externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para '**Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 50%**", das células mescladas **"V9"** e altere a cor da fonte para **"Branca"**;
- Oculte as colunas da **"AF"** até o coluna final e as linhas da **"11"** até a linha final;

Falta, agora, inserir as funções na planilha do Excel para calcular os valores dos coeficientes angulares m e lineares n e para determinar as referidas equações geral e reduzida, nos casos apresentados abaixo:

1. Tendo dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$, contidos na reta:
2. Tendo a equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes reais com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não simultaneamente nulos;
3. Tendo um ponto qualquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$;

Para isso, faça o seguinte:

- Clique na célula **"H6"**, digite: **=ARRED((F7-F6)/(D7-D6);3)** e tecle **"Enter"**; na célula **"H7"**, digite: **=ARRED(-((D6*F7)-(D7*F6))/(D7-D6);3)** e tecle **"Enter"**; na célula **"R6"**, digite: **=SEERRO(SE(ESQUERDA(M5;1)="√";(RAIZ(EXT.TEXTO(M5;2;NÚM.CARACT(M5)))/O5)*-1; SE(ESQUERDA(M5;2)="-√";RAIZ(EXT.TEXTO(M5;3;NÚM.CARACT(M5)))/O5; -M5/O5));-RAIZ(EXT.TEXTO(M5;3;NÚM.CARACT(M5)))/O5)** e tecle **"Enter"**; na célula **"R7"**, digite: **=SE(ESQUERDA(Q5;1)="√";-1*RAIZ(EXT.TEXTO(Q5;2;NÚM.CARACT(Q5)))/O5;SE(ESQUERDA(Q5;2)="-√"; RAIZ(EXT.TEXTO(Q5; 3; NÚM.CARACT(Q5)))/O5; -Q5/O5))** e tecle **"Enter"**. Estas funções servirão apenas para cálculos auxiliares e os resultados não serão mostrados na planilha;

- Clique na célula **“J6”**, digite: **=SE(INT(H6)=H6;H6;SE(D7<D6;(F6-F7)&“/”&(D6-D7);(F7-F6)&“/”&(D7-D6)))** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$, tendo dois pontos;

- Clique na célula **“J7”**, digite: **=SE(D7>D6;SE(INT(H7)=H7; - ((D6* F7) - (D7*F6)) / (D7-D6); - ((D6*F7) - (D7*F6))& “/” &(D7-D6)); SE (INT(H7)=H7; ((D6*F7) - (D7*F6)) / (D6-D7); ((D6*F7) - (D7*F6)) & “/” &(D6-D7)))** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear $\boldsymbol{n}$, tendo dois pontos;

- Clique na célula **“T6”**, digite: **=SEERRO(SE(R6=INT(R6);R6;TEXTO ((M5/O5)*-1;“?/?”));SE(E(ESQUERDA(M5;1)=“-”;O5<0);“-”&EXT.TEXTO(M5;2;NÚM.CARACT(M5))&“/”&EXT.TEXTO(O5;2;NÚM.CARACT(O5));SE(E(O5>0;ESQUERDA(M5;1)=“-”);EXT.TEXTO(M5;2;NÚM.CARACT(M5))&“/”&ABS(O5);SE(E(O5<0;ESQUERDA(M5;1)=“√”);M5&“/”&ABS(O5);“-”&M5&“/”&ABS(O5)))))** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$, tendo os coeficientes da equação geral da reta;

- Clique na célula **“T7”**, digite: **=SEERRO(SE(R7=INT(R7);R7;TEXTO ((Q5/O5)*-1;“?/?”));SE(ESQUERDA(Q5)=“-”;“+”&EXT.TEXTO (Q5;2;NÚM.CARACT(Q5))&“/”&O5;SE(O5>0;“-”&Q5&“/”&O5; Q5&“/”&-O5)))** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear $\boldsymbol{n}$, tendo os coeficientes da equação geral da reta;

- Clique na célula **“AD6”**, digite: **=Y7** e tecle **“Enter”**. Esta função transporta o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$, digitado na célula **“Y7”**;

- Clique na célula **“AD7”**, digite: **=-Y7*X6+Z6** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear n, tendo um ponto e o coeficiente angular;

- Clique na célula **“L7”**, digite: **=M5&“x”&SE(O5>=0;“+”;“”)&O5& “y”&SE(Q5>=0;“+”; “”)&Q5&“ = 0”** e tecle **“Enter”**. Esta função determina a equação geral da reta, tendo os seus coeficientes;

- Clique na célula **“B9”**, digite: **=SE(H7<0; “y = ”&J6&“x”&J7; “y = ”&J6&“x”&“+”&J7)** e tecle **“Enter”**. Esta função determina a equação reduzida da reta, tendo dois pontos;

- Clique na célula **“L9”**, digite: **=SE(E(T6=“”;T7=“”);“”;“y = ”&T6& “x”&SE(E(O5>=0;Q5<=0);“+”;“”)&SE(E(O5<=0;Q5>=0);“+”; “**

")&T7) e tecle **"Enter"**. Esta função determina a equação reduzida da reta, tendo a equação geral da reta;

- Clique na célula **"V9"**, digite: **=SE(INT(Y7)=Y7;"y = "&Y7&"x"&SE (AD7>=0;"+";"")&AD7;"y = "&TEXTO(Y7; "0/0")&"x"&SE(AD7>=0;"+";"")&TEXTO(AD7;"0/0"))** e tecle **"Enter"**. Esta função determina a equação reduzida da reta tendo um ponto e o coeficiente angular.

E finalizando a planilha, temos:

- Desbloqueie as células **"M5, O5, Q5, B6, D6, F6, J6, T6, V6, X6, Z6, AD6, B7, D7, F7, J7, T7, Y7, AD7"**, onde serão digitadas as coordenadas dos pontos, o coeficiente angular e os coeficientes da equação geral da reta;
- Faça a formatação de "Reduzir para caber" em todas as células digitáveis da planilha;
- Em seguida proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Use esta planilha para resolver o mesmo exemplo 3.8.1 passado na seção 3.8, que pede para determinar a equação reduzida da reta que satisfaz as seguintes condições:

a) Passa pelos pontos $A(-1, 7)$ e $B(2, 1)$;

b) Tem declividade -5 e passa pelo ponto $A(2, 1)$.

c) Sua equação geral da reta é $6x - 2y - 8 = 0$;

d) Sendo $\sqrt{2}\,x + 3y - 2 = 0$ sua equação geral;

Resolução com Excel:

Para resolver o exemplo acima, nas quatro situações, faça o seguinte na planilha:

- a) Clique na célula **"D6"** e digite: **" -1"**, na célula **"F6"**, digite: **"7"**, que são as coordenadas do ponto A; na célula **"D7"**, digite: **"2"**, na célula **"F7"**, digite: **"1"**, que são as coordenadas do ponto B.

  Com isso, a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(-1, 7)$ e $B(2, 1)$ está resolvida, apresentando os resultados dos coeficientes e da equação, que é: ***y = -2x + 5***;

- b) Clique agora na célula **"X6"** e digite: **"2"**, na célula **"Z6"** e digite: **"1"**, que são as coordenadas do ponto A; nas células mescladas **"Y7"**, digite: **"-5"**, que é o valor do coeficiente m.

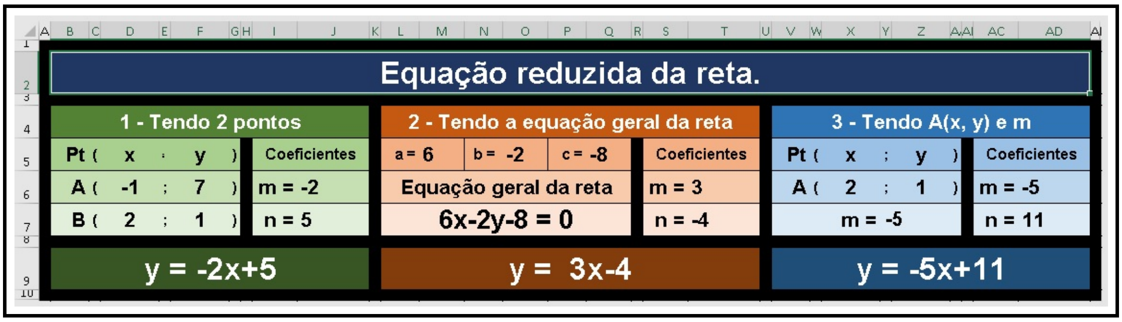
  Observe agora que aparece os resultados dos coeficientes e da equação reduzida da reta: ***y = -5x + 11***, resolvendo, assim, a letra **b)** do referido exemplo;

- c) Clique na célula **"M5"** e digite: **"6"**, na célula **"O5"** e digite: **"-2"**, na célula **"Q5"** e digite: **"-8"**, que são os valores dos coeficientes a, b e c, respectivamente, da equação geral da reta $ax + by + c = 0$.

  Assim, a letra **c)** está resolvida, apresentando o resultado da equação reduzida da reta: ***y = 3x - 4***.

  Antes de resolver a letra d), verifique como ficou a planilha até agora, com os resultados das três primeiras letras, conforme mostra a figura 85

Figura 85 – Equação reduzida da reta (Planilha).



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Continuando a resolução dos exemplos, segue a letra d):

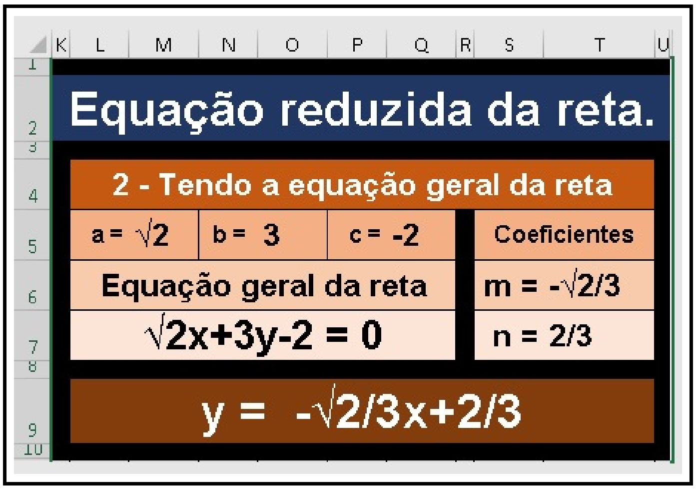
- Clique na célula **"M5"** e digite: **"$\sqrt{2}$"**, na célula **"O5"** e digite: **"3"**, na célula **"Q5"** e digite: **"-2"**, que são os valores dos coeficientes a, b e c, respectivamente, da equação geral da reta $ax + by + c = 0$.

  Note que a letra **d)** está resolvida, apresentando o resultado dos coeficientes: m, n e da equação reduzida da reta: ***y = -$\sqrt{2}$/3x + 2/3***.

- Por fim, salve a planilha clicando no ícone .

Na planilha da figura 85 será mostrada apenas a planilha 2 utilizada para resolver a letra d) do último exemplo. As outras duas: 1 e 3, serão ocultadas, como ilustrado na figura 86

Figura 86 – Equação reduzida da reta (Planilha2).



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.9 Coeficiente angular/declividade e coeficiente linear

Na seção 3.8, vimos três situações em que é possível calcular os valores dos coeficientes angulares e lineares, como segue:

1. Tendo a equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes reais com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não simultaneamente nulos: m (3.30) e n (3.31);

2. Tendo dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$, contidos na reta: m (3.27) e n (3.32);

3. Tendo um ponto qualquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$.

   Como já tem o valor do coeficiente angular m, falta apenas a fórmula do coeficiente linear n, que é: (3.33).

Resolva abaixo o seguinte exemplo:

Exemplo 3.9.1 - Calcule o valor do coeficiente angular m e do coeficiente linear n, nos seguintes casos:

a) Tendo os pontos $A(3; 7)$ e $B(2; 6)$;

b) Tendo a equação geral da reta $4x + 2y + 3 = 0$;

c) Tendo o ponto $A(2; 4)$ e o coeficiente angular $m = 1,5$.

Resolução:

a) Para calcular o valor do coeficiente angular m, tendo dois pontos: $A(3;7)$ e $B(2;6)$, utiliza-se a fórmula (3.27) e faz-se as devidas substituições:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{6-7}{2-3} \Rightarrow m = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Já para o coeficiente linear n, pode-se utilizar duas fórmulas: no quadro da esquerda, utiliza-se a fórmula (3.33) que tem o coeficiente angular m (calculado anteriormente, onde $m = 1$) e qualquer um dos dois pontos dados. Neste exemplo, utiliza-se o ponto $A(3,7)$. No quadro da direita, utiliza-se a fórmula (3.32) e os dois pontos $A(3;7)$ e $B(2;6)$. Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\begin{gathered} n = -m.x_A + y_A \\ n = -1.3 + 7 \\ n = -3 + 7 \\ \boxed{n = 4} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} n = \frac{x_B.y_A - x_A.y_B}{x_B - x_A} \\ n = \frac{2.7 - 3.6}{2-3} \\ n = \frac{14-18}{-1} \\ n = \frac{-4}{-1} \\ \boxed{n = 4} \end{gathered}$$

b) Na equação geral da reta $4x + 2y + 3 = 0$, os valores dos coeficientes são: $a = 4$, $b = 2$ e $c = 3$. Substituindo esses valores na fórmula (3.30) à esquerda para calcular o valor do coeficiente angular m e na fórmula (3.31) à direita para calcular o valor do coeficiente linear n, temos:

$$\begin{gathered} m = \frac{-a}{b} \\ m = \frac{-4}{2} \\ \boxed{m = -2} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} n = \frac{-c}{b} \\ n = \frac{-3}{2} \\ \boxed{n = -1,5} \end{gathered}$$

c) Como já tem o valor do coeficiente angular $m = 1,5$, basta calcular o valor do coeficiente linear n. Para isso, utiliza-se a fórmula (3.33):

$$n = -m.x_A + y_A \Rightarrow n = -1,5.2 + 4 \Rightarrow n = -3 + 4 \Rightarrow \boxed{n = 1}$$

3.9.1 Coeficiente angular ou declividade e coeficiente linear, usando o **Excel 2016**

Para elaborar a planilha que permite calcular os valores dos coeficientes angulares m e coeficientes lineares n da reta, utilizando o **Excel 2016**, proceda da seguinte forma:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"mn"**. Esta planilha será usada para calcular os valores dos coeficientes angulares (m) e coeficientes lineares (n) da reta, tendo: dois pontos; equação geral da reta; um ponto e o coeficiente angular.
- Altere a largura das colunas **"A, C, E, G, H, K, R, U, W, Y, AA, AB, AE"** para **"1,00"**; das colunas **"B,L, M, N, O, P, Q, V"** para **"5,00"**; das colunas **"(D, F, X, Z)"** para **"6,00"**; e das colunas **"I, J, S, T, AC, AD"** para **"7,00"**;
- Altere a altura das linhas **"1, 3, 8"** para **"9,00"**; das linhas **"4, 5, 6, 7"** para **"25,50"** e da linha **"2"** para **"36,00"**
- Mesclar e centralizar, as células: **"(B2:AD2), (B4:J4), (L4:T4), (V4:AD4), (I5:J5), (S5:T5), (AC5:AD5), (L6:Q6), (L7:Q7), (V7:X7), (Y7:AA7)"**;
- Nas células mescladas "**(B2:AD2)**", digite: "**Coeficientes angulares (m) e lineares(n).**"; em "**(B4:J4)**", digite: "**Tendo 2 pontos**"; em "**(L4:T4)**", digite: "**Tendo a equação geral da reta**"; em "**(V4:AD4)**", digite: "**Tendo A(x, y) e m**"; em "**(I5:J5), (S5:T5) e (AC5:AD5)**", digite: "**Coeficientes**"; em "**(L6:Q6)**", digite: "**Equação geral da reta**" e em "**(V7:X7)**", digite: "**m =**";
- Nas células: **"B5"**, digite: **"Pt"** para representar pontos; em **"B6"**, digite: **"A"**; em **"B7"**, digite: **"B"**; em **"C5, C6, C7"**, digite: **"("**; em **"D5"**, digite: **"x"**; em **"E5, E6, E7"**, digite: **";"**; em **"F5"**, digite: **"y"**; em **"G5, G6, G7"**, digite: **")"**; em **"I6"**, digite: **"m ="**; em **"I7"**, digite: **"n = "**; em **"L5"**, digite: **"a = "**; em **"N5"**, digite: **"b = "**; em **"P5"**, digite: **"c = "**; em **"S6"**, digite: **"m ="**; em **"S7"**, digite: **"n = "**; em **"V5"**, digite: **"Pt"** para representar pontos; em **"V6"**, digite: **"A"**; nas células mescladas **"(V7:X7)"**, digite: **"m ="**; em **"W5 e W6"**, digite: **"("**; em **"X5"**, digite: **"x"**; em **"Y5 e Y6"**,

digite: **“;”**; em **“Z5”**, digite: **“y”**; em **“AA5, AA6”**, digite: **“)”**; em **“AC6”**, digite: **“m =”**; em **“AC7”**, digite: **“n = ”**;

- Selecionar e centralizar as células **“(C5:G7), (W5:AA6)”**
- Alinhar ao meio e à esquerda as células: **“M5, O5, Q5, J6, T6, AD6, J7, T7, AD7”** e as células mescladas **“(Y7:AA7)”**;
- Alinhar ao meio e à direita as células: **“B5, L5, N5, P5, V5, B6, I6, S6, V6, AC6, B7, I7, S7, AC7**” e as células mescladas **“(V7:X7)”**
- Selecione as células **“(B2:AD7)”**, clique em **“Página Inicial”** na faixa de opções; na guia **“Alinhamento”**, clique em **“Alinhar no Meio”** e na guia **“Fonte”**, clique em **“Negrito”**;
- Ainda com as células acima selecionadas, altere a fonte para **“Arial”**;
- Selecionar as células **“(C5:G7); (W5:AA6)”**, clique em **“Página Inicial”** na faixa de opções; na guia **“Alinhamento”**, clique em **“Centralizar”**;
- Em seguida, altere o tamanho da fonte das células mescladas **“(B2:AD2), (L7:Q7)”** para **“20”**;
- Altere também o tamanho da fonte das células **“(B5:G7), (I6:J7), M5, O5, Q5, (S6:T7), (V5:AA6), (AC6:AD7)”** e das células mescladas **“(B4:J4), (L4:T4), (V4:AD4), (V7:X7), (Y7:AA7)”** para **“16”**;
- Agora, altere o tamanho da fonte das células **“L5; N5; P5”** e das células mescladas **“(I5:J5), (S5:T5), (AC5:AD5), (L6:Q6)”** para **“12”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Preta”**, das células: **“(B1:AD1), (B3:AD3), (B8:AD8), (A1:A8), (H5:H7), (K4:K7), (R5:R7), (U4:U7), (AB5:AB7), (AE1:AE8)”**;
- Altere também a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 5, Mais Escuro 50%**”, das células: **“(B2:AD2)”** e a cor da fonte para **“Branca”**;
- Agora altere a cor do plano de fundo para **“Verde, Ênfase 6, Mais Escuro 50%”**, das células mescladas: **“(B4:J4)”** e a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas: **“(L4:T4)”** e a cor da fonte para **“Branca”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas: **“(V4:AD4)”** e a cor da fonte para **“Branca”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Verde, Ênfase 6, Mais Claro 40%”**, das células: **“(B5:G5)”** e das células mescladas **“(I5:J5)**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 40%”**, das células: **“(L5:Q5)”** e das células mescladas: **“(S5:T5)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 40%”**, das células: **“(V5:AA5)”** e das células mescladas: **“(AC5:AD5)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Verde, Ênfase 6, Mais Claro 60%”**, das células: **“(B5:G6), (I6:J6)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 60%”**, das células: **“(S6:T6)”** e das células mescladas **“(L6:Q6)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 60%”**, das células: **“(V6:AA6), (AC6:AD6)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Verde, Ênfase 6, Mais Claro 80%”**, das células: **“(B7:G7), (I7:J7)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 80%”**, das células: **“(S7:T7)”** e das células mescladas **“(L7:Q7)”**;
- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 80%”**, das células: **“(AC7:AD7)”** e das células mescladas **“(V7:X7), (Y7:AA7)**;
- Selecione as células mescladas **“(B4:J4), (L4:T4), (V4:AD4), (I5:J5), (S5:T5), (AC5:AD5), (L6:Q6), (L7:Q7)”** e as células **“(B5:G5), (L5:M5), (N5:O5), (P5:Q5), (V5:AA5), (B6:G6), (I6:J6), (S6:T6), (V6:AA6), (AC6:AD6), (B7:G7), (I7:J7), (S7:T7), (V7:AA7), (AC7:AD7)”**, clique em **“Página Inicial”** na faixa de opções; na guia **“Fonte”** e na setinha de **“Bordas”**, clique em **“Bordas Externas”**;
- Oculte as colunas da **“AF”** até o coluna final e as linhas da **“9”** até a linha final;

Insere-se agora as fórmulas e funções para calcular os valores dos coeficientes angulares ($\boldsymbol{m}$) e lineares ($\boldsymbol{n}$), nos três casos, apresentados abaixo:

1. Tendo dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$.

   Vimos na seção 3.9 que o coeficiente angular m é dador por (3.27) e o coeficiente linear n, por (3.32). Na planilha criada, conforme a figura 87, as coordenadas dos pontos A e B, serão digitadas nas seguintes células: x_A na célula **"D6"**; y_A em **"F6"**; x_B em **"D7"** e y_B em **"F7"**. Fazendo as substituições das coordenadas cartesianas dos pontos A e B pelas células onde serão digitadas na planilha criada conforme a figura 87, no excel, temos: $m = \dfrac{F7 - F6}{D7 - D6}$ e $n = \dfrac{D7.F6 - D6.F7}{D7 - D6}$;

2. Tendo a equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes reais com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não simultaneamente nulos.

   Vimos também na seção 3.9 que quando é dada a equação geral da reta (3.26), o coeficiente angular é dado pela fórmula (3.30) e o coeficiente linear, pela fórmula (3.31). Na planilha criada conforme a figura 87, os valores do coeficiente a, serão digitados na célula **"M5"**, b em **"O5"** e c em **"Q5"**. Fazendo as substituições dos coeficientes a, b e c da equação geral da reta pelas células onde serão digitadas na planilha criada conforme a figura 87, no excel, temos: $m = \dfrac{-M5}{O5}$ e $n = \dfrac{-Q5}{O5}$.

3. Tendo um ponto $\boldsymbol{A}$ qualquer e o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$.

   Por último, na seção 3.9, vimos que o coeficiente linear pode ser determinado pela fórmula (3.33), tendo um ponto qualquer A e o coeficiente angular m. Na planilha criada conforme a figura 87, o valor do coeficiente angular m, será digitado nas células mescladas **"(Y7:AA7)"**, que será representada apenas por **"Y7"** e as coordenadas de um ponto qualquer A, serão digitados o valor de x_A em **"X6"** e de y_A em **"Z6"**. Fazendo as substituições das coordenadas cartesianas do ponto A e do coeficiente angular m pelas células onde serão digitadas na planilha criada conforme a figura 87, no excel, temos: $n = -Y7.X6 + Z6$

Agora é só inserir as funções do excel utilizando as fórmulas acima e fazendo as devidas adaptações, conforme discriminado nos itens abaixo. Depois disso, desbloquear as células onde serão digitados os dados acima, proteger a planilha e, por fim, salvar.

Para inserir as fórmulas e funções, faça o seguinte:

- Clique na célula **"J6"**, digite: **=ARRED((F7-F6)/(D7-D6);3)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ com arredondamento de três casas decimais porque o último número da função acima é 3, que determina o número de casas decimais. Se este número for 2, o resultado terá duas casas decimais e assim sucessivamente;

- Clique na célula **"J7"**, digite: **=ARRED(-((D6*F7)-(D7*F6))/(D7-D6); 3)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear $\boldsymbol{n}$ com arredondamento de três casas decimais;

- Clique nas células mescladas **"(L7:Q7)"**, digite: **=M5&"x"&SE(O5>=0; "+"; "")&O5&"y"&SE(Q5>=0;"+";"")&Q5&" = 0"** e tecle **"Enter"**. Esta função determina a equação geral da reta de acordo com os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ digitados nas células **"M5"**, **"O5"** e **"Q5"**, respectivamente;

- Clique na célula **"T6"**, digite: **=ARRED(-M5/O5;3)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ com arredondamento de três casas decimais, tendo a equação geral da reta;

- Clique na célula **"T7"**, digite: **=ARRED(-Q5/O5;3)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear $\boldsymbol{n}$ com arredondamento de três casas decimais, tendo a equação geral da reta;

- Clique na célula **"AD6"**, digite: **=Y7** e tecle **"Enter"**. Esta fórmula transfere o valor digitado nas células mescladas **"(Y7:AA7)"** para a célula **"AD6"**;

- Clique na célula **"AD7"**, digite: **=ARRED(-Y7*X6+Z6;3)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear $\boldsymbol{n}$ com arredondamento de três casas decimais, tendo um ponto qualquer A e o coeficiente angular m;

E, finalizando a planilha, temos:

- Desbloqueie as células **"B6"**, **"B7"** e **"V6"**, onde serão digitados os nomes dos pontos;

- Desbloqueie as células **"D6"** e **"F6"**, onde serão digitadas as coordenadas cartesianas do ponto A e as células **"D7"** e **"F7"**, onde serão digitadas as coordenadas cartesianas do ponto B;

- Agora desbloqueie as células **"M5"**, **"O5"** e **"Q5"**, onde serão digitados os coeficientes a, b e c, respectivamente, da equação geral da reta $ax + by + c = 0$;

- Por último, desbloqueie as células **"X6"** e **"Z6"**, onde serão digitadas as coordenadas cartesianas do ponto A e as células mescladas **"(Y7:AA7)"**, onde será digitado o valor do coeficiente angular m;

- Clique em **"Selecionar tudo"**, conforme figura 5. Pressione ao mesmo tempo as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar células..."**. Em seguida, clique na aba **"Alinhamento"** e na opção **"Controle de texto"**, marque a opção **"Reduzir para caber"**. Depois clique em **"OK"**. Esta formatação se faz necessária para não dar erro no caso de digitar algum número que não cabe dentro da célula. Aí, o Excel reduz o tamanho do texto para caber dentro da célula.

- Em seguida proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Usando a planilha do Excel para resolver o exemplo 3.9.1, da seção 3.9, temos:

Resolução com Excel:

a) Tendo os pontos $A(3; 7)$ e $B(2; 6)$;

- Clique na célula **"D6"** e digite: **"3"**, na célula **"F6"** e digite: **"7"**, que são as coordenadas do ponto A;

- Clique na célula **"D7"** e digite: **"2"**, na célula **"F7"** e digite: **"6"**, que são as coordenadas do ponto B.

  Com isso, a letra **a)** do exemplo está resolvida, apresentando o resultado de ***m = 1*** e ***n = 4***.

b) Tendo a equação geral da reta $4x + 2y + 3 = 0$;

- b) Clique na célula **"M5"** e digite: **"4"**, na célula **"O5"** e digite: **"2"**, na célula **"Q5"** e digite: **"3"**, que são os valores dos coeficientes a, b e c, respectivamente, da equação geral da reta $ax + by + c = 0$.

  Assim, a letra **b)** do exemplo está resolvida, apresentando o resultado de ***m = -2*** e ***n = -1,5***.

c) Tendo o ponto $A(2; 4)$ e o coeficiente angular $m = 1, 5$.

- Clique agora na célula **"X6"** e digite: **"2"**, na célula **"Z6"** e digite: **"4"**, que são as coordenadas do ponto A. Nas células mescladas **"(Y7:AA7)"**, digite: **"1,5"**, que é o valor do coeficiente m.

Observe agora que aparece os resultados de $\boldsymbol{m = 1{,}5}$ e $\boldsymbol{n = 1}$, resolvendo a letra **c)** do exemplo.

- Salve a planilha clicando no ícone .

Na figura 87 é mostrado os resultados dos três casos vistos acima.

Figura 87 – Coeficientes angulares e lineares (Planilha).

Coeficientes angulares(m) e lineares(n).							
Tendo 2 pontos		Tendo a Equação geral da reta.				Tendo A(x, y) e m	
Pt (x ; y)	Coeficientes	a = 4	b = 2	c = 3	Coeficientes	Pt (x ; y)	Coeficientes
A (3 ; 7)	m = 1	Equação geral da reta.			m = -2	A (2 ; 4)	m = 1,5
B (2 ; 6)	n = 4	4x+2y+3 = 0			n = -1,5	m = 1,5	n = 1

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.10 Posição relativa entre duas retas no plano cartesiano

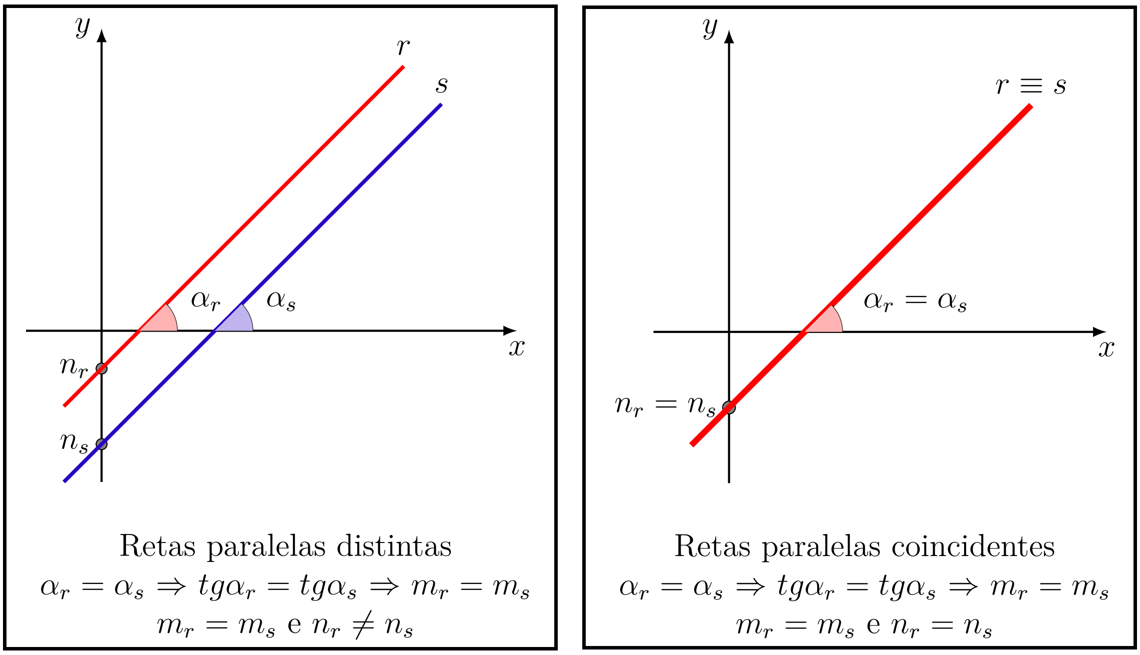
Nessa seção será discutida a posição relativa de duas retas no plano cartesiano, que podem ser coincidentes, paralelas, concorrentes ou perpendiculares. As retas coincidentes são um caso particular das retas paralelas e as retas perpendiculares são um caso particular das retas concorrentes.

Se duas retas são paralelas ao eixo x (ângulo de inclinação da reta igual a 0°), elas são paralelas entre si. O mesmo ocorre se elas são paralelas ao eixo y (ângulo de inclinação da reta igual a 90°). Então, analisar-se-á em seguida apenas os casos das retas cujo ângulo de inclinação é diferente de 0° e 90°, num intervalo de 0° a 180°.

Para isso, analisa-se o ângulo de inclinação da reta formada pelo ângulo α em que a $tg\alpha$ é igual ao coeficiente angular m da reta na equação reduzida da reta. Também é necessário analisar os coeficientes lineares n das duas retas quando são paralelas para saber se elas são distintas ou coincidentes.

Sejam $r : y = m_r x + n_r$ e $s : y = m_s x + n_s$ equações reduzidas de duas retas r e s, conforme a figura 88, que podem ser:

Figura 88 – Retas paralelas distintas e coincidentes.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

- **Retas paralelas distintas**: quando seus coeficientes angulares são iguais ($m_r = m_s$) e seus coeficientes lineares são diferentes ($n_r \neq n_s$). Observe também que não possuem pontos em comum, como mostra a figura 88 à esquerda;

- **Retas paralelas coincidentes**: quando seus coeficientes angulares são iguais ($m_r = m_s$) e seus coeficientes lineares também são iguais ($n_r = n_s$). Note que possuem todos os pontos em comum, como mostra a figura 88 à direita;

- **Retas concorrentes**: quando seus coeficientes angulares são diferentes ($m_r \neq m_s$). Não é necessário analisar os coeficientes lineares. As duas retas concorrem em um único ponto, como se vê na figura 89 à esquerda;

- **Retas perpendicualres**: quando o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1 ($m_r \cdot m_s = -1$).

É possível mostrar que o produto dos coeficientes angulares das duas retas é igual a -1, se elas são perpendiculares. Observe na figura 89 do lado direito, que as retas r e s se interceptam entre si em um ponto, que forma um ângulo de 90 graus (perpendicular). Elas também interceptam o eixo das abscissas (eixo x) em dois pontos, que formam os ângulos α_r e α_s. Esses três pontos de intersecção formam os vértices de um triângulo. Observe que o ângulo α_s é externo ao triângulo. Pelo "Teorema do ângulo externo" pode-se afirmar que:

$$\alpha_s = \alpha_r + 90^o \Rightarrow tg\alpha_s = tg(\alpha_r + 90^o) \tag{3.34}$$

Logo tem-se que:

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)} \Rightarrow tg(a+b) = \frac{sena \cdot cosb + senb \cdot cosa}{cosa \cdot cosb - sena \cdot senb} \tag{3.35}$$

Aplicando (3.35) em (3.34), temos:

$$tg\alpha_s = tg(\alpha_r + 90^o) \Rightarrow tg\alpha_s = \frac{sen(\alpha_r + 90^o)}{cos(\alpha_r + 90^o)}$$

$$tg\alpha_s = \frac{sen\alpha_r \cdot cos90^o + sen90^o \cdot cos\alpha_r}{cos\alpha_r \cdot cos90^o - sen\alpha_r \cdot sen90^o} \tag{3.36}$$

E portanto, segue que:

$$sen90^o = 1ecos90^o = 0eque \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \tag{3.37}$$

Substituindo (3.37) em (3.36), temos:

$$tg\alpha_s = \frac{\cancel{sen\alpha_r \cdot 0} + 1 \cdot cos\alpha_r}{\cancel{cos\alpha_r \cdot 0} - sen\alpha_r \cdot 1}$$

$$tg\alpha_s = -\frac{cos\alpha_r}{sen\alpha_r} \Rightarrow tg\alpha_s = -cotg\alpha_r \Rightarrow tg\alpha_s = -\frac{1}{tg\alpha_r}$$

como $tg\alpha_r = m_r$ e $tg\alpha_s = m_s$, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

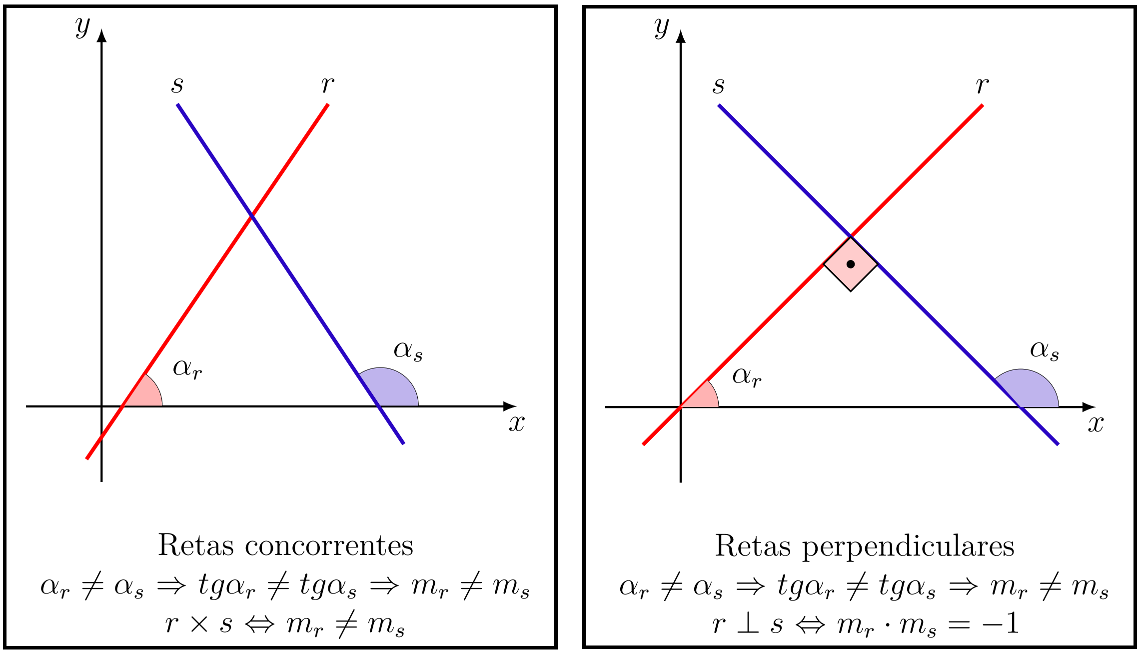
Finalmente, multiplica-se ambos os membros por m_r:

$$m_r \cdot m_s = -\cancel{m_r} \cdot \frac{1}{\cancel{m_r}}$$

$$\boxed{m_r \cdot m_s = -1} \tag{3.38}$$

Assim, podemos concluir que: $r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$.

Figura 89 – Retas concorrentes e perpendiculares.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

São várias as situações que possa solicitar posição relativa de duas retas. Os principais exercícios e problemas dão as equações da reta principalmente a equação reduzida da reta $y = mx + n$ porque já é visualizada na própria formação da equação, os coeficientes angulares m e lineares n, são usados para analisar as retas. Mas há casos em que dão dois pontos que formam uma reta.

O exemplo abaixo contempla os principais casos de análise da posição das retas, como segue:

Exemplo 3.10.1 - Verifique a posição relativa entre as duas retas no plano cartesiano, nos seguintes casos:

1. A reta 1 é formada pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, 6)$ e a reta 2, pelos pontos $A(0, 2)$ e $B(3, 5)$;

2. Uma reta é formada pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 7)$ e a outra, pela equação geral da reta $4x - 2y - 2 = 0$;

3. A primeira reta é formada pelos pontos $(-1, 2; 2)$ e $(3, 6; -7, 6)$ e a segunda reta, pela equação $y = \dfrac{1}{2}x - 1$;

4. As duas retas são formadas pelas equações $2x-1,5y+3,8=0$ e $4x-3y+7,6=0$, respectivamente;

5. A reta 1 é formada pela equação reduzida da reta $y = 3x + 5$ e a reta 2, por $y = 2x - 3$;

6. Reta r: $2x - 3y + 4 = 0$; reta s: $y = 0,8x - 1,5$

Resolução:

1. Para verificar a posição da duas retas, deve-se calcular o valor dos coeficientes angulares $\boldsymbol{m}$ e lineares $\boldsymbol{n}$, se for o caso. Quando se tem dois pontos, utiliza-se as fórmulas: m (3.27) e n (3.32), como visto na seção 3.9.

   Substituindo os pontos dados nas fórmulas, temos:

   - Calculando os valores dos coeficientes angulares das duas retas:

     Reta 1: $A(-1,3)$ e $B(2,6)$

     $$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
     $$m_1 = \frac{6-3}{2-(-1)}$$
     $$m_1 = \frac{3}{2+1}$$
     $$m_1 = \frac{3}{3}$$
     $$m_1 = 1$$

     Reta 2: $A(0,2)$ e $B(3,5)$

     $$m_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
     $$m_2 = \frac{5-2}{3-0}$$
     $$m_2 = \frac{3}{3}$$
     $$m_2 = 1$$

     Como $m_1 = m_2$, as duas retas são paralelas. Resta saber se são coincidentes $(n_1 = n_2)$ ou distintas $(n_1 \neq n_2)$. Para isso, devemos analisar os coeficientes lineares $\boldsymbol{n}$.

   - Calculando os valores dos coeficientes lineares das duas retas:

Reta 1: $A(-1,3)$ e $B(2,6)$	Reta 2: $A(0,2)$ e $B(3,5)$
$n_1 = \dfrac{x_B.y_A - x_A.y_B}{x_B - x_A}$	$n_2 = \dfrac{x_B.y_A - x_A.y_B}{x_B - x_A}$
$n_1 = \dfrac{2.3-(-1).6}{2-(-1)}$	$n_2 = \dfrac{3.2-0.5}{3-0}$
$n_1 = \dfrac{6+6}{2+1}$	$n_2 = \dfrac{6-0}{3}$
$n_1 = \dfrac{12}{3}$	$n_2 = \dfrac{6}{3}$
$n_1 = 4$	$n_2 = 2$

Como $m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$, então as retas são **"Paralelas distintas"**.

2. Como uma das retas é formada por dois pontos, calcula-se os valores dos coeficientes angulares $\boldsymbol{m}$ e lineares $\boldsymbol{n}$, como no item anterior.

   Já para a outra reta, como ela é formada pela equação geral da reta, utilizam-se as fórmulas: m (3.30) e n (3.31).

   Substituindo os dados nas fórmulas, temos:

   a) Calculando os valores dos coeficientes angulares das duas retas:

reta 1: $A(2,3)$ e $B(4,7)$	reta 2: $4x - 2y - 2 = 0$
$m_1 = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	$m_2 = \dfrac{-a}{b}$
$m_1 = \dfrac{7-3}{4-2}$	$m_2 = \dfrac{-4}{-2}$
$m_1 = \dfrac{4}{2}$	$m_2 = 2$
$m_1 = 2$	

   Como $m_1 = m_2$, as duas retas são paralelas. Resta saber se são coincidentes ($n_1 = n_2$) ou distintas ($n_1 \neq n_2$). Para isso, devemos analisar os coeficientes lineares $\boldsymbol{n}$.

   b) Calculando os valores dos coeficientes lineares das duas retas:

Reta 1: $A(2,3)$ e $B(4,7)$	Reta 2: $4x - 2y - 2 = 0$
$n_1 = \dfrac{x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_B}{x_B - x_A}$ $n_1 = \dfrac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 7}{4 - 2}$ $n_1 = \dfrac{12 - 14}{2}$ $n_1 = \dfrac{-2}{2}$ $n_1 = -1$	$n_2 = \dfrac{-c}{b}$ $n_2 = \dfrac{-(-2)}{-2}$ $n_2 = \dfrac{2}{-2}$ $n_2 = -1$

Como $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$, então as retas são **“Paralelas coincidentes”**

3. Neste caso, é necessário calcular o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$, apenas da primeira reta, pois, a segunda é formada pela equação reduzida da reta, onde identifica-se o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ diretamente na própria equação, que é $m_2 = \dfrac{1}{2}$

   Assim, o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da primeira reta, formada pelos pontos $(-1,2;2)$ e $(3,6;-7,5)$, é:

   $$m_1 = \frac{y_\text{B} - y_\text{A}}{x_\text{B} - x_\text{A}} \Rightarrow m_1 = \frac{-7,6-2}{3,6-(-1,2)} \Rightarrow m_1 = \frac{-9,6}{4,8} \Rightarrow \boxed{\text{m}_1 = \text{-2}}$$

   Como $m_2 = \dfrac{1}{2}$ e $m_1 \neq m_2$, elas são concorrentes, mas devemos verificar se $m_1 \cdot m_2 = -1$ para ver se são perpendiculares. Substituindo os coeficientes angulares, temos: $m_1 \cdot m_2 = -2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

   Como $m_1 \cdot m_2 = -1$, então as retas são **“Perpendiculares”**.

4. Neste caso, considere a equação geral da reta 1, $2x - 1,5y + 3,8 = 0$ e da reta 2, $4x - 3y + 7,6 = 0$. Para saber a posição das duas retas, calcula-se os coeficientes através das fórmulas $m = \dfrac{-a}{b}$ e $n = \dfrac{-c}{b}$, conforme visto na seção 3.9. Para isso:

   a) Calcula-se os valores dos coeficientes angulares $\boldsymbol{m}$ das duas retas:

   $$m_1 = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{-1,5} \Rightarrow m_1 = 1,3...$$

   $$m_2 = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_2 = \frac{-4}{-3} \Rightarrow m_2 = 1,3...$$

b) Calcula-se os valores dos coeficientes lineares $\boldsymbol{n}$ das duas retas:

$$n_1 = \frac{-c}{b} \Rightarrow n_1 = \frac{-3,8}{-1,5} \Rightarrow n_1 = 2,53...$$

$$n_2 = \frac{-c}{b} \Rightarrow n_2 = \frac{-7,6}{-3} \Rightarrow n_2 = 2,53...$$

Como $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$, então as retas são **"Paralelas coincidentes"**.

5. Neste caso a reta 1 é formada pela equação reduzida da reta $y = 3x + 5$ em que o coeficiente angular é $m_1 = 3$ e a reta 2 também é formada pela equação reduzida da reta $y = 2x - 3$ em que o coeficiente angular é $m_2 = 2$.

   Assim, $m_1 \neq m_2$ e $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot 2 = 6$. Se o produto dos coeficientes angulares fosse igual a -1, as retas seriam perpendiculares. Como o produto foi igual a 6, as retas não são perpendiculares.

   Como $m_1 \neq m_2$ e $m_1 \cdot m_2 \neq -1$, então as retas 1 e 2 são **"Concorrentes"**.

6. A reta r é formada pela equação geral da reta. Para calcular o valor do coeficiente angular, utiliza-se a fórmula $m = \frac{-a}{b}$.
   Substituindo os coeficientes a, b e c da equação da reta r: $2x - 3y + 4 = 0$, temos:

$$m_r = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_r = \frac{-2}{-3} \Rightarrow m_r = \frac{2}{3} \Rightarrow m_r = 0,66...$$

   Na reta s de equação reduzida da reta $y = 0,8x - 1,5$, o valor do coeficiente angular é $m_s = 0,8$. Assim, $m_r \neq m_s$. Devemos, então, verificar se as retas r e s são perpendiculares. Para isso, devemos ter $m_r \cdot m_s = -1$. Substituindo os valores, temos: $m_r \cdot m_s = 0,66... \times 0,8 = 0,53$. Com este resultado, verifica-se que as retas não são perpendiculares.

   Como $m_r \neq m_s$ e $m_r \cdot m_s \neq -1$, então as retas r e s são **"Concorrentes"**.

3.10.1 Posição relativa entre duas retas no plano cartesiano, usando o **Excel 2016**

Para fazer uma planilha que permite analisar a posição de duas retas quaisquer no plano cartesiano, com base na análise de seus coeficientes angulares m e lineares n, faça o seguinte:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"Pr2r"**. Esta planilha será usada para analisar a posição relativa de duas retas no plano cartesiano;

- Altere a largura das colunas **"A"** e **"AZ"** para **"1,00"**. Altere também a largura de todas as colunas de **"B"** até **"AY"** para **"2,86"**. Em seguida, altere a largura apenas das colunas **"V, AG, AI, AK, AT"** para **"2,29"** e das colunas **"E, G, L, N, U, W, AC, AN, AP, AU"** para **"3,43"**;

- Altere a altura das linhas **"1, 3, 8, 12, 17, 21"** para **"9,00"**; da linha **"2"** para **"33,75"** e das linhas **"4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20"** para **"21,00"**;

- Mesclar e centralizar as células "**(D2:AW2), (C4:04), (S4:AH4), (AL4: AX4), (C5:H5), (J5:05), (S5:X5), (Z5:AH5), (AL5:AQ5), (AS5:AX 5), (AA7:AB7), (AD7:AE7), (AG7:AH7), (B9:E9), (F9:H9), (J9: L9), (M9:O9), (S9:U9), (V9:X9), (Z9:AC9), (AD9:AH9), (AL9:AN 9), (AO9:AQ9), (AS9:AU9), (AV9:AX9), (B10:E10), (F10:H10), (J10:L10), (M10:O10), (S10:U10), (V10:X10), (Z10:AC10), (AD10: AH10), (AL10:AN10), (AO10:AQ10), (AS10:AU10), (AV10:AX10), (C11:O11), (S11:AH11), (AL11:AX11), (B13:T13), (V13:AH13), (AJ13:AY13), (B14:J14), (L14:T14), (V14:AA14), (AC14:AH14), (AJ14:AR14), (AT14:AY14), (C16:D16), (F16:G16), (I16:J16), (M 16:N16), (P16:Q16), (S16:T16), (AK16:AL16), (AN16:AO16), (AQ 16:AR16), (B18:F18), (G18:J18), (L18:P18), (Q18:T18),(V18:X18), (Y18:AA18), (AC18:AE18), (AF18:AH18), (AJ18:AN18), (AO18: AR18), (AT18:AV18), (AW18:AY18), (B19:F19), (G19:J19), (L19: P19), (Q19:T19), (V19:X19), (Y19:AA19), (AC19:AE19), (AF19: AH19), (AJ19:AN19), (AO19:AR19), (AT19:AV19),(AW19:AY19), (B20:T20), (V20:AH20), (AJ20:AY20)**";

Observe que na planilha que está sendo criada, foram mescladas muitas células. Como exemplo, as teclas **"(D2:AW2)"** foram mescladas da célula **"D2"** até **"AW2"**. Quando for fazer referência a estas células mescladas, de agora em diante, será feita apenas pela primeira letra da coluna e número da linha, ou seja: **"D2"**, pois o Excel reconhece todas as células mescladas no intervalo **"(D2:AW2)"**.

Observe também que há vários casos em que se pode verificar a posição relativa de duas retas. Será criada uma única planilha para os 6 casos possíveis discriminados abaixo:

1. **Dois pontos / Dois pontos.**

Neste caso, a **reta 1** é formada por dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$ e a **reta 2** também é formada por dois pontos;

2. **Dois pontos / Equação geral.**

   Neste caso, a **reta 1** é formada por dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$ e a **reta 2** é formada pela equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes reais com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não simultaneamente nulos;

3. **Dois pontos / Eq. reduzida.**

   Neste caso, a **reta 1** é formada por dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$ e a **reta 2** é formada pela equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$, onde $\boldsymbol{m}$ é o coeficiente angular e $\boldsymbol{n}$ é o coeficiente linear;

4. **Equação geral / Equação geral.**

   Neste caso, a **reta 1** é formada pela equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes reais com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não simultaneamente nulos e a **reta 2** também é formada pela equação geral da reta;

5. **Eq. reduzida / Eq. reduzida.**

   Nesta caso, a **reta 1** é formada pela equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$, onde $\boldsymbol{m}$ é o coeficiente angular e $\boldsymbol{n}$ é o coeficiente linear e a **reta 2** também é formada pela equação reduzida da reta;

6. **Equação geral / Eq. reduzida.**

   Neste caso, a **reta 1** é formada pela equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são constantes reais com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não simultaneamente nulos e a **reta 2** é formada pela equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$, onde $\boldsymbol{m}$ é o coeficiente angular e $\boldsymbol{n}$ é o coeficiente linear;

Continuando a formatação da planilha, temos:

- Clique nas células: **"D2"** e digite **"Posições relativas de duas retas no plano cartesiano."**; em **"C4"** digite: **"1 - Dois pontos / Dois pontos"**; em **"S4"**, digite: **"2 - Dois pontos / Equação geral"**; em **"AL4"**, digite: **"3 - Dois pontos / Eq. reduzida"**; em **"B13"**, digite: **"4 - Equação geral / Equação geral"**; em **"V13"**, digite: **"5 - Eq. reduzida / Eq. reduzida"**;

em **"AJ13"**, digite: **"6 - Equação geral / Eq. reduzida"**; em **"C5, S5, AL5, B14, V14, AJ14"**, digite: **"Reta 1"**; em **"J5, Z5, AS5, L14, AC14, AT14"**, digite: **"Reta 2"**; em **"C6, J6, S6, AL6"**, digite: **"A"**; em **"D6, K6, T6, AM6, D7, K7, T7, AM7"**, digite: **"("**; em **"F6, M6, V6, AO6, F7, M7, V7, AO7"**, digite: **";"**; em **"H6, 06, X6, AQ6, H7, O7, X7, AQ7"**, digite: **")"**, em **"Z6, B15, L15, AJ15"**, digite: **"a"**, em **"AA6, AV6, AV7, C15, M15, Y15, AF15, AK15, AW15, Y16, AF16, AW16"**, digite: **"x"**; em **"AB6, AE6, AW6, D15, G15, N15, Q15, Z15, AG15, AL15, AO15, AX15"**, digite: **"+"**, em **"AC6, E15, O15, AM15"**, digite: **"b"**; em **"AD6, AS6, AS7, F15, P15, V15, AC15, AN15, AT15, V16, AC16, AT16"**, digite: **"y"**; em **"AF6, H15, R15, AP15"**, digite: **"c"**; em **"AG6, AT6, AT7, I15, S15, W15, AD15, AQ15, AU15, W16, AD16, AU16"**, digite: **"="**; em **"AH6, J15, T15, AR15"**, digite: **"0"**; em **"AU6, X15, AE15, AV15"**, digite: **"m"**; em **"AX6, AA15, AH15,AY15"**, digite: **"n"**; em **"Z7, B16, L16, AJ16"**, digite: **"a ="**; em **"AC7, E16, O16, AM16"**, digite: **"b ="**; em **"AF7, H16, R16, AP16"**, digite: **"c ="**; em **"C9, S9, AL9, B18, V18, AJ18"**, digite: **"$\mathbf{m_1}$ ="**; em **"J9, Z9, AS9, L18, AC18, AT18"**, digite: **"$\mathbf{m_2}$ ="**; em **"C10, S10, AL10, B19, V19, AJ19"**, digite: **"$\mathbf{n_1}$ ="**; em **"J10, Z10, AS10, L19, AC19, AT19"**, digite: **"$\mathbf{n_2}$ ="**;

- Selecionar toda a planilha e clique em: **"Alinhar no Meio"**, em **"Centralizar"**, em **"Negrito"** e altere a fonte para **"Arial"**;

- Selecione as células mescladas: **"C9, J9, S9, Z9, AL9, AS9, C10, J10, S10, Z10, AL10, AS10, B18, L18, V18, AC18, AJ18, AT18, B19, L19, V19, AC19, AJ19, AT19"** e clique em: **"Alinhar à Direita"**;

- Selecione as células mescladas: **"AA7, AD7, AG7, F9, M9, V9, AD9, AO9, AV9, F10, M10, V10, AD10, AO10, AV10, C16, F16, I16, M16, P16, S16, AK16, AN16, AQ16, G18, Q18, Y18, AF18, AO18, AW18, G19, Q19, Y19, AF19, AO19, AW19"** e clique em **"Alinhar à Esquerda"**;

- Altere o tamanho da fonte das células mescladas: **"D2"**, para **"28"**;

- Altere o tamanho da fonte das células mescladas: **"C4, S4, AL4, C5, J5, S5, Z5, AL5, AS5, C11, S11, AL11, B13, V13, AJ13, B14, L14, V14, AC14, AJ14, AT14, B20, V20, AJ20"**, para **"16"**;

- Altere também o tamanho da fonte das células e das células mescladas: **"C6, J6, S6, (Z6:AH6), AL6, (AS6:AX6), C7, J7, S7, (Z7:AH7), AL7,**

(AS7:AT7), (C9:AX10), (B15:T16), (V16:W16), (AC16:AD16), (AJ 16:AU16), (B18: AY19)" para **"14"**;

- Altere a cor do plano de fundo com efeitos de preenchimento com duas cores, sendo a cor 1: **"Verde, Ênfase 6, Mais Escuro, 25%"** e a cor 2: **"Azul, Ênfase 1"**, com sombreamento: **"Horizontal"** e com a **"3ª Variação"** de cores, das células mescladas: **"D2"**. Altere também a cor da fonte para: **"Branca"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%"**, das células mescladas: **"C4, S4, AL4, B13, V13, AJ13"**. Altere também a cor da fonte para: **"Branca"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Cinza azulado, Texto 2, Mais Claro 60%"**, das células mescladas: **"C5, J5, S5, Z5, AL5, AS5, B14, L14, V14, AC14, AJ14, AT14"**. Insira também, **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Claro 80%"**, das células: **"(C6:H6), (J6:O6), (S6:X6), (Z6:AH6), (AL6:AQ6), (AS 6:AX6), (B15:J15), (L15:T15), (V15:AA15), (AC15:AH15), (AJ15: AR15), (AT15: AY15)"**. Insira também, **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 80%"**, das células: **"(C7:H7), (J7:O7), (S7:X7), (Z7:AH7), (AL7:AQ7), (AS 7:AX7), (B16:J16), (L16:T16), (V16:AA16), (AC16:AH16), (AJ16: AR16), (AT16: AY16)"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Cinza-25%, Plano de Fundo 2, Mais Escuro 25%"**, das células: **"(C8:O8), (S8:AH8), (AL8:AX8), (B17:T17), (V17:AH17), (AJ17:AY17)"**. Insira também, **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 5, Mais Claro 80%"**, das células: **"(C9:H9), (J9:O9), (S9:X9), (Z9:AH9), (AL9:AQ9), (AS 9:AX9), (B18:J18), (L18:T18), (V18:AA18), (AC18:AH18), (AJ18: AR18), (AT18: AY18)"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Ouro, Ênfase 4, Mais Claro 80%"**, das células: **"(C10:H10), (J10:O10), (S10:X10), (Z10:AH10), (AL10:AQ10), (AS10:AX10), (B119:J19), (L19:T19), (V19:AA19), (AC19:AH19), (AJ 19:AR19), (AT19: AY19)"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Laranja"**, das células mescladas: **"C11, S11, AL11, B20, V20, AJ20"**. Insira também **"Bordas Externas"**. Também altere a cor da fonte para **"Vermelho-escuro"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Preta"**, das células: **"(A1:AZ1), (A2:C2), (AX2:AZ2), (A3:AZ3), (A4:B11), (P4:R11), (AI4:AK11), (AY4:AZ11), (I5:I7), (Y5:Y7), (AR5:AR7), (I9:I10), (Y9:Y10), (AR 9:AR10), (A12:AZ12), (A13:A20), (U13:U20), (AI13:AI20), (AZ 13:AZ20), (K14:K16), (AB14:AB16), (AS14:AS16), (K18:K19), (AB18:AB19), (AS18:AS19), (A21:AZ21)"**. Insere também, **"Bordas Externas"**;

- Ocultar colunas da **"BA"** até a coluna final. Ocultar também da linha **"22"** até a linha final.

A planilha já está quase pronta. Falta agora inserir as fórmulas ou funções para que o Excel possa calcular os coeficientes angulares m e lineares n, para que possa analisar se as retas são paralelas (coincidentes e distintas), concorrentes ou perpendiculares.

Na seção 3.9, quando se tem dois pontos, a fórmula para calcular o coeficiente angular é: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ e o coeficiente linear é: $n = \dfrac{x_B.y_A - x_A.y_B}{x_B - x_A}$. Quando se tem a equação geral da reta, as fórmulas são: $m = \dfrac{-a}{b}$, para calcular o coeficiente angular e $n = \dfrac{-c}{b}$, para calcular o coeficiente linear.

Adaptando estas fórmulas para calcular os valores dos coeficientes angulares m e lineares n na planilha criada no Excel, faça o seguinte:

- Clique na célula mesclada **"F9"**, digite: =**ARRED((G7-G6)/(E7-E6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ com uma casa decimal da reta 1, (tem-se dois pontos), no caso (1 - Dois Pontos / Dois Pontos);

- Clique na célula mesclada **"M9"**, digite: =**ARRED((N7-N6)/(L7-L6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 2, (tem-se dois pontos), no caso (1 - Dois pontos / Dois pontos);

- Clique na célula mesclada **"V9"**, digite: =**ARRED((W7-W6)/(U7-U6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 1, (tem-se dois pontos), no caso (2 - Dois pontos / Equação geral);

- Clique na célula mesclada **"AD9"**, digite: =**ARRED(-AA7/AD7;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 2, (tem-se a equação geral da reta), no caso (2 - Dois pontos / Equação geral);

- Clique na célula mesclada **"AO9"**, digite: =**ARRED((AP7-AP6)/(AN7-AN6); 2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 1, (tem-se dois pontos), no caso (3 - Dois pontos / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **"AV9"**, digite: =**AU7** e tecle **"Enter"**. Esta fórmula transfere o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ digitado na célula **"AU7"** para a célula mesclada **"AV9"** da reta 2, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (3 - Dois pontos / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **"G18"**, digite: =**ARRED(-C16/F16;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 1, (tem-se a equação geral da reta), no caso (4 - Equação geral / Equação geral);

- Clique na célula mesclada **"Q18"**, digite: =**ARRED(-M16/P16;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 2, (tem-se a equação geral da reta), no caso (4 - Equação geral / Equação geral);

- Clique na célula mesclada **"Y18"**, digite: =**X16** e tecle **"Enter"**. Esta fórmula transfere o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ digitado na célula **"X16"** para a célula mesclada **"Y18"** da reta 1, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (5 - Eq. reduzida / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **"AF18"**, digite: =**AE16** e tecle **"Enter"**. Esta fórmula transfere o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ digitado na célula **"AE16"** para a célula mesclada **"AF18"** da reta 2, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (5 - Eq. reduzida / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **"AO18"**, digite: =**ARRED(-AK16/AN16;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta 1, (tem-se a equação geral da reta), no caso (6 - Equação geral / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **"AW18"**, digite: =**AV16** e tecle **"Enter"**. Esta fórmula transfere o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ digitado na célula **"AV16"** para a célula mesclada **"AW18"** da reta 2, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (6 - Equação geral / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **"F10"**, digite: =**ARRED(((E7*G6)-(E6*G7))/(E7-E6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 1, (tem-se dois pontos), no caso (1 - Dois pontos / Dois pontos);
- Clique na célula mesclada **"M10"**, digite: =**ARRED(((L7*N6)-(L6*N7))/(L7-L6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 2, (tem-se dois pontos), no caso (1 - Dois pontos / Dois pontos);
- Clique na célula mesclada **"V10"**, digite: =**ARRED(((U7*W6)-(U6*W7))/(U7-U6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 1, (tem-se dois pontos), no caso (2 - Dois pontos / Equação geral);
- Clique na célula mesclada **"AD10"**, digite: =**ARRED(-AG7/AD7;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 2, (tem-se a equação geral da reta), no caso (2 - Dois pontos / Equação geral);
- Clique na célula mesclada **"AO10"**, digite: =**ARRED(((AN7*AP6)-(AN6*AP7))/(AN7-AN6);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 1, (tem-se dois pontos), no caso (3 - Dois pontos / Eq. reduzida);
- Clique na célula mesclada **"AV10"**, digite: =**ARRED(SE(AW7="+";AX7;AW7&AX7);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 2, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (3 - Dois pontos / Eq. reduzida);
- Clique na célula mesclada **"G19"**, digite: =**ARRED(-I16/F16;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 1, (tem-se a equação geral da reta), no caso (4 - Equação geral / Equação geral);
- Clique na célula mesclada **"Q19"**, digite: =**ARRED(-S16/P16;2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 2, (tem-se a equação geral da reta), no caso (4 - Equação geral / Equação geral);
- Clique na célula mesclada **"Y19"**, digite: =**ARRED(SE(Z16="+";AA16;Z16 &AA16);2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear ***n*** da reta 1, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (5 - Eq. reduzida / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **“AF19”**, digite: =**ARRED(SE(AG16=“+”; AH16;AG16&AH16);2)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear n da reta 2, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (5 - Eq. reduzida / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **“AO19”**, digite: =**ARRED(-AQ16/AN16;2)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear n da reta 1, (tem-se a equação geral da reta), no caso (6 - Equação geral / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **“AW19”**, digite: =**ARRED(SE(AX16=“+”; AY16;AX16&AY16);2)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente linear n da reta 2, (tem-se a equação reduzida da reta), no caso (6 - Equação geral / Eq. reduzida);

- Clique na célula mesclada **“C11”**, digite a função =**“Retas”&SE(F9*M9=-1; “perpendiculares”;SE(E(F9=M9;F10=M10);“ paralelas coincidentes”;SE (E(F9=M9;F10<>M10);“ paralelas distintas”;“ concorrentes”)))** e tecle **“Enter”**. Esta função analisa a posição relativa das duas retas dadas, no caso (1 - Dois pontos / Dois pontos);

- Clique na célula mesclada **“S11”**, digite a função =**“Retas”&SE(V9*AD9= -1;“ perpendiculares”;SE(E(V9=AD9;V10=AD10);“ paralelas coincidentes”; SE(E(V9=AD9;V10<>AD10);“ paralelas distintas”;“ concorrentes ”)))** e tecle **“Enter”**. Esta função analisa a posição relativa das duas retas dadas, no caso (2 - Dois pontos / Equação geral);

- Clique na célula mesclada **“AL11”**, digite a função =**“Retas”&SE(AO9* AV9= -1;“ perpendiculares”;SE(E(AO9=AV9;AO10=AV10);“ paralelas coincidentes”;SE(E(AO9=AV9;AO10<>AV10);“ paralelas distintas”;“ concorrentes”)))** e tecle **“Enter”**. Esta função analisa a posição relativa das duas retas dadas, no caso (3 - Dois pontos / Eq.reduzida);

- Clique na célula mesclada **“B20”**, digite a função =**“Retas”&SE(G18*Q18 =-1;“ perpendiculares”;SE(E(G18=Q18;G19=Q19);“ paralelas coincidentes”;SE(E(G18=Q18;G19<>Q19);“ paralelas distintas”;“ concorrentes ”)))** e tecle **“Enter”**. Esta função analisa a posição relativa das duas retas dadas, no caso (4 - Equação geral / Equação geral);

- Clique na célula mesclada **“V20”**, digite a função =**“Retas”&SE(Y18*AF 18=-1;“ perpendiculares”;SE(E(Y18=AF18;Y19=AF19);“**

paralelas coincidentes";SE(E(Y18=AF18;Y19<>AF19);" paralelas distintas";" concorrentes"))) e tecle **"Enter"**. Esta função analisa a posição relativa das duas retas dadas, no caso (5 - Eq. reduzida / Eq.reduzida);

- Clique na célula mesclada **"AJ20"**, digite a função **="Retas"&SE(AO18* AW18=-1;" perpendiculares";SE(E(AO18=AW18;AO19=AW19);" paralelas coincidentes";SE(E(AO18=AW18;AO19<>AW19);" paralelas distintas";" concorrentes")))** e tecle **"Enter"**. Esta função analisa a posição relativa das duas retas dadas, no caso (6 - Equação geral / Eq.reduzida);

E finalizando a planilha, temos:

- Clique em **"Selecionar tudo"**, conforme figura 5. Pressione ao mesmo tempo as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar células..."**. Em seguida, clique na aba **"Alinhamento"** e na opção **"Controle de texto"**, marque a opção **"Reduzir para caber"**. Depois clique em **"OK"**.
- Desbloqueie as células e células mescladas **"C6, E6, G6, J6, L6, N6, S6, U6, W6, AL6, AN6, AP6, C7, E7, G7, J7, L7, N7, S7, U7, W7, AA7, AD7, AG7, AL7, AN7, AP7, AU7, AW7, AX7, C16, F16, I16, M16, P16, S16, X16, Z16, AA16, AE16, AG16, AH16, AK16, AN16, AQ16, AV16, AX16, AY16"**, onde serão digitadas as coordenadas cartesianas e nomes dos pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ da equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ e os coeficientes angulares $\boldsymbol{m}$ e lineares $\boldsymbol{n}$ da equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$;
- Em seguida proteja a planilha, com a senha **"1234"**, como sugestão.

A planilha já está pronta para uso.

Como exemplo, resolva o mesmo exemplo 3.10.1 passado na seção 3.10, como segue:

1. Verifique a posição relativa entre as duas retas no plano cartesiano, nos seguintes casos:

   a) A reta 1 é formada pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, 6)$ e a reta 2, pelos pontos $A(0, 2)$ e $B(3, 5)$;

b) Uma reta é formada pelos pontos $A(2,3)$ e $B(4,7)$ e a outra pela equação geral da reta $4x - 2y - 2 = 0$;

c) A primeira reta é formada pelos pontos $(-1,2;2)$ e $(3,6;-7,6)$ e a segunda reta, pela equação $y = \frac{1}{2}x - 1$;

d) As duas retas são formadas pelas equações $2x - 1,5y + 3,8 = 0$ e $4x - 3y + 7,6 = 0$, respectivamente;

e) A reta 1 é formada pela equação reduzida da reta $y = 3x + 5$ e a reta 2, por $y = 2x - 3$;

f) Reta r: $2x - 3y + 4 = 0$; reta s: $y = 0,8x - 1,5$

Resolução com Excel:

1. a) A reta 1 é formada por dois pontos e a reta 2 também é formada por dois pontos. Com isso, utiliza-se o caso (1 - Dois pontos / Dois pontos).

- Clique na célula **"E6"** e digite: **"-1"**, na célula **"G6"** digite: **"3"**, na célula **"E7"** digite: **"2"** e na célula **"G7"** digite: **"6"**, que são as coordenadas cartesianas dos pontos A e B da reta 1;
- Clique na célula **"L6"** e digite: **"0"**, na célula **"N6"** digite: **"2"**, na célula **"L7"** digite: **"3"** e na célula **"N7"** digite: **"5"**, que são as coordenadas cartesianas dos pontos A e B da reta 2;
- Veja que o Excel já mostra os resultados: $m_1 = 1$; $m_2 = 1$; $n_1 = 4$ e $n_2 = 2$. Também mostra o resultado da posição relativa das duas retas, que são: **"Retas paralelas distintas"**.

b) Uma reta é formada por dois pontos e a outra é formada pela equação geral da reta. Com isso, utiliza-se o caso (2 - Dois pontos / Equação geral).

- Clique na célula **"U6"** e digite: **"2"**, na célula **"W6"** digite: **"3"**, na célula **"U7"** digite: **"4"** e na célula **"W7"** digite: **"7"**, que são as coordenadas cartesianas dos pontos A e B da reta 1;
- Clique na célula **"AA7"** e digite: **"4"**, na célula **"AD7"** digite: **"-2"**, na célula **"AG7"** digite: **"-2"**, que são os coeficientes a, b e c da equação geral da reta $4x - 2y - 2 = 0$ da reta 2;
- Note que o Excel já mostra os resultados: $m_1 = 2$; $m_2 = 2$; $n_1 = -1$ e $n_2 = -1$. Também mostra o resultado da posição relativa das duas retas, que são: **"Retas paralelas coincidentes"**.

c) Uma reta é formada por dois pontos e a outra é formada pela equação reduzida da reta. Com isso, utiliza-se o caso (3 - Dois pontos / Eq. reduzida).

- Clique na célula **“AN6”** e digite: **“-1,2”**, na célula **“AP6”** digite: **“2”**, na célula **“AN7”** digite: **“3,6”** e na célula **“AP7”** digite: **“-7,6”**, que são as coordenadas cartesianas dos pontos A e B da reta 1;
- Clique na célula **“AU7”** e digite: **“0,5”** (Observe que $\frac{1}{2} = 0,5$), na célula **“AW7”** digite: **“-”**, na célula **“AX7”** digite: **“1”**, que são os coeficientes: angular m e linear n, da equação reduzida da reta $y = \frac{1}{2}x - 1$ da reta 2;
- Observe que o Excel já mostra os resultados: $m_1 = -2$; $m_2 = 0,5$; $n_1 = -0,4$ e $n_2 = -1$. Também mostra o resultado da posição relativa das duas retas, que são: **“Retas perpendiculares”**.

d) Uma reta é formada pela equação geral da reta e a outra também é formada pela equação geral da reta. Com isso, utiliza-se o caso (4 - Equação geral / Equação geral).

- Clique na célula **“C16”** e digite: **“2”**, na célula **“F16”** digite: **“-1,5”**, na célula **“I16”** digite: **“3,8”**, que são os coeficientes a, b e c da equação geral da reta $2x - 1,5y + 3,8 = 0$ da reta 1;
- Clique na célula **“M16”** e digite: **“4”**, na célula **“P16”** digite: **“-3”**, na célula **“S16”** digite: **“7,6”**, que são os coeficientes a, b e c da equação geral da reta $4x - 3y + 7,6 = 0$ da reta 2;
- Novamente o Excel mostra os resultados: $m_1 = 1,3$; $m_2 = 1,3$; $n_1 = 2,5$ e $n_2 = 2,5$. Também mostra o resultado da posição relativa das duas retas, que são: **“Retas paralelas coincidentes”**.

e) Uma reta é formada pela equação reduzida da reta e a outra também é formada pela equação reduzida da reta. Com isso, utiliza-se o caso (5 - Eq. reduzida / Eq.reduzida).

- Clique na célula **“X16”** e digite: **“3”**, na célula **“Z16”** digite: **“+”**, na célula **“AA16”** digite: **“5”**, que são os coeficientes: angular m e linear n, da equação reduzida da reta $y = 3x + 5$ da reta 1;
- Clique na célula **“AE16”** e digite: **“2”**, na célula **“AG16”** digite: **“-”**, na célula **“AH16”** digite: **“3”**, que são os coeficientes: angular m e linear n, da equação reduzida da reta $y = 2x - 3$ da reta 2;

- O resultado é mostrado pelo Excel, sendo: $m_1 = 3$; $m_2 = 2$; $n_1 = 5$ e $n_2 = -3$. Também é mostrado o resultado da posição relativa das duas retas, que são: **“Retas concorrentes”**.

f) Uma reta é formada pela equação geral da reta e a outra é formada pela equação reduzida da reta. Com isso, utiliza-se o caso (6 - Equação geral / Eq. reduzida).

- Clique na célula **“AK16”** e digite: **“2”**, na célula **“AN16”** digite: **“-3”**, na célula **“AQ16”** digite: **“4”**, que são os coeficientes a, b e c da equação geral da reta $2x - 3y + 4 = 0$ da reta 1;
- Clique na célula **“AV16”** e digite: **“0,8”**, na célula **“AX16”** digite: **“-”**, na célula **“AY16”** digite: **“1,5”**, que são os coeficientes: angular m e linear n, da equação reduzida da reta $y = 0,8x - 1,5$ da reta 2;
- Note que o Excel já mostra os resultados: $m_1 = 0,7$; $m_2 = 0,8$; $n_1 = 1,3$ e $n_2 = -1,5$. Observe que a resposta é de $m_1 = m_r = 0,66..$ na seção 3.10 deste exemplo. A planilha está formatada para arredondar para uma casa decimal, por isso, a resposta nesta planilha é $m_1 = 0,7$. Veja Também que o resultado da posição relativa das duas retas, são: **“Retas concorrentes”**.

A planilha já está pronta.

- Por fim, salve a planilha, clicando no ícone .

Veja abaixo como ficou a referida planilha depois de resolver os exemplos acima.

Figura 90 – Posição relativa de duas retas no plano cartesiano (Planilha).

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

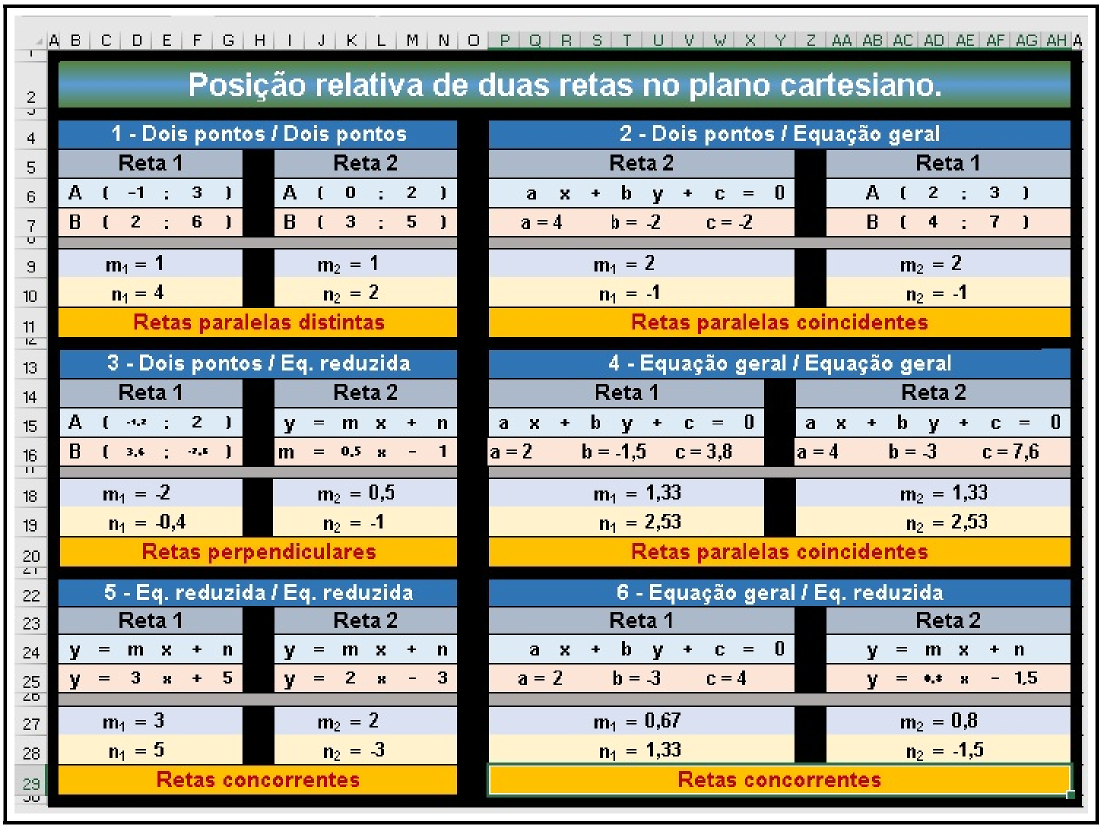
Será apresentado logo abaixo uma "segunda versão" da mesma planilha. A primeira planilha da figura 90 está apresentada em 3 colunas, considerando os casos apresentados como coluna. Foi esta planilha que neste trabalho foi contemplado com o tutorial passo a passo de construí-la.

Já a segunda planilha da figura 91, está apresentada em 2 colunas, considerando os casos apresentados como coluna. Esta planilha não terá o tutorial de como construí-la passo a passo, será apenas como ilustração, mas é possível construí-la seguindo todos os passos anteriores, mudando apenas algumas células de posição. Todas as fórmulas e funções são exatamente as mesmas da planilha anterior, inclusive até a ordem dos casos apresentados.

Foi realizado o tutorial passo a passo de construção da primeira planilha, (figura 90), em virtude da mesma ser totalmente visualizada dentro da janela no Excel, sem diminuir o "nivel de zoom" ou sem usar as "barras de rolagem". Já a segunda planilha da figura 91, não é possível a visualização total dentro da janela do Excel. Para isso, é necessário diminuir a porcentagem do "nível de zoom" do Excel para 63% ou menos. Caso não deseje fazer isto e deixar a visualização do nível de zoom em 100%, é nessário usar as "Barras de rolagem" para cima ou para baixo para poder visualizar toda a planilha.

Então, apenas para visualização, segue a planilha abaixo com todos os exemplos resolvidos nela também.

Figura 91 – Posição relativa de duas retas no plano cartesiano 2 (Planilha).

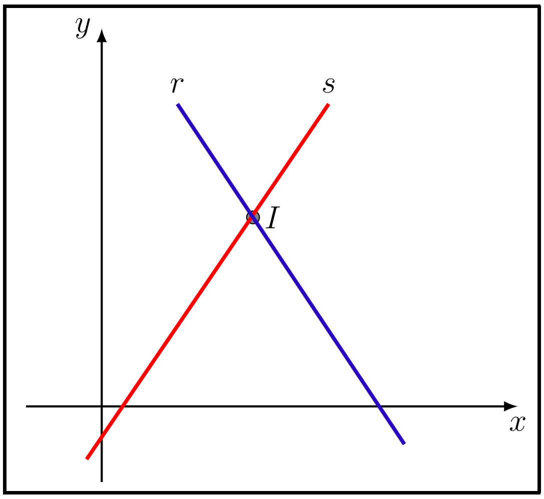


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.11 Ponto de intersecção de duas retas concorrentes

Considere as retas r e s dadas pelas equações gerais $a_r x + b_r y + c_r = 0$ e $a_s x + b_s y + c_s = 0$, concorrentes em $I(x, y)$, conforme a figura 92

Figura 92 – Ponto de intersecção de duas retas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Para encontrar o ponto de intersecção $I(x, y)$ das duas retas concorrentes, deve-se resolver o seguinte sistema linear formado pelas suas equações gerais das retas r e s:

$$\begin{cases} a_r x + b_r y + c_r = 0 \\ a_s x + b_s y + c_s = 0 \end{cases}$$

Pelo método da substituição, isola-se o y nas duas equações:

$$a_r x + b_r y + c_r = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-a_r x - c_r}{b_r} \tag{3.39}$$

$$a_s x + b_s y + c_s = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-a_s x - c_s}{b_s} \tag{3.40}$$

Fazendo (3.39) = (3.40) e depois isolando x, para encontrar o valor da abscissa x do ponto de intersecção, temos:

$$\frac{-a_r x - c_r}{b_r} = \frac{-a_s x - c_s}{b_s} \Rightarrow \frac{b_s(-a_r x - c_r) = b_r(-a_s x - c_s}{b_r b_s} \Rightarrow$$
$$\frac{-a_r b_s x - b_s c_r = -a_s b_r x - b_r c_s}{\cancel{b_r b_s}} \Rightarrow -a_r b_s x - b_s c_r = -a_s b_r x - b_r c_s \Rightarrow$$
$$-a_r b_s x + a_s b_r x = -b_r c_s + b_s c_r \Rightarrow (-a_r b_s + a_s b_r)x = -b_r c_s + b_s c_r \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{-b_r c_s + b_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}} \tag{3.41}$$

Em seguida, substitui-se (3.41) em (3.39):

$$y = \frac{-a_r x - c_r}{b_r} \Rightarrow y = \frac{-a_r\left(\dfrac{-b_r c_s + b_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}\right) - c_r}{b_r}$$

$$y = \left(\frac{a_r b_r c_s - a_r b_s c_r - c_r(-a_r b_s + a_s b_r)}{-a_r b_s + a_s b_r}\right) \cdot \frac{1}{b_r}$$

$$y = \frac{a_r b_r c_s - a_r b_s c_r + a_r b_s c_r - a_s b_r c_r}{-a_r b_s b_r + a_s b_r b_r}$$

$$y = \frac{(a_r b_r c_s - a_s b_r c_r) + (-a_r b_s c_r + a_r b_s c_r)}{-a_r b_s b_r + a_s b_r b_r}$$

$$y = \frac{b_r(a_r c_s - a_s c_r) + b_s(\cancel{-a_r c_r + a_r c_r})}{b_r(-a_r b_s + a_s b_r)}$$

$$y = \frac{\cancel{b_r}(a_r c_s - a_s c_r) + \cancel{b_s \cdot 0}}{\cancel{b_r}(-a_r b_s + a_s b_r)}$$

$$\boxed{y = \frac{a_r c_s - a_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}} \tag{3.42}$$

Logo, o ponto de intersecção $I(x, y)$ das retas r e s, concorrentes, em função dos coeficientes a, b e c da equação geral da reta $ax + by + c = 0$ é:

$$\boxed{I\left(\frac{-b_r c_s + b_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}, \frac{a_r c_s - a_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}\right)} \tag{3.43}$$

Considere agora as retas r e s dadas pelas equações reduzidas $y = m_r x + n_r$ e $y = m_s x + n_s$.

Para encontrar o ponto de intersecção $I(x, y)$ das duas retas, deve-se resolver o sistema linear formado pelas suas equações reduzidas das retas r e s, que, de forma análoga à anterior, para $b = 1$, que é o coeficiente de y, resulta em:

$$\boxed{I\left(\frac{n_s - n_r}{m_r - m_s}, \frac{m_r n_s - m_s n_r}{m_r - m_s}\right)} \tag{3.44}$$

Uma observação é que nesta seção não será apresentado o caso de cálculo do ponto de intersecção diretamente quando as retas forem dadas por dois pontos. Se isso acontecer, primeiro determine a equação geral ou reduzida com os dois pontos, para depois encontrar o ponto de intersecção. Se o exercício der uma equação reduzida da reta e outra equação geral da reta, deve-se transformar ou a equação geral em equação reduzida ou vice-versa, para poder utilizar as fórmulas aqui apresentadas para calcular o ponto de intersecção I, sem resolver através do sistema linear.

Exemplo 3.11.1 - Um estudante que participou de uma gincana ganhava 5 pontos por cada questão que acertava e perdia 2 pontos por cada uma que errava. Sabendo que ele ganhou 62 pontos no total e que respondeu 25 questões, quantas ele acertou e quantas ele errou?

Resolução:

Para resolver este problema considere x a quantidade de questões certas e y, as erradas. Na primeira situação ele ganhava 5 pontos quando acertava e perdia 2 quando errava, totalizando 62 pontos no final. Desta forma, a equação é $5x - 2y = 62$. Na segunda situação ele respondeu 25 questões. Assim, a equação é $x + y = 25$. Uma solução é o ponto de intersecção das duas retas.

Transformando essas duas equações em equações gerais da reta e identificando seus coeficientes, temos:

- r: $5x - 2y - 62 = 0$, sendo $a_r = 5$, $b_r = -2$ e $c_r = -62$
- s: $x + y - 25 = 0$, sendo $a_s = 1$, $b_s = 1$ e $c_s = -25$

Substituindo na fórmula, temos:

$$I\left(\frac{-b_r c_s + b_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}, \frac{a_r c_s - a_s c_r}{-a_r b_s + a_s b_r}\right)$$

$$I\left(\frac{-(-2)\cdot(-25) + 1\cdot(-62)}{-5\cdot 1 + 1\cdot(-2)}, \frac{5\cdot(-25) - 1\cdot(-62)}{-5\cdot 1 + 1\cdot(-2)}\right)$$

$$I\left(\frac{-50-62}{-5-2}, \frac{-125+62}{-5-2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{-112}{-7}, \frac{-63}{-7}\right) \Rightarrow I(16, 9)$$

Como o ponto de intersecção I das duas retas é a solução do problema, então o estudante acertou 16 questões e errou 9.

Exemplo 3.11.2 - Uma pessoa emprestou R$ 200,00 a juros simpples de 1% ao mês, ao seu irmão, por tempo indeterminado. No mesmo dia, emprestou R$ 150,00 a juros simples de 2% ao mês, ao seu amigo. Nestas condições, depois de quantos meses os dois empréstimos teriam o mesmo montante?

Resolução:

Como o juros simples é fixo por mês, calcula-se os juros produzidos em um mês pelos dois empréstimos e determina a equação reduzida da reta, como uma das soluções. No primeiro empréstimo, 1% de R$ 200,00 rende R$ 2,00 ao mês. No segundo empréstimo, 2% de R$ 150,00 rende R$ 3,00 ao mês.

De posse destas informações e considerando x o tempo de empréstimo e y o montante (capital mais juros), podemos determinar a equação reduzida da reta em cada caso e determinar o ponto de intersecção entre elas. Segue:

- r: $y = 2x + 200$, sendo $m_{\mathrm{r}} = 2$ e $n_{\mathrm{r}} = 200$ (irmão)
- s: $y = 3x + 150$, sendo $m_{\mathrm{s}} = 3$ e $n_{\mathrm{s}} = 150$ (amigo)

Substituindo na fórmula, temos:

$$I\left(\frac{n_s - n_r}{m_r - m_s}, \frac{m_r n_s - m_s n_r}{m_r - m_s}\right) \Rightarrow I\left(\frac{150 - 200}{2 - 3}, \frac{2 \cdot 150 - 3 \cdot 200}{2 - 3)}\right) \Rightarrow$$
$$I\left(\frac{-50}{-1}, \frac{-300}{-1}\right) \Rightarrow I(50, 300).$$

Assim, o ponto de intersecção I das duas retas formadas pelas duas equações reduzidas é $I(50, 300)$.

Logo, os dois montantes ficariam iguais depois de 50 meses.

3.11.1 Ponto de intersecção de duas retas concorrentes, usando o **Excel 2016**

Esta planilha será criada e configurada para apresentar o resultado racional em forma de número fracionário e para calcular o ponto de intersecção I de duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$. Para isto, faça o seguinte:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"Pi2r"**. Esta será usada para calcular o ponto de intersecção (I) de duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ no plano cartesiano;
- Altere a largura de todas as colunas **"(B:AB)"** para **"4,00"**. Altere também a largura das colunas: **"A, K, U, AC"** para **"1,00"**;
- Altere a altura das linhas **"1, 3, 7, 11"** para **"9,00"**; das linhas **"4, 5, 8, 9"** para **"21,00"** e das linhas **"2, 6, 10"** para **"30,00"**;
- Mesclar e centralizar as células: **"(B2:AB2), (B4:J4), (L4:T4), (V4:AB4), (W5:X5), (Z5:AA5), (C6:D6), (F6:G6), (I6:J6), (M6:N6), (P6:Q6),**

(S6:T6), (W6:X6), (Z6:AA6), (B8:J8), (L8:T8), (V8:AB8), (W9: X9), (Z9:AA9), (C10:D10), (E10:F10), (G10:H10), (I10:J10), (M 10:N10), (O10:P10), (Q10:R10), (S10:T10), (W10:X10), (Z10:AA 10)";

- Clique nas células e células mescladas "**B2**" e digite: "**Ponto de Intersecção** I **entre duas retas** r **e** s **concorrentes.**"; em "**B4**" digite: "**Equação geral da reta** r"; em "**L4**" digite: "**Equação geral da ret** s"; em "**B8**" digite: "**Equação reduzida da reta** r"; em "**L8**" digite: "**Equação reduzida da reta** s"; em "**V4, V8**" digite: "**Ponto de intersecção** I"; em "**B5, L5**" digite: "**a**"; em "**C5, M5, W5, F9, P9, W9**" digite: "**x**"; em "**D5, G5, N5, Q5, G9, Q9**" digite: "**+**"; em "**E5, O5**" digite: "**b**"; em "**F5, P5, Z5, C9, M9, Z9**" digite: "**y**"; em "**H5, R5**" digite: "**c**"; em "**I5, S5, D9, N9**" digite: "**=**"; em "**J5, T5**" digite: "**0**"; em "**V5, V6, V9, V10**" digite: "I("; em "**Y5, Y6, Y9, Y10**" digite: "**;**"; em "**AB5, AB6, AB9, AB10**" digite: "**)**"; em "**E9, O9**" digite: "**m**"; em "**H9, R9**" digite: "**n**"; em "**C10, M10**" digite: "**m =**"; em "**G10, Q10**" digite: "**n =**"; em "**B6, L6**" digite: "**a=**"; em "**E6, O6**" digite: "**b =**"; em "**H6, R6**" digite: "**c =**";

- Selecionar toda a planilha e clique em: "**Alinhar no Meio**", em "**Centralizar**", em "**Negrito**", altere a fonte para "**Arial**" e o tamanho da fonte para "**14**";

- Selecione as células mescladas: "**C10, G10, M10, Q10**" e clique em: "**Alinhar à Direita**";

- Selecione as células mescladas: "**C6, F6, I6, M6, P6, S6, AB5, AB6, E10, I10, O10, S10, AB9, AB10**" e clique em "**Alinhar à Esquerda**";

- Altere o tamanho da fonte da linha: "**2**", para "**18**" e das linhas "**4, 8**" para "**12**";

- Altere a cor do plano de fundo com efeitos de preenchimento com duas cores, sendo a cor 1: "**Verde, Ênfase 6, Mais Escuro, 25%**" e a cor 2: "**Azul, Ênfase 1**", com sombreamento: "**Horizontal**" e com a "**3ª Variação**" de cores, das células mescladas: "**B2**". Altere também a cor da fonte para: "**Branca**";

- Altere a cor do plano de fundo para "**Verde, Ênfase 6, Mais Escuro 25%**", das células: "**(K4:K6), (U4:U6)**" e insere "**Bordas Externas**";

- Altere a cor do plano de fundo para **"Verde, Ênfase 6, Mais Claro 40%"**, das células mescladas: **"B4, L4, V4"** e insere **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Verde, Ênfase 6, Mais Claro 60%"**, das células: **"(B5:J5), (L5:T5), (V5:AB5)"** e insere **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Verde, Ênfase 6, Mais Claro 80%"**, das células e células mescladas: **"(B6:J6), (L6:T6), (V6:AB6)"** e insere **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%"**, das células: **"(K8:K10), (U8:U10)"** e insere **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Claro 40%"**, das células mescladas: **"B8, L8, V8"** e insere **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Claro 60%"**, das células e células mescladas: **"(B9:J9), (L9:T9), (V9:AB9)"** e insira **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Claro 80%"**, das células e células mescladas: **"(B10:J10), (L10:T10), (V10:AB10)"** e insira **"Bordas Externas"**;
- Altere a cor do plano de fundo para **"Preta"**, das células: **"(A1:AC1), (A2:A10), (AC2:AC10), (A11:AC11), (B3:AB3), (B7:AB7)"** e insira **"Bordas Externas"**;
- Ocultar colunas da **"AD"** até a coluna final. Ocultar também da linha **"12"** até a linha final.

Já vimos anteriormente, na seção 3.11, duas fórmulas que calculam o ponto de intersecção entre duas retas concorrentes: uma para equações gerais e outra para equações reduzidas. Segue abaixo cada um dos casos e qual a fórmula utilizada em cada caso:

1. Duas equações gerais das retas r e s: $I\left(\dfrac{-b_rc_s + b_sc_r}{-a_rb_s + a_sb_r}, \dfrac{a_rc_s - a_sc_r}{-a_rb_s + a_sb_r}\right)$
2. Duas equações reduzidas das retas r e s: $I\left(\dfrac{n_s - n_r}{m_r - m_s}, \dfrac{m_rn_s - m_sn_r}{m_r - m_s}\right)$

Adaptando estas fórmulas nesta planilha criada no Excel para calcular as coordenadas cartesianas do ponto de intersecção $\boldsymbol{I}$ entre duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$, concorrentes, nos dois casos apresentados, faça o seguinte:

- Clique na célula **"U5"** e digite: **=(C6*S6-M6*I6)/(-C6*P6+M6*F6)**; na célula **"U6"**, digite: **=(-S6*F6+I6*P6)/(-C6*P6+M6*F6)**; em **"U9"**, digite: **=(E10*S10-O10*I10)/(E10-O10)** e em **"U10"**, digite: **=(S10-I10)/(E10-O10)**. Estas fórmulas servirão de cálculo auxiliar para representar os pontos de intersecções em forma de fração;

- Clique na célula mesclada **"W6"**, digite: **=SEERRO(SE(INT(U6)=U6; U6; TEXTO(U6;"0/0"));"∄")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da abscissa x do ponto de intersecção I, no caso de ter duas equações gerais das retas r e s;

- Clique na célula mesclada **"Z6"**, digite: **=SEERRO(SE(INT(U5)=U5; U5; TEXTO(U5;"0/0"));"∄")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da ordenada y do ponto de intersecção I, no caso de ter duas equações gerais das retas r e s;

- Clique na célula mesclada **"W10"**, digite: **=SEERRO(SE(INT(U10)= U10; U10; TEXTO(U10; "0/0"));"∄")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da abscissa x do ponto de intersecção I, no caso de ter duas equações reduzidas das retas r e s;

- Clique na célula mesclada **"Z10"**, digite: **=SEERRO(SE(INT(U9)=U9; U9; TEXTO(U9;"0/0"));"∄")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da ordenada y do ponto de intersecção I, no caso de ter duas equações reduzidas das retas r e s;

E, finalizando a planilha, temos:

- Clique em **"Selecionar tudo"**, conforme figura 5. Pressione ao mesmo tempo as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar células..."**. Em seguida, clique na aba **"Alinhamento"** e na opção **"Controle de texto"**, marque a opção **"Reduzir para caber"**. Depois clique em **"OK"**.

- Desbloqueie as células e as células mescladas **"C6, F6, I6, M6, P6, S6, E10, I10, O10, S10"**, onde serão digitados os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ da equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ e os coeficientes angulares $\boldsymbol{m}$ da equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$;

- Formatar para fração as células **"C6, F6, I6, M6, P6, S6, W6, Z6, E10, I10, O10, S10, W10, Z10"**;
- Em seguida proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

A planilha já está pronta para uso.

Utilize-a para resolver o exemplo 3.11.1 da seção 3.11.

Resolução com Excel:

O problema se resume em determinar o ponto de intersecção para calcular a quantidade de questões certas e erradas de um estudante, cujas equações estão representadas abaixo:

- r: $5x - 2y - 62 = 0$, sendo $a_r = 5$, $b_r = -2$ e $c_r = -62$
- s: $x + y - 25 = 0$, sendo $a_s = 1$, $b_s = 1$ e $c_s = -25$

Agora é só digitar estes coeficientes na planilha como segue:

- Clique na célula mesclada **"C6"** e digite: **"5"**, em **"F6"** digite: **"-2"** e em **"I6"** digite: **"-62"** que são os coeficientes da equação geral da reta r;
- Clique na célula mesclada **"M6"** e digite: **"1"**, em **"P6"** digite: **"1"** e em **"S6"** digite: **"-25"** que são os coeficientes da equação geral da reta s;
- Veja que o valor de x e y do ponto de intersecção I, aparece nas células mescladas **"W6"** e **"Z6"**.

Como o ponto de intersecção $I(16, 9)$ das duas retas é a solução do problema, então o estudante acertou 16 questões e errou 9.

Agora, utilize a planilha para resolver o exemplo 3.11.2, da seção 3.11.

Resolução com Excel:

O problema consiste em calcular o tempo em juros simples, cujas equações reduzidas estão representadas abaixo:

- r: $y = 2x + 200$, sendo $m_{\text{r}} = 2$ e $n_{\text{r}} = 200$ (irmão)
- s: $y = 3x + 150$, sendo $m_{\text{s}} = 3$ e $n_{\text{s}} = 150$ (amigo)

Agora é só digitá-los na planilha, como segue:

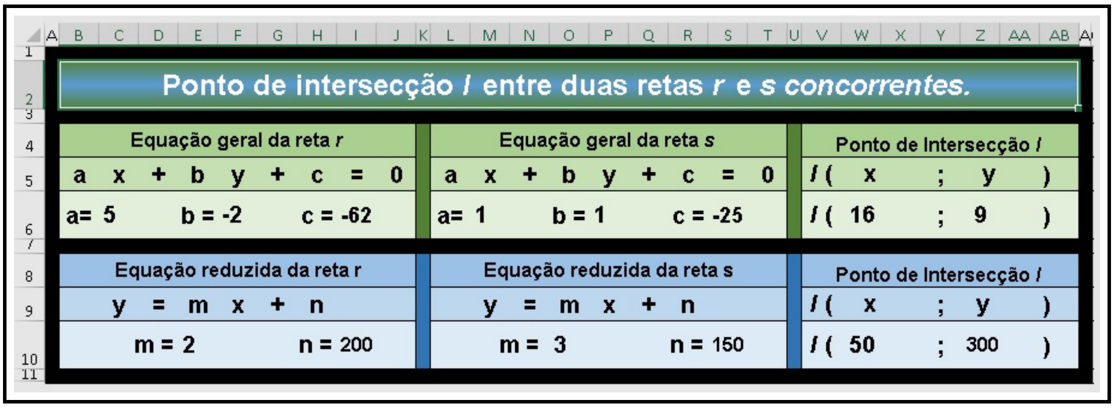
- Clique na célula mesclada **"E10"** e digite: **"2"** e em **"I10"** digite: **"200"**, que são os coeficientes: angular e linear da equação reduzida da reta r;
- Clique na célula mesclada **"O10"** e digite: **"3"** e em **"S10"** digite: **"150"**, que são os coeficientes: angular e linear da equação reduzida da reta s;
- Veja que o valor de x e y do ponto de intersecção I, aparece nas células mescladas **"W10"** e **"Z10"**.

Como o ponto de intersecção I das duas retas formadas pelas duas equações reduzidas é $I(50, 300)$, então, os dois montantes ficariam iguais depois de 50 meses.

Por fim, salve a planilha clicando no ícone .

Veja abaixo como ficou a referida planilha depois de resolver os exemplos acima.

Figura 93 – Ponto de intersecção entre duas retas (Planilha).


Ponto de intersecção *I* entre duas retas *r* e *s* *concorrentes.*

Equação geral da reta *r*	Equação geral da reta *s*	Ponto de Intersecção *I*
a x + b y + c = 0	a x + b y + c = 0	*I* (x ; y)
a= 5 b = -2 c = -62	a= 1 b = 1 c = -25	*I* (16 ; 9)
Equação reduzida da reta r	**Equação reduzida da reta s**	**Ponto de Intersecção *I***
y = m x + n	y = m x + n	*I* (x ; y)
m = 2 n = 200	m = 3 n = 150	*I* (50 ; 300)

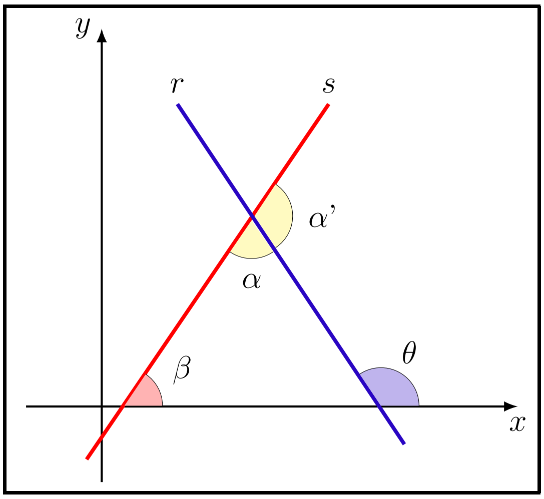
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.12 Ângulo formado entre duas retas

Sejam r e s duas retas concorrentes onde ambas não são paralelas aos eixos coordenados e ainda não são perpendiculares entre si. O ângulo formado entre elas será definido como sendo o menor ângulo determinado pelas mesmas, ora denominado de α, conforme mostra a figura 94.

Observe também que as duas retas interceptam o eixo $\boldsymbol{x}$, formando os ângulos β e θ em que $tg\beta = m_s$ e $tg\theta = m_r$. Com isso, o ângulo θ é o ângulo externo ao triângulo formado pelas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ e o eixo das abscissas (eixo $\boldsymbol{x}$).

Figura 94 – Ângulo formado entre duas retas.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Para determinar o ângulo α formado entre as duas retas dadas, obedecendo as restrições acima citadas, aplica-se o **"Teorema do ângulo externo"** no ângulo θ e isola o ângulo α. Assim, vem:

$$\theta = \beta + \alpha \longrightarrow \alpha = \theta - \beta$$

Posteriormente, aplica-se a tangente nos dois membros e em seguida, a tangente da diferença de dois arcos (pela trigonometria). Assim, vem:

$$tg\alpha = tg(\theta - \beta) \Rightarrow tg\alpha = \frac{tg\theta - tg\beta}{1 + tg\theta \cdot tg\beta}$$

Como $tg\theta = m_r$ e $tg\beta = m_s$, vem:

$$tg\alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

Como o ângulo formado entre duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ é o menor ângulo, que neste caso é α, então, a fórmula que calcula o valor do mesmo é:

$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|} \tag{3.45}$$

Segundo (SOUZA; GARCIA, 2016, p.68), “É importante observar que, dadas duas retas concorrentes r e s, temos outros três casos em relação ao ângulo α formado por elas.” Segue abaixo esses três casos, adaptados em relação ao ângulo:

1. r e s perpendiculares entre sí: Nesse caso, $\alpha = 90^o$;
2. r paralela ao eixo x: Nesse caso, $\alpha = \beta \Rightarrow tg\alpha = tg\beta$ e $tg\beta = m_s$. Logo, $tg\alpha = |m_s|$
3. r paralela ao eixo y: Neste caso, $\alpha = 90^o - \beta \Rightarrow tg\alpha = tg(90^o - \beta) \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{1}{tg\beta}$ $\Rightarrow tg\alpha = \dfrac{1}{m_s} ou - \dfrac{1}{m_s} \Rightarrow$ Logo, $tg\alpha = \left|\dfrac{1}{m_s}\right|$

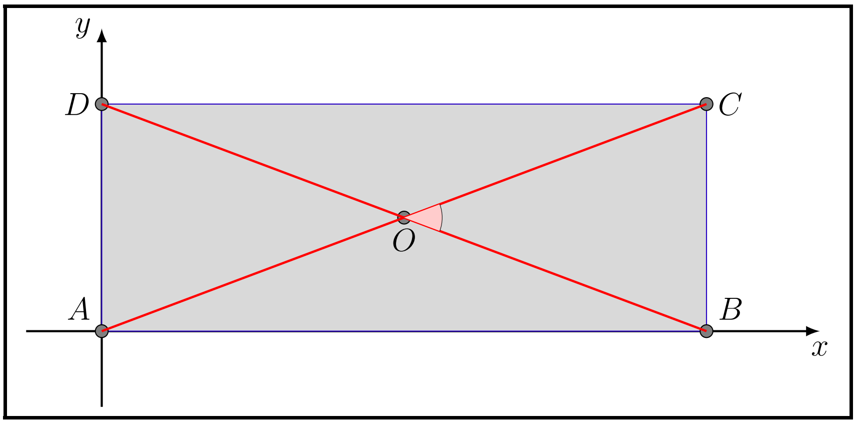
Segue abaixo alguns exemplos:

Exemplo 3.12.1 - Considere um terreno retangular $ABCD$ de 12 m de largura e 30 m de comprimento, que tem o ponto A coincidindo com a origem de um plano cartesiano e o ponto B pertencente ao eixo x. O comprimento do terreno é o segmento de reta $\overline{AB}$ e as diagonais se interceptam no ponto O. Desta forma, calcule o ângulo BÔC.

Resolução:

Os dados deste problema serão representados no plano cartesiano, de acordo com a figura 95:

Figura 95 – Ângulo entre diagonais de um retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Para calcular o ângulo ilustrado, devemos identificar os pontos extremos dos segmentos que formam as diagonais e são vértices do retângulo, que são:

- A diagonal $\overline{AC}$ tem coordenadas $A(0,0)$ e $C(30,12)$ e a $\overline{BD}$, tem $B(30,0)$ e $D(0,12)$.
- Com esses pontos, calculam-se os coeficientes angulares da reta r, que contem os pontos A e C e da reta s, que contem os pontos B e D, pela fórmula (3.27). Assim:

$$m_r = \frac{12-0}{30-0)} \Rightarrow m_r = \frac{12}{30} \Rightarrow m_r = \frac{2}{5}$$

$$m_r = \frac{12-0)}{0-30} \Rightarrow m_r = \frac{12}{-30} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{5}$$

- Substituindo os coeficientes angulares na fórmula, vem:

$$tg\alpha = \left| \frac{\frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{1 + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{\frac{2}{5} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{4}{25}} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{\frac{4}{5}}{\frac{25-4}{25}} \right| \Rightarrow$$

$$tg\alpha = \left| \frac{\frac{4}{5}}{\frac{21}{25}} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{21} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{20}{21} \right| \Rightarrow tg\alpha = \frac{20}{21} \Rightarrow \alpha \cong 43,6^{o}$$

Considere $\alpha = B\hat{O}C$. Logo, o ângulo formado pelas diagonais do retângulo é $B\hat{O}C \cong 43,6^{o}$.

Exemplo 3.12.2 - Uma reta r passa na origem, no ponto $P(2,-1)$ e interceptam as retas s e t. Nestas condições, calcule o ângulo formado entre r e as retas:

a) $s:\ y = 2x + 3$

b) $t:\ -2x + 11y - 5 = 0$

Resolução:

a) Como a reta r passa na origem, então ela passa no ponto $(0,0)$. Como ela também passa no ponto $(2,-1)$, calcula-se o coeficiente angular utilizando a fórmula (3.27):

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \Rightarrow \quad m_r = \frac{-1-0}{2-0} \quad \Rightarrow \quad m_r = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_r = -\frac{1}{2}$$

Já a reta s, o coeficiente angular é $m_s = 2$, analisando a equação reduzida da reta.

Após determinar os coeficientes angulares, é só substituir na fórmula (3.45) para calcular o valor do ângulo α entre as retas r e s;

$$tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{2} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{\frac{-1-4}{2}}{1 - \frac{2}{2}}\right| \Rightarrow$$

$$tg\alpha = \left|\frac{\frac{-5}{2}}{1-1}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{-\frac{5}{2}}{0}\right| \Rightarrow \text{a } tg\alpha \text{ não é definida} \Rightarrow \alpha = 90^{\text{o}}.$$

Logo, o ângulo α formado entre as retas r e s é $\alpha = 90^{\text{o}}$

b)

Na equação geral da reta t, $a = -2$ e $b = 11$. Assim, calcula o coeficiente angular utilizando a fórmula (3.30):

$$m_t = \frac{-a}{b} \quad \Rightarrow \quad m_t = \frac{-(-2)}{11} \quad \Rightarrow \quad m_t = \frac{2}{11}$$

Substituindo os coeficientes angulares na fórmula abaixo para calcular o valor ângulo α entre as retas r e t, vem:

$$tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{2}{11}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{11}}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{\frac{-11-4}{22}}{1 - \frac{2}{22}}\right| \Rightarrow$$

$$tg\alpha = \left|\frac{\frac{-15}{22}}{\frac{22-2}{22}}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{\frac{-15}{\cancel{22}}}{\frac{20}{\cancel{22}}}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{-1\cancel{5}}{\cancel{20}}\right| \Rightarrow tg\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \cong 36,87°$$

Observe também que o valor do ângulo α foi obtido com o uso da calculadora científica, calculando o valor da $tg\alpha = \frac{3}{4}$, com arredondamento de duas casas decimais.

Logo, o ângulo α formado pelas retas (r) e (s) é $\alpha \cong 36,87°$.

Exemplo 3.12.3 - Num plano cartesiano a reta r de equação geral $3x - 4y + 7 = 0$ intercepta a reta s de equação $x + 2y - 1 = 0$, formando um ângulo α. Nestas condições, determine a $tg\alpha$.

Resolução:

Inicialmente, calcula-se os valores dos coeficientes angulares das duas retas. Utiliza-se a fórmula $m = \frac{-a}{b}$ por ter a equação geral da reta.

- Reta (r) $3x - 4y + 7 = 0$, onde $a = 3$ e $b = -4$: $m_r = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_r = \frac{3}{4}$
- Reta (s) $x + 2y - 1 = 0$, onde $a = 1$ e $b = 2$: $m_s = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$

Agora, utiliza-se a fórmula (3.45) para calcular a tangente do ângulo α formado entre as duas retas, Assim:

$$tg\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{8}}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{\frac{3+2}{4}}{\frac{8-3}{8}}\right| \Rightarrow$$

$$tg\alpha = \left|\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}}\right| \Rightarrow tg\alpha = \left|\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{5}}\right| \Rightarrow tg\alpha = |2| \Rightarrow tg\alpha = 2$$

Logo, o valor da tangente do ângulo α é $tg\alpha = 2$.

Exemplo 3.12.4 - Determine o ângulo formado entre as retas r e s, nos casos abaixo:

a) $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e $s: y = -7x + 8$

b)$r: y = 0,5x - 1$ e $s: y = 3x + 8$.

Resolução:

a)

- Na reta r, de equação geral da reta: $2x - 3y + 5 = 0$, o coeficiente angular é dado por $m_r = \frac{-a}{b}$. Assim: $m_r = \frac{-2}{-3} \Rightarrow m_r = \frac{2}{3} \Rightarrow m_r \cong 0,66...$
- Na reta s, de equação reduzida da reta: $y = -7x + 8$ identifica-se o coeficiente angular m analisando diretamente na forma da equação $y = mx + n$. Assim: $m_s = -7$
- Agora, aplica-se a fórmula (3.45) para calcular o ângulo formado entre as duas retas:

$$tg\alpha = \left| \frac{\frac{2}{3} - (-7)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot (-7)} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{\frac{2}{3} + 7}{1 - \frac{14}{3}} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{\frac{2+21}{3}}{\frac{3-14}{3}} \right| \Rightarrow$$

$$tg\alpha = \left| \frac{\frac{23}{3}}{\frac{-11}{3}} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{23}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{-11} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| -\frac{23}{11} \right| \Rightarrow tg\alpha = \frac{23}{11} \Rightarrow \alpha = 64{,}44^{o}$$

Logo, o ângulo formado entre as retas (r) e (s) é $\alpha = 64,44^{o}$.

b)

- Na reta $r:\ y = 0,5x - 1$, o coeficiente angular é $m_r = 0,5$;
- Na reta $s: y = 3x + 8$, o coeficiente angular é $m_s = 3$;
- Agora, aplica-se a fórmula (3.45) para calcular o ângulo formado entre as duas retas:

$$tg\alpha = \left| \frac{0,5 - 3}{1 + 0,5 \cdot 3} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{-2,5}{1 + 1,5} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{-2,5}{2,5} \right| \Rightarrow tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{o}.$$

Logo, o ângulo formado pelas retas (r) e (s) é $\alpha = 45^{o}$.

3.12.1 Ângulo formado entre duas retas, usando o **Excel 2016**

Para fazer uma planilha que permite calcular o valor do ângulo formado entre duas retas r e s concorrentes, não paralelas aos eixos x ou y e também que não sejam perpendiculares entre si, no plano cartesiano, em graus e em radianos, envolvendo pontos, equação geral da reta e equação reduzida da reta, com base na análise de seus coeficientes angulares m_r e m_s, faça o seguinte:

- crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"Ae2r"**. Esta planilha será usada para calcular o valor do ângulo formado entre duas retas no plano cartesiano;
- Altere a largura das colunas **"A"** e **"AI"** para **"1,00"**. Altere também a largura de todas as demais colunas de **"B"** até **"AH"** para **"3,57"**;
- Altere a altura das linhas **"1, 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33"** para **"9,00"**; das linhas **"4 a 7, 9 a 11, 14 a 17, 19 a 21, 24 a 27, 29 a 31"** para **"21,00"**; das linhas **"12, 22, 32"** para **"25,50"** e da linha **"2"** para **"33,75"**;
- Mesclar e centralizar as células: **"(B2:AH2), (B4:N4), (P4:AH4), (B5: G5), (I5:G5), (P5: Y5), (AA5:AH5), (R7:S7), (U7:V7), (X7:Y7), (B9:G9), (I9: N9), (P9:Y9), (AA9:AH9), (B10:C10), (D10:G10), (I10:J10), (K10:N10), (P10:T10), (U10:Y10), (AA10:AD10), (AE 10:AH10), (B11:F11), (G11: J11), (K11:N11), (P11:V11), (W11: AB11), (AC11:AH11), (B12:F12), (G 12:J12), (K12:N12), (P12: V12), (W12:AB12), (AC12:AH12), (B14:N14), (P14:AH14), (B15: G15), (I15:N15), (P15:X15), (Z15:AH15), (Q17:R17), (T17:U17), (W17:X17), (AA17:AB17), (AD17:AE17), (AG17:AH17), (B19:G 19), (I19:N19), (P19:X19), (Z19:AH19), (B20:C20), (D20:G20), (I 20: J20), (K20:N20), (P20:S20), (T20:X20), (Z20:AC20), (AD20: AH20), (B21:F21), (G21:J21), (K21:N21), (P21:V21), (W21:AB21), (AC21:AH21), (B22:F22), (G22:J22), (K22:N22), (P22:V22), (W22: AB22), (AC22:AH 22), (B24:N24), (P24:AH24), (B25:G25), (I25: N25), (P25:Y25), (AA25: AH25), (R27:S27), (U27:V27), (X27:Y 27), (AG27:AH27), (B29:G29), (I 29:N29), (P29:Y29), (AA29:AH 29), (B30:C30), (D30:G30), (I30:J30), (K 30:N30), (P30:S30), (T 30:Y30), (AA30:AD30), (AE30:AH30), (B31:F31), (G31:J31), (K 31:N31), (P31:V31), (W31:AB31), (AC31:AH31), (B32:F 32), (G 32:J32), (K32:N32), (P32:V32), (W32:AB32), (AC32:AH32)"**.

A parte de mesclagem das células foram concluídas. De agora em diante serão digitados os dados nas células conforme orientações abaixo. Observe também que há vários casos em que se pode determinar o ângulo entre duas retas no plano cartesiano, envolvendo pontos, equação geral da reta e equação reduzida da reta, sendo seis casos possíveis principais. Todos os seis casos são os mesmos criados na planilha da figura 90 ou 91, na subseção 3.10.1. Então, considere os mesmos casos a serem aplicados também nos cálculos que determinam o ângulo entre duas retas, como por exemplo, no caso (1 - Dois pontos / Dois pontos), onde a **reta** $\boldsymbol{r}$ é formada por dois pontos quaisquer $\boldsymbol{A(x_A,\ y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,\ y_B)}$, com $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$ e a **reta** $\boldsymbol{s}$ também é formada por dois pontos e assim sucessivamente.

Continuando a formatação da planilha, temos:

- Clique nas células e células mescladas **"B2"** e digite: **"Ângulo formado entre duas retas"**; em **"B4"** digite: **"1 - Dois pontos / Dois pontos"**; em **"P4"** digite **"2 - Dois pontos / Equação geral"**; em **"B14"** digite: **"3 - Dois pontos / Eq. reduzida"**; em **"P14"** digite: **"4 - Equação geral / Equação geral"**; em **"B24"** digite: **"5 - Eq. reduzida / Eq. reduzida"**; em **"P24"** digite: **"6 - Equação geral / Eq. reduzida"**; em **"B5, P5, B15, P15, B25, P25"** digite **"Reta r"**; em **"I5, AA5, I15, Z15, I25, AA25"** digite **"Reta s"**; em **"B6, I6, AB6, B16"** digite **"A"**; em **"B7, I7, AB7, B17"** digite **"B"**; em **"C6, J6, AC6, C16, C7, J7, AC7, C17"** digite **"("**; em **"E6, L6, AE6, E16, E7, L7, AE7, E17"** digite **";"**; em **"G6, N6, AG6, G7, N7, AG7, G16, G17"** digite **")"**; em **"Q6, P16, Z16, Q26"** digite **"a"**; em **"R6, L16, Q16, AA16, L17, E26, L26, R26, AE26, E27, L27, AE27"** digite **"x"**; em **"S6, V6, M16, R16, U16, AB16, AE16, F26, M26, S26, V26, AF26"** digite **"+"**; em **"T6, S16, AC16, T26"** digite **"b"**; em **"U6, I16, T16, AD16, I17, B26, I26, U26, AB26, B27, I27, AB27"** digite **"y"**; em **"W6, V16, AF16, W26"** digite **"c"**; em **" X6, J16, W16, AG16, J17, C26, J26, X26, AC26, C27, J27, AC27"** digite **"="**; em **"Y6, X16, AH16, Y26"** digite **"0"**; em **"Q7, P17, Z17, Q27"** digite **"a ="**; em **"T7, S17, AC17, T27"** digite **"b ="**; em **"W7, V17, AF17, W27"** digite **"c ="**; em **"B9, I9, P9, AA9, B19, I19, P19, Z19, B29, I29, P29, AA29"** digite **"Coeficiente angular"**; em **"B10, P10, B20, P20, B30, P30"** digite **"$\mathbf{m_1}$ ="**; em **"I10, AA10, I20, Z20, I30, AA30"** digite **"$\mathbf{m_2}$"**; em **"B11, P11, B21, P21, B31, P31"** digite **"Tangente α"**; em **"G11, W11, G21, W21, G31, W31"** digite **"α em graus"**; em **"K11, AC11,**

K21, AC21, K31, AC31" digite "α **em radianos"**; em **"K16, D26, K26, AD26"** digite **"m"**; em **"N16, G26, N26, AG26"** digite **"n"**;

- Selecionar toda a planilha e clique em: **"Alinhar no Meio"**, em **"Centralizar"**, em **"Negrito"**, altere a fonte para **"Arial"** e o tamanho da fonte para **"14"** ;

- Selecione as células mescladas: **"B10, I10, P10, AA10, B20, I20, P20, Z20, B30, I30, P30, AA30"** e clique em: **"Alinhar à Direita"**;

- Selecione as células mescladas: **"R7, U7, X7, D10, K10, U10, AE10, Q17, T17, W17, AA17, AD17, AG17, D20, K20, T20, AD20, R27, U27, X27, AG27, D30, K30, T30, AE30"** e clique em **"Alinhar à Esquerda"**;

- Altere o tamanho da fonte das células mescladas: **"B2"**, para **"26"**;

- Altere o tamanho da fonte das linhas: **"4, 14, 24"**, para **"16"**; das linhas **"9, 11, 19, 21, 29, 31"** para **"12"** e das linhas **"12, 22, 32"** para **"20"**;

- Altere a cor do plano de fundo com efeitos de preenchimento com duas cores, sendo a cor 1: **"Verde, Ênfase 6, Mais Escuro, 25%"** e a cor 2: **"Azul, Ênfase 1"**, com sombreamento: **"Horizontal"** e com a **"3ª Variação"** de cores, das células mescladas: **"D2"**. Altere também a cor da fonte para: **"Branca"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%"**, das células mescladas: **"(B4, P4, B14, P14, B24, P24)"**. Altere também a cor da fonte para: **"Branca"** e insere **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Cinza azulado, Texto 2, Mais Claro 60%"**, das células mescladas: **"(B5, I5, P5, AA5, B15, I15, P15, Z15, B25, I25, P25, AA25)"** e insere **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 1, Mais Claro 80%"**, das células: **"(B6:G6), (I6:N6), (P6:Y6), (AA6:AH6), (B16:G16), (I16:N16), (P16:X16), (Z16:AH16), (B26:G26), (I26:N26), (P26: Y26), (AA26:AH26)"** e insere também **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 80%"**, das células: **"(B7:G7), (I7:N7), (P7:Y7), (AA7:AH7), (B17:G17), (I17:N17), (P17:X17), (Z17:AH17), (B27:G27), (I27:N27), (P27: Y27), (AA27:AH27)"** e insere também **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 5, Mais Claro 80%"**, das células mescladas: **"B9, I9, P9, AA9, B19, I19, P19, Z19, B29, I29, P29, AA29"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Ouro, Ênfase 4, Mais Claro 80%"**, das células mescladas: **"B10, D10, I10, K10, P10, U10, AA10, AE10, B20, D20, I20, K20, P20, T20, Z20, AD20, B30, D30, I30, K30, P30, T30, AA30, AE30"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Verde, Ênfase 6, Mais Claro 40%"**, das células mescladas: **"B11, P11, B21, P21, B31, P31"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 5, Mais Claro 40%"**, das células mescladas: **"G11, W11, G21, W21, G31, W31"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Cinza-50%, Ênfase 3, Mais Claro 40%"**, das células mescladas: **"K11, AC11, K21, AC21, K31, AC31"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Verde, Ênfase 6, Mais Claro 60%"**, das células mescladas: **"B12, P12, B22, P22, B32, P32"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Azul, Ênfase 5, Mais Claro 60%"**, das células mescladas: **"G12, W12, G22, W22,GB32, W32"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Cinza-50%, Ênfase 3, Mais Claro 60%"**, das células mescladas: **"K12, AC12, K22, AC22,KB32, AC32"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Cinza-25%, Plano de Fundo 2, Mais Escuro 25%"**, das células: **"(B8:N8), (P8:AH8), (B18:N18), (P18:AH18), (B28, N28), (P28:AH28)"** e insere **"Bordas Externas"**;

- Altere a cor do plano de fundo para **"Preta"** de todas as demais células do intervalo **"(A1:AI33)"** que ainda não foram alteradas ou que estão em branco e insere **"Bordas Externas"**;

- Insere **"Bordas Externas"** em cada um dos intervalos de células mescladas seguintes: **"(B11:F12), (G11:J12), (K11:N12), (P11:V12), (W11:AB 12), (AC11:AH12), (B21:F22), (G21:J22), (K21:N22), (P21:V22), (W21:AB22), (AC21:AH22), (B31:F32), (G31:J32), (K31:N32), (P 31:V32), (W31: AB32), (AC31:AH32)"**;

- Ocultar colunas da **“AJ”** até a coluna final. Ocultar também da linha **“34”** até a linha final.

Falta agora inserir as fórmulas ou funções para que o Excel possa calcular o ângulo α formado entre duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$, utilizando os coeficientes angulares $\boldsymbol{m}$ das mesmas.

Já vimos anteriormente na seção 3.12, que, o ângulo agudo formado entre duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ concorrentes, não paralelas aos eixos x ou y e também que não sejam perpendiculares entre si, no plano cartesiano, é calculado pela fórmula: (3.45), tendo os coeficientes angulares $\boldsymbol{m_r}$ e $\boldsymbol{m_s}$. Se a reta $\boldsymbol{s}$ é vertical (paralela ao eixo y) e a reta $\boldsymbol{r}$ não é horizontal (paralela ao eixo x), a fórmula utilizada é: $tg\alpha = \left|\dfrac{1}{m_r}\right|$.

Vimos também na seção 3.9 que o coeficiente angular m pode ser calculado pelas fórmulas:(3.27) quando se tem dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, com $x_A \neq x_B$ e (3.30), quando se tem a equação geral da reta $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáveis e a, b e c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulos.

Observe também que, nesta planilha, o valor do coeficiente angular m e da $tg\alpha$ será arredondado para seis casas decimais, para que o valor do ângulo fique o mais próximo possível do valor real, mas este valor pode ser alterado para mais ou para menos, o valor do ângulo α em graus, para duas casas decimais e do ângulo α em radianos, também.

Adaptando estas fórmulas na planilha criada no Excel para calcular o valor do ângulo formado entre duas retas, faça o seguinte nos casos abaixo:

1. Dois pontos / Dois pontos

    - Clique na célula mesclada **“D10”**, digite: **=SEERRO(ARRED((F7-F6)/(D7-D6);6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{r}$, tendo dois pontos;
    - Clique na célula mesclada **“K10”**, digite: **=SEERRO(ARRED((M7-M6)/(K7-K6);6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{s}$, tendo dois pontos;
    - Clique na célula mesclada **“B12”**, digite: **=SEERRO(ARRED(ABS((D10-K10)/(1+(D10*K10)));6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor da tangente do ângulo α formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

- Clique na célula mesclada **"G12"**, digite: **=SEERRO(ARRED(ATAN(B 12)* 180/PI();2)&"º";90&"º")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em graus, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"K12"**, digite: **=SEERRO(ARRED((ATAN(B 12)/PI());2)&" π rad";"0,5πrad")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em radianos, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

2. Dois pontos / Equação geral

- Clique na célula mesclada **"U10"**, digite: **=SEERRO(ARRED((-R7/U7); 6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{r}$, tendo a equação geral da reta;
- Clique na célula mesclada **"AE10"**, digite: **=SEERRO(ARRED((AF7-AF6)/(AD7-AD6);6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{s}$, tendo dois pontos;
- Clique na célula mesclada **"P12"**, digite: **=SEERRO(ARRED(ABS((U10-AE10)/(1+(U10*AE10)));6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da tangente do ângulo α formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"W12"**, digite: **=SEERRO(ARRED(ATAN(P12)*180/PI();2)&"º";90&"º")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em graus, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"AC12"**, digite: **=SEERRO(ARRED((ATAN(P12)/PI());2)&" π rad";"0,5πrad")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em radianos, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

3. Dois pontos / Eq. reduzida

- Clique na célula mesclada **"D20"**, digite: **=SEERRO(ARRED((F17-F16)/(D17-D16);6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{r}$, tendo dois pontos;
- Clique na célula mesclada **"K20"**, digite: **=ARRED(K17;6)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{s}$, tendo a equação reduzida da reta;

- Clique na célula mesclada **“B22”**, digite: **=SEERRO(ARRED(ABS((D20-K20)/(1+(D20*K20)));6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor da tangente do ângulo α formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **“G22”**, digite: **=SEERRO(ARRED(ATAN(B22)*180/PI();2)&“º”;90&“º”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do ângulo α em graus, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **“K22”**, digite: **=SEERRO(ARRED((ATAN(B22)/PI());2)&“πrad”;“0,5πrad”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do ângulo α em radianos, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

4. Equação geral / Equação geral

- Clique na célula mesclada **“T20”**, digite: **=SEERRO(ARRED((-Q17/T17);6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{r}$, tendo a equação geral da reta;
- Clique na célula mesclada **“AD20”**, digite: **=SEERRO(ARRED((-AA17/AD17);6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{s}$, tendo tendo a equação geral da reta;
- Clique na célula mesclada **“P22”**, digite: **=SEERRO(ARRED(ABS((T20-AD20)/(1+(T20*AD20)));6);“Não é definido”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor da tangente do ângulo α formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **“W22”**, digite: **=SEERRO(ARRED(ATAN(P22)*180/PI();2)&“º”;90&“º”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do ângulo α em graus, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **“AC22”**, digite: **=SEERRO(ARRED((ATAN(P22)/PI());2)&“πrad”;“0,5πrad”)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do ângulo α em radianos, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

5. Eq. reduzida / Eq. reduzida

- Clique na célula mesclada **“D30”**, digite: **=ARRED(D27;6)** e tecle **“Enter”**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{r}$, tendo a equação reduzida da reta;

- Clique na célula mesclada **"K30"**, digite: **=ARRED(K27;6)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{s}$, tendo a equação reduzida da reta;
- Clique na célula mesclada **"B32"**, digite: **=SEERRO(ARRED(ABS ((D30-K30)/(1+(D30*K30)));6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da tangente do ângulo α formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"G32"**, digite: **=SEERRO(ARRED(A TAN(B32)*180/PI();2)&"º";90&"º")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em graus, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"K32"**, digite: **=SEERRO(ARRED((A TAN(B 32)/PI());2)&"πrad";"0,5πrad")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em radianos, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

6. Equação geral / Eq. reduzida

- Clique na célula mesclada **"T30"**, digite: **=SEERRO(ARRED((-R27/U27);6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{r}$, tendo a equação geral da reta;
- Clique na célula mesclada **"AE30"**, digite: **=ARRED(AD27;6)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ da reta $\boldsymbol{s}$, tendo tendo a equação reduzida da reta;
- Clique na célula mesclada **"P32"**, digite: **=SEERRO(ARRED(ABS ((T30-AE30)/(1+(T30*AE30)));6);"Não é definido")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da tangente do ângulo α formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"W32"**, digite: **=SEERRO(ARRED(A TAN(P32)*180/PI();2)&"º";90&"º")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em graus, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;
- Clique na célula mesclada **"AC32"**, digite: **=SEERRO(ARRED((A TAN(P32)/PI());2)&"πrad";"0,5πrad")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor do ângulo α em radianos, formado entre as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

E, finalizando a planilha, temos:

- Clique em **"Selecionar tudo"**, conforme figura 5. Pressione ao mesmo tempo as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar células..."**. Em seguida, clique na aba **"Alinhamento"** e na opção **"Controle de texto"**, marque a opção **"Reduzir para caber"**. Depois clique em **"OK"**.

- Desbloqueie as células e células mescladas **"B6, D6, F6, I6, K6, M6, AB6, AD6, AF6, B7, D7, F7, I7, K7, M7, R7, U7, X7, AB7, AD7, AF7, B16, D16, F16, B17, D17, F17, K17, M17, N17, Q17, T17, W17, AA17, AD17, AG17, D27, F27, G27, K27, M27, N27, R27, U27, X27, AD27, AF27, AG27"**, onde serão digitadas as coordenadas cartesianas e nomes dos pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ da equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ e o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ e lineares $\boldsymbol{n}$ da equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$;

- Em seguida proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Utiliza-se a planilha do Excel para resolver os **exemplos (3.12.1), (3.12.2), (3.12.3) e (3.12.4), da seção 3.12** .

Resolução:

O exemplo (3.12.1) é para calcular o ângulo formado entre as diagonais de um retângulo, dados os pontos, $A(0,0)$, $C(30,12)$, da diagonal $\overline{AC}$, $B(30,0)$ e $D(0,12)$ de $\overline{BD}$, conforme figura 95. Com isso, utiliza-se o caso (1 - Dois pontos / Dois pontos):

- Clique na célula **"D6"** e digite: **"0"**, na célula **"F6"** digite: **"0"** e na célula **"D7"** digite: **"30"**, na célula **"F7"** digite: **"12"**, que são as coordenadas cartesianas dos pontos extremos da diagonal $\overline{AC}$;

- Clique na célula **"K6"** e digite: **"30"**, na célula **"M6"** digite: **"0"** e na célula **"K7"** digite: **"0"**, na célula **"M7"** digite: **"12"**, que são as coordenadas cartesianas dos pontos extremos da diagonal $\overline{BD}$;

Veja que o Excel já mostra os resultados de $m_r, m_s, tg\alpha, \alpha$ em graus e radianos. O exemplo solicita o valor do ângulo $B\hat{O}C$. Logo, esse valor é: "$B\hat{O}C \cong 43,6°$"

No exemplo (3.12.2), deve-se calcular o ângulo α formado pela reta r que passa na origem $(0,0)$ e no ponto $(2,-1)$ com as retas s e t, conforme abaixo:

a) $s : \; y = 2x + 3$

Tem-se a reta r formada por dois pontos e a reta s pela equação reduzida da reta. Assim, utiliza-se o caso (3 - Dois pontos / Eq. reduzida):

- Clique na célula **"D16"** e digite: **"0"**, na célula **"F16"** digite: **"0"** e na célula **"D17"** digite: **"2"**, na célula **"F17"** digite: **"-1"**, que são as coordenadas cartesianas do pontos da reta r;
- Clique na célula **"K17"** e digite: **"2"**, na célula **"M17"** digite: **"+"** e na célula **"N17"** digite: **"3"**, que são os coeficientes da equação reduzida da reta s;

Note que o Excel já mostra o valor do ângulo α formado entre as retas r e s, que é: "$\alpha = 90°$."

b) $t: \ -2x + 11y - 5 = 0$

Tem-se a reta r formada por dois pontos e a reta t pela equação geral da reta. Assim, utiliza-se o caso (2 - Dois pontos / Equação geral):

- Clique na célula **"AD6"** e digite: **"0"**, na célula **"AF6"** digite: **"0"**, que são as coordenadas do ponto de origem;
- Clique na célula **"AD7"** e digite: **"2"**, na célula **"AF7"** e digite: **"-1"**, que são as coordenadas cartesianas do ponto contido na reta r;
- Clique na célula **"R7"** e digite: **"-2"**, na célula **"U7"** digite: **"11"** e na célula **"X7"** digite: **"-5"**, que são os coeficientes da equação geral da reta t;

Observe que o valor do ângulo α em graus e radianos entre as retas r e t é mostrado na célula. . Logo, esse valor é: "$\alpha \cong 36,87°$."

Já o exemplo (3.12.3) é para determinar a tangente do ângulo formado entre as retas $r: \ 3x - 4y + 7 = 0$ e $s: \ x + 2y - 1 = 0$.

A reta r é formada pela equação geral da reta e a reta s também é formada pela equação geral da reta. Com isso, utiliza-se o caso (4 - Equação geral / Equação geral):

- Clique na célula **"Q17"** e digite: **"3"**, na célula **"T17"** digite: **"-4"** e na célula **"W17"** digite: **"7"** que são os coeficientes da equação geral da reta r;

- Clique na célula **"AA17"** digite: **"1"**, na célula **"AD17"** digite: **"2"** e na célula **"AG17"** digite: **"-1"** que são os coeficientes da equação geral da reta s;

Observe que o Excel já mostra todos os resultados e o exemplo solicita a tangente do ângulo formado entre as duas retas, que é: **"$tg\alpha$ = 2**."

Por fim, o exemplo (3.12.4) solicita o ângulo α formado pelas retas r e s, nos itens **a** e **b** abaixo:

a) $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e $s: y = -7x + 8$.

A reta r é formada pela equação geral da reta e a reta s é formada pela equação reduzida da reta. Com isso, utiliza-se o caso (6 - Equação geral / Eq. reduzida):

- Clique na célula **"R27"** e digite: **"2"**, na célula **"U27"** digite: **"-3"** e na célula **"X27"** digite: **"5"** que são os coeficientes da equação geral da reta r;
- Clique na célula **"AD27"** digite: **"-7"**, na célula **"AF27"** digite: **"+"** e na célula **"AG27"** digite: **"8"** que são os coeficientes da equação reduzida da reta s;

Os resultados são mostrados na planilha. Logo, o valor do ângulo entre as duas retas é: "$tg\alpha \cong 64,44°$"

b) $r: y = 0,5x - 1$ e $s: y = 3x + 8$.

A reta r é formada pela equação reduzida da reta e a reta s também é formada pela equação reduzida da reta. Com isso, utiliza-se o caso (5 - Eq. reduzida / Eq.reduzida):

- Clique na célula **"D27"** e digite: **"0,5"**, na célula **"F27"** digite: **"-"** e na célula **"G27"** digite: **"1"**, que são os coeficientes da equação reduzida da reta r;
- Clique na célula **"K27"** e digite: **"3"**, na célula **"M27"** digite: **"+"** e na célula **"N27"** digite: **"8"**, que são os coeficientes da equação reduzida da reta s;

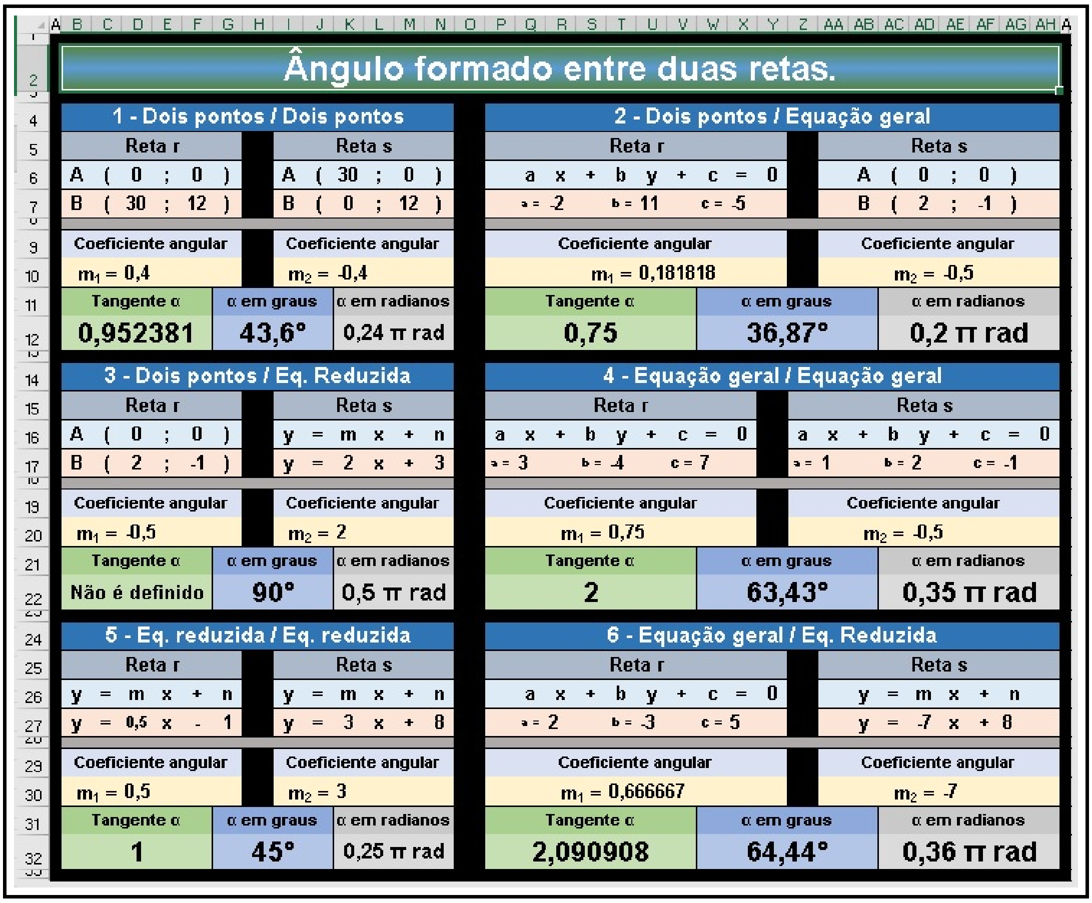
  O resultado apresentado pelo Excel para o ângulo formado entre as duas retas é: "$\alpha = 45°$".

A planilha foi concluída com os seis casos apresentados nos exemplos acima.

Por fim, salve a planilha clicando no ícone .

Observe na figura 96 como ficou a referida planilha depois de resolver os exemplos acima.

Figura 96 – Ângulo formado entre duas retas (Planilha).



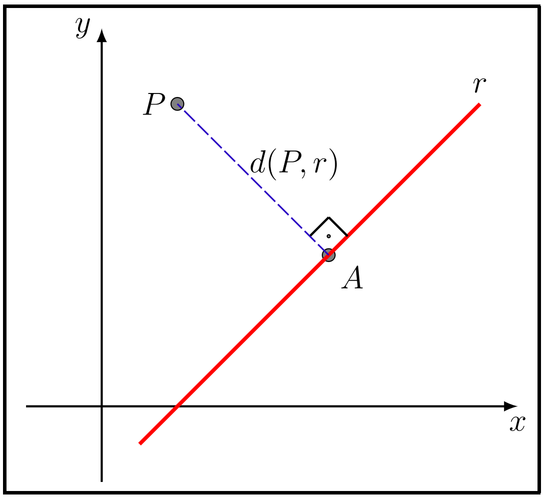
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.13 Distância entre ponto e reta

A distância de um ponto $\boldsymbol{P}$ a uma reta $\boldsymbol{r}$ é a medida da distância do segmento de extremidades em $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{A}$, onde $\boldsymbol{A}$ é a projeção ortogonal de $\boldsymbol{P}$ sobre $\boldsymbol{r}$, conforme a figura 97. É a menor distância entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{r}$.

Para determinar essa distância, considere: um ponto $P(x_P, y_P)$; uma reta $r : ax + by + c = 0$ não paralela a qualquer um dos eixos coordenados; uma reta s que passa por P e é perpendicular a r e um ponto $A(x, y)$ como intersecção de r e s, como se observa na figura 97.

Figura 97 – Distância de um ponto a uma reta.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Da equação geral da reta r, temos o coeficiente angular, $m_r = -\dfrac{a}{b}$, conforme a seção 3.9.

Como a reta r é perpendicular à s, temos $m_r \cdot m_s = -1$, como visto na seção 3.10. Assim:

$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{b}{a}$$

Utiliza-se agora a equação fundamental da reta visto na seção 3.9 para determinar a equação geral da reta s que passa por $P(x_P, y_P)$. Temos:

$$y - y_P = m_s(x - x_P) \quad \Rightarrow \quad a(y - y_P) = b(x - x_P) \quad \Rightarrow$$
$$ay - ay_P = bx - bx_P \quad \Rightarrow \quad -bx + ay + bx_P - ay_P = 0$$

Em seguida calcula-se as coordenadas do ponto $A(x, y)$, intersecção das retas r e s, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -bx + ay + bx_P - ay_P = 0 \end{cases}$$

Pelo método da substituição, isola-se o x na equação geral da reta r:

$$ax + by + c = 0$$

$$x = \frac{-by - c}{a} \tag{3.46}$$

Em seguida, substitue-se o valor de x na equação geral da reta s:

$$-bx + ay + bx_P - ay_P = 0 \;\Rightarrow\; -b\left(\frac{-by - c}{a}\right) + ay + bx_P - ay_P = 0 \;\Rightarrow$$
$$\frac{b^2y + bc}{a} + ay + bx_P - ay_P = 0 \;\Rightarrow\; \frac{b^2y + bc + a^2y + abx_P - a^2y_P}{a} = 0 \;\Rightarrow$$
$$a^2y + b^2y + bc + abx_P - a^2y_P = 0 \;\Rightarrow\; (a^2 + b^2)y = -bc - abx_P + a^2y_P \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{y} = \frac{-bc - abx_P + a^2y_P}{a^2 + b^2}} \tag{3.47}$$

Após encontrar o valor de y do ponto A, substitue-se (3.47) em (3.46), para obter o valor de x. Desta forma, temos:

$$x = \frac{-by - c}{a} \;\Rightarrow\; x = \frac{-b\left(\dfrac{-bc - abx_P + a^2y_P}{a^2 + b^2}\right) - c}{a} \;\Rightarrow$$
$$x = \frac{\dfrac{b^2c + ab^2x_P - a^2by_P}{a^2 + b^2} - c}{a} \;\Rightarrow\; x = \frac{\dfrac{b^2c + ab^2x_P - a^2by_P - a^2c - b^2c}{a^2 + b^2}}{a} \;\Rightarrow$$
$$x = \frac{\cancel{b^2c} + ab^2x_P - a^2by_P - a^2c \cancel{- b^2c}}{a(a^2 + b^2)} \;\Rightarrow\; x = \frac{\cancel{a}(-ac + b^2x_P - aby_P)}{\cancel{a}(a^2 + b^2)} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{-ac + b^2x_P - aby_P}{a^2 + b^2}} \tag{3.48}$$

Com isso, os valores de x e y determinados são as coordenadas cartesianas do ponto A. Verifique que é possível calcular a distância entre os pontos P e A, utilizando a fórmula vista na seção 3.2 e substituindo (3.48) e (3.47) na referida fórmula:

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2}.$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\left(\frac{-ac + b^2x_P - aby_P}{a^2 + b^2} - x_P\right)^2 + \left(\frac{-bc - abx_P + a^2y_P}{a^2 + b^2} - y_P\right)^2}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\left(\frac{-ac + \cancel{b^2x_P} - aby_P - a^2x_P - \cancel{b^2x_P}}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-bc - abx_P + \cancel{a^2y_P} - \cancel{a^2y_P} - b^2y_P}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\left(\frac{-ac - aby_P - a^2x_P}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-bc - abx_P - b^2y_P}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\left(\frac{-a(c + by_P + ax_P)}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b(c + ax_P + by_P)}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\frac{a^2(ax_P + by_P + c)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(ax_P + by_P + c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\frac{a^2(ax_P + by_P + c)^2 + b^2(ax_P + by_P + c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\frac{\cancel{(a^2+b^2)}(ax_P + by_P + c)^2}{\cancel{(a^2+b^2)} \cdot (a^2+b^2)}}$$

$$d_{\overline{PA}} = \sqrt{\frac{(ax_P + by_P + c)^2}{a^2+b^2}}$$

$$d_{\overline{PA}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Como $d_{\overline{PA}} = d(P,r)$, como pode ser observado na figura 97, então, para calcular a distância de um ponto $\boldsymbol{P(x_P,y_P)}$ à reta $\boldsymbol{r}$, $d(P,r)$, formada pela equação geral da reta (3.26), utiliza-se a fórmula:

$$\boxed{\mathrm{d}(P,r) = \frac{|a\,x_{\mathrm{P}} + b\,y_{\mathrm{P}} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{3.49}$$

Note como fica esta mesma fórmula adaptada para quando a reta $\boldsymbol{r}$ for formada por dois pontos $\boldsymbol{A(x_A,y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B,y_B)}$. Vimos na seção 3.7 que: $a = (y_A - y_B)$; $b = (x_B - x_A)$ e $c = (x_A y_B - x_B y_A)$. Substituindo na fórmula acima, temos:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|(y_A - y_B)x_P + (x_B - x_A)y_P + (x_A\,y_B - x_B\,y_A)|}{\sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_B - x_A)^2}}} \tag{3.50}$$

Esta fórmula é necessária para criar uma função no Excel que permita calcular a distância de um ponto a uma reta, quando esta reta é formada por dois pontos. Assim, evita-se de ter que determinar a equação geral da reta formada por esses dois pontos e usar a primeira fórmula.

Se a reta $\boldsymbol{r}$ for formada pela equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$, onde

$a = -m$, $b = 1$ e $c = -n$, a fórmula fica assim:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|-m\,x_P + y_P - n|}{\sqrt{(-m)^2 + 1}}} \tag{3.51}$$

Como antes, esta fórmula é necessária para criar uma função no Excel que permita calcular a distância de um ponto a uma reta, quando esta reta é formada pela equação reduzida da reta, sem ter que transformar na equação geral da reta para usar a primeira fórmula.

Resolva os exemplos abaixo:

Exemplo 3.13.1 - Dado um triângulo ABC, cujos vértices são $A(3,1)$, $B(1,2)$ e $C(-7,-4)$, determine a altura relativa ao vértice A, em que a base é formada pela reta r que contem os pontos B e C.

Resolução:

Neste caso, uma forma de resolver é determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos B e C, que é a base do triângulo ABC e com o ponto A, substituir na fórmula (3.49). Outra forma é substituir as coordenadas dos vértices na fórmula adaptada (3.50), como segue:

$$d(A,r) = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_B\,y_C - x_C\,y_B)|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$d(A,r) = \frac{|(2-(-4))\cdot 3 + (-7-1)\cdot 1 + (1\cdot(-4) - (-7)\cdot 2)|}{\sqrt{(2-(-4))^2 + (-7-1)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$d(A,r) = \frac{|(2+4)\cdot 3 + (-8) + (-4+14)|}{\sqrt{(2+4)^2 + (-8)^2}} \quad \Rightarrow \quad d(A,r) = \frac{|18 - 8 + 10|}{\sqrt{36+64}} \quad \Rightarrow$$

$$d(A,r) = \frac{|20|}{\sqrt{100}} \quad \Rightarrow \quad d(A,r) = \frac{20}{10} \quad \Rightarrow \quad d(A,r) = 2$$

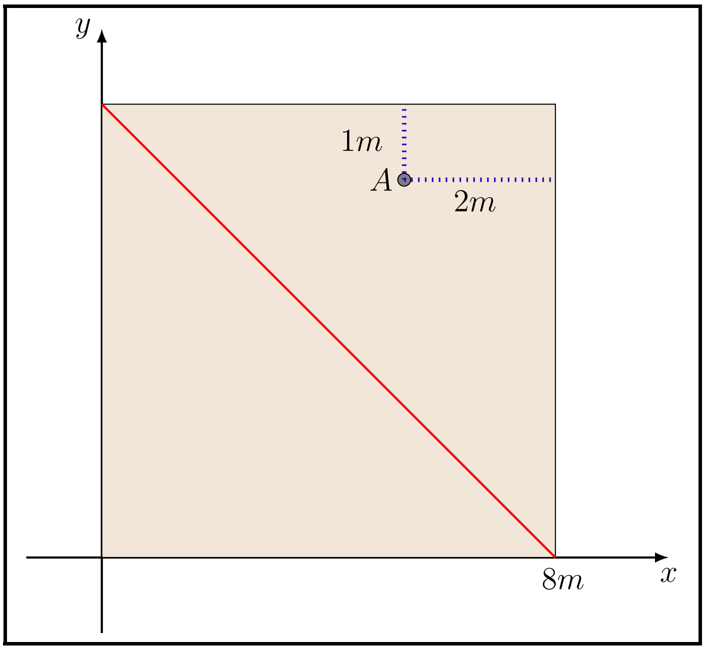
Logo, a altura do triângulo, que é a distância do ponto A à reta r que contém os pontos B e C, é igual a 2.

Exemplo 3.13.2 - Considere um quadrado de lado igual a 8 m que está no primeiro quadrante de um plano cartesiano, tendo um dos vértices na origem desse plano e dois de seus lados coincidindo com os eixos coordenados. Considere também um ponto A no canto superior direito desse quadrado, localizado a 2 m do lado vertical e a 1 m do outro lado. Determine a distância desse ponto à diagonal do quadrado definida pela equação da reta $r : y = -x + 10$.

Resolução:

O primeiro passo é determinar as coordenadas cartesianas do ponto A. Para isso, segue a figura 98 com ilustrações dos dados do problema para melhor interpretação:

Figura 98 – Distância entre ponto e reta no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor no Overleaf.

Como o lado do quadrado é 8m e o ponto A está a 2m dele, em relação a x, basta fazer $x = 8m - 2m \Rightarrow x = 6m$. O mesmo raciocínio vale para y. Assim, $y = 8m - 1m \Rightarrow y = 7m$. Portanto $A(6, 7)$.

A diagonal do quadrado é definida pela equação reduzida da reta $r : y = -x + 10$, onde o coeficiente angular é $m = -1$ e o coeficiente linear é $n = 10$.

Tendo o ponto A, o coeficiente angular m e o coeficiente linear n, basta substituir na fórmula (3.51), considerando $A = P$:

$$d(P, r) = \frac{|-m\,x_P + y_P - n|}{\sqrt{(-m)^2 + 1}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|-(-1) \cdot 6 + 7 - 10|}{\sqrt{(-(-1))^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$d(P,r) = \frac{|6+7-10|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(P,r) \cong 2,12$$

Logo, a distância do ponto A à diagonal do quadrado é aproximadamente 2,12m.

Exemplo 3.13.3 - Um ponto P tem abscissa 2 e ordenada -5 e está a uma certa distância da reta r de equação $4x - 2y + 11 = 0$. Determine essa distância do ponto P à reta dada.

Resolução:

Para calcular a distância do ponto $P(2, -5)$ à reta r de equação $4x-2y+11 = 0$, onde $a = 4$, $b = -2$ e $c = 11$, basta substituir na fórmula (3.49):

$$d(P,r) = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) + 11|}{\sqrt{(4)^2 + (-2)^2}} \Rightarrow$$

$$d(P,r) = \frac{|8+10+11|}{\sqrt{16+4}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{|29|}{\sqrt{20}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{29}{\sqrt{2^2.5}} \Rightarrow$$

$$d(P,r) = \frac{29}{2\sqrt{5}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{29\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{29\sqrt{5}}{2\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$d(P,r) = \frac{29\sqrt{5}}{2.5} \Rightarrow d(P,r) = \frac{29\sqrt{5}}{10} \Rightarrow d(P,r) = 6,48$$

Logo, a distância do ponto P à reta r é de aproximadamente 6,48.

3.13.1 Distância entre ponto e reta, usando o **Excel 2016**

Para fazer uma planilha que permite calcular a distância de um ponto $\boldsymbol{P}$ a uma reta $\boldsymbol{r}$, faça o seguinte:

- Crie a **"planilha1"** e renomeie-a para **"Dpr"**. Esta planilha será usada para calcular a distância do ponto $\boldsymbol{P}$ a uma reta $\boldsymbol{r}$, no plano cartesiano;
- Altere a largura das colunas **"A, I, S, Z"** para **"1,00"**. Altere também a largura de todas as demais colunas de **"B"** até **"Y"** para **"4,00"**;
- Altere a altura das linhas **"1, 3, 5, 10, 14, 18"** para **"9,00"**; das linhas **"6 a 9, 11 a 13, 15 a 17"** para **"21,00"**; da linha **"4"** para **"26,25"** e da linha **"2"** para **"36,00"**;

- Mesclar e centralizar as células: **“(B2:Y2), (B4:H4), (J4:R4), (T4:Y4), (B6:C7), (D6:D7), (E6:E7), (F6:F7), (G6:G7), (H6:H7), (J6:R6), (J7:K7), (T6:V9), (W6:Y9), (B8:C9), (D8:D9), (E8:E9), (F8:F9), (G8:G9), (H8:H9), (B11:C11), (J11:R11), (T11:V13), (W11:Y13), (C12:C13), (D12:D13), (E12:E13), (F12:F13), (G12:G13), (H12:H 13), (M13:N13), (P13:R13), (B15:C15), (J15:R15), (T15:V17), (W 15:Y17), (C16:C17), (D16:D17), (E16:E17), (F16:F17), (G16:G17), (H16:H17), (K17:L17), (N17:O17), (Q17:R17)”**

- Clique nas células e células mescladas **“B2”** e digite: **“Distância entre ponto e reta”**; em **“B4”** digite: **“Ponto P dado”**; em **“J4”** digite: **“Reta r dada por:”**; em **“T4”** digite: **“Resultado”**; em **“B6, J7, B11, B15”** digite: **“Ponto”**; em **“D6, D8, L7, L8, L9, D11, D12, D15, D16”** digite: **“(”**; em **“E6, M7, E11, N12, E15, K16”** digite: **“x”**; em **“F6, F8, N7, N8, N9, F11, F12, F15, F16”** digite: **“;”**; em **“G6, 07, G11, K12, G15, N16”** digite: **“y”**; em **“H6, H8, P7, P8, P9, H11, H12, H15, H16”** digite: **“)”**; em **“J6”** digite: **“Dois pontos”**; em **“K8”** digite: **“A”**; em **“K9”** digite: **“B”**; em **“B8, C12, C16”** digite: **“P”**; em **“T6, T15”** digite: **“d(P,r) =”**; em **“J11”** digite: **“Equação reduzida da reta”**; em **“L12, Q16”** digite: **“=”**; em **“M12”** digite: **“m”**; em **“O12, L16, O16”** digite: **“+”**; em **“P12”** digite: **“n”**; em **“L13”** digite: **“m =”**; em **“O13”** digite: **“n =”**; em **“J15”** digite: **“Equação geral da reta”**; em **“J16”** digite: **“a”**; em **“M16”** digite: **“b”**; em **“P16”** digite: **“c”**; em **“R16”** digite: **“0”**; em **“J17”** digite: **“a =”**; em **“M17”** digite: **“b =”** e em **“P17”** digite: **“c =”**;

- Selecionar toda a planilha e clique em: **“Alinhar no Meio”**, em **“Centralizar”**, em **“Negrito”**, altere a fonte para **“Arial”** e o tamanho da fonte para **“14”** ;

- Selecione as células mescladas: **“T6, B8, T11, C12, T15, L13, O13, C16”** e clique em: **“Alinhar à Direita”**;

- Selecione as células mescladas: **“W6, W11, W15, M13, P13, K17, N17, Q17”** e clique em **“Alinhar à Esquerda”**;

- Altere o tamanho da fonte das células mescladas: **“W6, W11, W15”**, para **“20”** e das células mescladas: **“T6, T11, T15”**, para **“18”**;

- Altere o tamanho da fonte das linhas: **“2”**, para **“28”** e da linha **“4”** para **“20”**;

- Altere a cor do plano de fundo com efeitos de preenchimento com duas cores, sendo a cor 1: **“Verde, Ênfase 6, Mais Escuro, 25%”** e a cor 2: **“Azul, Ênfase 1”**, com sombreamento: **“Horizontal”** e com a **“3ª Variação”** de cores, das células mescladas: **“B2”**. Altere também a cor da fonte para: **“Branca”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Verde, Ênfase 6, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas: **“B4, J4, T4”**. Altere também a cor da fonte para: **“Branca”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Escuro 25%”**, das células mescladas mescladas: **“(B6:H6), J6”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 40%”**, das células e células mescladas: **“(J7:R7)”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 60%”**, das células: **“(J8:R8)”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Azul, Ênfase 1, Mais Claro 80%”**, das células e células mescladas: **“(B8:H9), (J9:R9), T9, W9”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 40%”**, das células e células mescladas: **“(B11:H11), J11”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 60%”**, das células: **“(J12:R12)”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Laranja, Ênfase 2, Mais Claro 80%”**, das células e células mescladas: **“(B12:H13), (J13:R13), T13, W13”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Ouro, Ênfase 4, Mais Claro 40%”**, das células e células mescladas: **“(B15:H15), J15”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Ouro, Ênfase 4, Mais Claro 60%”**, das células: **“(J16:R16)”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Altere a cor do plano de fundo para **“Preta”**, das células: **“(A1:Z1), (A2:A18), (Z2:Z18), (B18:Y18), (B3:Y3), (B5:Y5), (B10:Y10), (B 14:Y14)”** e insere **“Bordas Externas”**;

- Insere **"Bordas Externas"** em cada um dos grupos de células: **"(B8:H9), (J8:R9), (T6:Y9), (B12:H13), (J13:R13), (T11:Y13), (B16:H17), (J17:R17), (T15:Y17)"**;
- Ocultar colunas da **"AA"** até a coluna final. Ocultar também da linha **"19"** até a linha final.

Em seguida insira as fórmulas ou funções para que o Excel possa calcular a distância de um ponto $\boldsymbol{P}$ a uma reta $\boldsymbol{r}$, que será arredondado para duas casas decimais.

Já vimos antes na seção 3.13, três fórmulas que calcula a distância, dependendo de como a reta $\boldsymbol{r}$ é formada. Segue abaixo cada um dos casos com sua respectiva fórmula:

1. Equação geral da reta (tradicional): (3.49);
2. Dois pontos: (3.50);
3. Equação reduzida da reta: (3.51).

Adaptando estas fórmulas nesta planilha criada no Excel para calcular a distância de um ponto $\boldsymbol{P}$ a uma reta $\boldsymbol{r}$, nos três casos apresentados, faça o seguinte:

- Clique na célula mesclada **"W6"**, digite: **=SEERRO(ARRED(((ABS((O8-O9)*E8+(M9-M8)*G8+((M8*O9)-(M9*O8)))) / (RAIZ(((O8 - O9)^2)+(M9-M8)^2)));2);"Impossível")** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da distância de um ponto a uma reta formada por dois pontos;
- Clique na célula mesclada **"W11"**, digite: **=ARRED(((ABS((-M13)*E12 +G12+(-P13)))/(RAIZ(((-M13)^ 2)+1)));2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da distância de um ponto a uma reta formada pela equação reduzida da reta;
- Clique na célula mesclada **"W15"**, digite: **=ARRED(((ABS(K17*E16+N17*G16+Q17))/(RAIZ(((K17)^2)+(N17)^2)));2)** e tecle **"Enter"**. Esta função calcula o valor da distância de um ponto a uma reta formada pela equação geral da reta;
- Clique na célula mesclada **"T6"**, digite: **=SE(INT(W6)=W6; "d(P,r) ="; "d(P,r) ≅")** e tecle **"Enter"**.

- Clique na célula mesclada **"T11"**, digite: **=SE(INT(W11)=W11; "d(P,r) ="; "d(P,r) ≅")** e tecle **"Enter"**.
- Clique na célula mesclada **"T15"**, digite: **=SE(INT(W15)=W15; "d(P,r) ="; "d(P,r) ≅")** e tecle **"Enter"**.

E finalizando a planilha, temos:

- Clique em **"Selecionar tudo"**, conforme figura 5. Pressione ao mesmo tempo as teclas **"Ctrl"** + **"1"** para exibir a janela **"Formatar células..."**. Em seguida clique na aba **"Alinhamento"** e na opção **"Controle de texto"**, marque a opção **"Reduzir para caber"**. Depois clique em **"OK"**.
- Desbloqueie as células e células mescladas **"T6, B8, E8, G8, K8, M8, O8, K9, M9, 09, C12, E12, G12, M13, P13, T15, C16, E16, G16, K17, N17, Q17"**, onde serão digitadas as coordenadas cartesianas e nomes dos pontos $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, os coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ da equação geral da reta $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ e o coeficiente angular $\boldsymbol{m}$ e lineares $\boldsymbol{n}$ da equação reduzida da reta $\boldsymbol{y = mx + n}$;
- Em seguida proteja e salve a planilha, como visto na subsubseção 3.2.1.1.

Como a planilha foi concluída, use-a para resolver os exemplos (3.13.1), (3.13.2) e (3.13.3) da seção 3.13.

Resolução com Excel:

O Objetivo do exemplo (3.13.1) foi o de determinar a altura relativa ao vértice A e base $\overline{BC}$, de um triângulo cujos vértices foram $A(3,1)$, $B(1,2)$ e $C(-7,-4)$.

Para determinar esta altura utilizando a planilha do Excel, faça o seguinte:

- Clique na célula mesclada **"B8"** e digite: **"A"**, na célula mesclada **"E8"**, digite: **"3"** e na célula mesclada **"G8"**, digite: **"1"** que são as coordenadas cartesianas do ponto A;
- Clique na célula **"K8"** e digite: **"B"**, na célula **"M8"**, digite: **"1"** e na célula **"O8"**, digite: **"2"** que são as coordenadas cartesianas do ponto B;
- Clique na célula **"K9"** e digite: **"C"**, na célula **"M9"**, digite: **"-7"** e na célula **"O9"**, digite: **"-4"** que são as coordenadas cartesianas do ponto C;

Observe que na célula mesclada **"W6"**, mostra o resultado do exemplo, que é $d(P, r) = 2$.

Logo, a altura do triângulo ABC, que é a distância do ponto A à reta r que contém os pontos B e C, é 2.

No exemplo (3.13.2), foi dado um ponto e a diagonal de um quadrado para calcular a distância entre eles, sendo $A(6, 7)$ e a reta $r : y = -x + 10$:

- Clique na célula mesclada **"E12"** e digite: **"6"** e na célula mesclada **"G12"**, digite: **"7"**, que são as coordenadas cartesianas do ponto A;
- Clique na célula mesclada **"M13"** e digite: **"-1"** e na célula mesclada **"P13"**, digite: **"10"**, que são os coeficientes: angular e linear, da equação reduzida da reta r;

Note que na célula mesclada **"W11"**, mostra o resultado aproximado do exemplo, que é $d(P, r) \cong 2,12$, arredondado para duas casas decimais.

Logo, a distância do ponto P à reta r é aproximadamente 2,12.

Agora, use a planilha do Excel para resolver o (3.13.3), que é para calcular a distância do ponto $P(2, -5)$ à reta $r : 4x - 2y + 11 = 0$

- Clique na célula mesclada **"E16"** e digite: **"2"** e na célula mesclada **"G16"**, digite: **"-5"**, que são as coordenadas cartesianas do ponto P;
- Clique na célula mesclada **"K17"** e digite: **"4"**, na célula mesclada **"N17"**, digite: **"-2"** e na célula mesclada **"Q17"**, digite: **"11"**, que são os coeficientes a, b e c da equação geral da reta r;

Veja que na célula mesclada **"W15"**, mostra o resultado do exemplo, que é $d(P, r) \cong 6,48$.

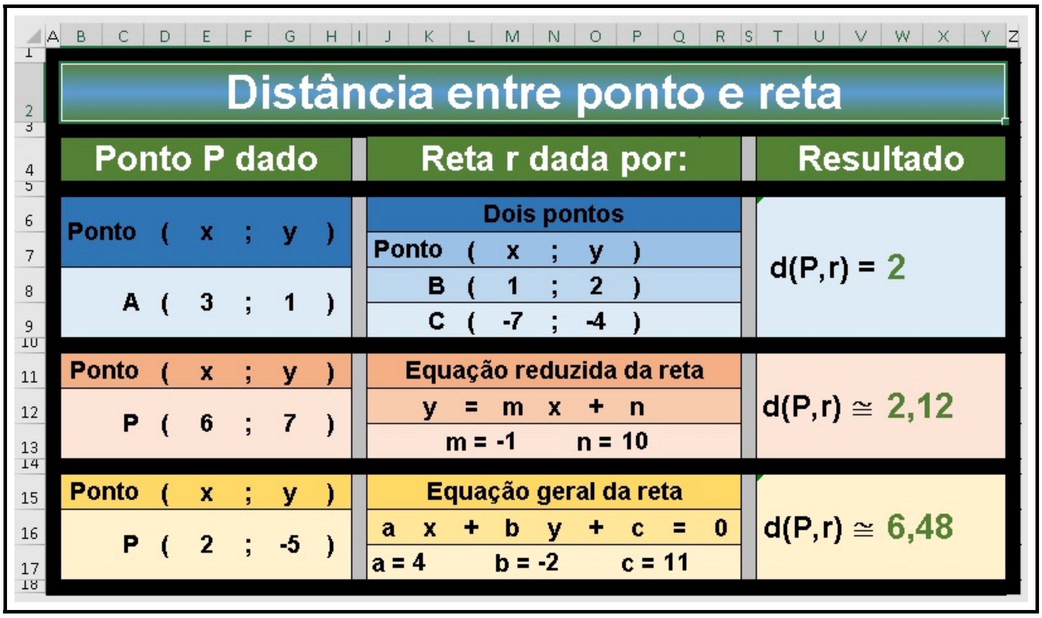
Logo, a distância do ponto P à reta r é aproximadamente 6,48.

A planilha já está pronta.

- Por fim, salve a planilha clicando no ícone .

Veja na figura 99 como ficou a referida planilha depois de resolver os exemplos acima.

Figura 99 – Distância de um ponto a uma reta (planilha).



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

3.14 Resolução de problemas de vestibulares, ENEM e concursos públicos, utilizando as planilhas do **Excel 2016**

Nesta seção serão resolvidos alguns problemas que utilizam as planilhas do Excel, as quais serão identificadas em cada problema pelo nome criado em seções anteriores, para cada caso ou situação. Ainda serão ocultadas as linhas e/ou colunas das planilhas, que não forem utilizadas na resolução de algum problema, para obter uma figura menor. Para fazer isto, basta **"Desproteger a planilha"** com a mesma senha em que a planilha foi protegida na sua criação, que nos exemplos deste capítulo, foi **"1234"**.

Os problemas contemplados aqui nesta seção foram aplicados em vestibulares, ENEM e em concursos públicos, que são possíveis de resolverem com a utilização das planilhas do Excel.

Em algumas situações serão necessários cálculos complementares para adequação à planilha, como por exemplo, multiplicar uma equação geral da reta por

-1, transformar número fracionário em número decimal etc.

Segue abaixo os problemas resolvidos de vestibulares e ENEM:

Exemplo 3.14.1 - (FEI-SP) - Num sistema cartesiano ortogonal xOy, considere o triângulo ABC de vértices $A(3;5); B(1;1)$ e $C(5;-9)$ e seja M o ponto médio do lado $\overline{AB}$. A equação da reta suporte da mediana $\overline{CM}$ é:

a) $2x + y - 1 = 0$

b) $5x + 2y - 7 = 0$

c) $4x + 2y - 2 = 0$

d) $4x + y - 11 = 0$

e) $2x - y - 19 = 0$

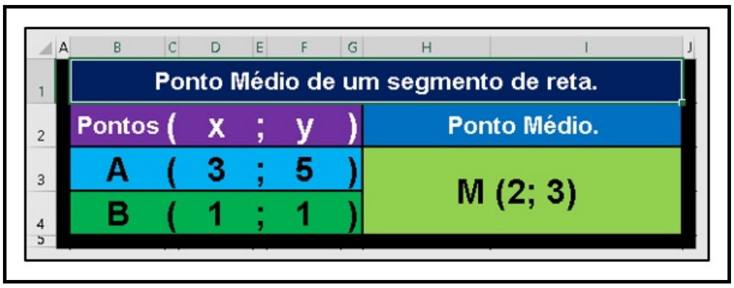
Resolução com Excel:

Primeiro, calcula-se o ponto médio M do lado $\overline{AB}$ com a planilha **"PM"**, da seguinte forma:

- Na célula **"D3"**, digite: **3** e na célula **"F3"**, digite: **5**, que são as coordenadas cartesianas do ponto A;
- Na célula **"D4"**, digite: **1** e na célula **"F4"**, digite: **1**, que são as coordenadas cartesianas do ponto B;

Veja o resultado do ponto médio M na planilha da figura 100

Figura 100 – RP-Ponto médio.



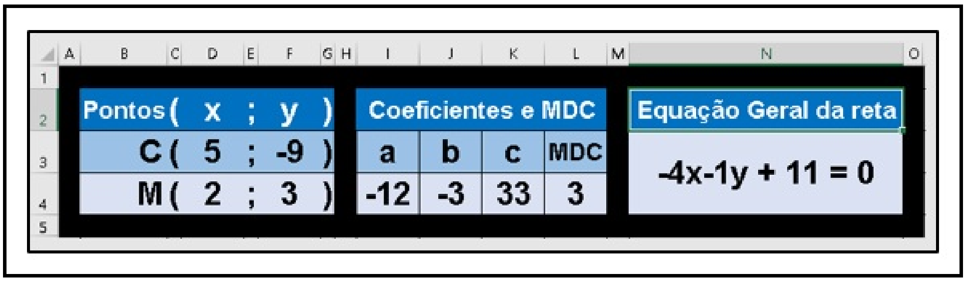
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Agora, calcula-se a equação da reta suporte da mediana $\overline{CM}$ com a planilha **"EGR"**, da seguinte forma:

- Na célula " **B3**", digite: **C** e na célula **"B4"**, digite: **M**, que são os nomes dos pontos;
- Na célula **"D3"**, digite: **5** e na célula **"F3"**, digite: **-9**, que são as coordenadas cartesianas do ponto C;
- Na célula **"D4"**, digite: **2** e na célula **"F4"**, digite: **3**, que são as coordenadas cartesianas do ponto médio M;

Veja o resultado da equação geral da reta na planilha da figura 101

Figura 101 – RP-Equação geral da reta.



Pontos (	x	;	y	)	Coeficientes e MDC				Equação Geral da reta
					a	b	c	MDC	-4x-1y + 11 = 0
C (	5	;	-9	)	-12	-3	33	3	
M (	2	;	3	)					

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Como as alternativas do problema têm o valor da abscissa x positivo, multiplica-se o resultado da planilha $-4x - 1y + 11 = 0$ por (-1), obtendo a equação: $4x + y - 11 = 0$.

Logo, a resposta da questão é a letra **"d"**.

Exemplo 3.14.2 - (UESPI/2008) - Qual a medida do ângulo agudo formado pelas retas com equações $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 1$ $y = \sqrt{3} - 3$?

a) 15º

b) 30º

c) 45º

d) 60º

e) 75º

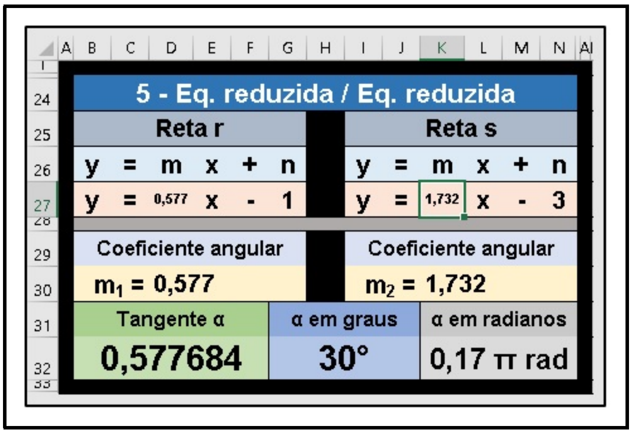
Resolução com Excel:

Para resolver esta questão, considere $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$ e $\sqrt{3} = 1{,}732$. Em seguida, utiliza-se o caso **“5 - Eq.reduzida / Eq.reduzida”** da planilha **“Ae2r”** e oculta-se os demais casos não utilizados, da seguinte forma:

- Na célula **“D27”**, digite: **0,577** e na célula **“K27”**, digite: **1,732**, que são os coeficientes angulares da equação reduzida rata;
- Na célula **“F27, M27”**, digite: **-**, na célula **“G27”**, digite: **1** e na célula **“N27”**, digite: **3** que são os sinais e os coeficientes lineares das equações.

Veja que o resultado do ângulo α em graus igual a 30º é mostrado conforme a figura 102.

Figura 102 – RP-Ângulo entre duas retas.

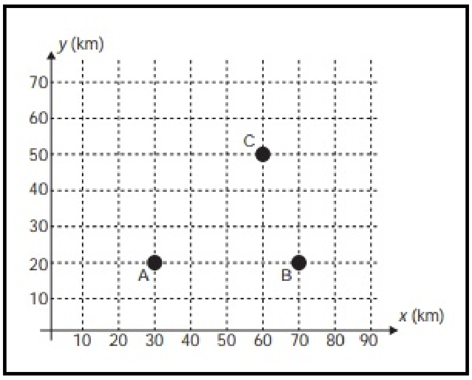


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Logo, a resposta da questão é a letra **“b”**.

Exemplo 3.14.3 - (ENEM/2013) Nos últimos anos a televisão tem passado por uma verdadeira revolução em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

Figura 103 – RP-Gráfico ENEM 2013.



Fonte: (INEP, 2018).

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) $(65; 35)$.

b) $(53\ ;\ 30)$.

c) $(45\ ;\ 35)$.

d) $(50\ ;\ 20)$.

e) $50\ ;\ 30)$.

Resolução com Excel:

Como a torre deve estar equidistantes das três antenas, este ponto é o **"Circuncentro"**, que é o centro da circunferência circunscrita ou também é o ponto de encontro das **"Mediatrizes"**, que por sua vez, é a **"Reta perpendicular"** que passa pelo **"Ponto médio"** do segmento de reta.

Então, a torre deve ser o ponto de encontro das mediatrizes, que pode ser calculada pelo ponto de intersecção de suas equações.

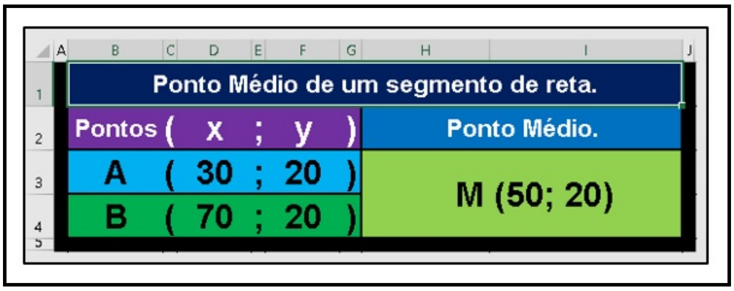
Primeiro calcula-se o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, onde $A(30, 20)$ e $B(70, 20)$, como segue:

- Na célula **"D3"**, digite: **30** e na célula **"F3"**, digite: **20**, que são as coordenadas do ponto A;

- Na célula **"D4"**, digite: **70** e na célula **"F4"**, digite: **20**, que são as coordenadas do ponto B.

Veja que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M_{AB} = (50, 20)$, como mostra a figura 104

Figura 104 – RP-Ponto médio ENEM.



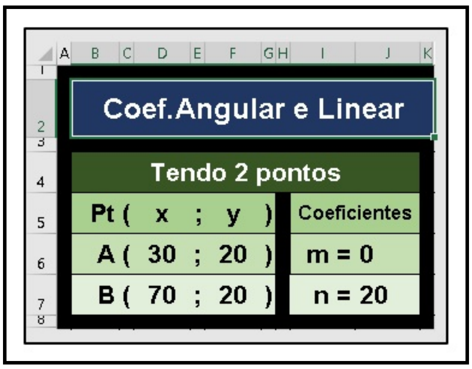
Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Calcula-se agora o coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$, como segue:

- Na célula **"D6"**, digite: **30** e na célula **"F6"**, digite: **20**, que são as coordenadas do ponto A;
- Na célula **"D7"**, digite: **70** e na célula **"F7"**, digite: **20**, que são as coordenadas do ponto B.

Veja que o coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$ é $m = 0$. como mostra a figura 105.

Figura 105 – RP-Coeficiente angular AB.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Se $m = 0$, a reta é paralela ao eixo x. Logo, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é uma reta paralela a y e como ela passa pelo ponto médio $M_{AB} = (50, 20)$, a equação da mediatriz é $x = 50$ ou $x - 50 = 0$.

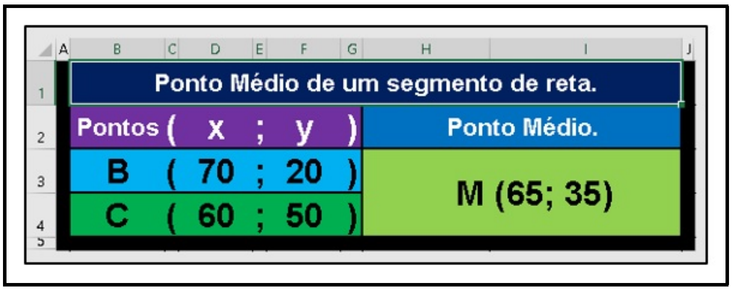
Faça o mesmo para o segmento de reta $\overline{BC}$, com $B(70,\ 20)$ e $C(60,\ 50)$.

Calcula-se o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, onde $B(70, 20)$ e $C(60, 50)$, como segue:

- Na célula **"B3"**, digite: **B** e na célula **"B4"**, digite: **C**, que são os nomes dos pontos;
- Na célula **"D3"**, digite: **70** e na célula **"F3"**, digite: **20**, que são as coordenadas do ponto B;
- Na célula **"D4"**, digite: **60** e na célula **"F4"**, digite: **50**, que são as coordenadas do ponto C.

Note que o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é $M_{BC} = (65, 35)$. como mostra a figura 106.

Figura 106 – RP-Ponto médio ENEM2.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

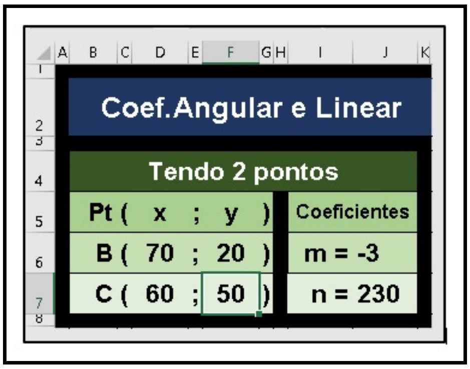
Calcula-se agora o coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{BC}$, como segue:

- Na célula **"B6"**, digite: **B** e na célula **"B7"**, digite: **C**, que são os nomes dos pontos;
- Na célula **"D6"**, digite: **70** e na célula **"F6"**, digite: **20**, que são as coordenadas do ponto B;

- Na célula **"D7"**, digite: **60** e na célula **"F7"**, digite: **50**, que são as coordenadas do ponto C.

Observe que o coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{BC}$ é $m = -3$. como mostra a figura 107

Figura 107 – RP-Coeficiente angular BC.



Coef.Angular e Linear				
Tendo 2 pontos				
Pt (	x	;	y)	Coeficientes
B (	70	;	20)	m = -3
C (	60	;	50)	n = 230

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Assim, o coeficiente angular da mediatriz do segmento de reta $\overline{BC}$ é $m = -\dfrac{1}{-3}$ $\Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$, por ser perpendicular.

Como já temos o coeficiente angular e o ponto médio da mediatriz, determina-se a equação reduzida da reta, utilizando a planilha **"Eqr"**, como segue:

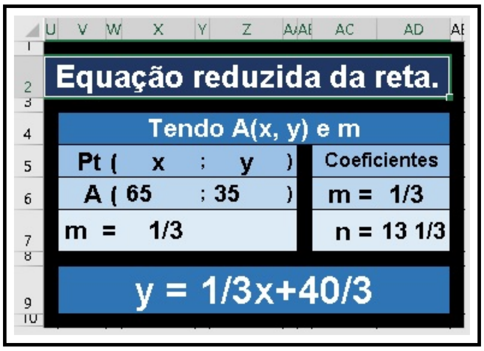
- Na célula **"V6"**, digite: **M**, que é o nome do ponto;

- Na célula **"X6"**, digite: **65** e na célula **"Z6"**, digite: **35**, que são as coordenadas do ponto médio M;

- Na célula **"Y7"**, digite: $\dfrac{1}{3}$.

Desta forma, a planilha mostra o resultado da equação reduzida da reta, conforme a figura 108

Figura 108 – RP-Equação reduzida da reta mediatriz.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

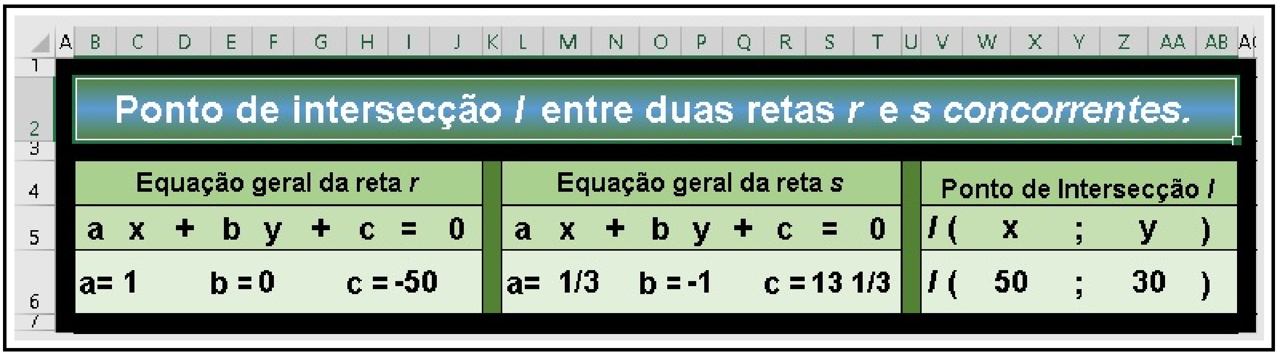
Note que a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{BC}$ é $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{40}{3}$ que também pode ser representada por $y = 1/3x + 40/3$. Observe que o coeficiente linear também pode ser representado na forma de fração mista, sendo $n = 13\ \ 1/3$. Assim, a equação geral da reta é: $\dfrac{1}{3}x - y + \dfrac{40}{3} = 0$ ou $1/3x - y + 13\ \ 1/3 = 0$. Caso não deseje o resultado em fração mista, basta formatar a célula para a categoria "Personalizado", tipo "?/?", como visto na seção 2.15.

Agora, para encontrar o local adequado para a construção da torre basta encontrar o ponto de intersecção das equações das duas mediatrizes, que são: $x - 50 = 0$ e $1/3x - y + 13\ \ 1/3 = 0$, calculados na etapa anterior. Para isso, utiliza-se a planilha **"Pi2r"**, como segue:

- Na célula **"C6"**, digite: **1**, na célula **"F6"**, digite: **0** e na célula **"I6"**, digite: **-50**, que são os coeficientes da equação geral da reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$;
- Na célula **"M6"**, digite: **1/3**, na célula **"P6"**, digite: **-1** e na célula **"S6"**, digite: **13 1/3**, que são os coeficientes da equação geral da reta mediatriz do segmento $\overline{BC}$.

Observe que o ponto de intersecção aparece na planilha, que é $I(50, 30)$, conforme a figura 109.

Figura 109 – RP-Ponto de intersecção das mediatrizes.



Ponto de intersecção *I* entre duas retas *r* e *s* concorrentes.

Equação geral da reta *r*	Equação geral da reta *s*	Ponto de Intersecção *I*
a x + b y + c = 0	a x + b y + c = 0	*I* (x ; y)
a= 1 b =0 c =-50	a= 1/3 b =-1 c =13 1/3	*I* (50 ; 30)

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Logo, a resposta da questão é a letra **"e"**.

Os próximos problemas contemplados aqui, são os aplicados em concursos públicos:

Exemplo 3.14.4 - (Prefeitura de Cláudio - MG - Guarda Municipal (FUNDEP (Gestão de Concursos) - 2016)) - Para organizar o mapa da região central de uma cidade, foi utilizado como referência o plano cartesiano que tinha a praça central como origem. Dois postos de vigilância foram montados nas posições $P_1(-2, 4)$ e $P_2(6, -2)$.

Considerando que as unidades utilizadas são dadas em hectômetros (100 metros), é CORRETO afirmar que a distância entre os postos de vigilância é:

a) 100 metros.

b) 500 metros.

c) 800 metros.

d) 1.000 metros.

Resolução com Excel:

Primeiro, considere $P_1 = A$ e $P_2 = B$. Para resolver esta questão basta calcular a distância entre os dois pontos em hectômetros e depois converter em metros, multiplicando por 100. Para isso, utiliza-se a planilha **"D2ppc"**, como segue:

- Na célula **"D3"**, digite: **-2** e na célula **"F3"**, digite: **4**, que são as coordenadas do ponto $P_1 = A$;

- Na célula **“D4”**, digite: **6**, na célula **“F4”**, digite: **-2**, que são as coordenadas do ponto $P_2 = B$.

Observe que a planilha já mostra o resultado $d_{AB} = 10$, conforme a figura 110.

Figura 110 – RP-Distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Assim, a distância entre os postos de vigilância em metros é $10 \times 100 = 1.000$ metros.

Logo, a resposta da questão é a letra **“d”**.

Exemplo 3.14.5 - (IFB - Professor - Matemática (2017)) - Um avião voa seguindo uma trajetória descrita pela função $y = 2x + 3$. Considerando que existe um radar na origem desse sistema, qual é o ponto da trajetória em que o avião está mais próximo desse radar?

a) $A(0,\, 3)$

b) $B(-3/2,\, 0)$

c) $C(-2/5,\, 11/5)$

d) $D(-6/5,\, 3/5)$

e) $E(3/5,\, -6/5)$

Resolução com Excel:

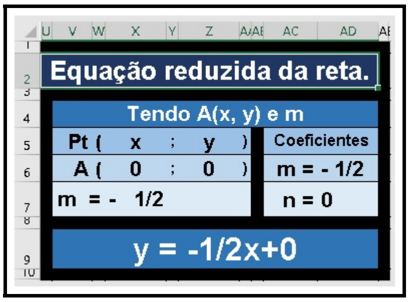
Como o radar está na origem, ele está no ponto $A(0,\, 0)$. Como tem a equação da trajetória do avião e quer saber o ponto mais próximo do radar, isso é possível com uma reta perpendicular à equação dada e que passa na origem. Assim, o coeficiente angular da reta perpendicular m é menos o inverso do coeficiente angular da outra reta, que é 2. Então, $m = -\dfrac{1}{2}$.

Para determinar a equação reduzida da reta perpendicular, com $m = -\dfrac{1}{2}$ e $A(0,\, 0)$, utiliza-se a planilha **"Eqr"**, da seguinte forma:

- Na célula **"X6"**, digite: **0**, na célula **"Z6"**, digite: **0**, que são as coordenadas do ponto A;
- Na célula **"Y7"**, digite: $m = -\dfrac{1}{2}$, que é o coeficiente angular m.

Veja na planilha da figura 111 que a equação reduzida da reta perpendicular é $y = -1/2x + 0$ ou $y = -1/2x$ ou ainda $y = \dfrac{1}{2}x$.

Figura 111 – RP-Equação reduzida da reta.



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

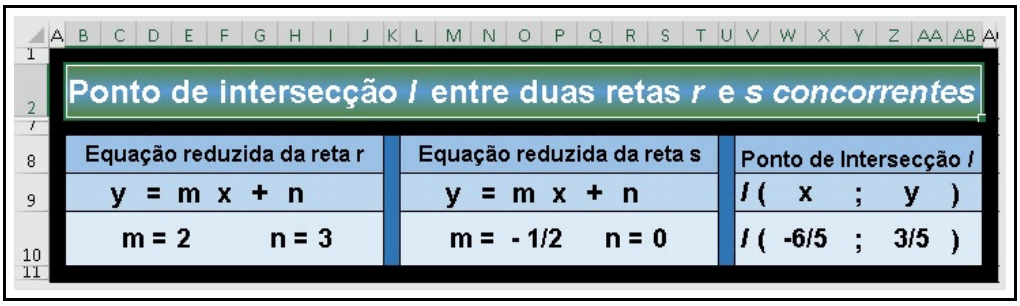
Observe que as colunas da planilha original que não foram usadas, foram ocultadas.

Em seguida, para encontrar o ponto da trajetória do avião mais próximo do radar, é só calcular o ponto de intersecção das duas retas, que é obtido usando a planilha **"Pi2r"**, como segue:

- Na célula **"E10"**, digite: **2**, na célula **"I10"**, digite: **3**, que são os coeficientes: angular e linear, da equação reduzida da reta $y = 2x + 3$;
- Na célula **"O10"**, digite: **-1/2**, na célula **"S10"**, digite: **0**, que são os coeficientes: angular e linear, da equação reduzida da reta perpendicular $y = -1/2x$.

Note que o ponto de intersecção mostrado na planilha é $I(-6/5, 3/5)$, conforme a figura 112

Figura 112 – RP-Ponto de intersecção de duas retas.



Ponto de intersecção *I* entre duas retas *r* e *s* concorrentes		
Equação reduzida da reta r	Equação reduzida da reta s	Ponto de Intersecção *I*
y = m x + n	y = m x + n	*I* (x ; y)
m = 2 n = 3	m = - 1/2 n = 0	*I* (-6/5 ; 3/5)

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Observe que as linhas da planilha original que não foram usadas, foram ocultadas.

Logo, a resposta da questão é a letra **"d"**.

Exemplo 3.14.6 - (SEARH - RN - Professor - Matemática (IDECAN - 2016)) - Um triângulo ABC foi desenhado no plano cartesiano. Considerando os pontos $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(-1, -2)$, a área desse triângulo é, em unidade de área:

a) 6.

b) 7.

c) 9.

d) 11.

Resolução com Excel:

Para calcular a área do triângulo descrito no problema, utiliza-se a planilha **"APT"**, como segue:

- Na célula **"D3"**, digite: **1** e na célula **"F3"**, digite: **2**, que são as coordenadas cartesianas do ponto A;
- Na célula **"D4"**, digite: **-3** e na célula **"F4"**, digite: **1**, que são as coordenadas cartesianas do ponto B;

- Na célula **"D5"**, digite: **-1** e na célula **"F5"**, digite: **-2**, que são as coordenadas cartesianas do ponto C;

A área do triângulo é igual a $A = 7$, como mostra na figura 113

Figura 113 – RP-Área do triângulo ABC.

Área e perímetro de um triângulo.							
Vértices	(	x	;	y	)	Área do triângulo ABC
A	(	1	;	2	)	A = 7
B	(	-3	;	1	)	Perímetro de triângulo ABC
C	(	-1	;	-2	)	2p ≅ 12,2

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Logo, a resposta da questão é a letra **"b"**.

Exemplo 3.14.7 - (SEDUC-RJ - Professor - Matemática (CEPERJ - 2015)) - Os vértices de um triângulo são dados pelos pontos $A(-2, 3), B(1, 1)$ e $C(5, -2)$. A distância do vértice A até a reta BC é igual a:

a) 0,2

b) 0,3

c) 0,4

d) 0,5

e) 0,6

Resolução com Excel:

Inicialmente, calcula-se a equação geral da reta $\overline{BC}$. Para isso, utiliza-se a planilha **"EGR"** e faça o seguinte:

- Na célula **"B3"**, digite: **B** e na célula **"B4"**, digite: **C**, que são os nomes dos pontos;

- Na célula **"D3"**, digite: **1** e na célula **"F3"**, digite: **1**, que são as coordenadas do ponto B;

- Na célula **"D4"**, digite: **5** e na célula **"F4"**, digite: **-2**, que são as coordenadas do ponto C.

Observe na planilha da figura 114 que a equação geral da reta $\overline{BC}$ é $3x + 4y - 7 = 0$.

Figura 114 – RP-Equação geral da reta $\overline{BC}$.

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Agora é só utilizar a planilha **"Dpr"** para calcular a distância do vértice A até a reta $\overline{BC}$, como segue:

- Na célula **"E16"**, digite: **-2** e na célula **"G16"**, digite: **3**, que são as coordenadas do ponto A;
- Na célula **"K17"**, digite: **3**, na célula **"N17"**, digite: **4** e na célula **"Q17"**, digite: **-7**, que são os coeficientes da equação geral da reta $3x + 4y - 7 = 0$.

Veja que a planilha calculou de forma automática a distância do ponto A (P na planilha) até a reta formada pela equação geral da reta $3x + 4y - 7 = 0$, que é $d(P, r) = 0,2$, conforme a figura 115.

Figura 115 – RP-Distância de um ponto a uma reta.

Fonte: Elaborada pelo autor no Excel 2016.

Logo, a resposta da questão é a letra **“a”**.

4 Conclusão

Por meio das leituras realizadas, pode-se concluir que o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) é muito importante no sistema educacional, uma vez que pode fornecer subsídios para contribuir com a melhoria do conhecimento no processo ensino aprendizagem, além de proporcionar aulas criativas, inovadoras, lúdicas e dinâmicas, que despertam nos alunos uma participação motivadora em busca do conhecimento.

Por outro lado, o uso de planilhas eletrônicas, pode viabilizar aos alunos/cidadãos um “novo” instrumento que pode ajudá-los nas mais diversas situações cotidianas e resolverem problemas diversos.

Estas planilhas do Excel são ferramentas que facilitam a resolução de problemas e podem utilizá-las na escola ou até mesmo em casa, como um instrumento pedagógico no processo ensino-aprendizagem para o estudo de tópicos de Geometria Analítica e, consequentemente, de Matemática.

Neste trabalho deu-se ênfase maior na criação, passo a passo, de planilhas no Excel, com a inclusão de fórmulas e funções detalhadas, bem como suas aplicações e formatações básicas, para resolverem problemas de Geometria Analítica. Como o Excel é um aplicativo da Microsoft Office que é bem popular, ele pode ser usado mais frequentemente, porque é acessível a quase todos os usuários de computadores e é necessário apenas, um conhecimento básico de Excel para que possa criar as referidas planilhas, que é de fácil acesso a professores e alunos.

Outra observação também é que não precisa ser necessariamente utilizada a versão atualizada do Excel 2016, nas quais todas as planilhas foram criadas. Podem utilizar outras versões anteriores, como o Excel 2013, 2010, 2007 etc, porque as fórmulas e funções utilizadas neste trabalho não mudam com a alteração da versão do aplicativo. O que muda é apenas a aparência da tela de abertura, dos menus, das guias etc, o que não altera em nada a função principal do mesmo. Da mesma forma, com o avanço tecnológico cada vez mais rápido, pode surgir uma nova versão do Excel mais atualizada, a qualquer momento, com mudanças na aparência ou designer e até mesmo, com muitas inovações. Mas, mesmo assim, a criação destas planilhas são possíveis, pois, o mais importante, que são as fórmulas e funções utilizadas nas construções das mesmas, não mudam. É evidente que às vezes precisa fazer algumas adaptações. Atualmente, com esses avanços tecnológicos, exige-se do professor cada vez mais aperfeiçoamento para que possa adquirir conhecimento suficiente e promover um ensino de qualidade que utilizam estas ferramentas tecnológicas, além de outras não contempladas neste trabalho, como instrumento pedagógico auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

Juntamente com a busca desse aperfeiçoamento também é necessário que o professor aprimore seus métodos e práticas de ensino, que, segundo Oshima e Pavanello:

> "Para melhorar seu desempenho em sala de aula o professor necessita aprimorar seus métodos e a prática de ensino. No trabalho pedagógico os desafios surgem a todo momento levando o professor a reflexão. Várias alternativas de trabalho são propostas para vencer esses desafios." (OSHIMA; PAVANELLO, 2010).

Em virtude do fato de que o professor precisa cada vez mais utilizar tecnologias na educação, este trabalho será uma contribuição para que os docentes possam usar uma de tais tecnologias, que neste caso, é o computador integrado com o aplicativo Excel. Se o professor não se interagir com tais tecnologias, ficará sem espaço na educação, segundo D'Ambrosio:

> "Não há dúvida quanto à importância do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto educação a distância quanto outras utilizações de tecnologia na educação, mas nada substituirá o professor. Todos esses serão meios auxiliares para o professor. Mas o professor, incapaz de se utilizar desses meios, não terá espaço na educação." (D'AMBROSIO, 2009, P.79)

Desta forma, para que o professor não perca seu espaço na educação, terá que abandonar a "zona de conforto" e se aperfeiçoar em tecnologias da educação e usá-las como ferramentas auxiliares no processo ensino-aprendizagem e, a utilização deste trabalho, já é um bom começo, além de outros.

Diante do exposto, como contribuição com a finalização deste trabalho, espera-se ter em mãos uma ferramenta para que professores e alunos possam utilizá-los em sala de aula ou Laboratório de Informática e que possa resolver problemas de Geometria Analítica nas escolas, de forma lúdica, inovadora, motivadora etc, que visa despertar nos alunos, a curiosidade e o interesse pela aprendizagem. Com a evolução da tecnologia e com aplicativos semelhantes ao Excel para celulares e tablets, pode-se fazer algumas adaptações e usar o aparelho em sala de aula, para resolver os problemas propostos.

Outra contribuição também é que juntamente com a entrega deste TCC, será entregue um pen drive ou CD gravado, com todas as planilhas do Excel criadas para o desenvolvimento deste trabalho, juntamente com o arquivo desta dissertação em .pdf, que poderão ser utilizados pelos professores e alunos como recurso pedagógico no precesso ensino-aprendizagem.

Todas as planilhas salvas foram bloqueadas para edição, ficando liberadas apenas as células onde serão inseridos os dados para efetuar os referidos cálculos. Para editá-las ou alterá-las é necessário desbloqueá-las, utilizando a senha “1234”. Elas poderão ser editadas, alteradas, copiadas, etc, dependendo dos objetivos de cada um, em auxílio a uma educação cada vez melhor.

Referências

AIOSA, R. *Alterar a largura e altura da coluna*. 2011. Disponível em: <http://www.escolaexcel.com.br/2011/08/alterar-largura-e-altura-da-coluna.html>. Acesso em: 21 Out 2018. Citado na página 43.

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. Único. Citado na página 115.

BERVIAN, N. M. *Curso Básico de Planilha Eletrônica (LibreOffice Calc)*. 2011. Disponível em: <https://l3p.fic.ufg.br/up/771/o/Curso_Basico_de_Calc_LibreOffice.pdf?1491306586>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 35.

BIJORA, H. *Excel: como usar a função concatenar*. 2018. Disponível em: <https://www.techtudo.com.br/dicas-e-tutoriais/2018/02/excel-como-usar-a-funcao-concatenar.ghtml>. Acesso em: 28 Set 2018. Citado na página 67.

BRASIL. *Decreto nº 84.067, de 02 de Outubro de 1979*. 1979. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1970-1979/D84067.htm>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado na página 29.

BRASIL. *Secretaria de Educação Média e Tecnológica*. 1994. Programa Nacional de informática educativa/. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002415.pdf>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado na página 30.

BRASIL. *Portaria nº 522, de 09 de Abril de 1997*. 1997. Ministério da Educação e do Desporto. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me001167.pdf>. Acesso em: 05 Out. 2018. Citado na página 30.

BRASIL. *Decreto nº 6.300, 12 de Dezembro de 2007*. 2007. Presidência da República. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2007/Decreto/D6300.htm>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado na página 30.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Quadrante Matemática*. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 110, 111 e 115.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. 17. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. Citado na página 237.

DANTE, L. R. *Matemática Dante*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008. v. Único. Citado na página 77.

EDIVALDO. *Histórias e versões do Excel*. 2017. Disponível em: <http://www.tudoexcel.com.br/planilhas/historia-e-versoes-do-excel-1691.html>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 37.

ESPECIFICAÇÕES... *Especificações e limites do Microsoft Excel*. 2018. Disponível em: <https://support.office.com/pt-br/article/especifica%C3%A7%C3%B5es-e-limites-do-microsoft-excel-1672b34d-7043-467e-8e27-269d656771c3>. Acesso em: 28 Set 2018. Citado na página 60.

GOIÁS. *Decreto nº 4.985, 16 de Dezembro de 1998*. 1998. Governo do Estado de Goiás. Disponível em: <http://www.gabinetecivil.go.gov.br/pagina_decretos.php?id=2079>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado na página 31.

HISTÓRIA... *História de Planilhas Eletrônicas; Compputer*. 2018. Disponível em: <http://ptcomputador.com/Software/spreadsheets/168590.html>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 36.

INEP, M. *INEP/MEC - Provas e Gabaritos*. 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 29 Set 2018. Citado na página 224.

JESUS, A. L. G. d.; LIMA, M. P. V. M. *Tecnologias da informação e comunicação (TICs): Trabalho escolar e processo de ensino-aprendizagem*[1]. 2018. Disponível em: <https://portal.fslf.edu.br/wp-content/uploads/2016/12/tcc_14.pdf>. Acesso em: 05 Out. 2018. Citado na página 28.

KENSKI, V. M. *Educação e Tecnologias: O Novo Ritmo da Informação*. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007. Citado na página 28.

KILHIAN, K. *Distância entre dois pontos no plano*. 2013. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html>. Acesso em: 25 Mar 2018. Citado na página 104.

LEONARDO, F. M. d. *Conexões com a Matemática*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 3. Citado na página 78.

LOPES, J. *Resumo Histórico do Excel*. 2016. Disponível em: <http://conaexcel.com.br/resumo-historico-do-excel/>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 37.

MESCLAR... *Mesclar Células*. 2018. Disponível em: <https://support.office.com/pt-br/article/mesclar-c%C3%A9lulas-a2e38193-f644-40fa-917d-e696d14c17ec>. Acesso em: 26 Set 2018. Citado na página 42.

MEYER, M. *História do Excel*. 2013. Disponível em: <https://www.aprenderexcel.com.br/2013/artigos/historia-do-excel>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 36.

MORAES, M. C. *Informática educativa no Brasil: um história vivida, algumas lições aprendidas*. 1997. Disponível em: <http://br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/viewFile/2320/2082>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

OSHIMA, I. S.; PAVANELLO, M. R. *O laboratório de ensino de matemática e a aprendizagem da geometria*. 2010. Citado na página 237.

PACIEVITCH, T. *Tecnologia da Informação e Comunicação; Infoescola.* 2018. Disponível em: <https://www.infoescola.com/informatica/tecnologia-da-informacao-e-comunicacao/>. Acesso em: 05 Out. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

PAIVA, M. *Matemática Paiva.* 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 3. Citado na página 134.

PETLA, R. J. *Geogebra: possibilidades para o ensino de matemática.* 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-6.pdf>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado na página 33.

QUE..., O. *O que é Excel?; Cursos de Informática Básica.* 2018. Disponível em: <http://www.cursosdeinformaticabasica.com.br/o-que-e-excel/>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 36.

SIGNIFICADO... *Significado do Excel.* 2018. Disponível em: <https://www.significados.com.br/excel/>. Acesso em: 10 Mar 2018. Citado na página 37.

SILVA, D. *Teorema de Pitágoras.* 2018. Disponível em: <https://www.estudokids.com.br/teorema-de-pitagoras/>. Acesso em: 01 Mar 2018. Citado na página 103.

SILVA, L. P. M. *O que é geometria analítica?; Brasil Escola.* 2018. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-geometria-analitica.htm>. Acesso em: 22 Out 2018. Citado na página 76.

SILVA, M. N. P. d. *Condição de alinhamento de três pontos; Brasil Escola.* 2018. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/condicao-alinhamento-tres-pontos-2.htm>. Acesso em: 07 Abr 2018. Citado na página 121.

SILVA, M. N. P. d. *Plano Cartesiano; Mundo Educação.* 2018. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/plano-cartesiano.htm>. Acesso em: 17 Nov 2018. Citado na página 79.

SILVA, M. N. P. d. *Teorema de Pitágoras.* 2018. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-pitagoras.htm>. Acesso em: 25 Mar 2018. Citado na página 103.

SOUZA, D. d. O. d. *Ensino de Matemática com o Uso das TIC.* 2015. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/133978/000979603.pdf?sequence=1>. Acesso em: 06 Out. 2018. Citado na página 32.

SOUZA, J. R. d. *Novo olhar matemática.* 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 115.

SOUZA, J. R. d.; GARCIA, J. d. S. R. *Contato Matemática.* 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. v. 3. Citado na página 192.

SOUZA, L. d. O. As tic na formação docente: fundamentos para o design de objetos virtuais de aprendizagem. Universidade Federal de Goiás, 2016. Citado na página 32.

SUPEERCALCULADOR..., C. *CD Supercalculador Matemático*. 2018. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/shopping/produto.php?id=184>. Acesso em: 07 Out. 2018. Citado na página 33.

TAKAHASHI, T. *Sociedade da Informação no Brasil: Livro Verde*. Brasília: Ministério da Ciência e Tecnologia, 2000. Citado na página 30.

TEOREMA... *Teorema de Pitágoras; Info Escola*. 2018. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/teorema-de-pitagoras/>. Acesso em: 24 Fev. 2018. Citado na página 103.