Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFG

PROFMAT

Airton Wagner de Souza Júnior

Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções

Jataí

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: **Airton Wagner de Souza Júnior**

Título do trabalho: **Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções.**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Airton Wagner de Souza Junior
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Geovani Ferreira da Silva
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 02 / 01 / 2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Airton Wagner de Souza Júnior

Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do grau de mestre pelo programa de mestrado profissionalizante em matemática

Universidade Federal de Góias

Regional Jataí

PROFMAT

Orientador: Gecirlei Francisco da Silva

Jataí

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza Junior, Airton Wagner de
Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções [manuscrito] / Airton Wagner de Souza Junior. - 2018.
147 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2018.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Ensino e aprendizagem matemática. 2. Ensino de funções. 3. GeoGebra. 4. Modelagem Matemática. I. Silva, Gecirlei Francisco da, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG REGIONAL JATAÍ
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG
Regional Jataí – Caixa Postal 03 – CEP: 75,804-020 – Jataí-GO.
Fones: (64) 3606-8213 **www.jatai.ufg.br/matematica**

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Airton Wagner de Souza Junior – Ao quinto dia do mês de dezembro do ano de dois mil e dezoito (05/12/2018), às 09:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva – Orientador, Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes e Profª. Drª. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no prédio da Pós Graduação da Universidade Federal de Goiás – Regional Jataí, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"USO DO SOFTWARE GEOGEBRA E MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Goiás, polo Jataí. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da Dissertação que, em 40 minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na Secretaria da Coordenação de Matemática da Regional Jataí da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 10:30 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Roberta Cristina Ferreira Zago, Secretária da Coordenação Geral de Pós-Graduação da Regional Jataí – UFG, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Gecirlei Francisco da Silva

Prof. Dr. Gercilei Francisco da Silva
Profmat UFG/REJ
Presidente

Flávio Gomes de Moraes.

Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes
Profmat UFG/REJ
Membro Interno

Profª. Drª. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura
UFG/REJ
Membro Externo

Este trabalho é dedicado aos meus pais,
amigos que sempre confiaram em mim.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter dado a oportunidade de concluir está etapa da minha vida.

Agradeço a minha família sempre esta comigo nos momento difíceis.

Agradeço aos colegas de sala, especialmente estes Onizio, o Eurípedes (Capiau), a Nayá, por estarem comigo todas sextas-feiras.

Agradeço aos professores da UFG - Universidade Federal de Goiás e à CAPES, pela bolsa de estudos que me ajudou e muito nas viagens entre minha cidade e Jataí.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que fizeram parte desse processo decisivo para minha conclusão do Mestrado.

Resumo

SOUZA JUNIOR, Airton Wagner de Souza. **Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções.** 2018. 147 p. Dissertação - Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Regional Jataí, Universidade Federal de Goiás. Jataí, GO.

"Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções"é o tema abordado neste trabalho, e que propõe como objetivo principal, ampliar e complementar a abordagem didática do conteúdo de funções. Após frustrações do autor, ao ensinar esse conteúdo, via o processo tradicional e observamos, nos livros didáticos, concepções confusas e muitas vezes contraditórias do conteúdo em relação a bibliografia específica, destacamos a necessidade de ampliar as abordagens utilizadas para o ensino de funções. Diante disso, nossa metodologia de trabalho foi realizar estudos em diversos livros específicos que trata de funções e da técnica de modelagem, bem como, aprender a manusear os recursos do Geogebra. Dessa forma, propomos este material que servirá para o professor melhorar o seu conhecimento de funções, e por fim, aplicar o mesmo aos seus alunos. De modo geral, apresentamos conceitos, análises gráficas e aplicações de funções, bem como, a resolução, com o auxílio do Geogebra, de problemas associados ao cotidiano do professor em sala de aula. Diante do exposto, e considerando as informações colocadas, de forma didática, em cada capítulo, realizando a captura das telas do Geogebra, no momento das explicações das variações de funções, concluímos que o objetivo proposto foi atingido, uma vez que o material ficou bem abrangente em relação ao conteúdo de funções. Apesar disso, entendemos que uma aplicação desse material em um grupo de professores, em formato de oficina, nos traria mais subsídios para a melhoria do mesmo. No entanto, como não tivemos a oportunidade da realização dessa atividade, vamos considerar como uma de nossas propostas futuras.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem matemática, Ensino de funções, GeoGebra, Modelagem Matemática.

Abstract

SOUZA JUNIOR, Airton Wagner de Souza. **Use of Geogebra Software and Mathematical Modeling in the Teaching of Functions.** 2018. 147 p. Dissertation - Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Regional Jataí, Universidade Federal de Goiás. Jataí, GO.

"Use of Geogebra Software and Mathematical Modeling in the Teaching of Functions" is the theme addressed in this work, which proposes as main objective, to extend and complement the didactic approach of the content of functions. Following the author's frustrations, in teaching this content, he saw the traditional process and observed in the textbooks confusing and often contradictory conceptions of the content in relation to the specific bibliography, we emphasize the need to broaden the approaches used for the teaching of functions. Therefore, our methodology of work was to carry out studies in several specific books dealing with functions and the modeling technique, as well as, to learn to handle the resources of Geogebra. In this way, we propose this material that will serve for the teacher to improve his / her knowledge of functions, and finally, to apply the same to his students. In general, we present concepts, graphical analyzes and applications of functions, as well as the resolution, with the aid of Geogebra, of problems associated with teacher's Cotitian. In view of the above, and considering the information placed, in a didactic way, in each chapter, capturing the screens of Geogebra, at the moment of the explanations of the variations of functions, we conclude that the proposed objective was reached, once the material was well Although we understand that an application of this material in a group of teachers, in a workshop format, would give us more subsidies to improve it. However, as we did not have the opportunity to carry out this activity, we will consider it as one of our future proposals.

Keywords: Teaching and learning mathematics, Teaching of functions, GeoGebra, Mathematical modeling.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Atualmente, vários pesquisadores buscam incansavelmente alternativas para mudar a realidade no ensino de matemática, especificamente no ensino de funções. Este trabalho tem a proposta de utilizar a técnica de modelagem matemática e o software Geogebra como recursos metodológicos, para o ensino deste conteúdo. Entendemos que a modelagem proporciona aos alunos a resolução de atividades contextualizadas, inseridas na sua realidade, e o Geogebra irá facilitar a identificação dos modelos e a visualização dos mesmos.

O software Geogebra, é um recurso metodológico, inovador, de simples manuseio e de plataforma gratuita, conjunto de características que nos possibilitou a definir sua escolha. Entendemos que vai nos ajudar a trabalhar com os professores no estudo das funções, pois, irá auxiliar na transição da parte teórica com a parte geométrica gráfica, estimulando os mesmos para o entendimento. Além disso, pode ser trabalhado em turmas de qualquer nível de ensino, bastando o conhecimento em informática básica.

Para justificar a escolha do tema desta pesquisa "Uso do Software Geogebra e Modelagem Matemática no Ensino de Funções", vamos relacionar a trajetória do autor e suas inquietações em torno do ensino e aprendizagem do conteúdo de funções. Durante meus quase onze anos de magistério no ensino médio, ouvi relatos de colegas e já experimentei, planejar uma aula e, ao fim da mesma, ficar com a sensação de que ninguém conseguiu assimilar nada, ou seja, não houve aprendizagem por parte dos alunos. Esse fato, contribuiu para a busca de alternativas de ensino.

Diante disso, ingressei no Curso de Especialização em Ciência e Matemática no IFGO campus Jataí, onde estudei uma disciplina chamada Tecnologias da Informação e Comunicação, TICs. Essa matéria foi o ponto de partida para trabalhar formas de ensino usando as tecnologias, principalmente o uso de softwares como por exemplo Winplot, no auxílio de visualização gráfica. Nesta fase do curso, foi preciso fazer um Trabalho Final que consistiu numa pesquisa realizada com aplicação de Modelagem Matemática em uma escola rural no município de Rio Verde, Goiás. (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014) relata que, após a aplicação de Modelagem Matemática, inserido aos conteúdos de funções, houve uma melhora significativa nas notas dos alunos do 9° ano, além disso, observou que, tanto a evasão, quanto as faltas, diminuíram. Fica evidente pela pesquisa, que foi satisfatório o uso da metodologia, já que houve aprendizagem por parte dos alunos e um aumento da frequência dos mesmos, nas aulas.

Em busca de uma metolologia adequada e satisfatória, encontramos em (TENÓRIO; COSTA; TENÓRIO, 2014) uma maneira de resolver problemas envolvendo as funções

Afins, a investigação foi feita em duas turmas de 1ª série do Ensino Médio participaram da pesquisa. Primeiramente, aulas tradicionais e pré-testes idênticos foram ministrados. Então uma turma recebeu um reforço pedagógico tradicional. Na outra, o software Geogebra foi utilizado no reforço. Nesta pesquisa de (TENÓRIO; COSTA; TENÓRIO, 2014), nos traz que os alunos resolveram uma lista de doze questões (seis exercícios e seis problemas) semelhantes, mas uma com o auxílio do software. Houve algumas dificuldades, porém, os alunos acharam mais fácil resolver as atividades no Geogebra por não precisarem construir gráficos manualmente. A visualização rápida de diferentes gráficos também permitiu uma melhor compreensão.

Os alunos gostaram de empregar o software e prefeririam resolver questões em aulas e em avaliações com ele. As expressões dos alunos enquanto trabalhavam com o Geogebra foram marcantes, além de acharem as atividades investigativas boas, eles puderam aprender melhor com a rápida visualização na construção dos gráficos.

Diante disso, dizemos que o objetivo principal deste trabalho é ampliar e complementar a abordagem didática dos conteúdos de funções presentes nos livros didáticos, auxiliando os professores de matemática. De modo específico, pretendemos levar o professor a: compreender, caracterizar e visualizar comportamentos das diversas funções; Compreender e manusear os recursos de: controle deslizante e sequência de pontos, do Geogebra. Portanto, é interesse nosso, que os professores, com o complemento da técnica de modelagem, possam desenvolver um ensino ampliado de funções, de modo a estimular o aluno a questionar, formular e contextualizar esse conteúdo em outras práticas sociais. Diante disso, entendemos que, criar situações problemas e resolvê-los, fazendo uso de novas tecnologias, é necessário e facilita a aprendizagem, uma vez que, seria um escape, uma tentativa ou uma mudança, em prol de novo ensino.

Na sequência traremos um pouco do software Geogebra como alternativa de ensino e mostrando o levantamento histórico sobre os conceitos e definições de funções.

1.1 Uso das Novas Tecnologias da Informação e Comunicação TICs - Software GeoGebra

O levantamento sobre o software feito (PEREIRA et al., 2012, p. 31) em sua dissertação traz que o Geogebra apresenta-se como um software livre, criado por Markus Hohenwarter, escrito em Java e disponível em múltiplas plataformas, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Considerado como uma ferramenta eficaz na forma interativa, possui uma interface amigável, possibilidades para produção de aplicativos em páginas web e disponibilidade em vários idiomas. Além disso, no website do projeto, é possível adquirir uma série de interações e materiais de ajuda elaborados pela comunidade Geogebra mundial. O software apresenta também um campo de entrada de texto, reservado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções de tal forma que, pressionado a tecla enter, os mesmos são exibidos na janela geométrica e algébrica.

Algumas informações adicionais: Publicado por Internationales GeoGebra Institut "IGI"; Tamanho aproxidamente de $45MB$; Direitos autorais International Geogebra Institute; Classificação etária inadequado para menores de 3 anos; Desenvolvido por Internationales GeoGebra Institut "IGI"; Categoria, Educação e data de lançamento 27/08/2013. Seu dispositivo deve atender a todos os requisitos mínimos para abrir este produto Sistema Operacional Windows 8.1 Arquitetura $x86, x64, ARM, ARM64$.

O ambiente informatizado proporciona uma nova relação professor/aluno, criando uma maior proximidade, interação e colaboração entre eles. De maneira geral, nossos alunos são curiosos e, para dispertarmos esse interesse nos mesmos, seria uma boa opção de usar as TICs como metodologias para ensino aprendizagem.

> Não há dúvida de que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, sites educacionais, softwares diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino e aprendizagem, onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor (KENSKI, 2007, p. 46).

Sabemos que essa tarefa não é tão fácil assim, pois a implementação dessa tecnologia, só é possível se os profissionais de ensino estiverem preparados para o enfrentamento das mudanças e transformações que se farão presentes em sua prática docentes. De acordo com (KENSKI, 2007, p. 45) “A escolha de determinado tipo de tecnologia altera profundamente a natureza do processo educacional e a comunicação entre os participantes”. No entanto é preciso refletir, ter cautela sobre a implementação das questões colocadas.

Segundo (KENSKI, 2007) a tarefa de acompanhar a evolução que os avanços tecnológicos impõem a todos, indistintamente, perpassa por adaptar-se a mesma.

> Este é também o duplo desafio para a educação: adaptar-se aos avanços tecnológicos e orientar o caminho de todos para o domínio e a apropriação crítica desses novos meios. [...] A escola representa na sociedade moderna o espaço de formação não apenas das gerações jovens, mas de todas as pessoas. Em um momento caracterizado por mudanças velozes, as pessoas procuram na educação escolar a garantia de formação que lhes possibilite o domínio de conhecimentos e melhor qualidade de vida. (KENSKI, 2007, p. 18-19).

Neste sentido, (PEREIRA et al., 2012) salienta o seguinte: "lidar com meios tecnológicos requer profissionais adeptos a querer aprimorar seus conhecimentos e contínua a busca pelo conhecimento". Os estudos realizados até então mostravam a necessidade de se repensar continuamente a questão de espaço e tempo nas escolas.

> A sala de aula deve deixar de ser o lugar das carteiras enfileiradas para se tornar um local em que professor e alunos podem realizar um trabalho

> diversificado em relação ao conhecimento. [...] Portanto, a ênfase da educação deixa de ser a memorização da informação transmitida pelo professor e passa a ser a construção do conhecimento realizada pelo aluno de maneira significativa, sendo o professor, o facilitador desse processo de construção. (VALENTE et al., 1999, p. 08)

Alguns motivos para utilização do software Geogebra: ele modifica totalmente o ambiente da aula e permite criar conjecturas durante o ensino aprendizagem no conteúdo de funções, ajuda na solução de algumas atividades onde havia dificuldade na verificação do comportamento do gráfico - por meio do software é facilitada, a compreensão e comportamento dos gráficos como mostrados no texto.

Segundo (PEREIRA et al., 2012) temos que:

> As características do Geogebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico. Entende-se que as atividades e tarefas propostas na pesquisa constituem situações que possibilitam e estimulam à investigação e o questionamento, convidando o aluno a descobrir, formular questões, procurar respostas, levantar e verificar conjecturas. Espera-se que o desenvolvimento das atividades possibilite aos alunos um despertar pela geometria. Que a interface do software e todas as suas ferramentas possam encorajar os alunos a desenvolver sua capacidade crítica e o professor possa reconhecer e aperfeiçoar a criação e formulação de situações de aprendizagem (PEREIRA et al., 2012, p. 32).

> Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho – a de ensinar e não a de transferir conhecimento. (FREIRE, 1996, p. 52)

É importante ressaltar como professor de ensino básico ou qualquer nível de ensino tem a necessidade de se procurar sempre qualidade de ensino, criando possibilidades pra que isso ocorra.

A ideia principal é de tornar o conteúdo mais dinâmico e valorizar mais as experiências, o raciocínio lógico e o conhecimento prévio de cada aluno. Assim, iremos ao encontro da proposta pedagógica de usar o Geogebra como mecanismo de auxílio, em consonância com a técnica de Modelagem Matemática. O estudo da matemática desenvolve o raciocínio lógico e abstrato, buscando situações que envolvam o cotidiano do aluno, e levando este cotidiano para um contexto de sala de aula.

O governo preconiza que o ensino do conteúdo de funções, seja explanado de maneira mais acessível de fácil entendimento. Com base no PCNs;

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos

> descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

Presente no currículo de matemática da educação básica, o ensino de funções deve, segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio.

> (. . .) garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de Função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.(MAGARINUS et al., 2013, p. 12)

.

Com a experiência em sala, é possível notar que os alunos tem muitas dificuldades em trabalhar com funções, e poucos compreendem o conceito de função. Muitos discentes não conseguem fazer uma leitura gráfica, e essa dificuldade estende ao ensino superior. Segundo (COSTA et al., 2004) “muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao conceito de limite, derivada e integral recaíam na compreensão do conceito de função.”

1.2 Um pouco de Função, levantamento histórico

O conceito de função, ensinado atualmente e presente nos livros didáticos das escolas do Ensino Médio, teve um longo e delicado processo de desenvolvimento histórico. Trazemos aqui, um breve levantamento desse processo.

Segundo (OLIVEIRA, 1997, p.22-23), existem três etapas principais do desenvolvimento da noção de função:

- A Antiguidade: etapa no curso da qual o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades ainda não isolou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.
- Idade Média: Nesta etapa, estas noções são pela primeira vez, e de maneira precisa, expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas durante a qual, como na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, de preferência a uma fórmula.

- o período Moderno: no curso do qual, a partir do fim do século XVI, e especialmente durante o século $XVII$, as expressões analíticas de funções começaram a prevalecer; a classe das funções analíticas geralmente são expressas por meio de soma de séries infinitas, tornando-se logo a principal classe utilizada.

Na Antiguidade deu-se o primeiro estágio da concepção de função. Nesta etapa histórica, iremos descrever sobre alguns pesquisadores e em quê eles contribuiram, começando com os Babilônios em 2000 anos a.C., com surgimento das tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, entre outras. Na Grécia Antiga, encontramos novas formas de aparecimento do conceito de função na matemática e nas ciências naturais: em métodos práticos e não formulados, (comunicados de mestres para aprendiz). Entre os Pitagóricos, surge a ideia de função no estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas, como por exemplo, o comprimento e altura da nota emitida por cordas da mesma espécie, pinçadas com tensões iguais. Posteriormente, durante o período Alexandrino, os astrônomos desenvolveram uma trigonometria completa de cordas, correspondendo à circunferência de uma círculo de raio fixo. Utilizando teoremas de geometria e regras de interpolação, calcularam tabelas de cordas, equivalendo a tabela dos senos que foram colocadas em práticas pelos Hindus. Já os Egípcios construíram tabelas para apresentar correspondências entre uma variável e outra.

Na Idade Média, surge pela primeira vez a noção de função de forma mais genérica, (século XII), nas escolas de filosofia natural em Oxford e Paris. Nestas duas escolas estudaram fenônemos como calor, luz, cor, densidade, distância, velocidade, etc. No século XIV Nicole Oresme $(1323 - 1382)$, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes das formas, que pode ser considerada como a precursora da representação gráfica de função.

No período Moderno, Galileu Galilei $(1564 - 1642)$ deu uma grande contribuição com relação à evolução da noção de função, introduzindo o quantitativo nas representações gráficas. François Viète $(1540 - 1603)$, usou vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmentros. Segundo Fermat $(1601 - 1665)$, "tão logo duas quantidades desconhecidas aparecem em uma igualdade, há um lugar geométrico e o ponto terminal de uma das duas quantidades descreve uma reta ou curva".

Aqui, a função e o argumento são chamados quantidades desconhecidas, este termo significando, na realidade, segmentos de reta de comprimento variando de forma contínua. Descartes $(1596 - 1650)$, desenvolve a noção de função de forma mais detalhada em "La géométrie"onde, pela primeira vez e de modo completamente claro, é sustentada a ideia de que equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas correspondendo aos valores dados da outra. Isaac Newton $(1642 - 1727)$ deu uma interpretação cinemático-geométrica das concepções básicas da Análise Matemática. A primeira vez que a palavra "função"aparece em um manuscrito foi com Leibniz, em 1673, num trabalho intitulado "Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus", sendo que ele já tem a ideia do conceito geral de função, designada pela palavra "relatio". Com Jean Bernoulli, aparece a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica: "Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e constantes"(OLIVEIRA, 1997, p.28).

Euler, no século $XVIII$, foi figura essencial para o desenvolvimento do conceito de função, pois começou por definir as primeiras noções, discriminando as quantidades variáveis das constantes. Distinguiu ainda as funções contínuas das descontínuas e definiu por fim, que: "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, desta quantidade e números ou quantidade constantes", (OLIVEIRA, 1997, p.29).

No século XIX, iniciou-se um processo de fundamentação rigorosa da Análise, que veio a ser conhecido por "Aritmetização da Análise". Condorcet (1778), Cauchy (1789), Lacroix (1797), Fourier (1821), Lobatchevsky (1837) se inspiraram nos trabalhos de Euler e estudaram e aprofundaram a concepção de função, além de corrigirem noções limitadas do mesmo.

Em meados do século XIX, as funções já não precisavam ter a forma "bem comportada"com que os matemáticos estavam acostumados. Em 1837, Dirichlet sugeriu uma definição muita ampla de função:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x. (OLIVEIRA, 1997, p.29).

Essa definição chega perto da noção moderna de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas o conceito de "conjunto"e "número real"ainda não haviam sido estabelecidos, por isso essa definição foi "mal comportada".

A definição geral de função, dada nos cursos de análise matemática no fim do século XIX e no começo do século XX era de Hankel. Com base em Dirichlet a definição é a seguinte:

> Diz-se que y é uma função de x se a cada valor de x de um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y sem que isto exija entretanto que y seja definido sobre todo intervalo pela mesma lei em função de x, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x. (OLIVEIRA, 1997, p. 30).

Em meados do século XX, a filosofia formalista predominou em textos e publicações matemáticas. De acordo com o grupo Bourbaki, a difinição de função é a seguinte:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$, que esteja associado a x na relação

> considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (OLIVEIRA, 1997, p. 30).

Segundo Sophie de Cotret, é necessário deixar bem claro na função as suas componentes de variáção, dependência e correspondência. Porém, com os matemáticos algebristas, a definição de função se afastou dos aspectos "variação"e "dependência", como na seguinte definição: "Uma função f de um conjunto A num conjunto B, é uma regra de correspondência que associa a cada elemento de A no máximo um elemnto de B".

Diante do exposto, e considerando todo o processo de formação do conceito das funções, podemos observar, nos livros didáticos do ensino médio, que estas últimas definições são utilizadas atualmente pelos professores de matemática.

1.3 Estruturação do Trabalho

Este trabalho foi dividido em capítulos, dessa forma, apresentamos no capítulo 2, o conceito, a caracterização e a representação gráfica das principais funções vistas no ensino médio. Além disso, para facilitar na construção, visualização e interpretação dos gráficos, trazemos aqui, as ferramentas do software Geogebra, tais como, o controle deslizante e a sequência de pontos.

Trazemos no capítulo 3, alguns conceitos de Modelagem Matemática, conforme comentado por alguns pesquisadores do assunto. Na sequência, propomos algumas aplicações reais, que podem ser resolvidas utilizando a técnica de modelagem, com o auxílio dos recursos do Geogebra.

Tanto no capitulo 2, quanto no 3, os recursos de controle deslizante e sequência de pontos, do Geogebra, foram amplamente utilizados. Dessa forma, nos apêndices A e B, apresentamos um tutorial de como utilizar esses recursos.

Por fim, apresentamos no capítulo 4, uma conclusão do trabalho, e propostas futuras a serem desenvolvidas pelo autor.

2 Noções Básicas de Funções com a Utilização do Geogebra

2.1 Gráficos

No livro texto da disciplina $MA11$, (LIMA, 2013) mostra que uma função na forma $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada uma função real (pois seus valores são números reais, isto é, seu contradomínio é $\mathbb{R}$) de variável real (pois sua variável independente assume valores reais, isto é, seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$). O gráfico de uma função desta forma é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D, y = f(x)\}$$

Assim, um ponto (x, y) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $x \in D$ e os números reais x e y satisfazem a lei de associação de f. Em outras palavras, o gráco de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação. Por mais básico que possa parecer este fato, nem sempre ele é claramente entendido pelos estudantes no ensino básico - e estas dificuldades de aprendizagem estão relacionados com a forma como gráficos de funções são usualmente ensinados.

Segundo (LIMA, 2013) o principal recurso para traçar gráficos de funções reais apresentado aos alunos no ensino básico é o procedimento baseado em substituição e interpolação. A partir de uma expressão algébrica dada, monta-se uma tabela de valores e, em seguida, os pontos correspondentes são marcados no plano cartesiano e ligados. Em geral, os valores da variável independente escolhidos para a tabela são números inteiros próximos de 0 e os pontos são ligados por meio de segmentos de reta. Este procedimento, efetuado da maneira descrita, envolve pouca reexão matemática sobre a função em questão. Tanto a escolha dos valores para a composição da tabela quanto a interpolação dos pontos obtidos são feitas sem que sejam levadas em consideração as propriedades algébricas e geométricas da função. Portanto, o procedimento de substituição e interpolação reduz-se essencialmente a uma rotina mecanizada, que não contribui para a compreensão do gráfico como o conjunto dos pontos que satisfazem à lei de associação da função, e ainda pode induzir a erros.

2.2 Função Afim

Nesta seção, mostraremos um conceito geral de função e também em subsessões mostraremos as principais funções vistas no Ensino Médio, sendo elas funções Afim, Quadrática, Modular, Exponencial, Logaritmica e Trigonométrica com suas definições a serem exploradas graficamente, utilizando o Geogebra para mostrar com maior ênfase o comportamento dos gráficos.

O conceito de função não é tão fácil quando consideramos a compreensão do mesmo:

> A linguagem formal do professor tenta aproximar o conceito de função das suas definições mais autais, como as de Bourbaki e Dirichlet. Entretanto, em seu uso prático, este tema fica restrito a concepções mais clássicas, como a de Euler. Em ambos os casos, parece haver um dicotomia entre a linguagem matemática utilizada para lidar com o teórico e aquela para expressar as questões práticas.(ZUFFI; PACCA, 2000, p. 7)

Essa dicotomia retrata que o professor deve trazer maneiras facilitadoras pra assimilar o seu uso teórico com prático. Este é um conteúdo importante visto no Ensino Médio das escolas públicas com uma introdução leve no Ensino Fundamental. Segundo (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014) a origem da noção de “função” até os conceitos atuais foi um processo longo e delicado. Demoraram-se vários séculos até que de fato conseguiu-se obter conceitos aceitáveis. Somente no início do século XX passou-se a ter uma definição admissível. Atualmente temos a seguinte definição (LIMA, 2008):

> Uma função de $A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que função assume em x (ou no ponto x). (LIMA, 2008, p. 13).

Nos dias de hoje, (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014) as funções podem ser aplicadas e relacionadas em todas as ciências, por exemplo, na física, química, biologia entre outras. São excelentes ferramentas para solucionar e representar questões atuais, simular graficamente uma situação problema como, por exemplo, obter uma função custo, receita ou lucro. Isto a torna uma importante ferramenta para modelar situações encontradas no cotidiano, pois sua aplicação no campo da Matemática e em outras ciências é vasta. Essas aplicações, na maioria das vezes, provém da utilização de modelagem matemática. Sendo, o estudo de funções atreladas as aplicações. Além disso, sobre o estudo de funções,

> O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problemas, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da matemática. (Brasil 2006, p.121) (BARRETO, 2008)

Nas Orientações Curriculares (2006) o estudo de funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola: – modelos Linear, Quadrático e Exponencial. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sangüínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc).

Fica claro que o conteúdo de funções é transmitido em alguns casos de maneira tradicional, quase sempre seguindo a sequência dos livros didáticos, na realialidade não é boa. Tais conteúdos são tragos aleatoriamente, sem conexão com realidade fugindo das Orientações Curriculares.

Segundo (BARRETO, 2008) o contexto da matemática escolar com vistas as aplicações e funções podem ser entendidas como um conceito que trata de problemas de variação e quantificação de fenômenos. Em outras palavras, o estudo das funções pode ser percebido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, uma variável representa os valores do domínio de uma função, surgindo a noção de variáveis dependentes e independentes.

2.3 Funções Afins

Definicão 1. *Segundo (LIMA, 2013), uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, chama-se afim quando existem constantes a,b* $\in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Onde termo a coeficiente angular e b coeficinete linear da função.*

Em alguns livros didádicos do Ensino Médio é dada função Afim como função do 1^0 grau. Vale ressaltar que função não tem grau e sim polinômios.

A função Identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo x $\in \mathbb{R}$, é Afim. Também são Afins as translações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. São ainda casos particulares das funções Afins: funções Lineares $f(x) = ax$, e as funções Constantes $f(x) = b$.

No livro texto da disciplina MA11 (LIMA, 2013) temos que:

Definicão 2. *uma função* $f : X \to \mathbb{R}$*, chama-se: crescente quando* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$*, decrescente quando* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$*.*

Para (IEZZI et al., 2002) traz que:

Definicão 3. *a função afim é crescente (decrescente) se, e somente se, o coeficiente angular (taxa variação) for positivo (negativo).*

Demonstração. $f(x) = ax + b$ é crescente $\iff \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\ (x_1 \neq x_2) \iff \dfrac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0\ x_1 \neq x_2 \iff \dfrac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0\ (x_1 \neq x_2) \iff a > 0.$ □

A caracterização da função afim (conforme livro texto Números e Funções) é dada da seguinte forma:

Teorema 1 (Função Afim). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função Afim.*

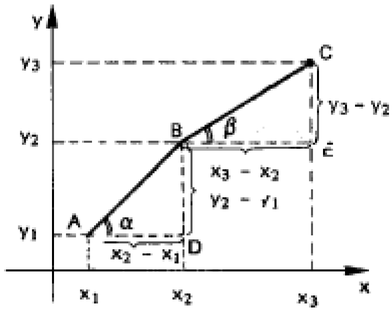
Demonstração. Suponhamos que a função f seja crescente. Então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = 0$. Além disso, quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos $\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x)$ $= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)$

$= \varphi(h) + \varphi(k)$.

Logo pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a.h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A recíproca é óbvia. Se $f(x) = ax + b$ então $f(x+h) = -f(x) = ah$ não depende de x. A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que "a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$. Outra maneira de exprimir esta hipótese consiste em dizer que os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x. □

A interpretação gráfica é muito importante neste âmbito de estudo. O gráfico de cartesiano da função Afim $f(x) = ax + b, (a \neq 0)$ é sempre uma reta oblíqua. De fato, o gráfico de uma função Afim $f(x) = ax + b$.



Fonte:(IEZZI; MURAKAMI, 1993)

Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b(a \neq 0)$ e $(x_1, y_1), (x_2, y_2)e(x_3, y_3)$, respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos. Para provarmos que os pontos A, B e C percentecem a mesma reta, mostraremos, inicialmente que os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes.

De fato:

$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b$

$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b$

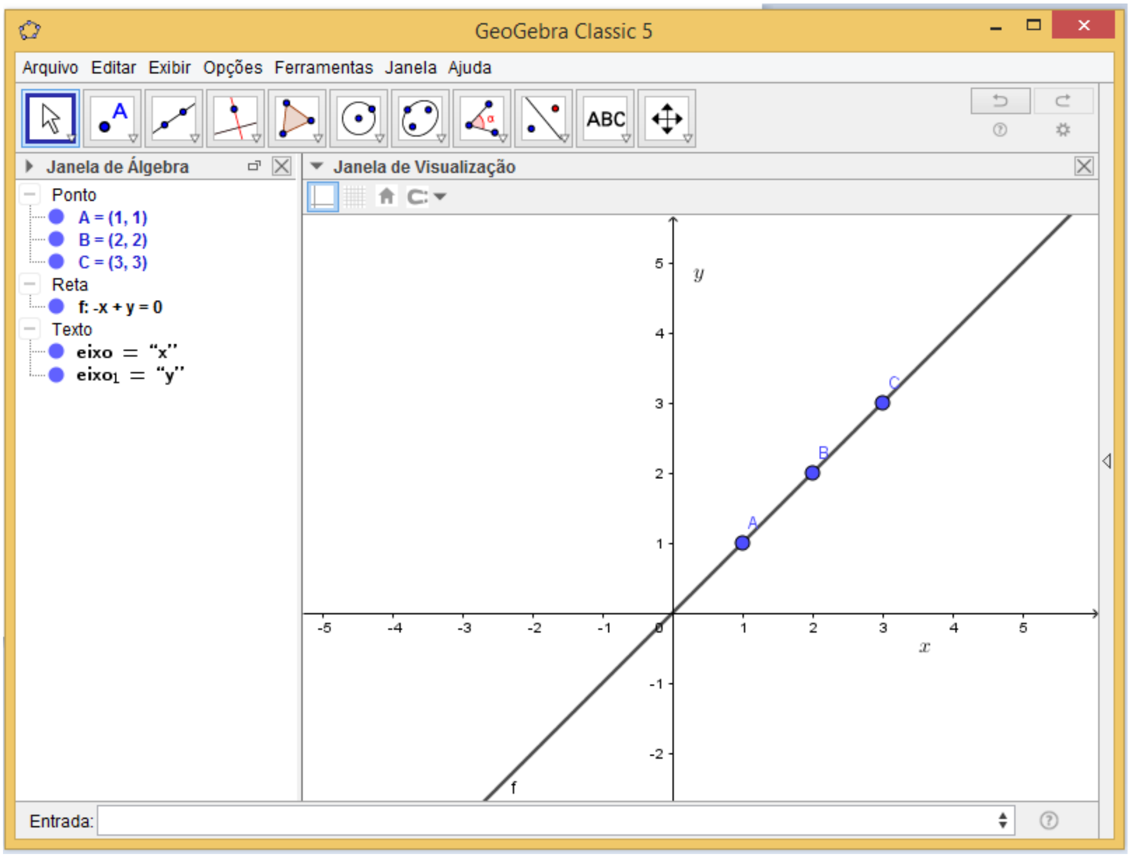
$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$\begin{cases} y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \\ y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais. Então são semelhantes a, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os três pontos A B e C estão alinhados. Os

Figura 1 – Pontos A,B e C alinhados



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

pontos A,B e C ambos na figura 1 estão alinhados, portanto, pertencem a mesma reta.

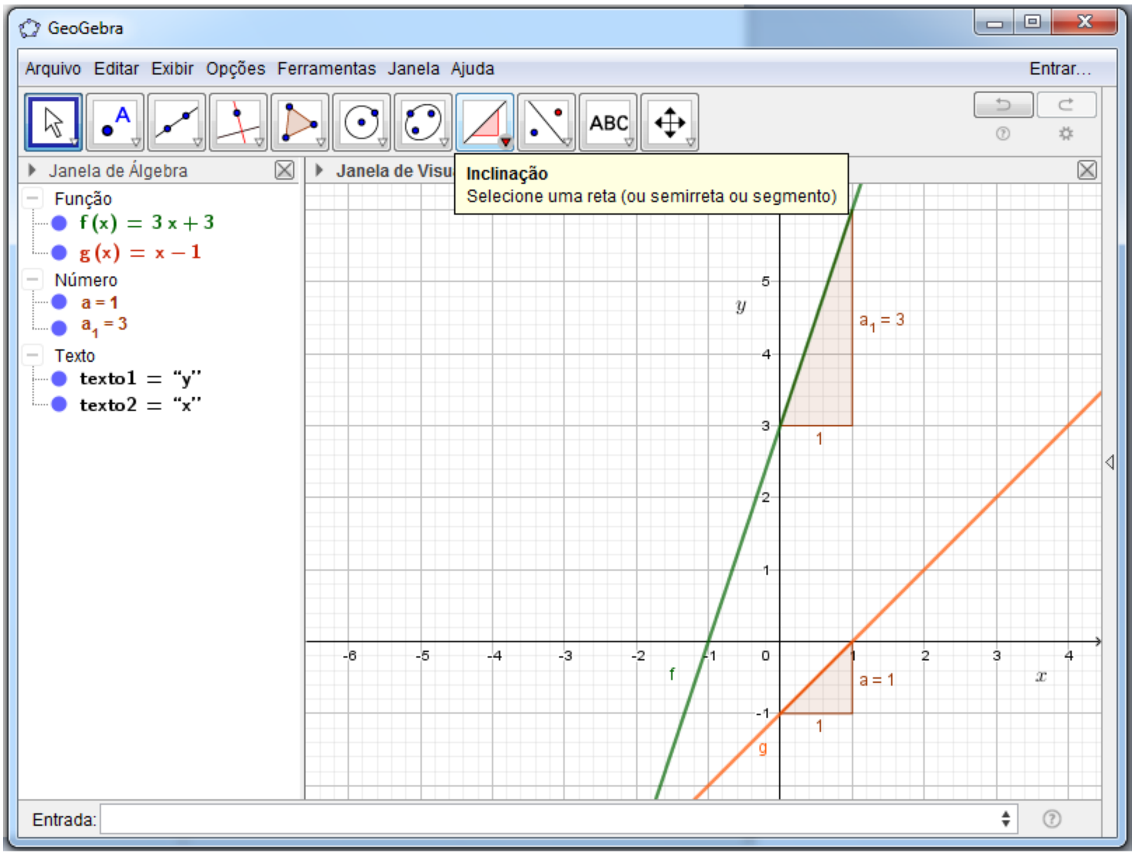
2.3.1 Coeficientes ou Taxa de variação de uma Função Afim

Já provamos anteriormente que o gráfico de uma função Afim do tipo $y = ax + b$ é uma reta. É possível, mediante critérios como os que apresentaremos logo a seguir, saber de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja Afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Conforme (LIMA, 2013) no livro texto da disciplina de MA11, obtém-se b como valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ às vezes se chama o valor inicial da função f. Quanto ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função assume em dois pontos distintos, porém arbitrários: x_1 e x_2. Dada $f(x) = ax + b$ temos:

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Em outras palavras sabemos, se $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, e que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ com $(x_1 \neq x_2)$. Determinar os coeficientes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, basta resolvermos o sistema: $ax_1 + b = y_1$ e $ax_2 + b = y_2$, com os termos a e b incógnitas, logo teremos, $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $b = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$. Dados $x, x+h \in \mathbb{R}$ com $h \neq 0$, o número $a = [f(x+h) - f(x)]/h$ chama-se a taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo $x, x+h$. Em alguns livros didáticos ensino médio utiliza-se o termo a com o nome de coeficiente angular da reta, já no ensino superior, esse termo é apropriado, porém a outras interpretações para ele, utiliza-se com o nome de taxa de variação (ou taxa crescimento), em Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 2 – Gráficos Função Afim Inclinação da Reta



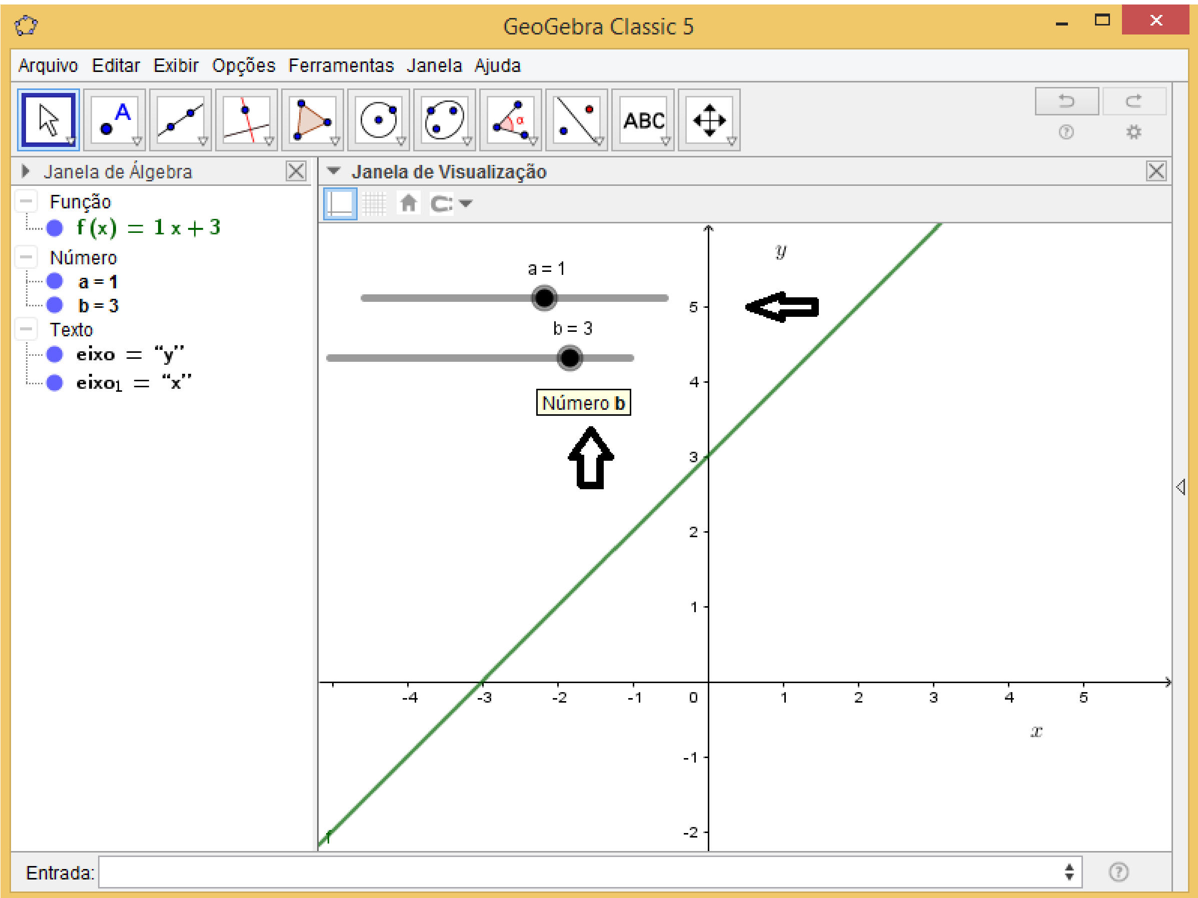
Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Observando a figura 2, onde foram inseridas as funções $f(x) = 3x+3$ e $g(x) = x-1$. Primeiramente, utilizamos uma ferramenta chamada "inclinação", ao selecionar a reta ou segmento, o software nos mostra o resultado do valor do coeficiente angular da reta. Na função f temos $a_1 = 3$ e na função g temos $a = 1$, facilitando o entendimento e a visualização dos termos a e b da função Afim. Temos a translação vertical na função f

três unidades acima e na g uma abaixo. O termo b é o intercepto de y, onde a reta toca no eixo Oy.

Didaticamente, podemos usar outra ferramenta importante que é a do controle deslizante. Na prática, nos termos a e b da função Afim podem ser inseridos quaisquer valores que o usuário determinar em um intervalo, podendo ainda fazer uso de animações. Permite também a vizualização concreta para identificar os termos a e b.

Figura 3 – Gráficos Função Linear Utilizando Controle Deslizante a e b qualquer



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 3, foi inserida uma função Afim $f(x) = ax + b$, onde foi utilizada a ferramenta "controle deslizante"para os termos a e b, indicados na figura pelas setas. Analisando os componentes da função, temos que o coeficiente angular ou taxa de variação $a = 1$ e termo linear ou intercepto y onde o gráfico passa pelo eixo das ordenadas $b = 3$. Observando a construção da figura 3 temos a função $f(x) = 1x + 3$. Utilizar software e a técnica do "controle deslizante"nos permite fazer variações com os esses dois termos $a, b \in \mathbb{R}$. Essa variação de valores facilita a interpretação gráfica que, se fosse realizada pelo método tradicional, não seria possível uma observação com tal clareza.

Ao substituir $x = 0$ na a função $f(x) = 1x + 3$ utilizando o método tradicional, veremos que o gráfico da função Afim é um reta, e para construção de uma reta é necessário ter no mínimo dois pontos. Primeiramente temos o primeiro ponto (0,f(0)):

$$\begin{aligned} f(x) &= x+3 \\ f(0) &= 0+3 \\ f(0) &= 3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

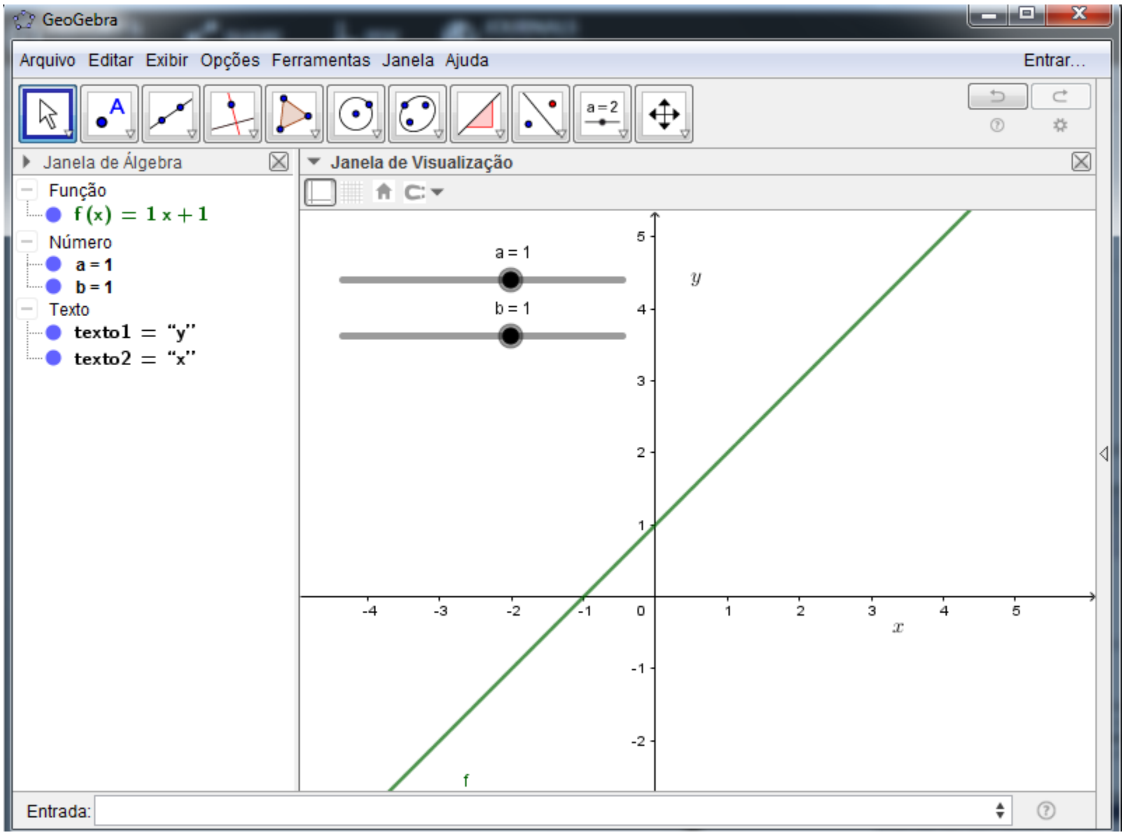
esse ponto nos mostra onde é interceptado o eixo das ordenadas. Segundo ponto é fazer $f(x) = 0$ temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x+3 \\ 0 &= x+3 \\ -3 &= x+3-3 \\ -3 &= x \\ x &= -3 \end{aligned}$$

esse valor é a raiz ou zero da função Afim, onde intercepta o eixo das abscissa.

Diante disso, podemos afirmar que a resolução tiveresse sido analisada pelo software, o entendimento e a visualização seria mais amigável.

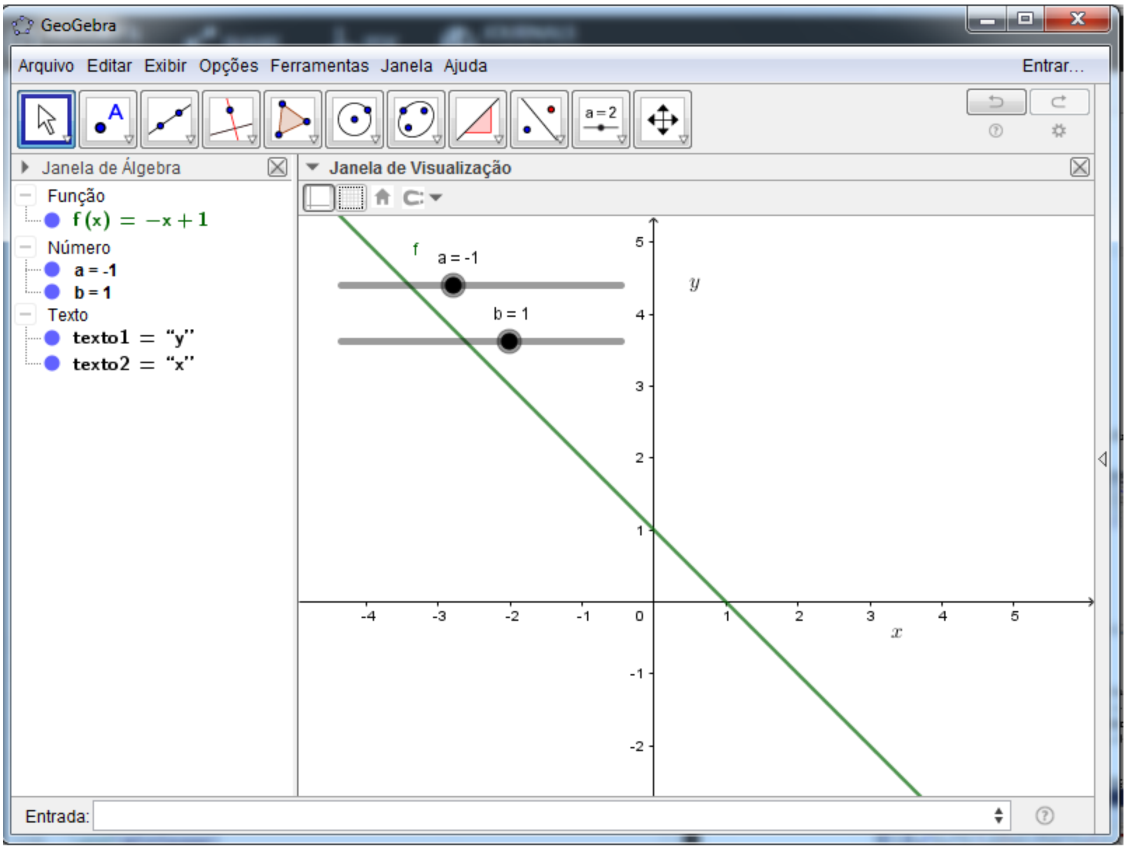
Figura 4 – Gráficos Função Afim inserindo "Controle Deslizante"$a > 0$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 4 temos uma função Afim do tipo $f(x) = ax + b$ onde $f(x) = 1x + 1$. Aplicando a técnica do "controle deslizante"nos termos a e b da função Afim, podemos alterar os valores positivamente ou negativamente verificando o comportamento do gráfico. Na figura 4 temos uma função crescente onde o termo "$a > 0$"e termo "b intercepto y"significa onde é interceptado no eixo Oy. No caso acima temos $a = 1$ e $b = 1$.

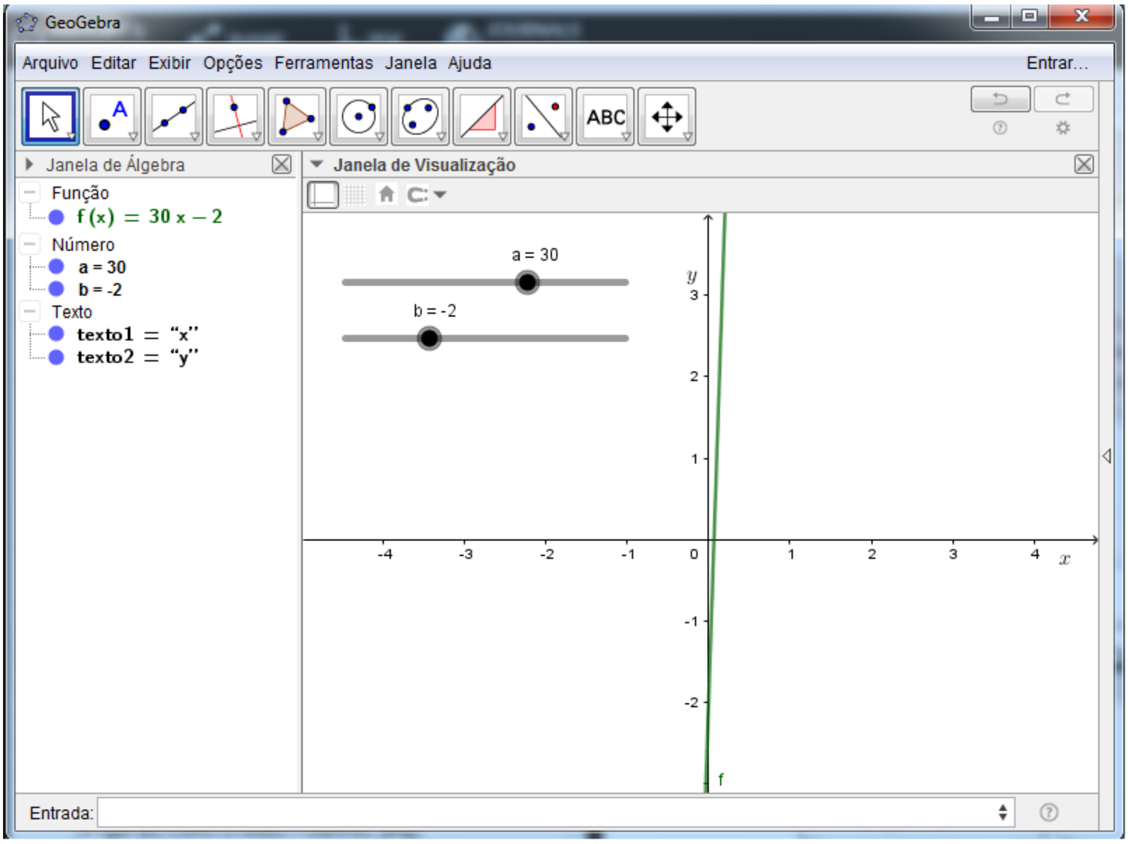
Figura 5 – Gráficos Função Afim Inserindo Controle Deslizante $a < 0$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 5, temos uma função Afim do tipo $f(x) = -x + 1$, onde temos $a < 0$ e $b > 0$ como o termo $a < 0$, f é uma função decrescente. Ao aplicarmos a técnica do "controle deslizante", podemos modificar os valores pra verificação do comportamento gráfico.

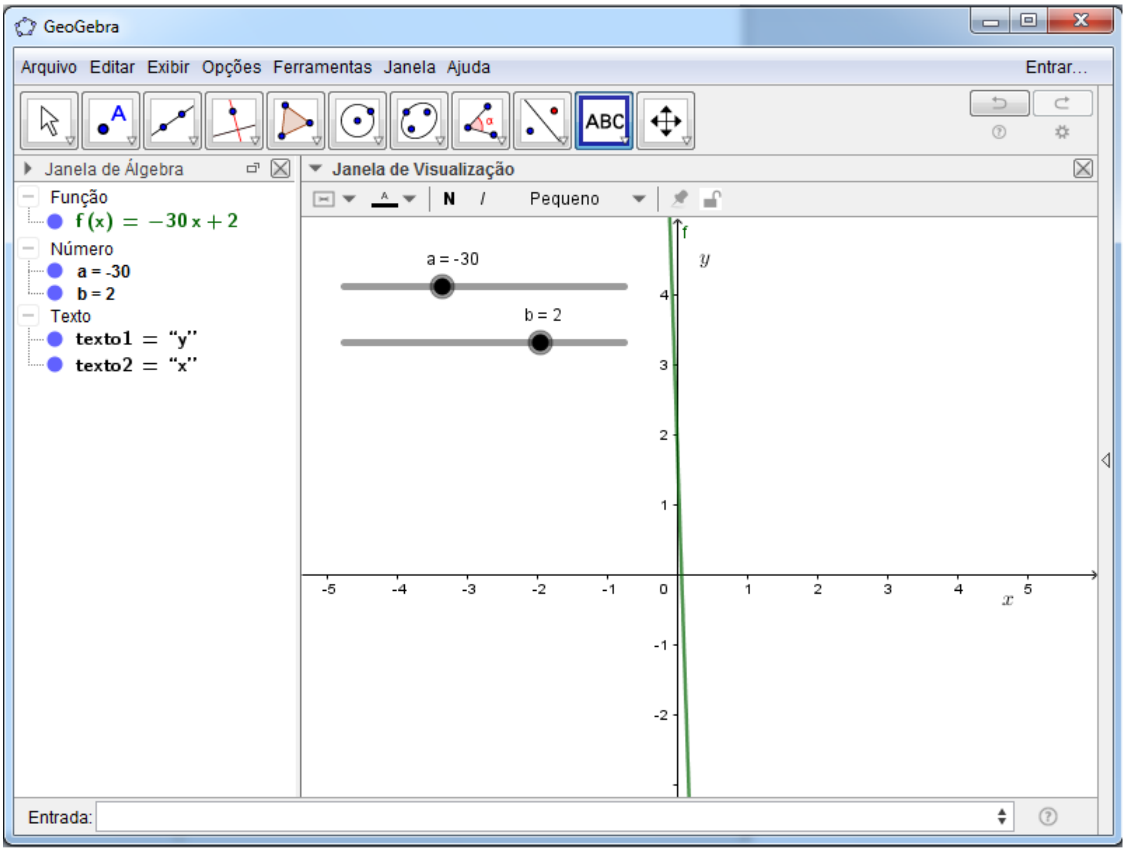
Figura 6 – Gráficos Função Afim com coeficiente a com valor alto



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 6 temos a movimentação do coeficiente a até 30, onde foi utilizado a ferramenta do "controle deslizante"para variar o valor. Didaticamente, a vizualização gráfica, nos ajuda a mostrar aos alunos que, quanto maior a taxa de variação a, maior a tendência de aproximação da reta ao eixo Oy.

Figura 7 – Gráficos Função Afim com Coeficiente a muito baixo



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

As figuras 4 e 5 ilustram bem como o uso do software facilita mostrar os termos a e b na função Afim. Na figura 4 temos $f(x) = 1x + 1$, onde "taxa variação", o coeficiente angular, é o valor igual $a = 1$, e o termo onde o eixo Oy foi interceptado, assume o valor $b = 1$. O gráfico é crescente devido o coeficiente angular ser positivo $a > 0$. No gráfico da função $f(x) = -x + 1$, onde a "taxa variação"tem o valor igual a $a = -1$ e o termo $b = 1$, onde eixo Oy é interceptado. Gráfico é decrescente quando "coeficiente angular", o coeficente angular for negativa, ou seja, $a < 0$.

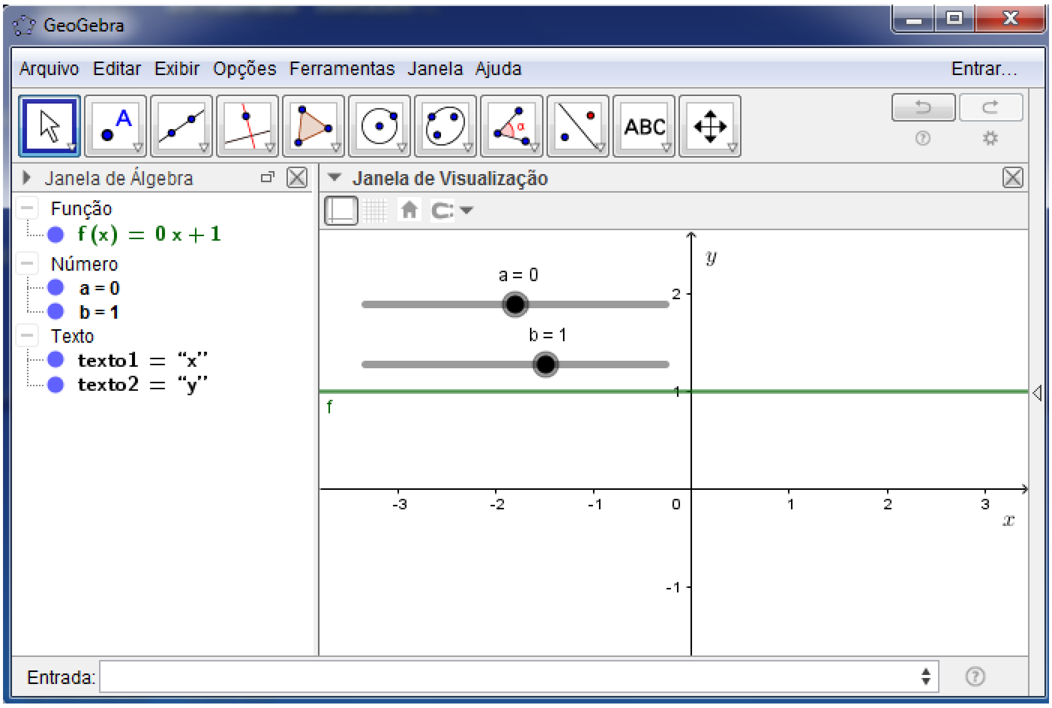
Nas figuras 6 e 7 foi utilizada a ferramenta "controle deslizante", podemos observar que a função $f(x) = 30x - 2$, tem o coeficiente angular $a = 30$, tendo $a > 0$, logo a função é crescente, percebemos com as simulações feitas no software, que quanto maior for a "taxa de variação", mais próxima ao eixo Oy ela tende, nunca será igual, pois x_1 e x_2, tem que ser distintos entre si. Vale ressaltar que o coeficiente angular da reta é chamada de tangente do ângulo formado entre o eixo Ox e a reta $y = ax + b$, termo usado na Geometria Analítica, outro fato importante é que, a tangente de $90°$ não existe, reforçando que independente o valor do coeficiente a assuma, nunca coincide com eixo Oy.

2.4 Função Constante

Definicão 4. *A função Constante associa-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$. Temos: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \to c$.*

Para melhorar o entendimento da função Constante será utilizado o software Geogebra para demonstração gráfica. Importante salientar que a função Constante é uma função $f(x) = ax + b$; neste caso $a = 0$.

Figura 8 – Gráficos Função Constante



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

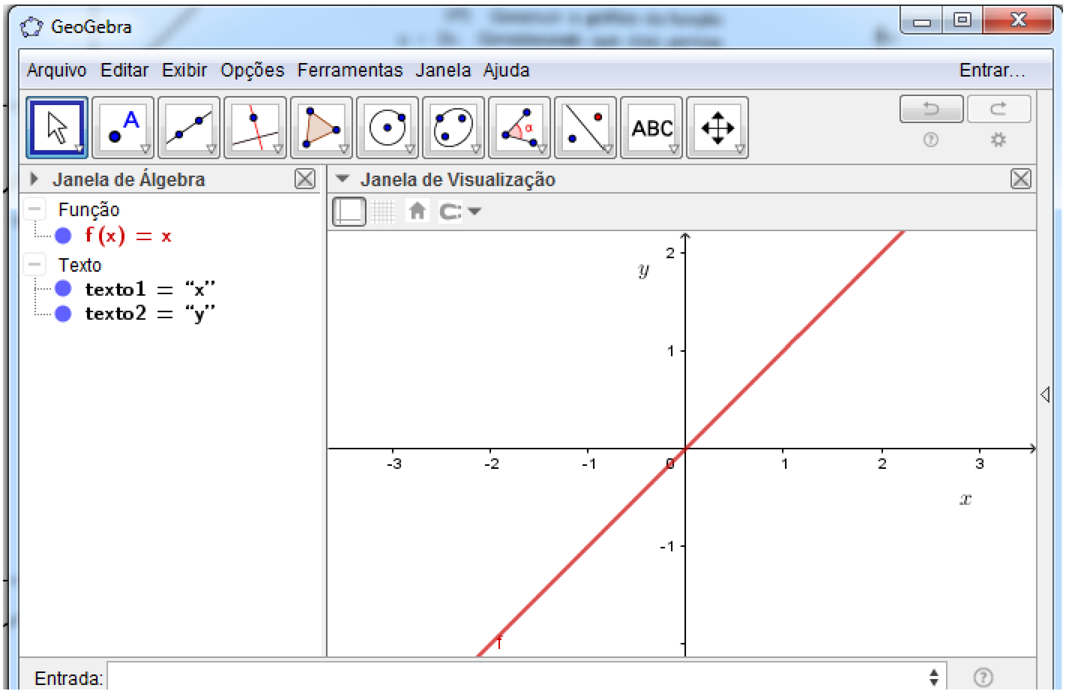
Com análise da figura 8, o gráfico da função Constante, podemos notar que é uma reta paralela ao eixo Ox. Houve a translação vertical, ocorrida uma unidade acima do eixo Ox. Logo, percebemos também que ao mudar o coeficiente angular da reta, de tal forma que a também é zerado. Desta forma, encontramos apenas o termo b, chamada função Constante.

2.5 Função Identidade

Definicão 5. *Segundo (IEZZI; MURAKAMI, 1993) uma função Identidade, é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Isso implica que cada elemento de $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x.*

O gráfico dessa função Identidade é uma reta bissetriz do 1^0 e 3^0 quadrantes. A imagem da função $f(x) = x$ é toda a reta real.

Figura 9 – Gráficos Função Identidade



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

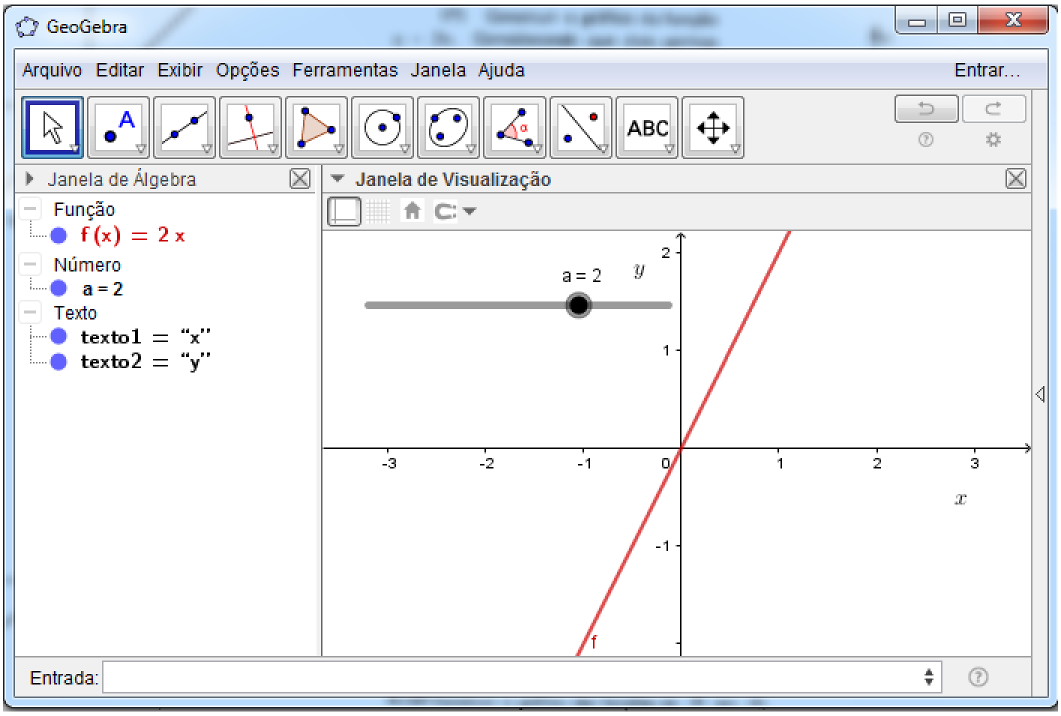
Neste caso de função Identidade na figura 9 o valor dado para x tem de ser igual a $f(x)$.

2.5.1 Função Linear

Definicão 6. *Segundo (IEZZI; MURAKAMI, 1993), uma função linear, é uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Onde* $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *e* $a \in \mathbb{R}$.

Na construção do gráfico da função Linear, observa-se que sempre passa pela origem a $Im = \mathbb{R}$. No exemplo, usando o software Geogebra, temos uma função do tipo $f(x) = 2x$ que passa pela origem idependente do valor atribuído ao coeficiente a. Logo abaixo percebe-se o valor do coeficiente a positivo e negativo, sempre passando pela origem das posições.

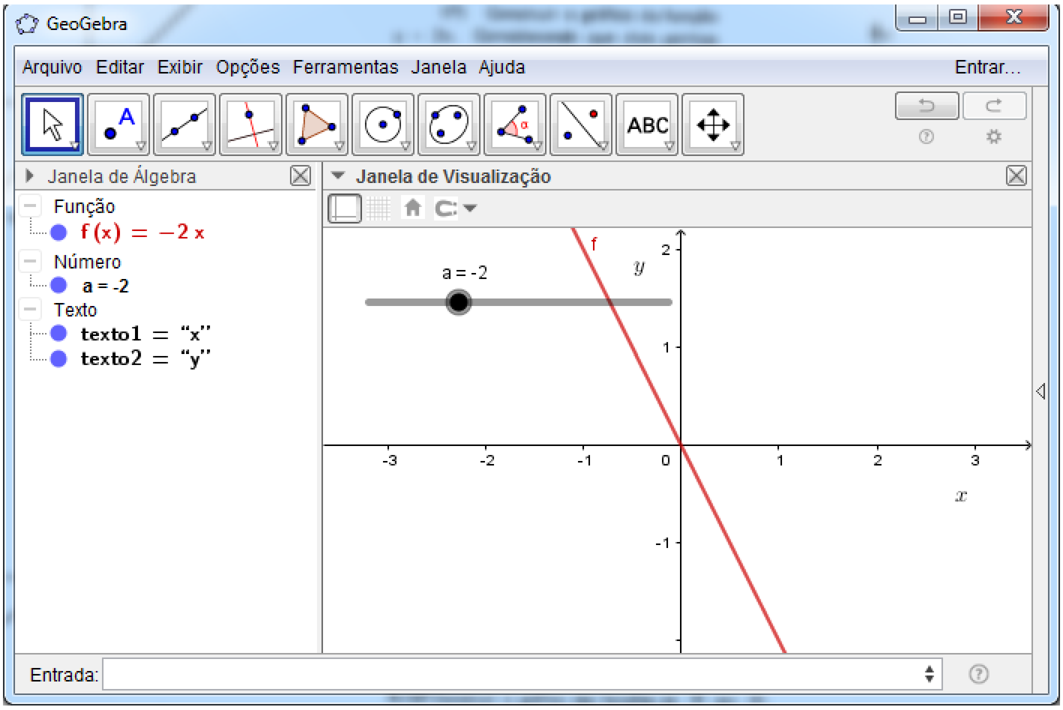
Figura 10 – Gráficos Função Linear Utilizando Controle Deslizante $a > 0$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 10, foram utilizadas algumas ferramentas do software Geogebra, como o "controle deslizante". Essa ferramenta permite inserir intervalos fazendo com que o coeficiente a na função se desloque com facilidade, tornando a visualização um excelente meio para se entender o significado da alteração do coeficiente a de um gráfico.

Figura 11 – Gráficos Função Linear Utilizando Controle Deslizante $a < 0$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Ao utilizar o Geogebra na figura 10 e 11 para ilustrarmos o comportamento do gráfico da função Afim, é interessante explorarmos coisas que não faríamos pelo método tradicional do quadro e giz. Fazer simulações utilizando o "controle deslizante"permite mudar o coeficiente $a > 0$ e $a < 0$ com muita facilidade, basta inserirmos intervalos positivos e negativos e em seguida arrastar.

2.6 Funções Quadráticas

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, o problema era encontrar as raízes das equações, e encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto.

Achar as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é, também, um conhecimento milenar (LIMA, 2013) salienta que até o fim do século XVI, não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês (1540 a 1603). Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos com coeficientes numéricos. Hoje a definição da função Quadrática está associada com um trinômio do segundo grau.

Definicão 7. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Quadrática (LIMA, 2013) quando são dados números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Pode-se observar que os coeficientes a, b e c da função Quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Em outras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a', b = b'$ e $c = c'$.

Seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = c'$. Então, cancelando c e c', tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$.Neste caso, cancelando x, obtemos $ax + b = a'x + b'$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, vem $a+b = a'+b'$ e $-a+b = -a'+b'$, donde concluímos $a = a'$ e $b = b'$.

A observação acima nos permite identificar uma função Quadrática com um trinômio do segundo grau. Há uma diferença sutil entre esses dois conceitos; um trinômio do segundo grau é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A palavra "formal"significa que a letra X é apenas um símbolo, sendo X^2 um outro modo de escrever XX. Por definição, dois trinômios $aX^2 + bX + c$ e $a'X^2 + b'X + c$ são iguais quando $a = a', b = b'$ e $c = c'$. Em última análise, um trinômio é o mesmo que um terno ordenado de números reais (a, b, c).

A cada trinômio corresponde a função Quadrática definida por $x \mapsto ax^2 + bx + c$. A obervação anterior significa que essa correspondência (trinômio)$\mapsto$ (função Quadrática) é biunívoca. Pela definição de função Quadrática, tal correspondência é automaticamente sobrejetiva.

2.6.1 A Forma Canônica do Trinômio

Demonstraremos duas maneiras resolutivas da equação quadrática conhecida como Fórmula de Báskara.

Segundo (LIMA, 2013) considerando o trinômio,

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $(x + \frac{b}{2a})^2$. Completando quadrados, temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Essa maneira de escrever o trinômio do segundo grau é chamada forma canônica. Por meio dela encontramos algumas equivalências para determinar as raízes.

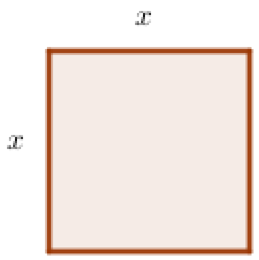
$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \Longleftrightarrow \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} &= 0 \Longleftrightarrow \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Longleftrightarrow \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longleftrightarrow \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Dessas equivalências, resulta que, se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo, logo a equação $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes distintas

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} \\
\beta &= \frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a}
\end{aligned}
$$

como $\alpha < \beta$, cuja soma é $s = \frac{-b}{a}$ e cujo produto é $p = \frac{(b^2 - \Delta)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. A média aritmética das raízes é $\frac{-b}{2a}$, ou seja, as raízes α e β são equidistante do ponto $\frac{-b}{2a}$. Quando o $\Delta = 0$, a equação dada possui uma única raiz, conhecida como raiz dupla, igual $\frac{-b}{2a}$.Caso tenhamos o $\Delta < 0$, significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x - \left(\frac{b}{2a}\right)$ não pode ser negativo. Usando o Geogebra e outros recursos como o programa "Paint", é necessário a utilização alguns conceitos de geometria plana áreas especificamente, com análise nas figuras, nota-se que é possível chegarmos na forma Canônica.

Figura 12 – Quadrado cujo lado mede x



Fonte: Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Figura 13 – Quadrado acrescido um retângulo

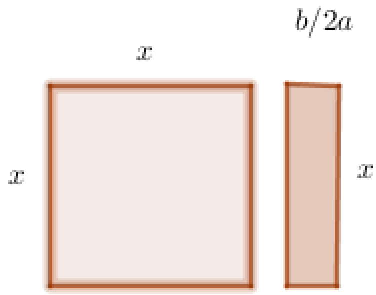
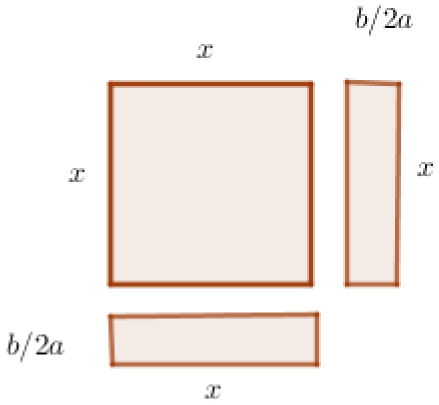
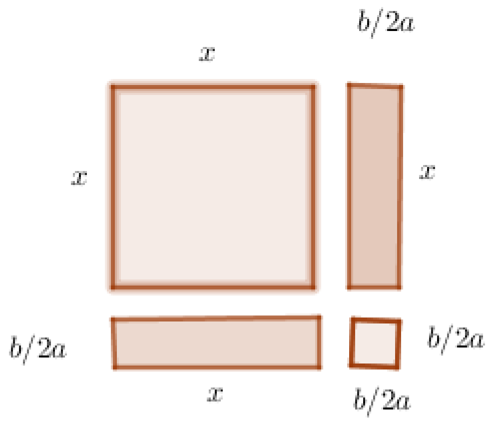


Figura 14 – Quadrado acrescido dois retângulos iguais



Fonte: Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Figura 15 – Quadrado final



Na figura 12 temos um quadrado de lado x e sua área $S = x^2$. Na figura 13, logo é acrescenta da outra figura plana o retângulo cujo a base vale $\dfrac{b}{2a}$ e sua altura x mesmo valor do lado do quadrado tendo sua área base vezes altura $S = \dfrac{b}{2a}.x$.

Na figura 14, são acrescentadas dois retângulos com a mesma medida do anterior, e na figura 15 é acrescentado um quadrado com as medidas de lado $\frac{b}{2a}$ Somando todas as áreas temos: $x^2 + \dfrac{b}{2a}.x + \dfrac{b}{2a}.x + \dfrac{b}{2a}.\dfrac{b}{2a}.x$. Obervando a Figura 15, ao se juntar todas as figuras, forma-se um quadrado com os lados $x + \frac{b}{2a}$ e sua área total $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, logo,

$x^2 + \dfrac{b}{2a}.x + \dfrac{b}{2a}.x + \dfrac{b}{2a}.\dfrac{b}{2a}.x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}.x + \dfrac{b^2}{4a^2}$
temos a equação

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0$$

dividindo ambos os lados por a

$$x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} \;=\; 0$$

adicionando $-\dfrac{c}{a}$ a ambos os lados

$$x^2 + \frac{b}{a}.x = -\frac{c}{a}$$

,

completando os quadrados, adicionar $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ em ambos lados

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}.x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

acrescentando $-\frac{b}{2a}$ a ambos os lados, logo,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

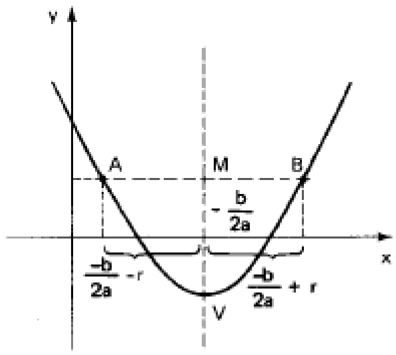
onde x é a raíz da equação.

2.6.2 O Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função Quadrática é uma parábola. O foco aqui é estudar o comportamento e interpretação do gráfico não iremos esmiuçar sobre conceitos de Parábola.

Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004) o gráfico de uma função Quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e passa pelo vértice.

Figura 16 – Gráficos Função Quadrática Simetria da Parábola



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Analisando a figura 16 os pontos da reta perpendicular ao eixo Ox que passa pelo vértice da parábola obedecem a equação $x=\frac{-b}{2a}$, para (IEZZI; MURAKAMI, 1993) todos os pontos dessa reta tem abscissa $\dfrac{-b}{2a}$. Para mostrar que a parábola tem o eixo de simetria na reta $x = \dfrac{-b}{2a}$, devemos mostrar que dado um ponto $A\left(\dfrac{-b}{2a} - r, y\right)$ com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B\left(\dfrac{-b}{2a} + r, y\right)$, também pertencente ao gráfico da função. Tomando a função Quadrática na forma Canônica.

$$f(x) \quad = \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que $A\left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico temos:

$$\begin{aligned}
y &= f\left(\frac{-b}{2a} - r\right) = \\
a\left[\left(\frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{-\Delta}{4a^2}\right] &= a\left[(-r)^2 - \frac{-\Delta}{4a^2}\right] = \\
a\left[(r)^2 - \frac{-\Delta}{4a^2}\right] &= a\left[\left(\frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 \frac{-\Delta}{4a^2}\right] = \\
f\left(\frac{-b}{2a} + r\right)
\end{aligned}$$

provando que $B\left(\dfrac{-b}{2a} + r, y\right)$ tambem pertence ao gráfico da função.

Para esboçar o gráfico da função Quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, devemos segundo, para (IEZZI; MURAKAMI, 1993) seguir algumas informações preliminares:

- O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = \dfrac{-b}{2a}$ perpendicular ao eixo Ox.

- Se $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada pra cima e para baixo respectivamente.

- Zeros (raízes) da função.
  Se o $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos.

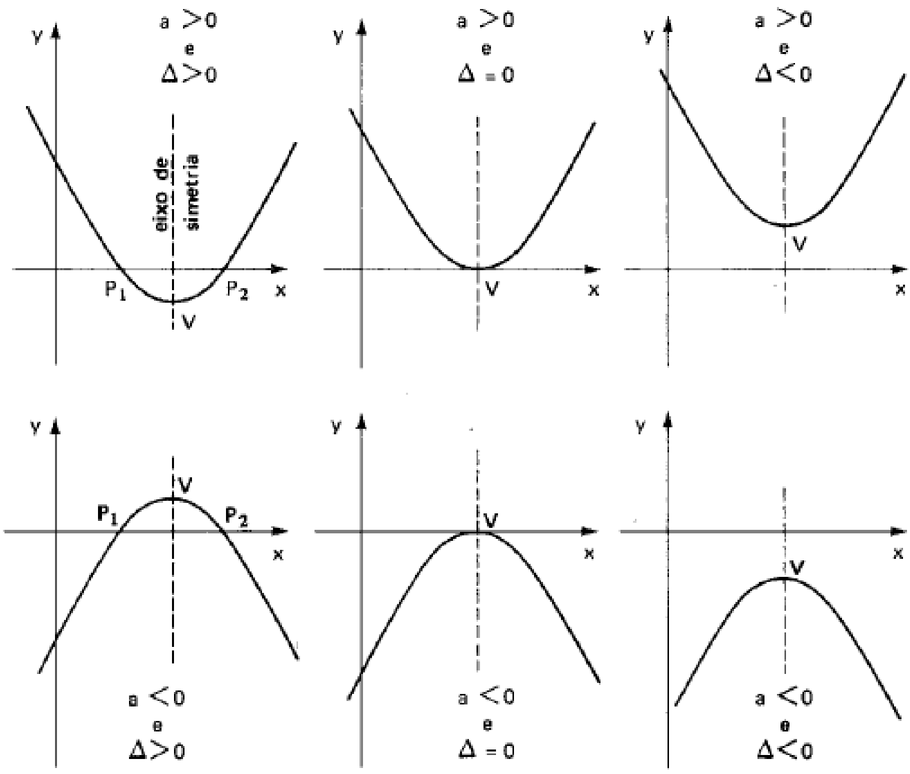
  $$P_1\left(\frac{-b - \Delta}{2a}, 0\right) \text{ e } P_2\left(\frac{-b + \Delta}{2a}, 0\right)$$

  Se o $\Delta = 0$ a parábola tangencia o eixo dos Ox no ponto $P\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$
  Se o $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo Ox.

- O Vértice da parábola é o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$ que é o ponto de máximo se $a < 0$ ou é o ponto de mínimo se $a > 0$.

Seguem-se os tipos de gráficos que podemos obter:

Figura 17 – Gráficos função Quadrática Obervando Concavidade



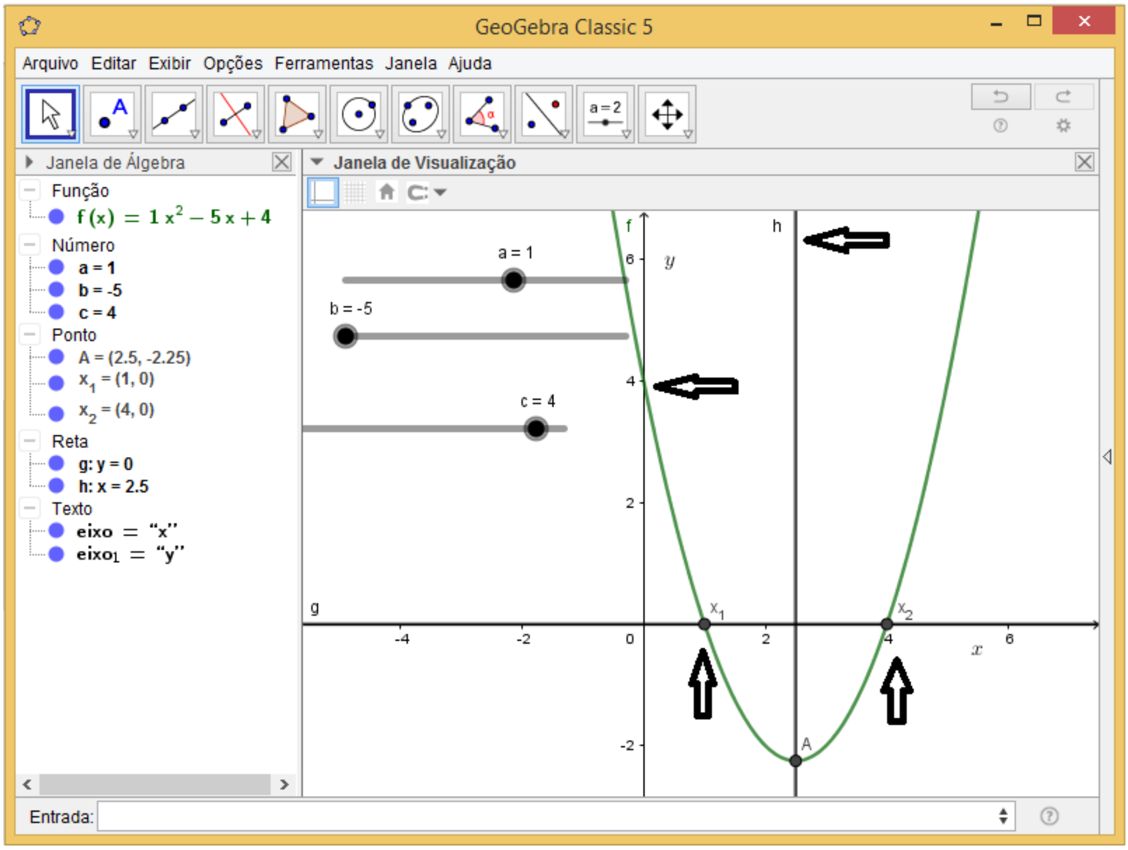
Fonte:(IEZZI; MURAKAMI, 1993)

Com análise da figura 17 onde o coeficiente $a > 0$ e o discriminante $\Delta > 0$ temos duas raízes $P_1 \neq P_2$ interceptando eixo Ox. Quando $a > 0$ e $\Delta = 0$ há uma única raiz $P_1 = P_2$, e quando $a > 0$ e $\Delta < 0$ não há raiz real. Está análise também poderá ser feita quando o coeficiente for $a < 0$ $\Delta > 0$, havendo duas raízes $P_1 \neq P_2$. Quando $a < 0$ e $\Delta = 0$, há uma única raiz $P_1 = P_2$, e quando $a < 0$ e $\Delta < 0$ não há raiz real. A única diferença está na concavidade $a > 0$ a concavidade é voltada pra cima, $a < 0$ a concavidade é voltada pra baixo.

O software Geogebra nos permite verificar o comportamento da função Quadrática em todos âmbitos, pode-se simular valores para os termos a, b e c usando ferramenta "controle deslizante"e explanar para o aluno o que ocorre, mostrar casos para coeficiente, $a > 0$ e $a < 0$, $b > 0$ e $b <$ e $c > 0$ e $c < 0$ o que acontece com parábola, simular termo a termo mostrando na prática. Posteriormente, ao encontrar as raízes da equação pelo método resolutivo, mostrar na prática onde irá interceptar no eixo Ox, onde intercepta no eixo Oy, graficamente fica muito atrativo. As aulas de matemática usando a tecnologia fica mais atrativa, conseguimos utilizar mecanismos que está disponível e gratuito caso software livre Geogebra, trazer o aluno pra que ele mesmo produza, resolva os problemas envolvendo função Quadrática.

Observa-se alguns exemplos usando software:

Figura 18 – Gráficos Função Quadrática com uso Controle Deslizante



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 18, é mostrado os componentes importantes de função Quadrática, com todos os termos a, b e $c \in \mathbb{R}$, considerada completa. Inserindo essa função no Geogebra, automaticamente é gerado um "controle deslizante"para todos os coeficientes.

Analisando a função $f(x) = x^2 - 5x + 4$, notemos que os valores escolhidos foram $a = 1, b = -5$ e $c = 4$. Vale ressaltar que os coeficientes podem variar conforme a necessidade do autor. Esse manuseio colabora com a aprendizagem, podendo sanar todas as dúvidas referente a concavidade, onde o coeficiente a vai determinar se a concavidade será voltada pra cima se $a > 0$ ou pra baixo se $a < 0$. Se a função Quadrática possui raízes reais, cabe atentarmos onde o eixo das abscissas será interceptado. Assim podemos observar onde o gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas. Sabemos que ao fazer $x = 0$ na função, visualmente facilitamos o entendimento, sendo possível a observação dos pontos máximo e mínimo da função.

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

fazendo $f(x) = 0$ temos:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

agora solucionando usando o método resolutivo, temos:

- $a = 1$;
- $b = -5$;
- $c = 4$.

aplicando o método resolutivo para encontrar as raízes,

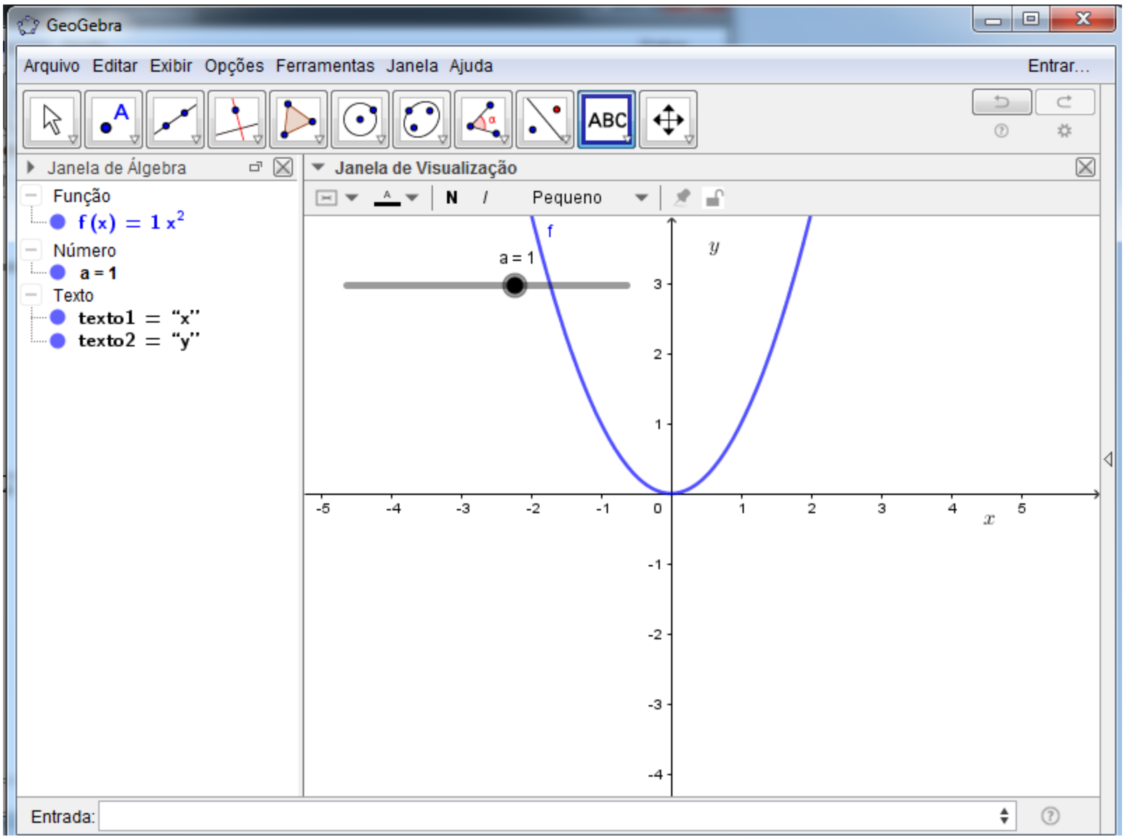
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde x são as raízes da equação. Encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$. Nota-se que $a > 0$ a concavidade é voltada pra cima. Se $x = 0$ a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$. Encontramos o valor 4, que será o ponto onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas. O ponto A na figura 18 será x do vértice e y do vértice representa ponto máximo ou mínimo da função se $a > 0$ encontramos ponto mínimo; $a < 0$ ponto máximo. Vale ressaltar que a reta h na figura 18 é o eixo de simetria da parábola. O ponto A na figura 18 é ponto mínimo da função Quadrática. Pra calcular máximo e mínimo basta substituir os coeficientes a, b e o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\begin{aligned} xv &= -\frac{b}{2a} \\ yv &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

.

Figura 19 – Gráficos Função Quadrática com Coeficientes $a > 0$, b e c iguais a 0

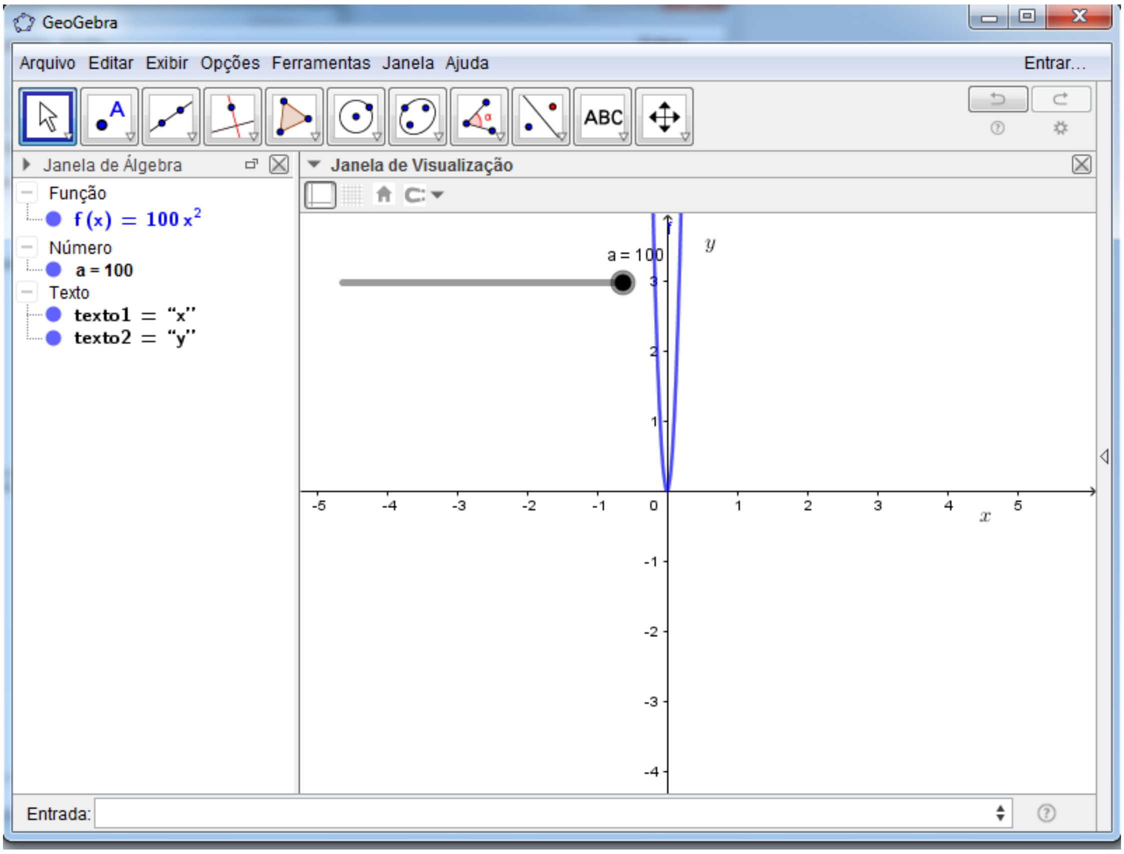


Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Com a análise da figura 19, temos uma função $f(x) = ax^2$, onde $a = 1, b$ e $c = 0$ como vimos $a > 0$ concavidade é voltada pra cima. Quando as raízes são iguais a zero interceptam o eixo Ox na origem das posições. Com $a > 0$, encontramos o ponto minímo da função com valor zero, e o eixo de simetria coincide com eixo Oy.

Para utilizarmos um software, faz-se necessário que sejamos curiosos e capazes de incentivar os alunos a pesquisarem e a indagarem sobre questões pertinentes, do tipo "o que acontece se o termo a se for grande, entende-se que é maoir zero, $a > 0$?". O software, nesse sentido, esclarece as dúvidas e estimula a curiosidade.

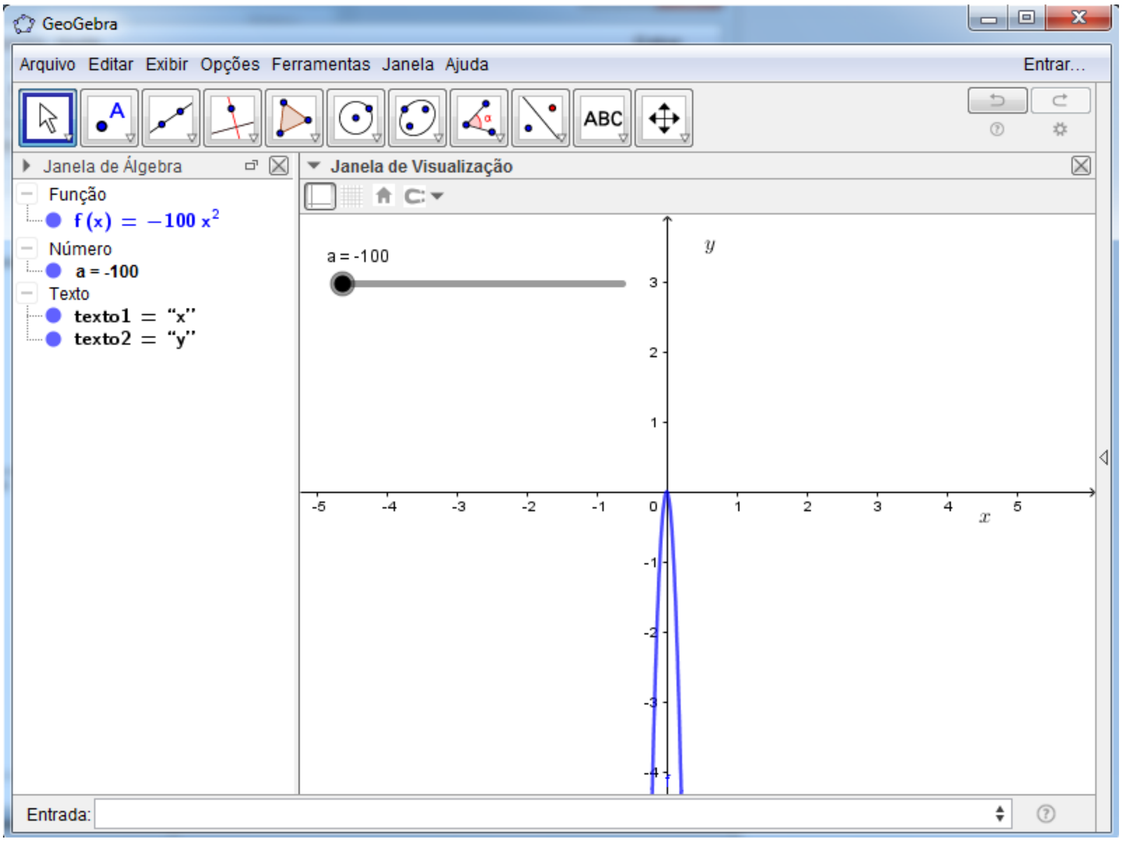
Figura 20 – Gráficos Função Quadrática com Coeficiente $a > 0$, Controle Deslizante



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Observando a figura 20, temos a função $f(x) = ax^2$ usando "controle deslizante"e colocando o termo a muito grande, $f(x) = 100x^2$. Notemos que a parábola vai se fechando, aproximando-se do eixo Oy.

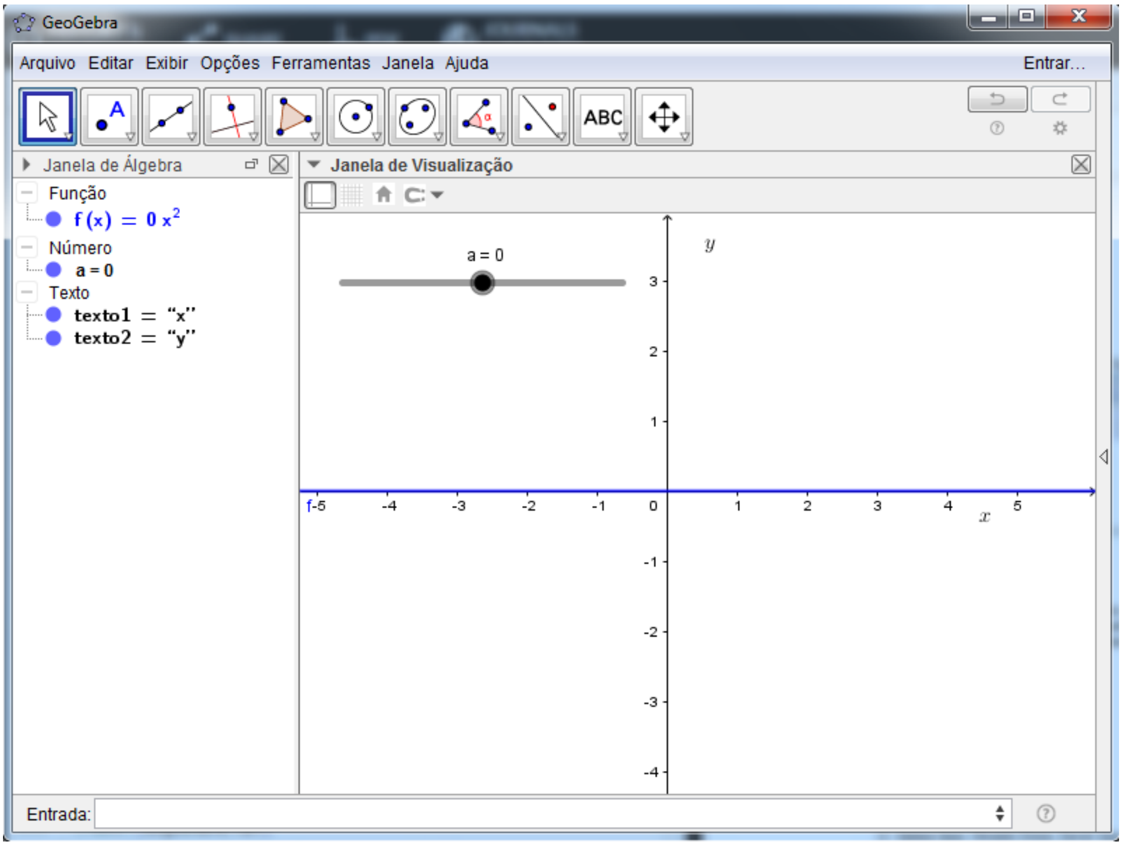
Figura 21 – Gráficos Função Quadrática com Coeficiente $a < 0$, Controle Deslizante



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

As figuras 20 e 21 ilustram variações do termo a positivamente e negativamente, e mostram o que acontece com a parábola. Ao mudarmos o valor do termo a positivo pra negativo de forma contínua, tem-se em algum momento $a = 0$, e portanto $f(x) = 0, x = 0$ se torna uma função Constante, cujo o gráfico é o eixo Ox. Na figura 22 não teremos função Quadrática e sim função Constante. É possível notar que o gráfico deixa de ser uma curva e passa a ser uma reta coincidente com o eixo Ox.

Figura 22 – Gráficos Função Quadrática com Coeficiente $a = 0$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 22 temos função Quadrática usando "controle deslizante". Oberva-se que $f(x) = ax^2$ logo, o valor de $a = 0$; $f(x) = 0x^2$, logo, o gráfico coincide com o eixo Ox.

2.7 Função Modular

Definicão 8. *Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), a função Modular é definida como uma aplicação de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *recebendo o nome de função Módulo ou Modular quando a cada* $x \in \mathbb{R}$ *associa-se o elemento* $|x| \in \mathbb{R}$.

Isto é:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

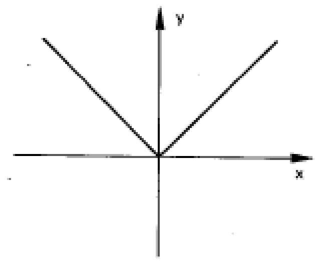
$$x \to |x|$$

Ulizando o conceito de módulo de um número real, a função Modular pode ser definida também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x, & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

O gráfico de uma função modular é a reunião de duas semi-retas de origem O, que são as bissetriz do 1º e 2º quadrantes.

Figura 23 – Gráficos Função Modular $f(x) = |x|$



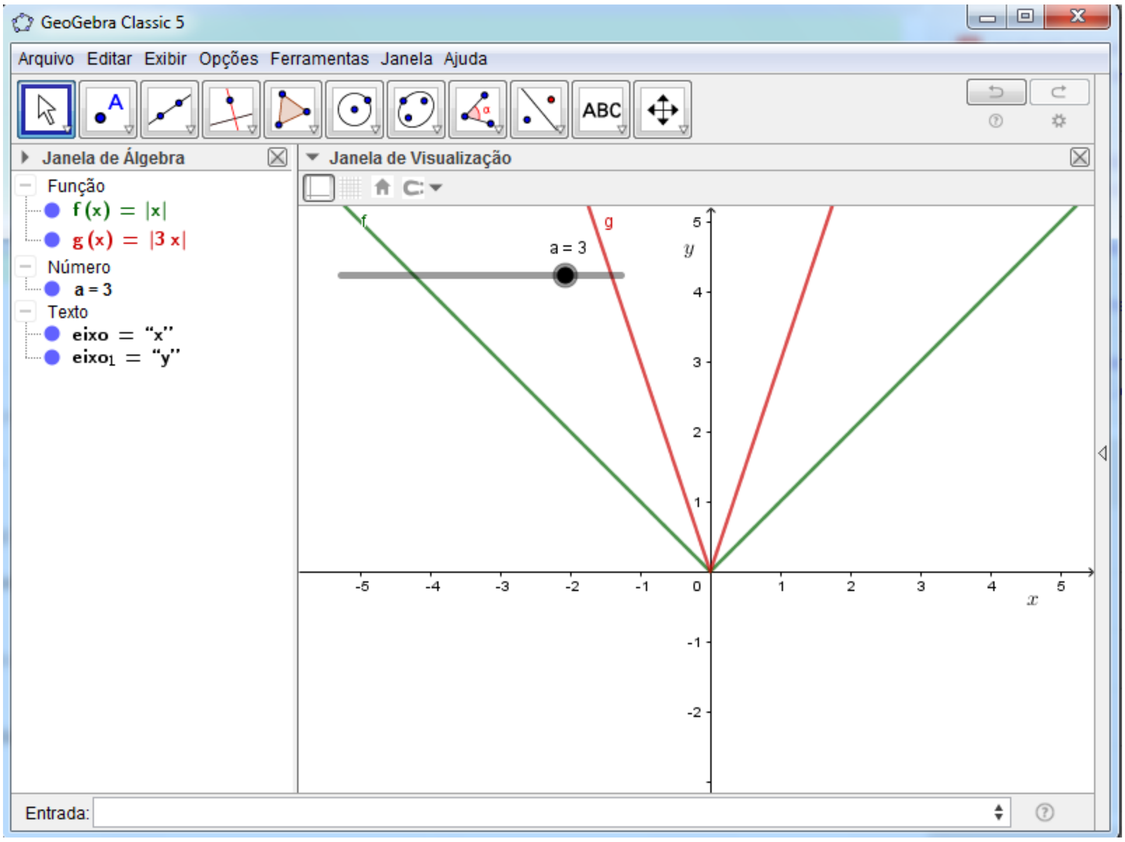
Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Analisando a figura 23, a imagem dessa função é o conjunto dos números reais maiores ou iguai a zero, isto é, a função Modular somente assume valores reais não negativos.

2.7.1 Gráficos Função Modular

Usaremos o Geogebra para mostrar o comportamento do gráfico da função Modular, onde este sofre translações e dilatações.

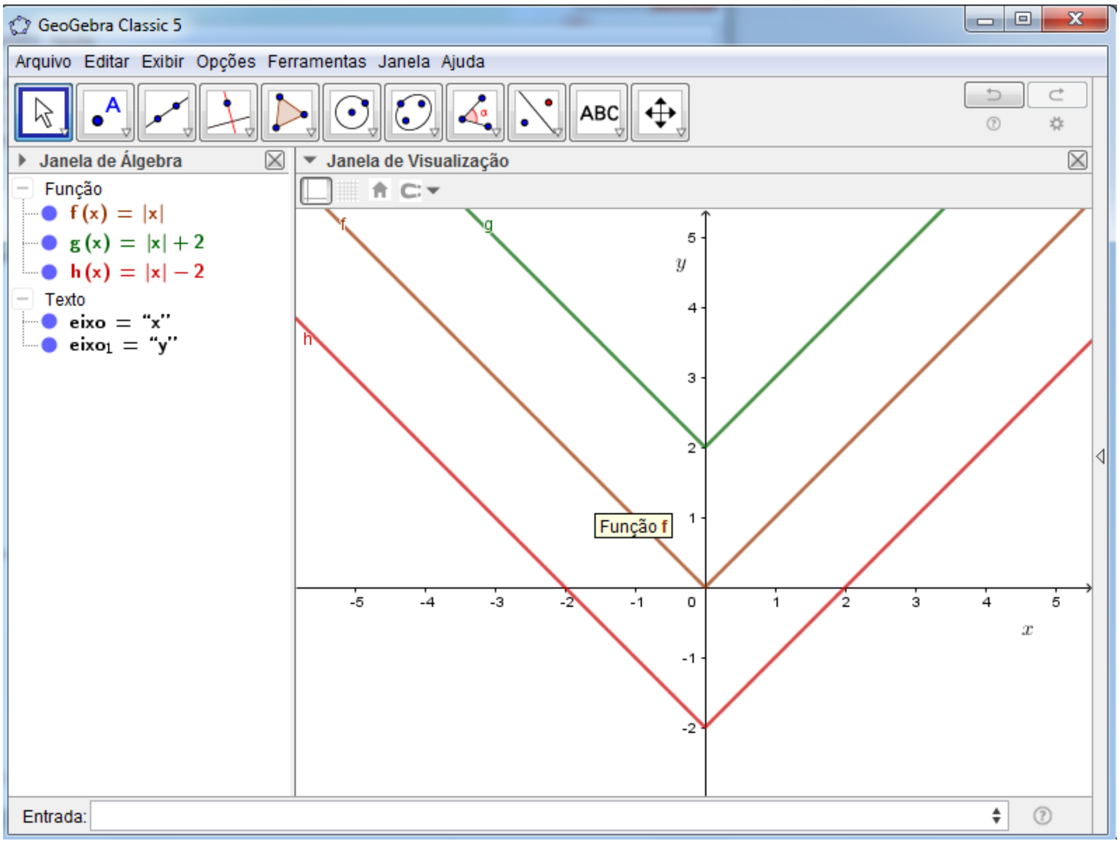
Figura 24 – Gráficos Função Modular contendo Coeficiente a com variação



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 24 o gráfico sofreu modificação, a função ocorreu um encolhimento e uma compressão horizontal (quando $a > 1$) representada pela função $f(x) = |3x|$ de cor vemelha, onde o termo a sofre variações devido o uso da ferramenta "controle deslizante".

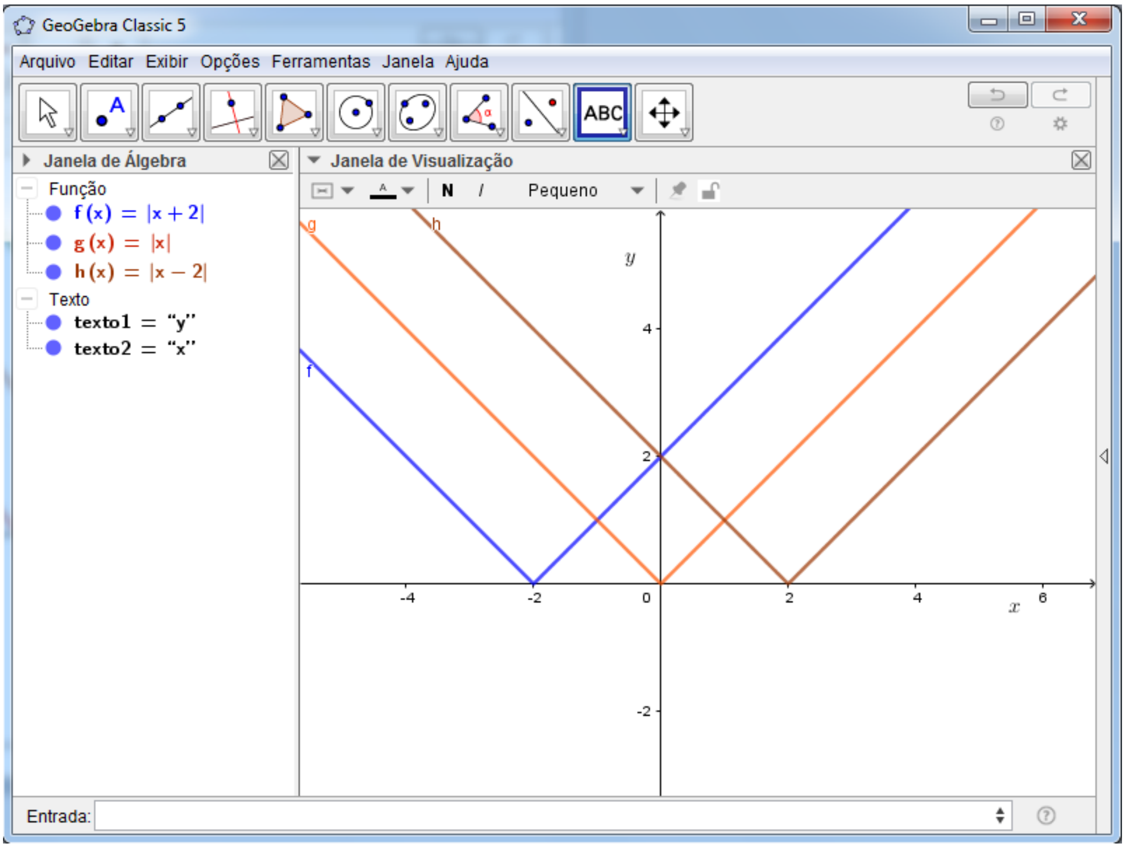
Figura 25 – Gráficos Função Modular com Deslocamento Vertical



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Nesta figura 25 houve um deslocamento vertical com duas unidades pra cima e duas unidades pra baixo, conforme as funções $f(x) = |x| - 2$ de cor vermelha e $f(x) = |x| + 2$ de cor verde, ambas relacionadas com a função $f(x) = |x|$ de cor verde.

Figura 26 – Gráficos Função Modular com Deslocamento Horizontal



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Nesta figura 26 houve um deslocamento (translação) horizontal com duas unidades pra direita e duas unidades pra esquerda conforme as funções $f(x) = |x-2|$ de cor marrom e $f(x) = |x+2|$ de cor azul, ambas relacionado com a função $f(x) = |x|$ de cor vermelha.

2.8 Função Exponencial

A função Exponencial é muito utilizada no cotidiano, podendo ser aplicada na Biologia, Química, Matemática Financeira entre outras áreas. Expressa, de maneira geral um crescimento ou um decrescimento característicos de alguns fenômenos da natureza, sendo bastante utilizado no cálculo dos juros compostos. Nesta sessão traremos a definição e a caracterização da função Exponencial, usando o Geogebra para mostrar e construir os gráficos desta função.

Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função Exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, indicada pela notação $f(x) = a^{x}$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

- $a^x.a^y = a^{x+y}$;
- $a^1 = a$;
- $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.
- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente. Mais precisamente: se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.
- A função Exponencial é contínua.
- A função Exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x, a \neq 1$, é bijetiva.

2.8.1 Caracterização da Função Exponencial

As funções vistas anteriormente, juntamente com a função Exponencial, são modelos matemáticos muitos utilizados pra resolver problemas elementares. Iremos mostrar as propriedades que caracterizam uma função como Exponencial.

Teorema 2. *Segundo (LIMA, 2013) seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes;*

1. *$f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;*

2. *$f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;*

3. *$f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Monstrar as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional, $r = \frac{m}{n}$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever
$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $(1) \Rightarrow (2)$ suponhamos, a fim de fixar as ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente.) Então, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$. ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2). As implicações restantes, (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1) são óbvias. $\square$

O teorema de caracterização pode ser enunciado de um modo ligeiramente diferente, substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração do passo (1) $\Rightarrow$ (2) muda apenas no caso x irracional. Então tem-se $x = \lim_{n\to\infty} r_n$, $r_n \in \mathbb{Q}$, logo, pela continuidade de f, deve ser

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r.$$

Segundo (LIMA, 2013), uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo Exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo Exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema 3 (Função Exponencial)**.** *De acordo (LIMA, 2013) seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ depende apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A hipótese feita equivale a supor que $\phi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, obtemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\phi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\phi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.Segue-se então que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 4 (Função Exponencial)**.** *No livro texto (LIMA, 2013) aparece outra caracterizaçao das funções do tipo exponencial.*

Para cada b e cada t reais, suponhamos dado um número $f(b,t) > 0$ com as seguintes propriedades:

1. *$f(b,t)$ depende linearmente de t e é monótona injetiva em relação a t;*

2. $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$. *Então, pondo* $a = f(1,1)$, *tem-se* $f(b,t) = b.a^t$.

Demonstração. Demonstração. A função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $\phi(t) = f(1,t)$, é monótona injetiva e cumpre
$\phi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s), t) = f(1,s).f(1,t) = \phi(s).\phi(t)$ em virtude de 1 e 2 pois $f(1,s) = f(1,s).1$ pela caracterização das funções exponenciais, tem-se $\phi(t) = a^t$, onde $a = \phi(1) = f(1,1)$. Portanto

$$f(b,t) = f(b.1,t) = b.f(1,t) = b.\phi(t) = b.a^t$$

A condição 2 do teorema acima tem seu significado esclarecido quando se nota que $b = b.a^0 = f(b,0)$, ou seja, que b é o valor inicial da grandeza $f(b,t)$ no instante $t = 0$ pensando em t como o tempo decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b,0)$ para o valor $f(b,t)$. Então 2 diz que, começar com o valor b e deixar passar o tempo $s+t$ é o mesmo que começar com valor $f(b,s)$ e deixar transcorrer o tempo t. □

2.8.2 Gráficos Função Exponencial

Com relação ao gráfico de função do tipo Exponencial $f(x) = a^x$, conforme (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004) podemos dizer na figura 27:

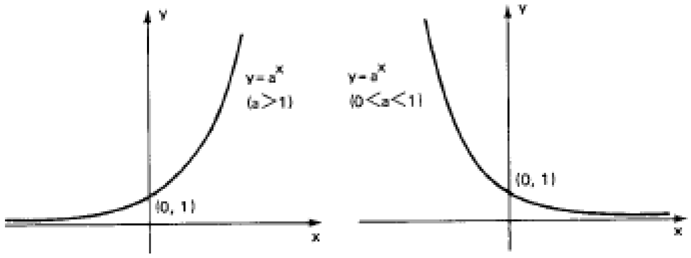
1. A curva representativa esta toda acima do eixo Ox, pois $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2. Intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada 1;

3. Se $a > 1$ é uma função crescente e se $0 < a < 1$ é uma função decrescente.

A figura abaixo ilustra bem os casos acima.

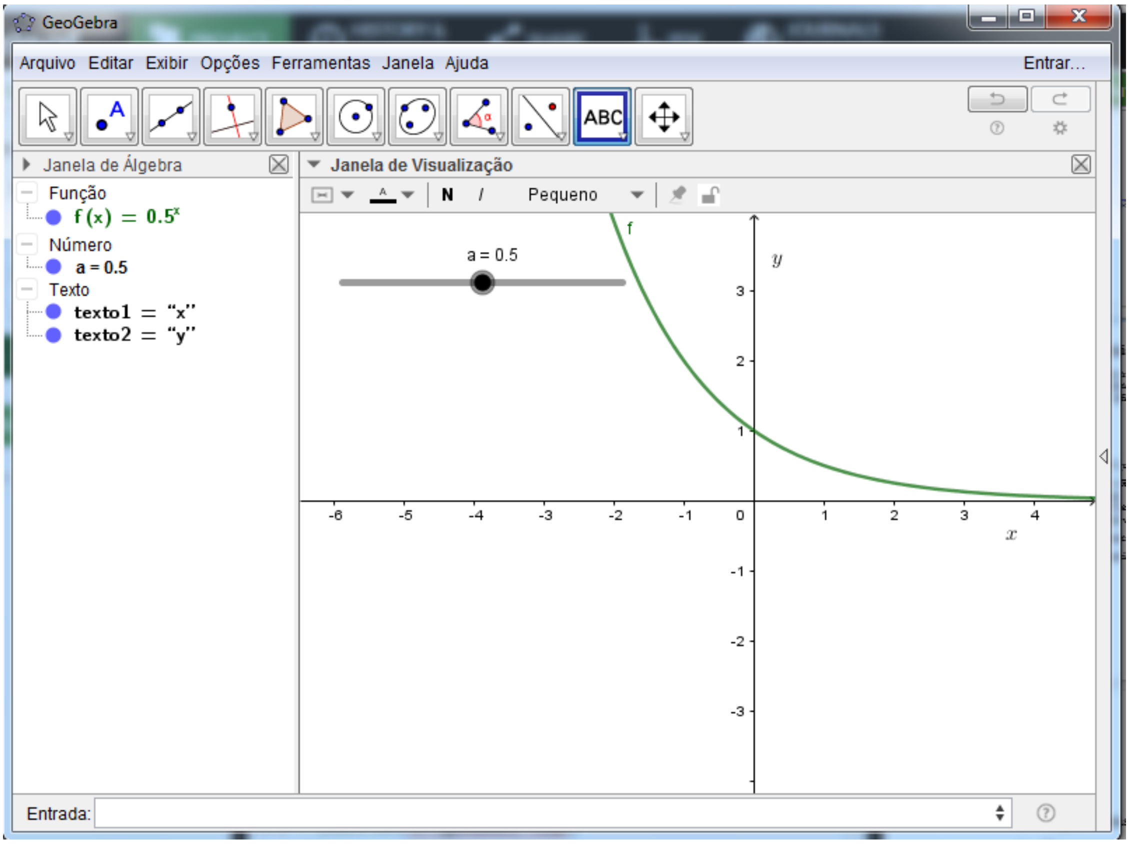
Figura 27 – Gráficos Função Exponencial



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

O uso do software Geogebra para representação do comportamento dos gráficos e sua visualização é de grande importância, principalmente quando variamos os valores da base a e do expoente x. De modo geral, a aplicação dessa tecnologia em sala de aula facilita a aprendizagem.

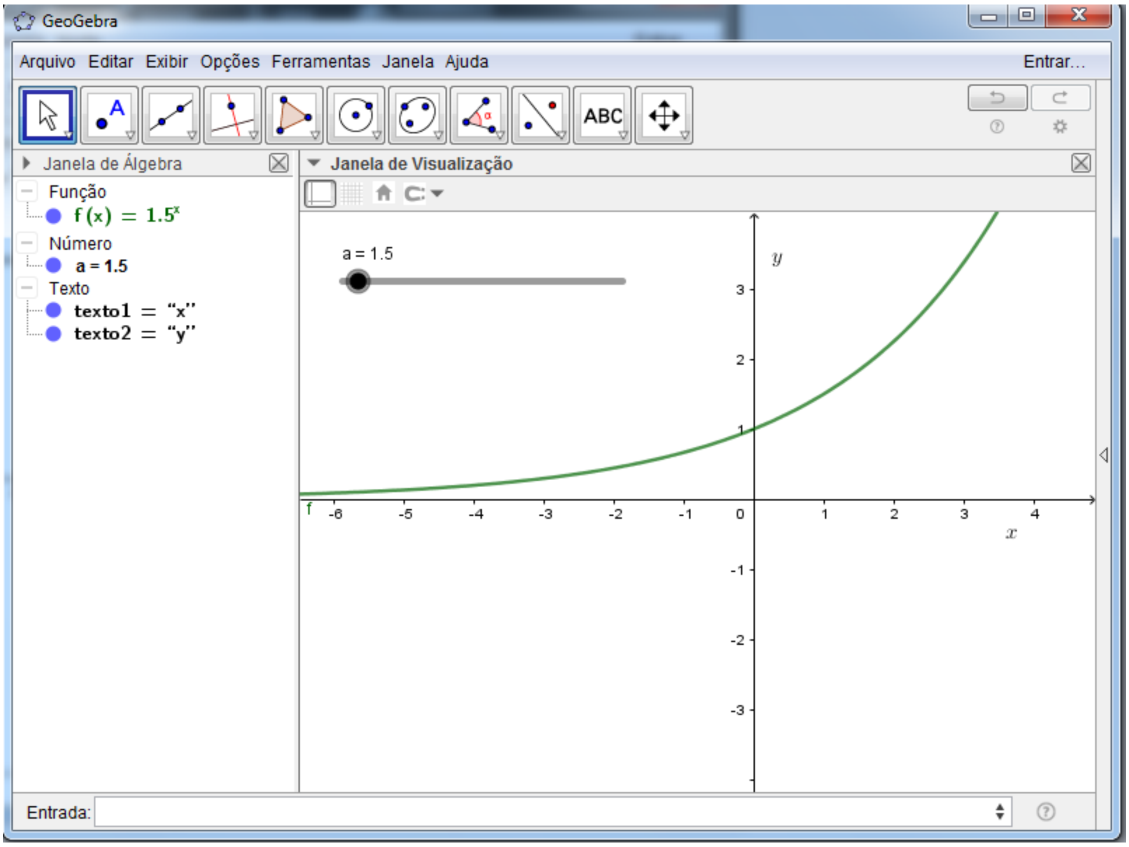
Figura 28 – Gráficos Função Exponencial com $0 < a < 1$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 28 temos a função Exponencial $f(x) = a^x$ onde termos $0 < a < 1$. Foi utilizado o "controle deslizante"para mostrar o comportamento do gráfico no intervalo. Na visualização, usando Geogebra, fica claro que se $a = 1$ a função deixa de ser Exponcial e passa ser uma função Constante, e se $a = 0$ logo coincide com o eixo Ox.

Figura 29 – Gráficos Função Exponencial com $a > 1$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 29 , temos a função Exponencial $f(x) = a^x$ onde temos $a > 1$. Foi utilizado o "controle deslizante", para mostrar o comportamento do gráfico no intervalo. O uso do software nos permite exibir qualquer valor pra a no intervalo criado, facilitando o entendimento do comportamento da função.

2.9 Funções Logarítmicas

Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras. Os logaritmos foram criados por John Napier (1550-1617) e desenvolvidos por Henry Briggs (1531-1630); foram introduzidos no intuito de facilitar cálculos mais complexos. Alguns pesquisadores como (BOSZKO et al.,) e (LIMA et al., 2001) estudaram e resolveram alguns problemas práticos envolvendo essa função.

O conceito de logaritmo e as primeiras tábuas dos logaritmos foram estabelecidos no começo do século XVII, tendo como objetivo simplificar as operações de cálculo ao reduzir operações de um nível maior a operações de um nível menor.

Nesta sessão traremos a definição de função Logarítmica, a caracterização da função e gráficos para mostrar seu comportamento.

Definicão 9. *Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), seja a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a. O expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Usando símbolos, temos: se $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$, Em símbolos se $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0$ então.*

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

Em $\log_a b = x$, dizemos que a é a base do logaritmo, b logaritmando, e x logaritmo.

Temos algumas restrições $(a, b \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $b > 0)$, dados a e b, existe um único $x = \log_a b$.

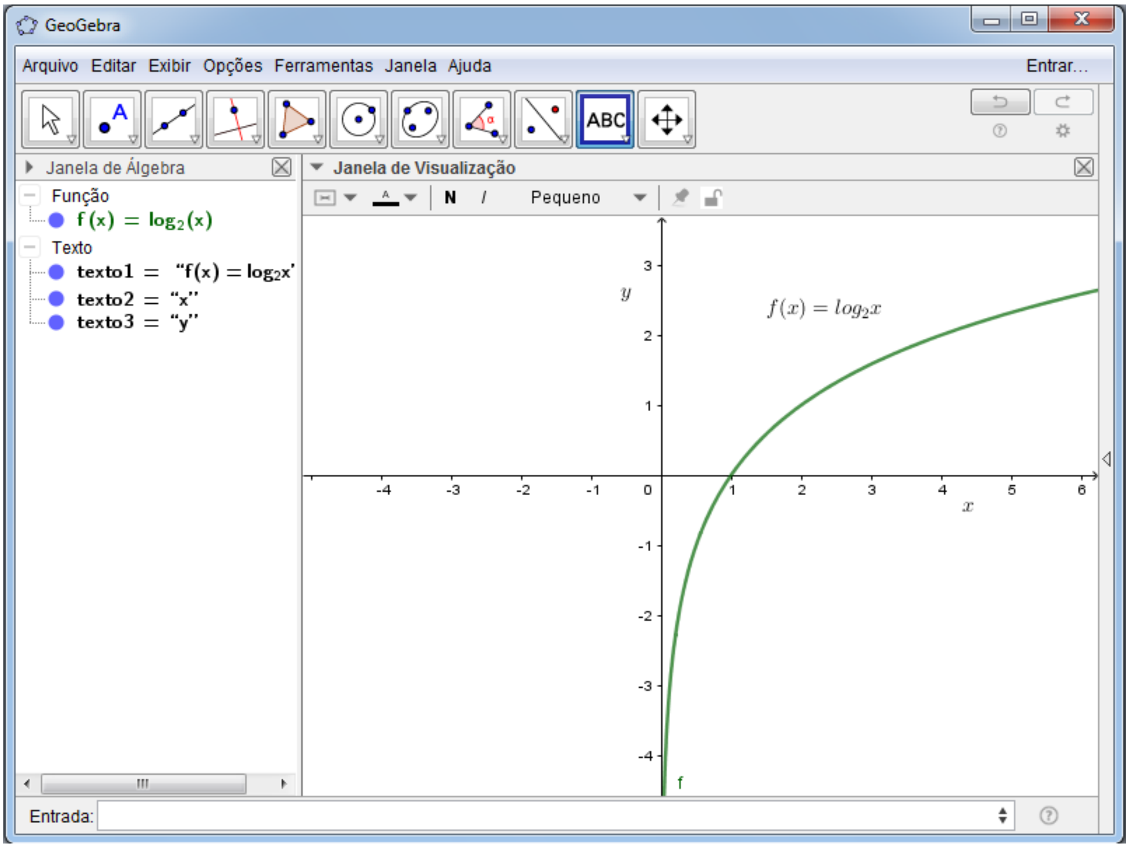
A operação, pela qual se determina o logarítmo de $b(b \in \mathbb{R}$ e $b > 0)$ numa dada base $a(a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1)$, é chamada de logaritmação, e o resultado dessa operação é o logaritmo. Vimos na função Exponencial que para todo número real positivo $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, onde $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ crescente se $a > 1$, descrecente se $0 < a < 1$ com a propriedade adicional

$$f(x + y) = f(x).f(y).$$

Essa propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, amplamente utilizado no cálculo. Para (LIMA, 2013), a função $\log_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. Vale ressaltar que somente números positivos possuem logaritmos reais, pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.

Em se tratando de funções Logarítmicas, estas são mais estudadas: de base $a > 1$, de base 10, decimais de base 2, binários e base e. Usando o software para ilustrar como fica o gráfico de uma função Logarítmica crescente e decrescente.

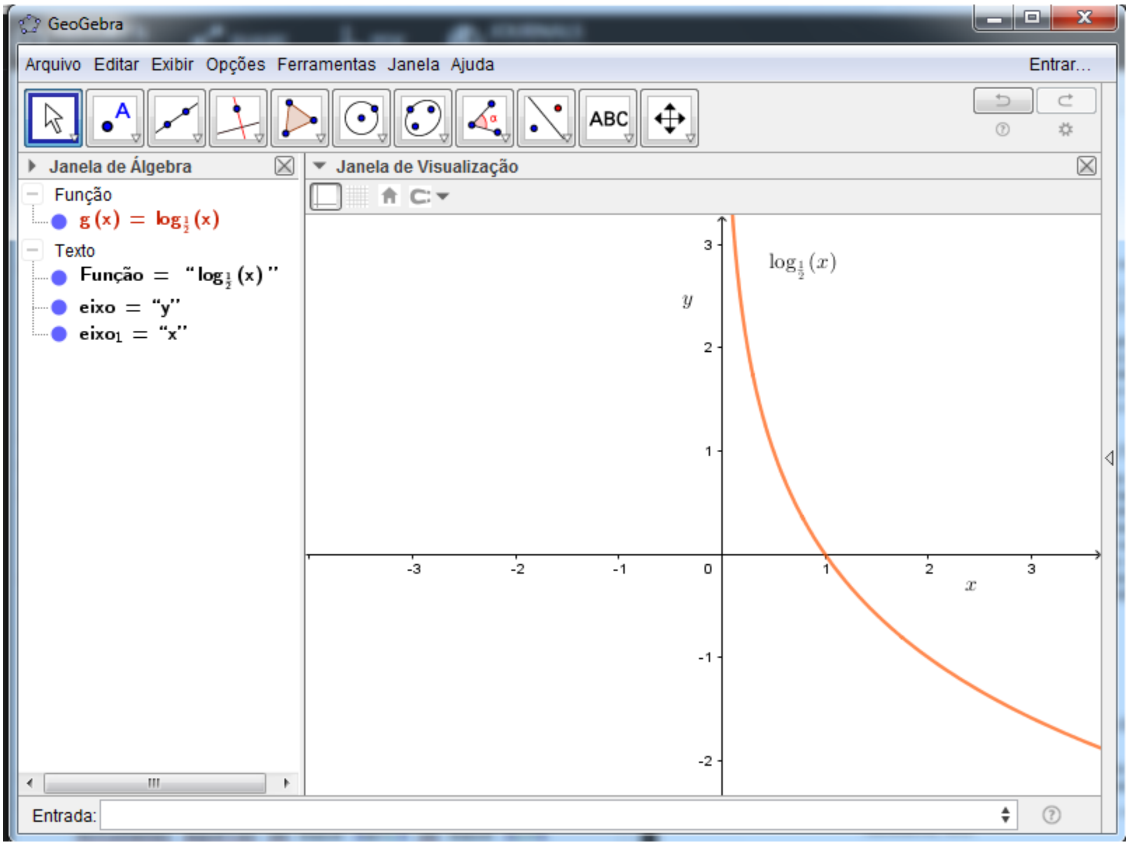
Figura 30 – Gráficos Função Logarítmica $a > 1$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na Figura 30 temos que $\log_a x$ é uma função crescente de x quando $a > 1$, quando $\log_a 1 = 0$, temos que, para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo.

Figura 31 – Gráficos Função Logarítmica $0 < a < 1$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 31, se $0 < a < 1$ então $\log_a x$ é positivo quando $0 < a < 1$ e negativo quando $x > 1$.

2.9.1 Caracterização das Funções Logarítmicas

Teorema 5 (Função Logarítmicas). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva, isto é, crescente ou decrescente, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Admite-se f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Suponha que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Posteriormente, mostraremos que isto sempre acontece, não sendo uma hipótese adicional.

Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \ldots a) \\ &= f(a) + f(a) + \ldots + f(a) \\ &= 1 + 1 + \ldots + 1 = m, \\ 0 &= f(1) = f(a^m.a^{-m}) \\ f(a^m) + f(a^{-m}) &= m + f(a^{-m}) \end{aligned}$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto $m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n.f(a^r)$ e daí $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$.Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para, r, s irracionais tem-se:
$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x < s.)$ □

Assim todo número racional r menor do que x é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Continuando a demonstração para o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que,

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

Então, $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$ vale
$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)}$
com $a = 2^{1/b}$.Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente: $g(x) = \log_a x$.

2.10 Funções Trigonométricas

Na história da trigonometria os primeiros estudos vem através dos Egípcios e os Babilônios, a partir de cálculos com razões entre os números e entre as medidas dos lados entre os triângulos. Constitui um tema importante na Matemática, em especial pelas suas aplicações algumas elementares e outras modernas.

Segundo (LIMA, 2013) uma propriedade fundamental das funções Trigonométricas é que elas são periódicas. Nos livros didáticos do Ensino Médio é dito que as funções Trigonométricas são: o estudo seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, essas funções são bastante utilidadas no Cálculo Infinitesimal e do seu prolongamento que é a Análise Matemática. Começamos a mostrar as funções Trigonométricas usando software Geogebra como metodologia de ensino, sendo uma ferramenta importatíssima para o ensino aprendizagem.

2.10.1 A função de Euler e a Medida de Ângulos

Segundo (LIMA, 2013) a fim de definir as funções $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, devemos associar a cada número real t um ângulo e considerar o cosseno e seno daquele ângulo. O número t desempenhará, portanto, o papel de medida do ângulo, dependendo da unidade. Evidentemente, há diversas maneiras que se destacam, uma (o radiano) pode ser, como veremos, a mais natural; outra (o grau) por ser tradicional há milênios, além de que muitos ângulos comumente encontrados têm por medida um número inteiro de graus.

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E = \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, ou seja, o sentidoque nos leva de (1,0) para (0,1) pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado de $E(t)$.
- se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual)

A função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$.

As funções cosseno e seno para (LIMA, 2013) são definidas $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$E(t) = (cos(t), sen(t)).$$

Noutras palavaras, $x = cos(t)$ e $y = sen(t)$ são respctivamente a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária. Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $t \in \mathbb{R}$, a relação fundamental,

$$cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$

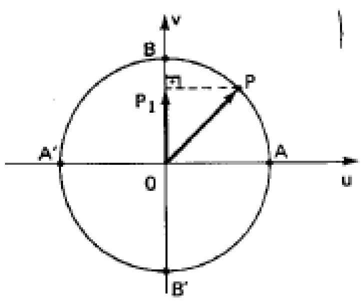
2.10.2 Função Seno

Como toda trigonometria usada antigamente estudava os triângulos, é a partir deles que mostraremos algumas propriedades fundamentais.

Definicão 10. *(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), define função Seno, seja dado um número real x, sendo P sua imagem no ciclo. Denomina-se seno de x (indicamos pelo $sen(x)$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Função Seno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = sen(x)$, isto é.*

$$f(x) = sen(x)$$

Figura 32 – Ciclo Função Seno



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

O triângulo ΔOPP_1 é retângulo em P_1. Têm-se as seguintes definições.

$$sen\hat{P} = \frac{p}{p_1} \text{ onde } p, p_1 \text{ e } o \text{ medidas dos lados do } \Delta OPP_1.$$

2.10.2.1 Gráficos Função Seno

O gráfico da função Seno chama-se senóide. E a imagem da função Seno é o intervalo $[-1, 1]$ para todo x, isto é $-1 \leq sen(x) \leq 1$. Observa-se o que acontece com $sen(x)$, se a imagem de x no ponto P dá uma volta completa no ciclo, no sentido antihorário, a ordenada de P varia conforme a tabela.

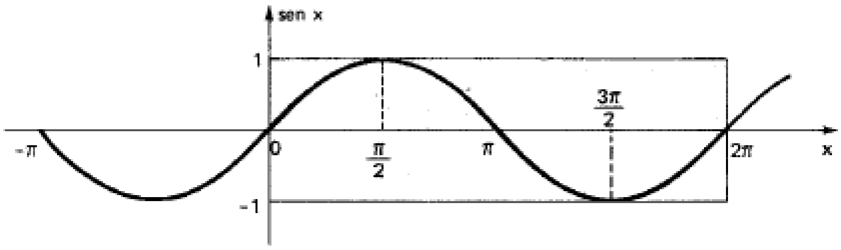
Figura 33 – Valores de Seno

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	−1	cresce	0

Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

A figura 33 nos mostra os valores da função Seno no intervalo $[0; 2\pi]$.

Figura 34 – Gráficos Função Seno no intervalo $[0; 2\pi]$

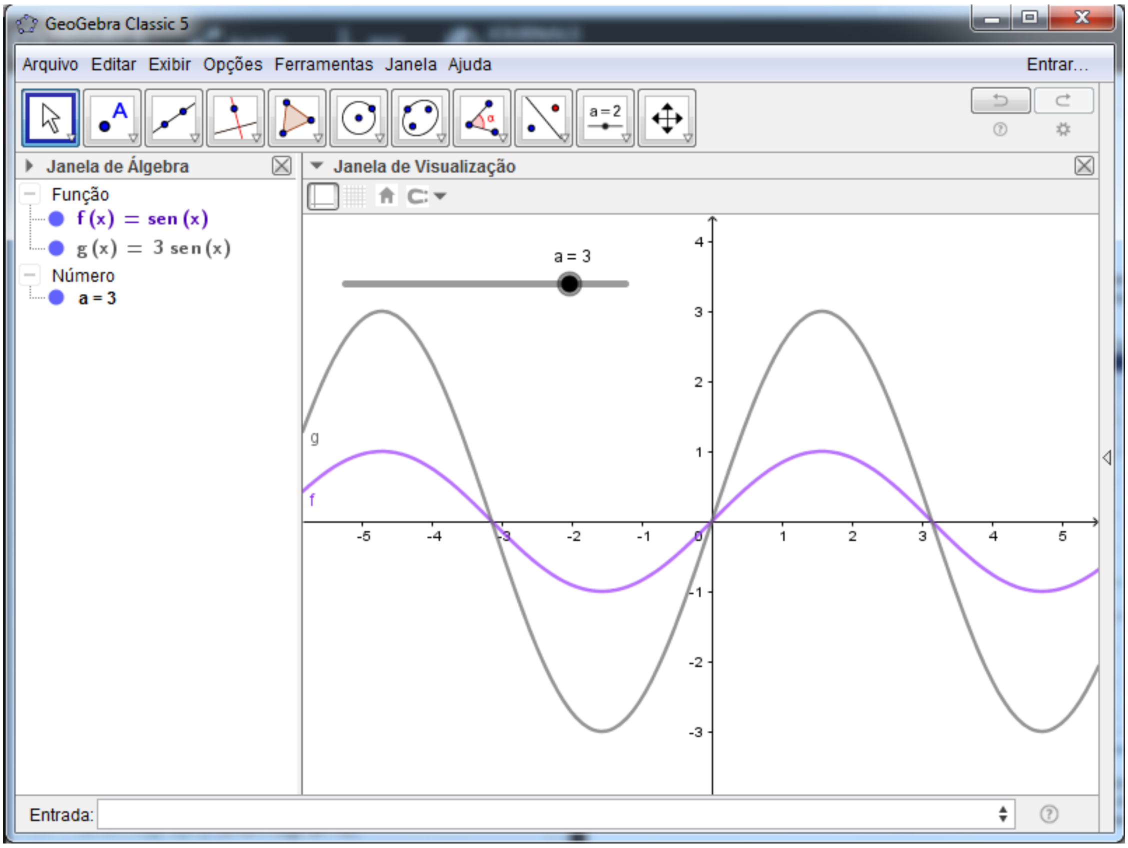


Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Analisando a figura 34, nota-se que o domínio da função Seno é $\mathbb{R}$, e a senóide continua pra direita de 2π e para esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função.

Agora usando a tecnologia podemos manipular valores, para monstrar o comportamento do gráfico seno, usando técnica do "controle deslizante"aderida a função Seno.

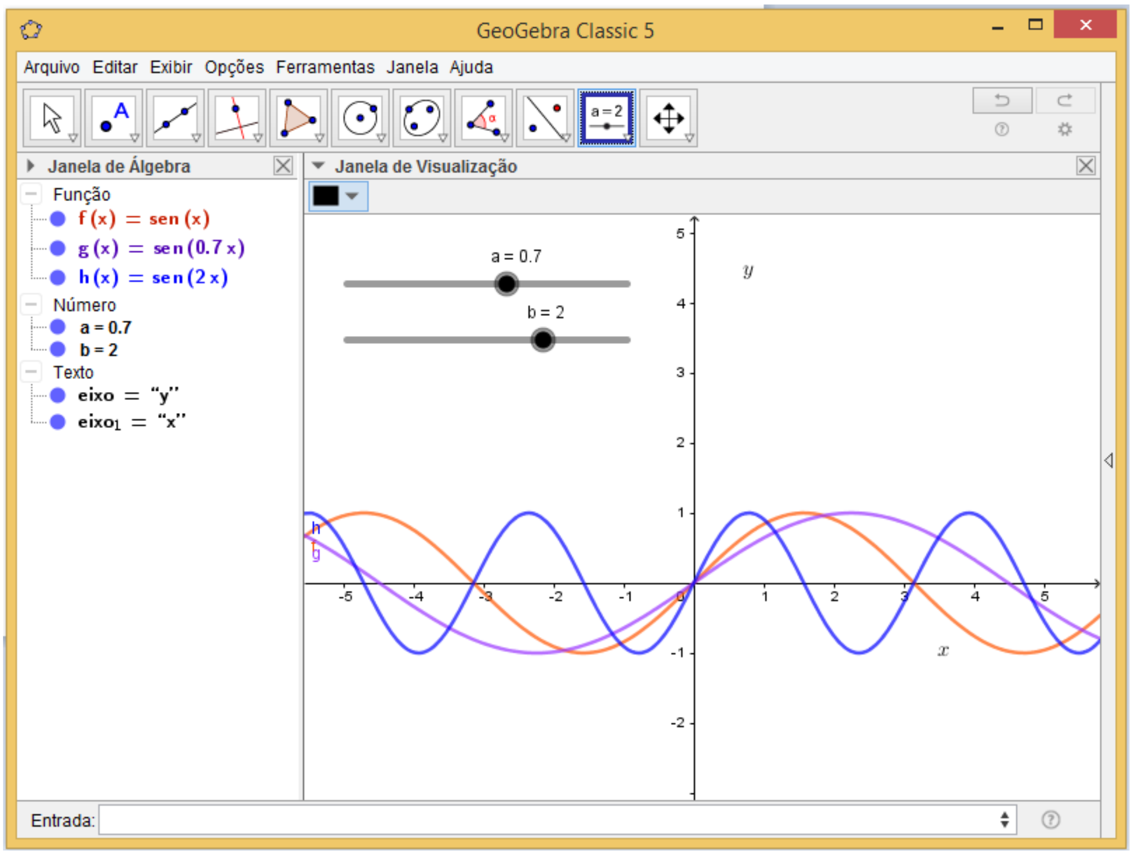
Figura 35 – Gráficos Função Seno do tipo $asen(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 35, temos que, $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = 3sen(x)$. Observa-se que o comportamento ao multiplicar uma constante $a \in \mathbb{R}$ em f gera a função g, onde é notório o que acontece com o gráfico: dilatamos ou contraímos verticalmente e isso altera sua amplitude. Este ambiente informatizado permite fazermos essas simulações com intuito de melhorar a aprendizagem dos alunos. Usaremos a ferramenta "controle deslizante"pra alterar os valores da constante a.

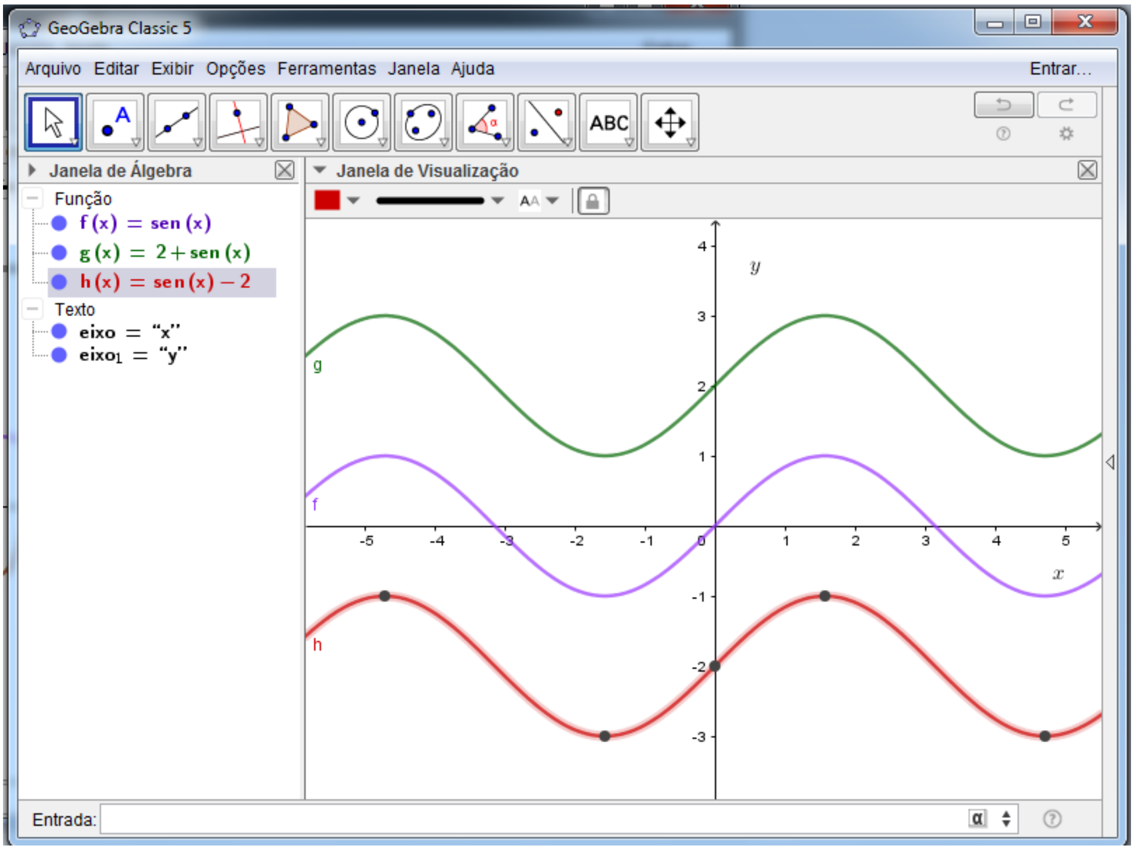
Figura 36 – Gráficos Função Seno do tipo $sen(ax)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 36, temos que, $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(0,7x)$ e $h(x) = sen(2x)$. Podemos observar o comportamento das funções dadas ao se multiplicar uma constante $a, b \in \mathbb{R}$ ao arco da função f. Gera-se a função g, onde é notório o que acontece com o gráfico: se $0 < a < 1$, há uma dilatação no gráfico, se $b > 1$, é gerada função h,e o gráfico sofre uma compressão, um encolhimento horizontal. Usaremos a ferramenta "controle deslizante"pra alterar os valores da constante a, b.

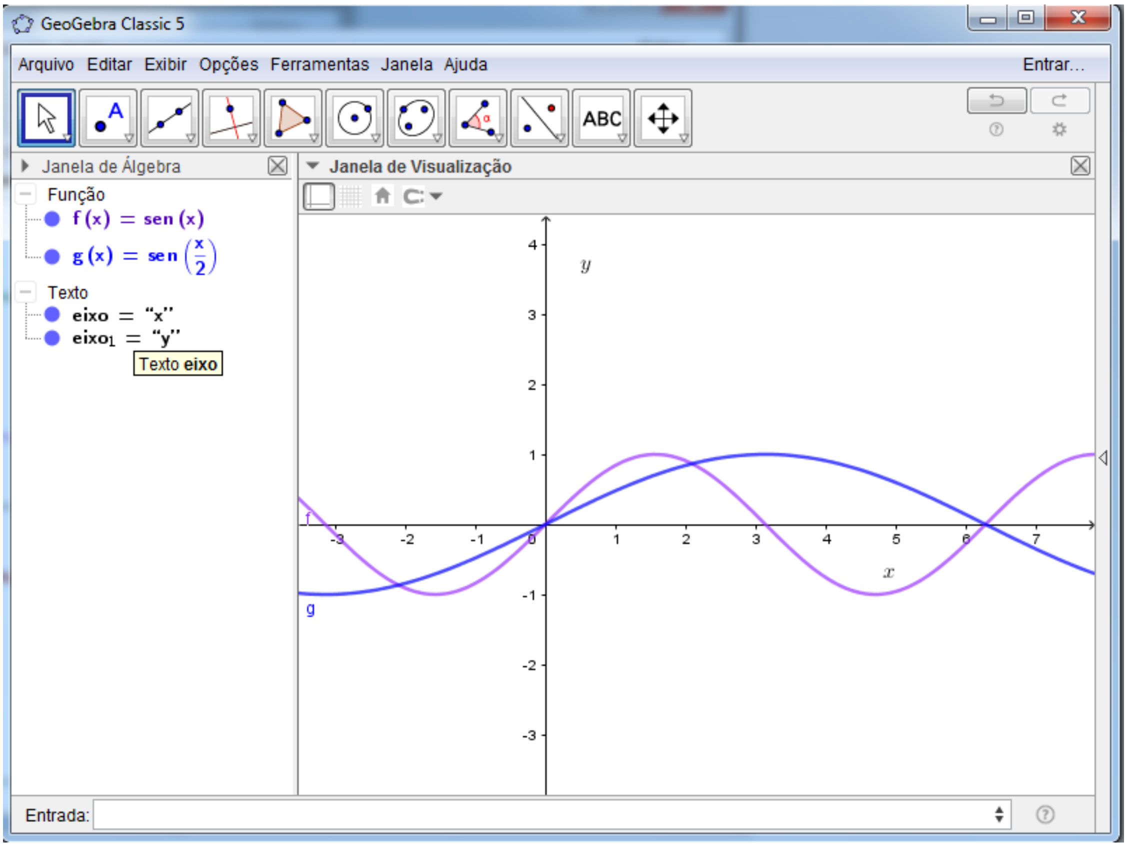
Figura 37 – Gráficos Função Seno do tipo $sen(x) \pm a$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 37 temos $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2 + sen(x)$ e $h(x) = sen(x) - 2$. Basta observar a função f: ao adicionar duas unidades, é gerada a função g.No gráfico, ocorre um deslocamento de duas unidades na vertical. Se subtraírmos duas unidades a f, é gerada a função h, com deslocamento vertical de duas unidades abaixo de f.

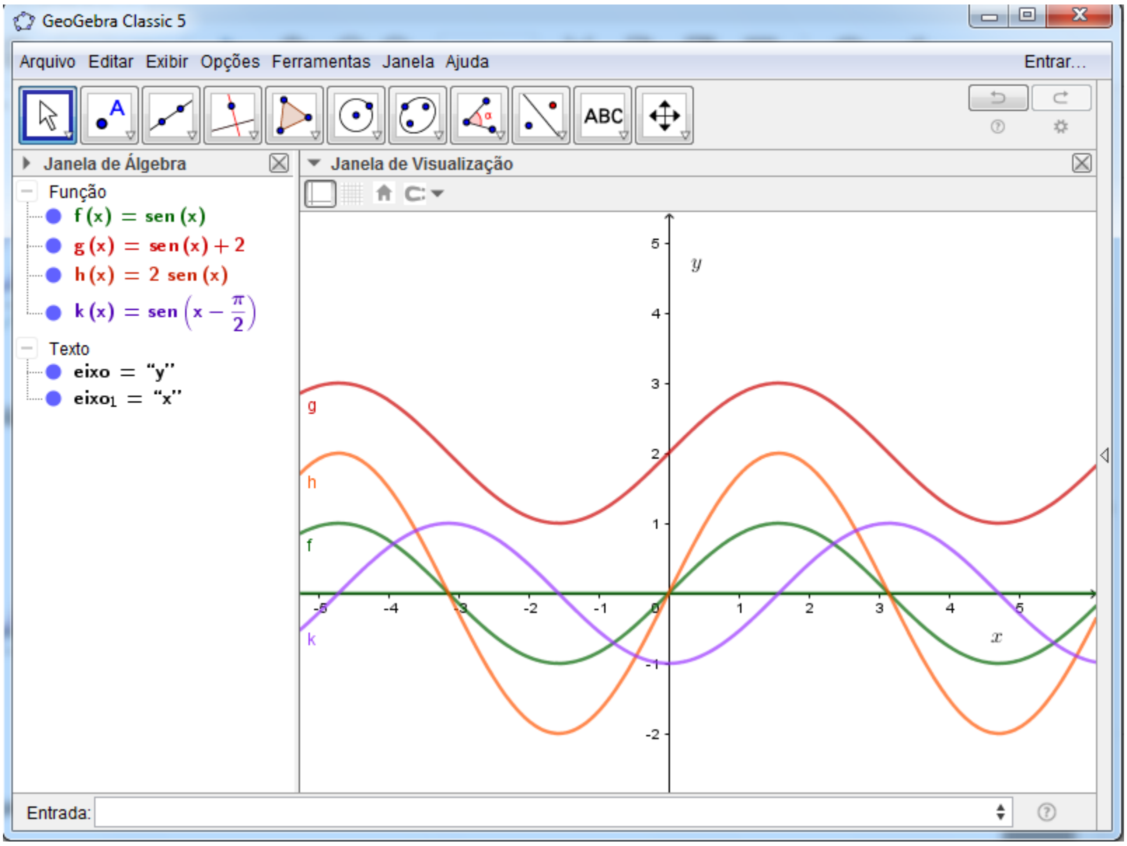
Figura 38 – Gráficos Função Seno Arco Metade



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Notemos na figura 38 que nas funções Trigonométricas quando exploramos os efeitos de parâmetros reais a, b, c e d em curvas do tipo $f(x) = csen(dx + b) + a$ conseguimos explorar tudo que acontece com o gráfico, principalmente com o uso do software Geogebra.

Figura 39 – Função de Seno com algumas simulações



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 39 mostramos a função $s(x) = csen(dx + b) + a$ aplicada graficamente. Observa-se que temos $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(x)+2$, $h(x) = 2sen(x)$, $k(x) = sen(x-\frac{\pi}{2})$ f está de cor verde, g de cor vermelha, h de laranja e k azul para para facilitar a vizualização. Esta explanação provém de (LIMA, 2013): quando somamos uma constante à função, deslocamos o gráfico verticalmente, quando somamos uma constante à variável independente, deslocamos o gráfico horizontalmente. Quando multiplicamos uma função trigonométrica por uma constante, dilatamos ou contraímos o gráfico verticalmente, isto é, alteramos sua amplitude. Quando multiplicamos a variável independente de uma função trigonométrica por uma constante dilatamos ou contraímos o gráfico horizontalmente, isto é, alteramos a frequência e o período (inversamente proporcional). Estes efeitos não são restritos às funções Trigonométricas (ou funções periódicas), e podem ser generalizados para funções reais quaisquer (independentemente da função ter amplitude, frequência ou período). Segue-se que:

- os parâmetros a e b determinam translações horizontais e verticais nos gráficos nas funções;
- os parâmetros c e d determinam dilatações ou contrações horizontais e verticais nos

gráficos nas funções.

Aprofundemos o que acontece com os parâmetros a, b, c e d começando com termo aditivo a. Como estamos somando uma mesma constante as ordenadas de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico, o resultado é um deslocamento vertical:

- no sentido positivo do eixo (pra cima), se o valor do parâmetro for positivo;
- no sentido negativo do eixo (pra baixo), se o parâmetro for negativo.

Analisando o termo b, a soma de uma constante positiva à variável independente da função (dentro dos parênteses) acarreta em um movimento para esquerda e não para direita, como poderia ser inicialmente esperado pelos alunos. Neste caso, justamente porque definimos uma nova função somando b unidades à variável x, para que um elemento do domínio desta nova função tenha a mesma imagem que um elemento do domínio da função original, este deve ser subtraído de b unidades. Isto provoca um deslocamento horizontal do gráfico:

- no sentido positivo (para direita), se o valor do parâmetro for negativo;
- no sentido negativo do eixo (para esquerda), se o valor do parâmetro for positvo.

Sobre a análise do termo c, este corresponde a multiplicar por uma constante positiva as ordenadas de cada um dos pontos pertencente ao gráfico. O resultado é uma dilatação vertical. Se o parâmetro tiver valor negativo, além da dilatação, o gráfico sofre também uma reflexão em relação ao eixo horizontal:

- um esticamento vertical se o valor do parâmetro for maior que 1;
- um encolhimento vertical se o valor do parâmetro estiver entre 0 e 1;
- um esticamento vertical composto com reflexão em relação ao eixo horizontal se o valor do parâmentro for menor que -1;
- um encolhimento vertical composto com uma reflexão em relação ao eixo horizontal se o valor do parâmetro estiver entre -1 e 0 Analisando o termo d, este define uma nova função multiplicando a variável dependente por uma constante d. Para que um elemento do domínio da nova função tenha a mesma imagem de um elemento do domínio da função original, este deve ser divido por d. Isto provoca dilatação horizontal no gráfico, que será composta com uma reflexão em relação ao eixo vertical; se o parâmetro tiver o valor negativo:
  - um encolhimento horizontal se o valor do parâmetro for maior que 1;
  - um esticamento horizontal se o valor do parâmetro estiver entre 0 e 1;

- um encolhimento horizontal composto com uma reflexão em relação ao eixo vertical se o valor do parâmetro for menor que -1;
- um esticamento composto com uma reflexão em relação ao eixo vertical se valor do parâmetro estiver entre -1 e 0.

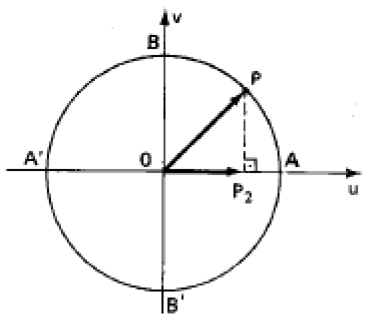
  Vale ressaltar que as translações e dilatações em gráficos de funções são gerais não exclusivas das funções trigonométricas.

2.10.3 Função Cosseno

Definicão 11. *Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno x e indicamos $cos(x)$ a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função Cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = cos(x)$, isto é,*

$$f(x) = cos(x).$$

Figura 40 – Ciclo Função Cosseno



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Neste ciclo da função Cosseno na figura 40 onde o raio é unitário, temos que o triângulo ΔOPP_2 é retângulo em P_2. Daí, vem as seguintes definições:

$$cos\hat{O} = \frac{p}{p_2} \text{ onde } p, p_2 \text{ e } o \text{ medidas dos lados do } \Delta OPP_2.$$

2.10.3.1 Gráficos da Função Cosseno

O gráfico da função Cosseno chama-se cossenóide, a imagem da função Cosseno percorre o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq cos(x) \leq 1$. Vejamos o que acontece com $cos(x)$; se a imagem de x no ponto P dá uma volta completa no ciclo, (sentido anti horário), a abscissa de P varia conforme a tabela:

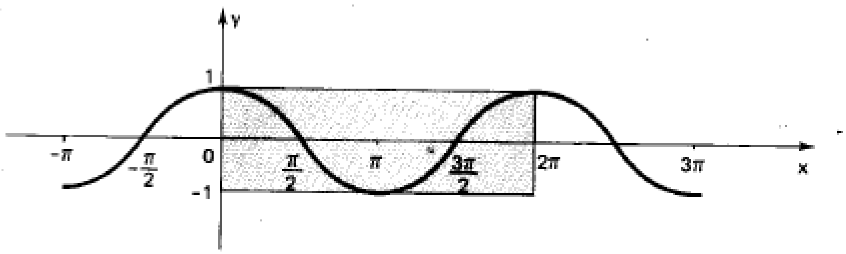
Figura 41 – Valores de Cosseno

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

A figura 41 nos mostra os valores da função Cosseno no intervalo $[0;2\pi]$.

Figura 42 – Gráficos Função Cosseno de $[0;2\pi]$

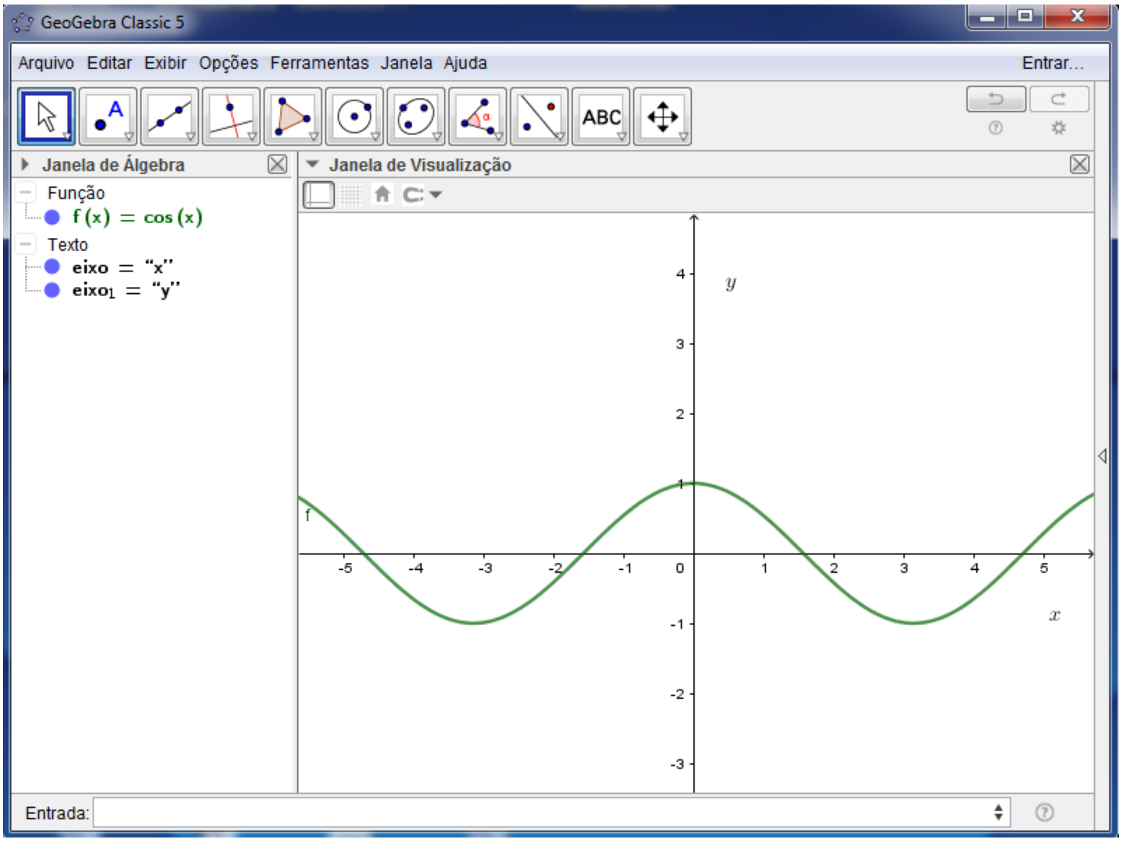


Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Observamos na figura 42 que, como o domínio da função Cosseno é $\mathbb{R}$, a Cossenóide continua pra direita de 2π e para esquerda de 0. No retângulo em destaque esta representado apenas um período da função.

Com uso do software, é facilitada a visualização na manipulação de valores aleatórios sobre a função Cosseno.

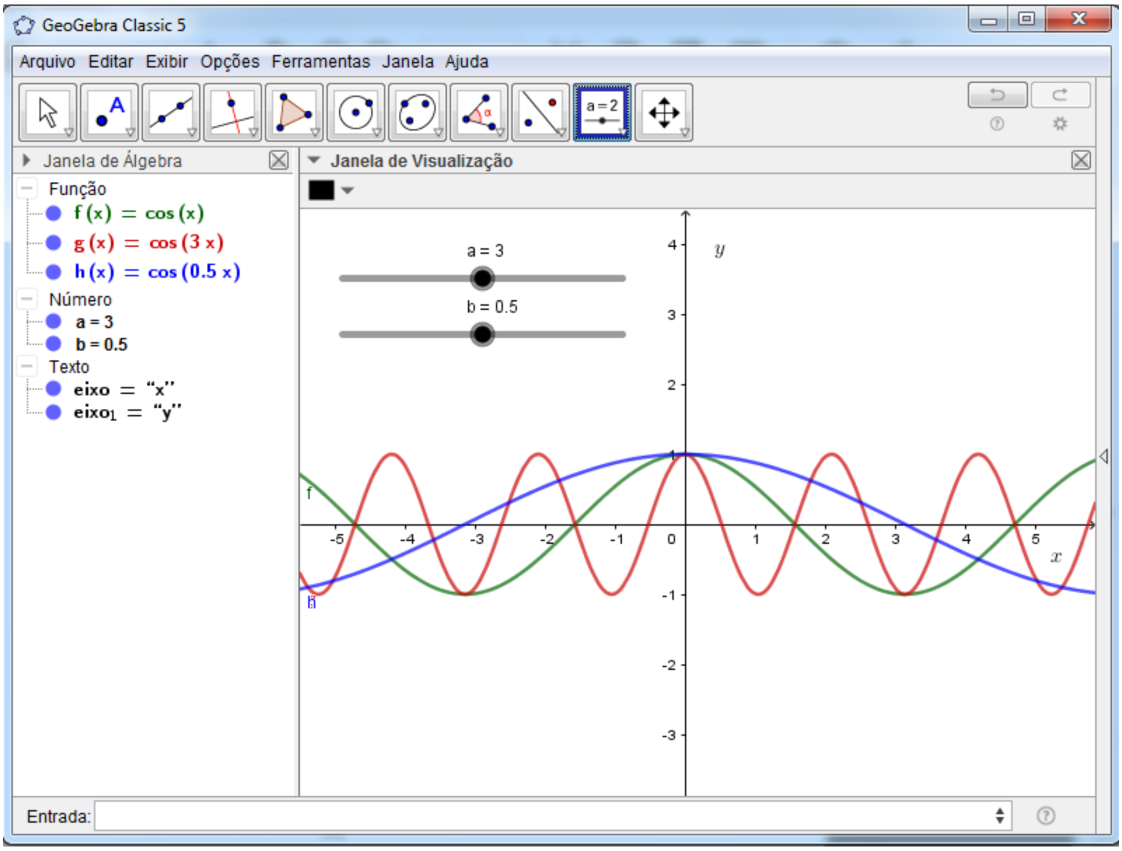
Figura 43 – Gráficos Função Cosseno do tipo $f(x) = cos(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor

O gráfico da figura 43 foi criado a partir da função $f(x) = cos(x)$. Nas próximas figuras usaremos a ferramenta controle deslizante onde podemos mudar valores para função cosseno $f(x) = b.cos(ax + c) + d$, podendo verificar as translações e dilatações horizontais e verticais. Ao usar esse recurso pedagógico o software facilita o entendimento em sala de aula.

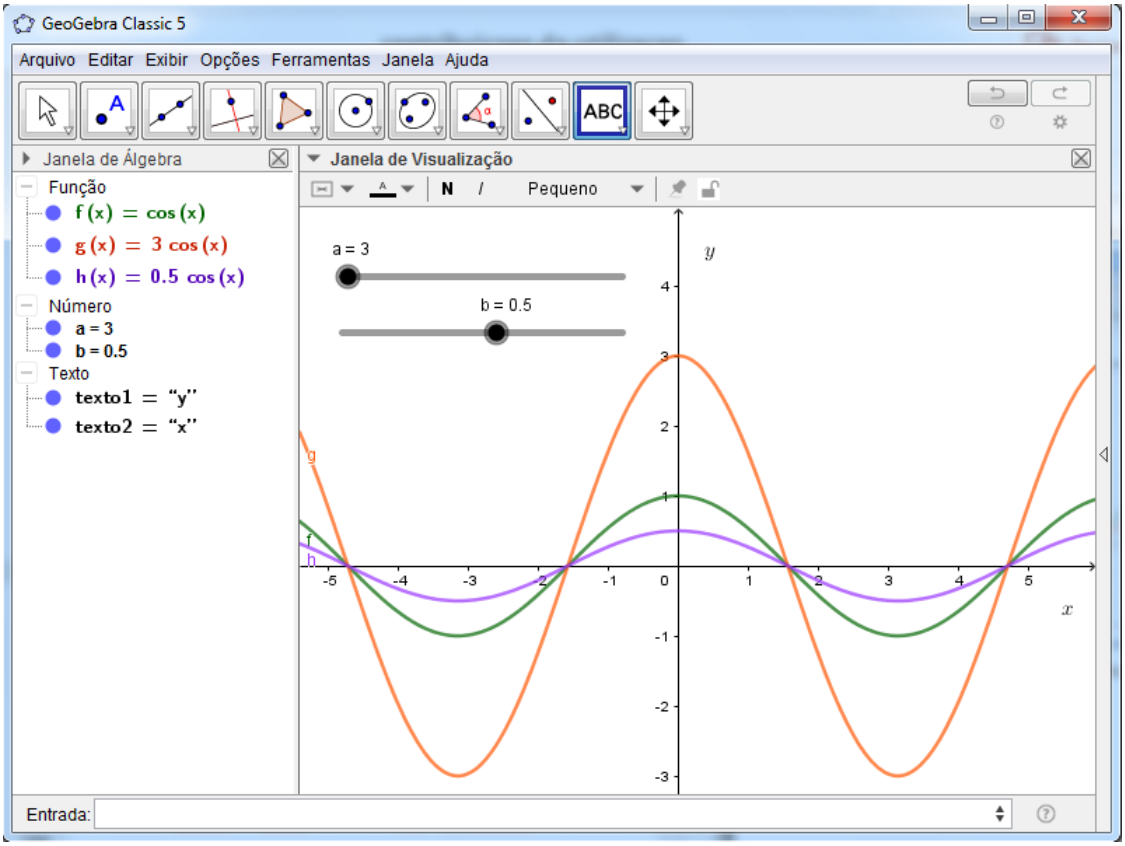
Figura 44 – Gráficos Função Cosseno do tipo $cos(ax)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 44 observa-se que temos a função $f(x) = cos(x)$ de cor verde, $g(x) = cos(3x)$. Note que o termo $a > 1$ de cor vermelha está multiplicando o arco, provocando compressão e um encolhimento horizontal no gráfico; $h(x) = cos(bx)$ note que com o termo $0 < b < 1$ houve uma dilatação gráfico de cor azul, com ambos os termos podendo variar usando a técnica "controle deslizante", temos os marcadores $a, b \in \mathbb{R}$.

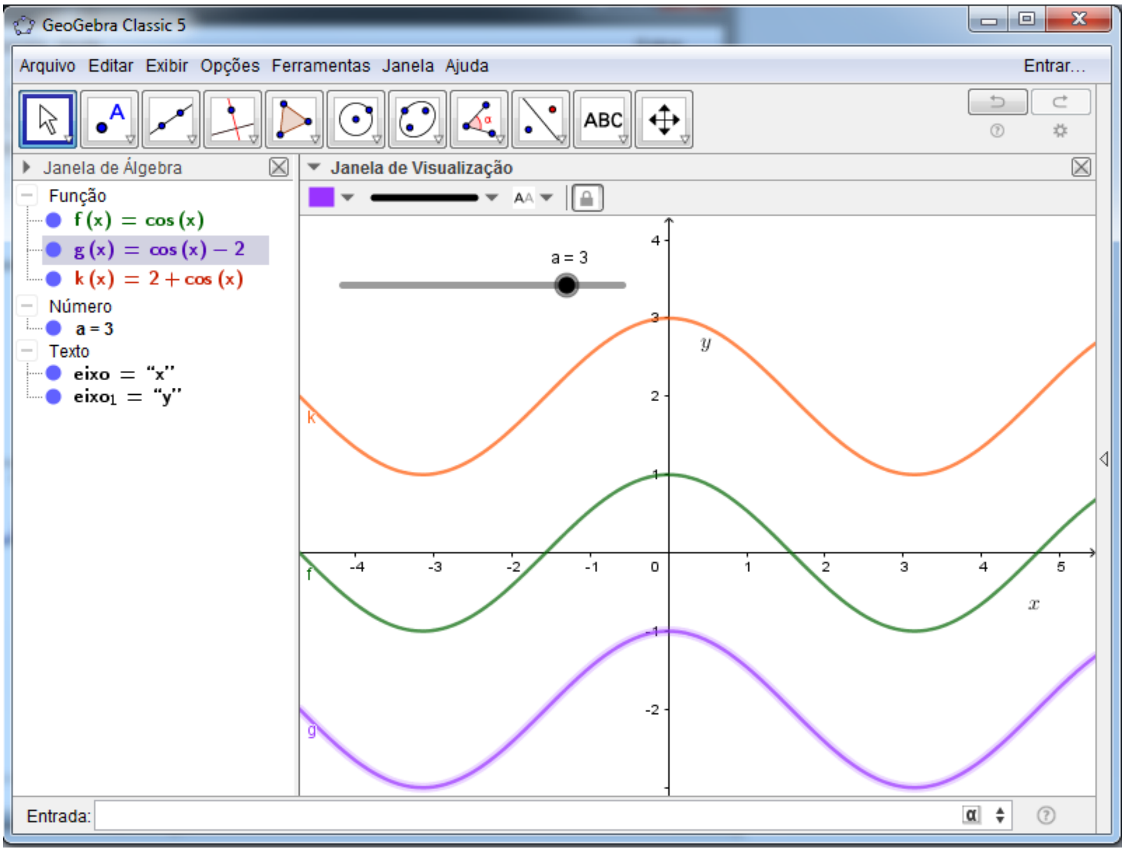
Figura 45 – Gráficos Função Cosseno do tipo $acos(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 45, temos a função $f(x) = cos(x)$ de verde, $g(x) = 3cos(x)$ na cor vermelha, $h(x) = 0.5cos(x)$ na na cor violeta. Notemos que o termo $a > 1$ sofre uma dilatação vertical, e quando o termo $0 < b < 1$ há uma compressão vertical.

Figura 46 – Gráficos Função Cosseno do tipo $cos(x) \pm a$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

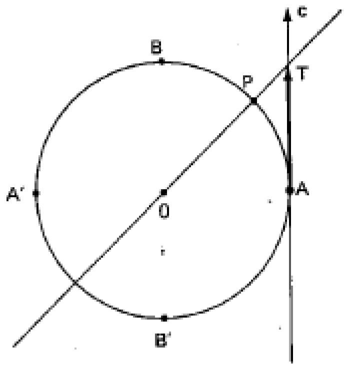
Com essa construção na figura 46, podemos verificar a função $f(x) = cos(x)$ na cor verde, a função $h(x) = 2 + cos(x)$ de cor vermelha. Houve um deslocamento vertical pra cima em duas unidades. Na função $g(x) = cos(x) - 2$ de cor violeta houve um deslocamento vertical pra baixo em duas unidades.

2.10.4 Função Tangente

Definicão 12. *De acordo com (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004) dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Considera a reta $\overline{OP}$ e seja T sua intersecção com eixo das tangentes. Denomina-se tangente de x (indicamos por $tg(x)$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$. Denominamos função tangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{AT} = tg(x)$, isto é, $f(x) = tg(x)$.*

Notemos que, para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, P esta em B ou B' e, então, a reta $\overline{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a $tg(x)$ não é definida.

Figura 47 – Ciclo Função Tangente



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Na figura 47 o triângulo ΔOAT é retângulo em A. Têm-se as seguintes definições.

$tg\hat{O} = \overline{AT} = \dfrac{o}{t}$ e $OA = 1$ onde a, t e o são as medidas dos lados do ΔOAT

.

2.10.4.1 Gráficos Função Tangente

Conforme (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004) façamos x percorrer no intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com a $tg(x)$. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo em sentido anti-horário, a medida algébrica de $\overline{AT}$ varia conforme a tabela.

Figura 48 – Valores da Tangente

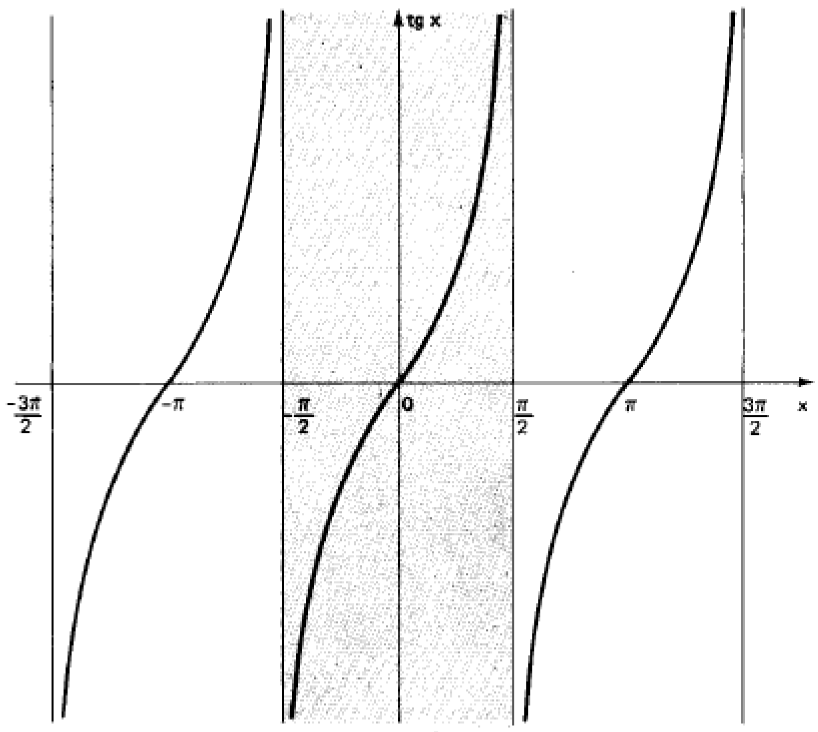
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tg x	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0

Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

A figura 48, nos mostra os valores da função Tangente no intervalo $[0; 2\pi]$.

Fazendo um diagrama com valores de x em abscissas e $tg(x)$ em ordenadas, podemos construir o gráfico seguinte, denominado tangentóide, que nos indica a variação da função $f(x) = tgx$. O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

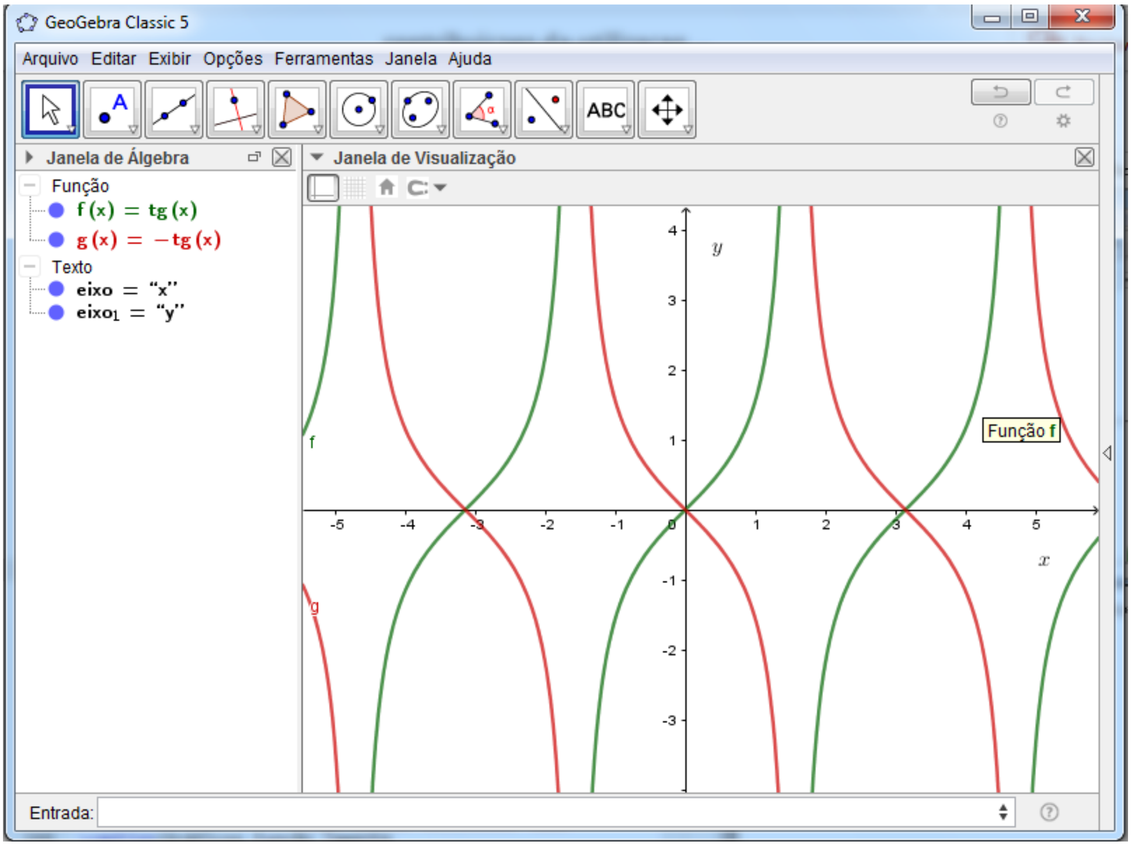
Figura 49 – Gráficos Função Tangente



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Com uso do Geogebra podemos mostrar as translações e dilatações horizontais e verticais na função Tangente. O uso pedagógico do software facilita o entendimento em sala de aula. Conseguimos fazer várias animações ao mesmo tempo.

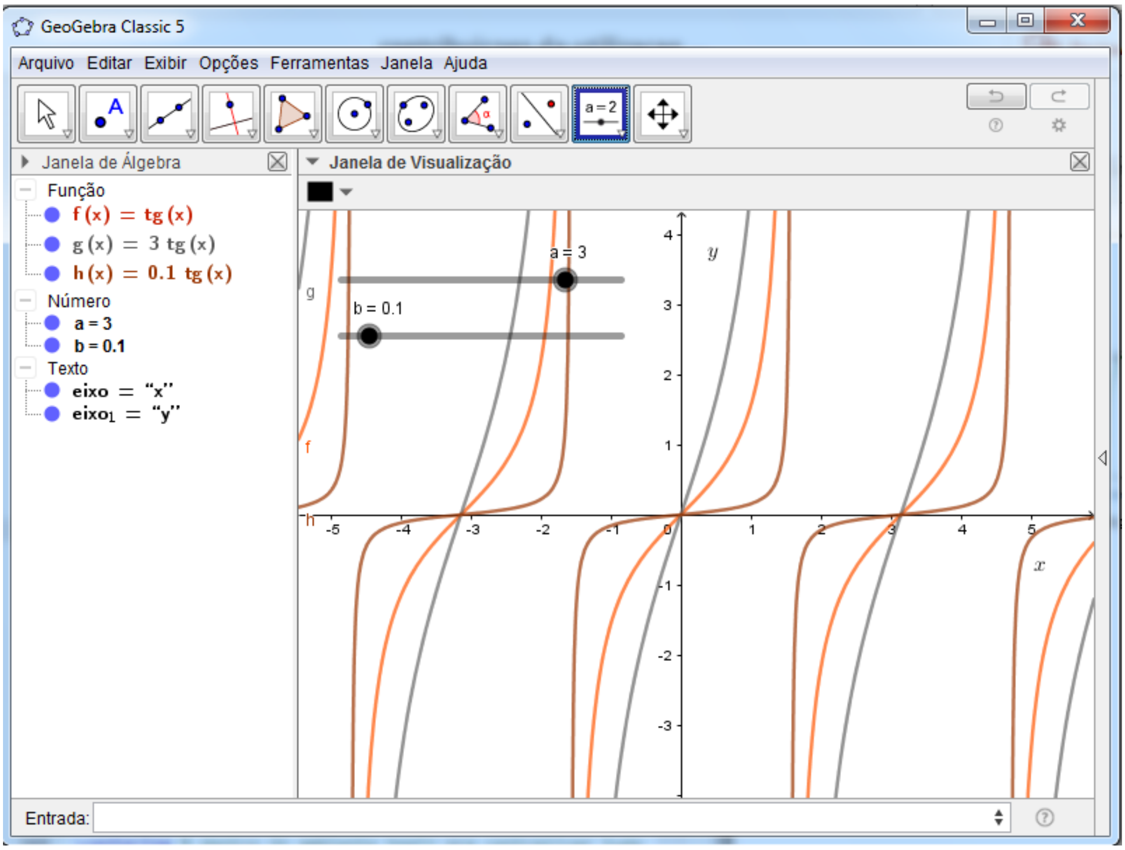
Figura 50 – Gráficos Função Tagente do tipo $\pm tg(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 50 foi construído um gráfico da função $f(x) = tg(x)$ de cor verde e $g(x) = -tg(x)$ de cor vermelha. Nota-se que houve uma reflexão do gráfico em relação ao eixo das abscissas.

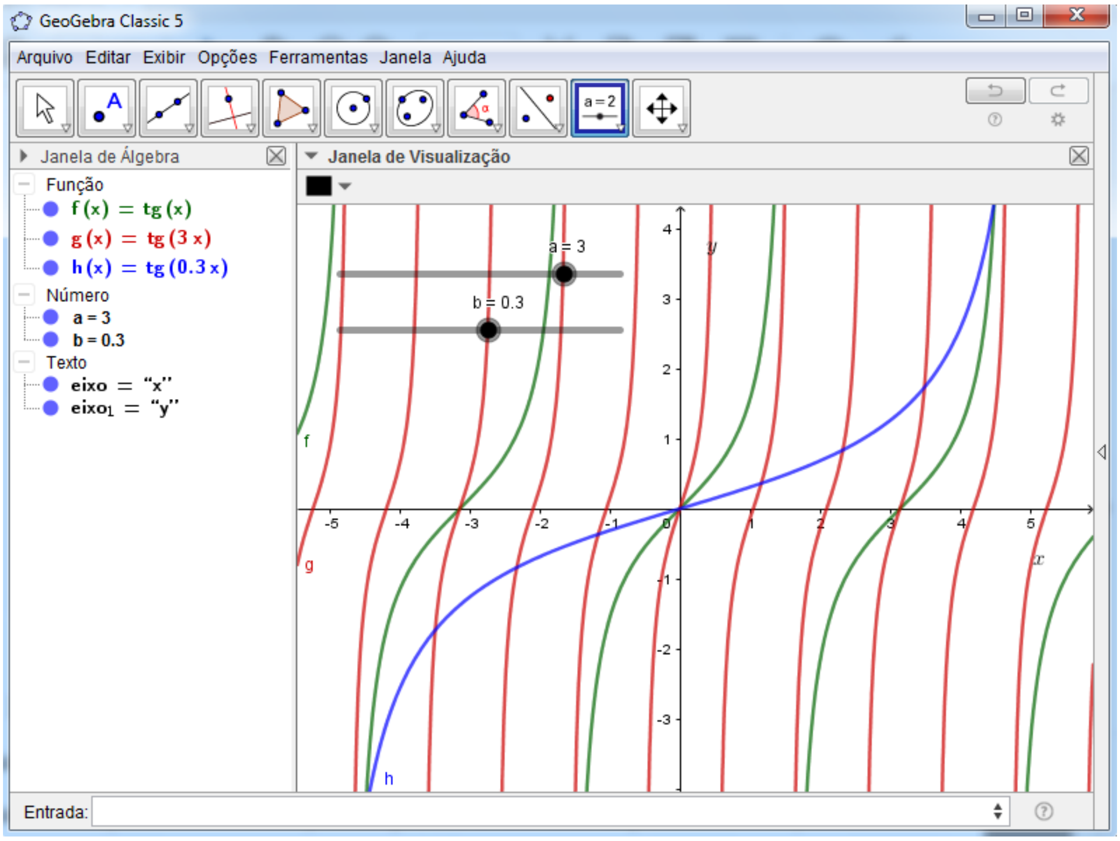
Figura 51 – Gráficos Função Tagente do tipo $atg(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Esta construção da figura 51 nos mostra que houve modificação do gráfico, em relação ao gráfico de $f(x) = tg(x)$ de cor vermelha. Quando usamos o termo $a > 1$, houve uma menor acentuação gráfica mostrada pela função $g(x) = a.tg(x)$. Como exemplo, $f(x) = 3tg(x)$ possui uma acentuação maior quando temos o termo $0 < b < 1$, denotada pela função $f(x) = btg(x)$. Como exemplo, $f(x) = 0,1.tg(x)$, onde os coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$. Para denotar os valores de a, b usa-se o "controle deslizante"pra fazer as variações.

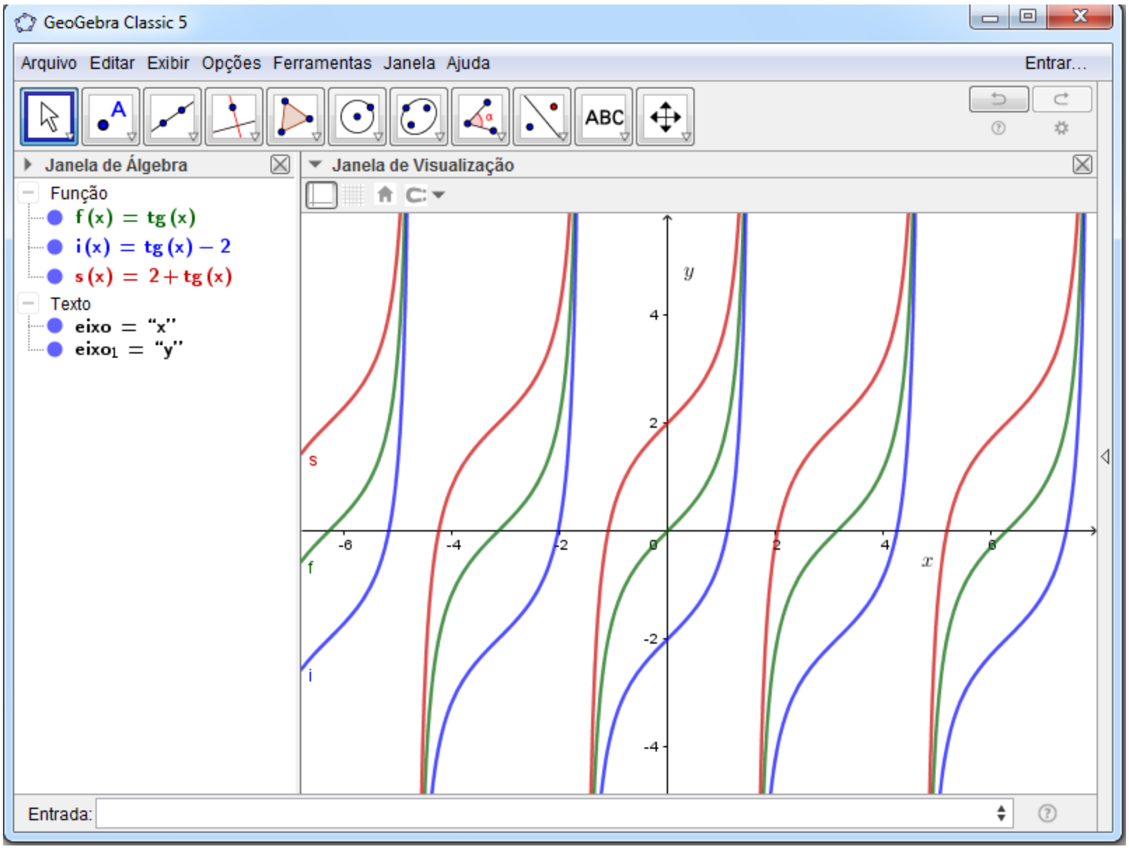
Figura 52 – Gráficos Função Tagente do tipo $tg(ax)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 52, notamos uma modificação no período da função, havendo uma compressão (encolhimento) horizontal no gráfico quando $a > 1$, representada pela função $g(x) = tg(3x)$ de cor vermelha,e uma dilatação horizontal quando termo $0 < b < 1$ na função azul $h(x) = tg(0,3x)$. E a função $f = tg(x)$ de cor verde.

Figura 53 – Gráficos Função Tagente do tipo $tg(x) \pm a$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

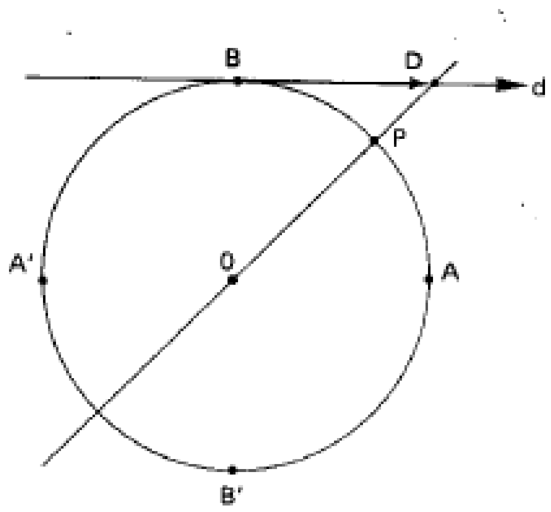
Na figura 53, houve um deslocamento vertical com duas unidades pra cima e duas unidades pra baixo, coforme as funções $s(x) = 2 + tg(x)$ e $i(x) = tg(x) - 2$.

2.10.5 Função Cotangente

Definicão 13. *Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), dado um número real $x, x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta $\overline{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (indicamos $cotgx$) a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$. Denominamos função Cotangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x, x \neq k\pi$, o real $\overline{BD} = cotgx$, isto é, $f(x) = cotgx$.*

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então a reta $\overline{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe ponto D, a *cotgx* não é definida.

Figura 54 – Ciclo Função Cotangente



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Com a análise da figura 54, (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004) dado um número real x, $x = k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overline{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x e indicamos por $cotg(x)$ a medida algébrica do segmento $\vec{BD}$. Denomina função Cotangente a função $f : D \to R$ que associa a cada real $x, x \neq k\pi$, o real $\overline{BD} = cotg(x)$, isto é, $f(x) = cotg(x)$.

Nota-se que para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então a reta $\overline{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe ponto D a $cotgx$ não é definida. No triângulo formado pelos pontos ΔOBD, este é retângulo em B, possui as seguintes definições.

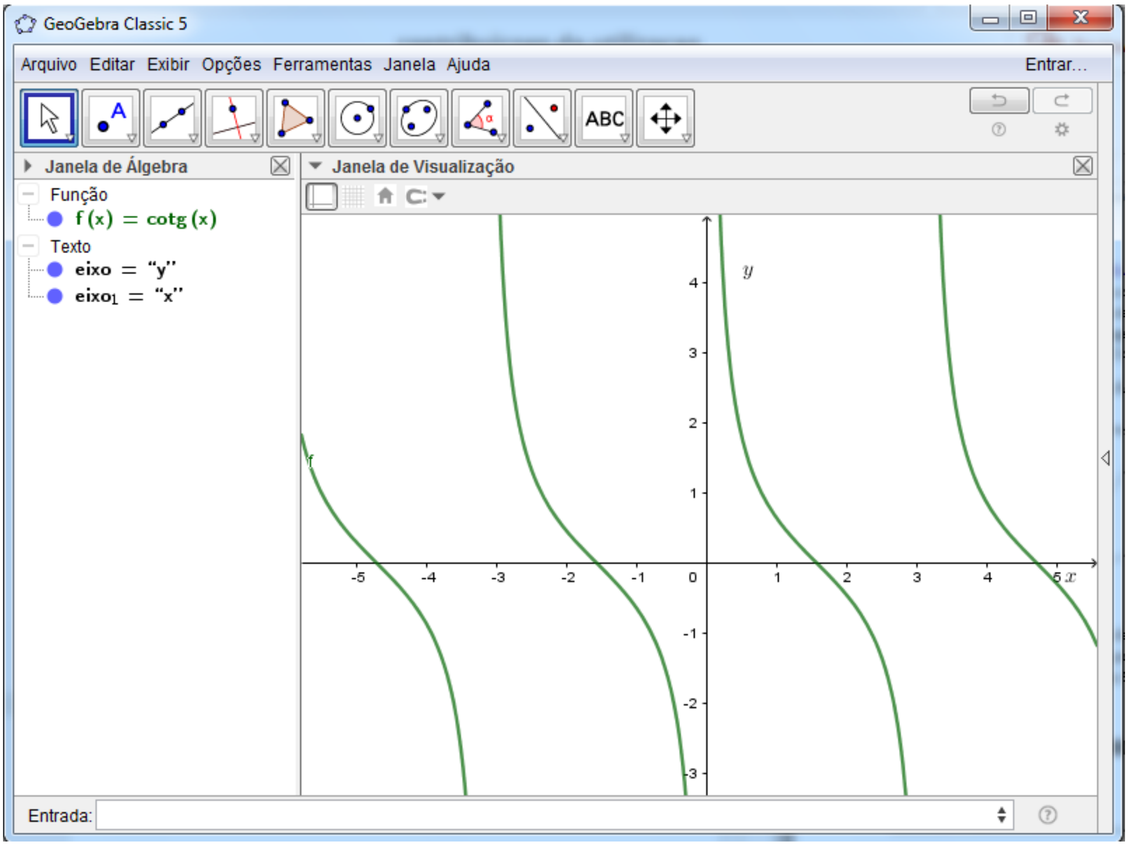
$$cotg\hat{O} = \frac{o}{d}, \text{ onde } b, d \text{ e } o \text{ são os lados do mesmo.}$$

Observa-se que para calcular o valor numérico da cotangente será feito o inverso da tangente.

2.10.5.1 Gráficos função Cotangente

Com uso do Geogebra, podemos mostrar as translações e dilatações horizontais e verticais na função Cotangente. Seguem algumas visualizações gráficas com o software:

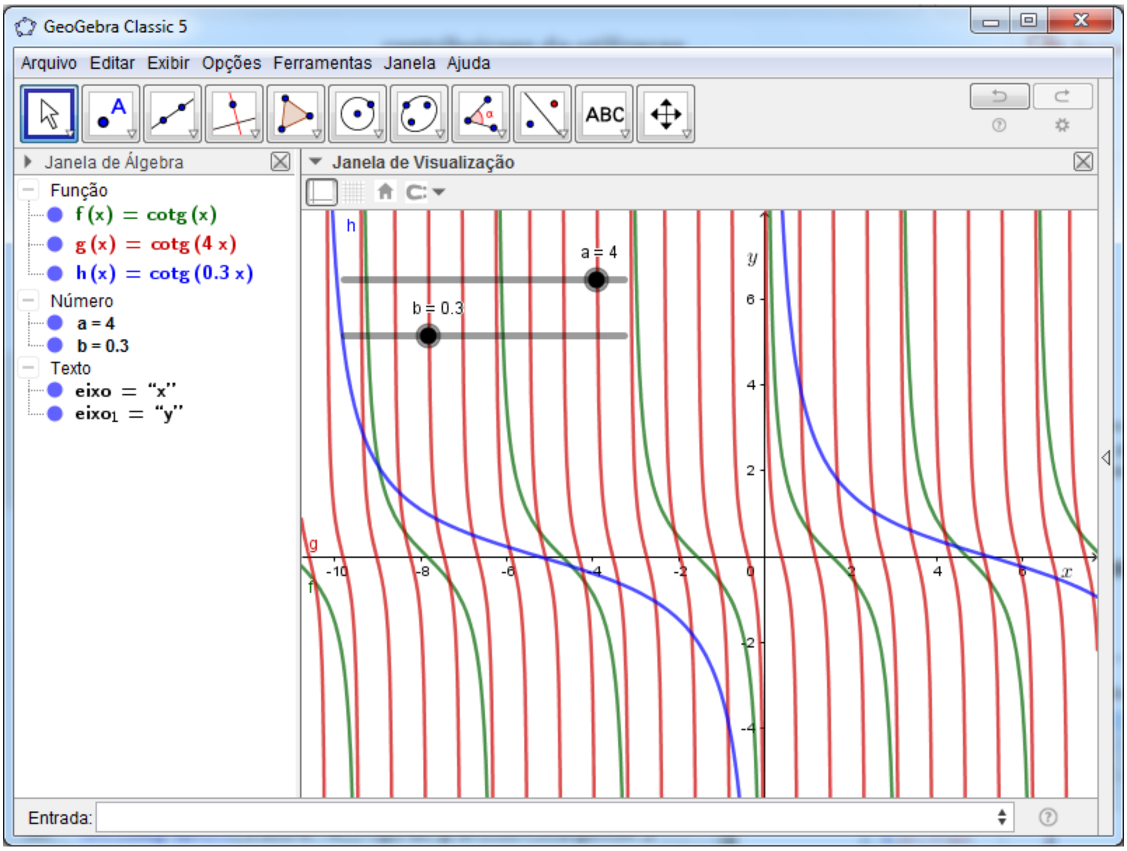
Figura 55 – Gráficos Função Cotangente do tipo $cotg(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

A figura 55 é o gráfico Cotangente usando o Geogebra.

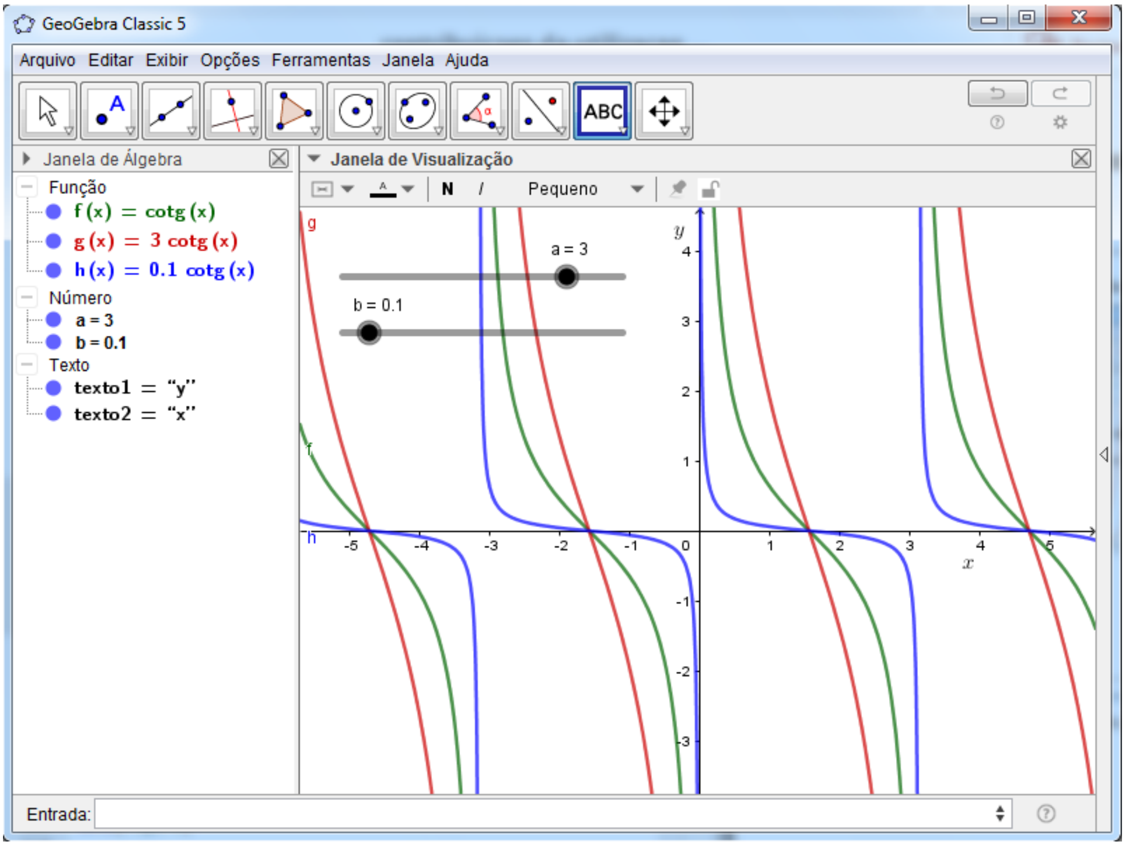
Figura 56 – Gráficos Função Cotangente do tipo $cotg(ax)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Com auxílio do Geogebra, nota-se que o gráfico da figura 56 sofreu modificação no período da função houve encolhimento uma compressão horizontal quando $a > 1$ representada pela função $g(x) = cotg(4x)$ de cor vemelha, onde o termo a sofre variações devido o uso da ferramenta "controle deslizante". Com a análise da função $h(x) = cotg(0,3x)$ temos o termo $0 < b < 1$ gráfico de cor azul, sofre dilatação horizontal. Utilizamos a ferramenta de controle deslizante pra fazer as variações nos coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$.

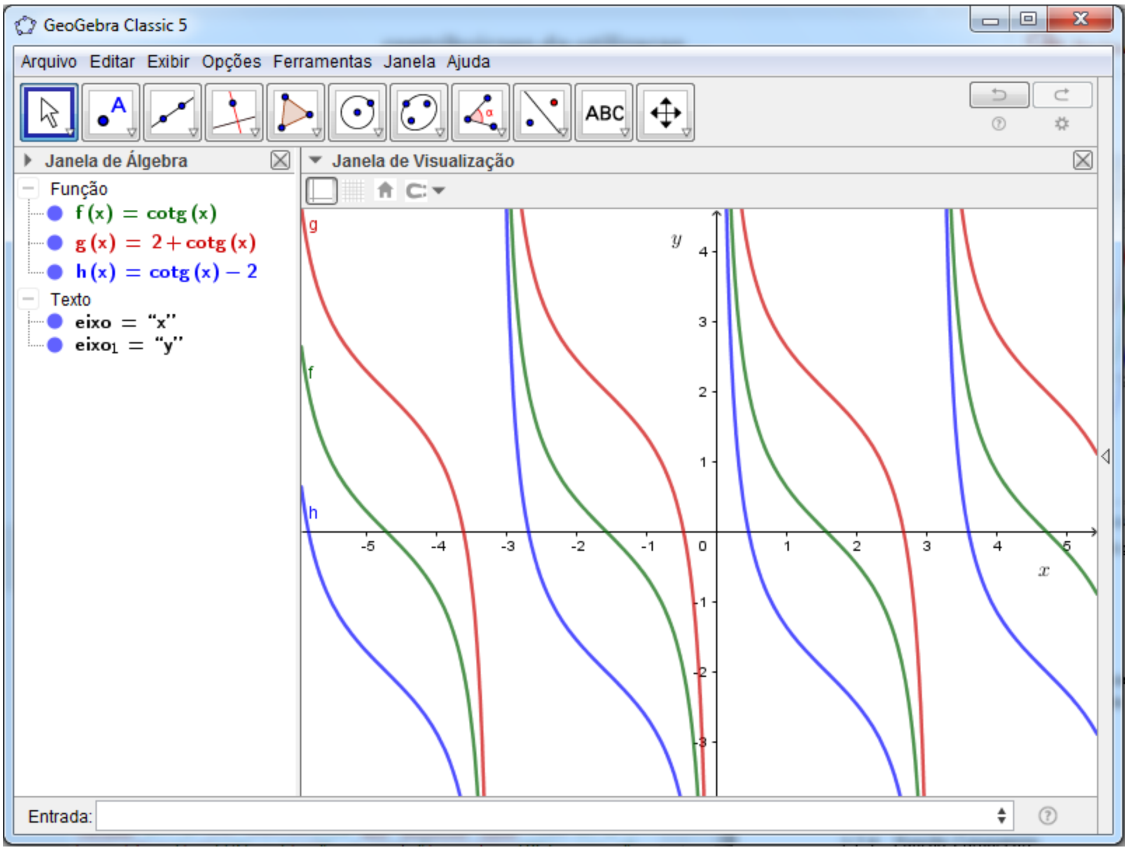
Figura 57 – Gráficos Função Cotangente do tipo $acotg(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

A figura 57 nos mostra que houve modificação do gráfico em relação ao gráfico $f(x) = cotg(x)$ de cor verde. Quando usamos o termo $a > 1$, há uma menor acentuação no gráfico mostrada pela função $f(x) = a.cotg(x)$ como exemplo $g(x) = 3cotg(x)$ e com acentuação maior quando temos termo $0 < b < 1$, denotada pela função $h(x) = bcotg(x)$ como exemplo $f(x) = 0,1.cotg(x)$.

Figura 58 – Gráficos Função Cotangente do tipo $cotg(x) \pm a$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

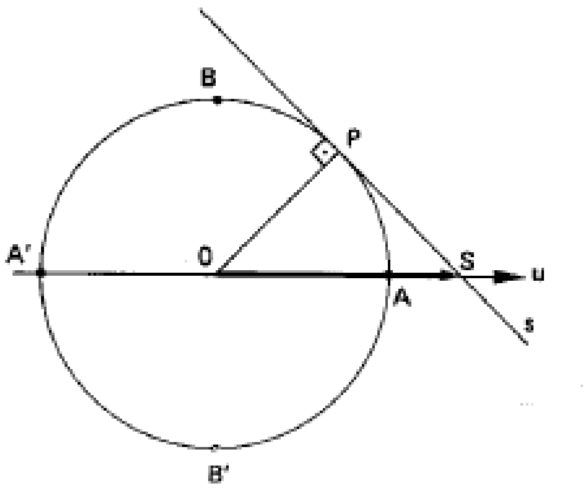
Na figura 58 houve um deslocamento vertical com duas unidades pra cima, ocorrida na função $g(x) = 2 + cotg(x)$ de cor vermelha e duas unidades pra baixo, ocorrida na função $h(x) = cotg(x) - 2$ de cor azul.

2.10.6 Função Secante

Definicão 14. *Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004), dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S a intersecção com eixo dos cossenos. Denominamos função Secante de x (e indicamos por $secx$) a abscissa $\overline{OS}$ do ponto S. Denominamos função secante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa cada real $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{OS} = secx$, isto é, $f(x) = secx$.*

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a $secx$ não é definida.

Figura 59 – Ciclo Função Secante



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

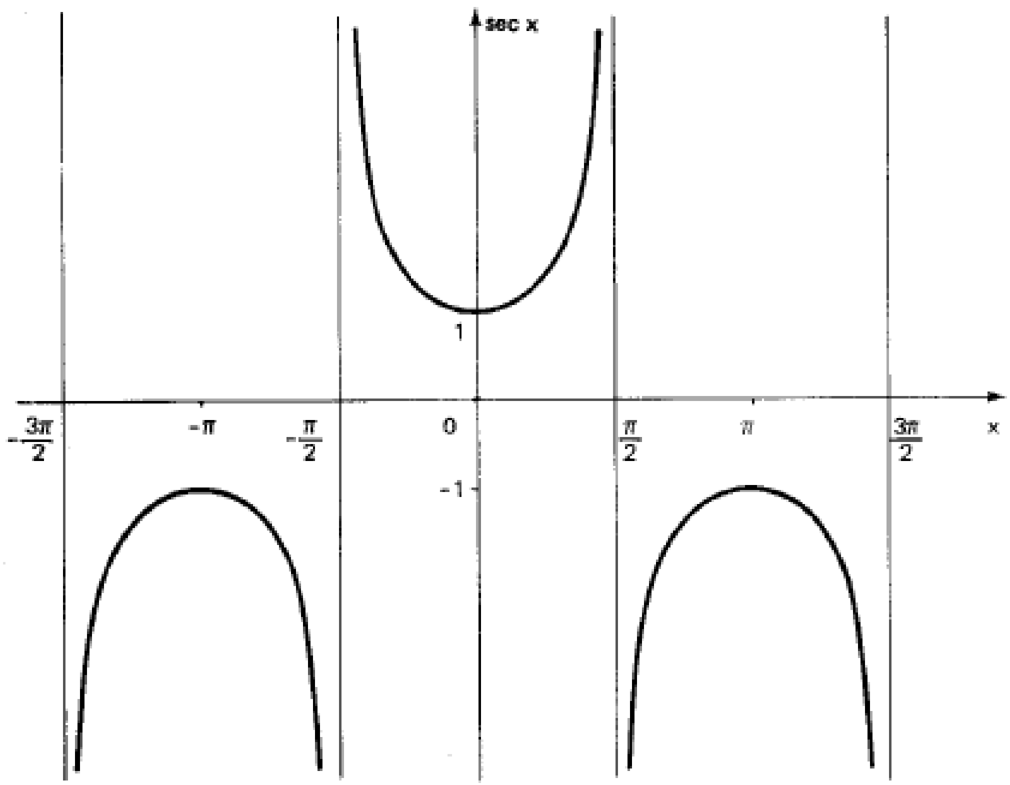
Nota-se que, para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Neste caso não existe o ponto S e a $secx$ não é definida. Na figura 59 o triângulo formado pelos pontos ΔOPS retângulo em P, tendo as seguintes definições:

$$sec\hat{O} = \frac{1}{cos\hat{O}} = \frac{p}{s}, \text{ onde } o, p \text{ e } s \text{ são as medidas dos lados do } \Delta OPS.$$

2.10.6.1 Gráficos envolvendo a função secante

Primeiramente monstraremos a Secante no intervalo $[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}]$

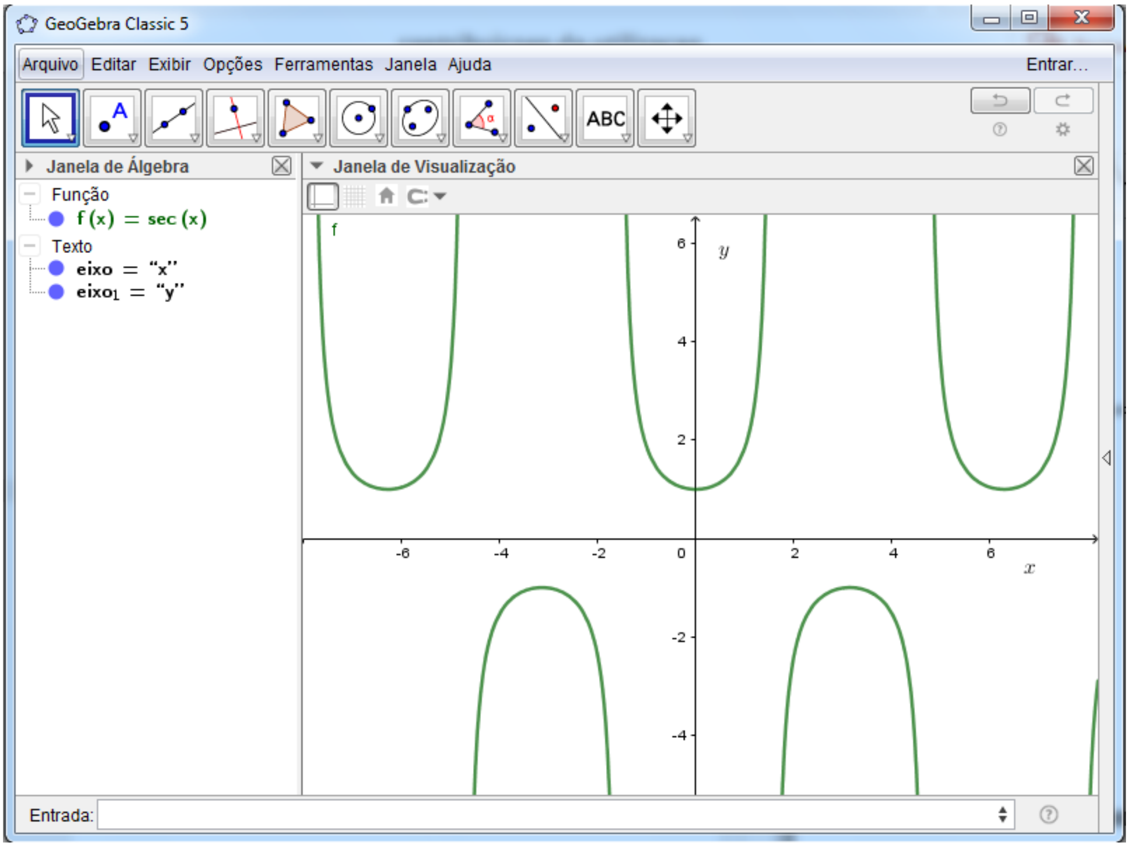
Figura 60 – Gráficos Função Secante



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Analisando a figura 60, temos que os valores da secante $(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ ficam indefinidos. Posteriormente, com o uso do Geogebra, foi constuído o mesmo gráfico para mostrar o comportamento da Secante, onde ela sofre translações e dilatações.

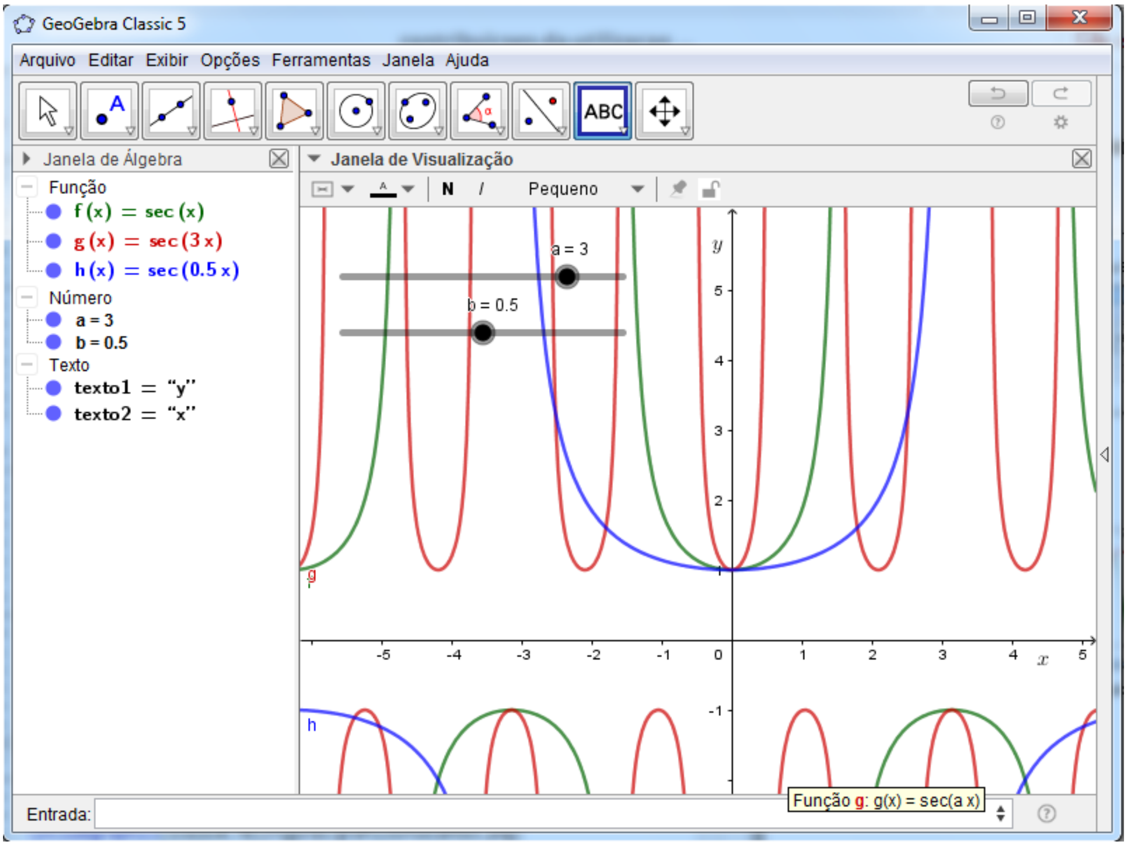
Figura 61 – Gráficos Função Secante Usando Geogebra



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

A figura 61 nos mostra o gráfico da Secante com o uso do Geogebra, representada por $f(x) = sec(x)$.

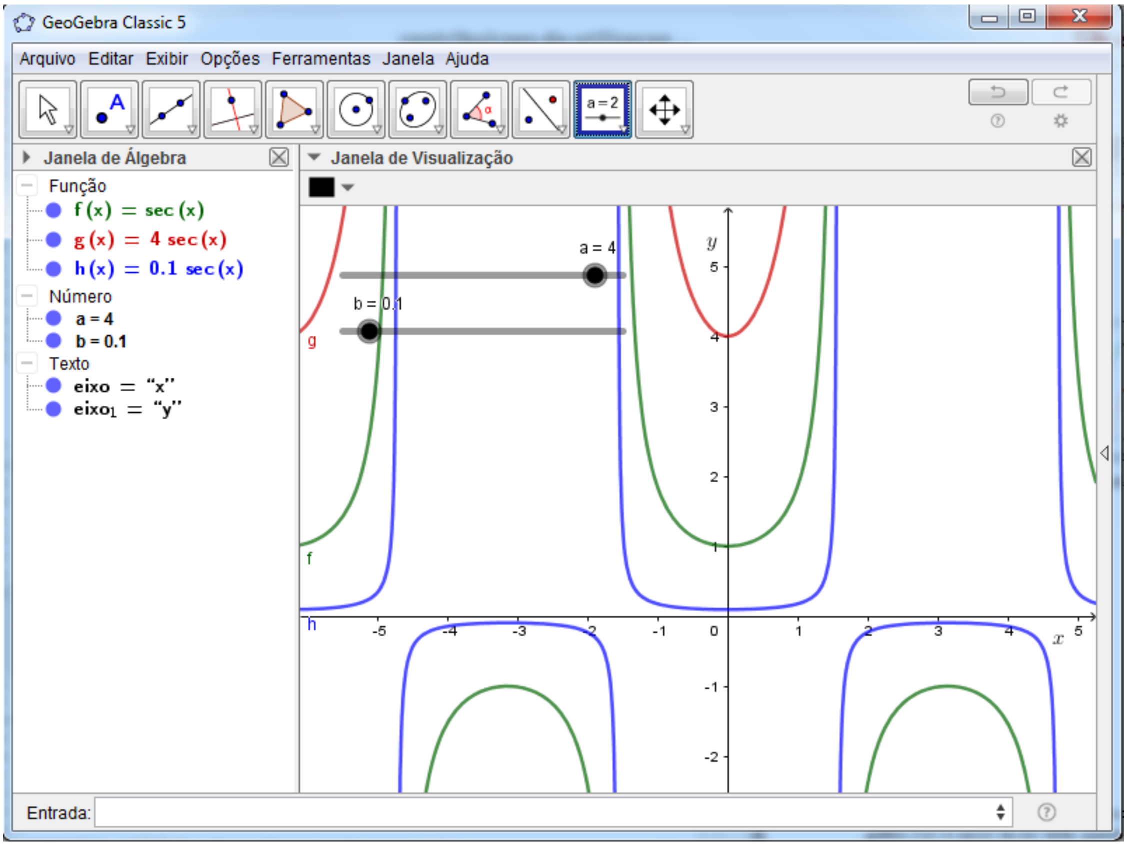
Figura 62 – Gráficos Função Secante do tipo $sec(ax)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 62 o gráfico sofreu modificação no período da função, havendo um encolhimento e uma compressão horizontal quando $a > 1$, representada pela função $g(x) = sec(3x)$ de cor vemelha, onde o termo a sofrendo variações devido uso da ferramenta "controle deslizante". Com a análise da função $h(x) = sec(0,5x)$ temos termo $0 < b < 1$ gráfico de cor azul, sofre dilatação horizontal, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

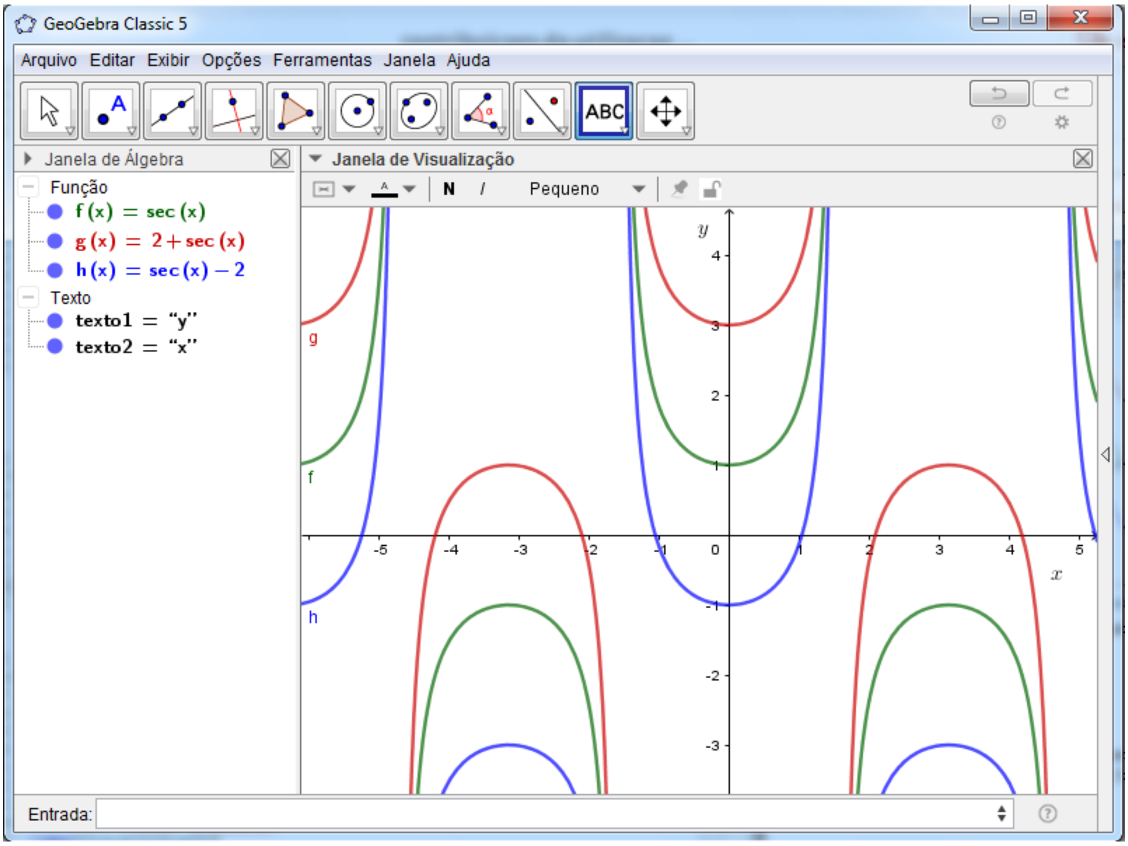
Figura 63 – Gráficos Função Secante do tipo $asec(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

A 63 mostra que houve modificação, em relação ao gráfico $f(x) = sec(x)$ de cor verde. Quando usamos o termo $a > 1$ há uma menor acentuação no gráfico mostrada pela função $g(x) = asec(x)$ como exemplo $f(x) = 4sec(x)$ e com acentuação maior quando temos termo $0 < b < 1$ denotada pela função $h(x) = bsec(x)$ como exemplo $f(x) = 0,1sec(x)$.

Figura 64 – Gráficos Função Secante do tipo $sec(x) \pm a$



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

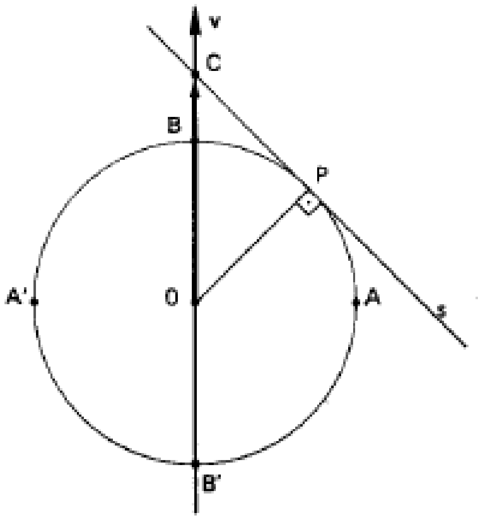
Na figura 64 houve um deslocamento vertical com duas unidades pra cima e duas unidades pra baixo coforme as funções $g(x) = 2+sec(x)$ na cor vermelha e $h(x) = sec(x)-2$, na cor azul.

2.10.7 Função Cossecante

Definicão 15. *Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004) dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos s a reta no ciclo tangente ao cilco em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos Cossecante de x e indicamos por $cossec(x)$ a ordenada $\overline{OC}$ do ponto C. Denominamos função Cossecante a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{OC} = cossec(x)$, isto é, $f(x) = cossec(x)$.*

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe ponto C, a $cossec(x)$ não é definida.

Figura 65 – Ciclo Função Cossecante



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

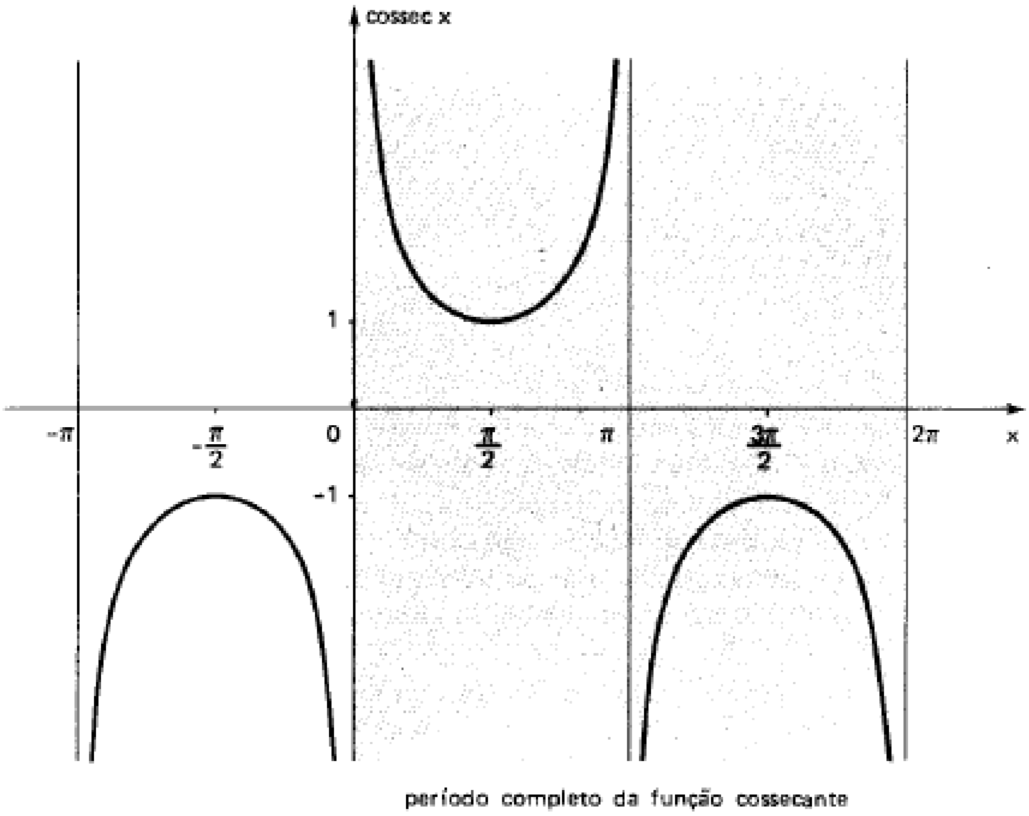
Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a $cossec(x)$ não é definida.No triângulo formado pelos pontos ΔOCP o mesmo é retângulo em P, possuindo as seguintes definições.

$$cossec(\hat{O}) = \frac{1}{sen(\hat{O})} = \frac{p}{o}, \text{ onde } o, p \text{ e } s \text{ são as medidas dos lados do } \Delta OCP.$$

2.10.7.1 Gráficos Função Cossecante

Na figura 66 temos uma cossecante de valor não definido $\{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$ e o gráfico correspondente confeccionado com o software Geogebra.

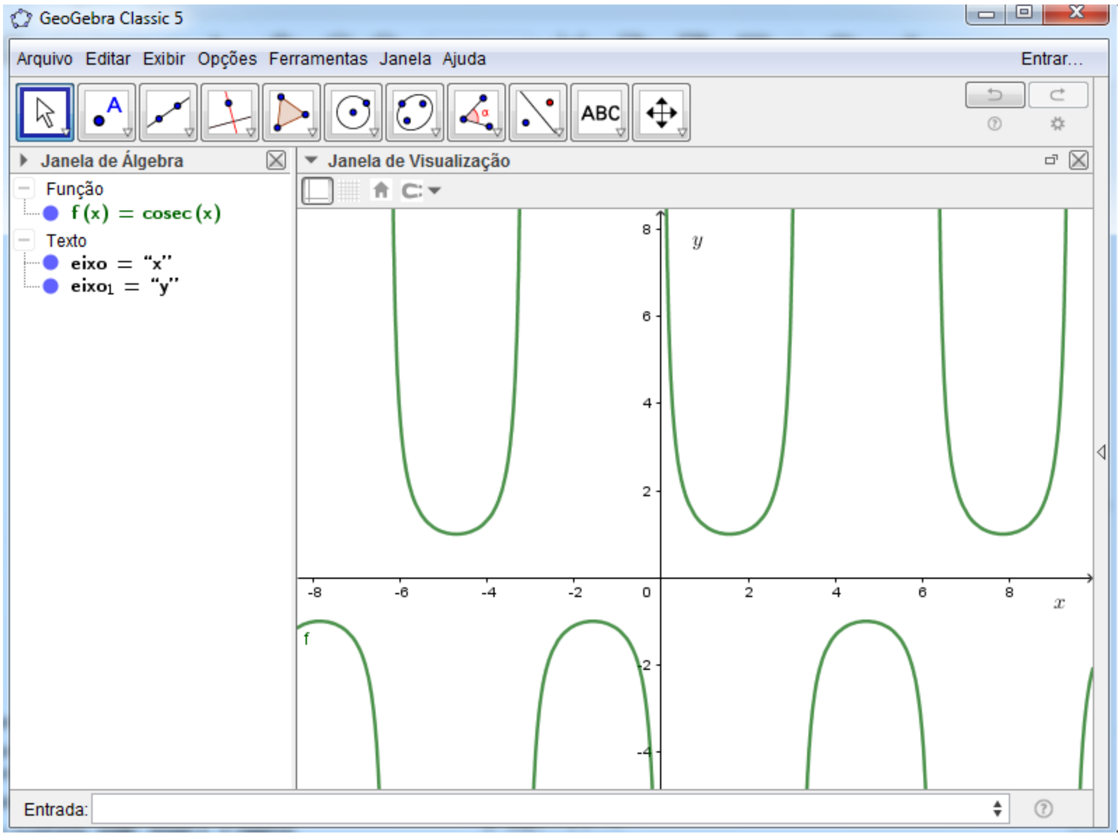
Figura 66 – Gráficos Função Cossecante do tipo $cossec(x)$



Fonte:(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004)

Na figura 66 temos o gráfico da Cossecante, definida por $f(x) = cossec(x)$.

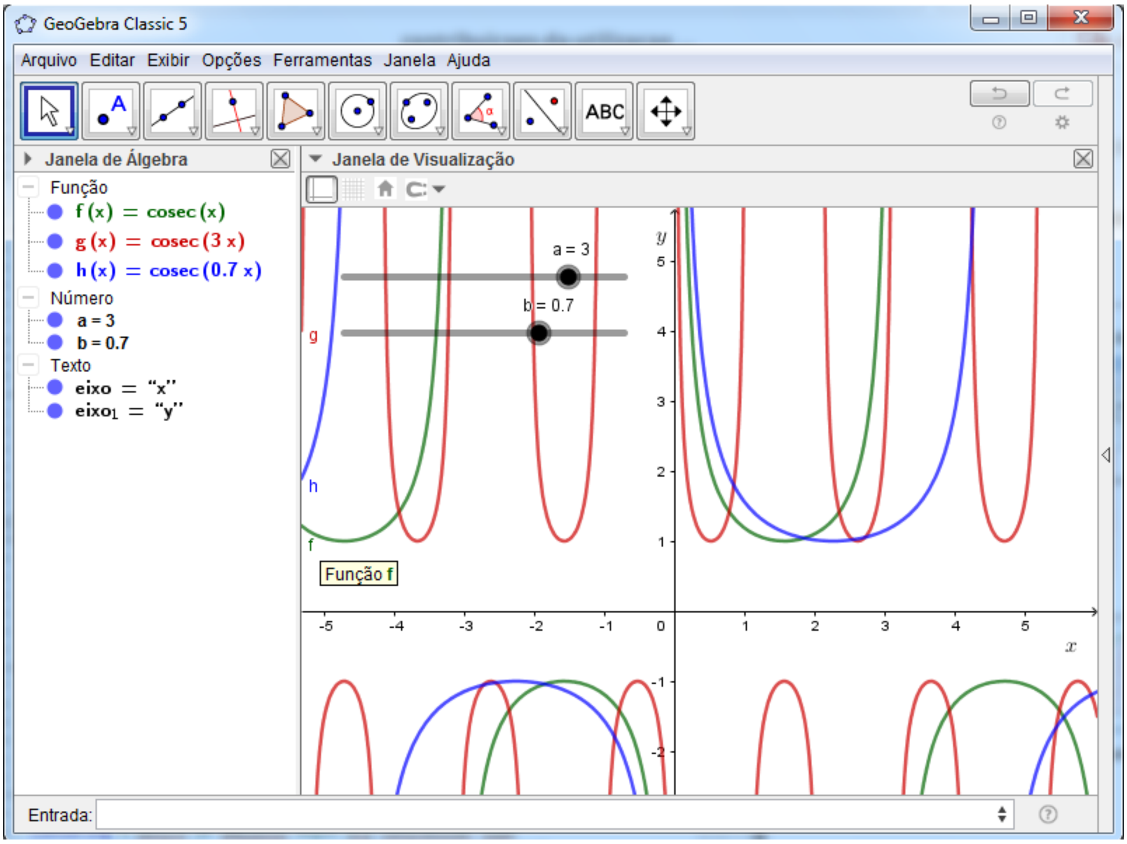
Figura 67 – Gráficos Função Cossecante



Fonte:Produzido pelo próprio autor

A figura 67 ilustra a função $f(x) = cossec(x)$, construída com o uso do Geogebra. Posteriormente, construiremos gráficos da função Cossecante com dilatações e translações.

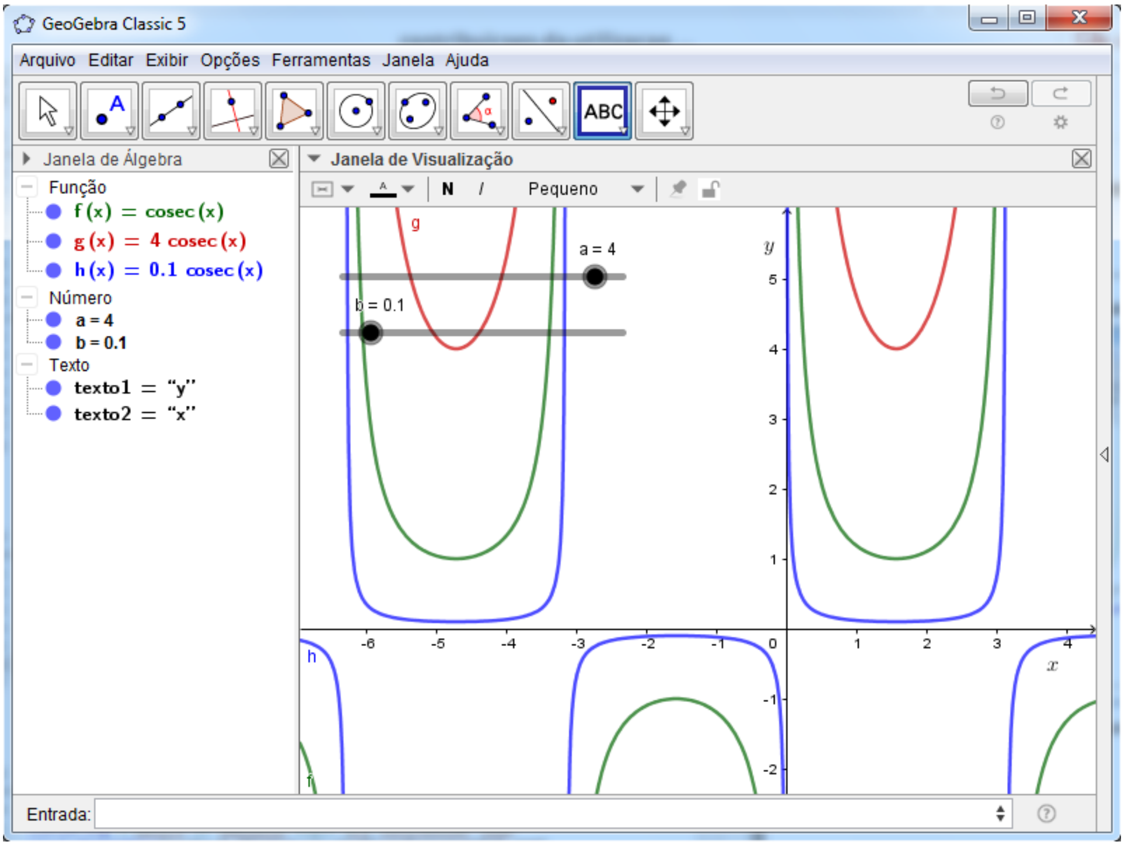
Figura 68 – Gráficos Função Cossecante do tipo $cossec(ax)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Na figura 68 o gráfico sofreu modificação no período da função, havendo um encolhimento e uma compressão horizontal quando $a > 1$, representada pela função $g(x) = cossec(3x)$ de cor vemelha, onde o termo a sofre variações devido o uso da ferramenta "controle deslizante". Analisando a função $h(x) = cossec(0,7x)$ temos o termo $0 < b < 1$ gráfico de cor azul, sofrendo dilatação horizontal, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

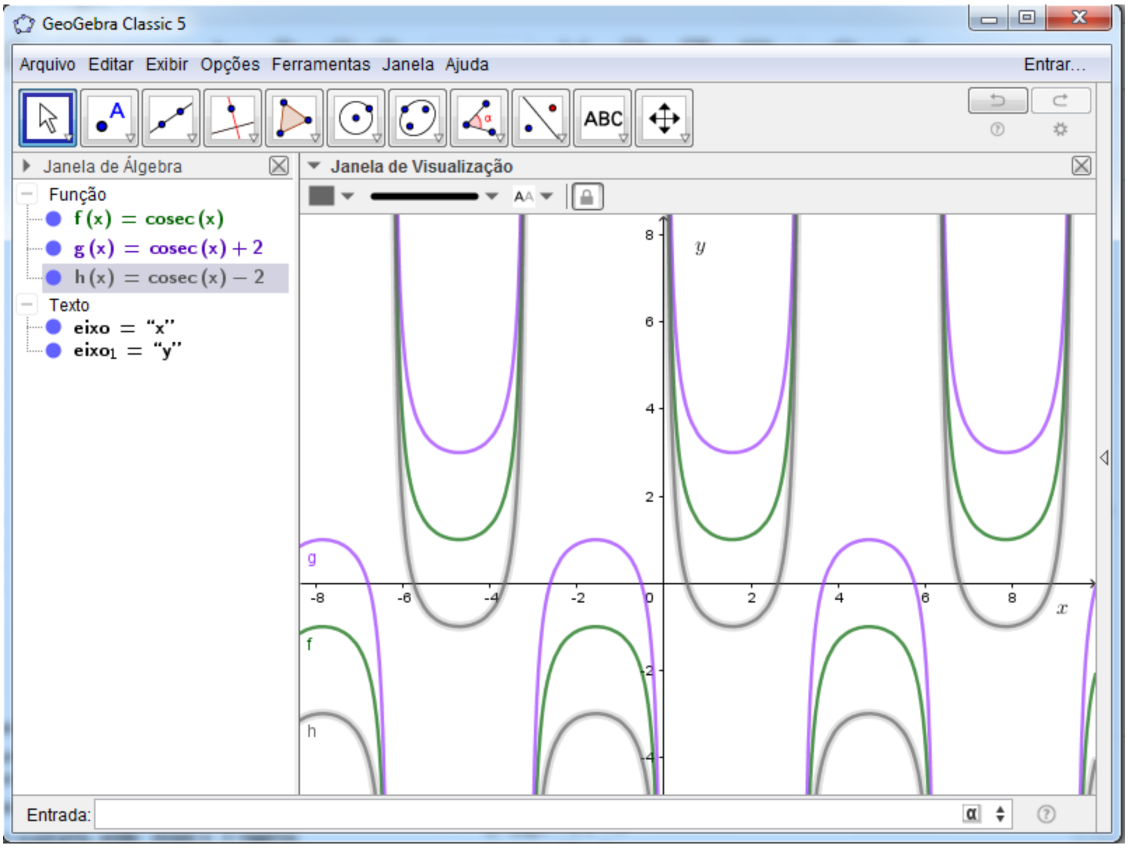
Figura 69 – Gráficos Função Cossecante do tipo $acossec(x)$



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Esta construção da figura 69 nos mostra que houve modificação do gráfico, em relação ao gráfico $f(x) = cossec(x)$ de cor verde. Quando usamos termo $a > 1$ há uma menor acentuação no gráfico mostrada pela função $g(x) = acossec(x)$ como exemplo $g(x) = 4cossec(x)$ e com acentuação maior quando temos termo $0 < b < 1$ denotada pela função $h(x) = bcossec(x)$ como exemplo $h(x) = 0,1cossec(x)$.

Figura 70 – Gráficos Função Cossecante do tipo $cossec(x) \pm a$



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Na figura 70 houve um deslocamento vertical com duas unidades pra cima e duas unidades pra baixo conforme as funções $f(x) = cossec(x) + 2$ de cor vermelha e $f(x) = cossec(x) - 2$ de cor azul, ambas relacionado com a função $f(x) = cossec(x)$ de cor verde.

3 Aplicações de Funções usando Modelagem Matemática e Geogebra

Neste capítulo traremos alguns conceitos de como trabalhar a técnica de modelagem matemática, mostrando alguns resultados da utilização dessa técnica com exemplos resolvidos. Vale ressaltar que utilizaremos como recurso didático o Geogebra para demonstrar o comportamento dos gráficos das funções.

3.1 Uma noção conceitual do que seria Modelagem Matemática

Num primeiro momento, é notório que a educação no Brasil necessita de uma modificação drástica, investimento na infra instrutura, no ambiente escolar, na qualificação dos profissionais ligados a educação, enfim, uma série de fatores interligados. Mas o governo não mostra preocupação em tal melhoria ou em buscar uma educação de qualidade. O mesmo trata a educação com descaso total, chegando a considerar o dinheiro utilizado como despesa e não como investimento. Neste contexto os professores, com o pouco resurso disponível, tem que se reinventar, buscando alternativas para transmitir seu conhecimento com qualidade.

A Matemática desde seu surgimento é uma ciência usada pelo ser humano para facilitar e organizar o meio onde vive, além de ter como finalidade a resolução de problemas práticos. Ela está presente em várias áreas do conhecimento: na Física, Química e Biologia e outras. A busca implacável de estratégias ou metodologias para o Ensino de Matemática vem sendo um desafio constante na vida dos docentes em todos os âmbidos, ensino básico e superior.

Segundo (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014), a respeito da realidade do ensino de matemática no Brasil.

> Ensinamos demais e os alunos aprendem de menos e cada vez menos! Aprendem menos porque os assuntos são cada vez mais desinteressantes mais desligados da realidade dos fatos e dos objetivos mais distantes da realidade da vida dos adolescentes, (WERNECK, 1987, p. 13).

Na prática, em sala de aula, o educador da disciplina de Matemática precisa criar metodologias diversificadas para conseguir melhorar a qualidade do ensino de forma que esta sejam satisfatórias para sua realidade. Neste trabalho, iremos corroborar a ideia de se trabalhar o Ensino de Matemática com o auxílio da modelagem matemática, utilizando o sistema dinâmico Geogebra, ferramenta poderosa que se apresenta como alternativa para ensino aprendizagem. Ele permite o trabalho com as funções, pois as coordenadas podem ser inseridas diretamente no software. Segundo (BIEMBENGUT; HEIN, 2010, p. 11), ao longo da história o ser humano sempre recorreu aos "modelos":

> tanto para comunicar-se com seus semelhantes como para preparar uma ação. Neste sentido, a modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento.

Na visão de (BIEMBENGUT; HEIN, 2010, p. 9) "a Matemática é o alicerce de quase todas as áreas do conhecimento, podemos desenvolver os níveis cognitivos e criativos, nos diversos graus de escolaridade"é uma disciplina que consegue excitar as habilidades dos alunos, tornando-os criativos, resolvedores de problemas e sabedores do que é "modelar".

Não existe uma definição única do que seja modelagem matemática, tanto na fala de educadores quanto na fala de pesquisadores sobre o assunto. Pesquisas a respeito nos levam a conclusão de que existem diversas linhas nesse segmento. A maioria, no entanto, identifica o modelo como a descrição de um problema em termos reais onde a resolução é estudada, sistematizada em informações matemáticas e trazidas de volta ao problema original. Temos vários pesquisadores discutindo sobre a aplicação da modelagem Matemática no ensino. Alguns deles (BASSANEZI, 2010)(BARBOSA, 2002)(BIEMBENGUT; HEIN, 2010) trazem ideias de relacionar conteúdos escolares com problemas reais, uma vez que a matemática escolar está engajada na formação do cidadão em um todo. Essa técnica de ensino vem sendo praticada desde a década de 70, (BIEMBENGUT; HEIN, 2010) implantação desta metodologia necessita de um pouco de flexibilidade, criatividade e persistência por parte dos professores e dos alunos.

Segundo (BARBOSA, 2002) entende-se que a modelagem como ambiente de aprendizagem favorece a investigação de outras áreas do conhecimento.

> Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas conhecimento. Se tomarmos modelagem de um ponto de vista sócio-crítico, a indagação ultrapassa a formulação ou compreenção de um problema, integrando os conhecimentos de matemática, de modelagem e reflexivo.

Segundo (BIEMBENGUT; HEIN, 2010) compreende-se que para transformar uma situação ocorrida no cotidiano em uma situação real, utilizando modelos matemáticos, são necessárias três etapas fundamentais (tendo ainda outras subdivisões), são elas.

Interação

- Reconhecimento da situação-problema;
- Familiarização com o assunto a ser modelado referencial teórico.

Matematização:

- Formalização do problema;

- Resolução do problema em termos do modelo.

Modelo Matemático

- Interpretação da solução;
- Validação do modelo.

Segue a explicação dessas etapas segundo (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014) A "interação" esboça uma determinada situação que se anseia explorar. Deve-se fazer uma pesquisa sobre o assunto de maneira direta ou indireta em revistas, livros ou em dados experimentais. Não há necessidade de se obedecer a uma ordem rigorosa a fim de se alcançar a etapa seguinte, porém, deve-se frisar que quanto mais se estudar nesta etapa, (isto é, houver interação com os dados), mais a situação problema tornar-se há mais clara e acessível.

A "matematização" é a etapa mais complexa dentre todas. É uma etapa crucial do modelo matemático. Nesta etapa se traduz o problema para a linguagem matemática. Nesta fase, o modelador deve ter paciência, fazer uso de toda linguagem matemática que possui, ser criativo e, além disso, fazer uso de toda a sua experiência acumulada afim de que possa "matematizar" a situação-problema proposta. Estes são pontos imprescindíveis na construção deste processo.

A última etapa sugerida por Biembengut e Hein (2010) são os "Modelos Matemáticos". Nesta etapa, deve-se analisar as conclusões do modelo, isto é, quais implicações têm a solução procedida daquilo que está sendo estudado. Verifica-se sua adaptabilidade, regressando à situação-problema pesquisada ponderando quão expressiva e proeminente é a solução e sua validação. Deve-se ficar atento, pois se o modelo não acolher às necessidades que a originou, o procedimento deve ser recomeçado na etapa "matematização" fazendo os ajustes necessários para se conseguir os resultados ambicionados. Na busca em que modelar, o interessante não é trazer o problema para os alunos e sim incentivá-los a pesquisar e definir o que fazer. A partir desse momento, aparecem algumas situações importantes: uma delas, seria de trazer conteúdos a serem trabalhados, provalvemente alguns já conhecidos, outros não, caso nã tenha conhecimento prévio de determinado conteúdo, primeiramente, seria importante fazer uma explanação do que se trata o assunto, posteriormente prosseguir com as atividades de modelagem. São situações que mostra que a Matemática é diversificada.

> ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 44)

Dessa maneira, mesclar a técnica de modelagem com uso do sistema dinâmico Geogebra, pode nos proporcionar um ensino de qualidade em qualquer nível de escolaridade, o docente sempre deve buscar mecanismo de ensino.

Vale ressaltar que as tecnologias invadem e compõem o cotidiano em diferentes lugares, estando inserida em todas as áreas do conhecimento humano. O uso das Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) em sala de aula esta cada dia mais presente, tanto que alguns pesquisadores como (KENSKI, 2007, p. 24) dizem que: “a escolha de um determinado tipo de tecnologia altera profundamente a natureza do processo educacional e a comunicação entre os participantes”. Faz-se necessário uma reflexão sobre as pesquisas afim de captarmos os aspectos envolvidos em tudo em sua volta.

> ela está em todo lugar, já faz parte das nossas vidas. As nossas atividades cotidianas mais comuns – como dormir, comer, trabalhar, nos deslocarmos para diferentes lugares, ler, conversar e nos divertimos – são possíveis graças às tecnologias a que temos acesso.(KENSKI, 2007, p. 24)

Diariamente a tecnologia se insere em nosso meio. De certa forma todos utilizam de maneira satisfatória. Usar a modelagem como alternativa pedagógica:

> o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado [...]. Mais importante do que os modelos obtidos são o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria Matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive.(BARBOSA, 2002, p. 48)

3.2 Aplicações

Traremos alguns exemplos para mostrar como e onde aplicar a técnica de modelagem matemática. No primeiro exemplo, houve uma aplicação em sala de aula, seguindo todas as etapas, o que permitiu obtenção de resultados satisfatórios. Vejamos:

3.2.1 Primeira aplicação: Índice de produção de Lixo no País

Os seguintes autores (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014) relatam todo o procedimento e todo o processo de como aplicar a técnica de Modelagem Matemática seguindo todas as etapas proposta por (BIEMBENGUT; HEIN, 2010) até a construção do modelo, gerando uma função, no caso foi uma do tipo Afim $f(x) = ax + b$.

A escolha da turma para aplicação da técnica de modelagem matemática não foi aleátoria, alguns critérios tiveram que ser cuidadosamente considerados. Haviam necessidades específicas "como interpretação de problemas e maior conhecimento matemático". Portanto, dentre as turmas do 6° ano ao 9° ano, "subtendem-se que o 9 ano possui melhor desempenho neste quesito por possuírem uma bagagem maior em relação aos conteúdos da Matemática".

Observou-se também a "frequência dos alunos para poder acompanhar a aplicação (assiduidade). Isto é considerado importante pra aplicação da metodologia na turma que menos faltava, tinha menor evasão e/ou transferidos", (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014) relatam a importância de que "todos os alunos que iniciassem este projeto deveriam permanecer neste até o final da aplicação da técnica, com o objetivo de coletar a maior quantidade de dados possíveis e, portanto, ter melhor precisão e clareza nos dados coletados."Justificativas pra escolha da turma.

Os alunos tiveram atividades diversificadas, revisão no que tange funções, reciclagem e estudos sobre modelagem, foi solicitado aos alunos, em linhas gerais, que pesquisassem para que estes auxiliassem na construção do modelo matemático. Algumas atividades proposta por (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014):

- Qual o destino do lixo produzido por uma cidade? (neste caso foi sugerido que pesquisassem as cidades de Rio Verde – GO, Goiânia – GO e Brasília – DF).
- O lixo é reciclado?
- Qual a quantidade de lixo produzido por uma pessoa em um dia?
- e considerarmos uma cidade com determinada população, quais os tipos de lixos que são produzidos? É viável reciclar? Quais as vantagens? Qual o tempo de decomposição de certos materiais, como vidro, plástico e o papel?

Procurou-se seguir todas as etapas e subetapas propostas por (BIEMBENGUT; HEIN, 2010), sendo a interação, a primeira delas. Ela consiste em: "reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado", na segunda etapa, sobre a "matemátização"nesta fase, "foi posto em prática o conhecimento teórico de funções, pois era necessário identificar todas as variáveis envolvidas no processo". É necessário (BIEMBENGUT; HEIN, 2010, p. 13) "formalização do problema” e a “resolução do problema em termos do modelo".

Foram elaboradas algumas questões referente ao tema proposto ("reciclagem") e pedido aos alunos envolvidos que respondessem. Elaborados por (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014, p.16):

1. Se cada aluno conseguir recolher das ruas em média 10 kg por dia de lixo, quantos quilos conseguirá recolher em: a) Uma semana; b) Um mês; c) Um trimestre; d) Um semestre; e) Um ano.
2. Sabe-se que na cidade o quilo do papel é vendido a $0,18$. Se cada um de vocês por dia conseguir juntar 3 kg de papel durante o mês de janeiro, quanto vocês irão receber pela venda papel?
3. Segundo fontes da Associação Brasileira de Empresas de Limpesa Pública e Resíduos Especiais “abrelpe” o nosso País produz atualmente aproximadamente 220 mil toneladas de lixo diariamente. Diante disso, quantas toneladas o país produziria em: a) Uma semana; b) Uma quinzena; c) Um mês?
4. Segundo Regina (2006), “50 quilos de papel usado transformado em papel novo evita que uma arvore seja cortada”. Reflita na quantidade de papel que você jogou fora até a presente

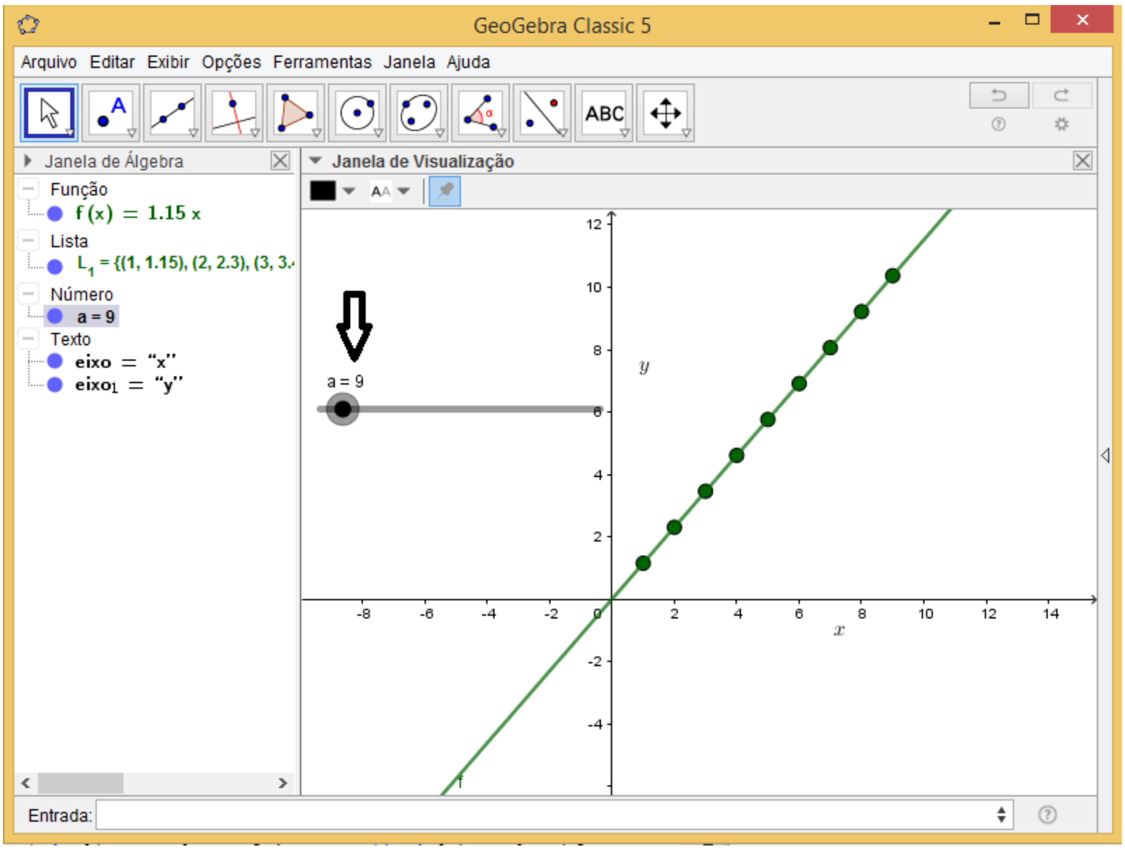
data e calcule quantas arvores você deixou de preservar. Se você jogou fora 200 kg de papel, quantas árvores poderiam ser preservadas?

5. Qual a quantidade de lixo produzido por uma pessoa diariamente? Em seguida, analisar quantas pessoas possui sua família e analisar a quantidade de lixo produzido pela mesma em: a) Uma semana; b) Um mês; c) Uma cidade.

Segundo (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014)

> Essa ultima questão por sinal está intensamente ligada ao modelo que foi elaborado, segundo reportagem publicada do diário do Estadão, este é o índice $1,152kg$ Para encontrar o tal indicador foi feito uma razão entre a população total do país e a quantidade de lixo produzida pelos mesmos. Dados sobre o número de habitantes do Brasil podem ser encontrados no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), e segundo estimativas, o Brasil já possui cerca de 192 milhões de habitantes. Usando tais dados, obteve-se a seguinte função $y = 1,152x$ uma função Linear, portanto, se obtém um modelo para fazer estimativas no que tange a produção de lixo de qualquer cidade do país.

Figura 71 – Gráfico do primeira aplicação Lixo no Brasil



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 71 temos uma função Linear, crescente, passando pela origem das posições. Na seta indicada é mostrado o "controle deslizante"conforme a quantidade de pessoas que desejo inserir caso queira aumentar basta arrastar, logo a sequência de pontos cresce.

Notemos que nessa aplicação de modelagem matemática, a maneira de conduzir a pesquisa serve como modelo a ser seguido. Havendo cuidado ao aplicar a técnica, teremos grandes resultados, ("88%"dos alunos acertaram as questões sugeridas). "Houve aumento gradativo nas notas bimestrais e houve também diminuição das faltas".

Logo, (FORTES; JUNIOR; OLIVEIRA, 2014), conclui que

> Modelagem matemática como metodologia de ensino mostrou-se eficaz no processo de ensino-aprendizagem de matemática, mais especificadamente no estudo de funções e outros conteúdos podem ser estudados com o auxilio desta técnica, cabe ao professor ou educador se disponibilizar para efetuar tal tarefa.

3.2.2 Segunda aplicação: Criar uma soma de múltiplos "2"

Este exemplo sugerido por (BURAK, 2004), deu-se a partir de um estudo de embalagens que continham $2, 4, 6, 8, 16$ e 64 rolos de papel. Após o desenvolvimento de atividades referentes aos múltiplos de um número surgiu, por parte de um dos participantes, a seguinte questão: Como fazer para se conhecer a soma de alguns múltiplos de um número? Os grupos começaram a realizar a soma dos dois primeiros, dos três primeiros, quatro e cinco primeiros múltiplos de 2.

$S = 2 + 4 = 6$

$S = 2 + 4 + 6 = 10$

$S = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

Segundo (BURAK, 2004) o professor pode lançar um desafio para os seus alunos: Existe uma forma mais rápida para se calcular, por exemplo, a soma dos 10, ou 20 primeiros múltiplos de 2? Será que podemos construir uma fórmula matemática que permita o cálculo solicitado? Essas questões podem desafiar e motivar os alunos na busca dessa relação.

Tomemos os n primeiros múltiplos de 2.

$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ..., 2n$

Temos uma função linear $f(n) = 2n$ com $n \in \mathbb{N}$

A soma dos Múltiplos.

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + ... + 2n.$

Essa soma pode ser escrita da seguinte forma:

$S = 1.2 + 2.2 + 3.2 + 4.2 + ... + n.2$ logo colocando o 2 em evidência temos:

$$S = 2(1 + 2 + 3 + 4 + ...n - 1 + n) \tag{3.1}$$

A soma dos termos entre parênteses pode ser mostrada como a seguir.

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n - 1 + n$. Tomando –se a mesma soma com os termos invertidos.

$S = n + n - 1 + n - 2 + n - 3 + ... + 2 + 1$. Adicionando membro a membro

$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + ... + (n + 1)$. Existem n termos iguais a $(n + 1)$.
$2S = n(n + 1)$ ou

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.2}$$

Substituindo o termo entre parênteses na expressão (1), por seu valor dado em (2) tem-se:
$S_n = \dfrac{2(n+1)n}{2}$, ou seja,
$S_n = n(n + 1)$.
Modelo matemático para o cálculo da soma dos n primeiros múltiplos de 2.

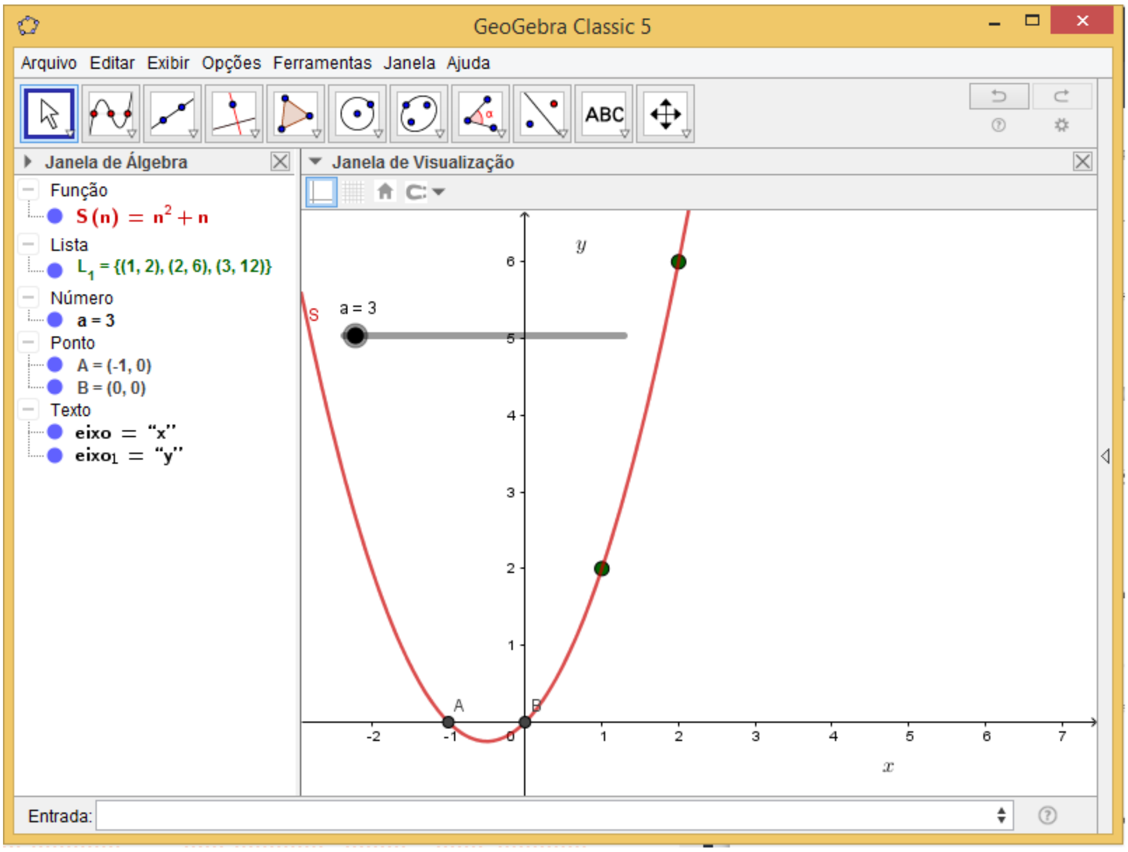
Pode-se validar o modelo, voltando-se para o mundo real.
Aplicação do modelo:

1. Calcular a soma do primeiro múltiplo de 2 , isto é, $n = 1$.
   $S = 1(1 + 1) = 2$

2. Calcular a soma do dos dois primeiros múltiplo de 2
   Para $n = 2$.
   $S = 2(2 + 1) = 2.3 = 6$
   Para $n = 3$
   $S = 3(3 + 1) = 3(4) = 12$

Serve pra criar outros modelos para outros múltiplos.

Figura 72 – Gráfico do segunda aplicação múltiplos de 2



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 72, temos uma função Quadrática, com a concavidade voltada pra cima, com as raízes nos ponto A e B. Foi criada uma sequência de pontos para mostrar quando inserimos valor pra n. Temos $S(n)$, pares ordenados mostrando o crescimento. O termo a é o "controle deslizante", bastando arrastá-lo para que os pontos aumentem.

3.2.3 Terceira aplicação: Problema envolvendo Táxi

Um exemplo clássico seria o preço que um passageiro deveria pagar em uma viajem de táxi, lembrando que no táxi, existe um custo fixo e outro que sofre algumas modificações conforme a distância percorrida.

Temos que "bandeirada"seria esse custo fixo, o qual chamaremos de termo b na função afim $f(t) = at + b$, e teriamos o termo dependente que varia conforme a distância percorrida. Uma ilustração: Suponha que um passageiro percorra uma distância de 50 km na corrida. Levando em conta algumas variáveis a serem consideradas como o tempo de viajem e a distância percorrida, temos um valor de $2,75$ por quilômetro rodado, custo fixo $4,5$ reais, temos:

$f(t) = at + b$

substituindo os termos a e b

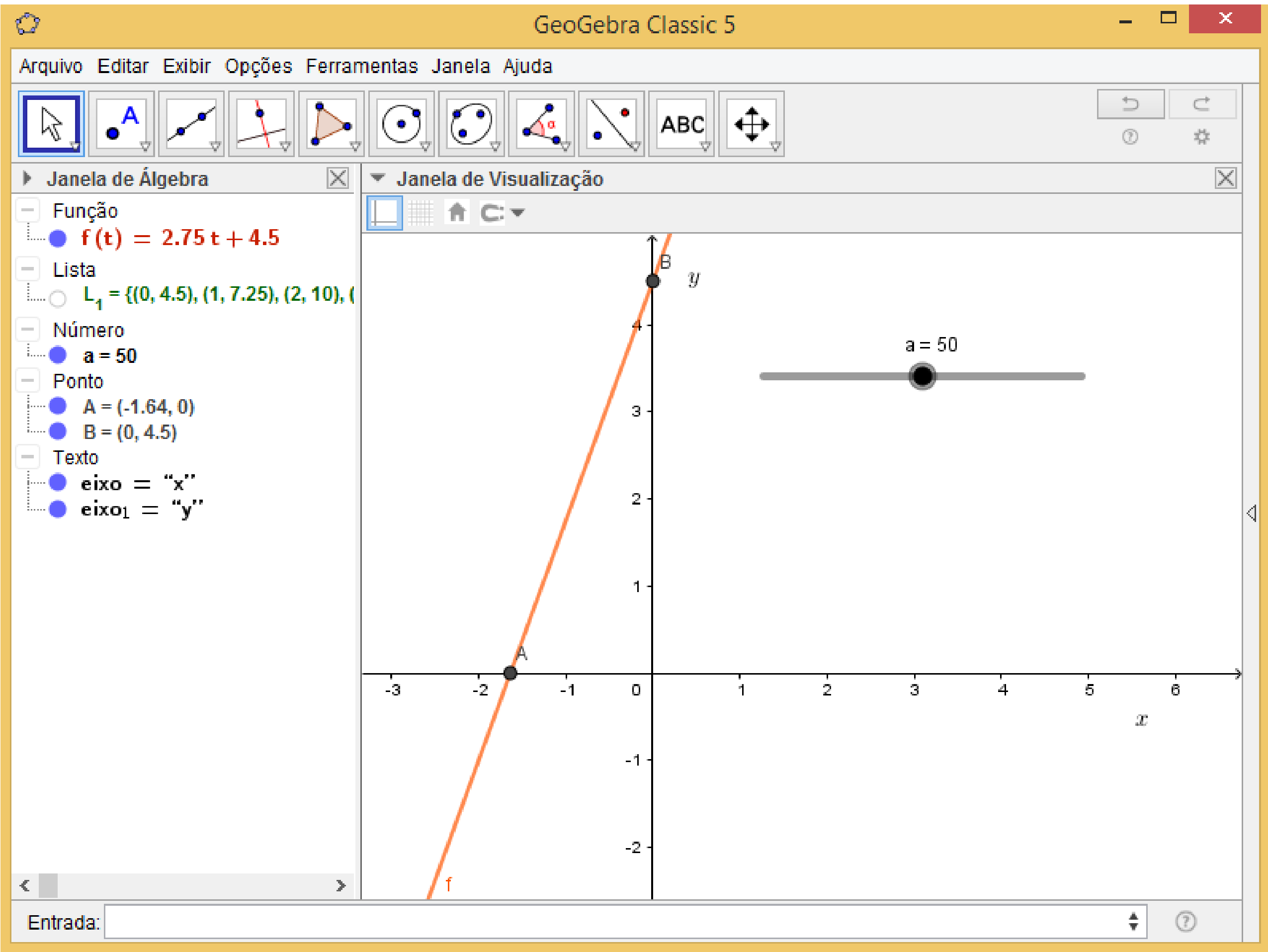
$$f(t) = 4,5 + 2,75t \tag{3.3}$$

que é o modelo matemático, fazendo $t = 50km$, temos:

$$\begin{aligned} f(50) &= 4,50 + 2,75.50 \\ f(50) &= 4,5 + 137,5, logo \\ f(50) &= 142. \end{aligned}$$

o preço da corrida seria de 142 reais.

Figura 73 – Gráfico do terceira aplicação Modelagem de Táxi



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

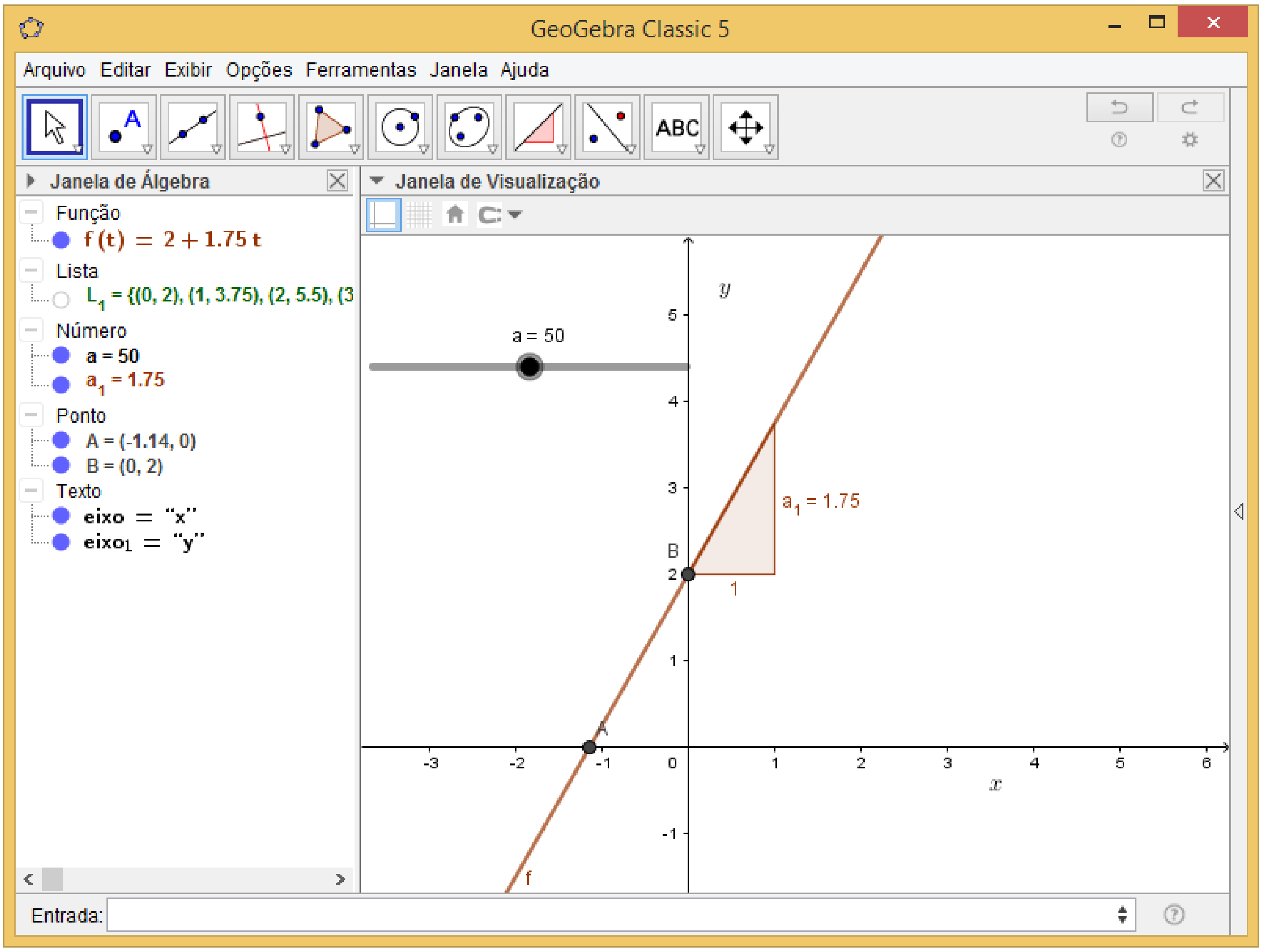
Analisando a figura 73, podemos identificar a raiz da função representada pelo ponto A. O ponto B mostra-nos onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas coeficiente linear. Foi criada uma lista de pontos e nela podemos identificar os pares ordenados $(50, 142)$. Quando iserimos o valor desejado na função no caso foi 50 Km ele retorna ao valor de 142. Por isso aparece o termo a, para mostrar-nos o controle deslizante.

Referente ao problema, os Ubers tem um custo menor devido os baixos impostos, com menores impostos e variáções são possíveis alguns descontos, começando com o custo fixo. No táxi esse custo é de 4, 50 enquanto no Uber é de 2, 00. A diferença não fica apenas no custo fixo, mas também na relação entre preço e quilômetro rodado, em torno de 2, 25. Se o passageiro fosse de Uber quanto ficaria? Logo, usando a mesma ideia temos uma função afim $f(x) = a.x + b$, onde o custo fixo termo b vale 2 e parte dependente vale 1, 75. Assim a função $f(x) = 2 + 1,75t$. Se o passageiro fosse de Uber teria gastado:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 + 1,75t \\ f(50) &= 2 + 1,75.50 \\ f(50) &= 2 + 87,5 \\ f(50) &= 89,5 \end{aligned}$$

valor gasto que o passageiro tivesse ido de Uber.

Figura 74 – Gráfico do terceira aplicação Modelagem de Uber



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 74, podemos identificar a raiz da função representada pelo ponto

A. O ponto B nos mostra onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas coeficiente linear, trouxemos também uma ferramenta que indica o valor da inclinação da reta coeficiente angular da reta $a_1 = 1,75$. Foi criada uma lista de pontos onde podemos identificar os pares ordenados $(50, 89, 5)$. Quando iserimos o valor desejado na função no caso foi 50 Km ele retorna ao valor de $89, 5$. Por isso aparece o termo a, para mostrar-nos o controle deslizante.

3.2.4 Quarta aplicação: Entrada no parque de diversões exercício 4 e o exercício 6 da formiguinha

Neste quarto exemplo aplicando conteúdos de funções (TENÓRIO; COSTA; TENÓRIO, 2015) foi feita uma experiência com determinada turma do ensino médio - primeira série com um total de 25 alunos. Esse total foi dividido assim: 15 usaram o softwre Geogebra pra resolver os problemas e 10 tiveram aula de maneira tradicional, sem o uso software, foi passado aos alunos algumas questões pra verificação da aprendizagem.

Figura 75 – Dados referente ao quarto exemplo

4. Um parque de diversões cobra R$ 10,00 a entrada e R$ 4,00 para andar em cada brinquedo. Luíza tem R$ 50,00.

a) (0,25 pontos) Em quantos brinquedos no máximo ela consegue brincar no parque?

b) (0,25 pontos) Se ela andasse em 3 brinquedos. Quanto gastaria?

c) (0,25 pontos) Gastando R$ 50,00, ela andou em quantos brinquedos?

d) (0,5 pontos) É possível generalizar, ou seja, criar uma relação entre o preço pago (y) com a quantidade de brinquedos (x)?

e) (0,42 pontos) É possível sintetizar essas informações em um gráfico?

6. Uma formiga se move sobre uma régua em linha reta na direção crescente dos centímetros com velocidade constante de 2 cm por segundo. Supondo que, quando começamos a observar a formiga, ela se encontra a 4 cm da origem.

a) (0,67 pontos) Nessas condições, organize os dados na tabela abaixo:

Tempo (segundos)	Posição (cm)
0	...
1	...
2	...
3	...
5	...
10	...
x	...

b) (0,5 pontos) Crie uma lei de formação da movimentação da formiga.

c) (0,5 pontos) Construa um gráfico mostrando a movimentação da formiga.

Fonte:(TENÓRIO; COSTA; TENÓRIO, 2015)

Segundo (TENÓRIO; COSTA; TENÓRIO, 2015) o problema 4 "foi reputado pelos alunos como o mais fácil". Entretando o item b apresentou muitos erros, pois os discentes não somaram o valor da entrada. O problema 6 foi o que obteve o maior índice de erro, muitos alunos realizaram erradamente operações matemáticas básicas ou não souberam montar a tabela; "multiplicaram o tempo pela posição de origem e somaram o valor da velocidade".

Solução do problema 4 com a utilização do Geogebra: Temos um custo fixo a entrada no parque de diversão por $10,00$ e a parte dependente, que vai variar conforme a quantidade de brinquedos que Luiza andará. Cada brinquedo custa $4,00$ logo temos uma função do tipo Afim. $f(x) = ax + b$ onde b é o termo independente, (custo fixo da entrada), e o termo $a = 4$ dependerá do x (custo de andar em cada brinquedos), temos então:
$f(x) = a.x + b$

$$f(x) = 4x + 10 \tag{3.4}$$

lembre-se que Luíza tem $50,00$ pra gastar.

a) temos $50,00$ pra gastar, $f(x) = 50$, temos que:

$$\begin{aligned} 50 &= 4x + 10 \\ 50 - 10 &= 4x + 10 - 10 \\ 40 &= 4x \\ \frac{40}{4} &= \frac{4x}{4} \\ 10 &= x \end{aligned}$$

logo, $x = 10$ significa que Luíza conseguirá andar no máximo em 10 brinquedos.

b) temos $x = 3$ logo,

$$\begin{aligned} f(3) &= 4.3 + 10 \\ f(3) &= 22 \end{aligned}$$

logo ela gastaria $22,00$.

c) $f(x) = 50$, temos:

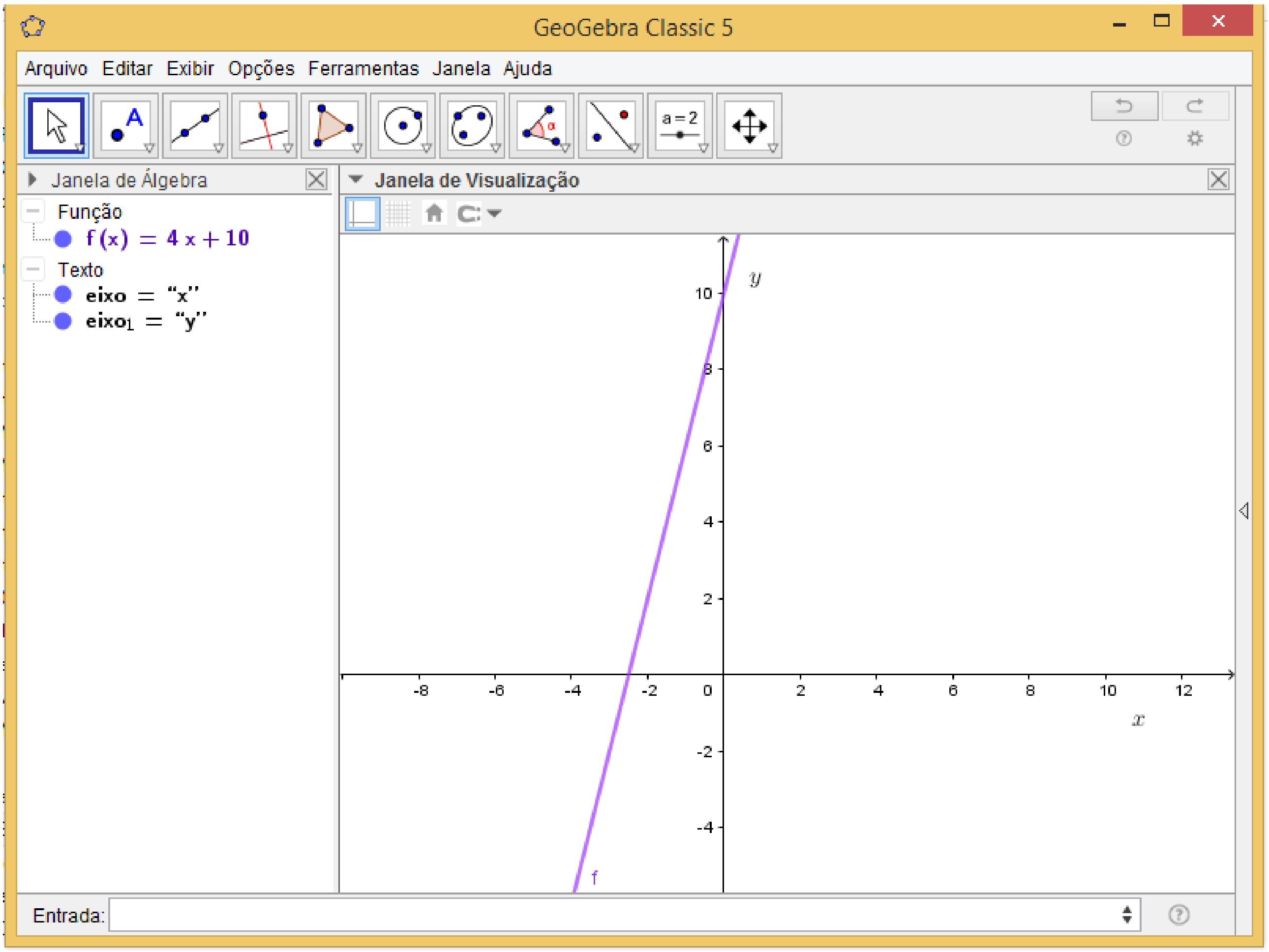
$$\begin{aligned} 50 &= 4x + 10 \\ 50 - 10 &= 4x + 10 - 10 \\ 40 &= 4x \\ x &= 10 \end{aligned}$$

portanto ela poderá andar em 10 brinquedos.

d) sim, $f(x) = 4x + 10$.

e) sim usando Geogebra temos:

Figura 76 – Gráfico do quarta aplicação exercício 4 parque de diversões



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

.

Observando a figura 76, temos uma função Afim com o coeficiente angular da reta $a = 4$ é linear onde a intercepta o eixo Oy no valor correspondente a 10. Já a raiz (ou zero) da função, onde o eixo Ox é tocado, o valor correspondente a $-2,5$.

Suponha que a entrada no parque de diversões custa outro valor, e o preço de andar nos brinquedo também sofresse alterações. Como refazer o problema? Uma alternativa para essa nova problemática seria criar uma função Afim $f(x) = ax + b$. Ao ser inserida no Geogebra automaticamente, será gerado um "controle deslizante"para os coeficientes a e b. Portanto, conseguíremos substituir qualquer valor que o autor necessite.

Solução do problema 6 com a utilização do Geogebra: Primeiramente temos que criar um modelo que denota a caminhada da formiga sobre a régua. Nesta solução, mostraremos duas situações e compararemos; uma partindo do repouso e na origem e uma outra em que resolveremos o problema.
i) Temos uma função afim $f(x) = ax + b$, logo temos $S = S_0 + vt$, onde os valores de t

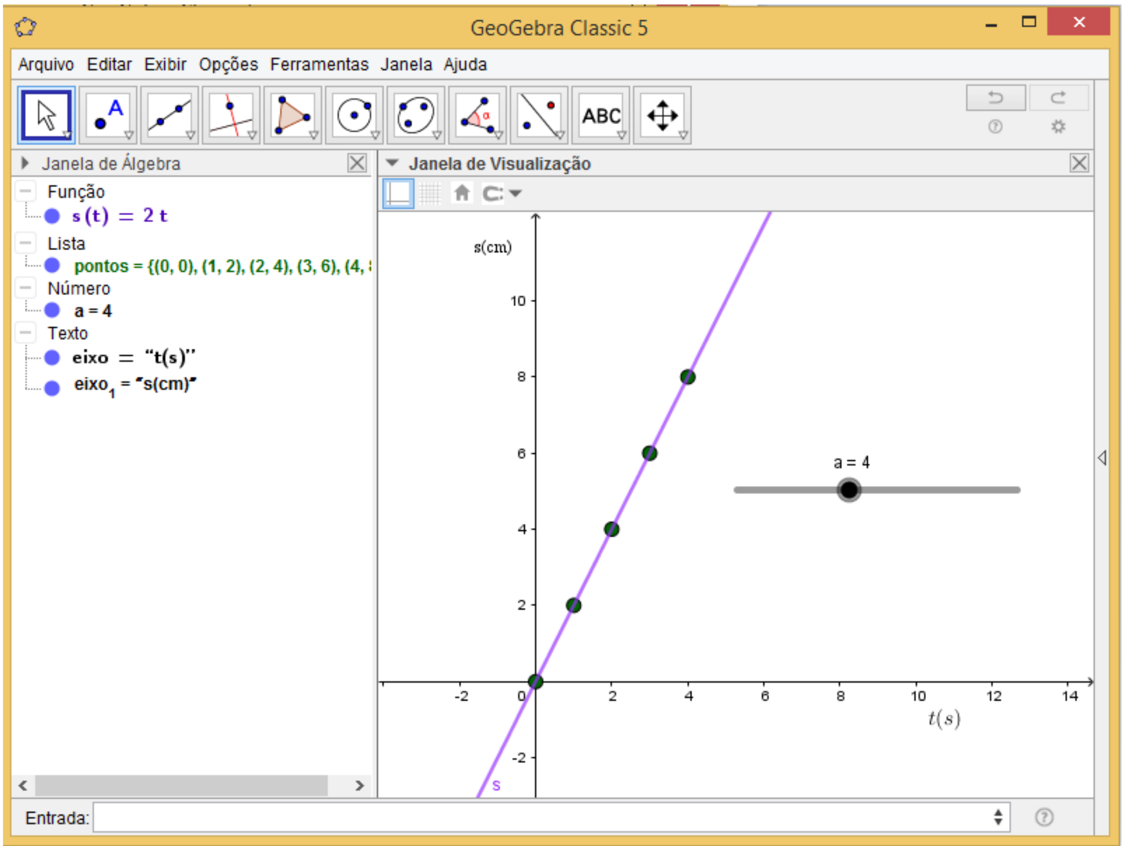
correspondem a variável tempo. S a distância e v a velocidade. No Sistema Internacional de Unidades usa-se segundos, metros e metros por segundos respectivamente. Partindo do pressuposto que a formiga se move com velocidade constante de $2cm$ por segundo partindo do repouso e o tempo valor 0, temos:
$S = S_0 + vt$ implica $S = 2t$.

Tabela 1 – Tabela com dados do quarto exemplo partindo da origem atividade 6

Tempo (segundos)	Posição (cm)
0	0
1	2
2	4

Ilustrando o gráfico deste movimento, conforme dados da tabela:

Figura 77 – Gráfico atividade 6 partindo da origem



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

O gráfico da figura 77 foi criado usando uma ferramenta chamada "sequência de pontos"diretamente no Geogebra, com o seguinte comando $sequencia = (< expressão >

$, < variável >, < valorinicial >, < valorfinal >, < incremento >)$, o termo "expressão"significa criação da lei de formação do par ordenado $(x, f(x))$, o termo "variável"significa em qual variável se deseja trabalhar (x, y, z, t); "valor inicial"e "valor final"significam respectivamente: intervalo que deseja-se inserir, valores iniciais e finais, "inclemento"significa variar de quanto em quanto (1 em $1, 2$ em 2). Para iniciar esse comando basta, preencher os campos obrigatórios corretamente, logo os pares ordemandos são criados. Outra ferramenta importante foi utilizada para controlar a quantidade de pontos desejamos para inserção no "controle deslizante". Temos o gráfico da função afim, linear $s(t) = 2t$ partindo da origem e atendendo a primeira situação colocada.

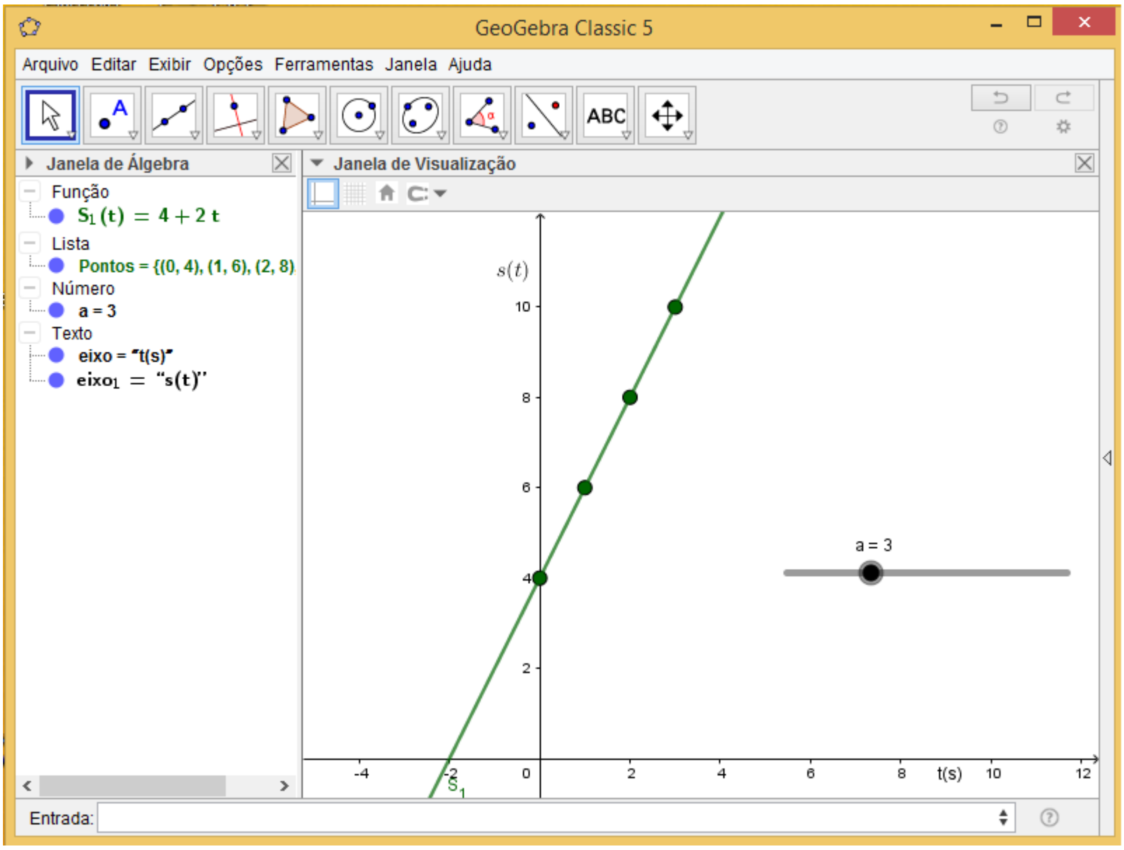
A segunda situação está na resolução do problema 6 onde a formiguinha se move com velocidade constante de $2cm$ por segundo, sendo que no ínicio da observação a formiga se encontra a $4cm$ da origem. O modelo é próximo da primeira situação, o que muda é que o ponto de partida da formiga localiza-se na posição 4, logo temos uma função afim $f(x) = ax + b$, temos $S = S_0 + vt$, onde os valores de t são da variável "tempo", S da distância e v da velocidade Neste caso a posição inicial S_0 é $\neq 0$ pois não partiu da origem e sim da posição 4, e como a velocidade é constante com valor 2, então $S = 4 + 2t$.

Tabela 2 – Tabela com dados do quarto exemplo partindo da posição 4 atividade 6

Tempo (segundos)	Posição (cm)
0	0
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14

Abaixo, temos o gráfico deste movimento, conforme dados da tabela.

Figura 78 – Gráfico atividade 6 partindo posição 4

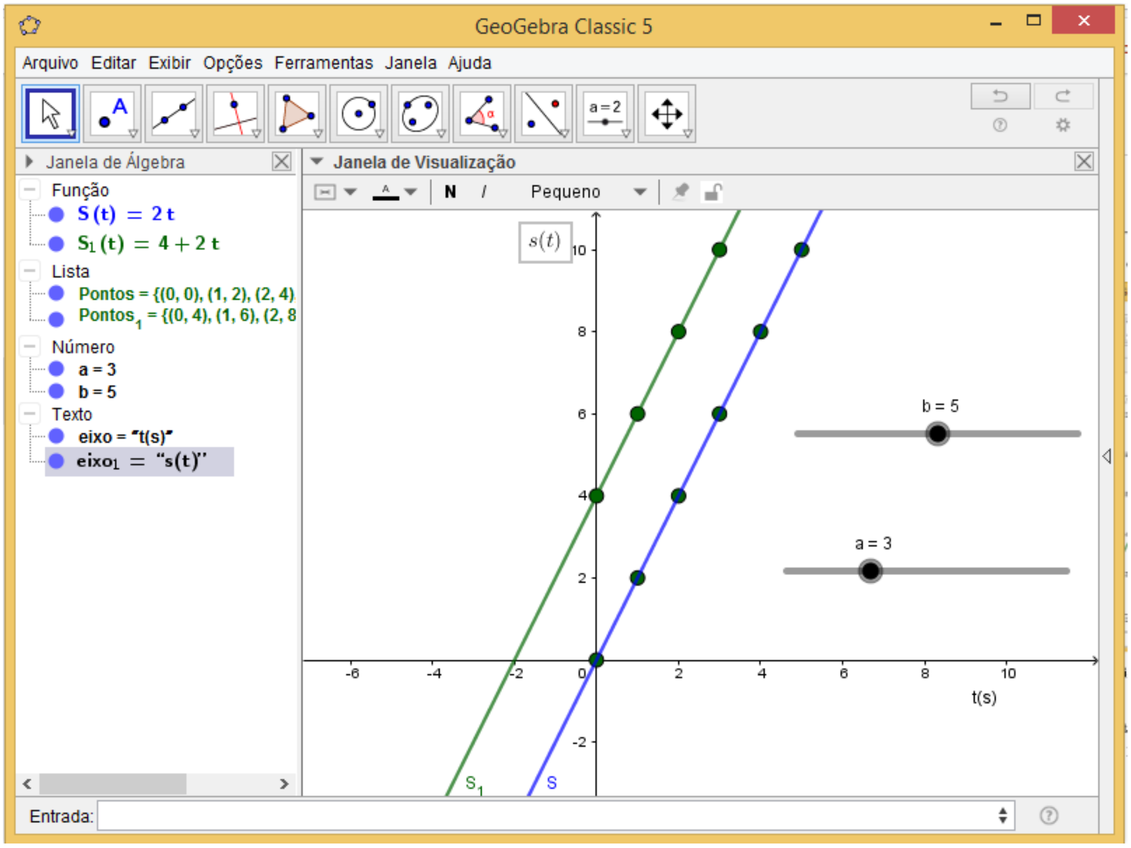


Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Notemos que o gráfico da figura 78 é uma reta, e intercepta o eixo y na posição 4, possuindo raiz com valor -2 interceptando eixo x. Construimos a "sequência de pontos", usando o "controle deslizante"pra mostrar quantos pontos devem aparecer no gráfico, dados conforme a tabela desta função.

O gráfico a seguir mostrará as duas situações criadas no problema 6 usando o Geogebra.

Figura 79 – Gráfico atividade 6 ambas situações partindo origem e posição 4



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Temos a ilustração dos dois gráficos na figura 79, portanto podemos fazer comparações com as funções afins $S_1 = 4 + 2t$ de cor verde e $S = 2t$ de cor azul. Notemos que o coeficiente angular é o mesmo, o que difere é de onde partem os pontos, uma da origem e outra da posição 4. Graficamente houve um deslocamento vertical em 4 unidades ou horizontal em duas. As retas são paralelas entre si. Devido a taxa variação (coeficiente angular) ser a mesma, isso facilita e muito a questão da vizualização na prática.

3.2.5 Quinta aplicação: Lançamento de um projétil

Neste quinto exemplo traremos do livro de (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.167-168) uma aplicação de uma função Quadrática, onde temos o movimento de um projétil. O movimento de um projétil de uma dada altura pode ser modelado por uma função Quadrática. A expressão algébrica que o representa é um polinômio do 2° grau que pode ser utilizado pelos alunos para determinar a altura em que se encontra o projétil num certo instante o instante em que uma altura dada é atingida: O movimento de um projétil lançado horizontalmente é dado por

$$h(t) \quad = \quad -4,9t^2 + 100$$

onde h representa a altura em cada instante, t representa o tempo (em segundos), e 100 representa a altura inicial (em metros). Representaremos graficamente esta equação.

1. Ao fim de 2 segundos, a que altura está o projétil? E ao fim de 5 segundos?

2. Em que instante o projétil atinge o solo?

3. Determinar em que instante o projétil esta a altura de 90 metros.

Resolução:
temos $t = 2$ e $t = 5$. Substituindo na função h:

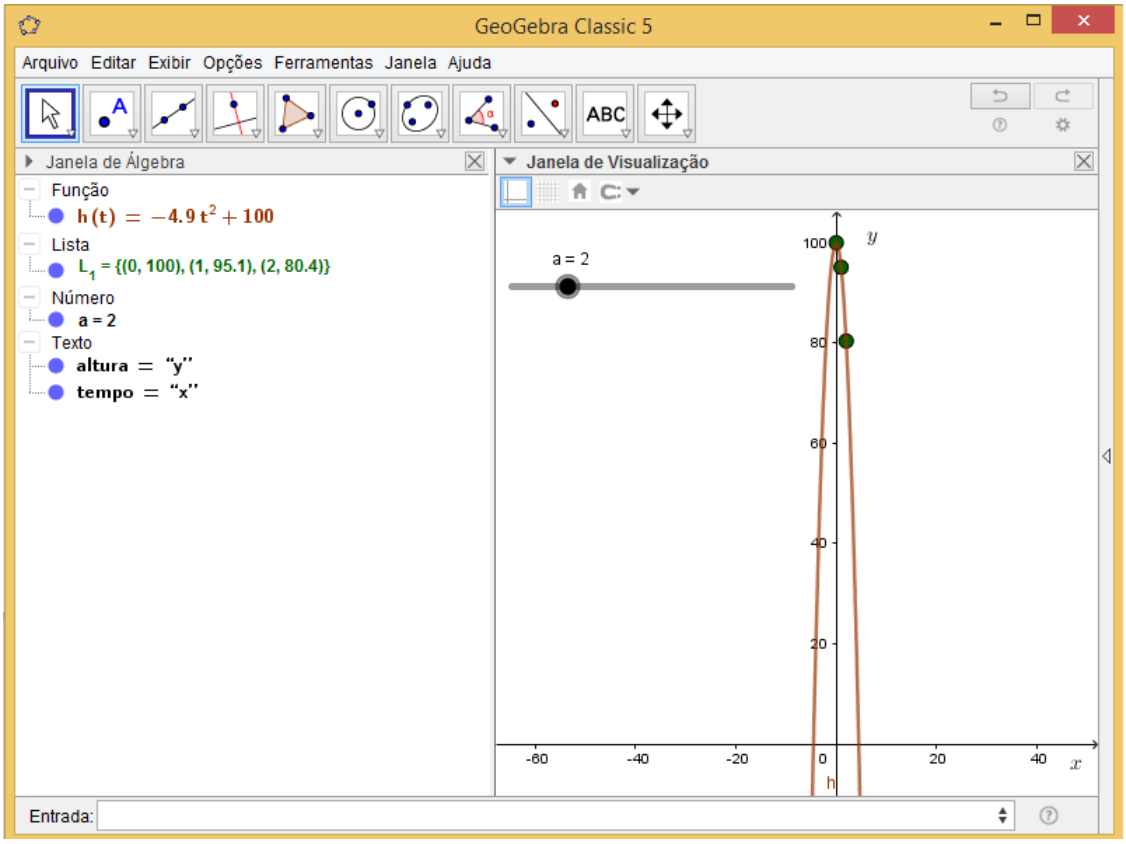
$$\begin{aligned} h(t) &= -4,9t^2 + 100 \\ h(2) &= -4,9(2)^2 + 100 \\ h(2) &= 80,2 \end{aligned}$$

valores expressos em pares ordenados $(t; h(t))$ fica $(2; 80,2)$ e para $t = 5$:

$$\begin{aligned} h(t) &= -4,9t^2 + 100 \\ h(5) &= -4,9(5)^2 + 100 \\ h(5) &= -22,5 \end{aligned}$$

observa-se que o valor negativo retorna, o que não faz sentido para a altura, permitindo concluir que o projétil atingiu o solo antes disso. Valores expressos em par ondernado $(t; h(t))$ retorna $(5; -22,5)$.

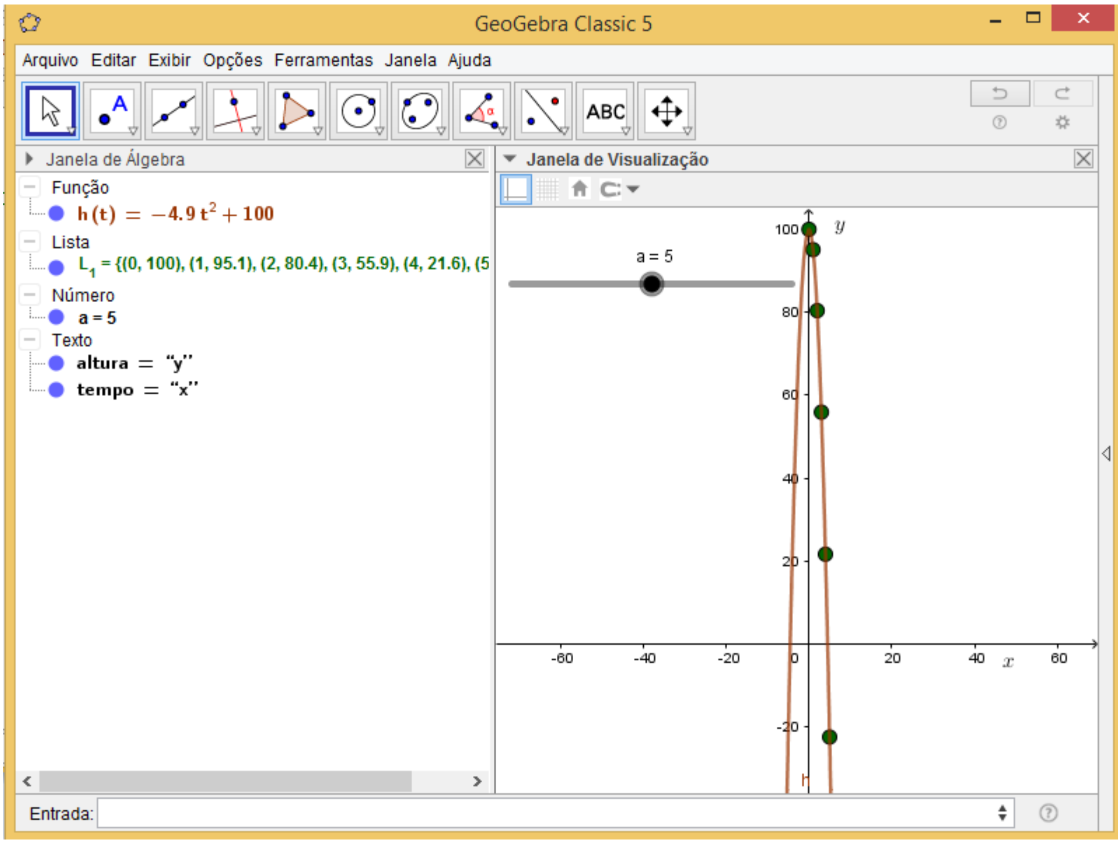
Figura 80 – Gráfico referente a aplicação 5 item 1



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 80, nota-se a função Quadrática $h(t) = -4,9t^2 + 100$ na cor vermelha com o coeficiente $a < 0$, logo a concavidade fica voltada pra baixo. Criamos uma lista de pontos em forma de pares ordenados $(t; h(t))$, onde no item 1 pede-se pra localizar a altura do projétil após 2 segundos. Representado pelo "controle deslizante"$a = 2$ vemos com clareza no gráfico qual a altura que se localiza $h(2) = y = 80,2$. Outro local a ser observado é a lista de pontos representada na cor verde, com o par ordenado específico $(2; 80,2)$.

Figura 81 – Gráfico referente a aplicação 5 item 1



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 81 observamos com as mesmas característica da figura 80, porém o $t = 5$ "controle deslizante"foi alterado para $a = 5$, e o gráfico nos mostra que o par ordenado é $(5, -22, 5)$ altura negativa significando que o projétil tocou no chão antes dos 5 segundos. Resolução do item 2, temos:

$$h(t) = -4,9t^2 + 100$$

para o projétil chegar ao solo temos que fazer $h(t) = 0$ e encontrar as raízes da função onde o gráfico intercepta o eixo x.

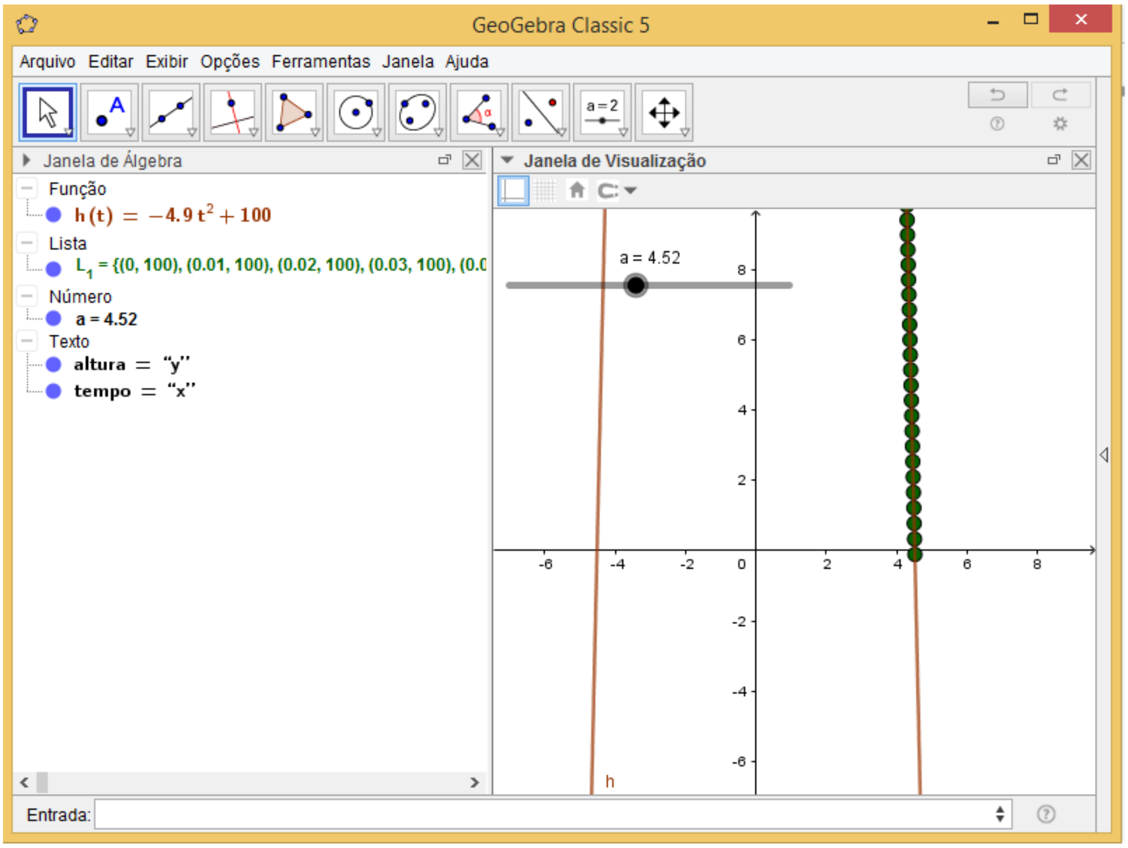
$$\begin{aligned} h(t) &= -4,9t^2 + 100 \\ 0 &= -4,9t^2 + 100 \end{aligned}$$

acrescentando $4,9t^2$ em ambos lados

$$
\begin{aligned}
4,9t^2 &= -4,9t^2 + 4,9t^2 + 100 \\
t^2 &= \frac{100}{4,9} \\
t^2 &= 20,4081
\end{aligned}
$$

logo temos valores aproximados $t_1 = 4,52$ e $t_2 = -4,52$.

Figura 82 – Gráfico referente a aplicação 5 item 2



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 82 foi criada uma lista de pontos pra mostrarmos a trajetória do projétil até o mesmo atingir o solo, no valor do par ordenado $(4,52;0)$ - local onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

Resolução Item 3:

Temos a equação do movimento,

$$h(t) = -4,9t^2 + 100$$

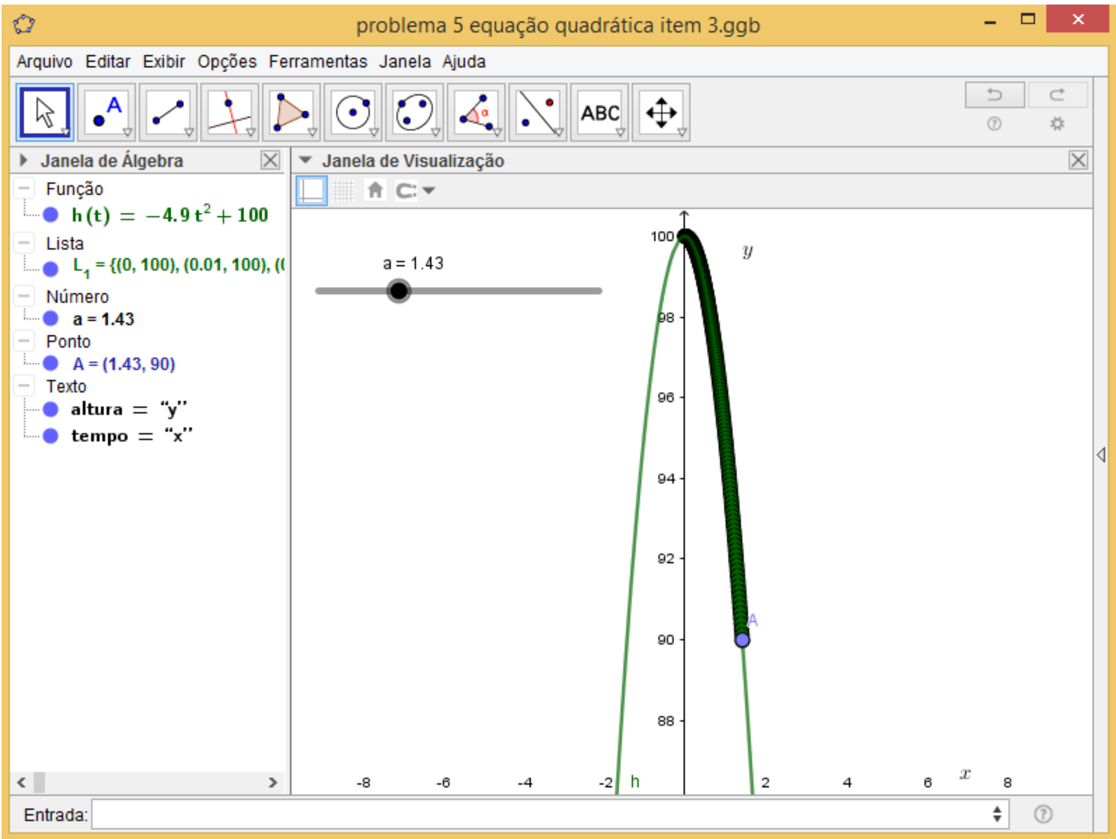
queremos saber em que instante o projétil está na altura de 90 metros.

Esta resolução do item 3 é análoga, bastando igualar a equação a 90.

$$\begin{aligned} h(t) &= -4,9t^2 + 100 \\ 90 &= -4,9t^2 + 100 \\ 4,9t^2 &= 10 \\ t^2 &= \frac{10}{4,9} \\ t = \pm 1,43 & \end{aligned}$$

não convém usarmos $t = -1,43$, logo $t = 1,43$ valor aproximado.

Figura 83 – Gráfico referente a aplicação 5 item 3



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

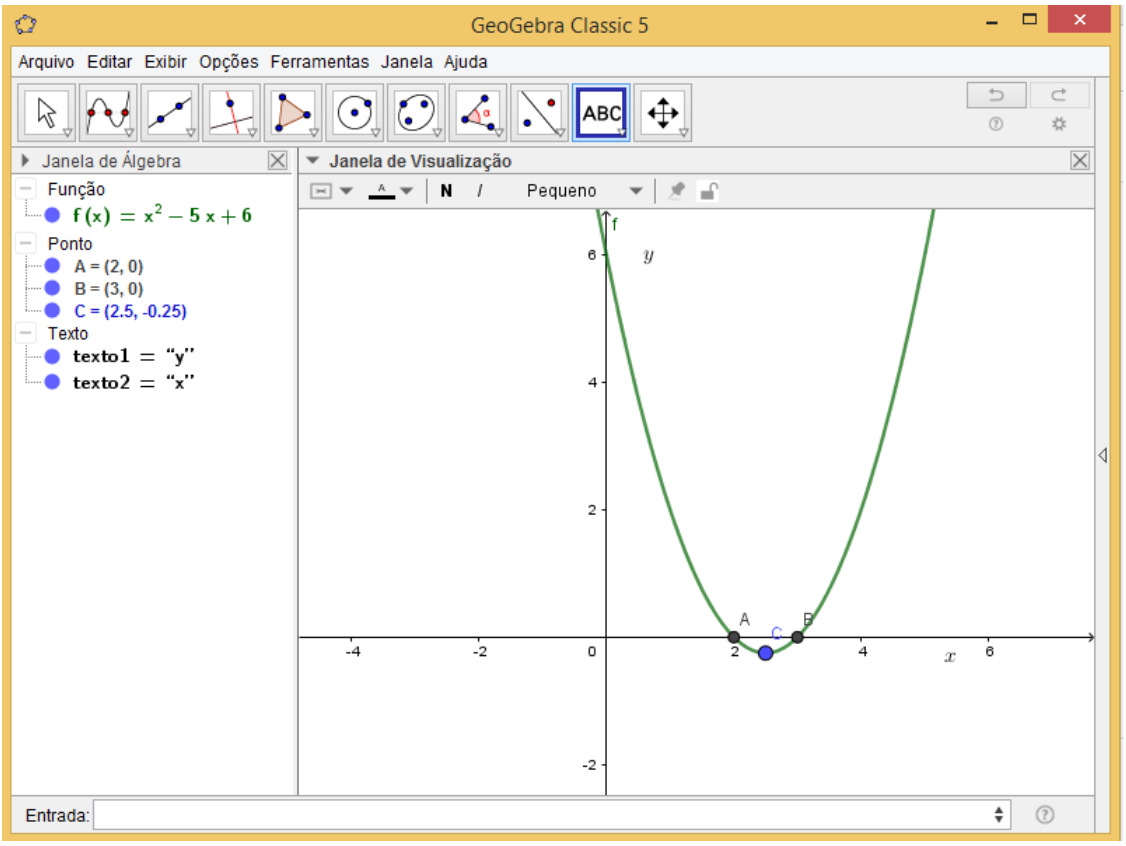
Analisando a figura 83, criou-se uma lista de pontos conforme a variação do tempo. Neste item fica claro que, para chegar na altura de 90 metros foram gastos aproximadamente 1,43 segundos. Observa-se o ponto $A(1,43; 90)$, onde foi criado o termo a "controle deslizante"para mostrarmos a variação do tempo.

Com a utilização do software Geogebra podemos simular várias situações, no sentido de investigar o que acontece quando alteramos os coeficientes a, b e c numa função Quadrática, ou seja, em qualquer função que estejamos estudando.

3.2.6 Sexta aplicação: Um exercício criado pelo próprio autor

Na aplicação de função Quadrática podermos verificar as características da função. Vale ressaltar que este exemplo foi aleatório, criado pelo próprio autor.

Figura 84 – Gráfico referente aplicação 6



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Analisando a figura 84 concluímos que com o coeficiente $a > 0$ teremos a concavidade voltada pra cima. Os pontos A e B demonstram claramente onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas (chamadas de raízes da equação) nos valores 2 e 3. O ponto C nos mostra o mínimo ou máximo da função, dependendo do coeficiente a. Se $a > 0$ encontramos o mínimo; e se $a < 0$ encontramos o máximo da função. Na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ o coeficiente C determina onde a função intercepta o eixo das ordenadas. Com a construção do gráfico fica óbvio que o gráfico intercepta o eixo Oy no valor igual 6.

3.2.7 Sétima aplicação: Criado pelo próprio autor uma aplicação em Física

Está aplicação nos traz problemas em Física, onde temos duas situações: Primeiramente, um corpo A parte de uma posição 10 m com velocidade de 5 m/s. Segundo parte, um corpo B parte da posição 40 na frente do primeiro corpo a 30 m, com a velocidade 4 m/s. Será que em algum momento o corpo A e corpo B estarão juntos?

Resolução:
1^0 caso, temos:

$$f(t) = 10 + 5t$$

2^0 caso, temos:

$$s(t) = 40 + 4t$$

Matematicamente, para encontrarmos a interseção das retas, basta fazermos a igualdade entre elas.
Temos:

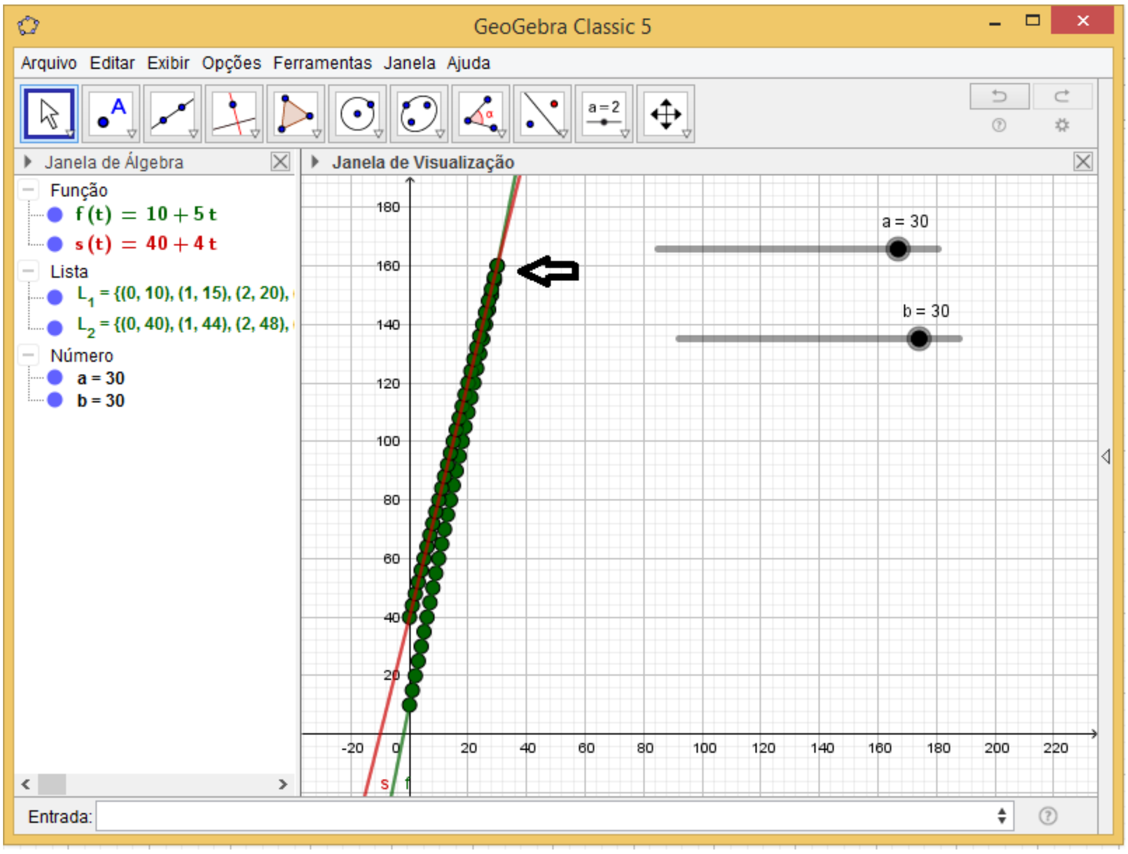
$$\begin{aligned} f(t) &= s(t) \\ 10 + 5t &= 40 + 4t \\ t &= 30s \end{aligned}$$

encontrar a posição em que os corpos A e B se encontram basta escolhermos uma das duas funções e fazer as substiuições, pois temos um t comum a elas.

$$\begin{aligned} s(t) &= 40 + 4t \\ s(30) &= 40 + 4.30 \\ s(30) &= 160m \end{aligned}$$

.

Figura 85 – Gráfico referente aplicação 7 - Física



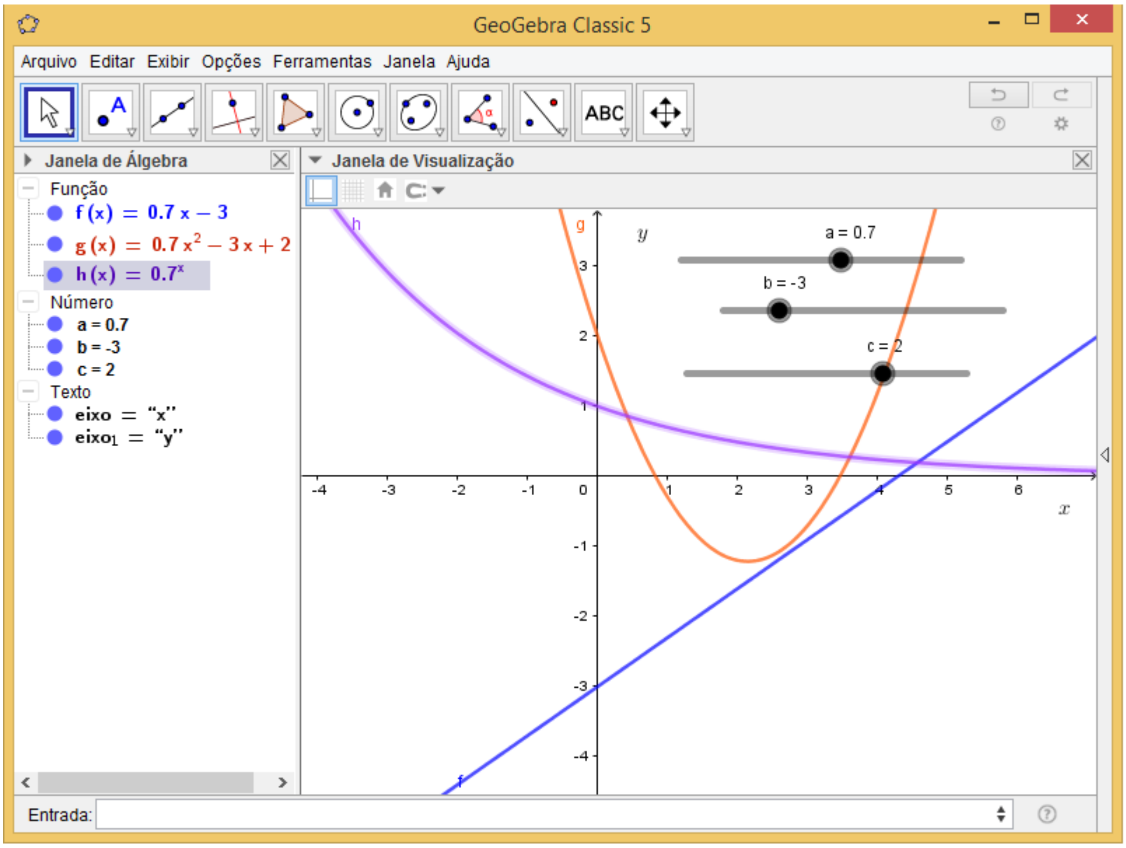
Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Usando o Geogebra pra resolução fica claro o momento da interseção das duas retas. Basta observar na figura 85: temos uma seta pra indicar o momento correto tendo em vista os termos a e b "controle deslizantes"para criação da sequência de pontos. Ambos estão na posição 30, logo temos $t = 30$ s onde a posição conjunta de ambos será na posição 160 m.

3.2.8 Oitava aplicação: Mostrando as funções usando o controle deslizante

Mostraremos nesta aplicação, que utilizando a ferramenta "controle deslizante"nas funções teremos uma excelente metodologia para ensino e aprendizagem de funções. Temos as seguintes funções, Afins, Quadrática, Exponencial, Logaritmíca, Trigonométricas, todas vistas no ensino médio.

Figura 86 – Gráfico referente aplicação 8 simulações de funções



Fonte:Produzido pelo próprio autor no Geogebra

Na figura 86 temos as três funções juntas Afim, Quadrática e Exponencial. Inserimos como Afim $f(x) = ax + b$, Quadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = a^x$. Com os coeficientes $a > 0$ e com b e $c \in \mathbb{R}$, temos essa restrição em relação ao coeficiente $a > 0$, por conta da não existência da função Exponencial e Quadrática com determinados valores. Neste gráfico podemos simular quaisquer valores e obervar o seu comportamento.

4 Consideracões Finais

Trazemos aqui, o entendimento que o nosso objetivo foi alcançado, uma vez que, nos capítulos anteriores, nossa abordagem foi sempre no sentido de montar de maneira didática, com o auxílio das ferramentas do Geogebra, um texto que vai auxiliar o professor do ensino médio, a trabalhar de forma mais visual e construtiva, os conceitos de funções. No capítulo de aplicações, ilustramos bem os caminhos de utilização do software para que o professor possa entender e chegar facilmente na solução das mesmas.

Apesar disso, entendemos que uma aplicação desse material em um grupo de professores , em formato de oficina, nos traria mais subsídios para a melhoria do mesmo. No entanto, como não tivemos a oportunidade da realização dessa atividade, vamos considerar como uma de nossas propostas futuras.

Referências

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os futuros professores. *Reunião Anual da ANPED*, v. 25, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 111.

BARRETO, M. M. Tendências atuais sobre o ensino de funções no ensino médio. *Matemática e Educação Sexual: Modelagem do Fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários. Dissertação de Mestrado. PPg-Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* [S.l.]: Editora Contexto, 2010. Citado na página 109.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* [S.l.]: Editora Contexto, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 109, 111 e 112.

BOSZKO, L. et al. O software como recurso na interpretação do comportamento das funções logarítmicas. Citado na página 65.

BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. *Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*, v. 1, p. 1–10, 2004. Citado na página 114.

COSTA, A. C. et al. Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Citado na página 26.

D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.* [S.l.]: Editora da UNICAMP, 1986. Citado na página 110.

FORTES, E. de V.; JUNIOR, A. W. de S.; OLIVEIRA, A. M. L. de. O uso de modelagem matemática no ensino de funções nas séries finais do ensino fundamental: Um estudo de caso. *Itinerarius Reflectionis*, v. 9, n. 2, 2014. Citado 8 vezes nas páginas 22, 31, 108, 110, 111, 112, 113 e 114.

FREIRE, P. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática docente. *São Paulo: Paz e Terra*, p. 90, 1996. Citado na página 25.

IEZZI, G. et al. *Matemática: volume único.* [S.l.]: Atual, 2002. Citado na página 32.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.* [S.l.]: Atual, 2004. Citado 22 vezes nas páginas 48, 56, 57, 60, 63, 64, 66, 71, 72, 79, 80, 84, 85, 86, 90, 91, 95, 96, 97, 101, 102 e 103.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções.* [S.l.]: Atual, 1993. Citado 6 vezes nas páginas 33, 41, 42, 48, 49 e 50.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias.* [S.l.]: Papirus editora, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 111.

LIMA, E. L. *Curso de análise vol 1 12 ed.* [S.l.]: Projeto Euclides, 2008. Citado na página 31.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 11 vezes nas páginas 30, 32, 34, 44, 45, 61, 62, 66, 69, 70 e 77.

LIMA, E. L. et al. Temas e problemas. *Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática*, 2001. Citado na página 65.

MAGARINUS, R. et al. Uma proposta para o esino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem. Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Citado na página 26.

OLIVEIRA, N. D. Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. Citado 3 vezes nas páginas 26, 28 e 29.

PEREIRA, T. d. L. M. et al. O uso do software geogebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 25.

PONTE, J. P. d.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no ensino básico*. [S.l.]: ME-DGIDC, 2009. Citado na página 125.

TENÓRIO, A.; COSTA, Z. d. S. S.; TENÓRIO, T. Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau com e sem o geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, v. 3, n. 2, p. 104–119, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

TENÓRIO, A.; COSTA, Z. d. S. S.; TENÓRIO, T. Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau com e sem o geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, v. 3, n. 2, p. 104–119, 2015. Citado na página 119.

VALENTE, J. A. et al. Informática na educação no brasil: análise e contextualização histórica. *O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED*, p. 1–13, 1999. Citado na página 25.

WERNECK, H. Ensinamos demais. *Aprendemos de Menos, Editora Vozes, Petrópolis, Estado do Rio de Janeiro, Brasil*, 1987. Citado na página 108.

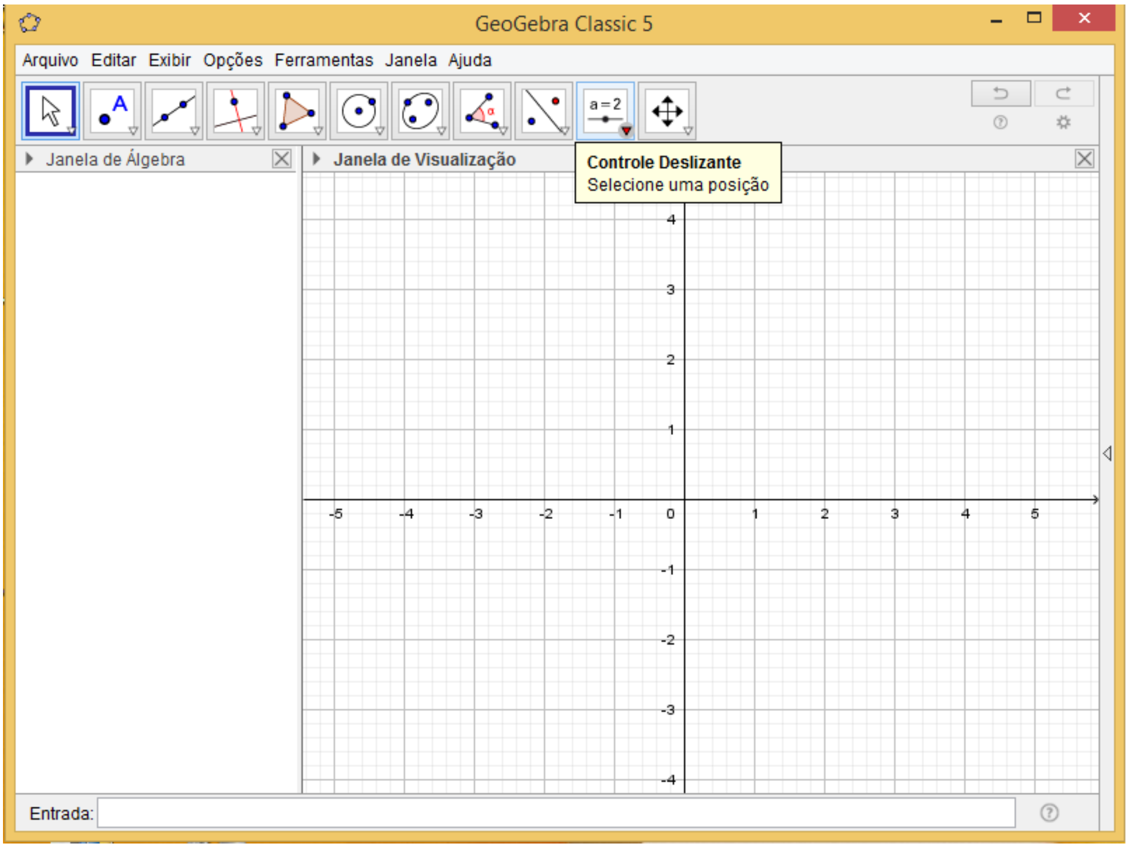
ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. d. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio. *Zetetiké, Campinas*, v. 8, n. 13/14, p. 7–28, 2000. Citado na página 31.

Apêndices

A Controle Deslizante

Em computação, um "controle deslizante"(do inglês slider) é um elemento de interface gráfica (isto é um componente widget) que permite ajustar o parâmetro em um intervalo de valores pré-definidos quando o usuário move o marcador. Controles deslizantes podem ser usados em conjunto com rótulo para mostrar os valores ajustados (por exemplo, nível de som em tocador de mídia). Mostraremos passo a passo como aplicar o controle deslizante utilizado no trabalho.

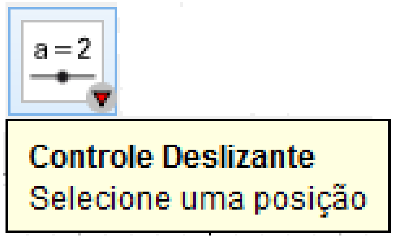
Figura 87 – Tela incial do Geogebra



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Começando com a tela inicial do Geogebra vista na figura 87, observamos na barra de ferramentas que já está selecionada a ferramenta "Controle Deslizante".

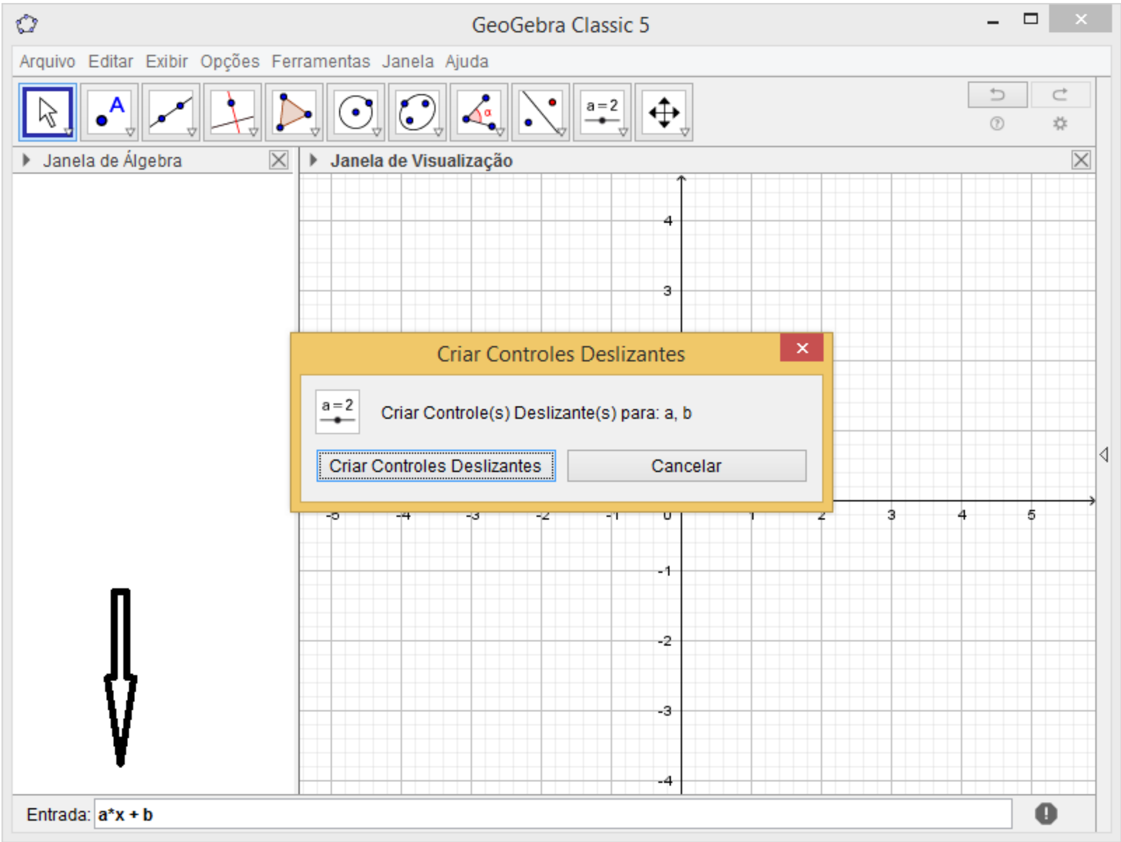
Figura 88 – Ferramenta controle deslizante



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Essa ferramenta tem uma grande utilidade quando precisamos que algum parâmetro assuma valores dentro dos $\mathbb{R}$.

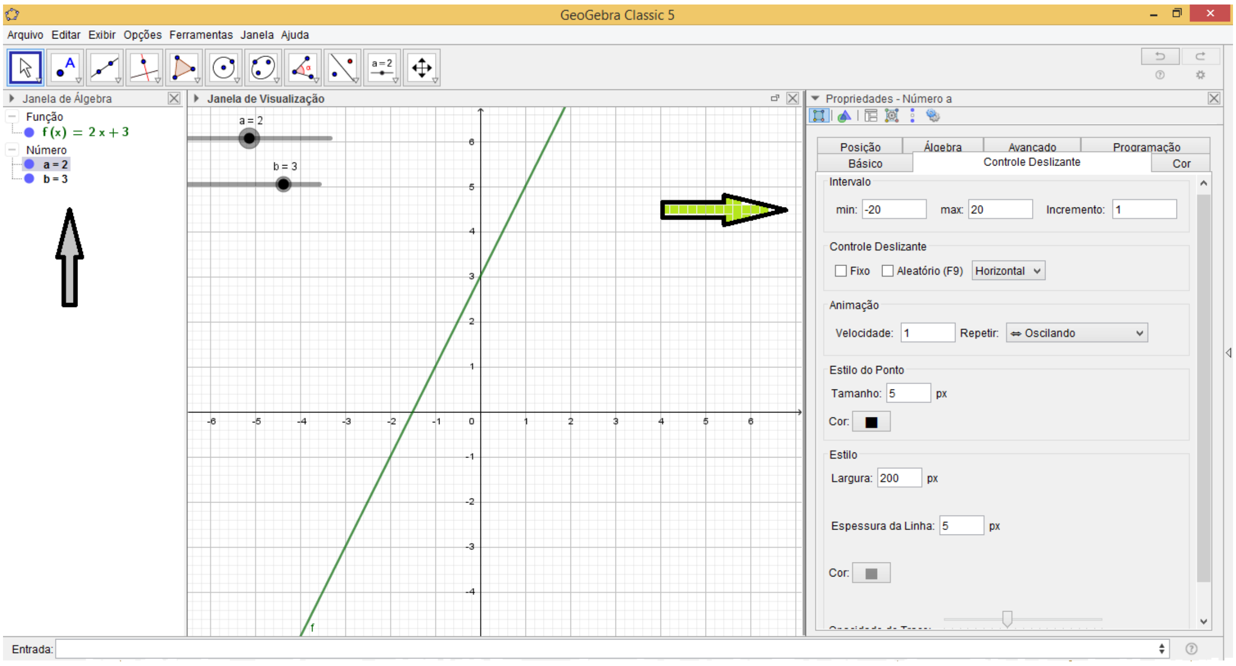
Figura 89 – Campo de entrada no Geogebra



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Neste campo de entrada, demonstrado na figura 89 onde inserimos as funções que queremos estudar, vejamos um exemplo de uma função Afim $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são os parâmetros. Nota-se que quando inserimos alguma função com parâmentros desconhecidos automaticamente aparece na tela do Geogebra "criar controle(s) deslizante(s)", se for a opção desejada devemos apertar em "sim".

Figura 90 – Gráfico com controle deslizante



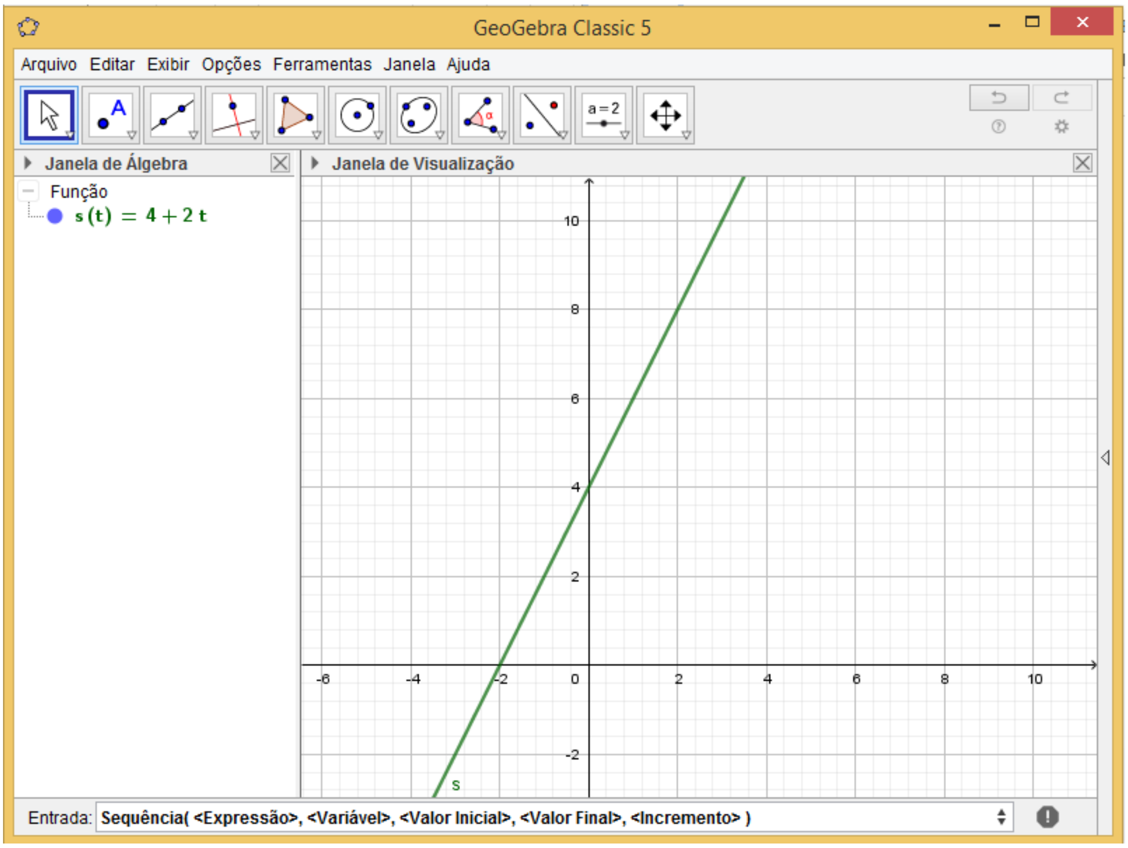
Fonte:Produzido pelo próprio autor

Analisando a figura 90 do lado esquerdo observa-se a seta pra cima, onde temos a janela de algébra. Tudo que digitamos no campo de entrada virá pra este lugar, então temos $f(x) = 2x + 3$. Temos também número $a = 2$ e $b = 3$ (valores que determinei). Na parte central da figura 90 temos dois pontos (marcadores) $a = 2$ e $b = 3$. Notemos que se segurarmos esses marcadores é possível arrastá-los pra direita ou pra esquerda, dependendo do autor. Com isso automaticamente o gráfico vai se alterando. Excelente ferramenta pra mostrar quando a função é crescente ou decrescente, bastando arrastar o marcador a pra esquerta até os valores ficarem negativos; ou arrastar o marcador a pra direita até que os valores fiquem positivos. Essa movimentação pode ser feita também com o marcador b. Na parte da direita da figura 90, a seta verde nos mostra os intervalos min com qualquer valor (desde que seja o menor deles), e max, desde que o valor seja o maior deles. $Incremento$ representa os espaços entre os números (crescer de 1 em 1, de 2 em 2) e números decimais - o autor determina sua variação.

B Sequência de Pontos

Uma ferramenta importante dentro de Geogebra e que nos permite estudar, é a sequência de pontos. A partir da digitação de alguns parâmetros no Comando Sequência é possível produzirmos sequências numéricas e geométricas. Para isso, abordamos as sintaxes do comando e sua utilização na construção de sequências numéricas e de sequências de objetos transformados a partir de uma figura inicial.

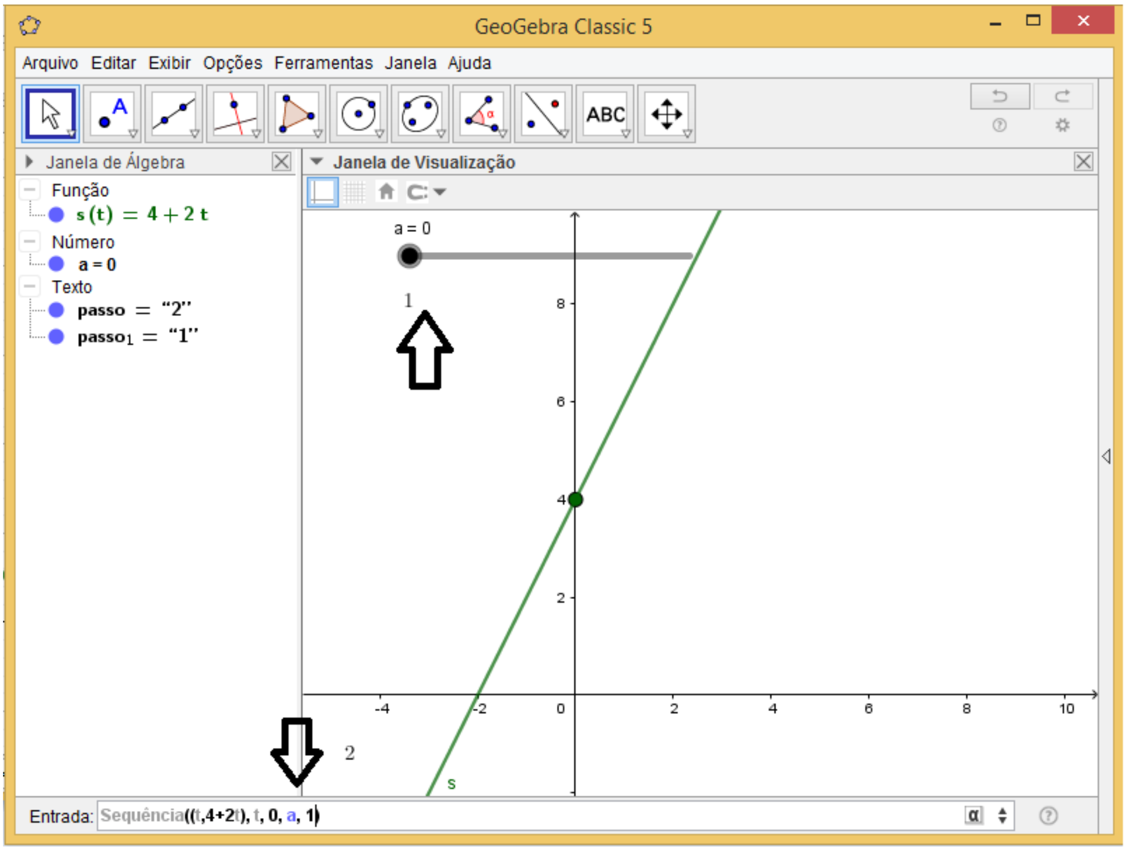
Figura 91 – Gráfico Sequência de Pontos inserindo a Função



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Analisando a figura 91, ao abrir a tela inicial do Geogebra devemos inserir uma função que desejamos estudar. Seu comportamento no campo de "Entrada", como exemplo para explanação, foi a função $S(t) = 4 + 2t$ da figura 78. Logo o gráfico da função será ilustrada. Posteriormente à função já inserida no software, podemos começar o processo de vincular a "sequência de pontos", no campo de entrada. Ao digitar o termo sequência automaticamente aparecerá algumas opções; em seguida selecionamos o campo Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>). Logo, podemos preencher os dados da seguinte forma: <Expressão>: significa o local onde devemos inserir a função $(a, f(a))$, em forma de par ordenado, atribuindo valor a variável a, retornando assim ao resultado $f(a)$: <Variável>: significa qualquer variável que estejamos trabalhando, (tempo, custo, altura, etc). <Valor Inicial>: significa o intervalo inicial, ou seja, a partir de qual valor desejamos que comece a aparecer sua "sequência de pontos", da origem, posição 4, etc. <Valor Final>: significa intervalo final, ou seja, até qual valor desejamos que sua sequência de pontos atinja seu último valor desejado. Nesta parte, sugiremos que se coloque um "controle deslizante", já que essa ferramenta permite variemos conforme a necessidade. Essa técnica localizá-se na área de trabalho do Geogebra, podendo ali serem feitas as simulações.

Figura 92 – Gráfico inserindo a Sequência de Pontos



Fonte:Produzido pelo próprio autor

Analisando a figura 92, temos a função inserida à partir do gráfico. Podemos observar os passos para construção da "sequência dos pontos"no passo 1: criar o "controle deslizante", termo $a = 0$ posição inicial. Depois no campo de Entrada digitar a Sequência$((t, 4 + 2t), t, 0, a, 1)$ onde <Expressão> será substituída por $(t, 4+2t)$, <Variável> será substituída por t, <Valor Inicial> será substituída por 0, <Valor Final> substitui por a, <Incremento> será substituído por 1. No Incremento, podemos inserir o intervalo que quisermos. Dessa forma, os pontos aparecerão no intervalo os valores $0,1$ ou $0,01$ dependendo do autor. Em seguida, aparecerá no gráfico o primeiro ponto, localizado na posição 4. Se quisermos que os pontos prossigam na reta, basta arrastarmos o "controle deslizante".