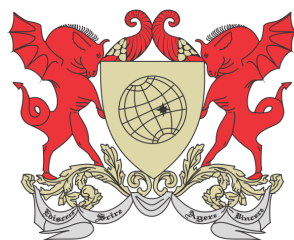


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



EMERSON ALVES BATISTA

# TRIGONOMETRIA EM UMA OFICINA DE USINAGEM

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2018

EMERSON ALVES BATISTA

## TRIGONOMETRIA EM UMA OFICINA DE USINAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,  
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,  
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2018

## FICHA CATALOGRÁFICA

Crie o arquivo `ficha_catalografica.pdf`  
e ele será automaticamente incluído nessa página.

EMERSON ALVES BATISTA

## TRIGONOMETRIA EM UMA OFICINA DE USINAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de agosto de 2018.

---

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

---

Carlos Magno Martins Cosme

---

Luis Alberto D'Afonseca  
(Orientador)

# Dedicatória

---

Dedico esse trabalho à todos que de uma forma ou outra cooperaram para minha formação humana e acadêmica. Dedico a meus pais, Osmar e Terezinha, meus irmãos: Carlos, Luiz e Patrícia, minha querida esposa Pollyanna e a meus amados filhos Sophia e João Pedro que em inúmeros momentos que sentei para escrever a dissertação tive que fazê-la com ambos no colo.

# Agradecimentos

---

Agradeço, primeiramente, a Deus que está a meu lado em todos os momentos de minha vida, guiando meus passos e abençoando minha vida. Aos meus pais Osmar Eustáquio Batista e Terezinha de Jesus Alves Batista que com todas as dificuldades me dedicaram todo o amor e sempre foram referências para meus irmãos e eu. A meus queridos irmãos, companheiros em todos os momentos. A minha amada esposa Pollyanna que, literalmente, esteve a meu lado durante todo esse tempo do PROFMAT e, é claro a meus filhos que sempre que alguma dificuldade aparecia, sorriam e me faziam lembrar do que realmente importa na vida. Agradeço também a meus amigos do PROFMAT que tornaram essa jornada um pouco mais tranquila, verdadeiros companheiros "batalha" e, é claro a todos os professores: Alexandre, Elisangela "in memorian", Justino, Luis Felipe, Luis D'Afonseca, Mehran que com toda a dedicação e comprometimento nos auxiliaram nos estudos e, as vezes, até em nossa vida pessoal. A todos os meus sinceros agradecimentos.

# Resumo

---

BATISTA, Emerson Alves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2018. **Trigonometria em uma Oficina de Usinagem**. Orientador: Luis Alberto D'Afonseca.

Este trabalho apresenta aplicações dos conceitos trigonométricos dentro de uma oficina de usinagem mecânica. Iniciaremos apresentando uma breve história da trigonometria. Em seguida faremos uma análise das principais habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (Ensino Fundamental) e também da matriz curricular de uma importante Rede de Ensino do Estado de Minas Gerais para que possamos entender como esse conteúdo é trabalhado em cada ano escolar. Também trataremos as principais definições, propriedades e teoremas necessárias para uma melhor compreensão das aplicações desse objeto de aprendizagem. Descreveremos alguns equipamentos utilizados em oficinas de usinagem e algumas aplicações da trigonometria dentro dessas. Apresentaremos a Régua e a Mesa de Seno, dois dispositivos Mecânicos que possuem inúmeras aplicações dentro de uma oficina de usinagem mecânica, e também alguns dispositivos que os auxiliam em suas aplicações. Alguns modelos de planos e aula serão apresentados, com atividades que podem ser desenvolvidas na Educação Básica e cuja finalidade é mostrar algumas aplicações da Mesa de Seno para aplicar o conhecimento dos conceitos de trigonometria. Finalizaremos o trabalho propondo a construção de uma Mesa de Seno para que a mesma possa ser aplicada em atividades práticas sendo, dessa forma, uma ferramenta que auxilie os professores do Ensino Básico a apresentarem a Trigonometria como um objeto de aprendizagem que possui suas aplicações práticas.

# Abstract

---

BATISTA, Emerson Alves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2018. **Trigonometry in a Machining Workshop**. Adviser: Luis Alberto D'Afonseca.

This paper presents some applications of trigonometric concepts within a mechanical machining workshop. We will start by presenting a brief history of trigonometry. Then we will analyze the main skills proposed by the National Curricular Common Core and the curricular matrix of an important Education Network of the State of Minas Gerais so that we can understand how this content is worked out in each school year. We will also bring the main definitions, properties and theorems necessary for a better understanding of the applications of this learning object. In chapter 4 we will describe some equipment used in machining workshops and some applications of trigonometry within these. In Chapter 5 we will present the Ruler and the Table of Sine, two mechanical devices that have numerous applications inside a machine shop mechanics, and also some devices that aid them in their applications. In Chapter ref cap: lesson plans some models of plans and class will be presented, with activities that can be developed in Basic Education and whose purpose is to show some applications of the Table of Sine to apply the knowledge of the concepts of trigonometry. We will finish the work by proposing the construction of a Breast Table so that it can be applied in practical activities, such as those proposed in Chapter 6, and, therefore, a tool that assists teachers of Basic Education to present Trigonometry as an object of learning that has its practical applications.



# Lista de Figuras

---

2.1	Papiro-Rhind . . . . .	3
2.2	Arco Duplo . . . . .	4
2.3	Quadrilátero Inscritível para Demonstração do Teorema de Ptolomeu . . . . .	5
2.4	Demonstração do Seno da Diferença utilizando o Teorema de Ptolomeu . . . . .	6
2.5	Finalizando a Demonstração do Seno da diferença pelo Teorema Ptolomeu . . . . .	6
2.6	Soma de Senos (Teorema Ptolomeu) . . . . .	8
2.7	Função $E(t)$ de Euler Crescente . . . . .	12
2.8	Função de Euler . . . . .	14
4.1	Definição de Ângulo e Triângulo Retângulo . . . . .	20
4.2	Definição de Triângulos Semelhantes . . . . .	20
4.3	Relações Métricas no Triângulo Retângulo . . . . .	21
4.4	Demonstração do Recíproco do Teorema de Pitágora . . . . .	24
4.5	Triângulo Retângulo com mediana relativa à hipotenusa . . . . .	24
4.6	Apoio 1: Demonstração da Medida da Mediana Relativa à Hipotenusa . . . . .	25
4.7	Apoio 2: Demonstração da Medida da Mediana Relativa à Hipotenusa . . . . .	25
4.8	Ciclo Trigonométrico de Raio Unitário . . . . .	26
4.9	Relacionando um Número Real a um Ângulo. . . . .	27
4.10	Arco Côngruo . . . . .	27
4.11	Definição de Funções Circulares . . . . .	28
4.12	Definição das Funções Seno e Cosseno . . . . .	29
4.13	Definição das Funções Tangente e Cotangente . . . . .	31
4.14	Definição das Funções Secante e Cosecante . . . . .	33
4.15	Relação Fundamental da Trigonometria . . . . .	35
4.16	Ciclo Trigonométrico de Raio Unitário . . . . .	39
4.17	Apoio as Relações Trigonometricas nos Triângulos Retângulos . . . . .	39
4.18	Demonstração das Fórmulas de Redução de Arcos . . . . .	42
4.19	Demonstração da Lei dos Cossenos . . . . .	43
4.20	Apoio 1: Demonstração da Lei dos Senos . . . . .	44
4.21	Apoio 2: Demonstração da Lei dos Senos . . . . .	45
4.22	Apoio 3: Demonstração da Lei dos Senos . . . . .	46
5.1	Torno Mecânico Convencional . . . . .	47

---

5.2	Torno de Leonardo da Vinci . . . . .	48
5.3	Placas de 3 e 4 Castanhas de um Torno Mecânico . . . . .	48
5.4	Colar Micrômetro de um Torno Mecânico . . . . .	49
5.5	Torneamento Cônico Inclinando o Carro Superior . . . . .	50
5.6	Torneamento Cônico Deslocando o Contraponto . . . . .	50
5.7	Fresadora Mecânica Convencional . . . . .	51
5.8	Primeira Fresadora . . . . .	51
5.9	Fresas . . . . .	53
5.10	Nomenclatura dos Ângulos de uma Fresa Frontal . . . . .	54
5.11	Fresa de Perfil Semicircular Convexo e sua Vista Frontal em Corte . . . . .	55
5.12	Engrenagens Helicoidais . . . . .	56
5.13	Cabeçote Divisor . . . . .	56
5.14	Esquema Trem de Engrenagens . . . . .	57
5.15	Esquema de uma Engrenagem Helicoidal . . . . .	58
5.16	Peças com Encaixe Rabo de Andorinha . . . . .	58
5.17	Encaixe Rabo de Andorinha 1 . . . . .	59
5.18	Encaixe Rabo de Andorinha 2 . . . . .	59
5.19	Mesas de Seno Instaladas em Fresadoras Convencionais. . . . .	60
5.20	Retificadora Mecânica . . . . .	60
5.21	Retificadora utilizando uma Mesa de Seno . . . . .	61
6.1	Relógios Comparadores . . . . .	64
6.2	Blocos Padrões . . . . .	64
6.3	Régua de Seno . . . . .	65
6.4	Transferidor . . . . .	65
6.5	Esquema de Utilização da Régua Seno . . . . .	66
6.6	Mesa de Seno . . . . .	67
6.7	Mesa de Seno Dupla e Magnética . . . . .	68
6.8	Mesa de Seno com Contrapontas . . . . .	68
6.9	Execução do Furo de Centro em uma Peça . . . . .	68
6.10	Esquema de Utilização da Mesa de Seno . . . . .	69
6.11	Esquema de Utilização da Mesa de Seno com Contrapontas . . . . .	69
6.12	Manual Prático do Mecânico: Cassilas . . . . .	70
6.13	Esquema de Usinagem com a Mesa de Seno . . . . .	70
6.14	Esquema de Usinagem com a Mesa de Seno Dupla . . . . .	71
7.1	Equilíbrio de dois corpos em um plano inclinado . . . . .	76
C.1	Mesa de Seno em Várias Vistas . . . . .	91
C.2	Materiais para a Construção da Mesa de Seno . . . . .	92

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>História da Trigonometria</b>	<b>3</b>
2.1	A Trigonometria Europeia do Século XIV . . . . .	10
2.2	Trigonometria e a Análise Matemática . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Trigonometria no Ensino Básico</b>	<b>15</b>
3.1	A Base Nacional Comum Curricular . . . . .	15
3.2	Análise de uma Matriz Curricular . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Definições e Relações Trigonométricas</b>	<b>19</b>
4.1	Relações Métricas no Triângulo Retângulo . . . . .	19
4.2	O Ciclo Trigonométrico . . . . .	25
4.2.1	Funções Circulares . . . . .	27
4.2.2	Relações Fundamentais . . . . .	34
4.3	Propriedades Trigonométricas do Triângulo Retângulo . . . . .	38
4.4	Propriedades Trigonométricas em Triângulos Quaisquer . . . . .	42
<b>5</b>	<b>A Oficina de Usinagem Mecânica</b>	<b>47</b>
5.1	Máquinas Ferramentas . . . . .	47
5.2	Torno Mecânico . . . . .	48
5.3	Fresadora Mecânica . . . . .	50
5.4	Retificadoras . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Régua e Mesa de Seno</b>	<b>63</b>
6.1	Relógio Comparador . . . . .	63
6.2	Blocos Padrões . . . . .	64
6.3	Régua de Seno . . . . .	65
6.4	Mesa de Seno . . . . .	66
6.4.1	Tipos de Mesa de Seno . . . . .	67
6.4.2	Técnica de Utilização . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Planos de Aula</b>	<b>72</b>
7.1	Cálculo da Altura de Um Galpão pelo Teorema de Tales . . . . .	72

---

7.2	Cálculo da Altura de Um Galpão Utilizando Trigonometria . . . . .	74
7.3	Utilização da Mesa de Seno para o Cálculo de Forças . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Base Nacional Comum Curricular</b>	<b>79</b>
A.1	Números . . . . .	79
A.2	Álgebra . . . . .	79
A.3	Geometria . . . . .	80
A.4	Grandezas e Medidas . . . . .	81
A.5	Probabilidade e Estatística . . . . .	81
<b>B</b>	<b>Habilidades e Competências Desenvolvidas na Rede SESI</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Construindo uma Mesa de Seno</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

# Introdução

---

A Matemática é uma ciência que está presente em todos os campos do conhecimento e, ainda assim, muitos não conseguem visualizar algumas de suas aplicações no “mundo real”. Este trabalho visa mostrar algumas aplicações da trigonometria utilizando como exemplos alguns processos de fabricação mecânica e, principalmente, através do princípio de funcionamento de um dispositivo chamado Mesa de Seno que é utilizado na mecânica de usinagem e que pode ser usado para o ensino de alguns conceitos trigonométricos na educação básica.

A proposta de nosso trabalho é descrever a Mesa de Seno e seu uso em uma oficina de usinagem, ilustrando assim, o emprego da trigonometria em uma situação real. Além disso propomos a construção de um protótipo que possa ser utilizado no processo de ensino aprendizagem. Esse protótipo pode ser usado tanto no ensino de Matemática como de outras áreas do conhecimento, uma vez que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular [15] as escolas devem

[...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica da equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem [...]

Para consolidar o estudo da trigonometria e propor aplicações práticas para que o aluno possa entender e visualizar a importância de tal conhecimento no desenvolvimento de toda a ciência, saindo do campo teórico e partindo para o campo prático fazendo com que o estudo se torne mais significativo e consistente iremos propor algumas atividades utilizando a Mesa de Seno em diversas situações problemas.

Portanto, no Capítulo 2 faremos uma breve introdução histórica da trigonometria, citando alguns de seus principais nomes e conseqüentemente suas maiores contribuições para o avanço desse eixo da Matemática ao longo do tempo.

Em seguida, no Capítulo 3, discutiremos o foco dado à Matemática na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no que tange o Ensino Fundamental, uma vez que, até a data de finalização deste projeto a parte referente ao Ensino Médio ainda estava em discussão pelo Conselho Nacional de Educação (CNE). Descreveremos

as cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) propostas pela BNCC, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, dando um destaque maior à Geometria e também ao eixo Grandezas e Medidas, por serem objetos principais de estudo do nosso trabalho. Neste Capítulo também analisaremos uma Matriz Curricular de uma rede de ensino particular do Estado de Minas Gerais, a fim de, analisar como as habilidades referentes à trigonometria são desenvolvidas e distribuídas ao longo do Ensino Fundamental Anos Finais e no Ensino Médio.

No Capítulo 4 serão definidas e demonstradas algumas relações trigonométricas importantes para a aplicação prática desse trabalho.

O Capítulo 5 será iniciado com uma breve apresentação de uma Oficina de Usinagem Mecânica, apresentaremos algumas de suas principais máquinas mostrando que, em diversos momentos, na fabricação ou medição de peças por elas fabricadas, se faz necessário o cálculo trigonométrico. É neste Capítulo que descreveremos detalhadamente o dispositivo mecânico Mesa de Seno em seus diversos modelos e suas variadas formas de aplicação. Daremos alguns exemplos de utilização dentro de uma oficina mecânica, os cálculos necessários para sua aplicação e os instrumentos que a auxiliam na obtenção de medidas de precisão.

Finalizaremos este trabalho apresentando no Capítulo 6 algumas sugestões de atividades em que a utilização da Mesa de Seno se torna possível, sempre com foco na prática e na interdisciplinaridade como descrito na BNCC [15]

*“Na elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, devem ser enfatizadas as articulações das habilidades com as de outras áreas do conhecimento.”*

Após as considerações finais desse trabalho, teremos o Apêndice C em que mostraremos uma forma simples e prática de se construir uma Mesa de Seno Simples que poderá ser utilizada em tarefas práticas em que o uso dos conceitos trigonométricos se fazem presente, quer seja na área de Matemática ou em outras áreas do conhecimento.

# História da Trigonometria

---

Apresentamos nessa seção a história da trigonometria e exibimos os principais resultados matemáticos com suas demonstrações, uma exposição completa da teoria da trigonometria pode ser encontrada em Asger Aaboe [7], Carl B. Boyer [11] e João Bosco Pitombeira [25].

Trigonometria (do grego *trigonon* + *metria*) significa o estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos [20]. A trigonometria é usada em várias áreas do conhecimento como Engenharias, Física, Astronomia, Navegação, entre outras. Sua origem é incerta, entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. Encontram-se problemas envolvendo cotangente no Papiro Rhind (Figura 2.1), um documento egípcio que data de aproximadamente três mil anos, e também uma notável tábua de secantes na tábua Cu-neiforme babilônica Plimpton 322 – tábua babilônia datada entre 1900 e 1600 a.C. [7].

Conforme descreve Carl B. Boyer [11], no livro *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, não há trigonometria no sentido estrito, mas há teoremas equivalentes a leis e fórmulas trigonométricas específicas, como por exemplo as lei dos cossenos e a lei dos senos, utilizando apenas geometria. Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., foi quem recebeu o título de Pai da Trigonometria, isso devido a apresentação de um tratado com cerca de 12 volumes nos quais descrevia a trigonometria com todo o aprofundamento e rigor necessário. A maior parte do



**Figura 2.1:** Papiro-Rhind: Documento Egípcio datado de aproximadamente três mil anos que contém problemas envolvendo cotangentes.

que conhecemos sobre ele é devido a Ptolomeu (cientista, astrônomo e geógrafo de origem grega, autor dos estudos de astronomia mais importantes produzidos antes de Copérnico e Galileu) o qual cita vários resultados de Hiparco sobre trigonometria e astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos. Hiparco é considerado o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas tendo, para isso, usado uma tabela de cordas por ele calculada. Para construir tais tabelas, ele necessitava de uma medida de inclinações ou de ângulos.

Até *Os Elementos* de Euclides, os ângulos eram medidos por múltiplos ou submúltiplos do ângulo reto. Anos depois, astrônomos gregos utilizavam o sistema sexagesimal dos babilônios que dividiam a circunferência em 360 partes, cada uma correspondendo a um grau, e dessa forma, estabeleciam subdivisões em minutos e segundos, relacionando com a base sessenta [25].

Os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco duplo: dado o ângulo  $\alpha = \angle AOC$ , o dobro de  $\alpha$  é o ângulo  $\angle AOB$ , que subtende o arco  $AB$ , e a corda do arco duplo  $AB$  será o segmento  $AB$ . A Figura 2.2 ilustra o ângulo  $\alpha$  e o arco duplo  $AOC$ .

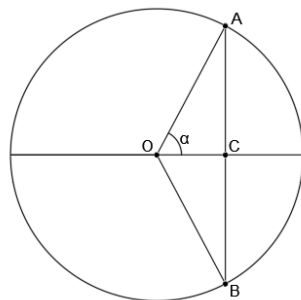


Figura 2.2: Arco Duplo.

O ápice da trigonometria grega ocorreu com Cláudio Ptolomeu cujo principal trabalho, o *Almagesto*, permite datar aproximadamente sua vida em 78 anos, porque nele Ptolomeu faz referências a efemérides astronômicas em que as datas são conhecidas [25]. O *Almagesto* descreve matematicamente o funcionamento do Sistema Solar, supondo a Terra em seu centro. A trigonometria é descrita por Ptolomeu nos Capítulos 10 e 11 de sua obra, sendo, o Capítulo 11 uma tabela de cordas (Senos) e, utilizando essa tabela ele resolveu vários problemas, como o de calcular o comprimento de uma sombra, e também pôde tratar vários problemas de astronomia. As técnicas expostas em seu livro resolve qualquer triângulo decomposto convenientemente em triângulos retângulos. Para construir tal tabela, Ptolomeu utilizou o seguinte teorema.

**Teorema 2.1 (Teorema de Ptolomeu):** Num quadrilátero qualquer, inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

*De outro modo:*

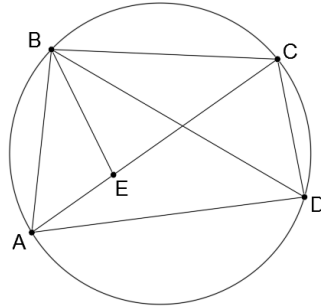
Se  $A, B, C$  e  $D$  são quatro pontos sobre uma circunferência (vértices de um quadrilá-



tero inscrito numa circunferência), então

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \quad (2.1)$$

*Demonstração do Teorema de Ptolomeu.* Tomemos um ponto  $E$  sobre a diagonal  $AC$ , tal que  $\angle ABE = \angle DBC$  (Figura 2.3)



**Figura 2.3:** Nesse quadrilátero os ângulos  $\angle ABE$  e  $\angle DBC$  são iguais por construção.

Observemos que os triângulos  $BCE$  e  $ABD$  são semelhantes, pois os ângulos  $\angle CBE$  e  $\angle ABD$  são iguais por construção, e os ângulos  $\angle BCA$  e  $\angle BDA$  também são iguais, pois determinam o mesmo arco, logo seus lados correspondentes são proporcionais, então

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{AD} \quad \Rightarrow \quad BC \cdot AD = CE \cdot BD \quad (2.2)$$

Agora, observando os triângulos  $BAE$  e  $BDC$  podemos verificar que eles também são semelhantes, pois  $\angle ABD = \angle EBC$  por construção e os ângulos  $\angle BAC$  e  $\angle BDC$  são iguais por determinarem o mesmo arco, portanto

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DC} \quad \Rightarrow \quad AB \cdot CD = AE \cdot BD \quad (2.3)$$

Então, adicionando as equações (2.2) e (2.3)

$$BC \cdot AC + AB \cdot CD = CE \cdot BD + AE \cdot BD$$

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD = BD \cdot (CE + AE)$$

Como  $CE + AE$  equivale a  $AC$ , temos que

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD = BD \cdot AC$$

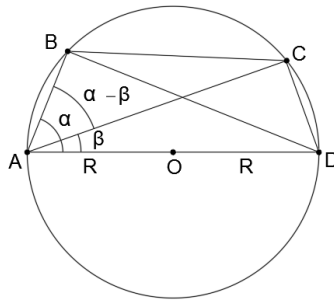
□

Segundo Boyer [11], outro e mais útil caso especial do Teorema de Ptolomeu é aquele que, em linguagem moderna, utiliza-se para demonstrar as equações trigonométricas de adição e subtração de arcos, como veremos nos Teoremas 2.2 e 2.3.

**Teorema 2.2 (Seno da Diferença):** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois ângulos agudos, com  $\alpha > \beta$ , então

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \text{sen } \beta \cos \alpha$$

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscrito numa semicircunferência de raio  $R$  (Figura 2.4)



**Figura 2.4:** Quadrilátero  $ABCD$  inscrito na circunferência de raio  $R$

Desta forma, temos que  $OD = AO = R$  e  $AD = 2R$ . Os triângulos  $ACD$  e  $ABD$  são retângulos, pois estão inscritos numa semicircunferência, assim podemos escrever

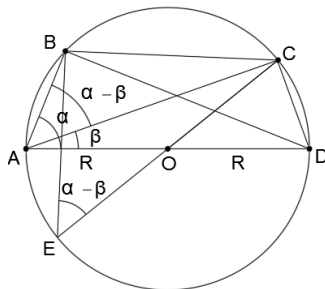
$$\text{sen } \beta = \frac{CD}{AD} \quad \Rightarrow \quad CD = AD \text{sen } \beta \quad (2.4)$$

$$\cos \beta = \frac{AC}{AD} \quad \Rightarrow \quad AC = AD \cos \beta \quad (2.5)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{BD}{AD} \quad \Rightarrow \quad BD = AD \text{sen } \alpha \quad (2.6)$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AD} \quad \Rightarrow \quad AB = AD \cos \alpha \quad (2.7)$$

Tracemos o segmento  $CE$  passando pelo centro  $O$  da circunferência e o segmento  $BE$ , formando, dessa maneira, o triângulo  $BCE$ , que é retângulo por estar inscrito em uma semicircunferência (Figura 2.5).



**Figura 2.5:** O triângulo  $BCE$  é retângulo em  $B$

Sabendo que o ângulo  $\angle BEC$  é igual ao ângulo  $(\alpha - \beta)$ , pois determinam o

mesmo arco  $BC$ , e que  $CE = AD$ , pois são o diâmetro da circunferência, tem-se

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{BC}{CE}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{BC}{AD}$$

$$BC = AD \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \tag{2.8}$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \frac{EB}{CE}$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \frac{EB}{AD}$$

$$EB = AD \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \tag{2.9}$$

De posse do Teorema 2.1 temos

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot AB$$

$$(AD \operatorname{cos} \alpha)(AD \operatorname{sen} \beta) + AD(AD \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) = (AD \operatorname{cos} \beta)(AD \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha$$

□

**Teorema 2.3 (Cosseno da Diferença):** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois ângulos agudos, com  $\alpha > \beta$ , então

$$\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

*Demonstração.* Seja  $ABCE$  um quadrilátero convexo inscrito numa semicircunferência de raio  $R$ , conforme a Figura 2.5, então, pelo Teorema 2.1

$$EC \cdot AB + AE \cdot BC = AC \cdot EB \tag{2.10}$$

Substituindo os valores da equação (2.7) em (2.10), temos

$$AD \cdot AD \operatorname{cos} \alpha + AD \operatorname{sen} \beta \cdot AD \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = AD \operatorname{cos} \beta \cdot AD \operatorname{cos}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos}(\alpha - \beta)$$

Dividindo toda a equação por  $\cos \beta$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sen \beta}{\cos \beta} (\sen \alpha \cos \beta - \sen \beta \cos \alpha) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \sen \alpha \sen \beta - \frac{\sen^2 \beta \cos \alpha}{\cos \beta} = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha \frac{(1 - \sen^2 \beta)}{\cos \beta} + \sen \alpha + \sen \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

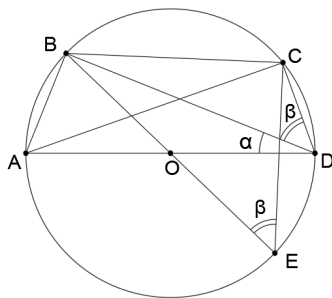
$$\cos \alpha \frac{(\cos^2 \beta)}{\cos \beta} + \sen \alpha \sen \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sen \alpha \sen \beta$$

□

**Teorema 2.4 (Seno da Soma):** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois ângulos agudos, então

$$\sen(\alpha + \beta) = \sen \alpha \cos \beta + \sen \beta \cos \alpha$$



**Figura 2.6:** Quadrilátero  $ABCD$  inscrito na circunferência de raio  $R$

*Demonstração.* Analisando de maneira semelhante aos Teoremas 2.2 e 2.3, se tomarmos o quadrilátero  $ABCD$  (Figura 2.6) e traçarmos dois segmentos:  $BE$ , que passa pelo centro  $O$  da circunferência e  $CE$  formando o triângulo  $BCE$ . Podemos verificar que os ângulos  $\angle BEC$  e  $\angle BDC$  são congruentes pois subtendem o mesmo arco  $BC$ .

Dessa forma, podemos afirmar, em relação aos triângulos  $BCE$ ,  $ADB$  e  $ACD$  que são retângulos, pois todos estão inscritos em semicircunferências que

$$\sen \beta = \frac{BC}{AD} \quad \Rightarrow \quad BC = AD \sen \beta \quad (2.11)$$

$$\sen \alpha = \frac{AB}{AD} \quad \Rightarrow \quad AB = AD \sen \alpha \quad (2.12)$$

$$\cos \beta = \frac{CE}{AD} \quad \Rightarrow \quad CE = AD \cos \beta \quad (2.13)$$

$$\cos \alpha = \frac{BD}{AD} \quad \Rightarrow \quad BD = AD \cos \alpha \quad (2.14)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{AC}{AD} \quad \Rightarrow \quad AC = AD \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad (2.15)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{CD}{AD} \quad \Rightarrow \quad CD = AD \cos(\alpha + \beta) \quad (2.16)$$

Utilizando o Teorema de Ptolomeu aos quadriláteros  $ABCD$  e  $BCDE$ , teremos

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC \quad (2.17)$$

$$BC \cdot ED + BE \cdot CD = BD \cdot CE \quad (2.18)$$

como  $BE = AD$ , pois são diâmetro da circunferência e também diagonais do retângulo  $ABDE$ , logo  $AB = DE$ . Isolando  $CD$  na equação (2.18), temos

$$AD \cdot BC + AB \left( \frac{BD \cdot CE - BC \cdot ED}{AD} \right) = BD \cdot AC \quad (2.19)$$

substituindo os valores das equações (2.11) até (2.16) na equação (2.19) teremos

$$\begin{aligned} AD \cdot AD \operatorname{sen} \beta + AD \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{AD \cos \alpha \cdot AD \cos \beta - AD \operatorname{sen} \beta \cdot AD \operatorname{sen} \alpha}{AD} \right) \\ = AD \cos \alpha \cdot AD \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} \beta(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} \beta(\cos^2 \alpha) + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

□

**Teorema 2.5 (Cosseno da Soma):** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois ângulos agudos, então

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

*Demonstração.* Utilizando a equação (2.17) e substituindo os valores obtidos nas equações de (2.11) à (2.16), teremos

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$$

$$AD \cdot AD \operatorname{sen} \beta + AD \operatorname{sen} \alpha \cdot AD \cos(\alpha + \beta) = AD \cos \alpha \cdot AD \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) - \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta$$

uma vez que  $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$  tem-se

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta + (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \beta$$

dividindo ambos os membros da equação por  $\operatorname{sen} \alpha$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

□

Utilizando a tabela de cordas, Ptolomeu resolveu vários problemas, como o de calcular o comprimento de uma sombra, e também pode tratar vários problemas de astronomia. As técnicas expostas em seu livro resolve qualquer triângulo decomposto convenientemente em triângulos retângulos.

## 2.1 A Trigonometria Europeia do Século XIV

A Matemática se desenvolveu bastante na Europa do século XIV. Pela primeira vez, as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford quanto na Escola de Paris, chegou-se a conclusão de que a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais, como descreve Nielce Lobo da Costa [13].

Ao mesmo tempo em que o desenvolvimento da trigonometria acontecia, ocorreu o desenvolvimento das funções. Nessa área surgiu Nicole Oresme (1323-1382) com seu “*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*”, no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis.

Ainda no século XIV, na Inglaterra, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus [7]. Purbach foi o tutor de Regiomontanus (1436-1475), considerado um dos principais matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

A obra “*Tratado sobre triângulos*”, escrita em cinco livros, contém uma trigonometria completa. Posteriormente, a criação dos logaritmos e alguns teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostrou que a Trigonometria desenvolvida por Regiomontanus era bem semelhante da utilizada hoje em dia. Nessa obra ele criou novas tábuas trigonométricas, melhorando a dos Senos já existente e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas.

Nicolau Copérnico (1473-1543) também deu sua contribuição ao completar alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu “*De Lateribus et Angulis Triangulorum*”, que foi publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus no ano de 1542.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria foi, provavelmente, a “*Tabula Directionum*” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição daa deste ano, em Veneza [7].

As funções trigonométricas foram inicialmente definidas como funções do ângulo e subentendidas como razões, pela primeira vez no “*Canon Doctrinae Ttriangulorum*” de Joachim Rhaeticus em Leipzig no ano de 1551, entretanto, ele não os nomeou seno, cosseno, cossecante, secante e cotangente.

Cerca de cem anos depois, Rhaeticus (1514-1576) retomou as tábuas de Regiomontanus e aumentou a precisão para onze casas decimais. Ele foi o pioneiro na organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até  $45^\circ$  e completando a tabela com o uso da igualdade

$$\operatorname{sen} x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

Rhaeticus também introduziu as secantes na trigonometria europeia e os cálculos do seno de  $n\theta$  em termos do seno  $\theta$ , que foram reestruturados por Jacques Bernoulli no ano de 1702.

Viète (1540-1603) foi quem tratou analiticamente a trigonometria. Ele foi o primeiro matemático a utilizar letras na representação dos coeficientes, o que significou um grande progresso no campo da Álgebra. Viète também construiu tábuas trigonométricas e calculou o seno do ângulo de um minuto ( $\operatorname{sen} 1'$ ) com treze casas decimais.

Deve-se também a Viète o desenvolvimento inicial e sistemático do cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, com aproximação de minutos e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Ele também introduziu métodos gerais de resolução em Matemática. Foi dele a ideia de decompor os triângulos oblíquos em triângulos retângulos para a determinação de todas as medidas dos seus lados e ângulos. Em sua obra “*Variovum de rebus mathematicis*” pode-se ver um equivalente a nossa lei das tangentes

$$\frac{\tan(A + B)}{\tan(A - B)} = \frac{a + b}{a - b}$$

em que  $A$  e  $B$  são ângulos e  $a$  e  $b$  seus respectivos arcos.

Em 1595, Pitiscus publicou um tratado no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus modernizando o assunto. Pela primeira vez o termo trigonometria aparece como título de um de seus livros.

Podemos destacar também o britânico Napier, que estabeleceu regras para triângulos esféricos, que foram amplamente aceitas, enquanto sua maior contribuição, o logaritmos, ainda estavam sendo analisados e não eram reconhecidos como válidos por todos. Suas considerações sobre os triângulos esféricos foram publicadas postu-

mamente no “*Napier Analogies*”, do “*Constructio*” no ano de 1619, em Edinburgh [7].

Uma outra importante contribuição foi dado por John Wallis (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções, por trabalhar séries infinitas.

Paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados na geometria do movimento, Isaac Newton (1642-1727) contribuiu à trigonometria, tendo trabalhado com séries infinitas e expandido  $\arcsen x$  em séries e, por reversão, deduzido a série para  $\sen x$ . Também desenvolveu a fórmula geral para  $\sen(nx)$  e  $\cos(nx)$  tendo, dessa forma, aberto a perspectiva para o  $\sen x$  e o  $\cos x$  surgirem como números e não como grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

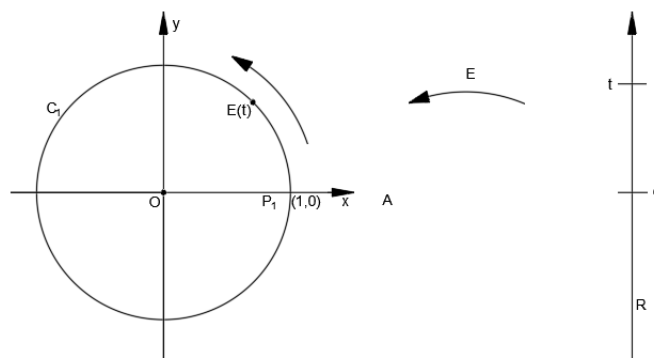
Para finalizar, vale ressaltar o primeiro matemático a evidenciar a periodicidade das funções trigonométricas, Thomas-Fanten de Lagny, em 1710, além de ter usado o termo “*goniometry*”, mesmo num sentido mais etimológico do que como medida de ângulo.

## 2.2 Trigonometria e a Análise Matemática

Leonard Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A mudança das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, se impulsionou novamente com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII.

A associação do número real  $t$  ao ponto  $E(t) = (x,y)$  é obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1,0)$ .
- se  $t > 0$ ,  $E(t)$  será o ponto final do caminho percorrido sobre a circunferência  $C_1$ , a partir do ponto  $(1,0)$ , de um caminho de comprimento  $t$ , no sentido anti-horário, como mostra a Figura 2.7.
- se  $t < 0$ ,  $E(t)$  será a extremidade final de um caminho percorrido sobre  $C_1$  no sentido horário e que possui o comprimento igual a  $|t|$ .



**Figura 2.7:** Associação entre um Número Real e seu Seno através do Ponto Correspondente no Ciclo.



Uma das ideias geniais de Euler foi a criação da função  $E$ , denominada função de Euler. Ela associa a cada número real  $t$  o ponto  $E(t) = (x,y)$  de um círculo  $C_1$  unitário e centrado na origem do plano cartesiano, ou seja, a função  $E$  de Euler é definida no conjunto dos números reais e a sua imagem é o círculo trigonométrico  $C_1$ .

No livro “*A Matemática do Ensino Médio – Volume 1*” [21] a função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C_1$  é comparada com um processo de enrolar a reta, identificada como um fio inextensível, sobre a circunferência  $C_1$  (pensada como um carretel) de modo que o ponto  $0 \in \mathbb{R}$  caia sobre o ponto  $(1,0) \in C_1$ .

Uma propriedade importante da função de Euler é a sua periodicidade.

**Definição 2.1:** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita periódica quando existe um número  $T \neq 0$  tal que  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se isto ocorrer, então  $f(t+kT) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ . O menor número  $T > 0$  tal que  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  é chamado de período da função  $f$ .

Dessa forma, sendo o comprimento de  $C_1$  igual a  $2\pi$ , quando  $t > 2\pi$  ou  $t < -2\pi$  para descrevermos um arco de comprimento  $t$ , a partir do ponto  $(1,0)$ , teremos que dar mais de uma volta ao longo de  $C_1$ . Em particular, sendo  $k$  um número inteiro, as extremidades finais dos arcos de comprimento  $t = 2k\pi$  irão coincidir com o ponto  $(1,0)$ , dessa forma, para qualquer número real  $t$  e qualquer número inteiro  $k$ , teremos

$$E(t + 2k\pi) = E(t)$$

portanto, a função  $E(t)$  é periódica e seu período é  $2\pi$ . Qualquer outro múltiplo inteiro de  $2\pi$  também será um período para essa função.

Alguns fenômenos naturais periódicos como o movimento planetário, vibração das cordas, oscilações de um pêndulo, dentre outros, são descritos através das funções periódicas.

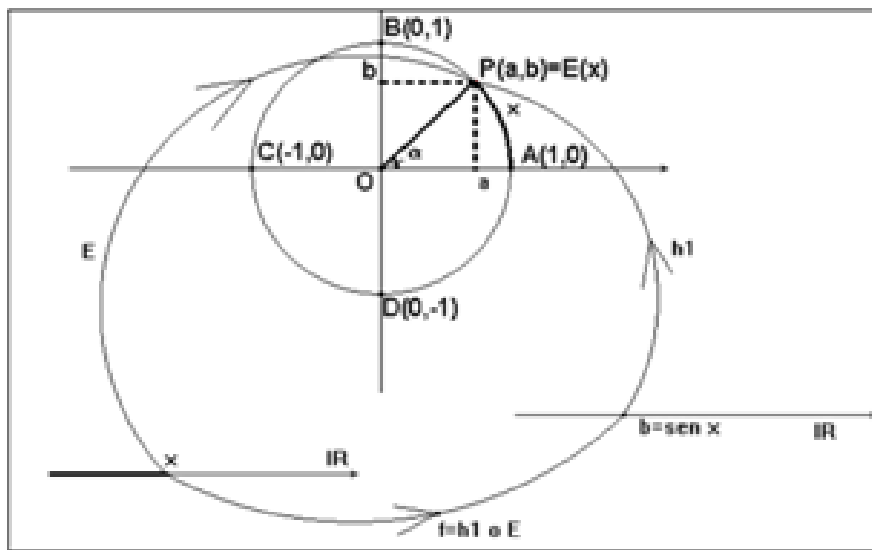
Definindo-se as funções:  $h_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h_1(P(a,b)) = a$  e  $h_2 : C_1 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h_2(P(a,b)) = b$ , e tomando-se as compostas:  $f = h_1 \circ E$  e  $g = h_2 \circ E$ , podem-se definir as funções seno e cosseno de um número real  $t$  e não mais de um ângulo, como anteriormente era necessário.

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , a ele se associa um ponto  $P$ , do círculo, sendo:  $P = E(t) = (a,b)$ . Considerando  $a = \cos t$  e  $b = \sin t$ , define-se:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(t) = \sin t \qquad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(t) = \cos t$$

Sendo  $\cos t$  a abscissa e  $\sin t$  a ordenada de  $P = E(t)$ . A Figura 2.8 ilustra essas definições.

A obra “*Introduction in Analysin Infinitorum*”, um trabalho de dois volumes de Leonhard Euler e datado do ano de 1748 trata de forma analítica as funções trigonométricas e é considerado o livro chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de



**Figura 2.8:** Associação entre um Número Real e seu Seno através do Ponto Correspondente no Ciclo.

um ponto de um círculo unitário, ou o número definido pela série

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e ele mostrou que

$$\text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{e} \quad \text{cos } x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

onde  $i$  é a unidade imaginária, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos.

Portanto, a trigonometria tornou-se autônoma e transformou-se em uma parte da Análise Matemática expressando relações entre números complexos sem a necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Enfim, neste pequeno texto sobre a História da Trigonometria, descrevemos de forma sucinta parte da evolução dessa área de extrema importância para o desenvolvimento científico.

# Trigonometria no Ensino Básico

---

Neste capítulo descreveremos as competências e habilidades propostas pela recém aprovada Base Nacional Comum Curricular que se referem no objeto de aprendizagem proposta por esse trabalho, a Trigonometria. Além de uma detalhada descrição dessas habilidades e competências propostas pela BNCC, também mostraremos alguns pontos da Matriz Curricular de Matemática da Rede SESI em Minas Gerais, a fim de, verificarmos como os conteúdos necessários para o aprendizado de Trigonometria são propostos a cada série de estudo dos Ensinos Fundamental e Médio dessa importante Rede.

## 3.1 A Base Nacional Comum Curricular

Conforme elaborado pelo Ministério da Educação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[15] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) também define que, a Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

A BNCC é toda elaborada com foco no desenvolvimento de habilidades e competências, que ela mesma descreve como sendo a mobilização de conhecimentos (conceitos procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Ela também propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e é nesse aspecto que se torna importante apresentar aos alunos aplicações práticas de conceitos matemáticos estudados no ensino básico, sempre que possível.

De acordo com a BNCC [15] também se torna importante contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los,

representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas.

A princípio a Base Nacional Comum Curricular detalha apenas duas etapas da Educação Básica (a Educação Infantil e o Ensino Fundamental), pois, o documento referente ao Ensino Médio ainda não foi aprovado.

”Durante o processo de elaboração da versão da BNCC encaminhada para apreciação do CNE em 6 de abril de 2017, a estrutura do Ensino Médio foi significativamente alterada por força da Medida Provisória nº 446, de 22 de setembro de 2016, posteriormente convertida na Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Em virtude da magnitude dessa mudança, e tendo em vista não adiar a discussão e a aprovação da BNCC para a Educação Infantil e para o Ensino Fundamental, o Ministério da Educação decidiu postergar a elaboração – e posterior envio ao CNE – do documento relativo ao Ensino Médio, que se assentará sobre os mesmos princípios legais e pedagógicos inscritos neste documento, respeitando-se as especificidades dessa etapa e de seu alunado.”

(Texto BNCC, 2018, pag. 21). O Ensino Fundamental, “a fim de favorecer a comunicação entre os conhecimentos e os saberes dos diferentes componentes curriculares” (Brasil, 2010), está organizado em cinco áreas do conhecimento: Linguagens, Ciência da Natureza, Ciências Humanas, Ensino Religioso e Matemática.

Na seção 4.2 a BNCC inicia suas considerações sobre a área da Matemática o que é descrito por ela como

[...] o conhecimento necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais[...]

É importante ressaltar a importância de se considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.

No que se refere a sua aplicação no Ensino Fundamental, a Matemática deve ter o compromisso com o desenvolvimento do *letramento matemático* [15], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de maneira a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação de resolução de problemas em uma variedade de contextos. A análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e, inclusive da Matemática, contribuem para o desenvolvimento dessas habilidades. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem são exemplos de atividade matemática.

Devido a esses pressupostos a área da Matemática e, conseqüentemente o componente curricular de Matemática devem garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas, competências essas listadas a seguir:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma

ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Para garantir essas competências, a BNCC propõe cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística), correlacionadas, que orientam a formulação das habilidades ao longo do Ensino Fundamental, onde, cada uma delas poderá receber ênfase diferente, de acordo com o ano de escolarização. Uma análise os principais tópicos de cada eixo no Ensino Fundamental Anos Finais é feita no Apêndice A.

## 3.2 Análise de uma Matriz Curricular

Nesta seção analisaremos, como exemplo, a matriz curricular da rede SESI de educação, verificando as habilidades que estão diretamente relacionadas ao estudo da trigonometria ao longo do Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio. É importante ressaltar nesse momento que, como até a presente data apesar de já ter sido aprovada pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), a matriz curricular que iremos analisar ainda não foi adaptada à BNCC.

O Ensino Fundamental oferecido pela Rede SESI MG de Educação estrutura-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais, bem como na LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação –, enfatizando o crescimento integral dos alunos, o protagonismo destes em relação à construção do conhecimento, o desenvolvimento das competências e habilidades, situando-os em uma sociedade em constantes mudanças culturais, sociais, econômicas e tecnológicas, a fim de que tenham um papel ativo na sua transformação [1] e [2].

A lista das habilidades e competências estão no Apêndice B.

# Definições e Relações Trigonométricas

---

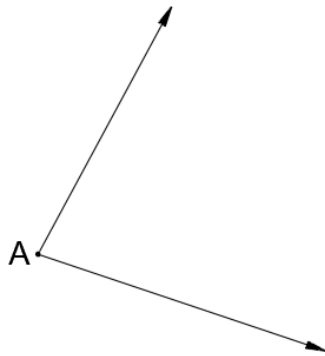
Neste capítulo descreveremos algumas definições e relações trigonométricas que serão importantes no desenvolvimento das atividades propostas no final deste trabalho e, é claro, para o entendimento do princípio de funcionamento da Mesa de Seno. Como já visto no Capítulo 1, a trigonometria tem um papel fundamental no desenvolvimento da humanidade e, é através dessa perspectiva que desenvolveremos o nosso trabalho para estimular o seu estudo para a solução de problemas práticos e o mais próximo possível da realidade dos alunos. Porém, para que o ensino da trigonometria seja feito de forma que o estudante aprenda sem grandes dificuldades, é necessário que o professor tenha um conhecimento aprofundado do conteúdo que está ensinando, ou seja, a formação continuada e a prática docente são de extrema importância para que se possa ter uma boa aula de matemática, em especial, de trigonometria. Pavanello [24] descreve:

*“Para que possa levar os estudantes a aprender Matemática, para que se esteja em condições de lhes proporcionar experiências enriquecedoras e significativas com ela, é evidente que o professor precisa de conhecimentos que lhe permitam executar com êxito sua tarefa, dentre os quais não pode deixar de ser mencionado um conhecimento abrangente e profundo dos conteúdos que serão abordados em sala de aula.”*

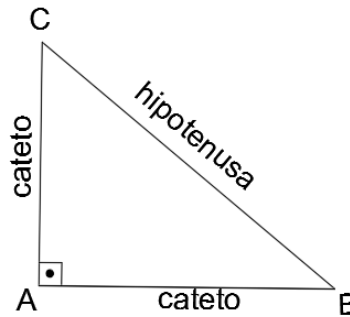
A seguir, apresentaremos as relações métricas no triângulo retângulo, o círculo trigonométrico, relações trigonométricas no triângulo retângulo e as leis do Seno e do Cosseno. A teoria completa desses objetos de aprendizagens podem ser encontradas em João Lucas Marques Barbosa [9], Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo [14], Rokusaburo Kiyukawa [20] e Gelson Iezzi [18].

## 4.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Inicialmente, utilizaremos algumas definições dadas por, para que possamos utilizá-las adiante.



(a) A figura formada por duas semi-retas de mesma origem é denominada *ângulo*



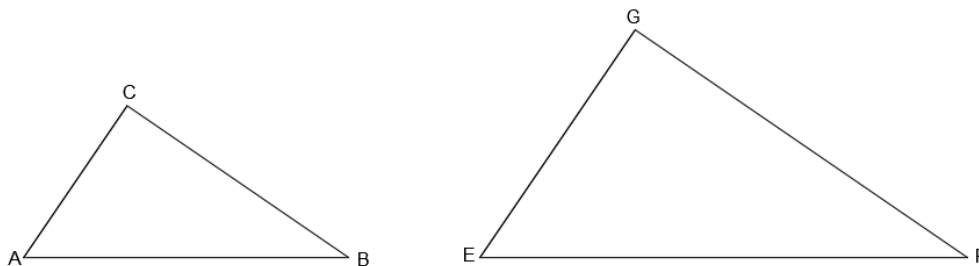
(b) Todo triângulo que possui um ângulo reto é denominado Triângulo Retângulo.

**Figura 4.1:** Definição de Ângulo e Triângulo Retângulo

**Definição 4.1 (Ângulo):** Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem, como mostrado na Figura 4.1a.

**Definição 4.2 (Ângulo Reto):** Um ângulo cuja medida é  $90^\circ$  é chamado ângulo reto.

**Definição 4.3 (Triângulo Retângulo):** Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado Hipotenusa, e os outros dois são denominados Catetos, como mostrado na Figura 4.1b.



**Figura 4.2:** Triângulos que possuem ângulos iguais são denominados semelhantes e, dessa forma, seus lados homólogos são proporcionais.

**Definição 4.4 (Triângulos Semelhantes):** Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Com isso queremos dizer que, se  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  são dois triângulos semelhantes, como mostra a Figura 4.2, e se  $A \rightarrow E$ ,  $B \rightarrow F$  e  $C \rightarrow G$  é a correspondência que estabelece semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{E} \quad \hat{B} = \hat{F} \quad \hat{C} = \hat{G}$$



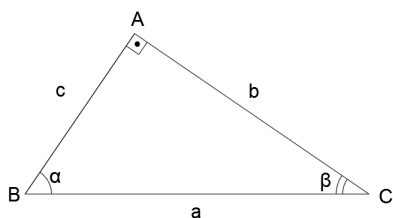
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

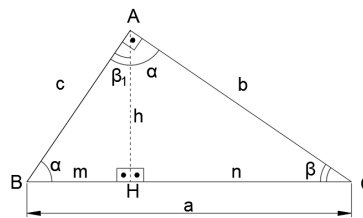
Considerando o triângulo retângulo  $ABC$  da Figura 4.3a e construindo a altura  $h$  como na Figura 4.3b podemos observar que:

1.  $b$  e  $c$  são as medidas dos catetos;
2.  $a$  é a medida da hipotenusa;
3.  $h$  é a medida da altura relativa à hipotenusa;
4.  $m$  é a medida da projeção ortogonal do cateto  $\overline{AB}$  sobre a hipotenusa;
5.  $n$  é a medida da projeção ortogonal do cateto  $\overline{AC}$  sobre a hipotenusa.

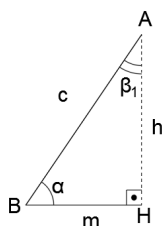
Uma vez que, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a  $180^\circ$ , logo, têm-se que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , e,  $\alpha + \beta_1 = 90^\circ$ , então,  $\beta = \beta_1$ , analogamente,  $\alpha = \alpha_1$  [9]. Assim  $\triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$ . Portanto, analisaremos as relações entre os triângulos  $ABC$  e  $ABH$ . Dessa forma, a partir das Figuras 4.3a e 4.3c, têm-se que  $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ .



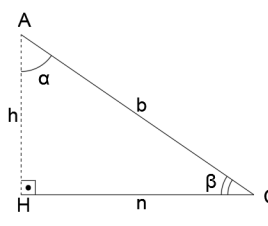
(a) Triângulo Retângulo  $ABC$ .



(b) Triângulo  $ABC$  reto em  $A$  e com altura relativa ao lado  $BC$  medindo  $h$ .



(c) Triângulo Retângulo  $ABH$ .



(d) Triângulo Retângulo  $ACH$ .

**Figura 4.3:** Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Assim, valem as seguintes proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \tag{4.1}$$

Como resultado obtém-se as relações:

$$ah = bc \quad (4.2)$$

$$c^2 = am \quad (4.3)$$

$$bm = ch \quad (4.4)$$

De maneira análoga, analisaremos os triângulos  $ABH$  e  $ACH$ , mostrados nas Figuras 4.3c e 4.3d, e, desenvolvendo as razões de semelhanças entre eles, obtemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \quad (4.5)$$

Desenvolvendo essas razões chega-se as seguintes relações:

$$cn = bh \quad (4.6)$$

$$ch = bm \quad (4.7)$$

$$mn = h^2 \quad (4.8)$$

Também podemos analisar os triângulos  $ABC$  e  $HAC$  mostrados nas Figuras 4.3a e 4.3d, uma vez que também são semelhantes, obtendo as seguintes relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \quad (4.9)$$

que desenvolvendo-as, chegasse a:

$$an = b^2 \quad (4.10)$$

$$ah = bc \quad (4.11)$$

$$bh = cn \quad (4.12)$$

As Relações Métricas no Triângulo Retângulo que foram apresentadas serão utilizadas nas demonstrações de outros teoremas que apresentaremos e também podem ser utilizadas em algumas aulas práticas que proporemos no Capítulo 7, além disso, todas essas relações supracitadas podem ser enunciadas, a partir da definição de Média proporcional dada por José Nicolau Pompeo [14].

**Definição 4.5 (Média Proporcional):** Média proporcional dos segmentos  $r$  e  $s$  dados é o segmento  $x$  que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{s} \quad (4.13)$$

Dessas proporções segue que

$$x^2 = rs \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{rs} \quad (4.14)$$

A média proporcional de  $r$  e  $s$  coincide com a média geométrica de  $r$  e  $s$ .

Portanto, a partir da definição de Média proporcional, podemos enunciar as relações métricas no triângulo retângulo da seguinte maneira:

1. Cada cateto é a média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$b^2 = an \qquad c^2 = am$$

2. A altura relativa à hipotenusa é a média proporcional, ou média geométrica, entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

$$h^2 = mn$$

3. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$bc = ah$$

4. O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$bh = cn \qquad ch = bm$$

Segundo Kiyukawa [20] as relações trigonométricas mais importantes são:

$$b^2 = an \tag{4.15}$$

$$c^2 = am \tag{4.16}$$

$$h^2 = mn \tag{4.17}$$

**Teorema 4.1 (Teorema de Pitágoras):** A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

$$b^2 + c^2 = a^2 \tag{4.18}$$

*Demonstração do Teorema de Pitágoras.* Para provar esta relação basta somar membro a membro as equações (4.10) e (4.3), como segue:

$$\begin{cases} b^2 = an \\ c^2 = am \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

como  $m + n = a$ , temos que

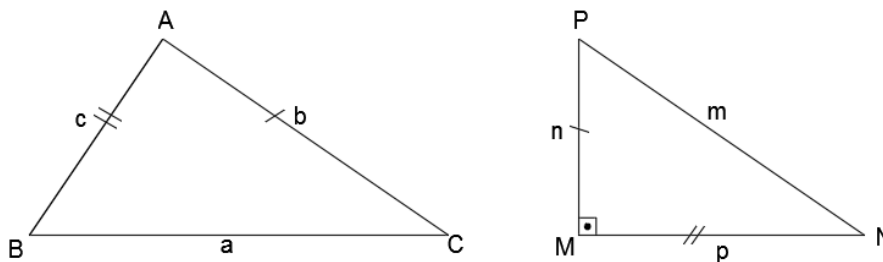
$$b^2 + c^2 = a^2$$

que é a expressão (4.18). □

Como apresentado por Pompeo [14] o recíproco do Teorema de Pitágoras também é válido, como demonstrado a seguir.

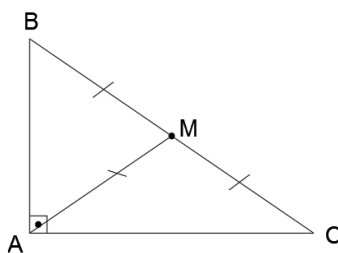
**Teorema 4.2 (Recíproco do Teorema de Pitágoras):** Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

$$\begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Tese} \\ \triangle ABC \text{ é retângulo} \end{array}$$



**Figura 4.4:** Triângulos  $ABC$  e  $MNP$  utilizados para a demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras.

*Demonstração.* Partindo do triângulo dado  $ABC$ , construímos o triângulo  $MNP$ , retângulo em  $M$ , como mostra a Figura 4.4. Os catetos  $\overline{MN}$  e  $\overline{MP}$  são, respectivamente, congruentes aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , e, uma vez que o triângulo  $MNP$  é retângulo em  $M$ , é válida a igualdade  $m^2 = n^2 + p^2$  e como  $n = b$  e  $p = c$ , temos que  $m^2 = b^2 + c^2$ , e assim  $m^2 = a^2$ , ou seja,  $m = a$ . Portanto, pelo caso de congruência  $LLL$  (lado, lado, lado), temos que o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $MNP$  e, sendo o triângulo  $MNP$  retângulo em  $M$ , isso implica que o triângulo  $ABC$  será retângulo em  $A$ .  $\square$



**Figura 4.5:** Triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$  com  $M$  ponto médio da hipotenusa  $BC$ .

Outro teorema importante é listado a seguir

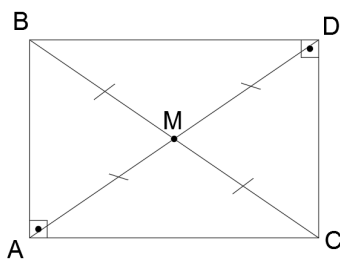
**Teorema 4.3 (Medida da mediana relativa à hipotenusa):** Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa. Como ilustrado na Figura 4.5

Esse teorema será demonstrado de duas maneiras:

1. a partir da construção de um retângulo e suas diagonais.
2. através de uma circunferência circunscrita a um triângulo retângulo.

Ambas são descritas a seguir:

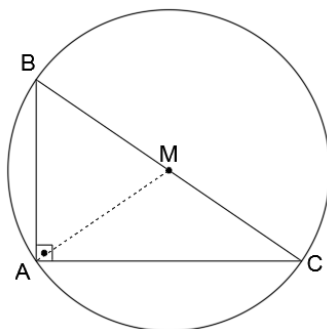
*Demonstração 1.* Demonstrando o teorema a partir da construção do retângulo  $ABCD$  e suas diagonais, como ilustrado na Figura 4.6, utilizamos o fato de que as diagonais de um retângulo são congruentes entre si e o ponto comum às duas é o ponto médio de cada uma. Então, uma vez que as diagonais  $AD$  e  $BC$  são



**Figura 4.6:** As diagonais  $AD$  e  $BC$  do retângulo  $ABCD$  se intersectam no ponto médio  $M$  de ambas

iguais e, sendo  $AM = \frac{AD}{2}$ , concluímos que  $AM = \frac{BC}{2}$ . □

*Demonstração 2.* Para demonstrarmos o Teorema 4.3 através da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo, consideremos a Figura 4.7. Nela, o ângulo



**Figura 4.7:** Triângulo retângulo  $ABC$  inscrito em uma circunferência de centro  $M$  e diâmetro  $BC$ .

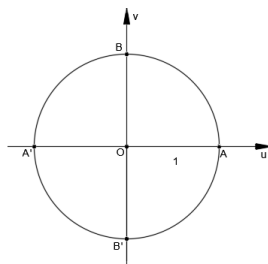
inscrito na circunferência é reto em  $A$  e, dessa forma, o arco  $BC$  mede  $180^\circ$ . Então, o segmento  $\overline{BC}$  é o diâmetro, e o ponto médio  $M$  é o centro da circunferência. Portanto, a medida  $\overline{AM}$  é igual ao raio da circunferência, de onde conclui-se que  $AM = \frac{BC}{2}$ . □

## 4.2 O Ciclo Trigonométrico

Para darmos prosseguimento ao nosso estudo em trigonometria, é necessário que façamos referência ao ciclo trigonométrico, que é definido como uma circunferência de raio unitário usada para representar números reais relacionados a ângulos. Dessa

forma, cada ponto da circunferência está relacionado a um número real, que, por sua vez, representa um ângulo, como foi mostrado na Seção 2.2.

De acordo com Pompeo [14], para que seja definido um ciclo trigonométrico basta que tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal  $uOv$  e, daí, consideremos a circunferência  $\lambda$  de centro  $O$  e raio  $r = 1$ , como mostrado na Figura 4.8. Observe que sendo o raio dessa circunferência igual a 1 seu comprimento é  $2\pi$ . Agora,



**Figura 4.8:** Ciclo Trigonométrico de raio unitário e origem  $O$

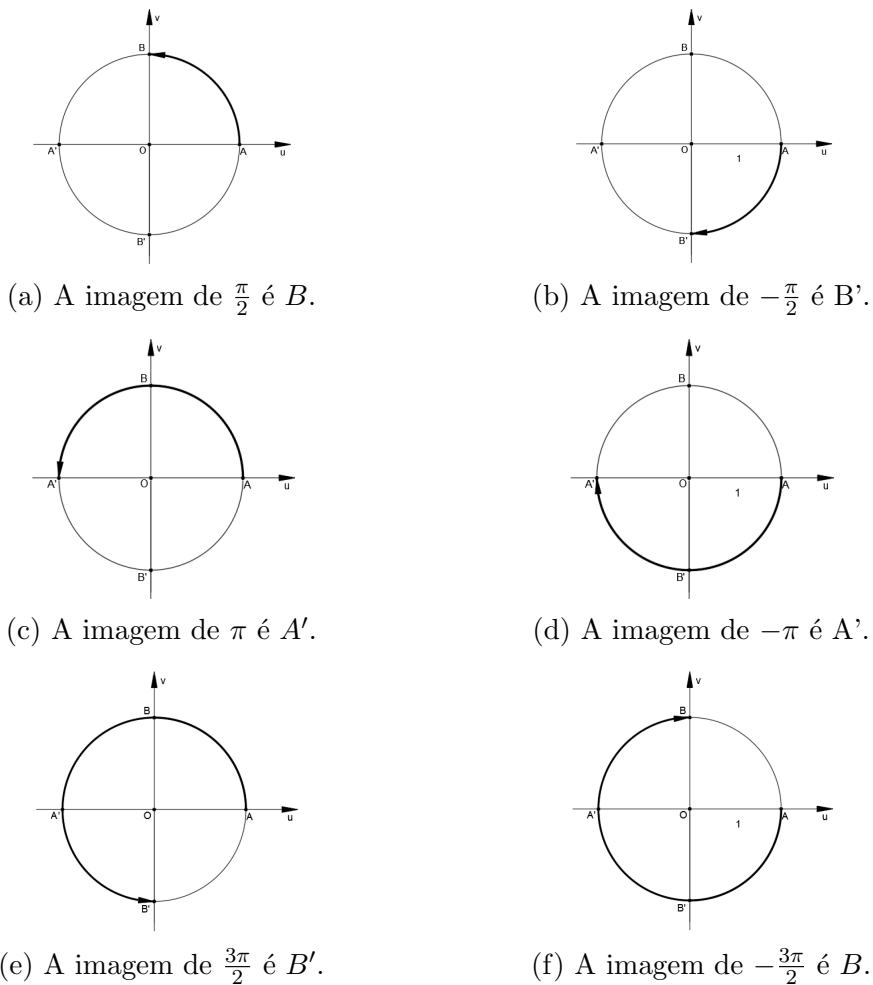
basta definir uma aplicação de  $\mathbb{R}$  sobre  $\lambda$ , isto é, associar a cada número real  $x$  um único ponto  $P$  da circunferência  $\lambda$  da seguinte maneira:

1. se  $x = 0$ , então  $P$  coincide com  $A$ ;
2. se  $x \geq 0$ , então realizamos a partir de  $A$  um percurso de comprimento  $x$ , no sentido anti-horário, e marcamos  $P$  como ponto final do percurso.
3. se  $x < 0$ , então realizamos a partir de  $A$  um percurso de comprimento  $|x|$ , no sentido horário. O ponto final do percurso é  $P$ .

Essa circunferência ( $\lambda$ ), com origem em  $A$ , é a chamada *circunferência trigonométrica* ou *ciclo trigonométrico*.

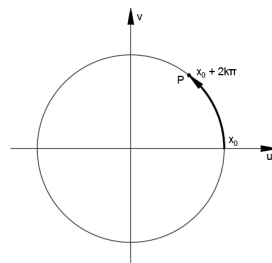
Como descrito em Rokusaburo Kiyukawa no livro “*Os Elos da Matemática*” [20], se  $P$  está associado ao número  $x$  dizemos que  $P$  é a imagem de  $x$  no ciclo. Assim, podemos exemplificar das seguintes maneiras:

1. Na Figura 4.9a temos que a imagem de  $\frac{\pi}{2}$  é o ponto  $B$  e na Figura 4.9b temos que a imagem de  $-\frac{\pi}{2}$  é o ponto  $B'$ .
2. Nas Figuras 4.9c e 4.9d temos, respectivamente, que a imagem de  $\pi$  e a de  $-\pi$  é  $A'$ .
3. Na Figura 4.9e temos que a imagem de  $\frac{3\pi}{2}$  é  $B'$  e na Figura 4.9e a imagem de  $-\frac{3\pi}{2}$  é  $B$ .



**Figura 4.9:** Relacionando um Número Real a um Ângulo.

É também importante observar que se  $P$  é a imagem do número  $x_0$ , como na Figura 4.10, então  $P$  é a imagem dos números  $x_0, x_0 \pm 2\pi, x_0 \pm 4\pi, x_0 \pm 6\pi$ , etc. Resumidamente,  $P$  é a imagem dos elementos do conjunto  $\{x \in \mathbb{R} | x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

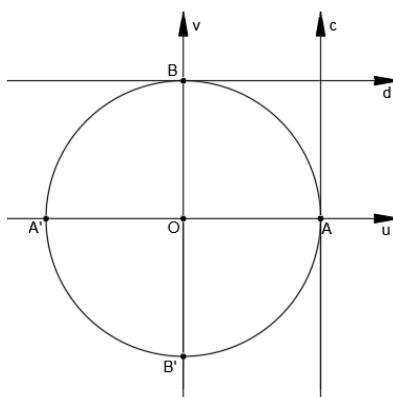


**Figura 4.10:** Nesta figura temos que  $P$  é imagem de  $x_0 + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 4.2.1 Funções Circulares

Gelson Iezzi [18], descreve que ao considerarmos um ciclo trigonométrico de origem  $O$ , como o ilustrado na Figura 4.11 podemos associar quatro eixos a esse ciclo, sendo eles:

1. O eixo horizontal  $u$  é o eixo dos cossenos cujo sentido positivo é da origem  $O$  para o ponto  $A$  à direita.
2. O eixo  $v$  perpendicular a  $u$  que passa pela origem  $O$  é o eixo dos senos e o sentido positivo vai de  $O$  para  $B$ .
3. O eixo  $c$  que é paralelo a  $v$  e passa pelo ponto  $A$  é o eixo das tangentes. O sentido positivo desse eixo é o mesmo sentido do eixo  $v$ .
4. O eixo  $d$  que é paralelo a  $u$  e passa pelo ponto  $B$  é o eixo das cotangentes. O sentido positivo desse eixo é análogo ao do eixo dos  $u$  dos cossenos.



**Figura 4.11:** Ciclo Trigonométrico de origem  $O$  em que os eixos  $u$ ,  $d$ ,  $v$  e  $c$  são, respectivamente, os eixos dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes.

Uma vez que os eixos  $u$  e  $v$  dividem a circunferência em quatro arcos ( $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BA'}$ ,  $\widehat{A'B'}$  e  $\widehat{B'A}$ ), considerando um número real  $x$ , indicaremos, como forma de localização, da imagem  $P$  de  $x$  no ciclo:

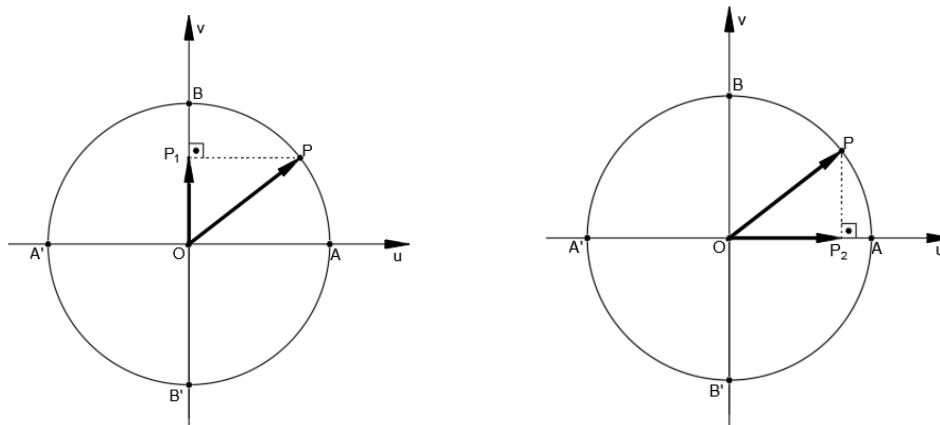
1.  $x$  está no 1º quadrante, se, e somente se, o ponto  $P$  pertence ao arco  $AB$  e isso ocorrerá se, e somente se,  $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
2.  $x$  está no 2º quadrante se, e somente se, o ponto  $P$  pertence ao arco  $BA'$  e isso ocorrerá se, e somente se,  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$
3.  $x$  está no 3º quadrante se, e somente se, o ponto  $P$  pertence ao arco  $A'B'$  e isso ocorrerá se, e somente se,  $\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
4.  $x$  está no 4º quadrante, se, e somente se, o ponto  $P$  pertence ao arco  $B'A$  e isso ocorrerá se, e somente se,  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$

**Definição 4.6 (Função Crescente):** Uma função  $f$  é dita crescente num intervalo  $I$  quando para qualquer par de pontos  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 < x_2$ , temos  $f\{x_1\} \leq f\{x_2\}$ .

**Definição 4.7 (Função Periódica):** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é periódica se existir um número  $p > 0$  satisfazendo a condição

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in A$$





(a) A função  $\text{sen } x$  é a ordenada  $\overline{OP_1}$  do ponto  $P$  em relação ao sistema  $uOv$ .

(b) A função  $\text{cos } x$  é a abscissa  $\overline{OP_2}$  do ponto  $P$  em relação ao sistema  $uOv$ .

Figura 4.12: Definição das Funções Seno e Cosseno

**Definição 4.8 (Função Seno):** Dado um número real  $x$ , seja  $P$  sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos seno de  $x$  (e indicamos  $\text{sen } x$ ) a ordenada  $\overline{OP_1}$  do ponto  $P$  em relação ao sistema  $uOv$ , como mostrado na Figura 4.12a. Denominamos *função seno* a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$  o real  $\overline{OP_1} = \text{sen } x$ , isto é

$$f(x) = \text{sen } x = \overline{OP_1}$$

Podemos observar que a função seno possui as seguintes propriedades:

1. A imagem da função seno é o intervalo  $[-1,1]$ , isto é,  $-1 \leq \text{sen } x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

*Justificativa:* É imediata pois, se  $P$  está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de  $-1$  a  $+1$ .

2. Se  $x$  é do primeiro ou segundo quadrante, então  $\text{sen } x$  é positivo.

*Justificativa:* De fato, neste caso o ponto  $P$  está acima do eixo  $u$  e sua ordenada é positiva.

3. Se  $x$  é do terceiro ou quarto quadrante, então,  $\text{sen } x$  é negativo.

*Justificativa:* De fato, neste caso o ponto  $P$  está abaixo do eixo  $u$  e sua ordenada é negativa.

4. Se  $x$  percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então,  $\text{sen } x$  é crescente.

*Justificativa:* É imediato que, se  $x$  percorre o primeiro quadrante, então  $P$  percorre o arco  $\widehat{AB}$  e sua ordenada cresce. O mesmo ocorre no quarto quadrante.

5. Se  $x$  percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então  $\text{sen } x$  é decrescente.

*Justificativa:* É imediato que, se  $x$  percorre o segundo quadrante, então  $P$  percorre o arco  $\widehat{BA'}$ , e sua ordenada decresce. Fato semelhante ocorre no terceiro quadrante.

6. A função seno é periódica (Definição 4.7) e seu período é  $2\pi$ .

*Justificativa:* É fato que, se  $\text{sen } x = \overline{OP_1}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\text{sen}(x + 2k\pi) = \overline{OP_1}$  pois  $x$  e  $x + 2k\pi$  têm a mesma imagem  $P$  no ciclo. Temos, então que para qualquer  $x$  em  $\mathbb{R}$ :

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi)$$

e, portanto, a função seno é periódica e seu período é o menor valor positivo de  $2k\pi$ , ou seja,  $2\pi$ .

**Definição 4.9 (Função Cosseno):** Dado um número real  $x$ , seja  $P$  sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos cosseno de  $x$  (e indicamos  $\cos x$ ) a abscissa  $\overline{OP_2}$  do ponto  $P$  em relação ao sistema  $uOv$ , como mostra a Figura 4.12b. Denominamos *função cosseno* a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$  o real  $\overline{OP_2} = \cos x$ , isto é

$$f(x) = \cos x = \overline{OP_2}$$

Podemos observar que a função cosseno possui as seguintes propriedades

1. A imagem da função cosseno é o intervalo  $[-1,1]$ , isto é,  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

*Justificativa:* É imediata pois, se  $P$  está no ciclo, sua abscissa pode variar apenas de  $-1$  a  $+1$ .

2. Se  $x$  é do primeiro ou quarto quadrante, então  $\cos x$  é positivo.

*Justificativa:* De fato, neste caso o ponto  $P$  está a direita do eixo  $v$  e sua abscissa é positiva.

3. Se  $x$  é do segundo ou do terceiro quadrante, então,  $\cos x$  é negativo.

*Justificativa:* De fato, neste caso o ponto  $P$  está a esquerda do eixo  $v$  e sua abscissa é negativa.

4. Se  $x$  percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então,  $\cos x$  é crescente.

*Justificativa:* É imediato que, se  $x$  percorre o terceiro quadrante, então  $P$  percorre o arco  $\widehat{A'B'}$  e sua abscissa cresce. O mesmo ocorre no quarto quadrante.

5. Se  $x$  percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então  $\cos x$  é decrescente.

*Justificativa:* É imediato que, se  $x$  percorre o primeiro quadrante, então  $P$  percorre o arco  $\widehat{AB}$ , e sua abscissa decresce. Fato semelhante ocorre no terceiro quadrante.

6. A função cosseno é periódica (Definição 4.7) e seu período é  $2\pi$ .

*Justificativa:* É fato que, se  $\cos x = \overline{OP_2}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\cos(x + 2k\pi) = \overline{OP_2}$  pois  $x$  e  $x + 2k\pi$  têm a mesma imagem  $P$  no ciclo. Temos, então,  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$$

e, portanto, a função cosseno é periódica e seu período é o menor valor positivo de  $2k\pi$ , ou seja,  $2\pi$ .

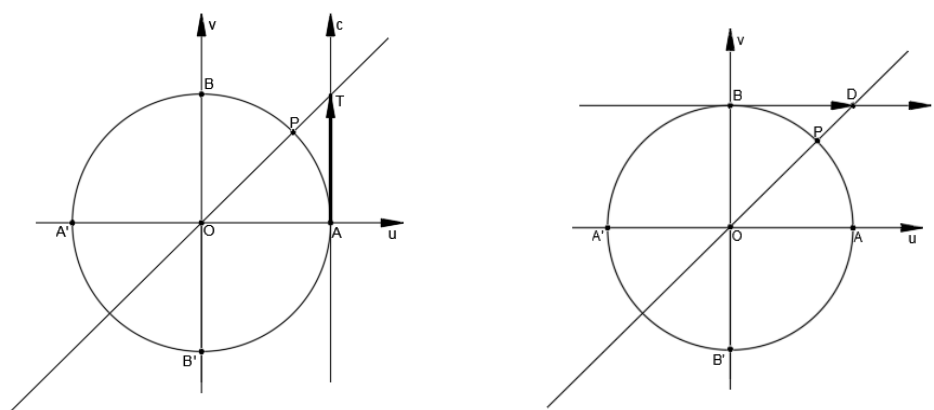
**Definição 4.10 (Função Tangente):** Dado um número real  $x$ , pertencente ao conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

e seja  $P$  sua imagem no ciclo. Consideremos a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  e seja  $T$  sua intersecção com o eixo das tangentes, como mostra a Figura 4.13a. Denominamos, *tangente de  $x$*  (e indicamos  $\tan x$ ) a medida algébrica do segmento  $\overline{AT}$ . Denominamos *função tangente* a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , o real  $\overline{AT} = \tan x$ , isto é

$$f(x) = \tan x = \overline{AT}$$

Observemos que, para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $P$  está em  $B$  ou  $B'$  e, então, a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto  $T$ , a  $\tan x$  não é definida.



(a) A Tangente de  $x$  ( $\tan x$ ) é a intersecção  $T$  da reta  $\overleftrightarrow{OP}$  com o eixo das tangentes  $c$

(b) A função  $\cot x$  é a intersecção  $D$  da reta  $\overleftrightarrow{OP}$  com o eixo das cotangentes  $d$

**Figura 4.13:** Definição das Funções Tangente e Cotangente

Podemos observar que a função tangente possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função tangente é  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .
2. A imagem da função tangente é  $\mathbb{R}$ , isto é, para todo  $y$  real existe um  $x$  real, tal que  $\tan x = y$ .

*Justificativa:* De fato, dado  $y$  pertencente ao conjunto dos números reais, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto  $T$ , tal que o comprimento do segmento  $AT$  seja igual a  $y$ . Construindo a reta  $\overleftrightarrow{OT}$ , observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos  $P$  e  $P'$ , imagens dos reais  $x$  cuja tangente é  $y$ .

3. Se  $x$  é do primeiro ou terceiro quadrante, então  $\tan x$  é positiva.

*Justificativa:* De fato, neste caso o ponto  $T$  está acima de  $A$  e  $\overline{AT}$  é positiva.

4. Se  $x$  é do segundo ou quarto quadrante, então  $\tan x$  é negativa.

*Justificativa:* De fato, neste caso o ponto  $T$  está abaixo de  $A$  e  $\overline{AT}$  é negativa.

5. Se  $x$  percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então  $\tan x$  é crescente.

*Justificativa:* Provemos, por exemplo, quando  $x$  percorre o 1º quadrante. Dados  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 < x_2$ , temos  $\alpha_1 < \alpha_2$  e, por propriedade de geometria plana,  $\overline{AT_1} < \overline{AT_2}$ , isto é:  $\tan x_1 < \tan x_2$ . A demonstração para os outros quadrantes é similar.

6. A função tangente é periódica e seu período é  $\pi$ .

*Justificativa:* De fato, se  $\tan x = \overline{AT}$  e consideremos  $k$  um número inteiro, então  $\tan(x + k\pi) = \overline{AT}$ , pois  $x$  e  $x + k\pi$  têm imagens  $P$  e  $P'$  coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo e, assim, as retas  $\overleftrightarrow{OP}$  e  $\overleftrightarrow{OP'}$  são iguais, portanto, as intersecções das retas  $\overleftrightarrow{OP}$  e  $\overleftrightarrow{OP'}$  com o eixo das tangentes  $c$  serão iguais.

Temos, então, que para todo  $x$  pertencente ao conjunto dos números reais e  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ :

$$\tan x = \tan(x + k\pi)$$

assim a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de  $k\pi$ , isto é,  $\pi$ .

**Definição 4.11 (Função Cotangente):** Dado um número real  $x$  pertencente ao conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$$

e seja  $P$  sua imagem no ciclo. Consideremos a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  e seja  $D$  sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos, *cotangente de  $x$*  (e indicamos  $\cot x$ ) a medida algébrica do segmento  $\overline{BD}$ , como ilustrado na Figura 4.13b. Denominamos *função cotangente* a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq k\pi$ , o real  $\overline{BD} = \cot x$ , isto é,

$$f(x) = \cot x = \overline{BD}$$

Notemos que, para  $x = k\pi$ ,  $P$  está em  $A$  ou  $A'$  e, então, a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto  $D$ , a  $\cot x$  não é definida.

Podemos observar que a função cotangente possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função cotangente é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ .

2. A imagem da função cotangente é  $\mathbb{R}$ , isto é, para todo  $y$  pertencente ao conjunto dos números reais, existe um único  $x \in \mathbb{R}$ , tal que,  $\cot x = y$ .
3. Se  $x$  é do primeiro ou terceiro quadrante, então  $\cot x$  é positiva.
4. Se  $x$  é do segundo ou quarto quadrante, então  $\cot x$  é negativa.
5. Se  $x$  percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então  $\cot x$  é decrescente.
6. A função cotangente é periódica e seu período é  $\pi$ .

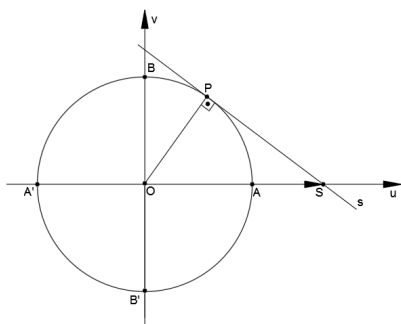
**Definição 4.12 (Função Secante):** Dado um número real  $x$  pertencente ao conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

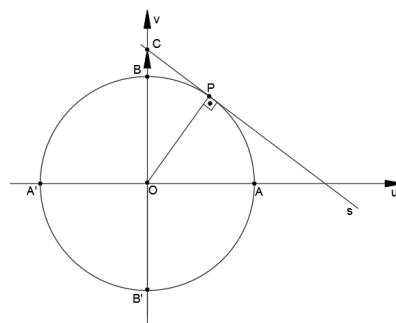
e seja  $P$  sua imagem no ciclo. Consideremos a reta  $s$  tangente ao ciclo em  $P$  e seja  $S$  sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos, *secante de  $x$*  (e indicamos  $\sec x$ ) a abscissa  $\overline{OS}$  do ponto  $S$ , como ilustrado na Figura 4.14a. Denominamos *função secante* a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , o real  $\overline{OS} = \sec x$ , isto é

$$f(x) = \sec x = \overline{OS}$$

Notemos que, para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $P$  está em  $B$  ou  $B'$  e, então, a reta  $s$  fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto  $S$ , a  $\sec x$  não é definida.



(a) A  $\sec x$  é a abscissa  $\overline{OS}$  da intersecção  $S$  da reta  $s$  com o eixo dos cossenos ( $u$ ).



(b) A  $\operatorname{cosec} x$  é a ordenada  $\overline{OC}$  da intersecção  $C$  da reta  $s$  com o eixo dos senos ( $v$ ).

**Figura 4.14:** Definição das Funções Secante e Cosecante

Podemos observar que a função secante possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função secante é  $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \}$ .
2. A imagem da função secante é  $\mathbb{R} - ] - 1, 1[$ , isto é, para qualquer  $y \in \mathbb{R}$  com  $y \leq -1$  ou  $y \geq 1$ , existe um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\sec x = y$ .

3. Se  $x$  é do primeiro ou quarto quadrante, então  $\sec x$  é positiva.
4. Se  $x$  é do segundo ou terceiro quadrante, então  $\sec x$  é negativa.
5. Se  $x$  percorre o primeiro ou segundo quadrante, então  $\sec x$  é crescente.
6. Se  $x$  percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então  $\sec x$  é decrescente.
7. A função secante é periódica e seu período é  $2\pi$ .

**Definição 4.13 (Função Cossecante):** Dado um número real  $x$  pertencente ao conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$$

e seja  $P$  sua imagem no ciclo trigonométrico. Consideremos a reta  $s$  tangente ao ciclo em  $P$  e seja  $C$  sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos, *cossecante de  $x$*  (e indicamos  $\operatorname{cossec} x$ ) a ordenada  $\overline{OC}$  do ponto  $C$ , como ilustrado na Figura 4.14b. Denominamos *função cossecante* a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada real  $x$ ,  $x \neq k\pi$ , o real  $\overline{OC} = \operatorname{cossec} x$ , isto é

$$f(x) = \operatorname{cossec} x = \overline{OC}$$

Notemos que, para  $x = k\pi$ ,  $P$  está em  $A$  ou  $A'$  e, então, a reta  $s$  fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto  $C$ , a  $\operatorname{cossec} x$  não é definida.

Podemos observar que a função cossecante possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função cossecante é  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ .
2. A imagem da função secante é  $\mathbb{R} - ]-1, 1[$ , isto é, para qualquer  $y \in \mathbb{R}$  com  $y \leq -1$  ou  $y \geq 1$ , existe um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\operatorname{cossec} x = y$ .
3. Se  $x$  é do primeiro ou segundo quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é positiva.
4. Se  $x$  é do terceiro ou quarto quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é negativa.
5. Se  $x$  percorre o segundo ou terceiro quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é crescente.
6. Se  $x$  percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então  $\operatorname{cossec} x$  é decrescente.
7. A função cossecante é periódica (Definição 4.7) e seu período é  $2\pi$ .

## 4.2.2 Relações Fundamentais

Uma vez definidas as seis funções circulares:

$$\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x, \operatorname{tan} x, \operatorname{cot} x, \operatorname{sec} x, \operatorname{cossec} x$$

mostraremos agora as relações existentes entre eles, relações essas denominadas fundamentais, pois, a partir de uma delas é possível calcular as outras cinco.

**Teorema 4.4:** Para todo  $x$  real vale a relação

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

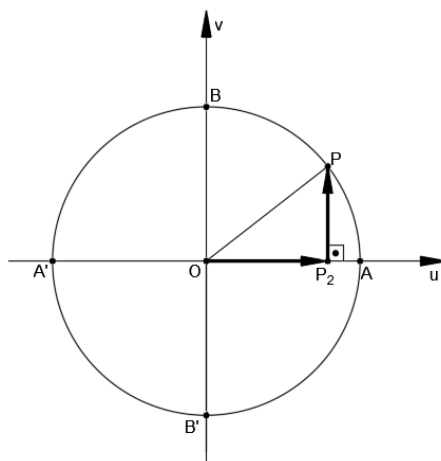
*Demonstração.* a) Se  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A', B'$ , então existe o triângulo  $OP_2P$  retângulo, como mostrado na Figura 4.15 e, portanto

$$|\overline{OP_2}|^2 + |\overline{P_2P}|^2 = |\overline{OP}|^2$$

então  $\text{cos}^2 x + \text{sen}^2 x = 1$

b) Sendo  $x = \frac{k\pi}{2}$  com  $k \in \mathbb{Z}$  a tese pode ser verificada diretamente

□



**Figura 4.15:** A abscissa  $P_2$  é o cosseno do ângulo no ciclo e a ordenada  $P$  é o seno do ângulo no ciclo.

**Teorema 4.5:** Para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , vale a relação

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

*Demonstração.* a) Se  $x \neq k\pi$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A', B'$ , portanto teremos:

$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P \Rightarrow \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{P_2P}|}{|\overline{OP_2}|} \Rightarrow |\tan x| = \frac{|\text{sen } x|}{|\text{cos } x|} \quad (4.19)$$

Utilizando o quadro de sinais

	sinal de $\tan x$	sinal de $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

observamos que o sinal da  $\tan x$  é igual ao do quociente  $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ .

Portanto, juntando esse fato a equação (4.19) decorre a tese.

b) Se  $x = k\pi$ , então

$$\tan x = 0 = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

□

**Teorema 4.6:** Para todo  $x$  real,  $x \neq k\pi$ , vale a relação

$$\cot x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

*Demonstração.* a) Se  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A'$  e  $B'$ , então temos

$$\triangle OBD \sim \triangle OP_1P \Rightarrow \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{P_1P}|}{|\overline{OP_1}|} \Rightarrow |\cot x| = \frac{|\text{cos } x|}{|\text{sen } x|} \quad (4.20)$$

Utilizando o quadro de sinais a seguir

	sinal de $\cot x$	sinal de $\frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$
1 <sup>o</sup>	+	+
2 <sup>o</sup>	-	-
3 <sup>o</sup>	+	+
4 <sup>o</sup>	-	-

observamos que o sinal da  $\cot x$  é igual ao sinal do quociente  $\frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$ .

Portanto, juntando esse resultado a equação (4.20) comprovasse a tese.

b) Se  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , temos

$$\cot x = 0 = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

□

**Teorema 4.7:** Para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , vale a relação

$$\sec x = \frac{1}{\text{cos } x}$$

*Demonstração.*

a) Se  $x \neq k\pi$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A'$  e  $B'$ , então temos

$$\triangle OPS \sim \triangle OP_2P \Rightarrow \frac{|\overline{OS}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_2}|} \Rightarrow |\sec x| = \frac{1}{|\text{cos } x|} \quad (4.21)$$



Utilizando o quadro de sinais a seguir

	sinal de $\operatorname{cosec} x$	sinal de $\operatorname{sen} x$
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

observamos que o sinal da  $\operatorname{sec} x$  é igual ao sinal de  $\cos x$ .

Portanto, juntando esse fato a equação (4.21) comprovasse a tese.

- b) Se  $x = k\pi$ , com  $k$  um inteiro par, temos  $\operatorname{sec} x = 1 = \cos x$  ou  $\operatorname{sec} x = -1 = \cos x$ , com  $k$  um inteiro ímpar.

□

**Teorema 4.8:** Para todo  $x$  real,  $x \neq k\pi$ , vale a relação

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

*Demonstração.* a) Se  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , a imagem de  $x$  é distinta de  $A, B, A'$  e  $B'$ , então temos

$$\triangle OPC \sim \triangle OP_1P \Rightarrow \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP}_1|} \Rightarrow |\operatorname{cosec} x| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \quad (4.22)$$

Utilizando o quadro de sinais a seguir

	sinal de $\operatorname{cosec} x$	sinal de $\operatorname{sen} x$
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

observamos que o sinal da  $\operatorname{cosec} x$  é igual ao sinal de  $\operatorname{sen} x$

Portanto, juntando esse resultado a equação (4.22) comprovasse a tese.

- b) Se  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , temos  $\operatorname{cosec} x = 1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ , para  $k$  par,  
 ou  
 $\operatorname{cosec} x = -1 = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ , para  $k$  ímpar

□

**Corolário 4.1:** Para todo  $x$  real,  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , valem as relações

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad (4.23)$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad (4.24)$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \quad (4.25)$$

$$\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad (4.26)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad (4.27)$$

*Demonstração.* **Relação 4.23**

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}$$

**Relação 4.24**

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

**Relação 4.25**

$$1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

**Relação 4.26**

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

**Relação 4.27**

$$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \tan^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \tan^2 x = \frac{\tan^2}{1 + \tan^2 x}$$

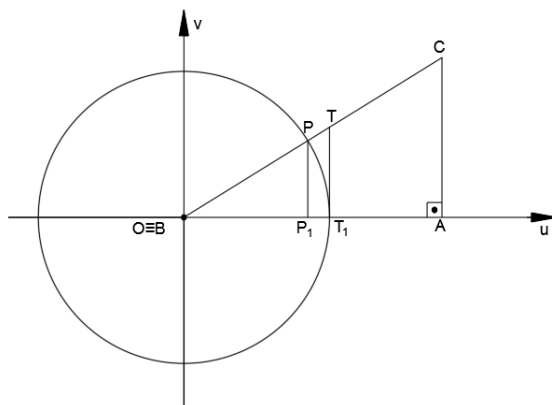
□

### 4.3 Propriedades Trigonométricas do Triângulo Retângulo

Utilizaremos o “livro *Fundamentos de Matemática Elementar*” – Volume 3 [18] como referência para demonstrar três propriedades que relacionam as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo.

Para isso, consideremos o triângulo retângulo da Figura 4.16, em que temos os triângulos de vértices  $PP_1B$ ,  $TT_1B$  e  $CAB$ , todos semelhantes entre si pelo caso ângulo-ângulo.

Dessa forma, teremos:



**Figura 4.16:** Circunferência de raio unitário e centro no vértice  $B$  e com ângulo  $A$  reto.

1.  $\triangle BPP_1 \sim \triangle BCA$ , então

$$\frac{P_1P}{BP} = \frac{CA}{BC} \Rightarrow \frac{\text{sen } \hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$$

isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa.

2.  $\triangle BPP_1 \sim \triangle BCA$ , então

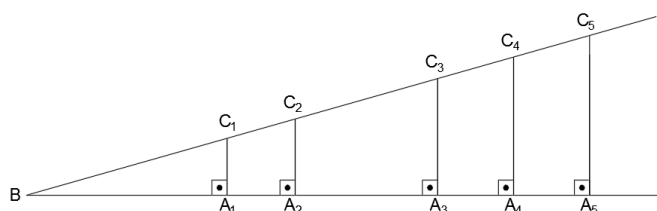
$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{\text{cos } \hat{B}}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a}$$

isto é, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa.

3.  $\triangle BTT_1 \sim \triangle BCA$ , então

$$\frac{T_1T}{OT_1} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{\text{tan } \hat{B}}{1} = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{tan } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo.



**Figura 4.17:** Nessa figura, todos os triângulos representados possuem o ângulo  $\hat{B}$  em comum e um ângulo  $A_n$  reto.

Segue dessas três propriedades vistas que, se dado um ângulo agudo  $\hat{B}$  e marcando sobre um de seus lados os pontos  $A_1, A_2, \dots$  e conduzindo por esses as perpendiculares

$A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3$ , como na Figura 4.17, teremos

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \dots$$

Fixado o ângulo  $\hat{B}$ , o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\operatorname{cos} \hat{B} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \dots$$

Fixado o ângulo  $\hat{B}$ , o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\operatorname{tan} \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \dots$$

Fixado o ângulo  $\hat{B}$ , os catetos oposto e adjacente a esse ângulo são diretamente proporcionais.

Nesse momento, torna-se importante demonstrar que, apesar de termos mostrado as funções seno e cosseno utilizando uma circunferência de raio unitário, a proposição citada a seguir é demonstrada utilizando como referência João Lucas Marques Barbosa [9] nos mostra que os seus valores independem do raio da circunferência utilizada para defini-los.

**Proposição 4.1:** Os valores do seno e do cosseno de um ângulo independem do semicírculo utilizado para defini-los.

*Demonstração.* Consideremos um outro círculo de centro  $O'$  e neste um diâmetro  $A'B'$ . Consideremos um ponto  $C'$  sobre o círculo de modo que o ângulo  $C'\hat{O}'B'$  seja congruente ao ângulo  $\alpha$  e portanto congruente a  $C\hat{O}B$ . Considere os triângulos  $COD$  e  $C'O'D'$  onde  $D$  e  $D'$  são os pés das perpendiculares baixadas aos segmentos de reta  $AB$  e  $A'B'$ , respectivamente, a partir dos pontos  $C$  e  $C'$ . Como  $C\hat{D}$  e  $C'\hat{D}'O'$  são ângulos retos e já sabemos que  $C\hat{O}B = C'\hat{O}'B'$ , então concluímos que os triângulos considerados são semelhantes. Portanto, teremos

$$\frac{\overline{C'O'}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{OD}}$$

Como consequência

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O'}} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{C'O'}}$$

□

Outro resultado importante apresentado por Barbosa [9] é o teorema das fórmulas de redução.

**Teorema 4.9 (Fórmulas de redução):** Se  $\alpha$  é um ângulo agudo então

1.  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
2.  $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen} \alpha$
3.  $\text{tan}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tan} \alpha}$

*Demonstração.* Sejam  $C$  e  $C'$  pontos de um círculo de extremidades  $A$  e  $A'$ , tais que  $C\hat{O}A = \alpha$  e  $C'\hat{O}A = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , como mostrado na Figura 4.18a.

Sejam  $D$  e  $D'$  os pés das perpendiculares baixadas à reta que contém  $AA'$  a partir de  $C$  e  $C'$ , respectivamente. Observe que, como  $C'\hat{O}A = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , então  $O\hat{C}'D' = \alpha$ . Logo os triângulos  $COD$  e  $OD'C'$  são congruentes, assim como  $OC = OC'$ ,  $C\hat{D}O = \frac{\pi}{2}$  e  $C\hat{O}D = O\hat{C}'D' = \alpha$  e portanto

$$\frac{\overline{C'D'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$$

Segue ainda que

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{\overline{C'D'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \cos \alpha \\ \text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{\overline{OD'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \text{sen} \alpha \\ \text{tan}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{\overline{C'D'}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{1}{\text{tan} \alpha} \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.10:** Qualquer que seja  $\alpha$  tem-se

1.  $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen} \alpha$
2.  $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos} \alpha$

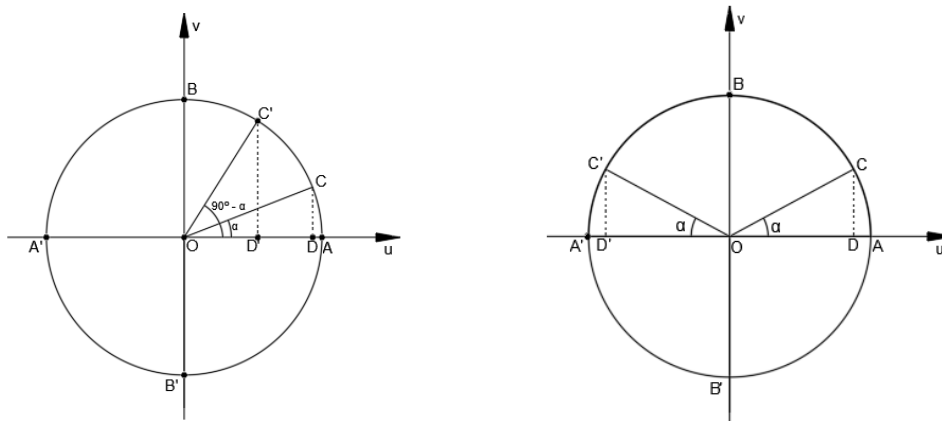
*Demonstração.* Quando  $\alpha$  é igual a  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\pi$ , a afirmação acima é comprovada por substituição direta dos valores do seno e cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere pontos  $C$  e  $C'$  no semicírculo, como os da Figura 4.18b, de sorte que  $C\hat{O}B = \alpha$  e  $C'\hat{O}B = \pi - \alpha$ . Sejam  $D$  e  $D'$  os pés das perpendiculares baixadas dos pontos  $C$  e  $C'$  à reta determinada por  $A$  e  $B$ .

A congruência dos triângulos  $OCD$  e  $OC'D'$  nos fornece

$$CD = C'D' \text{ e } DO = D'O$$

Como consequência imediata temos que

$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = \text{sen} \alpha$$



(a) Os triângulos  $OD'C'$  e  $ODC$  são congruentes.

(b) Os triângulos  $OD'C'$  e  $ODC$  são congruentes.

**Figura 4.18:** Demonstração das Fórmulas de Redução de Arcos

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{D'O}}{\overline{C'O}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}} = \cos \alpha$$

Como  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  então  $\alpha$  ou  $\pi - \alpha$  é obtuso e o outro é agudo. Por isto,  $\cos \alpha$  e  $\cos(\pi - \alpha)$  têm sinais opostos. Logo

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

□

## 4.4 Propriedades Trigonométricas em Triângulos Quaisquer

Em quaisquer triângulos podemos utilizar os seguintes Teoremas, encontrados em Iezzi [18].

**Teorema 4.11 (Lei dos Cossenos):** Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

*1º Triângulo Acutângulo.* Seja  $ABC$  um triângulo com  $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$ , como mostra a Figura 4.19a

No triângulo  $BCD$ , que é retângulo, vale a relação

$$a^2 = n^2 + h^2 \tag{4.28}$$

enquanto que no triângulo  $BAD$ , que é retângulo

$$h^2 = c^2 + m^2 \tag{4.29}$$

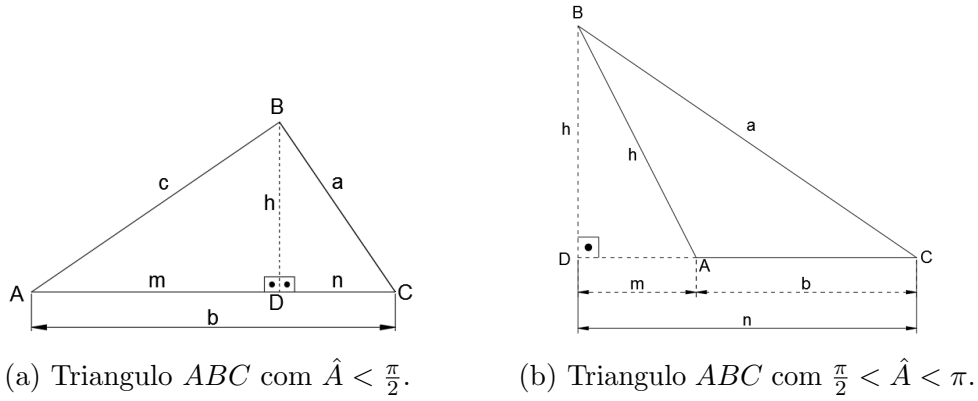


Figura 4.19: Demonstração da Lei dos Cossenos

Temos também por construção, que

$$n = b - m \tag{4.30}$$

Substituindo as equações (4.30) e (4.29) na equação (4.28) temos

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$$

que pode ser simplificada em

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas, no triângulo  $BAD$  temos que  $m = c \cos \hat{A}$ . Portanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

□

*2º Triângulo Obtusângulo.* Seja  $ABC$  um triângulo com  $\frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$ , como mostrado na Figura 4.19b

No triângulo  $BCD$ , que é retângulo, vale a relação

$$a^2 = n^2 + h^2 \tag{4.31}$$

enquanto que no triângulo  $BAD$  que também é retângulo

$$h^2 = c^2 - m^2 \tag{4.32}$$

Temos também, por construção, que

$$n = b + m \tag{4.33}$$

Substituindo as equações (4.33) e (4.32) na equação (4.31) temos

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2$$

que pode ser simplificada em

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

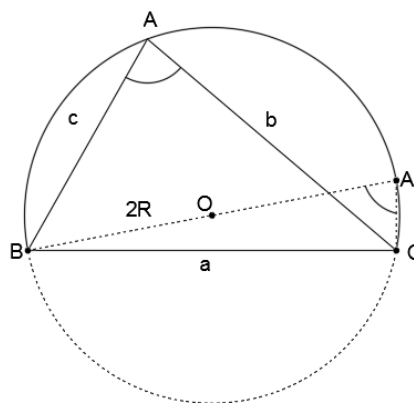
Mas, no triângulo  $BAD$ ,  $m = c \cos(\pi - \hat{A})$  que equivalente a  $m = -c \cos \hat{A}$ .  
Portanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

□

**Teorema 4.12 (Lei dos Senos):** Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

*Demonstração.* Considere  $ABC$  um triângulo qualquer, como o da Figura 4.20, inscrito numa circunferência de raio  $R$ . Por um dos vértices do triângulo,  $B$  por exemplo, tracemos o diâmetro correspondente  $BA'$  e liguemos  $A'$  com  $C$ . Sabemos que  $\hat{A} = \hat{A}'$  por determinarem na circunferência a mesma corda  $BC$ . O



**Figura 4.20:** Triângulo  $ABC$  inscrito numa circunferência de raio  $R$  em que foi traçado pelo vértice  $B$  o diâmetro  $A'B = 2R$  determinando, dessa forma o ângulo  $A' = A$ , pois determinam a mesma corda  $BC$ .

triângulo  $A'BC$  é retângulo em  $C$  por estar inscrito numa semi-circunferência. Dessa forma, teremos

$$a = 2R \text{sen } \hat{A}'$$

que equivale a

$$a = 2R \text{sen } \hat{A}$$

que pode ser transformada em

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R \tag{4.34}$$



Analogamente, se traçarmos pelo vértice  $C$  o diâmetro  $B'C$  em que  $\hat{B}' = \hat{B}$  por determinarem a mesma corda  $AB$ , o triângulo  $AB'C$  é retângulo por estar inscrito numa semi-circunferência, como mostra a Figura 4.21, desse modo

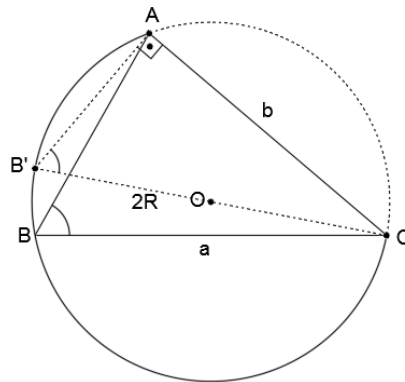
$$b = 2R \text{sen } \hat{B}'$$

que equivale a

$$b = 2R \text{sen } \hat{B}$$

que pode ser transformada em

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R \tag{4.35}$$



**Figura 4.21:** Triângulo  $ABC$  inscrito numa circunferência de raio  $R$  em que foi traçado pelo vértice  $C$  o diâmetro  $B'C = 2R$  determinando, dessa forma o ângulo  $B' = B$ , pois determinam a mesma corda  $AB$ .

Finalmente, se traçarmos pelo vértice  $A$  o diâmetro  $AC'$  em que  $\hat{C}' = \hat{C}$  por determinarem a mesma corda  $AB$ , o triângulo  $ABC'$  é retângulo por estar inscrito numa semi-circunferência, como mostrado na Figura 4.22, desse modo

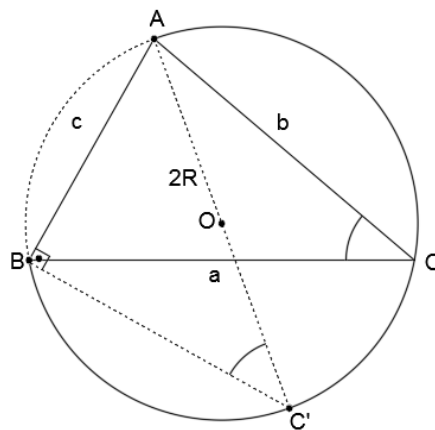
$$c = 2R \text{sen } \hat{C}'$$

que equivale a

$$c = 2R \cdot \text{sen } \hat{C}$$

que pode ser transformada em

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R \tag{4.36}$$



**Figura 4.22:** Triângulo  $ABC$  inscrito numa circunferência de raio  $R$  em que foi traçado pelo vértice  $C$  o diâmetro  $C'A = 2R$  determinando, dessa forma o ângulo  $C' = C$ , pois determinam a mesma corda  $AB$ .

Portanto, se igualarmos as equações (4.34), (4.35) e (4.36), teremos

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

□

Apresentamos nesse capítulo as principais definições e teoremas referentes ao estudo da trigonometria, conceitos esses que serão utilizados para mostrar alguns processos de usinagem que fazem uso desses elementos.

# A Oficina de Usinagem Mecânica

---

Neste capítulo, apresentaremos algumas máquinas, dispositivos e instrumentos muito comuns na indústria metal mecânica a fim de, mostrar como a trigonometria está diretamente ligada à indústria, em suas diversas formas de produção. Enquanto apresentamos as ferramentas vamos também ilustrar várias aplicações da trigonometria dentro de ua oficina de usinagem mecânica.

## 5.1 Máquinas Ferramentas

Máquina ferramenta é definida por Izildo Antunes [8] como sendo uma máquina que serve para executar operações em peças de materiais e formatos diversos com o arranque de cavaco, ou seja, o material removido. Quando esse processo é realizado em metais, o mesmo é denominado de operação de usinagem.

Na operação de usinagem se confere novas formas e dimensões ao material, retirando-se parte deste, conhecida com sobremetal, em forma de cavaco.

De acordo com J.M. Freire [16], o automóvel, o rádio, a máquina de lavar, os refrigeradores, os condicionadores de ar, os instrumentos científicos e uma série de outras utilidades não existiriam, hoje, se não existissem as máquinas ferramentas

Dentre as máquinas ferramentas existentes, as principais são: Torno Mecânico, Fresadora e Retificadoras.

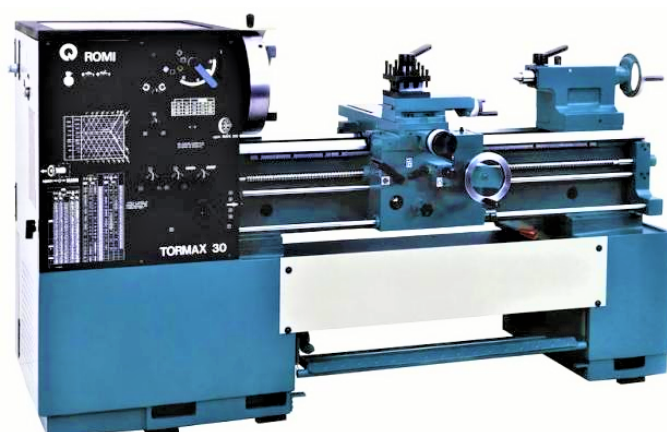


Figura 5.1: Torno Mecânico Convencional

A seguir apresentamos cada uma dessas máquinas.

## 5.2 Torno Mecânico

O Torno Mecânico, como o da Figura 5.1 é uma máquina ferramenta que permite usinar peças com a forma geométrica de revolução. Os Tornos têm sido utilizados de várias formas ao longo de séculos e têm vindo a representar um dos pilares da engenharia de precisão. O Torno pode ser utilizado para usinar formas cilíndricas ou cônicas e também na fabricação de perfis decorativos, como observados em pés de mesas, castiçais, canetas e peças de xadrez. Peças que exigem precisão em suas medidas, tais como componentes de motor, juntas esféricas, equipamentos médicos e peças de aeronaves e foguetes também são fabricadas em Tornos Mecânicos.



**Figura 5.2:** Protótipo do torno a pedal com volante de inércia desenvolvido por Leonardo da Vinci no ano de 1482.

Até mesmo o gênio italiano Leonardo da Vinci deu sua parcela de contribuição no processo evolutivo do Torno. Ele projetou um torno semelhante ao da Figura 5.2 que poderia ser operado por uma pessoa e trabalhava com o movimento de rotação contínuo cujo sistema motriz é parecido com o de uma máquina de costura.

O funcionamento de um Torno Mecânico consiste em rotacionar um material, normalmente, de forma cilíndrica que é preso a um dispositivo denominado placa, representada pela Figura 5.3 que pode possuir 3 ou 4 castanhas cujos ângulos entre elas são, respectivamente, iguais a  $120^\circ$  ou  $90^\circ$ . Para que esse material possa ser usinado, é preso em um suporte denominado castelo uma ou várias ferramentas de



**Figura 5.3:** Nessa imagem temos a esquerda uma placa com 3 castanhas, a direita uma placa com 4 castanhas, 4 castanhas soltas e uma chave de placa.

corde que irão, uma de cada vez, pressionar o material retirando todo o excesso indesejado. Todo esse movimento das ferramentas é controlada pela movimentação de três “carros”.

Carro principal ou longitudinal – responsável pela movimentação longitudinal da ferramenta. É nele que o operador controla a medida de comprimento da peça.

Carro Transversal – é o responsável pela movimentação transversal da ferramenta. É nesse carro que é controlada a medida de diâmetro da peça.

Carro Superior – carro que pode ser inclinado a fim de se obter peças que possuam a forma de um cone ou um tronco de cone.

Cada carro é movimentado pelo giro de três manivelas, cada uma responsável pelo movimento de um dos carros, que avançam de forma coordenada. Em cada manivela está fixado um colar micrômetro, como o ilustrado pela Figura 5.4 que Antunes [8] descreve como sendo *“elementos de forma circular, com divisões com distâncias iguais (graduações) que determinam a movimentação de cada carro permitindo controlar a quantidade exata de material que será retirado. A resolução desses colares, normalmente, são na faixa dos milésimos de milímetros.”*



**Figura 5.4:** Colar Micrômetro de um Torno Mecânico: o colar dessa imagem possui a resolução de 0,05 mm

Hoje existem diversos tipos de Tornos Mecânicos, inclusive os CNC's (Comando Numérico Computadorizado) que possuem a parte mecânica semelhante a dos convencionais, porém o movimento dos carros é controlado por um software computacional que é totalmente programado através de um sistema de eixos cartesianos.

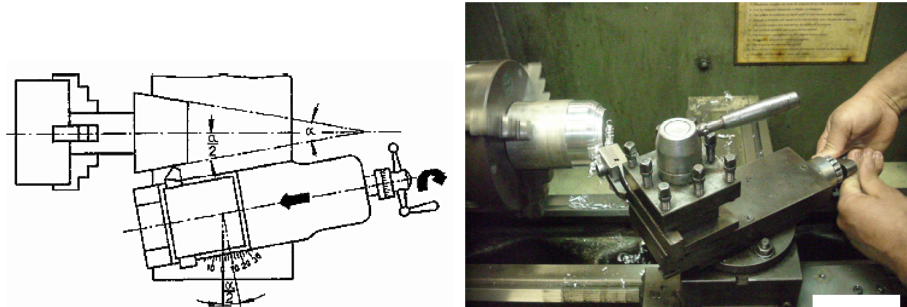
### Aplicações Trigonômétricas no Uso do Torno

A trigonometria é muito aplicável na fabricação de peças utilizando o torno mecânico convencional. Encontramos em Antunes [8] diversos exemplos em que se faz necessário o uso das relações trigonométricas, como por exemplo no torneamento cônico que de acordo com Edson Bini [10] consiste em dar à peça a forma de um cone de revolução. Ainda de acordo com Bini para se obter uma peça no formato cônico utilizando o torno mecânico convencional, pode-se proceder de três modos diferentes:

1. Inclinando o carro superior;
2. Deslocando o contraponto;

3. Utilizando um dispositivo copiador.

O primeiro procedimento consiste em inclinar o carro superior do torno e a usinagem é feita toda manualmente, como mostra a Figura 5.5, uma vez que dos três carros que compõem o torno, o superior é o único que não é automático.

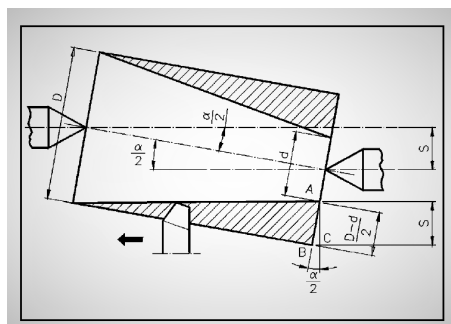


**Figura 5.5:** Nessa imagem temos a ilustração da fabricação de uma peça cônica usinada pelo método da inclinação do carro superior do torno.

O terceiro procedimento consiste em elaborar uma montagem de um dispositivo em que a produção em série é beneficiada.

Já o segundo procedimento é onde o uso da trigonometria é mais evidente. Uma vez conhecidos, respectivamente, os diâmetros maior ( $D$ ), menor ( $d$ ) e o comprimento ( $L$ ) do cone a ser usinado, ou seja, geometricamente, a altura do tronco do cone, o ângulo  $\alpha$  que se deve girar cabeçote móvel que é utilizado como encosto ou apoio para montagem entre pontas da peça que será torneada, como ilustra o esquema da Figura 5.6, e possui um comprimento de pelo menos 3 vezes o seu diâmetro é calculado da seguinte forma

$$\tan \alpha = \frac{D - d}{2L}$$



**Figura 5.6:** Essa figura ilustra a fabricação de uma peça cônica através do deslocamento do contraponto do torno

### 5.3 Fresadora Mecânica

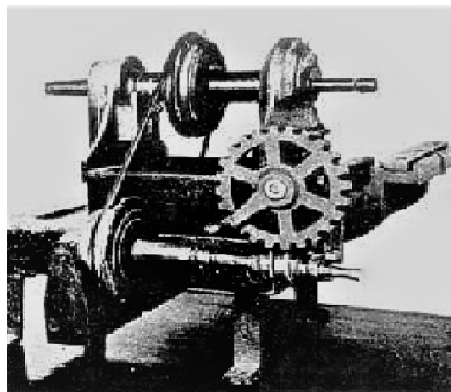
A Fresadora Mecânica mostrada na Figura 5.7 é descrita no livro “Ferramentas de Corte II” [28] como sendo uma “máquina ferramenta construída especialmente



**Figura 5.7:** Fresadora Mecânica Convencional

*para assegurar os movimentos relativos da peça e da ferramenta*”. Elas são utilizadas, principalmente, para a obtenção de peças com superfícies planas. O processo de fabricação de peças nessas máquinas são denominados *Fresagem* o que de acordo com Erich [28] é um processo de usinagem no qual a remoção de material da peça se realiza de modo intermitente pelo movimento rotativo da ferramenta, geralmente multicortante isto é, com múltiplos dentes de corte. Esse processo gera superfícies das mais variadas formas.

A Fresadora teria sido criada em 1818, pelo norte-americano Eli Whitney, para a fabricação de peças para rifles, uma vez que, os Estados Unidos estavam em guerra civil e ele queria fornecer para o governo cerca de dez mil armas de fogo em um prazo de dois anos. Esta fresadora, mostrada na Figura 5.8 não dispunha de motor e o movimento do eixo árvore – eixo que rotaciona a ferramenta de corte – era feito através do giro e um volante que trabalhava sobre um parafuso de rosca-sem-fim.



**Figura 5.8:** Fresadora desenvolvida por Eli Whitney cujo o principal objetivo era de fabricar rifles para o governo Norte-Americano, uma vez que os EUA estavam em guerra civil.

Dois anos mais tarde, em 1820, o também norte-americano Robert Johnson adaptou uma roda de um moinho d'água ao eixo árvore da fresadora para que conseguisse uma maior produtividade. A força da água movia uma grande roda que através de um conjunto de correias e polias transmitia o movimento até o eixo árvore da máquina.

O modelo que mais se assemelha ao que hoje é produzido, foi desenvolvido em 1862, pelo engenheiro Joseph R. Brown. Ele é o fundador de uma das mais importantes fábricas de máquinas ferramentas existentes até hoje, a “Brown e Sharpe”. No final do século XIX a empresa já fabricava fresadoras como uma grande variedade de acessórios. Foram desenvolvidas alavancas para trocas de velocidades e rotação e a maioria dos acessórios existentes hoje em dia.

As Fresadoras utilizadas atualmente são máquinas de extrema precisão. As peças por elas fabricadas chegam a ter precisão na casa dos milésimos de milímetro. Sua mesa possui movimento controlado por três eixos (longitudinal, transversal e horizontal) também chamados de eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

Com o desenvolvimento e o aparecimento do CNC (Comando Numérico Computadorizado) a partir da década de 1970, as fresadoras passaram a usinar com uma velocidade muito maior, além de elevar consideravelmente a qualidade das peças por elas produzidas. Hoje existe no mercado as Fresadoras convencionais (Figura 5.7) que são operadas manualmente ou digitalmente, os chamados CNC'S, onde inicialmente é feito um programa computacional baseado no sistema de eixos cartesianos onde são determinadas as coordenadas da peça a ser usinada. Além dos tradicionais eixos  $X$ ,  $Y$  e o  $Z$  encontrados em máquinas manuais, uma máquina de fresagem CNC frequentemente contém um ou dois eixos adicionais. Estes eixos extras podem permitir uma maior flexibilidade e maior precisão. As máquinas CNC's possuem uma velocidade de usinagem bem maior e, após desenvolvida a programação para a fabricação da peça, podem ser fabricadas quantas peças forem necessárias simplesmente fixando o material a ser usinado.

O princípio de funcionamento de uma Fresadora Mecânica consiste em, após a fixação da peça na mesa da fresadora, está efetua o movimento de avanço linear a uma baixa velocidade que varia na faixa de 10 a 500 mm/min, enquanto que é posta a rotacionar uma ferramenta de corte, que possui o nome de fresa, a uma velocidade relativamente alta da ordem de 10 a 150 m/min, como é descrito por Gerling [17]. As vantagens do processo consistem na variedade de formas que podem ser produzidas, na qualidade dos acabamentos superficiais, na alta taxa de produtividade e na disponibilidade de ampla variedade de ferramentas que podem ser construídas ou associadas para a produção.

A Fresadora Mecânica é um dos maquinários mais procurados pelas indústrias atuais, devido a função que possui de usinagem de materiais metálicos, madeira e outros elementos sólidos.

As ferramentas de corte utilizadas nesse tipo de maquinário são denominadas *Fresas* e algumas estão representadas na Figura 5.9. De acordo com Mário Rossi [26], as fresas são ferramentas constituídas por um sólido em revolução cuja superfície apresenta um certo número de gumes, ou dentes cortantes, geralmente iguais entre





**Figura 5.9:** Fresa é o nome dado a ferramenta de corte utilizada em uma fresadora.

eles, equidistantes e dispostos simetricamente em relação ao eixo de rotação.

Uma curiosidade é a origem do nome fresa. A palavra Fresa vem do francês “Fraise” que significa moranguinho, o que de acordo com Erich Stemmer [28] correspondia inicialmente a uma ferramenta manual primitiva, em forma de uma bola, que antes de ser submetida a um processo de tratamento térmico (têmpera) apresentava numerosas rebarbas e, pelo seu aspecto e forma geral, lembrava a fruta que lhe deu o nome.

Desde que surgiu, a fresadora vem apresentando evolução, o que permitiu um maior número de operações e fabricações industriais. A fresadora necessita de uma estrutura que a torne firme, pois é sempre submetida a esforços, como torção, que variam conforme a intensidade frequência de vibrações aplicadas.

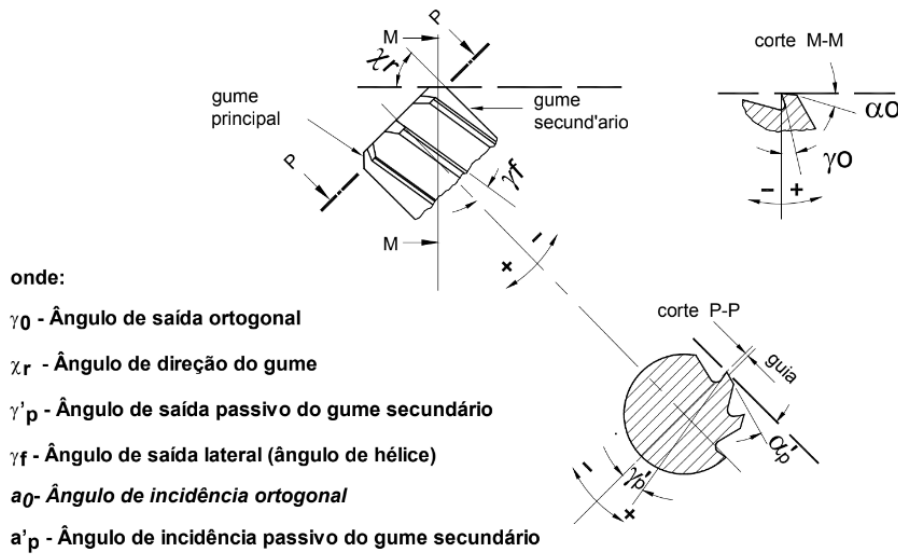
Dentro das oficinas de manutenção, a fresadora é ideal, pois dispõe de versatilidade, permitindo que seus cabeçotes sejam trocados, sendo transformada em vertical ou horizontal a qualquer momento, adaptando-se às necessidades operacionais. Por esse motivo, a fresadora consegue desenvolver os mais variados trabalhos, além de ser extremamente prática durante o trabalho, pois envolve superfície dos materiais e consegue oferecer usinagem para suas faces sem que a peça seja retirada da máquina.

### Aplicações Trigonômétricas no Uso da Fresadora

São diversas as aplicações da trigonometria na utilização da fresadora mecânica. Na própria escolha de uma fresa se faz necessário a identificação de sua forma geométrica (cilíndrica, cônica, disco, forma especial ou particular) e de seus diversos ângulos. Como exemplo, podemos citar o caso das fresas denominadas Frontais de Metal Duro que são fresas constituídas de um corpo, normalmente, cilíndrico onde em seu corpo são fixadas uma série de ferramentas intercambiáveis de metal duro e cujos principais ângulos das lâminas de corte são mostrados na Figura 5.10 e denominados como segue.

1. ângulo de saída ortogonal ( $\lambda_o$ )

Influi decisivamente na força e na potência necessária ao corte, no acabamento superficial e no calor gerado. Seu valor, relativamente, será pequeno para o



**Figura 5.10:** Desenho em Vistas de Uma Fresa Frontal com seus Principais Ângulos.

corte de materiais de difícil usinabilidade e seu valor varia entre  $-10$  e  $30$ .

2. ângulo de saída passivo ( $\lambda_p$ )

É o ângulo que tende a diminuir o atrito entre a peça e a superfície da ferramenta e seu valor depende, principalmente, da resistência do material da ferramenta e da peça a ser usinada. Seu valor geralmente varia de  $2$  a  $14$ .

3. ângulo de saída lateral ( $\lambda_f$ )

4. ângulo de direção do gume ( $\kappa_r$ )

Influi na direção de saída do cavaco além de aumentar a resistência da ferramenta e sua capacidade de dissipação do calor. Também é um dos principais responsáveis pela redução das vibrações geradas pelo atrito *ferramenta – peça*. O seu valor geralmente varia entre de  $30$  a  $90$

e esses ângulos estão relacionados pela fórmula

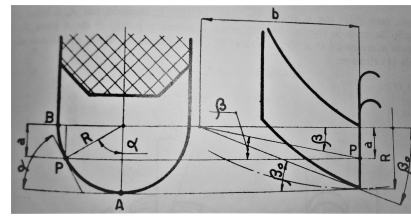
$$\tan \lambda_o = \tan \lambda_f \cos \lambda_p \operatorname{sen} \kappa_r + \tan \lambda_p \cos \lambda_p \cos \kappa_r$$

Já as fresas de perfil constante que, segundo Rossi [26] são fresas cujos dentes são perfilados segundo uma lei geométrica e são empregadas para reproduzir na peça o perfil exato da fresa que se emprega, como é descrito por Freire [5], também são fabricadas utilizando como fundamento a trigonometria.

Um exemplo muito interessante é encontrado na página 721 do livro “*Maquinas Operatrizes 2*” [26] que inicialmente define as *Fresas de Perfil Semicircular Convexo*, como a da Figura 5.11a, e *Semicircular Côncavo* e em seguida descreve que o valor efetivo do ângulo de saída ( $\beta$ ) que é o ângulo que o material será “arrancado da peça” e cujo valor varia de um máximo até zero é demonstrado fazendo o uso de algumas relações trigonométricas.



(a) Fresa de perfil Semicircular Convexo



(b) Gráfico para a determinação do ângulo efetivo de perfilagem medido num ponto ( $P$ ) da fresa de perfil semicircular convexo.

**Figura 5.11:** Fresa de Perfil Semicircular Convexo e sua Vista Frontal em Corte

Para uma melhor definição desta variação, Rossi [26] sugere que examinemos a Figura 5.11b em que temos os desenhos, respectivamente, das projeções frontal e esquerda de um dos dentes dessa ferramenta de onde podemos retirar as seguintes relações:

$$a = R \cos \alpha$$

e também

$$a = b \tan \beta$$

então

$$R \cos \alpha = b \tan \beta$$

colocando  $\tan \beta$  em evidência, temos

$$\tan \beta = \frac{R}{b} \cos \alpha$$

mas

$$\frac{R}{b} = \tan \beta_0$$

e, substituindo este valor a  $\frac{R}{b}$  da fórmula anterior, teremos

$$\tan \beta = \tan \beta_0 \cos \alpha$$

Portanto, essa é a relação que, de acordo com Rossi [26], permite determinar prontamente o valor do ângulo de saída efetivo  $\beta$  medido de um ponto qualquer  $P$ .

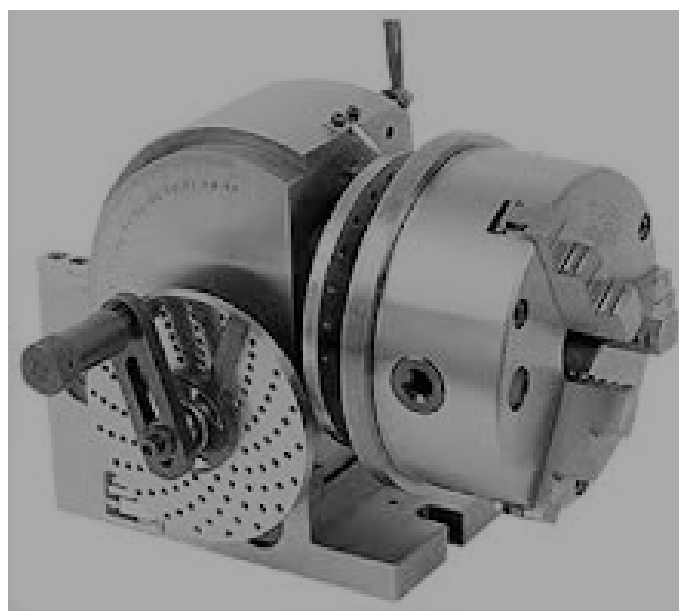
Para a determinação do tipo de ferramenta (fresa) que será utilizada existem outros inúmeros exemplos de cálculo trigonométricos que são utilizados para que se possa determinar todos os parâmetros necessários para o processo de fresagem.

Na fabricação de engrenagens helicoidais, como a mostrada pela Figura 5.12, que



**Figura 5.12:** Quando duas engrenagens helicoidais encaixam seus dentes para trabalharem, eles são posicionados de modo transversal, em formato de hélice.

Freire [5] define como sendo “engrenagens cujos dentes são inclinados em forma de hélice e que durante o seu trabalho, os dentes correm descrevendo hélices sobre o corpo das mesmas e cuja utilização consiste em sistemas de transmissão mecânica entre eixos paralelo ou não, no mesmo plano ou em planos distintos” também utilizamos os conceitos de trigonometria. De acordo com o manual de fabricação de engrenagens da Empresa Sant’Ana Fresadora [3] nessas engrenagens, no momento em que dois de seus dentes se acoplam, é iniciado o contato em duas extremidades dos dentes. Depois disso, o sistema da engrenagem helicoidal faz com que o contato continue aumentando de forma gradual, enquanto as duas engrenagens giram. Isso acontece até que os dois dentes estejam perfeitamente acoplados um ao outro. O engate feito

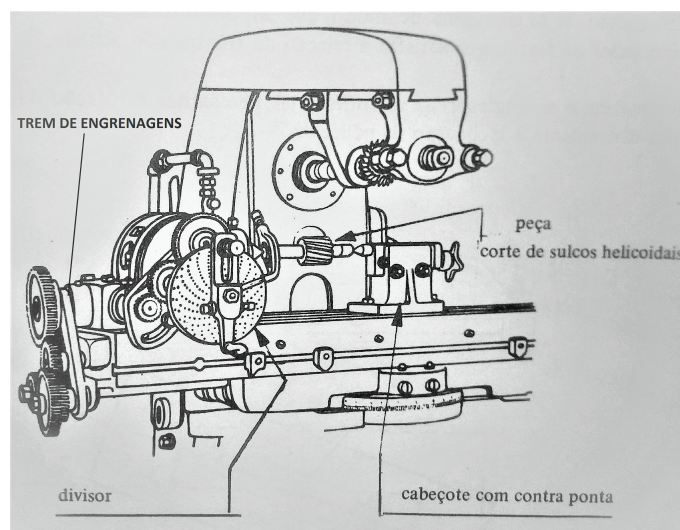


**Figura 5.13:** O Cabeçote Divisor é um dispositivo utilizado na fresadora para fazer divisões angulares em uma peça.

de maneira gradual na engrenagem helicoidal é o que permite uma atuação suave e silenciosa, se comparadas às engrenagens de dentes retos, por exemplo. Por conta disso, podem ser comumente encontradas em transmissões de carros. Sua fabricação nas fresadoras convencionais é realizada prendendo o material a qual deseja-se fazer os dentes em formato de hélice em um dispositivo que permite girar esse material sucessivamente de um determinado ângulo, de maneira a possibilitar, por exemplo, a abertura de dentes de engrenagens. Esse dispositivo é denominado *cabeçote divisor* mostrado na Figura 5.13.

Todo Cabeçote Divisor possui uma relação que é determinada pelo número de voltas que se dá na manivela para que sua placa dê um giro completo em torno de seu eixo. Então, por exemplo, dizer que a relação de um Cabeçote Divisor é 40 para 1, é o mesmo que dizer que se dermos 40 voltas na manivela do Divisor, a peça presa em sua placa dará uma volta completa em torno do seu eixo.

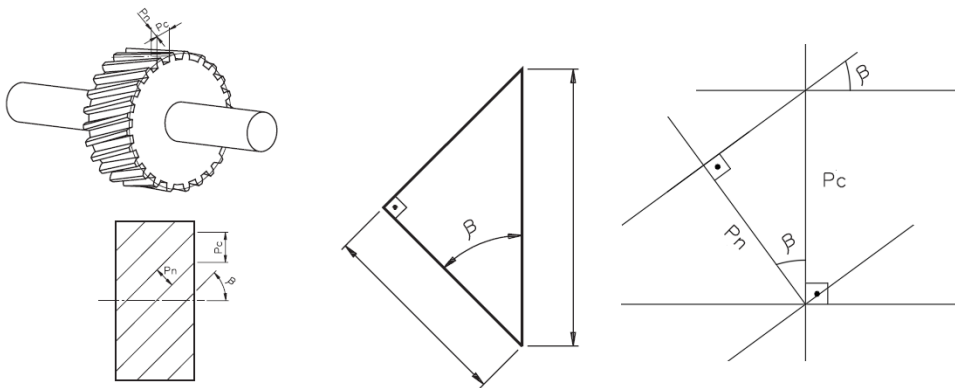
Para que se possa abrir os rasgos helicoidais na fresadora, é preciso que a mesa ou a ferramenta, possa girar de um ângulo correspondente ao complemento do ângulo que a hélice faz com a circunferência da base. É ainda necessário que haja uma combinação de movimentos de rotação e de avanço da peça que se consegue por intermédio de um trem de engrenagens como o mostrado no esquema da Figura 5.14. Esse trem se monta na fresadora e se acopla a manivela do aparelho divisor.



**Figura 5.14:** Fresadora montada com um trem de engrenagens.

Em relação a trigonometria aplicada a esse processo de fabricação, podemos exemplificar o cálculo do ângulo da hélice desse tipo de engrenagem. Para tal, consideremos a Figura 5.15 onde temos as representação de uma engrenagem helicoidal. As medidas dessa engrenagem são

1.  $P_c$  é o passo circular, ou seja, é a distância entre dois dentes consecutivos;
2.  $P_n$  é o passo normal ou ortogonal aos dentes da engrenagem, ou seja, a distância entre dois dentes consecutivos nessa engrenagem medidos no plano normal;



**Figura 5.15:** Nesse esquema de uma engrenagem helicoidal, temos que o cosseno do ângulo da hélice ( $\beta$ ) será a razão do cateto adjacente ( $P_n$ ) pela hipotenusa ( $P_c$ ).

3.  $\beta$  é o ângulo de inclinação da hélice, em relação ao eixo de acoplamento da engrenagem.

Dessa forma, analisando a Figura 5.15, chegamos facilmente a seguinte relação

$$\cos \beta = \frac{P_n}{P_c}$$

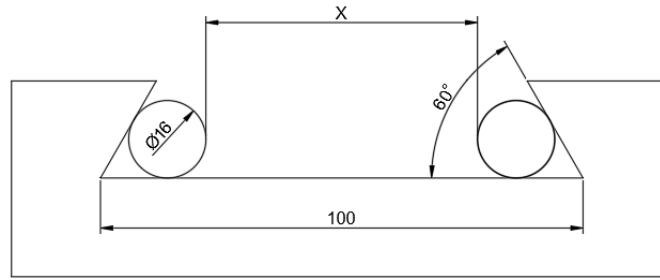
As ranhuras de formato trapezoidal, também conhecidas como ranhuras de perfil Rabo de Andorinha (Figura 5.16), que são utilizadas na construção de guias para elementos de máquinas, também são um outro exemplo de aplicação da trigonometria em uma oficina mecânica. Encontramos na apostila do Telecurso 2000 profissionali-



**Figura 5.16:** As ranhuras no formato trapezoidal são muito utilizadas no acoplamento de guias de máquinas.

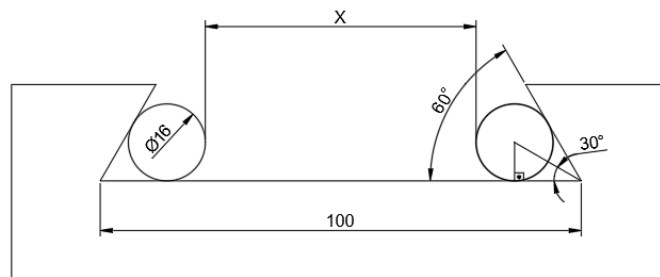
zante [4] um exemplo prático de como calcular a medida entre dois cilindros que são inseridos para auxiliar a medição de tais rasgos para que se possa fazer a medida de maneira mais precisa. Descrevemos o exemplo a seguir:

Imagine que você tenha de calcular a cota  $x$  da peça cujo desenho é mostrado na Figura 5.17, onde temos a vista frontal da peça superior mostrada na Figura 5.16. Nesse tipo de medição é necessário o uso de cilindros para que a medição seja mais precisa, sem que haja o risco do instrumento de medição, que normalmente nesse caso é o paquímetro, não atinja as “quinas” em que se medirá a peça.



**Figura 5.17:** Projeção do perfil Rabo de Andorinha onde, as duas circunferência dentro do desenho não fazem parte da peça. São apenas dois cilindros que são posicionados tangenciando o perfil do rasgo a fim de facilitar a medida do mesmo.

Para tal, tracemos um triângulo retângulo que ligue o centro da circunferência ao vértice inferior esquerdo do encaixe, como descrito na Figura 5.18



**Figura 5.18:** A medida  $x$  procurada corresponde à largura do rasgo da peça menos duas vezes o cateto adjacente do triângulo menos duas vezes o raio do cilindro.

Para o cálculo do valor desejado, basta que determinemos a medida do cateto adjacente ( $ca$ ) do triângulo desenhado com um dos vértices no centro da circunferência que representa a base do cilindro e, depois basta subtrair da medida de 100 duas vezes o cateto adjacente e duas vezes o raio ( $R$ ) da base do cilindro, ou seja:

$$x = 100 - 2ca - 2R$$

onde

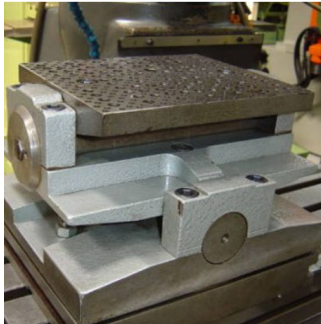
$$\tan 30 = \frac{\text{cateto oposto}(co)}{\text{cateto adjacente}(ca)} = ca = \frac{8}{\tan 30} = \frac{8}{0,5774} = 13,85$$

Portanto:

$$x = 100 - 2 \cdot 13,85 - 16 \Rightarrow x = 56,30$$

Na usinagem de superfícies que possuem certas inclinações, é possível que essas superfícies sejam usinadas utilizando a Mesa de Seno, que é um dispositivo de simples funcionamento, o que a torna apropriada para o uso no ensino, de fácil operação – o que a torna útil em uma oficina de usinagem– e precisa, afinal as medidas devem ser

feitas com precisão de frações de milímetros. As Figuras 5.19a 5.19b e 5.19c ilustram a usinagem em fresadoras utilizando esse dispositivo e, no Capítulo 6 descreveremos mais detalhadamente a Mesa de Seno.



(a) Mesa de Seno Montada em uma Fresadora.



(b) Peça Sendo Usinada em uma Fresadora com Mesa de Seno.



(c) Peça fixada em uma Mesa de Seno Magnética.

**Figura 5.19:** Mesas de Seno Instaladas em Fresadoras Convencionais.

## 5.4 Retificadoras

As retificadoras mecânicas são máquinas ferramentas especializadas na atividade de retificar, ou seja, corrigir e polir peças e componentes cilíndricos ou planos, veja a Figura 5.20. A retificadora é amplamente utilizada nos dias de hoje e de vital importância para as linhas de produção. Esse tipo de usinagem, na maioria das vezes, é posterior aos trabalhos realizados pelo torno ou pela fresadora, pois dessa forma, obtêm-se um melhor acabamento superficial das peças. Para que a medida precisa da peça seja obtida, é necessário que nos serviços anteriores ao da retificadora seja deixado na peças um sobremetal (medida maior do que a medida final) de cerca de 0,5 milímetros.

A forma, tamanho e a finalidade de uma retífica podem variar, mas todos os tipos



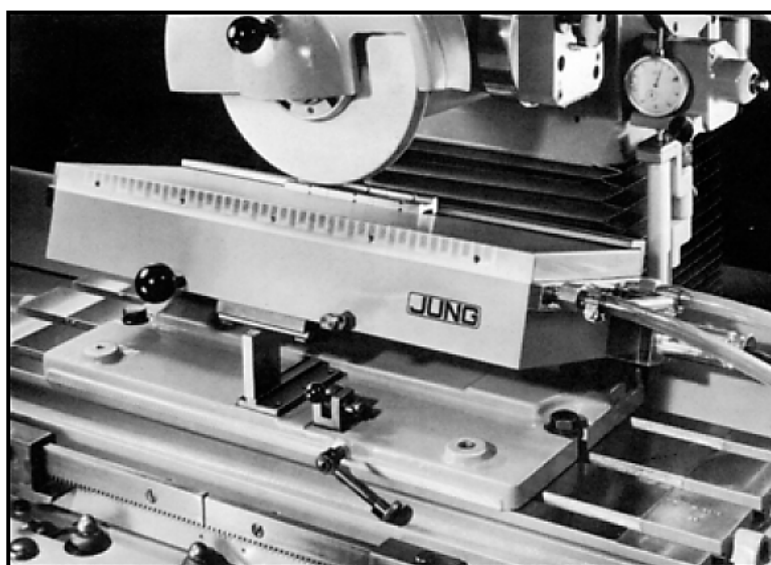
**Figura 5.20:** Retificadora Mecânica



de retíficas cilíndricas têm algumas características em comum. A peça de trabalho é usinada na máquina de tal forma que ela representa um eixo específico. Isso é fundamental para todos os tipos de retificadoras cilíndricas. Este eixo especificado permite que a máquina tenha também um parâmetro específico em torno do qual todo o trabalho seja feito na peça.

Em uma retificadora, o rebolo que é uma ferramenta fabricada de material abrasivo cuja forma pode ser cilíndrica, ovalizada ou esférica, gira a uma alta rotação e retira pequenas quantidades de material da peça que está sendo usinada. Isso faz com que a superfície acabada fique com um acabamento bem liso.

### Aplicações Trigonométricas no Uso da Retificadora



**Figura 5.21:** Retificadora utilizando uma Mesa de Seno Simples Magnética.

De acordo com Heirich Gerling [17] as peças planas que serão retificadas devem ser fixadas por meio de chapas e parafusos de apertos. Esse processo de fixação pode ser feito por meio de dispositivos especiais, como por exemplo as Mesas de Seno, como ilustra a Figura 5.21 em que temos a imagem de uma peça fixada à uma Mesa de Seno sendo retificada. Ainda de acordo com Gerling esses dispositivos especiais contribuem consideravelmente para a redução do tempo gasto para a fixação das peças, uma vez que, quando a superfície de fixação da peça está previamente usinada, essa poderá ser apoiada em cima de uma superfície magnética. Na verdade existem dois tipos de superfícies de fixação

1. Superfície de fixação eletromagnética: necessitam de uma alimentação de corrente elétrica.
2. Superfície de fixação magnética permanente: não requerem qualquer tipo de alimentação de corrente elétrica, pois, com o simples acionamento de uma alavanca os ímãs permanentes são deslocados para uma posição de abertos, ou seja, de atração ou para a posição de fechados ou em curto-circuito magnético para desligar.

Em retificadoras é muito comum o uso de Mesas de Seno Magnéticas (Figura 5.21) para a fixação das peças que serão retificadas, pois, o uso dessas além de facilitar a fixação das peças, permite a execução de ângulos muito precisos nas peças.

No próximo Capítulo descreveremos com mais detalhes alguns modelos de Régua e Mesas de Seno.

## Régua e Mesa de Seno

---

Vamos detalhar, nesse capítulo, o uso e o funcionamento da Régua e da Mesa de Seno. Esses dispositivos são utilizados para a fabricação ou medição de peças com geometria angular sendo que, a principal diferença entre eles está em suas dimensões. Enquanto a Régua de Seno é uma barra estreita e rígida, a Mesa possui dimensões maiores, além de ser fabricada em até dois planos de inclinação. No Capítulo 7 vamos utilizar esses dispositivos como instrumentos de sala de aula para o ensino da trigonometria através das atividades propostas que requerem o uso da Mesa de Seno que, no Apêndice C será construída utilizando recursos simples.

Na industria mecânica são muitas as vezes que é necessário a fabricação ou medição de peças com geometria angular. Para que esse processo seja realizado de forma mais precisa possível, pode-se utilizar dois dispositivos bem semelhantes, a Régua e a Mesa de Seno. A diferença no uso desses dois dispositivos está nas dimensões ds peças que serão verificadas ou fabricadas por eles, sendo que as de dimensões maiores irão utilizar a Mesa enquanto as de menores dimensões utilizaram a Régua de Seno.

Antes de descrevermos diretamente esses dois dispositivos, é necessário o conhecimento de dois outros componentes que auxiliam o uso da Mesa e da Régua de Seno: o Relógio Comparador e os Blocos Padrões.

### 6.1 Relógio Comparador

Os relógios comparadores, como os mostrados na Figura 6.1a são descritos por João Cirilo da Silva Neto [27] como sendo um *“instrumento de medição por comparação dotado de uma escala e um ponteiro, ligados por mecanismos diversos a uma ponta de contato capaz de perceber pequenas diferenças de planeza ou linearidade”*.

Estes instrumentos são apresentados em forma de relógio, com uma ponta apalpadora, de modo que, para um pequeno deslocamento linear do apalpador, obtém-se um deslocamento circular fortemente amplificado do ponteiro. Seu sistema é baseado em um mecanismo de engrenagens e cremalheiras.

A medição com o Relógio Comparador é denominada de medição indireta porque, o Relógio, como o próprio nome já diz, verifica as variações de medidas existentes em uma peça, ou seja, realiza medidas de pontos e o que é levado em consideração



(a) Relógio Comparador



(b) Exemplo de utilização do Relógio Comparador

**Figura 6.1:** Relógios Comparadores

é o deslocamento do ponteiro do relógio ao longo de sua movimentação em uma direção qualquer da peça. A maioria dos relógios encontrados no mercado possuem a resolução de 0,01 mm, como descreve Lira [23], por isso, obtém-se grande precisão nas medidas quando utilizado.

Eles são muito úteis nas indústrias pois, são utilizados em operações simples de nivelamento e alinhamento de peças, como ilustra a Figura 6.1b e máquinas e até mesmo na avaliação de tolerâncias geométricas de peças, como é citado por [27].

## 6.2 Blocos Padrões

Outro elemento importante na utilização da régua ou da mesa de seno são os chamados blocos padrões (Figura 6.2). Neto [27] descreve os Blocos Padrões como sendo peças em forma de pequenos paralelepípedos que possuem medidas com precisão em sua medida de mais ou menos 0,00003mm e são muito utilizados como padrões de referência na industria moderna, desde laboratório até a oficina e possuem uma enorme importância nas máquinas ferramentas para a usinagem de peças e em

**Figura 6.2:** Blocos Padrões

dispositivos de medição. A exatidão de um bloco padrão é garantida através do comprimento, da planicidade e do paralelismo entre as faces de medição.

Devido ao acabamento na superfície dos blocos padrão eles devem aderir uns aos outros para que haja a montagem até atingir a medida desejada e João Cirilo da Silva Neto [27] define esse procedimento de *técnica do empilhamento*. Para a união dos blocos, posicionam-se um sobre o outro pelas superfícies de contato. Em seguida devem ser girados lentamente com uma ligeira pressão até que as faces fiquem alinhadas e perfeitamente aderidas.

### 6.3 Régua de Seno

A Régua de Seno, mostrada na Figura 6.3, é um instrumento de precisão empregado no dimensionamento e na execução da usinagem de peças com geometria angular e cujo princípio é o mesmo aplicado aos triângulos retângulos [22]. Sua utilização visa facilitar a medição de ângulos que não seria possível com um transferidor (Figura 6.4), uma vez que a tolerância solicitada não é compatível com a resolução do instrumento. A Régua permite medir um ângulo qualquer utilizando relações trigonométricas.



**Figura 6.3:** Régua de Seno

A régua de seno é uma barra de aço temperado e finamente acabada possuindo um formato retangular além de dois rebaixos, um em cada extremidade. Em cada um desses rebaixos encontra-se fixado um cilindro. A régua também possui alguns furos a fim de diminuir o seu peso e facilitar a fixação das peças a serem medidas. A distância dos cilindros da régua de seno variará de acordo com o fabricante.

Possui em toda a sua extensão grande precisão de forma e de dimensão, além de um fino acabamento superficial que garante, dessa forma, sua precisão quando utilizada com os blocos padrão.

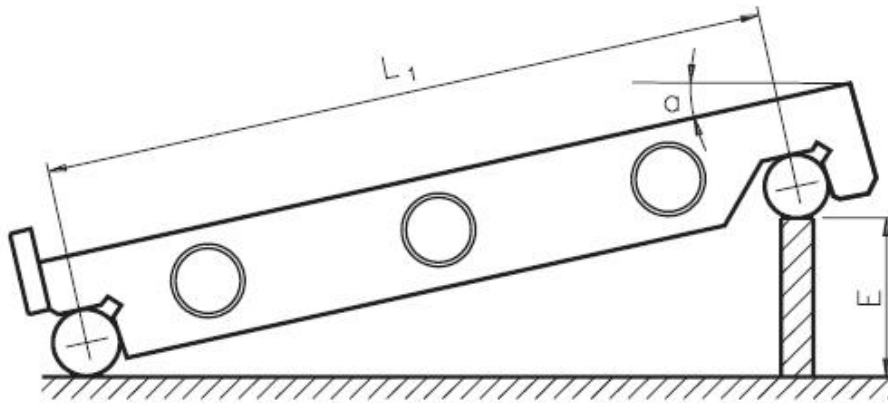
Seu funcionamento consiste em apoiar seus dois cilindros sobre uma superfície plana de referência deixando assim, a parte superior da régua de seno paralela a essa



**Figura 6.4:** Modelo de um tipo de transferidor utilizado na indústria mecânica. Ele possui uma lamina que facilita o apoio da peça para a verificação do ângulo a ser medido.

superfície.

A partir disso, elevar-se um dos lados dessa régua, apoiando o cilindro em um ou em uma associação de blocos padrões para compor ângulos exatos a partir da construção de um triângulo retângulo, como é descrito no livro “Metrologia na Indústria” [22]. O esquema da Figura 6.5 ilustra essa situação.



**Figura 6.5:** Esquema de utilização da régua seno

Partindo desta posição, uma vez que  $L_1$  é uma medida conhecida, e, a altura  $E$  é a medida do Bloco Padrão utilizado para elevar a Régua, têm-se formado um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede  $L_1$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  desejado mede  $E$ , portanto para que se possa determinar o valor de  $\alpha$ , basta utilizar a relação do seno, ou seja:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{E}{L_1} \quad (6.1)$$

Para que se possa realizar medições precisas, alguns cuidados devem ser observados durante a utilização da Régua de Seno:

1. Colocar sobre a régua de seno a peça de trabalho de modo que a superfície de trabalho fique paralela a superfície de referência;
2. Fazer a verificação do paralelismo utilizando o Relógio Comparador e anotando a diferença encontrada, observando o lado mais baixo;
3. Fazer a correção da diferença da altura utilizando os Blocos Padrões, cuja medida deverá ser igual a diferença registrada no relógio comparador multiplicada pela razão entre comprimento da régua de seno e o comprimento medido na peça.

## 6.4 Mesa de Seno

As Mesas de Seno são dispositivos de grande precisão utilizados na indústria mecânica para dimensionar ou até mesmo realizar usinagem em peças que possuam algum ângulo a ser verificado ou usinado. Elas podem equipar diversos tipos de máquinas ferramentas, tais como: Fresadoras convencionais ou CNC, Retificadoras

planas, furadeiras, dentre outras. Descritivamente são duas placas de aço planas e paralelas. Entre elas, em extremos opostos, existem dois eixos de aço, com tratamento térmico superficial, que espaçam as placas.

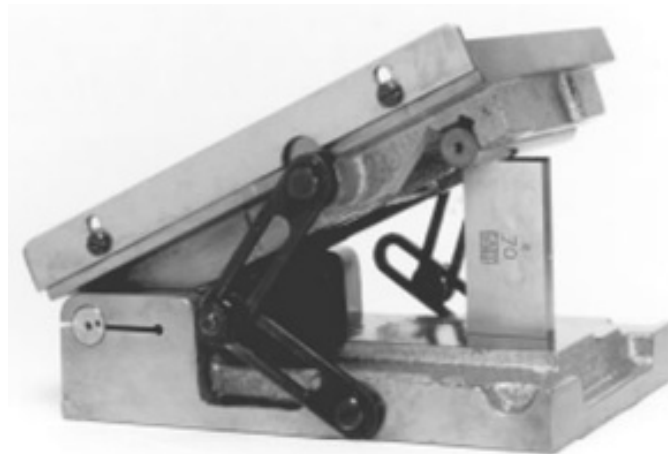
Seu funcionamento é bem semelhante ao de uma dobradiça de porta. A placa inferior pode ser apertada na mesa da Máquina operatriz, caso seja utilizada para usinar. A parte superior articula-se em um dos eixos, assentando-o em blocos padrões (da face do eixo até a face de assento existente na placa fixa), para conseguir o ângulo desejado. As distâncias entre os eixos é muito importante no cálculo do ângulo. De modo que, as Mesas de Seno geralmente são identificadas por essa distância.

Assim como a Régua de Seno, a Mesa de Seno é assim nomeada porque para se obter a inclinação desejada, utiliza-se a relação trigonométrica Seno para calcular a altura dos Blocos Padrões que precisam ser utilizados para elevar placa móvel da mesa e conseguir o ângulo desejado.

#### 6.4.1 Tipos de Mesa de Seno

A seguir, listaremos os principais modelos de Mesa de Seno encontradas no mercado

1. **Mesa de Seno Simples** (Figura 6.6): São utilizadas para a verificação de ângulos em peças com a geratriz paralela a base. Possuem um plano de inclinação que permite a verificação ou fabricação de planos inclinados com precisão angular. Quanto à face de assento da mesa, aonde vai posicionada a peça de trabalho, podem ter a face com furação roscada (para prender a peça) ou face magnética que prende a peça rapidamente e dispensa o uso de parafusos, porcas e demais elementos de fixação.



**Figura 6.6:** Mesa de Seno Simples

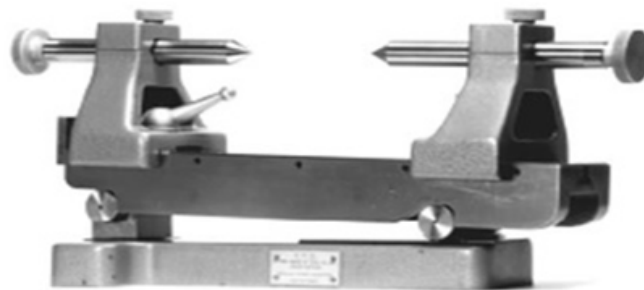
2. **Mesa de Seno Dupla** (Figura 6.7): Possuem a mesma finalidade que a Mesa de Seno Simples, porém, possui dois planos de inclinação que podem ser utilizados simultaneamente a fim de medir ou executar peças que possuem dois ângulos precisos em relação a um plano de referência. Também como a

Mesa de Seno Simples, as peças podem ser fixadas nela através do sistema de porcas e parafusos, quando o plano de fixação for roscado ou fixadas através da atração magnética, quando o plano de fixação for do tipo magnético.

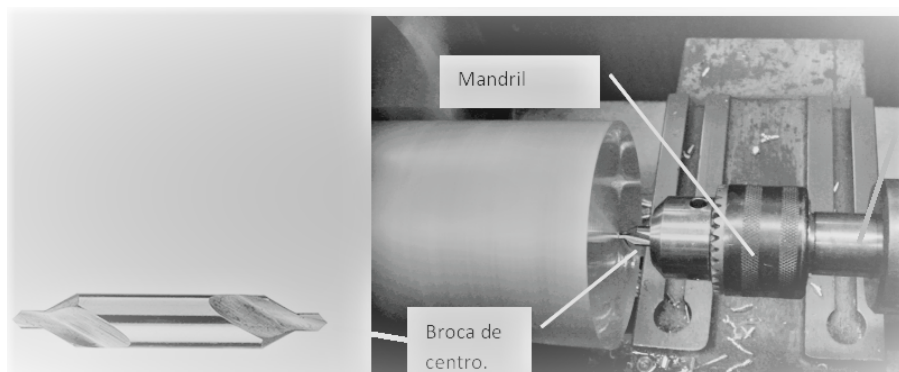


**Figura 6.7:** Mesa de Seno Dupla e Magnética

3. **Mesa de Seno com Contrapontas** (Figura 6.8): Permitem a verificação ou fabricação de peças em formato cônico. As peças são fixadas através dos chamados furos de centro, que são furos que são feitos na face das peças de formato cônico ou cilindro (Figura 6.9) com o objetivo de fixa-las entre pontas.



**Figura 6.8:** Mesa de Seno com Contraponta



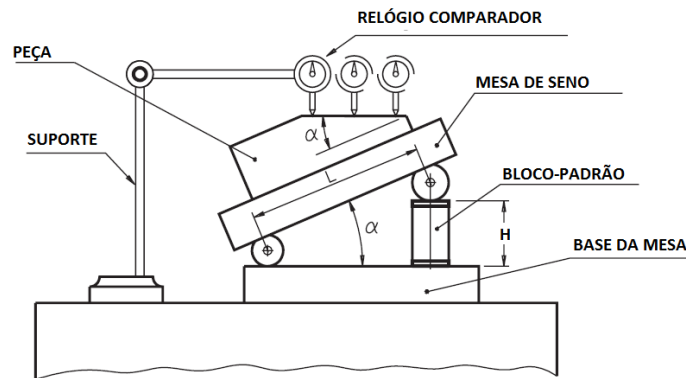
**Figura 6.9:** Execução de um furo de centro em uma peça para se fixada entre pontas.



### 6.4.2 Técnica de Utilização

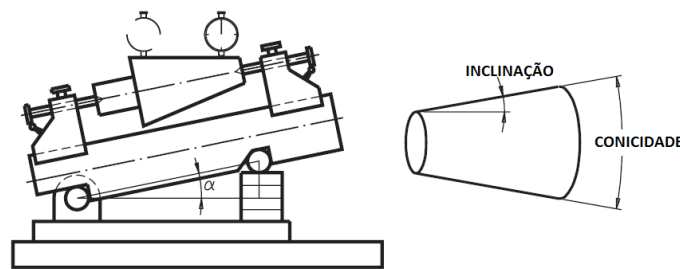
Para utilizar a Mesa de Seno a fim de medir o ângulo de uma peça, é necessário que a mesa esteja sobre uma superfície plana e que se utilize como referência de comparação o Relógio Comparador.

Se o Relógio, ao se deslocar sobre a superfície a ser verificada, não alterar sua indicação, significa que o ângulo da peça é semelhante ao da Mesa (Figura 6.10).



**Figura 6.10:** Esquema de utilização da Mesa de Seno.

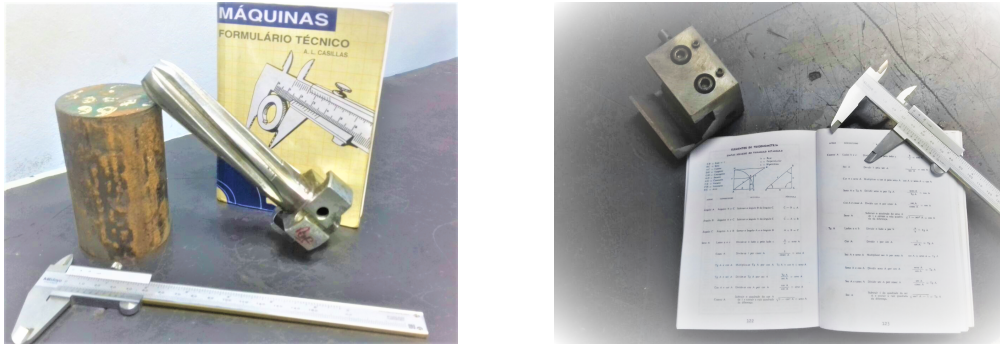
Para a utilização da Mesa de Seno com Contrapontas, a peça cônica será fixada nas duas pontas da Mesa através dos furos de centro que se localizam nas duas faces da peça. Em seguida a Mesa será inclinada até que a superfície superior da peça fique paralela à base da mesa. Assim, a inclinação da mesa será igual a da peça, como ilustra a Figura 6.11



**Figura 6.11:** Esquema de utilização da Mesa de Seno com Contrapontas.

Um exemplo de aplicação extraído do manual técnico da revendedora *Ital Produtos Industriais Ltda* [6] ilustra a utilização de uma Mesa de Seno na usinagem de um plano inclinado, incluindo os cálculos necessários para determinar a elevação do plano móvel. É muito comum em oficinas de Usinagem Mecânica o uso de tabelas trigonométricas e/ou o uso de Manuais de Usinagem. Um exemplo de manual muito comum em oficinas é o *Cassilas, Manual Prático do Mecânico* [12], mostrado pela Figura 6.12, que contém, dentre outras, as tabelas de seno, cosseno e tangente, nas unidades de medidas gruas e minutos.

Para usinar um ângulo de 37,3 em um bloco de formato prismático (Figura 6.13), utilizando para isso uma mesa de seno simples onde a distância entre as duas barras cilíndricas (eixos) é igual a 100 mm, deve-se elevar o plano móvel (utilizando blocos



**Figura 6.12:** O Manual Prática do Mecânico Cassilas é um manual muito utilizado em oficinas de usinagem por possuir diversas tabelas trigonométricas, além de fórmulas e normas importantes para a fabricação de peças.

padrões) a uma altura que será determinada através da relação trigonométrica seno, e o cálculo seria feito da seguinte maneira:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{altura dos Blocos Padrões } (h_{BP})}{\text{distância entre barras (eixos)}}$$

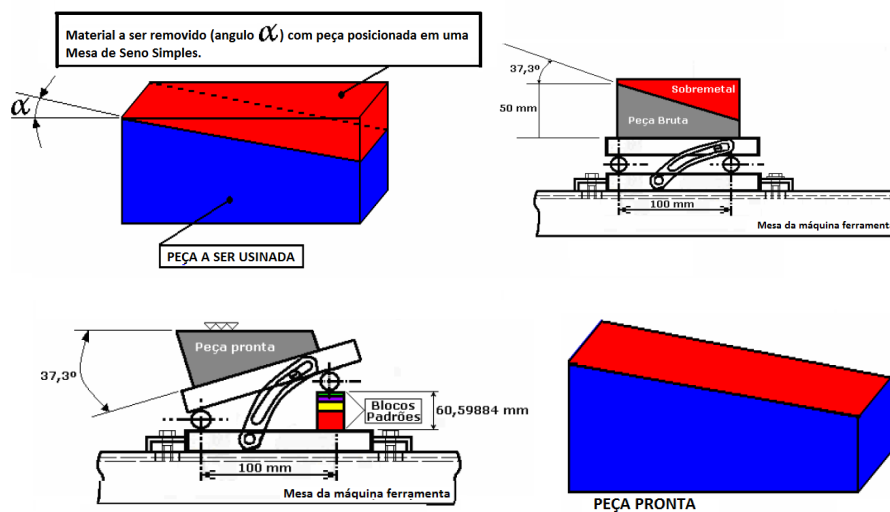
$$\text{sen } 37,3 = \frac{h_{BP}}{100}$$

Verificando o valor do seno de 37,3 em uma tabela temos que

$$0,6059884 = \frac{h_{BP}}{100}$$

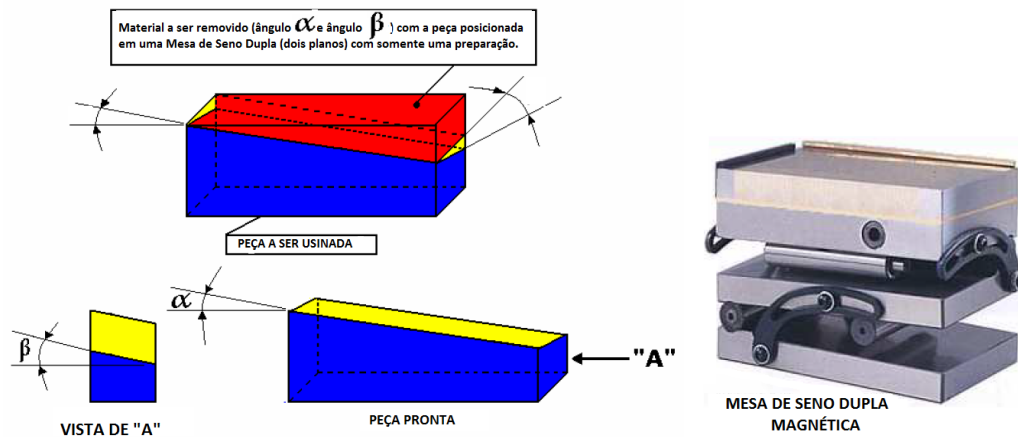
$$h_{BP} = 0,6059884 \cdot 100$$

$$h_{BP} = 60,59884$$



**Figura 6.13:** Esquema de utilização de uma Mesa de Seno Simples para a usinagem de um plano inclinado em uma peça.

No que tange a utilização da mesa de seno, o método é igual ao mostrado anteriormente, porém há a formação de um plano com duas inclinações em relação ao plano que está apoiado na Mesa de Seno Dupla (Figura 6.14). Nessa situação há necessidade do cálculo da altura dos Blocos Padrões para a inclinação dos dois planos da Mesa.



**Figura 6.14:** Esquema de utilização de uma Mesa de Seno Dupla para a usinagem de um plano com duas inclinações em uma peça.

# Planos de Aula

---

Baseados no que é proposto pela BNCC (página 16)

[...] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares [...] com base no lugar e no tempo nos quais as aprendizagens estão situadas.

e também

[...] conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar o alunos nas aprendizagens[...]

iremos propor neste capítulo algumas experiências práticas a partir da Mesa de Seno construída com recursos simples e que pode ser construída facilmente, como mostrado no Apêndice C. É importante ressaltar que essas atividades foram propostas para os alunos da escola SESI em que trabalho. As escolas da Rede SESI são destinadas prioritariamente para os filhos de industriários, ou seja, é uma escola que forma os alunos com o foco na indústria. Também, devido a esse fato, provavelmente, alguns pais dos alunos da escola tem contato com as máquinas ferramentas citadas nesse trabalho.

Iniciaremos propondo uma atividade que poderá ser desenvolvida com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

## 7.1 Cálculo da Altura de Um Galpão pelo Teorema de Tales

Como dito anteriormente, está atividade é destinada ao alunos do 8<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental. Nela fazemos referência ao Teorema de Tales, que em alguns livros de Matemática dessa série, como por exemplo o livro texto do oitavo ano do Ensino Fundamental Anos Finais dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis [19], de proporcionalidade de segmentos.

### Objetivo Geral

- Desafiar os alunos a descobrirem a altura de um galpão (quadra da escola) sem precisar medi-lo diretamente.

**Objetivos Específicos**

- Medir distâncias;
- Relacionar segmentos proporcionais;
- Determinar a razão de proporcionalidade entre dois segmentos;

**Objetos de Aprendizagem**

- Unidades de Medidas;
- Porcentagem;
- Regra de Três Simples;
- Semelhança de Triângulos;
- Teorema de Tales.

**Metodologia**

Uma vez que os alunos já possuem como conhecimento prévio a Regra de Três Simples, eles irão ler um texto histórico que descreve como Tales determinou a altura da Pirâmide de Quéope e a partir dessa discussão, apresentaremos a Mesa de Seno mostrando que ela funciona como um triângulo retângulo em que a Hipotenusa é um dos planos e a os catetos são determinados a partir da medida dos Blocos Padrões utilizados para levanta-la.

**Material Necessário**

- Mesa de Seno;
- Laser;
- Fita Métrica ou Trena;

Após a apresentação de todos os conteúdos supracitados, o aluno deverá, utilizando os materiais descritos, tentar obter uma forma de determinar a altura do galpão da quadra da escola.

**Procedimentos Esperados**

Os alunos utilizarão os conceitos do Teorema de Tales para determinar, a partir dos valores obtidos, a altura do galpão solicitado.

Deverão, inicialmente preparar todo o equipamento que irão utilizar, posicionando o laser de maneira correta em um dos planos da Mesa de Seno. Em seguida, medirão a distância entre uma das extremidades da Mesa de Seno e a parede mais próxima da quadra. Após, deverão erguer o plano da Mesa de Seno utilizando os Blocos Padrões até que a luz do laser atinja o ponto mais alto da quadra. Quando isso ocorrer, eles deverão utilizar os conceitos aprendidos e calcular a altura da quadra, de posse dos valores obtidos com o experimento.

Para finalizar, iremos comparar os resultados e verificar através da planta da escola, qual o percentual de erro da medida.

## 7.2 Cálculo da Altura de Um Galpão Utilizando Trigonometria

Esta atividade, apesar de ser a mesma anterior, tem como objetivo determinar a altura do mesmo galpão, porém, agora utilizando outros objetos de aprendizagem. Uma vez que esta atividade será realizada por alunos do 9º ano, eles utilizaram os conceitos de trigonometria para resolvê-lo.

### Objetivo Geral

- Desafiar os alunos a descobrirem a altura de um galpão (quadra da escola) sem precisar medi-lo diretamente.

### Objetivos Específicos

- Medir distâncias;
- Utilizar as Relações Trigonométricas;

### Objetos de Aprendizagens

- Unidades de Medidas;
- Porcentagem;
- Ângulos;
- Sistema e Equações;
- Triângulo Retângulo;
- Trigonometria.

### Metodologia

Utilizando a Mesa de Seno e com os conhecimentos prévios de trigonometria, os alunos do 9º ano serão desafiados a determinar a altura do galpão da quadra da escola.

### Material Necessário

- Mesa de Seno;
- Blocos Padrões;
- Laser;
- Fita Métrica ou Trena;

Depois da apresentação de todos os itens citados, os alunos deverão determinar a altura do galpão da escola, utilizando os conteúdos aprendidos de trigonometria.

### Procedimentos Esperados

Como os alunos do 9º ano já conhecem as relações trigonométricas no triângulo retângulo, eles terão que, utilizando a Mesa de Seno juntamente com os Blocos Padrões

e o laser, posicioná-la em algum ponto e erguer um de seus planos utilizando os Blocos Padrões até que o laser atinja o ponto mais alto do galpão. Em seguida, utilizando a relação dos Senos irão calcular o ângulo em que ela foi elevada. Posteriormente, irão avançar a mesa a uma determinada distância, por eles mesmos definida e novamente erguerão um de seus planos utilizando os Blocos até que a luz do laser atinja o ponto mais alto do galpão. Baseados nessa nova medida, calcularão o novo ângulo em que a Mesa foi elevada.

A partir dos valores obtidos nas duas medições, incluindo a distância em que eles deslocaram a mesa, eles, utilizando as relações trigonométricas básicas, irão calcular a altura do galpão.

Para finalizar, iremos comparar os resultados e verificar através da planta da escola, qual o percentual de erro da medida.

### 7.3 Utilização da Mesa de Seno para o Cálculo de Forças

Essa atividade visa atender a BNCC [15] na competência específica número 3 da Matemática que sugere atividades interdisciplinares

“Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.”

Aqui além dos conhecimentos de Trigonometria, se faz necessário o conhecimento de conteúdos físicos para solucionar um problema contextualizado.

#### Objetivo Geral

- Simular as forças necessárias para erguer uma carga a partir de um plano inclinado.

#### Objetivos Específicos

- Ler e interpretar tabelas;
- Construir sentenças ou esquemas para a resolução de problemas;
- Reconhecer a natureza dos fenômenos envolvidos, situando-os dentro do conjunto de fenômenos da Física, e identificar as grandezas relevantes em cada caso;
- Reconhecer a relação entre diferentes grandezas;

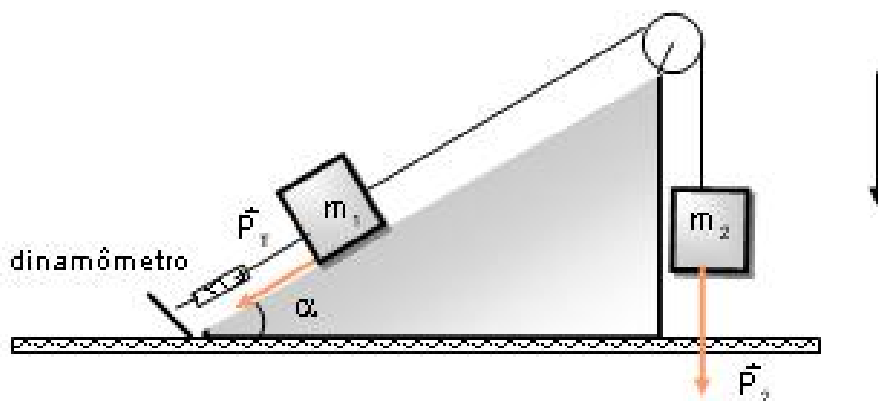
#### Objetos de Aprendizagens

- Leis de Newton;

- Força de atrito;
- Decomposição de vetores;
- Unidades de Medida;
- Ângulos;
- Triângulo Retângulo;
- Trigonometria.

### Metodologia

Utilizando os instrumentos solicitados para essa montagem, os alunos irão determinar, através dos conhecimentos prévios de Dinâmica, as condições necessárias para que dois corpos ligados por meio de uma corda permaneçam em equilíbrio e, após chegarem a uma conclusão, testarão o resultado obtido na prática, usando a Mesa de Seno como o plano inclinado.



**Figura 7.1:** Dois corpo em equilíbrio unidos por uma corda em um plano inclinado

### Materiais Necessários

- Mesa de Seno;
- Blocos Padrões;
- dinamômetro;
- pesos;
- roldana fixa;
- fitas adesivas para fixação dos elementos.

### Procedimentos Esperados

Os alunos deverão realizar essa experiência prática determinando as relações necessários para que os dois pesos que estarão unidos por uma corda que passa por



uma roldana, assim como ilustrado pela Figura 7.1, permaneçam em equilíbrio para cada ângulo em que a Mesa de Seno, que nesse caso funcionara como um plano inclinado e, após realizados os cálculos, testarão os resultados obtidos na prática.

## Considerações Finais

---

A possibilidade de aplicar os conceitos aprendidos dentro de uma sala de aula dá sentido ao aprendizado, principalmente quando o público em questão são os alunos da Educação Básica que necessitam de uma maior motivação para que possam desenvolver de forma efetiva todas as competências e habilidades que devem ser consolidadas nesse nível de ensino.

Este trabalho descreveu algumas aplicações da trigonometria dentro de uma Oficina de Usinagem Mecânica, usando como justificativa as competências propostas na Base Nacional Comum Curricular, com o intuito de criar possibilidades de mostrar aos alunos que os objetos de aprendizagem que são trabalhados na escola, são conhecimentos que diversos profissionais utilizam em seu dia a dia.

A partir da análise de um dispositivo utilizado tanto na aferição, quanto na execução de peças, vimos a possibilidade de construir a Mesa de Seno e aplicá-la no desenvolvimento de alguns conteúdos escolares, tanto diretamente na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento, e dessa forma, possibilitar projetos interdisciplinares.

Atividades práticas como as propostas no Capítulo 7 proporcionam maior envolvimento dos alunos, além de desenvolver o trabalho em equipe e a cooperação, que a BNCC cita como uma das dez competências gerais que a Educação Básica deve garantir aos docentes.

# Base Nacional Comum Curricular

---

Apresentamos aqui uma análise os principais tópicos de cada eixo no Ensino Fundamental Anos Finais presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

## A.1 Números

Essa unidade temática tem como objetivo desenvolver o pensamento numérico que implica no conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. Durante o desenvolvimento da ideia de números é necessário que o aluno desenvolva as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, dentre outros. E, para que o processo de desenvolvimento de competências ocorra, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos e, no estudo desses campos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

No segmento Ensino Fundamental Anos Finais a expectativa é que o alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados e utilizando estratégias diversas com a compreensão dos processos neles envolvidos. É interessante que para o aprofundamento na noção de número sejam utilizados problemas, principalmente os geométricos, além do estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos.

Porém, como o “pensamento numérico” não se completa apenas com os objetos de estudo (conjunto de conteúdos a serem estudados) citados, esse pensamento é ampliado e aprofundado com situações-problema que envolvam conteúdos das demais unidades temáticas.

## A.2 Álgebra

A finalidade dessa unidade temática é o desenvolvimento do “pensamento algébrico” que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas com a utilização de letras e outros símbolos.

Para que ocorra o desenvolvimento do pensamento algébrico é necessário que os alunos sejam capazes de identificar regularidades e padrões de sequências numéricas

e não numéricas. Estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre diversas representações gráficas e simbólicas para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. Nesse eixo, as ideias fundamentais da matemática são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.

Resumidamente, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.

No que tange o Ensino Fundamental Anos Finais, é nessa fase que o alunado deverá compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer a generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sequência algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. Também será nessa fase que os discentes estabeleceram as conexões: variável  $\Rightarrow$  função e incógnita  $\Rightarrow$  equação.

### A.3 Geometria

É nessa unidade que grande parte do conteúdo matemático dessa dissertação se “encaixa”, obviamente, com a ressalva de que, como descrito na BNCC [15]: “cinco unidades correlacionadas”, ou seja, não elas não são totalmente independentes. A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Dessa forma, o “pensamento geométrico” se desenvolverá com o estudo de posição e deslocamento no espaço, formas e relações de elementos de figuras planas e espaciais. Esse pensamento se faz necessário para a investigação de propriedades, a criação de conjecturas e a produção de argumentos geométricos convincentes.

Nessa temática, as principais ideias matemáticas e fundamentais são: construção, representação e interdependência.

No Ensino Fundamental Anos Finais, deve-se priorizar as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ser destacados nesse segmento de modo que os alunos consigam reconhecer as condições necessárias e suficientes para a obtenção de triângulos congruentes ou semelhantes e para que saibam aplicar esse conhecimento na realização de demonstrações simples de forma a contribuir com o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo.

Nesse contexto, há de se destacar a aproximação da Álgebra com a Geometria no estudo do plano cartesiano, por meio da Geometria Analítica. Dessa forma, pretende-se que a Geometria não fique reduzida a mera aplicação de fórmulas e sim seja uma ferramenta para a construção do pensamento.

## A.4 Grandezas e Medidas

Esse eixo temático favorece a integração da Matemática com outras áreas do conhecimento ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas. Além disso, essa unidade contribui para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico.

O que se espera para o Ensino Fundamental Anos Finais é que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas que envolvam essas grandezas com o uso das unidades de medida padronizadas mais usuais. Também é esperado que os alunos ao final desse segmento, sejam capazes de estabelecer e utilizar as relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para o estudo de grandezas derivadas como a densidade e a velocidade.

Nessa fase de escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de triângulos, quadriláteros e círculos, além de, volumes de prismas e cilindros.

## A.5 Probabilidade e Estatística

Nessa unidade temática são estudados o tratamento de dados e a incerteza. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Portanto, é necessário desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de forma a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos.

Nessa unidade temática o uso de tecnologias como calculadoras (para auxiliar na avaliação e comparação dos resultados) e as planilhas eletrônicas (para a construção de tabelas e gráficos) merecem um destaque especial.

O desenvolvimento desse eixo temático no Ensino Fundamental Anos Finais deve ser feito por meio de atividades nas quais os alunos fazem experimentos aleatórios e simulações para comparar os resultados obtidos com a probabilidade teórica. Nesse segmento também é esperado que os alunos sejam capazes de planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas, incluindo medidas de tendência central além da construção de tabelas e de gráficos.

A BNCC também trás um quadro para cada ano letivo dos Ensino Fundamental Anos Iniciais e Finais, ou seja, do 1º ao 9º ano, descrevendo todas as unidades temáticas, objetos de aprendizagem e habilidades, sendo que as habilidades sempre se articulam entre si, uma vez que, as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes.

A seguir, será apresentada uma lista, com a descrição dos conteúdos importantes para o estudo da trigonometria, incluindo as habilidades desenvolvidas em cada fase, em cada ano do Ensino Fundamental Anos Finais:

## 6º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Geometria	<p>Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.</p> <p>Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e <i>softwares</i>.</p> <p>Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.</p>	<p>(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.</p> <p>(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.</p> <p>(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.</p> <p>(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.</p> <p>(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc).</p>
Grandezas e medidas	<p>Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.</p> <p>Ângulos: noção, usos e medida.</p>	<p>(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.</p> <p>(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.</p>

		<p>(EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.</p> <p>(EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.</p>
--	--	--

7º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Geometria	<p>Triângulos: construção de existência e soma das medidas dos ângulos internos</p> <p>Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero</p>	<p>(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é <math>180^\circ</math>.</p> <p>(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.</p> <p>(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.</p>
Grandezas e medidas	Problemas envolvendo medições	<p>(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.</p> <p>(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.</p>

		<p>(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.</p> <p>(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência por áreas.</p>
--	--	--

8º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Geometria	<p>Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros</p> <p>Construções geométricas: ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares.</p> <p>Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas.</p>	<p>(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.</p> <p>(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares.</p> <p>(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.</p>
Grandezas e medidas	Área de figuras planas	<p>(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), como o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p> <p>(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de áreas de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medidas de terrenos.</p>



## 9º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Geometria	<p>Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal</p> <p>Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo</p> <p>Semelhança de triângulos</p> <p>Relações métricas no triângulo retângulo</p> <p>Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração</p> <p>Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais</p> <p>Polígonos regulares</p>	<p>(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.</p> <p>(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p> <p>(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.</p> <p>(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.</p> <p>(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.</p> <p>(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.</p> <p>(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também <i>softwares</i>.</p>

Grandezas e medidas	Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas	(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
---------------------	---	--

# B

## Habilidades e Competências Desenvolvidas na Rede SESI

---

Lista de Habilidades e competências desenvolvidas na Rede SESI do Ensino Fundamental Anos Finais.

### 6º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana  Características das figuras planas  Perímetros de figuras planas	H1. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas. H2. Reconhecer, em contextos diversos, lados, vértices e ângulos de formas geométricas planas. H3. Identificar, em contextos diversos, os polígonos e os elementos que os compõem. H4. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas. H5. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.
Grandezas e medidas	Medidas de comprimento  Evolução histórica	H1. Compreender as transformações das unidades de medida de comprimento, utilizando-as em situações-problema. H2. Compreender a evolução das medidas de tempo e dos seus instrumentos na história da civilização.

Transformações de medidas de comprimento	H3. Compreender as unidades usuais de medidas de comprimento, utilizando-as em situações-problema.
Transformações de medidas de superfície	H1. Reconhecer as conversões entre unidades usuais de medidas de superfície, utilizando-as em situações-problema.

7º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana	H1. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas.
	Características das figuras planas	H2. Reconhecer, em contextos diversos, lados, vértices e ângulos de formas geométricas planas.
	Perímetros de figuras planas	H3. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.
	Área de figuras planas	H4. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.

8º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana	H1. Relacionar os conceitos de ponto, retas e planos.
	Características das figuras planas	H2. Compreender o conceito de ângulo, suas partes, propriedades e lugares geométricos.
	Perímetros de figuras planas	H4. Compreender, em contextos diversos, os polígonos e os elementos que os compõem.
	Áreas de figuras planas	H5. Compreender, em contextos diversos, a circunferência, o círculo e os elementos que os compõem.
	Semelhanças de figuras planas	H6. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.

		<p>H7. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.</p> <p>H8. Compreender, em contextos diversos, a congruência de figuras planas.</p> <p>H9. Compreender, em contextos diversos, simetria em figuras geométricas.</p>
--	--	--

9º ANO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Espaço e Forma	<p>Noções fundamentais da geometria plana</p> <p>Características das figuras planas</p> <p>Perímetros de figuras planas</p> <p>Áreas de figuras planas</p> <p>Semelhanças de figuras planas</p> <p>Congruência de figuras planas</p> <p>Relações métricas no triângulo retângulo</p> <p>Relações trigonométricas nos triângulos</p>	<p>H1. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas.</p> <p>H2. Compreender, em contextos diversos, os polígonos e os elementos que os compõem.</p> <p>H3. Compreender, em contextos diversos, a circunferência, o círculo e os elementos que os compõem.</p> <p>H4. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.</p> <p>H5. Compreender em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.</p> <p>H6. Compreender, em contextos diversos semelhança de figuras planas.</p> <p>H7. Compreender, em contextos diversos, as relações métricas do triângulo retângulo.</p> <p>H8. Compreender, em contextos diversos, as relações trigonométricas no triângulo retângulo.</p> <p>H9. Compreender, em contextos diversos, simetria em figuras geométricas.</p>

Em relação a Matriz Curricular da rede SESI/MG, habilidades referentes à Trigonometria só são estudados no 2º Ano. A seguir, listamos na íntegra, todos os conteúdos referentes a esse objeto de aprendizagem descritos na Matriz Curricular dessa rede de ensino.

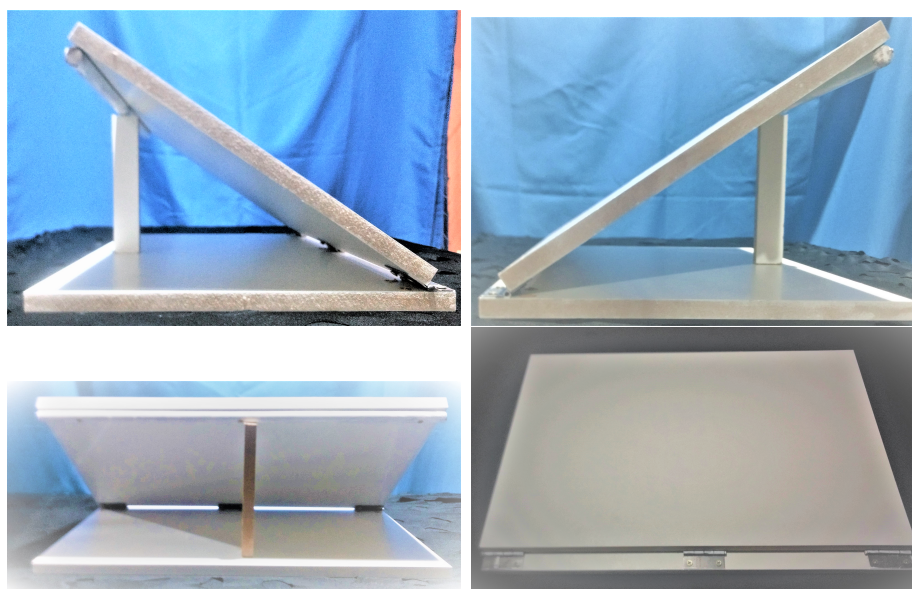
2º ANO - ENSINO MÉDIO

Unidades Temáticas	Objetos de Conhecimento	Habilidades
Espaço e Forma	<p>Noções fundamentais da geometria plana</p> <p>Características das figuras planas</p> <p>Perímetros de figuras planas</p> <p>Áreas de figuras planas</p> <p>Semelhanças de figuras planas</p> <p>Congruência de figuras planas</p> <p>Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência</p> <p>Relações trigonométricas nos triângulos e na circunferência</p>	<p>H1. Compreender conceitos de ponto, reta e plano.</p> <p>H2. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas.</p> <p>H3. Compreender lados e vértices e ângulos de formas geométricas planas.</p> <p>H4. Compreender, em contextos diversos, a circunferência, o círculo e os elementos que o compõem.</p> <p>H5. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.</p> <p>H6. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.</p> <p>H7. Compreender semelhança de figuras planas.</p> <p>H8. Compreender congruência de figuras planas.</p> <p>H9. Compreender relações métricas no triângulo retângulo.</p> <p>H10. Compreender, em contextos diversos, as relações trigonométricas em um triângulo qualquer.</p> <p>H11. Compreender, em contextos diversos, as relações trigonométricas na circunferência.</p> <p>H12. Resolver problemas de simetrias em figuras geométricas.</p>

## Construindo uma Mesa de Seno

---

Nessa seção, proporemos a construção de uma Mesa de Seno. Ela poderá ser utilizada em diversas atividades práticas, como as sugeridas no Capítulo 7 para que os alunos possam ter contato com algumas aplicações da trigonometria e, também, utilizá-la como ferramenta em outras áreas do conhecimento, como a Ciência da Natureza em especial na Física onde, por exemplo, é muito importante o conhecimento das forças atuantes em um corpo situado em um plano inclinado e, dessa forma, com a utilização da Mesa de Seno, o aluno poderá controlar o ângulo de inclinação do plano.



**Figura C.1:** Vistas frontal, laterais esquerda e direita e vista posterior da Mesa de Seno de madeira

Para a construção da Mesa de Seno, serão necessários os seguintes materiais:

- Duas placas de MDF de 15mm de espessura com 80cm de comprimento por 40 cm de largura.
- Três dobradiças pequenas.

- Dez parafusos para madeira.
- Uma chave Philips.
- Uma furadeira (opcional)
- Uma broca para madeira de 3mm de diâmetro.



**Figura C.2:** Materiais necessários para a construção de uma Mesa de Seno Didática.

Passos para a montagem da Mesa:

1. Posicione as duas chapas de MDF de maneira que elas fiquem perfeitamente alinhadas na direção da largura e, recuada cerca de 5 cm para que possa ser fixado o pedaço de madeira cilíndrico e não atrapalhe o fechamento delas.
2. Fixe as três dobradiças de maneira equidistante.
3. Fixe o pedaço cilíndrico de madeira (pode ser um pedaço de cabo de vassoura) do lado oposto as dobradiças.

Fixadas as chapas, agora resta cortar os calços de madeira que funcionarão como “Blocos Padrões” e serão muito importantes para elevar a mesa e determinar seu ângulo de inclinação. Para isso, basta serrar alguns pedaços de MDF ou, até mesmo de cabo de vassoura. Esses Blocos Padrões precisam ter várias medidas disponíveis para que se possa controlar a elevação do plano a Mesa.

Após a execução desses simples passos, teremos disponível um dispositivo que ajudará o professor a colocar em prática alguns conceitos de trigonometria e poderá, com isso, desmistificar aquela famosa pergunta que citei no início desse trabalho e que intriga parte de docentes e discentes: “Para que serve isso”.



# Bibliografia

---

- [1] *Matriz Curricular - Ensino Fundamental Anos Finais - SESI.*
- [2] *Matriz Curricular - Ensino Médio - SESI.*
- [3] *Sant'Ana Fresadora.*
- [4] *TeleCurso 2000 - Mecânica - Cálculo Técnico.*
- [5] *Tecnologia Mecânica Volume 4 (Fresadoras).* Livros Técnicos E Científicos Editora S.A., 1975.
- [6] *ITAL Produtos Industriais LTDA*, dezembro 2017. <http://www.italpro.com.br/uploads/produtos/manuais>.
- [7] Aaboe, Asger: *Episódios da História Antiga da Matemática.* SBM.
- [8] Antunes, Izildo e Geraldo Alves Dionisio: *Torno Mecânico.* Érica, 1996.
- [9] Barbosa, João Lucas Marques: *Geometria Euclidiana Plana.* SBM.
- [10] Bini, Edson, Ivone D. Rabello e Márcio Pugliesi: *Máquinas Ferramentas.* Hemus, 1975.
- [11] Boyer, Carl B.: *História da Matemática.* Blücher, 2001.
- [12] Casillas., A. L.: *Formulário Técnico.*
- [13] Costa, Nielce M. Lobo da: *A História da Trigonometria.* PUC SP. [http://ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3\\_pdf/historia\\_triogono.pdf](http://ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf).
- [14] Dolce, Osvaldo e José Nicolau Pompeo: *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 9.* Editora Atual.
- [15] Educação Brasil, Ministério da e Conselho Nacional de Secretários de Educação.: *Base Nacional Comum Curricular*, Dezembro 2016. <http://basenacionalcomum.meg.gov.br/#/site/inicio>.
- [16] Freire, José Mendonça: *Introdução às Máquinas Ferramentas.* Editora Interciência LTDA, 1989.
- [17] Gerling, Heirich: *À volta da Máquina - Ferramenta.* SBM, 1977.
- [18] Iezzi, Gelson: *Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 3.* Atual, 1998, ISBN 8570562691.
- [19] Imenes, Luiz Márcio e Marcelo Lellis: *Matemática Imenes & Lellis.* Moderna, 2010.
- [20] Kiyukawa, Rokusaburo, Carlos Tadaschi e Kazuhito Yamamoto: *Os Elos da Matemática volume 1.* Saraiva, 1991.
- [21] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cezar de Oliveira Morgado: *A Matemática no Ensino Médio - volume 1.* SBM.
- [22] Lira, Francisco Adval de: *Metrologia na Indústria.* Érica, 2010.

- [23] Lira, Francisco Adval de: *Metrologia Dimensional: Técnicas de Medição e Instrumentos para Controle e Fabricação Industrial*. Érica, 2015.
- [24] Pavanello, Regina Maria: *A Pesquisa na Formação de Professores para a Escola Básica*. Educação Matemática em Revista, 2003.
- [25] Pitombeira, João Bosco e Tatiana Marins Roque: *Tópicos de História da Matemática*. SBM.
- [26] Rossi, Mário: *Máquinas Operatrizes Modernas (Volume 2)*. Urico Hoepli - Milano.
- [27] Silva Neto, João Cirilo da: *Metrologia e Controle Dimensional - Conceitos, Normas e Aplicações*. Campus, 2012.
- [28] Stemmer, Caspar Erich: *Ferramentas de Corte II*. Editora da UFSC, 1995.