Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROBABILIDADE - UMA PROPOSTA DE ENSINO - O Uso do Teorema da Multiplicação de Probabilidades como um Facilitador e Integrador de Diversas Abordagens deste Assunto

por

Vanessa Jacob da Fonseca

Goiânia

2013

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado *Profissional*

2. Identificação do Trabalho

Autor (a): VANESSA JACOB DA FONSECA			
E-mail: vanessatab@yahoo.com.br			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não			
Vínculo empregatício do autor: Professora do Ensino Básico			
Agência de fomento: COLÉGIO MILITAR DE BRASÍLIA			Sigla: CMB
País: Brasil	UF: DF	CNPJ: 00.394.452 / 0498-89	
Título: PROBABILIDADE– UMA PROPOSTA DE ENSINO – O uso do Teorema da Multiplicação de Probabilidades como Facilitador e Integrador de Diversas Abordagens deste Assunto			
Palavras-chave: Probabilidade, Eventos, Condicional, Independente, Distribuição			
Título em outra língua: PROBABILITY - A PROPOSAL FOR EDUCATION - Using Multiplication Theorem of Probability as a Facilitator and Integrator of Various Approaches this Subject			
Palavras-chave em outra língua: Probability, Events, Condictional, Independent, Distribution			
Área de concentração: Matemática do Ensino Básico			
Data defesa: 01/03/2013			
Programa de Pós-Graduação: PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática			
Orientador (a): Prof. Dr. Mário José de Souza			
E-mail: mariojsouza@gmail.com			
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Vanessa J. da Fonseca

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 18 / 03 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Vanessa Jacob da Fonseca

PROBABILIDADE - UMA PROPOSTA DE ENSINO - O Uso do Teorema da Multiplicação de Probabilidades como um Facilitador e Integrador de Diversas Abordagens deste Assunto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

F676p

Fonseca, Vanessa Jacob da.
Probabilidade – uma proposta de ensino – o uso do teorema da multiplicação de probabilidades como facilitador e integrador de diversas abordagens deste assunto [manuscrito] / Vanessa Jacob da Fonseca. – 2013.
48 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de tabelas e figuras.

1. Probabilidade – Ensino. 2. Teoremas. 3. Eventos independentes. 4. Distribuição Binominal. I. Título.

CDU: 519.2

Vanessa Jacob da Fonseca

Probabilidade – uma proposta de Ensino – o Uso do Teorema da Multiplicação de Probabilidades como um Facilitador e Integrador de Diversas Abordagens deste Assunto

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 01 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Rui Seimetz

Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB

Profa. Dra. Elisabeth Cristina Faria Vieira
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Vanessa Jacob da Fonseca graduou-se em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e atualmente é Professora do Ensino Básico do Colégio Militar de Brasília.

Dedico este trabalho a meus filhos Diogo, Rodrigo e Pablo cuja existência me impulsiona a crescer, a meu neto Davi e a meus pais, Edavi e Yvonne, pelas presenças amorosas incondicionais tão importantes nessa etapa da minha vida.

Agradecimentos

A Deus, acima de todas as coisas.

Aos familiares e amigos pela compreensão de algumas ausências.

A meus pais, Edavi e Yvonne, que desde a minha infância foram incentivadores e facilitadores de minha vida acadêmica.

Ao professor Mário José de Souza, pela sábia e tranquila orientação, pela amizade, apoio, paciência e presença constante desde o início do curso.

Aos colegas do polo de Anápolis, pelo companheirismo, amizade e ambiente maravilhoso de aprendizagem.

À Karina, minha grande amiga de muitos anos, colega de trabalho e companheira de curso, pelo incentivo nos momentos difíceis e pelos dias agradáveis de estudos juntas.

Ao Hugo, pela carona de nossas viagens Brasília-Anápolis, sempre com a mesma tranquilidade, boa vontade, educação e simpatia.

Aos companheiros de viagem, Hugo, Glauber e Karina, pelos momentos de discussão, aprendizagem e diversão.

Ao Ronan, querido amigo, pela preocupação, interesse e dedicação aos colegas de curso.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estabelecer as ligações entre as diferentes formas possíveis de resolver algumas questões envolvendo o cálculo da probabilidade de um evento ocorrer, mediante o uso do Teorema da Multiplicação das Probabilidades (Teorema 2) e, a partir dele, demonstrar que podemos resolver problemas que envolvam retiradas simultâneas, inicialmente resolvidos por Análise Combinatória, substituindo-as por retiradas sucessivas e sem reposição, considerando a ordem dos grupamentos possíveis (Teorema 4). Destacar alguns precursores e suas contribuições para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, tais como, Cardano, Pascal, Laplace e Kolmogorov, dentre outros. Exemplificar, através da resolução de problemas, aplicações do Teorema 4 para mostrar a simplificação dos cálculos das probabilidades pedidas, bem como propor atividades que favoreçam debates em sala de aula, com o objetivo de clarificar, com a intervenção do professor, conceitos como Eventos Independentes e o uso da Distribuição Binomial.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidade, Eventos, Condicional, Independentes, Distribuição.

Abstract

This work aims to establish links between the different possible ways to resolve some issues involving the calculation of the probability of an event occurring through the use of the Multiplication of Probability Theorem (Theorem 2) and, from it, to show that we can solve problems involving simultaneous withdrawals, originally settled by Combinatorial Analysis, replacing them by successive withdrawals without replacement, considering the range of possible clusters (Theorem 4). Highlighting some precursors and their contributions to the development of Probability Theory, such as Cardano, Pascal, Laplace and Kolmogorov, among others. Exemplify, through problem solving, application of Theorem 4 to show the simplification of the calculation of probabilities applied, and propose activities that encourage discussion in the classroom, in order to clarify with the teacher's intervention, concepts such as Independent Events and using the Binomial Distribution.

KEYWORDS: Probability, Events, Conditional, Independent, Distribution.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar as vantagens da utilização do Teorema da Multiplicação de Probabilidades (Teorema 2) na resolução de diversos problemas propostos para os alunos de ensino médio, bem como mostrar a necessidade de reforçar alguns conceitos estudados durante o curso de probabilidade, retomando-os e permitindo aos alunos descobrirem as diversas conexões entre os mesmos.

Temos um olhar construtivista sobre o ensino desse assunto reforçado em nossa pesquisa pela dissertação de Mestrado da professora Cileda Coutinho, referenciada em [9], que traz um estudo da abordagem frequentista do ensino de Probabilidade mostrando a necessidade de tornar nosso aluno agente de seu aprendizado. Propusemos atividades que, discutidas em grupos, levam à construção do conhecimento com o confronto de percepções sobre este tema, sempre buscando clarificar conceitos que, de nossa experiência, sabemos causar muitas dúvidas e confusões.

Como metodologia, foram propostas atividades em grupo como Estudo Dirigido sendo instrumento para conduzirem os alunos a construírem seus próprios conceitos a partir das discussões e esclarecimentos do professor.

O tratamento da informação, tão importante para a inserção do cidadão na sociedade, nos leva a priorizar o ensino do cálculo das probabilidades, ferramenta importante para os cálculos estatísticos com aplicações nas diversas ciências. Segundo [21], *p*.66:

> (...) Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, o ensino da Probabilidade aparece inserido no bloco de conteúdos denominado **"Tratamento das Informações"**, o qual é justificado pela demanda social e por sua constante utilização na sociedade atual, pela necessidade de o indivíduo compreender as informações veiculadas, tomar decisões e fazer previsões que influenciam sua vida pessoal e em comunidade. Nesse bloco, além das noções de estatística e probabilidade, destacam-se também as noções de combinatória. (...)

Esta proposta de ensino visa contribuir para facilitar a resolução e compreensão dos problemas que envolvem os cálculos das probabilidades e favorecer um olhar mais abrangente desta teoria pelos alunos.

No Capítulo I, descrevemos dentro de um contexto histórico e cronológico, as contribuições de seus precursores para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

No Capítulo II, discorremos sobre os conceitos da Teoria das Probabilidades conforme a ordenação seguida pela maioria dos livros didáticos. Ao final do capítulo, demonstramos (Teorema 4) que podemos utilizar o Teorema 2 para resolvermos problemas que envolvam retiradas simultâneas, inicialmente resolvidos por análise combinatória, substituindo *retiradas simultâneas* por *retiradas sucessivas e sem reposição*, considerando a ordem dos grupamentos possíveis. Consideramos que a aplicação deste Teorema é um facilitador dos cálculos envolvidos na resolução das situações problemas. Baseamos nossa proposta em nossa experiência, pois mostra outra forma de lidar com problemas que envolvem Análise Combinatória.

No Capítulo III, exemplificamos aplicações do Teorema 4 com a resolução de exercícios, assim como a importância da diferenciação dos conceitos de eventos dependentes e independentes e sua correlação com a Distribuição Binomial. Terminamos o Capítulo propondo atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, por grupos de alunos, para clarificar esses conceitos.

Finalmente, como considerações finais, destacamos a importância de estabelecer claramente, para o aluno, as diversas formas de resolver um mesmo problema, onde buscamos integrar as diversas abordagens deste assunto.

1 Probabilidade na Linha do Tempo

Os jogos de azar são aqueles em que a habilidade não faz a diferença: roleta, dados, máquinas caça-níqueis, pôquer, etc. A origem do nome vem da palavra árabe *al zahr* que traduzida quer dizer dados.

1.1 Os Jogos de Azar na Antiguidade

Numa descoberta arqueológica no início do século XX , pinturas em tumbas da civilização sumeriana, que dominou a mesopotâmia em torno de 3.500 a.C, retratam jogos com o astrágalo ou talus que era uma espécie de dado de osso com seis faces moldados em formato piramidal para que pudessem cair em quatro posições diferentes.

Figura 1: Jogo de Senet - Museo do Louvre, Paris

> Num período posterior, foram descobertas (...) na tumba do jovem faraó Tutankhamon, que reinou sobre o Egito Antigo por volta dos anos de 1300 a.C., um complexo jogo de tabuleiro com dados em forma de hastes chamado *senet* (Figura 1), jogado com base numa aposta que poderia ser um bem ou uma promessa. (...) [6]

Ainda no Egito foram encontrados vasos com figuras de jovens atirando dados para dentro de um círculo. Os jogadores egípcios compulsivos eram punidos sendo forçados a polir pedras para as pirâmides. A noção de acaso nasceu na primeira dinastia da civilização egípcia e tinha uma conotação lúdica.

> (...) O jogo de apostas também era muito comum na Roma Antiga. Relatos do historiador Tácito, que viveu entre os anos 55 d.C. e 120 d.C., dão conta de um jogo de dados muito apreciado pelos romanos de nome *razar*, que só terminava após um dos participantes apostar suas últimas posses, isto é, apenas após a sua falência, sendo que, muitas vezes, não tendo mais o que oferecer, este apostava no jogo a sua própria liberdade, resignando-se em caso de derrota a se tornar escravo do oponente. (...) Ibid [6]

1.2 O Desenvolvimento da Teoria da Probabilidade ao Longo do Tempo

Apresentamos abaixo um esquema cronológico baseado em [9], p.29, que será o nosso roteiro para darmos um panorama geral da história do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade e seus principais precursores.

ESQUEMA CRONOLÓGICO
Cardano (1547)
↓
Pascal e Fermat (1654)
↓
Huygens (1657)
↓
Jacques Bernoulli (1713)
↓
Bayes (1763)
↓
Laplace (1825)
↓
Poisson (1781 – 1840)
↓
Borel (1909)
↓
Kolmogorov (1933)

Figura 2: Cronologia da Teoria da Probabilidade

Segundo [12], Girolamo Cardano ou Gerônimo Cardano ($1501-1576$) participava de jogos apostados para conseguir manter-se na faculdade de medicina. Foi assim que Cardano percebeu sua vocação para o jogo e passou a apostar diariamente por muito tempo de sua vida. Ele se valia de seus conhecimentos para vencer as apostas.

De acordo com [23] apud [17]:

> (...) A partir da análise de suas jogadas, Cardano começou estudar aleatoriedade dos jogos regidos pelo puro acaso e, paralelamente, a escrever um tratado de 32 capítulos, no qual trata da sistematização de dados, das possibilidades dos pontos combinados, da razão entre eventos favoráveis e eventos possíveis (regra geral de Cardano), entre outras questões. (...)

Girolamo Cardano foi a primeiro a escrever as ideias que deram origem à teoria da probabilidade, mas caiu em esquecimento durante um século. Este trabalho só foi publicado em 1663 com o título de *O livro dos jogos de azar*.

Blaise Pascal $(1623 - 1662)$, em 1654, foi desafiado por seu amigo Antoine Gomboud, jogador profissional e conhecido por Cavaleiro De Méré, com questões como esta: *Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?* Conforme [5].

Na época Pascal trabalhava em sua obra *As Cônicas.* Escreveu a **Pierre de Fermat** $(1601 - 1665)$ sobre estas questões. A troca de correspondência entre eles deu início a teoria das probabilidades, porém eles não publicaram seus resultados. Foi **Christian Huygens** $(1629 - 1695)$ que, em 1657, publicou *De ratiociniis in ludo alae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados), um pequeno folheto expondo a teoria desenvolvida por eles. Durante este período, Pascal havia percebido a conexão do triângulo aritmético, que tinha mais de 600 anos, com o cálculo de probabilidade e enunciou propriedades novas. A partir daí o triângulo aritmético passou a chamar-se triângulo de Pascal.

Jaques Bernoulli $(1654-1705)$ com seu tratado *Ars Conjectandi* (Arte de Conjeturar), publicado em 1713, oito anos após sua morte, deixou-nos o legado do volume substancial mais antigo sobre a teoria das probabilidades. Neste trabalho desenvolveu a abordagem frequentista onde a probabilidade de um evento é calculada por aproximações observando a frequência de ocorrência de um evento após um grande número de repetições.

A contribuição de **Thomas Bayes** $(1702-1761)$ para a Teoria das Probabilidades deu-se em *La Doctrine des Chances*, publicado em 1763, dois anos após sua morte. Ele foi o primeiro a utilizar e estabelecer uma base para fazer inferência probabilística a partir da atribuição de probabilidade de um evento que já ocorreu, observando sua frequência. Este resultado é conhecido como *Teorema de Bayes* e é também denominado *fórmula das probabilidades das causas* (ou dos antecedentes).

A partir de 1774, **Pierre Simon Laplace** $(1749 - 1827)$ escreveu muitos artigos sobre probabilidade que incorporou posteriormente em seus livros. Com as obras *Teoria Analítica da Probabilidade* (1812) e *Ensaio Filosófico sobre Probabilidade* (1825), entre outras, Laplace eleva este assunto ao status de Matemática. Desenvolveu sua Teoria da Probabilidade baseado em dez princípios dos quais destacamos: *O primeiro destes princípios é a definição de probabilidade, que podemos escrever como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.* (Citado em [10] apud[15], *p*.12).

Laplace define o sétimo princípio como *esperança matemática*:

> A probabilidade dos acontecimentos serve para determinar a esperança ou temor das pessoas interessadas em uma eventual realização. A palavra Esperança pode estar relacionada com

> vantagem; e esta vantagem, na teoria combinatória, é o produto da soma esperada pela probabilidade de obtê-la (Ibid., p.30.)
>
> A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro. ([5], p.340).

As contribuições de Laplace sobre a Teoria das Probabilidades foram aplicadas a outras ciências tais como a Física, Estatística dentre outras.

Siméon-Denis Poisson $(1781-1840)$ foi um grande pesquisador com mais de trezentas publicações ao longo de sua vida. Em 1837, em seu trabalho *Recherches sur La probabilité des jugments em matière criminalle et matière civili* evidencia-se

> (...) a generalização da lei dos grandes números de Bernoulli e a distribuição que leva o seu nome. A distribuição de Poisson é útil para descrever as probabilidades do número de ocorrências num campo ou intervalo e tempo (ou espaço) (...) (Conforme [10]).

Por outro lado, em [5]

> (...) A teoria dos conjuntos e a teoria da medida durante o século vinte invadiram uma parte sempre maior da matemática, e poucos ramos foram tão completamente influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades (...).

A Teoria das Probalidades contou com a contribuição de **Émile Borel** $(1871-1956)$ em *Eléments de La théorie des probabilités*, publicado em 1909. Em 1914, Borel, em sua obra *Le Hasard* forneceu uma das primeiras contribuições à axiomatização do cálculo das probabilidades, mas foi com **Andrei Nikolaevich Kolmogorov** $(1903-1987)$ e sua abordagem teórica em *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, publicado em 1933, que a teoria da probabilidade foi construída de uma forma rigorosa a partir de axiomas fundamentais.

2 Uma proposta para o ensino de probabilidade

O objetivo deste capítulo é demonstrar como o Teorema da Multiplicação de Probabilidades aplicada a problemas que envolvem eventos com ocorrência simultânea podem ter seus cálculos facilitados transformando-os em problemas em que os eventos sejam considerados um conjunto ordenado de eventos unitários que ocorram sucessivamente e sem reposição (considerando a ordem dos grupamentos possíveis). Por isso, a seguir, apresentamos três situações que, quando analisadas, lidam com alguns conceitos da Teoria da Probabilidade que serão formalizados ao longo deste trabalho.

Situação 1. Quais as *chances*[1] de obtermos cara na face voltada para cima ao lançarmos uma moeda? E de obtermos coroa?

Situação 2. Ao lançarmos um dado com seis faces numeradas de 1 a 6, qual a chance de obtermos o número 5 ou qualquer outro número do dado na face voltada para cima?

Situação 3. Num baralho comum com 52 cartas onde temos 4 naipes, dois vermelhos, Copas e Ouros, e dois pretos, Espadas e Paus, com 13 cartas cada: Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valete), Q (dama), K (rei), qual a chance de retirarmos um valete sabendo que a carta retirada é preta?

Não é preciso muito esforço para darmos as respostas corretas e intuitivas a cada pergunta formulada anteriormente. É claro que temos a mesma chance de obtermos cara ou coroa no lançamento de uma moeda e, portanto uma possibilidade em duas para a obtenção de cara e uma possibilidade em duas para a obtenção de coroa. Ao lançarmos um dado, cada face tem uma possibilidade em seis de ocorrer. Logo, por exemplo, a chance de obtermos o número 2 na face voltada para cima é igual à chance de obtermos o número 5 na face voltada para cima, que é de uma possibilidade em seis. Já no experimento 3, que envolve a retirada de uma carta de um baralho comum, devemos estar atentos ao fato de que sabemos que a carta retirada foi preta, logo nosso espaço amostral ficou reduzido às cartas pretas, que são 26. Dentre estas 26 cartas pretas há um valete de paus e um valete de espadas. Logo temos duas possibilidades em vinte e seis de retirarmos um valete sabendo que a carta retirada é preta (Cálculos justificados posteriormente com a abordagem Laplaciana e a definição de Probabilidade Condicional).

[1] No contexto deste trabalho, a palavra *chance* significa probabilidade.

2.1 Conceitos da Teoria das Probabilidades

2.1.1 Experimentos Aleatórios

As situações propostas inicialmente são repetidas sempre sob as mesmas condições, porém os resultados podem ser diferentes. Observe que o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado e a observação do número que fica na face voltada para cima, a retirada de uma carta de um baralho comum são exemplos de ações em que o resultado é incerto. Em probabilidade, chamamos estes experimentos de Experimentos Aleatórios, isto é, são experimentos que não podemos determinar o resultado apesar de sabermos quais são suas possibilidades [2].

2.1.2 Espaço Amostral (S)

Ao listarmos todos os resultados possíveis de um experimento aleatório formamos um conjunto que denominamos Espaço Amostral (S), baseado em [13], p. 112. Por exemplo, na situação 1, o espaço amostral é $S = \{cara, coroa\}$. Na situação 2, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, já na situação 3, o nosso espaço amostral $S = \{cartas\ pretas\}$.

Quando os elementos de um mesmo espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer, o espaço amostral é chamado equiprovável [7]. Por exemplo, ao lançarmos um dado, todos os resultados $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ têm a mesma probabilidade (desde que o dado seja honesto).

2.1.3 Evento

Todo subconjunto do espaço amostral S é chamado Evento (ibid [7]). Ainda explorando a situação 1, vemos que todos os eventos (subconjuntos) possíveis de S são $A = \varnothing$ (evento impossível), $B = \{cara\}$ (evento simples), $C = \{coroa\}$ (evento simples), $D = \{cara, coroa\}$ (evento certo). O evento A não ocorre nunca. O evento B ocorre se, e somente se ao jogarmos a moeda obtemos a face cara voltada para cima. O evento C ocorre se, e somente se ao jogarmos a moeda, obtemos a face coroa voltada para cima. O evento D ocorre sempre, pois sempre obteremos ou cara ou coroa, por isto é chamado de evento certo.

Tipos de Eventos: (ainda baseado em [7])

1. **Evento Certo:** É o próprio espaço amostral.

2. **Evento Impossível:** É o evento representado pelo conjunto vazio, isto é, sem elementos. Por exemplo, ao lançarmos dois dados comuns obter 13 como soma dos números das faces voltadas para cima.

3. **Evento Simples:** É o evento representado por um conjunto unitário, isto é, com um único elemento.

4. **Eventos Independentes:** Se A e B são eventos independentes, a ocorrência de A não interfere na ocorrência de B e vice-versa. Por exemplo, ao lançarmos um dado duas vezes a ocorrência da face 2 no primeiro lançamento não interfere no resultado do segundo lançamento.

5. **Eventos Mutuamente Exclusivos:** Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então A e B não podem ocorrer simultaneamente, ou seja, $A \cap B = \emptyset$. ([13], p. 114).

Operações com Eventos: (Ibid [13], p.114).

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral S. Consideremos:

1. $A \cup B$ é o evento em que A ocorre ou B ocorre. Por exemplo, no lançamento de um dado, se $A = \{5\}$ e $B = \{2\}$, $A \cup B = \{5, 2\}$, isto é, $A \cup B$ ocorre quando ao lançarmos o dado e observarmos a face voltada para cima, ocorrer o número 5 ou o número 2.

2. $A \cap B$ é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente. Como exemplo, na situação 3, se considerarmos os eventos $A = \{carta\ de\ paus\}$ e $B = \{um\ valete\}$, $A \cap B = \{um\ valete\ de\ paus\}$, isto é, $A \cap B$ ocorre quando a carta retirada do baralho for simultaneamente *carta de paus* e *um valete*.

3. $\overline{A}$ é o evento que ocorre quando A não ocorre. Por exemplo, $\overline{A} = \{número\ par\}$ no experimento da situação 2, $A = \{número\ ímpar\}$. $\overline{A}$ e A são conjuntos complementares e são chamados eventos opostos.

2.2 Conceito de Probabilidade

Probabilidade é a parte da matemática que se preocupa em mensurar a ocorrência de um evento de um determinado experimento aleatório. A Teoria das Probabilidades desenvolveu-se nos últimos três séculos e atualmente são consideradas três diferentes abordagens, citadas em [2].

Abordagem Clássica

A abordagem clássica é conhecida por Lei de Laplace:

A probabilidade do evento A ocorrer é dada pelo quociente de $n(A)$, número de resultados favoráveis ao evento, por $n(S)$, número total de resultados possíveis: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$.

Em [2], apud [4]:

> (...) Conforme Bernstein (1997), a abordagem clássica foi primeiramente publicada pelo italiano Girolamo Cardano no livro Liber de ludo allea (Livro dos jogos de azar) em 1525. (...). A utilização desta abordagem (...) só pode ser usada em espaços amostrais equiprováveis.

Contudo , segundo [19], p.40, foi em 1812, com Pierre Simon Laplace (1749-1827) que a Teoria das Probabilidades foi formalizada em *Théory Analytique des Probabilités*, ganha crédito e foi reconhecida como parte da Matemática.

Adotaremos o modelo equiprobabilístico e variáveis aleatórias discretas para desenvolvermos nossas ideias. Assim, segundo [13], p.115, se temos **n** elementos no espaço amostral e desejamos que todos individualmente tenham a mesma probabilidade, devemos atribuir a cada evento unitário a probabilidade de $\dfrac{1}{n}$. Se um evento X desse espaço é formado por k elementos então a probabilidade de X é $P(X) = \dfrac{k}{n}$.

Abordagem Frequentista

A concepção frequentista de probabilidade deve-se a Jacques Bernoulli ($1654 - 1705$) publicada em sua obra *Ars Conjectandi* (1713), onde o cálculo da probabilidade de um evento é uma aproximação pela frequência com que o evento ocorre após inúmeras repetições da experiência.

De acordo com [9], p.17, apud [3]: (...)Bernoulli justifica este processo através de uma forma fraca da *Lei dos Grandes Números*, conhecida pelo nome de Teorema de Bernoulli, demonstrada na sequência da obra (...).

Como exemplo, vamos lançar um dado com seis faces numeradas de um a seis, 1000 vezes, e anotar os resultados.

A tabela representada na figura abaixo, adaptada de [21], descreve um resultado possível nesses 1000 lançamentos:

FACE	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA
1	164	$\frac{164}{1.000} = 0,164 = 16,4\%$
2	169	$\frac{169}{1.000} = 0,169 = 16,9\%$
3	163	$\frac{163}{1.000} = 0,163 = 16,3\%$
4	165	$\frac{165}{1.000} = 0,165 = 16,5\%$
5	170	$\frac{170}{1.000} = 0,170 = 17,0\%$
6	169	$\frac{169}{1.000} = 0,169 = 16,9\%$
TOTAL	1.000	100%

Figura 3: Tabela de Frequências

Observando a tabela da Figura 3 notamos que as frequências relativas estão muito próximas. Se aumentarmos o número de lançamentos para 10.000, 20.000 etc., as frequências relativas tendem a ficar iguais.

Abordagem Axiomática

Conforme citado em [18], o matemático Russo Andrei Kolmogorov (1903 – 1987) é o responsável pela teoria axiomática da probabilidade moderna. Em 1933, publicou sua monografia sobre a teoria da probabilidade *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* onde construiu a teoria da probabilidade de uma forma rigorosa a partir de axiomas fundamentais. Segundo Kolmogorov [1], *a teoria da probabilidade como disciplina matemática pode e deve ser desenvolvida a partir de axiomas, exatamente da mesma maneira como Geometria e Álgebra.*

A Teoria Axiomática de Probabilidade de Kolmogorov trouxe um grande avanço teórico-científico para esta área da Matemática.

Axiomas (citado em [2])

Seja A um evento do espaço amostral S e $P(A)$ a probabilidades deste evento ocorrer, $P(A)$ deverá satisfazer aos seguintes axiomas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(S) = 1$;
- Se A e B são mutuamente exclusivos então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Não existe contradição entre as três abordagens, pelo contrário, elas se complementam.

2.3 Definição de Probabilidade

(baseado em [16], p.18)

A cada evento associaremos um número que expressa a *chance* do evento ocorrer.

Probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ tal que:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, onde $n(A)$ é igual ao número de casos favoráveis e $n(S)$ é igual ao número de elementos do espaço amostral.
- Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(S) = 1$.
- Se A e B são mutuamente exclusivos então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ainda nos reportando à situação 1 vemos que se o evento não ocorre nunca, isto é, se ele é impossível de ocorrer, $A = \varnothing$ e $P(A) = 0$. Nos eventos $B = \{cara\}$ e $C = \{coroa\}$, $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2} = 50\%$ (uma chance de ocorrer em duas). O evento D $=\{$*cara, coroa*$\}$ ocorre sempre, isto é, 100% de chance de ocorrer, o que significa que $D = S$ e $P(D) = P(S) = 1$.

Apresentamos abaixo o primeiro teorema da Teoria das Probabilidades, enunciado e demonstrado em [13], p.116:

Teorema 1

Se A e B são eventos, então:

1. $P(\varnothing) = 0$.

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5. *Se* $A \supset B$ *então* $P(A) \geq P(B)$.

Demonstração

1. Para qualquer evento A, podemos escrever $A = A \cup \varnothing$. Como os eventos A e $\varnothing$ são mutuamente exclusivos, pelo axioma 3, temos que $P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$. Segue que $P(\varnothing) = 0$.

2. Para qualquer evento A, podemos escrever $1 = P(S) = P(\overline{A} \cup A) = P(\overline{A}) + P(A)$, pois $\overline{A}$ e A são mutuamente exclusivos. Segue que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. Para qualquer evento A, podemos escrever $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$, pois $(A - B)$ e $(A \cap B)$ são mutuamente exclusivos. Daí, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

4. $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B)$, pois $(A - B)$ e B são mutuamente exclusivos. Como por 3 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5. Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, se $A \supset B$ temos que $P(A \cap B) = P(B)$ e daí resulta que $P(A - B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A - B) \geq 0$, temos que $P(A) \geq P(B)$.

c.q.d.

2.4 Probabilidade Condicional

Na situação 3 proposta no início deste capítulo, vimos que foi imposta uma restrição quando foi anunciado que a carta retirada era de cor preta. Com esta informação houve uma redução do nosso espaço amostral inicial de 52 cartas. Só temos 26 cartas de cor preta. É neste espaço que devemos procurar quantos valetes existem. Vimos que tínhamos 2 possibilidades em 26, isto é, se chamarmos de evento $A = \{\text{carta é preta}\}$ e de evento $B = \{\text{a carta é um valete}\}$ desejamos a probabilidade de B na condição de A ter ocorrido, e denotamos isso por $P(B/A)$. Concluímos intuitivamente que $P(B/A) = \frac{2}{26}$. Como formalizar nosso pensamento e definir *Probabilidade Condicional*?

Ora, buscamos todos os valetes dentre as cartas pretas. Em linguagem de conjuntos buscamos $n(A \cap B)$ em $n(A)$, para calcularmos nossas possibilidades de sucesso. Nossa intuição então nos leva a $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{26}$. Isso nos conduz à seguinte definição:

Definição: (de [13], p. 124)

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Podemos escrever ainda: $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$.

O Teorema abaixo se encontra demonstrado, com todos os detalhes, em [22].

Teorema 2 **(Teorema da Multiplicação de Probabilidades)**

Para três eventos quaisquer: A_1, A_2, A_3 *temos:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

Demonstração. De forma resumida tem-se:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2).P(A_3/(A_1 \cap A_2)) =$$

$$= P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/(A_1 \cap A_2)).$$

Em outras palavras, a probabilidade de que três eventos ocorram simultaneamente é igual à probabilidade de ocorrência do primeiro evento vezes a probabilidade de ocorrência do segundo evento dado que o primeiro evento já ocorreu, vezes a probabilidade de ocorrência do terceiro evento dado que o primeiro e segundo eventos já ocorreram.

Não é difícil perceber que podemos estender este resultado para **n** eventos que ocorram simultaneamente.

Quando os eventos são independentes a ocorrência de um evento não restringe o espaço amostral para que o próximo evento ocorra. Neste caso P(B/A) = P(B). Segue que:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Como exemplo, se uma moeda for lançada duas vezes e o resultado da face voltada para cima for observado, o resultado da segunda jogada não depende do resultado da primeira jogada. O espaço amostral para a segunda jogada continua sendo $S = \{\text{cara, coroa}\}$. Não houve nenhuma restrição.

Em muitos problemas, a determinação da probabilidade de um evento não apresenta dificuldade devida à facilidade da contagem dos casos possíveis dentro de um espaço amostral conhecido. Entretanto, em muitos outros, é praticamente impossível essa contagem sem a utilização da Análise Combinatória como um meio auxiliar, como menciona [22].

2.5 Análise Combinatória

(adaptado de [16], p. 31 e de [22], p. 29)

Princípio Fundamental da Contagem: Se um fenômeno ocorre em **n** etapas em que a primeira etapa pode ser realizada de A_1 maneiras diferentes, a segunda de A_2 maneiras diferentes,..., e a n-ésima em A_n maneiras diferentes, então o número de possibilidades de ocorrência desse fenômeno é dado pelo produto $A_1.A_2....A_n$.

No cálculo de Probabilidade é comum utilizarmos o princípio fundamental da contagem em forma de diagrama conhecido como *Diagrama em Árvore* devido à sua forma de representação.

Exemplo 1: Se temos três calças diferentes, quatro blusas diferentes e dois pares de sandálias diferentes, quantos conjuntos distintos obtemos ao escolher uma calça, uma blusa e um par de sandálias?

Designando por C_i, B_i e S_i, $1 \leq i \leq 3$, as calças, as blusas e os pares de sandálias respectivamente, podemos escrever:

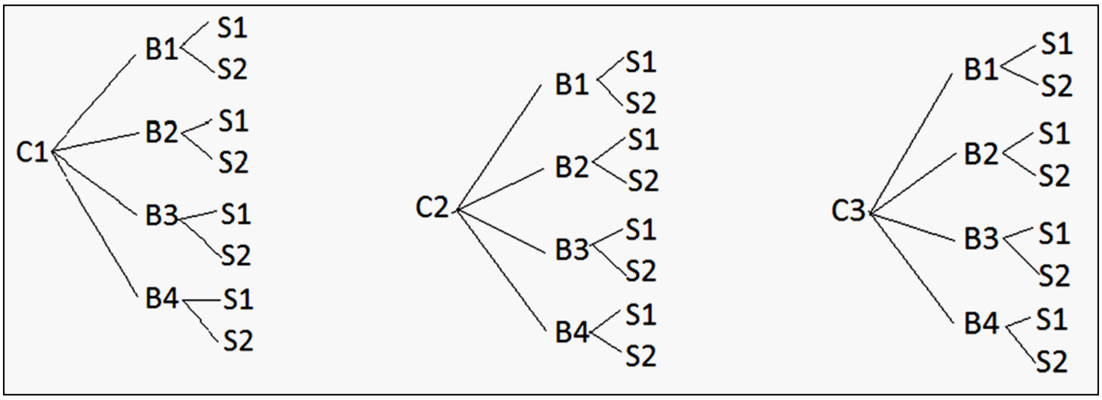

Figura 4: 1º Diagrama em árvore

O diagrama em árvore ilustra que podemos conseguir $3.4.2 = 24$ conjuntos distintos escolhendo uma calça, uma blusa e um par de sandálias.

O Princípio Fundamental da Contagem é utilizado como base para o cálculo dos problemas de Análise Combinatória.

Nos Arranjos Simples, dados n objetos distintos, queremos dispor de p objetos em sequência. Há n maneiras de escolher o primeiro objeto, *n-1* maneiras de escolher o segundo objeto, *n-2*, e finalmente *n-p+1* modos de escolher o p-ésimo objeto. Segue que, do Princípio Fundamental da Contagem que,

$$A_{n,p} = n.(n-1).....(n-1+p) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ onde } n! = n.(n-1).....1. \text{ (fatorial de n)}$$

No caso particular em que $n = p$, temos o fatorial de n, que representa todas as Permutações possíveis dos n objetos distintos. O número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são do tipo A, n_2 são do tipo B, etc., é

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_p} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_p!}$$

Nos casos de Arranjos Simples e de Permutação a mudança na ordem dos elementos de um grupamento forma um novo grupamento. Exemplo, o grupo ABC é diferente do grupo ACB. Em muitos problemas, entretanto, interessa-nos apenas as escolhas dos objetos. Sem distinção da ordem em que eles aparecem. Neste tipo de problemas os grupos ABC e ACB são iguais. Estas escolhas são chamadas Combinações Simples.

O número de combinações de n objetos tomados p a p é igual ao número de Arranjo Simples n de objetos tomados p a p dividido por $p!$ pois cada grupamento de p elementos foi contado $p!$ vezes a mais quando fazíamos distinção da ordem dos elementos.

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{n!.(n-p)!}$$

Exemplo 2: Uma urna contém exatamente 9 bolas: 5 azuis (A) e 4 vermelhas (V). Retirando-se simultaneamente 3 bolas da urna, calcular a probabilidade de saírem duas bolas azuis e uma bola vermelha. (adaptado de [20], p. 208)

Solução: Vemos que temos um total de 9 bolas das quais escolheremos 3 quando as retiramos simultaneamente. Neste caso, temos $C_{9,3} = \frac{9!}{6!.3!} = 84$ modos diferentes possíveis de fazermos esta escolha, dos quais temos $C_{5,2}.C_{4,1} = 10.4 = 40$ modos de retirarmos 3 bolas após escolhermos 2 bolas azuis dentre as 5 e uma bola vermelha dentre as 4. Logo a probabilidade deste evento E é

$$P(E) = \frac{C_{5,2}.C_{4,1}}{C_{9,3}} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

No Ensino Médio, este problema é proposto logo após a introdução dos conceitos iniciais de probabilidade e resolvido com o auxílio da análise combinatória. Entretanto, este problema pode ser resolvido como aplicação do Teorema 2 desde que levemos em consideração que, ao considerarmos os grupamentos ordenados, basta considerar todos os grupos possíveis de retiradas de 2 bolas azuis e 1 vermelha: (AAV), (AVA) e (VAA). Claro que obtivemos $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ grupos. Cada um destes grupos tem a mesma probabilidade de ocorrer:

$$P(AAV) = P(A \cap A \cap V) = P(A).P(A/A).P(V/A \cap A) = \frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{4}{7} = \frac{80}{504} = \frac{10}{63}$$

$$P(AVA) = P(A \cap V \cap A) = P(A).P(V/A).P(A/A \cap V) = \frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{4}{7} = \frac{80}{504} = \frac{10}{63}$$

$$P(VAA) = P(V \cap A \cap A) = P(V).P(A/V).P(A/V \cap A) = \frac{4}{9}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{80}{504} = \frac{10}{63}$$

Assim, $\quad P(E) = P(AAV) + P(AVA) + P(VAA) = 3.\frac{10}{63} = \frac{10}{21}$

Desse modo, se *retirarmos simultaneamente* duas bolas azuis e uma bola vermelha dentre nove bolas existentes em uma urna, das quais cinco eram azuis e quatro eram vermelhas, *é igual a retirarmos sucessivamente e sem reposição* duas bolas azuis e uma bola vermelha da mesma urna *desde que levemos em consideração a ordem dos grupamentos possíveis* em que o evento ocorre.

Apresentamos abaixo o Teorema 3 citado em [21] e por nós demonstrado.

Teorema 3

Sejam $a_1, a_2, ..., a_k$ elementos de um conjunto A com n elementos. A probabilidade de se retirar simultaneamente esses k elementos do conjunto A é igual à probabilidade de se retirá-los sucessivamente e sem reposição.

Demonstração: Temos apenas um caso favorável já que desejamos retirar exatamente este grupo de k elementos e temos $C_{n,k}$ casos possíveis de retiradas simultâneas de k dentre os n elementos de A. Logo, a probabilidade de ocorrer este evento E é:

$$P(E) = \frac{1}{\dfrac{n!}{(n-k)!.k!}} = \frac{1}{\dfrac{n.(n-1).....(n-k+1)}{k!}} = \frac{k.(k-1).....1}{n.(n-1).....(n-k+1)} =$$

$$= \frac{k}{n}.\frac{k-1}{n-1}.....\frac{1}{(n-k+1)} = P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_k)$$

onde $E_i = \{$retirar o i-ésimo elemento do grupo de k elementos$\}$ sucessivamente e sem reposição $1 \leq i \leq k$.

Em seguida, apresentamos o Teorema 4 por nós enunciado e demonstrado:

Teorema 4

Sejam n objetos, p objetos do tipo A e $(n-p)$ objetos do tipo B. A probabilidade de retirarmos simultaneamente k objetos dentre estes n, $k \leq n$, dos quais k_1 são do tipo A e $(k-k_1)$ são do tipo B, $k_1 \leq p$, é igual a probabilidade de retirarmos sucessivamente e sem reposição estes mesmos objetos desde que levemos em consideração a ordem dos grupamentos possíveis em que o evento ocorre.

Demonstração: A probabilidade de retirarmos simultaneamente k objetos dentre estes n,

$k \leq n$, dos quais k_1 são do tipo A e $(k-k_1)$ são do tipo B, $k_1 \leq p$, é dada por:

$$P(E) = \frac{C_{p,k_1}.C_{n-p,k-k_1}}{C_{n,k}} = \frac{\dfrac{p!}{(p-k_1)!.k_1!}.\dfrac{(n-p)!}{[(n-p)-(k-k_1)]!.(k-k_1)!}}{\dfrac{n!}{(n-k)!.k!}} =$$

$$= \frac{p.(p-1).....(p-k_1+1)}{k_1!}.\frac{(n-p).(n-p-1).....[(n-p)-(k-k_1)+1]}{(k-k_1)!}.$$

$$.\frac{k!}{n.(n-1).....(n-k_1+1).(n-k_1).....[(n-k_1)-(k-k_1)+1]} =$$

$$= \frac{k!}{k_1!.(k-k_1)!}.\underbrace{\frac{p}{n}.\frac{p-1}{n-1}.....\frac{p-k_1+1}{n-k_1+1}}_{k_1 \ termos}.\underbrace{\frac{n-p}{n-k_1}.\frac{n-p-1}{n-k_1-1}.....\frac{(n-p)-(k-k_1)+1}{(n-k_1)-(k-k_1)+1}}_{(k-k_1) \ termos} =$$

$$P_k^{k_1,k-k_1}.\underbrace{\frac{p}{n}.\frac{p-1}{n-1}.....\frac{p-k_1+1}{n-k_1+1}}_{k_1 \ termos}.\underbrace{\frac{n-p}{n-k_1}.\frac{n-p-1}{n-k_1-1}.....\frac{(n-p)-(k-k_1)+1}{n-k+1}}_{(k-k_1) \ termos} =$$

$$P_k^{k_1,k-k_1}.P(A).P(A/A).P(A/A \cap A).....P\left(A/\underbrace{A \cap A \cap ..... \cap A}_{(k_1-1) \ termos}\right).P\left(B/\underbrace{A \cap ..... \cap A}_{k_1 \ termos}\right).$$

$$.P\left(B/\underbrace{A \cap .... \cap A}_{k_1 \ termos} \cap B\right).P\left(B/\underbrace{A \cap ..... \cap A}_{k_1 \ termos} \cap \underbrace{B \cap ..... \cap B}_{(k-k_1-1) \ termos}\right)$$

Podemos reescrever $P_k^{k_1,k-k_1} = \dfrac{k!}{k_1!.(k-k_1)!} = C_{k,k_1} = \dfrac{k!}{k_1!.(k-k_1)!}$ que representa a escolha de k_1 objetos dentre os k disponíveis.

Segue que podemos reescrever a frase acima:

$$P(E) = \frac{C_{p,k_1}.C_{n-p,k-k_1}}{C_{n,k}} =$$

$$= C_{k,k_1}.P(A).P(A/A).P(A/A \cap A).....P\left(A/\underbrace{A \cap A \cap ..... \cap A}_{(k_1-1) \ termos}\right).P\left(B/\underbrace{A \cap ..... \cap A}_{k_1 \ termos}\right).$$

$$.P\left(B/\underbrace{A \cap A \cap ..... \cap A}_{k_1 \ termos} \cap B\right).P\left(B/\underbrace{A \cap A \cap ..... \cap A}_{k_1 \ termos} \cap \underbrace{B \cap ..... \cap B}_{(k-k_1-1) \ termos}\right)$$

Com esta demonstração podemos transformar todo problema onde for pedida a probabilidade de retiradas simultâneas em problema de probabilidade com retiradas sucessivas e sem reposição, desde que seja levada em consideração a ordem dos elementos retirados. Este resultado facilita em muito o cálculo da probabilidade destes eventos.

3 Aplicações do Teorema 4

Neste capítulo resolveremos alguns problemas utilizando o *Teorema 4*, substituindo a palavra simultaneamente por sucessivamente e sem reposição, porém considerando a ordem dos grupamentos possíveis para atender cada item proposto.

Tem-se como objetivo apresentar como os cálculos ficam simplificados utilizando-se o Teorema 4 e propor algumas atividades que induzam os alunos à percepção das interligações entre os diversos tópicos abordados no ensino da probabilidade.

Os problemas abaixo são clássicos do ensino de Probabilidade no Ensino Médio. Os problemas 1 e 5 foram adaptados do livro: *Matemática, Conceitos, Linguagem e Aplicações, Manuel Paiva, p.199 e p.209*, respectivamente. O problema 2 foi adaptado do livro: *Aplicações à Estatística, Paul Mayer, p.39*. O problema 3 foi adaptado do livro: *Probabilidade e Estatística, Murray R. Spiegel, Coleção Schaum, p.36, 1.45*. O problema 4 foi adaptado do livro: *A Matemática do ensino Médio, vol.2, p.119, 5*.

3.1 Problemas resolvidos

Em [19], as Orientações Curriculares para o Ensino Médio são fornecidas pelo Ministério da Educação e Secretaria de Educação Básica:

> (...) As idéias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. (...)a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento. (...)

Fundamentados no exposto acima, apresentamos os problemas abaixo. Como metodologia, sugiro que eles sejam disponibilizados na página do colégio, em blog ou outro meio eletrônico, com posterior publicação dos exercícios resolvidos e comentados. Os alunos podem discuti-los e resolvê-los em grupo e eliminar suas dúvidas posteriormente, numa data previamente determinada, com o professor. No final, para reforçar e fixar melhor a discussão destes conceitos, temos nas páginas 41 a 43 atividades propostas para um Estudo Dirigido.

1) Uma caixa contém cinco lâmpadas perfeitas (P) e três defeituosas (D). Sorteiam-se simultaneamente três lâmpadas desta caixa. Calcule a probabilidade de obtermos:

a) Todas as lâmpadas perfeitas (E1).

b) Uma lâmpada perfeita e duas defeituosas (E2).

c) Duas lâmpadas perfeitas e uma defeituosa (E3).

d) Três lâmpadas defeituosas (E4).

Solução: a) Como desejamos sortear três lâmpadas perfeitas, temos um grupamento possível, que corresponde a $P_3^3 = C_{3,3} = C_{3,0} = 1$. Para facilitar a escrita vamos usar a seguinte notação: $(P \cap P \cap P) = (PPP)$. Logo a probabilidade desejada é igual a:

$$P(E_1) = P(PPP) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$$

b) Temos agora três grupamentos possíveis, todos com a mesma probabilidade de ocorrer: (PDD), (DPD), (DDP), que corresponde a $P_3^2 = C_{3,2} = C_{3,1} = 3$. Logo,

$$P(E_2) = P(PDD) + P(DPD) + P(DDP) = P_3^2.\frac{5}{8}.\frac{3}{7}.\frac{2}{6} = 3.\frac{30}{336} = 3.\frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

c) Neste item, temos também três grupamentos possíveis: (PPD), (PDP), (DPP), todos com a mesma probabilidade de ocorrer, que corresponde a $P_3^2 = C_{3,2} = C_{3,1} = 3$. Portanto,

$$P(E_3) = P(PPD) + P(PDP) + P(DPP) = P_3^2.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}.\frac{3}{6} = 3.\frac{60}{336} = 3.\frac{5}{28} = \frac{15}{28}$$

d) Finalmente, como desejamos sortear três lâmpadas defeituosas, temos um grupamento possível: $P_3^3 = C_{3,3} = C_{3,0} = 1$. Logo, a probabilidade desejada é:

$$P(E_4) = P(DDD) = \frac{3}{8}.\frac{2}{7}.\frac{1}{6} = \frac{6}{336} = \frac{1}{56}$$

2) Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves.

Retirando-se dois artigos simultaneamente e sem reposição, calcule a probabilidade de que:

a) Ambos sejam perfeitos.

b) Ambos tenham defeitos graves.

c) Ao menos um ser perfeito.

d) No máximo um seja perfeito

e) Exatamente um seja perfeito.

f) Nenhum deles tenha defeitos graves.

g) Nenhum deles seja perfeito.

Na resolução deste problema usaremos a seguinte legenda: B para artigo bom, D para artigo defeituoso, M para artigos com defeitos menores, G para artigos com defeitos graves, $\overline{B}$ para artigos que não são bons e $\overline{G}$ para artigos que não possuam defeitos graves.

Solução: a) Ambos sejam perfeitos.

Queremos grupamentos onde os dois artigos sejam bons, isto é grupamentos do tipo: BB.

$$P(BB) = C_{2,2}.\frac{10}{16}.\frac{9}{15} = \frac{3}{8}$$

b) Ambos tenham defeitos graves.

Analogamente ao item a, queremos grupamentos do tipo GG.

$$P(GG) = C_{2,2}.\frac{2}{16}.\frac{1}{15} = \frac{1}{120}$$

c) Ao menos um ser perfeito. Nossos grupamentos podem ser do tipo BB, BM, MB, BG, GB, isto é, só não podem conter duas peças defeituosas.

$$1 - P(DD) = 1 - C_{2,2}.\frac{6}{16}.\frac{5}{15} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

d) No máximo um seja perfeito. Neste caso, ou os dois artigos são bons ou um deles é defeituoso. Como $P(BD) = P(DB)$, temos:

$$P(DD) + P(BD) + P(DB) = \frac{1}{8} + 2.\frac{10}{16}.\frac{6}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

e) Exatamente um seja perfeito.

$$P(BD) + P(DB) = 2.\frac{10}{16}.\frac{6}{15} = \frac{1}{2}$$

f) Nenhum deles tenha defeitos graves.

Temos dois artigos com defeitos graves dentre os dezesseis, logo temos catorze artigos sem defeitos graves, isto é, $n(\overline{G}) = 14$:

$$P(\overline{GG}) = \frac{14}{16}.\frac{13}{15} = \frac{91}{120}$$

g) Nenhum deles seja perfeito.

São dez artigos bons dentre os dezesseis. Segue que $n(\overline{B}) = 6$.

$$P(\overline{BB}) = \frac{6}{16}.\frac{5}{15} = \frac{1}{8}$$

3) Em um jogo de pôquer extraem-se simultaneamente 5 cartas de um baralho de 52. Determine a probabilidade de:

a) $A =${4 serem damas}.

b) $B =${4 damas e um rei}.

c) $C =${Três *7* e dois valetes}.

d) $D =$ {Um *10*, um valete, uma dama, um rei e um Ás, em qualquer ordem}.

e) $E =$ {Três cartas de um naipe e duas de outro naipe}.

f) $F =$ {Pelo menos um Ás}.

Solução: a) $A =${4 serem damas}.

$$P(A) = C_{5,4}.\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}.\frac{1}{49}.\frac{48}{48} = \frac{1}{54145}$$

b) B ={4 damas e um rei}.

$$P(B) = C_{5,4}.\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}.\frac{1}{49}.\frac{4}{48} = \frac{1}{649740}$$

c) C ={Três 7 e dois valetes}.

$$P_5^{3,2}.\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}.\frac{4}{49}.\frac{3}{48} = C_{5,3}.C_{2,2}.\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}.\frac{4}{49}.\frac{3}{48} = \frac{1}{108290}$$

d) D ={Um 10, um valete, uma dama, um rei e um Ás, em qualquer ordem}.

$$P_5.\frac{4}{52}.\frac{4}{51}.\frac{4}{50}.\frac{4}{49}.\frac{4}{48} = \frac{64}{162435}$$

e) E ={Três cartas de um naipe e duas de outro naipe}.

$$P_5.\frac{13}{52}.\frac{12}{51}.\frac{11}{50}.\frac{13}{49}.\frac{12}{48} = \frac{429}{4165}$$

f) F ={Pelo menos um Ás}.

$$1 - \frac{48}{52}.\frac{47}{51}.\frac{46}{50}.\frac{45}{49}.\frac{44}{48} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18472}{54145}$$

4) Cinco dados são jogados simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter:

a) Um par.

b) Dois pares.

c) Uma trinca.

d) Uma quadra.

e) Uma quina.

f) Uma sequência.

g) Uma trinca e um par (um *full hand*).

Solução: a) Um par.

Para calcularmos o número de grupamentos possíveis com um par de dados com números iguais devemos contar de quantas formas diferentes podemos dispor este par dentre os cinco dados: $C_{5,2} = 10$. Outra forma de pensar é que temos 5 posições para o primeiro dos dois números iguais e 4 posições para o segundo, porém, como são iguais, temos $\frac{5.4}{2} = 10$ posições possíveis para a dupla de dados iguais já que a permutação dos mesmos não muda o grupamento.

Usando a letra **P** para representar o número escolhido dentre os seis números do dado para ser o número da dupla (par) e a letra **N** para representar os números diferentes do escolhido, uma representação possível para este cálculo é:

$$P(um\ par) = P(PPNNN) = 10.\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{6} = \frac{25}{54}$$

b) Dois pares.

Temos $C_{5,2} = 10$ posições possíveis para o primeiro par de dados com números iguais e $C_{3,2} = 3$ posições possíveis para o segundo par com números iguais, porém diferentes da primeira escolha. Aparentemente temos $10.3 = 30$ grupamentos diferentes.

Todavia, devemos perceber que se escolhermos, por exemplo, o **2** como o número do primeiro par e o **5** como o número do segundo par é igual a escolhermos o **5** como o número do primeiro par e o **2** como o número do segundo par. Portanto, temos $\frac{30}{2}$ grupamentos diferentes. Usando P_1 para representar o número escolhido dentre os seis números do dado para ser o número do primeiro par, P_2 para representar o número escolhido dentre os cinco números restantes do dado para ser o número do segundo par e a letra **N** para representar o número diferente dos escolhidos, uma representação possível para este cálculo é:

$$P(dois\ pares) = P(P_1P_1P_2P_2N) = 15.\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6} = \frac{25}{108}$$

c) Uma trinca.

Formamos $C_{5,3} = 10$ grupamentos diferentes dispondo os três dados com números iguais dentre os cinco dados. Considerando a letra **T** para representar o número escolhido dentre os seis números do dado para ser o número da trinca e a letra **N** para representar os números diferentes do escolhido, uma representação possível para este cálculo é:

$$P(uma\ trinca) = P(TTTNN) = 10.\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6} = \frac{25}{162}$$

d) Uma quadra.

Formamos $C_{5,4} = 5$ grupamentos diferentes dispondo os quatro dados com números iguais dentre os cinco dados. Considerando a letra **Q** para representar o número escolhido dentre os seis números do dado para ser o número da quadra e a letra **N** para representar os número diferente do escolhido, uma representação possível para este cálculo é:

$$P(uma\ quadra) = P(QQQQN) = 5.\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{1296}$$

e) Uma quina.

Como os cinco números são iguais temos apenas um grupamento possível com estes cinco números. Considerando a letra **Q** para representar o número escolhido dentre os seis números do dado para ser o número da quina, uma representação possível para este cálculo é:

$$P(uma\ quina) = P(QQQQQ) = 1.\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$$

f) Uma sequência.

Temos duas sequências possíveis: **{1,2,3,4,5}** e **{2,3,4,5,6}**. Nos dois casos, teremos $P_5 = 5! = 120$ grupamentos diferentes. Logo,

$$P(uma\ sequncia) = P(12345) + P(23456) = \frac{120}{6^5} + \frac{120}{6^5} = \frac{5}{162}$$

g) Uma trinca e um par (um *full hand*).

Solução. Formamos $C_{5,3} = 10$ grupamentos diferentes dispondo os três dados iguais e, como os outros dois vão formar o par só há um modo de formar este par, isto é, $C_{5,3}.C_{2,2} = 10.1 = 10$ grupamentos diferentes para formar o full hand. Usando a letra **T** para representar o número escolhido dentre os seis números do dado para ser o número da trinca e a letra **P** para representar o número escolhido para ser o número do par, uma representação possível para este cálculo é:

$$P(full\ hand) = P(TTTPP) = 10.\frac{6}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} = \frac{25}{648}$$

5) No lançamento simultâneo de cinco moedas, qual é a probabilidade de se obterem:

a) Todas caras.

b) Quatro caras e uma coroa.

c) Três caras e duas coroas.

d) Duas caras e três coroas.

e) uma cara e quatro coroas.

f) Todas coroas.

Solução: Usaremos $C = cara$ e $K = coroa$.

a) A = {Todas caras}.

Temos $C_{5,5} = 1 = C_{5,0}$ grupamento possível para este evento.

$$P(A) = P(CCCCC) = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{cara} = C_{5,5}.\left(\frac{1}{2}\right)^5.\left(\frac{1}{2}\right)^0 \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{32}$$

b) B = {Quatro caras e uma coroa}.

Temos agora $C_{5,4} = 5 = C_{5,1}$ grupamentos possíveis atendendo ao evento B.

$$P(B) = P(CCCCK) = 5.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{cara}.\underbrace{\frac{1}{2}}_{coroa} = C_{5,4}.\left(\frac{1}{2}\right)^4.\left(\frac{1}{2}\right)^1 \Longrightarrow P(B) = \frac{5}{32}$$

c) C = {três caras e duas coroas}.

Para o evento C temos $C_{5,3} = 10$ grupamentos possíveis.

$$P(C) = P(CCCKK) = 10.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{cara}.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{coroa} = C_{5,3}.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow P(C) = \frac{5}{16}$$

d) D = {Duas caras e três coroas}.

São $C_{5,2} = 10$ grupamentos para o evento D.

$$P(D) = P(CCKKK) = 10.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{cara}.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{coroa} = C_{5,2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Longrightarrow P(D) = \frac{5}{16}$$

e) E = {uma cara e quatro coroas}.

Temos $C_{5,4} = 5$ grupamentos para este evento.

$$P(E) = P(CKKKK) = 5.\underbrace{\frac{1}{2}}_{cara}.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{coroa} = C_{5,1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \Longrightarrow P(D) = \frac{5}{32}$$

f) F = {Todas coroas}

Temos $C_{5,5} = 1$ grupamento possível onde todos os elementos são coroas.

$$P(F) = P(KKKKK) = 1.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}_{coroa} = C_{5,5}.\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = C_{5,5}.\left(\frac{1}{2}\right)^{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \Longrightarrow P(F) = \frac{1}{32}$$

6) Vamos refazer alguns itens do problema 5 diretamente usando a probabilidade binomial, cujas propriedades encontram-se expostas na página 38. Vamos usar p = probabilidade de sair cara(sucesso) e q = probabilidade de sair coroa (fracasso).

a) Duas caras e três coroas.

b) Uma cara e quatro coroas.

Solução: a) Duas caras e três coroas.

$$P(duas\ caras) = C_{5,2}.p^2.q^3 = C_{5,2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{10}{32}$$

b) Uma cara e quatro coroas.

$$P(uma\ cara) = C_{5,1}.p^1.q^4 = C_{5,1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{5}{32}$$

Para finalizar este capítulo, resolveremos um problema clássico do cálculo de probabilidade dos *três modos* expostos até agora com o propósito de estabelecer as ligações entre várias abordagens feitas, no ensino médio, como se fossem *tópicos independentes*.

7) Um casal deseja ter três filhos. Qual a probabilidade de que sejam dois meninos e uma menina?

Quando este problema é inicialmente proposto no ensino de probabilidade, o aluno verifica todas as possibilidades de nascimento de dois meninos e uma menina e calcula a probabilidade deste evento utilizando a definição Laplaciana que foi introduzida.

Solução: $S = \{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\}$

Logo $P(dois\ meninos\ e\ uma\ menina) = P(HHM) + P(HMH) + P(MHH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Depois de alguns dias, o aluno é apresentado à Probabilidade Condicional, e daí surge o fabuloso Teorema 2. Então, o mesmo problema pode ser resolvido assim:

Buscamos dois meninos e uma menina, o que pode ocorrer de três modos correspondendo a $P_3^2 = C_{3,2} = 3$. Segue que a probabilidade deste evento é: $P(dois\ meninos\ e\ uma\ menina) = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, já que a probabilidade de nascer um menino é igual à probabilidade de nascer uma menina e igual a $\frac{1}{2}$.

Decorridos mais alguns dias, o estudante é apresentado à Distribuição Binomial de Probabilidades e o mesmo problema pode ser resolvido assim:

Como o sexo do primeiro filho não interfere no sexo do segundo e este não interfere no sexo do terceiro filho, estes nascimentos são eventos independentes e se enquadra como um evento que só tem duas possibilidades de ocorrência: Menino (sucesso) e menina (fracasso), por exemplo. Fazendo $p = P(menino) = \frac{1}{2}$ e $p = P(menina) = \frac{1}{2}$, para calcularmos a probabilidade desejada usando o método binomial temos:

$$P(dois\ meninos) = C_{3,2}.p^2.q^1 = C_{3,2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

3.2 Considerações sobre os problemas Resolvidos

Uma distinção importante na aplicação do Teorema da Multiplicação de Probabilidades é se os eventos do problema em questão são ou não eventos independentes, conceito que nem sempre é claro para o aluno. No problema 1 fica exemplificado um caso em que pelo fato dos eventos não serem independentes não temos uma Distribuição Binomial.

A Probabilidade Binomial tem as seguintes particularidades: (baseado em [16], p. 77)

- Determina a probabilidade de experimentos aleatórios realizados **k** vezes, sob as mesmas condições com dois resultados possíveis e mutuamente exclusivos (cara ou coroa; macho ou fêmea; defeituoso ou não defeituoso, etc.);

- Designando por *(p)* a probabilidade de sucesso que queremos determinar e por $(q = 1 - p)$ a probabilidade de fracasso, estes valores permanecem constantes de experimento para experimento;

- É uma função que nos permite calcular em k processos a chance de ocorrerem k_1 sucessos e é dada por:
$$P(k_1) = C_{k,k_1}.p^{k_1}.q^{k-k_1}$$

- Cada uma das realizações dos experimentos é independente das restantes;

Problema 1:

Ilustrando o problema com o Diagrama em Árvore:

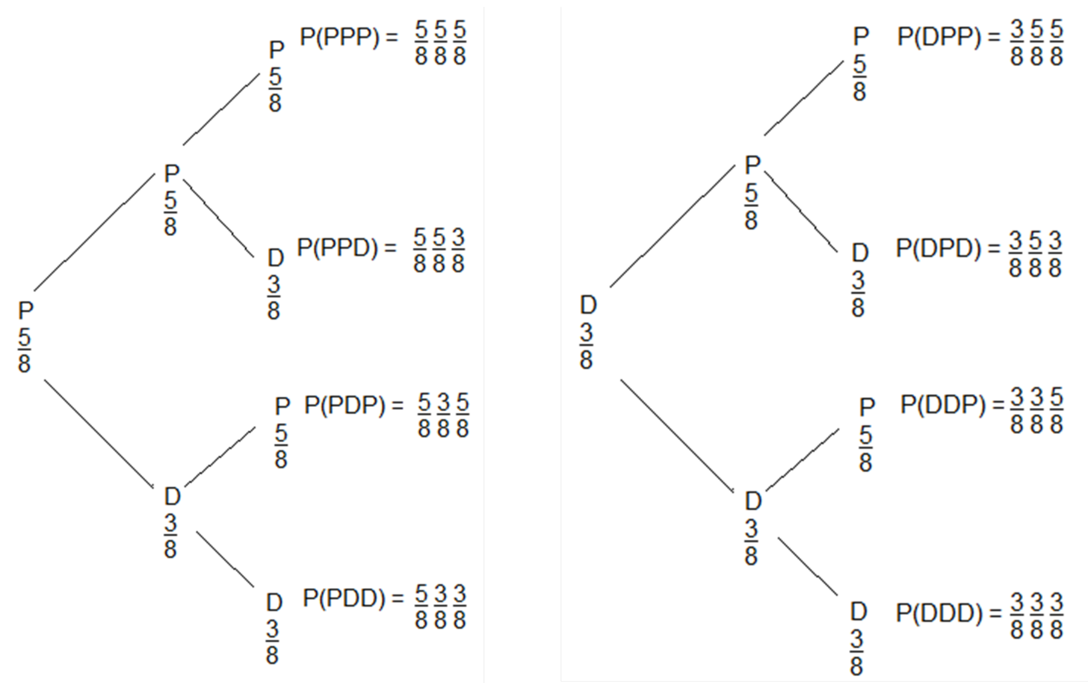

Figura 5: 2º Diagrama em árvore

Vemos que todas as possibilidades de ocorrências dos eventos nos dão:

$$P(S) = \underbrace{P(PPP)}_{P(E_1)} + \underbrace{P(PDD) + P(DPD) + P(DDP)}_{P(E_2)} + \underbrace{P(PPD) + P(PDP) + P(DPP)}_{P(E_3)} +$$

$$+\underbrace{P(DDD)}_{P(E_4)} = \frac{5}{28} + 3.\frac{5}{56} + \frac{1}{56} = \frac{10+15+30+1}{56} = \frac{56}{56} = 1$$

Observe que, escrevendo $C_{n,p} = \binom{n}{p}$ podemos reescrever $P(S)$:

$$P(S) = \binom{3}{0}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}.\frac{3}{6} + \binom{3}{1}.\frac{5}{8}.\frac{3}{7}.\frac{2}{6} + \binom{3}{2}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}.\frac{3}{6} + \binom{3}{3}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}.\frac{1}{6} = 1$$

Os números binomiais acima são os números da terceira linha do Triângulo de Pascal, porém esta não é ainda a chamada Distribuição Binomial, *pois estes eventos não são independentes, pois não há reposição das lâmpadas na caixa*, apesar de serem eventos chamados de sucesso e fracasso (a lâmpada ou é perfeita ou é defeituosa).

Os problemas 2 e 3, continuam ilustrando questões envolvendo eventos dependentes e suas resoluções utilizando o Teorema 4. O problema 3 foi resolvido pelo autor utilizando Análise Combinatória, seguindo a definição Laplaciana de probabilidade.

O problema 4 mostra eventos independentes, mas que não representam situações de sucesso ou fracasso e portanto, suas probabilidades não podem ser calculadas utilizando a Probabilidade Binomial. Este problema foi resolvido pelos autores utilizando a Análise Combinatória em [15], p.180, segundo o Teorema de Laplace.

O problema 5 tem como objetivo ilustrar eventos independentes e sua Distribuição Binomial:

Observe que:

$$1 = P(S) = P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+P(E)+P(F) = \frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32} = \frac{32}{32} =$$

$$= \binom{5}{5}.\left(\frac{1}{2}\right)^5.\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \binom{5}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^4.\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{5}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 +$$

$$+\binom{5}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^1.\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(\frac{1}{2}\right)^5 = [P(cara) + P(coroa)]^5$$

isto é, temos um desenvolvimento binomial que nos fornece a probabilidade do espaço amostral. Cada uma de suas parcelas determina a probabilidade de um dos elementos que compõe o espaço amostral.

Logo, podemos reescrever para finalizar o problema 5: $1 = P(S) = (p+q)^5$.

O problema 6 tem o intuito de mostrar uma aplicação direta da Probabilidade Binomial, fazendo uma ligação entre o Teorema da multiplicação de Probabilidades (Teorema 2) e o Teorema 4.

O problema 7 tem o objetivo mostrar a resolução de uma questão clássica no estudo de probabilidade estabelecendo as conexões de tópicos abordados sobre o assunto. Estes cálculos são desenvolvidos ao longo do estudo de probabilidade como se fossem problemas diferentes, quando , na verdade, são modos diferentes de resolver um mesmo problema. A primeira resolução utilizou a definição Laplaciana de probabilidade. A segunda resolução teve como respaldo o Teorema da multiplicação de Probabilidades **(Teorema 2)** e a terceira utilizou-se da Distribuição Binomial de Bernoulli.

3.3 Atividades Propostas

Atividade 1

Uma caixa contém cinco lâmpadas perfeitas (P) e três defeituosas (D).

a) Retirando-se uma lâmpada ao acaso, qual é a probabilidade desta lâmpada ser perfeita? E de ser defeituosa?

b) Sorteando-se simultaneamente três lâmpadas desta caixa, calcule a probabilidade de obtermos uma lâmpada perfeita e duas lâmpadas defeituosas. (Use a definição de probabilidade segundo Laplace e faça as contagens utilizando Análise Combinatória).

c) Retirando-se sucessivamente e sem reposição três lâmpadas desta caixa, qual a probabilidade de obtermos uma lâmpada perfeita e duas lâmpadas defeituosas? (Use o Teorema de Multiplicação de Probabilidades).

d) A retirada de cada uma das três lâmpadas sucessivamente e sem reposição são eventos dependentes ou independentes?

e) E se houver reposição?

f) Determine a probabilidade de obtermos uma lâmpada perfeita e duas lâmpadas defeituosas se fizermos retiradas sucessivas e com reposição.

g) Utilizando o Teorema 2 (Teorema da Multiplicação de Probabilidades), determine $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4)$, onde:

$P(E_1) =$ *P(todas perfeitas)*

$P(E_2) =$ *P(uma lâmpada perfeita e duas defeituosas)*

$P(E_3) = P(\textit{duas lâmpadas perfeitas e uma defeituosa})$

$P(E_4) = P(\textit{todas defeituosas})$

h) Observando o desenvolvimento do exercício proposto no item g, podemos afirmar que se trata de uma distribuição binomial? Por quê?

Atividade 2

Considere o lançamento de uma moeda e observe o resultado da face voltada para cima.

a) Qual a probabilidade de obtermos cara? E de obtermos coroa?

b) Ao lançarmos simultaneamente cinco moedas, qual a probabilidade de obtermos três caras e duas coroas? (Use a definição de probabilidade segundo Laplace e faça as contagens utilizando Análise Combinatória).

c) Ao lançarmos sucessivamente cinco moedas e anotarmos o resultado, qual a probabilidade de obtermos três caras e duas coroas? (Use o Teorema de Multiplicação de Probabilidades)

d) No item c o resultado do lançamento da primeira moeda interfere no resultado da segunda? E no resultados das moedas subsequentes? Como podemos chamar este evento?

e) Utilizando o teorema 2 determine $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+P(E)+P(F)$, onde:

A = {Todas caras}

B = {Quatro caras e uma coroa}

C = {Três caras e duas coroas}

D = {Duas caras e três coroas}

E = {Uma cara e quatro coroas}

F = {Todas coroas}

f) Observando o desenvolvimento do exercício proposto no item e, podemos afirmar que se trata de uma distribuição binomial? Por quê?

Atividade 3

Compare as resoluções dos itens b e c nos dois exercícios propostos anteriormente. Você obteve os mesmos resultados se resolveu corretamente. Qual a conclusão que se pode inferir deste fato?

Atividade 4

Após resolver estas duas questões, você saberia distinguir eventos dependentes de eventos independentes? Escreva com suas palavras como distinguir eventos dependentes de eventos independentes.

Atividade 5

Com relação à Distribuição Binomial, você saberia quando usá-la para resolver um problema? Escreva com suas palavras quando podemos usá-la.

Para a resolução das atividades propostas, sugere-se como metodologia um Estudo Dirigido em grupo com posterior discussão das conclusões dos alunos para diferenciar claramente os conceitos de eventos dependentes e eventos independentes, assim como, ilustrar a relevância do Teorema 2 para concluir o resultado do Teorema 4. Além disso, evidenciar o reconhecimento do uso da Distribuição Binomial. Entretanto, o mais importante é que o aluno perceba os vários modos de resolver um mesmo problema.

Para finalizar, uma citação em [2], apud [8]:

> (...) É importante que o aluno mobilize diferentes concepções de probabilidade no estudo das situações- problema pois elas, além de não serem exclusivas, têm adequação determinada pela natureza do problema (...).

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi mostrar o uso do Teorema da Multiplicação das Probabilidades (Teorema 2), como facilitador e integrador das diversas formas de tratamento do assunto e suas conexões. Acreditamos que, com a demonstração do Teorema 4 e suas aplicações, exemplificadas com as resoluções de questões clássicas do Ensino Médio, estamos contribuindo para facilitar e desmistificar o ensino deste assunto considerado difícil . Ao longo dos anos e, com a nossa experiência, temos utilizado este resultado e a integração das diversas formas de resolver um mesmo problema, com sucesso.

No decorrer do curso de probabilidade no Ensino Médio, um mesmo problema é resolvido de diferentes modos, mas isso não fica claro para os alunos. Com a nossa experiência de ensino, tivemos oportunidade de perceber estas dificuldades e tentar saná-las. Desse modo, como fechamento do curso, propomos atividades que, na etapa final da construção de seu conhecimento, permitam aos alunos estabelecerem as ligações entre as abordagens feitas, além de discutirem e consolidarem alguns conceitos tais como eventos independentes e distribuição binomial.

O estudo do cálculo de probabilidades acontece na maioria das escolas de Ensino Médio, após o estudo da Análise Combinatória. Dois assuntos tidos como difíceis pelos alunos. Na nossa proposta do ensino de Probabilidade, a Análise Combinatória passa a ter um papel menor no cálculo da probabilidade de eventos, com a substituição proposta e demonstrada no Teorema 4.

O aprendizado do cálculo de probabilidades é de grande importância para os alunos devido à sua larga utilização na Estatística, na Física, nas Ciências Sociais etc. e no exercício de sua cidadania. De acordo com [9], p.136:

> (...) O ponto de vista social nos leva, finalmente, a reforçar a necessidade de um ensino do cálculo de Probabilidades (...) que possa ser mais um instrumento de leitura da realidade na qual estamos inseridos e a qual podemos acompanhar pelos noticiários, repletos de dados estatísticos. (...)

Na maioria dos livros didáticos de Ensino Médio a abordagem da Teoria das Probabilidades segue o mesmo roteiro: a definição Laplaciana, a Probabilidade Condicional e como consequência, o Teorema da Multiplicação das Probabilidades (Teorema 2), finalizando com a Distribuição Binomial.

Seguindo o roteiro desses livros didáticos, constatamos em nossa prática, que o aluno não percebe a ligação entre essas abordagens. Não sabe distinguir quando usá-las na resolução de uma situação-problema proposta. Na verdade, não existe uma única forma de resolver a maioria das questões clássicas no ensino desse assunto.

Com a demonstração do Teorema 4, enunciamos e resolvemos algumas questões com a finalidade de mostrar a simplificação dos cálculos das probabilidades pedidas com o uso desse Teorema. Temos calcado o desenvolvimento desta proposta de ensino em nossa experiência de sala de aula em que fechamos o capítulo que trata do cálculo de probabilidades com atividades semelhantes às propostas neste trabalho. Nas avaliações subsequentes percebemos que as situações-problema apresentadas têm diferentes formas de resolução pelos alunos com predominância da utilização do Teorema 4.

Propusemos também algumas atividades que propiciem aos alunos a discussão desses questionamentos e favoreçam um debate em sala de aula para, após as intervenções necessárias do professor, dirimir suas dúvidas.

Por tudo exposto, acreditamos que este trabalho contribuirá para uma compreensão mais ampla e segura desse assunto e sua utilização pelos discentes e que nossos colegas possam compartilhar dessa proposta com êxito.

Referências

[1] *A Probabilidade de Andrei Kolmogorov.* Disponível em: http://suite101.com/article/the-probability-of-andrey-kolmogorov-a359073. Último acesso: 18/01/2013.

[2] BAYER, Arno; BITTENCOURT, Hélio; ROCHA, Josy; ECHEVESTE, Simone. *Probabilidade na Escola.* III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005, Canoas.

[3] BERNOULLI, Jacobi. *L'Ars Conjectandi.* Texto original em latim, com tradução francesa de Norbert Meusnier. Publicação de Irem de Rouen, 1987. P.42 e p. 66.

[4] BERNSTEIN, Peter L. *Desafio aos Deuses: A fascinante História do Risco.* 1919, p.12. Traduzido por Ivo Karytawski. Disponível em: books.google.com/books?isbn=8535225587. Último acesso em: 21/01/13.

[5] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. 2ª Edição, São Paulo, 1996.

[6] *Breve história dos jogos de azar.* Disponível em: http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=31683. Último acesso em 21/01/13.

[7] CARLOS, Elaine Sampaio de Souza. *O Uso do Software R no Ensino de Probabilidade.* Monografia de conclusão de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Vale do Acaraú, Sobral, 2009.

[8] CARVALHO, D. L.; LOPES, Celi; OLIVEIRA, P. C. *Concepções e Atitudes em Relação à Estatística. Experiências e Perspectivas do Ensino de Estatística* ? Desafios para o século XXI. Florianópolis, 1999.

[9] COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. *Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista - Estudo Epistemológico e Didático*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

[10] CRISAFULI, Erick de Paula. A Contribuição de Frederico Pimentel Gomes para o Desenvolvimento da Estatística Experimental no Brasil. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

[11] *Educação Básica*, 2006, p. 81. Disponível em: www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/bookvolume02internet.pdf. Último acesso em: 20/01/13.

[12] *Jogos de Azar*. Disponível em: pt.wikipedia.org/wiki/Jogodeazar. Último acesso em 21/01/13.

[13] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. *A Matemática do Ensino Médio Volume 2*. 6ª Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[14] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César de Oliveira. *A Matemática do Ensino Médio Volume 4*. Rio de Janeiro, SBM, 2007.

[15] LAPLACE, P.S. *Ensayo Filosófico Sobre las Probabilidades*. Traduzido por Alfredo B. Bésio e José Banfi. Buenos Aires, Espasa-Calpe Argentina. 1947.

[16] MEYER, Paul L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística* Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho, 2ª Edição, Rio de Janeiro, 1983.

[17] MLODINOW, Leonard. O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro, Jorge Zahar, 2009.

[18] *O'CONNOR; ROBERTSON, E F. Andrey Nikolaevich Kolmogorov*. Janeiro, 1999. Disponível em: http://wwwhistory.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Kolmogorov.html. Último acesso em: 18/01/2013.

[19] *Orientações Curriculares Para O Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Básica, 2006, p.81. Disponível em portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/bookvolume02internet.pdf.. Último acesso : 20/01/13.

[20] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática: conceitos, linguagem e aplicações*. 1ª Edição, São Paulo, 2002.

[21] SILVA, Ismael de Araújo. *Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

[22] SPIEGEL, Murray R. *Probabilidade e Estatística*. Tradução de Alfredo Alves de Farias, São Paulo, Pearson Education do Brasil, 1978.

[23] TOMAZ, Priscilla Steffani Santos. *Girolamo Cardano: Pai da Teoria da Probabilidade ou Um bom apostador de Jogos de Azar?*. Anais do IX Seminário Nacional da História da Matemática. Sociedade Brasileira da História da Mate-

mática. Disponível em: http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/ Comunica-coes/1TomazPSSGerolamoCardano.pdf. Último acesso em: 21/01/13.