Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sobre Geometrias Não-Euclidianas

Carlos Augusto do Nascimento Vieira

Juazeiro do Norte

2018

Carlos Augusto do Nascimento Vieira

Sobre Geometrias Não-Euclidianas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Profª. Dra. Érica Boizan Batista

Juazeiro do Norte

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

V713s Vieira, Carlos Augusto do Nascimento.
Sobre Geometrias Não-Euclidianas/Carlos Augusto do Nascimento Vieira. – 2018.
64 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profª. Dra. Érica Boizan Batista

1. Geometria não-euclidiana. 2. Quinto postulado de Euclides. 3. Softwares educacionais. I. Título.

. CDD 510.07

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sobre Geometrias Não-Euclidianas

Carlos Augusto do Nascimento Vieira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 28 de setembro de 2018.

Banca Examinadora

Érica B. Batista

Profa. Dra. Érica Boizan Batista - UFCA

Orientadora

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade- UFCA

Samara Costa Lima

Prof. Dra. Samara Costa Lima – UFOB

Dedico este trabalho ao meu avô José Vieira Sobrinho (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pela oportunidade que a mim foi dada de viver e aproveitar cada momento para crescer enquanto ser humano.

À minha família por estar sempre do meu lado e suportar meus momentos de ausência e solidão.

À minha esposa Leidiane por todo amor demonstrado e principalmente pela cumplicidade.

À minha filha, razão e alegria da minha vida.

À todos os colegas que fizeram parte dessa trajetória em especial a Luiz Carlos, Mário, Monik e Van Eudes que dividiram momentos inesquecíveis durante as várias viagens.

À Professora e Coordenadora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa pela pessoa simples, compreensível e de coração admirável.

À minha orientadora Profa. Dra. Érica Boizan Batista pela paciência, disposição e contribuição para a construção deste trabalho.

À todos os professores do PROFMAT que foram essenciais para a minha formação.

À EEEP Francisca de Albuquerque Moura, em nome da Direção e de todos os meus colegas de trabalho que sempre me apoiaram na realização deste objetivo.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade de cursar o PROFMAT.

À CAPES pelo suporte financeiro.

"*Nenhuma Geometria é mais correta do que qualquer outra - apenas é mais conveniente*".

Henri Poincaré

Resumo

Neste trabalho apresentamos um texto introdutório das geometrias não-euclidianas com foco no estudo das diferenças com a geometria euclidiana, abordando todo o desenvolvimento das mesma e seus principais expoentes. Euclides de Alexandria é considerado o pai da geometria, graças a sua habilidade em escrever e expor os conceitos geométricos, sendo o primeiro a usar o rigor nas demonstrações matemáticas e com a genialidade de fazê-la de forma singular. Abrimos espaço para discorrer sobre o surgimento das geometrias não euclidianas com o estudo do quinto postulado de Euclides, o único dos cinco que não era claro acerca de sua necessidade. Em seguida, mostramos dois softwares educacionais de geometria dinâmica, o Cinderella e o Geogebra, utilizados para facilitar a compreensão acerca dos modelos que usamos nas geometria não euclidiana. Por fim, propomos atividades para serem exploradas por professores e alunos que permitirão a apropriação dos conceitos dessas geometrias para muitos desconhecidas.

Palavras-chave

Geometria não-euclidiana, Quinto postulado de Euclides, Softwares educacionais.

Abstract

In this work we present an introductory text of the non-Euclidean geometries focusing on the study of the differences with Euclidean geometry, approaching all the development of the same and its main exponents. Euclid of Alexandria is considered the father of geometry, thanks to his ability to write and expose geometric concepts, being the first to use rigor in mathematical demonstrations and with the genius of doing it in a unique way. We opened space to discuss the emergence of non-Euclidean geometries with the study of Euclid's fifth postulate, the only one of the five that was not clear about its need. Next, we show two educational software of dynamic geometry, Cinderella and Geogebra, used to facilitate the understanding about the models that we use in non-Euclidean geometry. Finally, we propose activities to be explored by teachers and students that will allow the appropriation of the concepts of these geometries to many unknowns.

Keywords

Non-Euclidean geometry, Fifth postulate of Euclid, Educational software.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Nas civilizações antigas, especialmente no Egito, havia a necessidade de demarcar divisas de terras e áreas de plantio, principalmente porque as cheias dos rios apagavam todas as demarcações existentes, obrigando os agricultores a refazê-las após o período de cheia. Esse exemplo prático do conhecimento empregado no cotidiano destes e de outros povos é chamado de *Geometria*, cujo o termo etimológico é *medição de terras*.

Os gregos aprofundaram o estudo da geometria e foram os responsáveis por difundir esse conhecimento. Euclides de Alexandria foi o primeiro a apresentar de forma sistemática a Matemática a partir de axiomas ou postulados, ou seja, a partir de afirmações aceitas como verdadeiras e que não necessitam de demonstração. A Geometria de Euclides tem como base cinco postulados e recebe o nome, em sua homenagem, de geometria Euclidiana.

A geometria não euclidiana surge no século XIX com a busca de alguns matemáticos em demonstrar que o 5º postulado de Euclides, o postulado das paralelas, é consequência dos outros quatro. Segundo Rocha ([6], pág.1), o quinto postulado é o ponto nodal por onde se desenvolveu a primeira geometria não-euclidiana, a Geometria Hiperbólica.

Nomes como Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai, Nicolai Ivanovich Lobachevisk e Georg Bernhard Rieman desenvolveram trabalhos que trouxeram à luz da sociedade essa nova geometria. Diferente dos demais, que consideraram duas possibilidades: por um ponto não contido em uma reta dada, passa mais de uma, ou nenhuma reta paralela à reta dada, Bernhard Rieman descartou a infinitude da reta e considerou apenas que a reta é ilimitada. De acordo com Andrade ([1], 2013, páginas 8, 9),

> "... a busca pela comprovação do modelo absoluto para o espaço passou a ser uma obsessão. Muitas pseudoprovas do Teorema das paralelas foram publicadas por candidatos ao Panteão."

Atualmente os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) estabelecem que o ensino de geometria possibilite ao aluno usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. Nesse contexto, o conhecimento sobre a geometria não-euclidiana tem um papel primordial por ser um retrato da realidade, apresentando modelos que descrevem melhor o mundo ou a realidade em estudo.

O fato de não ser explorada pelos professores, principalmente os do ensino médio, pode estar relacionado à falta de familiaridade do professor com o assunto e também a falta de materiais didáticos voltados ao tema em questão.

Em [9] Martos realizou uma investigação com base em uma proposta que possibilitou aos alunos, em grupos, explorarem e realizarem comparações, em coexistência, entre os conceitos de Geometria euclidiana e conceitos de Geometria não-euclidiana. Segundo a autora, em vários momentos da pesquisa os alunos identificaram as diferenças entre os conceitos geométricos da Geometria não-euclidiana abordada, a esférica, e a Geometria euclidiana do plano. Isso fez com que os alunos verbalizassem as relações existentes entre os conceitos das geometrias abordadas. A pesquisadora destaca que na realização dos trabalhos "apareceram muitos termos em evidência, entre eles interação dos grupos, dialogicidade, significado na aprendizagem e inovação."

A proposta do presente trabalho é produzir um texto de apresentação das Geometrias não-euclidianas (Elíptica e Hiperbólica) que permita a professores e alunos um primeiro contato com estas, além de trazer conceitos básicos da Geometria não-euclidiana que possam ser comparados com os da Geometria euclidiana. O trabalho está dividido em oito capítulos, sendo o primeiro deles esta introdução.

No segundo capítulo discorremos sobre Euclides de Alexandria, considerado o pai da geometria graças a sua habilidade em escrever e compilar textos sobre Geometria, e sobre contexto histórico que o cerca através de poucos relatos, muitos dos quais foram elaborados pelos escritores gregos Proclo e Pappus de Alexandria.

No terceiro capítulo abrimos espaço para apresentar os conceitos básicos da Geometria Neutra e um pouco da história do grande matemático Alemão do século XIV David Hilbert.

O quarto capítulo trata do surgimento das Geometrias não-euclidianas com a busca de grandes matemáticos em demonstrar que o quinto postulado de Euclides era na verdade um teorema e também apresenta alguns substitutos, ou seja, postulados equivalentes para o quinto postulado com suas respectivas demonstrações.

No quinto capítulo apresentamos um pouco da Geometria elíptica ou Geometria Riemanniana (nome dado em homenagem ao matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 à 1866), com foco na Geometria esférica, os seus conceitos e as semelhanças e diferenças com a Geometria euclidiana.

No sexto capítulo abordamos outra Geometria não-euclidiana, a Geometria hiperbólica. Tratamos do contexto histórico, os responsáveis por desenvolvê-la, principais conceitos e comparações com a Geometria euclidiana. Podemos citar como exemplo que na Geometria hiperbólica os quatro primeiros postulados de Euclides são válidos e o quinto é substituído pelo seguinte: por um ponto **P** fora de uma reta **r** dada passa mais de uma reta paralela à reta **r**.

O capítulo sete traz uma síntese dos softwares de Geometria dinâmica *Cinderella* e *Geogebra* já que os mesmos podem ser utilizados para o estudo das Geometrias euclidianas e não-euclidianas.

No oitavo e último capítulo colocamos algumas atividades como sugestão para o professor que queira possibilitar aos seus alunos uma conjectura a respeito das diferenças e semelhanças das Geometrias apresentadas neste trabalho, fazendo o uso dos softwares apresentados no capítulo sete.

Esperamos que essa divisão do trabalho contribua para que o leitor consiga assimilar os tópicos abordados e, por se tratar de uma leitura básica, possa estimulá-lo a aprofundar os estudos sobre as Geometrias não-euclidianas.

2 GEOMETRIA EUCLIDIANA: UMA BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA

2.1 Euclides de Alexandria

Com a morte de Alexandre, o Grande, os seus familiares disputaram com os generais do exército grego o controle do império. Coube ao general Ptolomeu I Sóter (367 - 283) assumir em 306 a.C. o comando da parte Egípcia. O novo governante concentrou seus esforços no desenvolvimento econômico e cultural, utilizando modelos inovadores de administração. A capital de sua dinastia era a cidade de Alexandria, fundada por Alexandre, que foi a escolhida para ser o centro cultural do novo império. O marco desse novo tempo foi a criação de uma biblioteca e um museu. O objetivo era reunir os grandes pensadores (poetas, sábios e filósofos) em um mesmo local, retirando de Atenas a hegemonia cultural da época e desenvolvendo estudos sobre várias áreas. Segundo Eves:

> "Supostamente era muito bem provida de recursos e seu projeto agradável e bem elaborado continha salas de aula, laboratórios, jardins, bibliotecas bem aparelhadas e habitações"([8], 2011, página 167).

Alexandre convidou os melhores em cada área e entre estes estava o matemático Euclides (330 a.C. a 270 a.C.), provavelmente um grego. Não se sabe muito sobre a sua vida. Seu sobrenome é atribuído a cidade de Alexandria e o pouco que se sabe sobre Euclides foi extraído de textos elaborados muitos séculos após sua morte, principalmente os escritos por Proclo e Pappus de Alexandria. O primeiro se refere ao matemático como o escritor da clássica obra *Os Elementos*, onde ele reuniu em um mesmo trabalho vários textos de geometria. Estudou com os discípulos de Platão e pode ter sido aluno da academia.

Conhecido como um dos maiores estudiosos do campo da geometria na Grécia antiga, inclusive é dado a ele o título de pai da geometria, era um excelente professor e escritor, pois tinha a capacidade de explanar os assuntos que lecionava com muita facilidade e transcrever textos com clareza e objetividade como poucos de sua época.

2.2 Os Elementos de Euclides

O seu livro mais famoso é *Os Elementos*, um livro-texto dividido em treze volumes: cinco discorrem a respeito da geometria plana; três focam nos números; um sobre a teoria das proporções; um destaca os incomensuráveis; e os três finais abordam a geometria no espaço. Euclides foi o primeiro a desenvolver a teoria baseada em axiomas ou postulados, ou seja, baseada em verdades absolutas. De acordo com Carl Boyer ([4], 1996, página 69),

> "Euclides e *Os Elementos* são frequentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas".

O livro ganhou várias versões. A primeira versão impressa foi em Veneza no ano 1482, com um número aproximado de mil edições tiradas. Essa obra dominou por mais de dois mil anos o ensino da geometria.

> "Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico"([8], 2011, página 167).

De importância imensurável para a ciência e principalmente para a matemática, *Os Elementos* foi o responsável pelo surgimento da *Geometria Euclidiana*, em homenagem àquele que o escreveu de modo tão simples e brilhante.

2.3 Os postulados de Euclides

Postulados são afirmações admitidos como verdadeiras sem a necessidade de demonstrações. O livro *Os Elementos* de Euclides está estruturado sobre cinco postulados e cinco noções comuns. Apresentamos abaixo o "arcabouço" de *Os Elementos* a partir dessas noções comuns e postulados.

I Noções comuns

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são também iguais.

2. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais
4. Coisas que coincidem uma com as outras, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

II Postulados

postulado 1. *Dados um ponto P e um ponto Q, diferente de P, existe apenas uma reta que incide por estes.*

postulado 2. *Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.*

postulado 3. *Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.*

postulado 4. *Todos os ângulos retos são iguais.*

postulado 5. *Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.*

Dos postulados acima, o quinto é o único que não fica claro acerca de sua validade, requerendo uma análise mais profunda, ou seja, uma explicação. Segundo Carmo:

> "É conveniente observar que Euclides usava em seus argumentos, além dos postulados mencionados, outros fatos que eram considerados na época como inteiramente óbvios e que Euclides não se preocupou em explicar. Em verdade, uma tal preocupação no tempo de Euclides não seria natural. A concepção filosófica da época, influenciada principalmente pelas ideias de Platão, considerava as entidades matemáticas como possuindo uma existência "*a priori*"e fornecendo um modelo exato para o mundo real."([5], 1987, página 27).

3 GEOMETRIA NEUTRA OU ABSOLUTA

A partir de hipótese sobre o quinto postulado de Euclides, podemos estabelecer qual a geometria em questão. Este capítulo foi baseado principalmente na referência [1].

O alemão David Hilbert (1862 - 1943), professor da Universidade de Göttingen, é considerado um dos maiores matemáticos de sua época. Escreveu diversos trabalhos nos mais variados assuntos e campos. Na geometria, ficou conhecido por elaborar um sistema axiomático capaz de abranger todas as geometrias clássicas. Isso foi possível dividindo seus axiomas em grupos e fazendo pequenas alterações ou exclusões em seus axiomas. Hilbert utilizou de três termos primitivos: *ponto, reta* e *plano*; e três relações primitivas entre estes: *incidência, ordem* e *congruência.* De acordo com Andrade:

> "Geometria neutra é um corpo de resultados obtidos a partir dos axiomas de Hilbert que não lançam mão do postulado das paralelas. Portanto, são proposições válidas nas geometrias euclidianas e hiperbólicas"([1], 2013, página 27).

A simplicidade e intuitividade para escrevê-los é comparada àquela utilizada por Euclides em *Os Elementos.* Para obtermos a *Geometria Neutra* precisamos apenas retirar o quinto postulado de *Euclides.*

Vejamos a seguir os **Axiomas da Geometria Euclidiana Plana** propostos por Hilbert.

I. Termos Indefinidos

1. Ponto, reta, plano, pertence, está entre e congruência.

II. Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

Explicitamos aqui os conceitos primitivos de um ponto está ou não em uma reta. Usaremos para denotar pontos letras latinas maiúscula A, B, C, D e para retas letras latinas minúsculas r, s, t. Assim, podemos escrever por exemplo que "o ponto A está ou não na reta r"ou ainda "a reta r contém o ponto A". Essa última notação se dá pelo fato da reta ser um conjunto formado por pontos. Segundo Carvalho da Rocha.

"Já nesta altura poderíamos, como Euclides, definir retas paralelas como retas que não tem ponto em comum (i.e. que está em ambas as retas). Contudo, como a própria história da evolução da geometria não-euclidiana testemunha, isto pode nos levar a complicações desnecessárias de modo que é melhor e mais proveitoso deixar para discutir o problema do paralelismo quando tivermos ao nosso dispor uma teoria mais rica pelo emprego das outras noções primitivas"([6], 1987, página 9).

III. Axiomas de Ordem

1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.

2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta $\overrightarrow{AC}$ tal que B está entre A e C.

3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento $\overline{AB}$, ela também intercepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.

Apoiados pelos dois axiomas acima podemos definir outros conceitos importantes que nos ajudarão a compreender melhor a nossa exposição.

1. **Reta:** conjunto de pontos que formam uma linha infinita denotado por $\overleftrightarrow{AB}$ ou letras latinas minúsculas r, s por exemplo.

2. **Segmento:** Conjunto de dois pontos distintos A e B denotado por $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$.

3. **Semi-reta:** é uma reta que tem um ponto de início mas não tem fim. Apresenta somente uma direção e sentido, partindo de um ponto de origem denotado por $\overrightarrow{AB}$.

4. **Ângulo:** Conjunto de duas semi-retas não-colineares de mesma origem e denotado por $\angle ABC$.

5. **Triângulo:** Conjunto de três pontos não-colineares com vértices nos pontos A, B e C denotado por $\triangle ABC$.

6. **Congruência:** Coincidência ou correspondência entre ângulos e segmentos denotada por $\cong$.

IV. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos numa reta r e A' é um outro ponto de uma reta r', não necessariamente distinta da anterior, então é possível encontrar um ponto B' em um dado lado da reta r' tal que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes.

2. Se um segmento $\overline{A'B'}$ e um outro segmento $\overline{A''B''}$ são congruentes a um mesmo segmento $\overline{AB}$ então os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta r, sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dois segmentos da mesma que, exceto por B, não tem pontos em comum. Além disso, sobre uma outra reta r', sejam $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B' não tem ponto em comum. Neste caso, se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

4. Se $\angle ABC$ é um ângulo e se $\overrightarrow{B'C'}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\overrightarrow{A'B'}$ em cada lado de $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ as congruências $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ são válidas, então as congruências $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ são satisfeitas.

Munido do axioma de Congruência podemos definir a relação de congruência entre triângulos como uma bijeção entre seus vértices de forma que os lados e ângulos correspondentes são congruentes. Escreveremos $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ para denotar que os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruências. Observemos que em geral $\triangle ABC$ não é congruente ao $\triangle CAB$.

V. Axiomas de Continuidade

1. Axioma de Arquimedes: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, então existe um número real n tal que n cópias de $\overline{CD}$ construídas contiguamente de A ao longo do raio $\overrightarrow{AB}$ passará além do ponto B.

2. Axioma da Completude da Reta (ou Axioma de Cantor): Se $\overline{A_nB_n}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto P pertencentes a todos os segmentos da coleção.

VI. Axioma das Paralelas

1. Em um ponto não pertencente a uma reta l incide apenas uma reta que não interseta a reta l.

As contribuições de Hilbert tiveram grande relevância para a geometria a tal ponto de ser comparado a Euclides. Influenciando de forma significativa o seu desenvolvimento, principalmente pelo estudo feito acerca da axiomática euclidiana que continham falhas ou eram incompletos, Hilbert escreveu um livro chamado de *Grundlagen der Geometrie* com uma axiomática rigorosa capaz de desenvolver os lados lógico-dedutivo da geometria euclidiana, e é considerado um dos maiores matemáticos do século XX. Para Boyer,

> "Os *Grundlagen* iniciavam com uma frase de Kant: "Todo conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com idéias", mas o desenvolvimento dado por Hilbert à geometria estabelecia uma visão do assunto decididamente antiKantiana. Dava ênfase a que não se deve assumir, para os termos não definidos na geometria, propriedades além das indicadas nos axiomas. O nível intuitivo-empírico das antigas concepções geométricas deve ser abandonado e pontos, retas e planos devem ser entendidos apenas como elementos de certos conjuntos dados".([4], 1996, página 424).

3.1 Critérios de congruência de triângulos LAL, ALA e LLL

Para demonstrarmos os resultados necessários para o desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas precisamos dos critérios de congruência entre triângulos. Estes serão importantes pois permitirão entrar nos conceitos da Geometria não-euclidiana e possibilitarão que as suas demonstrações possam ser claras e de fácil compreensão. Segundo Andrade:

> "O critério de congruência para triângulos LAL (lado-ângulo-lado) é a porta de entrada da teoria"([1], 2013, página 29).

Considere a proposição a seguir como sendo a referência para demonstrarmos os outros casos de congruência entre triângulos, pois as outras demonstrações seguem o mesmo raciocínio desta.

Proposição 1. *Se as congruências* $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ *e* $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ *valem para os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$, *então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Usaremos a figuras 1 para reforçar o nosso argumento.

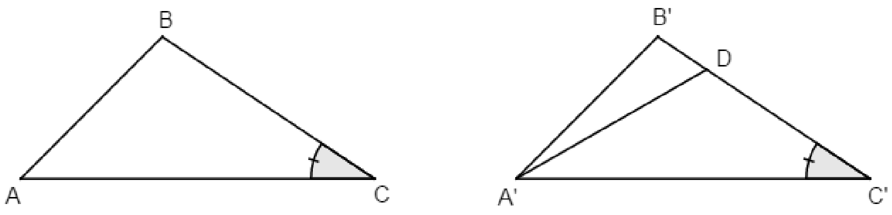


Figura 1: Triângulos Congruentes

Sabemos, pelo 5º axioma de congruência, que as congruências $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ são válidas. Precisamos agora mostrar a congruência $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Faremos a prova por absurdo supondo que os segmentos não são congruentes.

Seja D um ponto do raio $\overrightarrow{C'B'}$ tal que $\overline{BC} \cong \overline{C'D}$. Observando os triângulos $\triangle ABC \cong \triangle A'C'D$ temos as congruências $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{C'D}$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'D$. O 5º axioma de congruência nos garante que $\angle BAC \cong \angle DA'C'$ e, por hipótese, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, contrariando o 4º axioma de congruência, pois temos dois raios partindo de A' para o lado $B'C'$ formando ângulos com $\overline{B'C'}$ congruentes a A. □

Vejamos as congruências ALA e LLL respectivamente.

Proposição 2. *Se para dois triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'C'D$ *as congruências* $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ *e* $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ *valem, então os triângulos são congruentes.*

Proposição 3. *Se para dois triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'C'D$ *as congruências* $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ *e* $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ *valem, então os triângulos são congruentes.*

O seguinte resultado é conhecido como Teorema do Triângulo Isósceles.

Teorema 1. *Se no triângulo* $\triangle ABC$ *vale a congruência* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, *então a congruência* $\angle BAC \cong \angle ABC$ *é satisfeita. Reciprocamente, se vale a congruência* $\angle BAC \cong \angle ABC$, *então* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Demonstração. Podemos usar as congruências entre triângulos $\triangle ABC$ com o triângulo $\triangle ABC$, ou seja, compará-lo com ele mesmo. Temos que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ e $\angle BAC \cong \angle BAC$, então, pelo critério de congruência LAL, $\angle BAC \cong \angle ABC$.

Para provarmos a recíproca do teorema usaremos o mesmo argumento. Como $\angle BAC \cong \angle ABC$, $\angle ABC \cong \angle BAC$ e $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, então pelo critério ALA, então $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

□

Apresentaremos dois teoremas, o teorema dos ângulos alternos internos e do ângulo externo, que nos ajudarão a compreender e desenvolver as Geometrias não-euclidianas.

Teorema 2. *Se duas retas são intersetadas por uma terceira reta de modo que os ângulos alternos internos são congruentes, então as duas retas não se intersetam.*

Demonstração. Sejam r e s duas retas intersetadas por uma reta t de modo que os ângulos alternos internos sejam congruentes. Suponha, por absurdo, que r e s se intersetam, por exemplo, no ponto A.

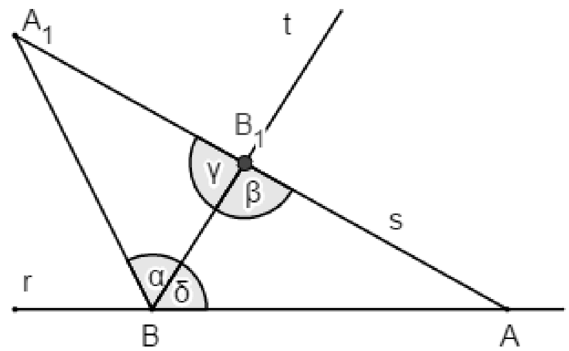


Figura 2: Interseção de Retas

Sejam B e B_1 os pontos de interseção da reta t com as retas r e s, respectivamente. Escolha um ponto A_1 pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $\overline{A_1B_1} \cong \overline{AB}$ e que A_1 esteja no lado oposto da reta t que contém A. Vamos assumir que $\angle ABB_1 \cong \angle A_1B_1B$.

Por esta construção, obtemos a congruência dos triângulos $\triangle ABB_1$ e $\triangle A_1B_1B$ pelo caso de congruência LAL. Portanto, vale a congruência dos ângulos $\angle AB_1B \cong \angle A_1BB_1$. Como os ângulos $\angle AB_1B$ e $\angle A_1B_1B$ são suplementares, o mesmo ocorre com os ângulos $\angle ABB_1$ e $\angle A_1BB_1$. Isso implica que A_1 pertence ao raio oposto de BA, ou seja, pertence à reta r. Como a interseção de r e s contém dois pontos distintos, quais sejam, A e A_1, pelo 1º axioma de incidência elas são iguais. Uma contradição. □

Por Andrade:

> "Na Geometria Neutra não podemos deduzir a recíproca do teorema acima, pois, como veremos, a recíproca é um substituto do 5º postulado da geometria Euclidiana."([1], 2013, página 41).

Teorema 3. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente a ele.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Escolha um ponto D colinear a AC. Mostraremos que o ângulo externo $\angle BCD$ é maior que o ângulo interno não adjacente $\angle ABC$. Suponhamos, por absurdo, que $\angle BCD \cong \angle ABC$. Pelo Teorema dos ângulos alternos internos, a reta $\overline{AB}$ não intersecta a reta $\overline{AC}$. Uma contradição.

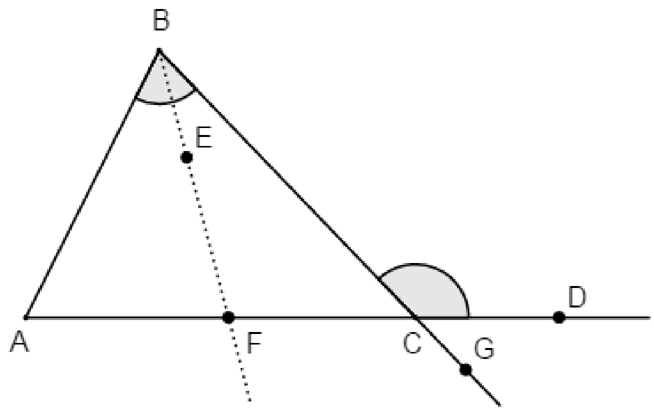


Figura 3: Triângulo ABC

Agora suponha, por absurdo, que $\angle BCD < \angle ABC$. Sendo assim, existe um E no interior do ângulo $\angle ABC$ tal que $\angle EBC \cong \angle BCD$. Novamente, pelo mesmo teorema, a reta $\overline{BE}$ não intersecta a reta $\overline{AC}$. □

4 O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO - EUCLIDIANAS

Por quase vinte séculos muitos matemáticos tentaram demonstrar o famoso quinto postulado de Euclides, ou postulado das paralelas, que diferente dos outros quatro não era facilmente aceito pela comunidade matemática como postulado e sim como teorema. Contestado desde sua primeira publicação, o que Euclides chamava de postulado poderia na verdade ser provado a partir dos anteriores? Para responder a esta pergunta apresentaremos os matemáticos responsáveis por aprofundar e desenvolver os estudos acerca da demonstração do quinto postulado de Euclides e produzir uma nova concepção de geometria.

O surgimento da geometria não-euclidiana ocorreu de forma impressionante. Segundo Boyer,

> "Na geometria não-euclidiana também encontramos um caso surpreendente de simultaneidade de descobertas, pois idéias semelhantes ocorreram, durante o primeiro terço do século dezenove a três homens, um alemão, um húngaro e um russo"([4], 1996, página 359).

As investigações feitas por vários matemáticos acerca da prova do quinto postulado de Euclides produziu diversos trabalhos e resultados muito importantes para a matemática. Com o objetivo de criar um embasamento teórico necessário para os próximos capítulos, apresentaremos alguns dos resultados obtidos durante a busca por uma demonstração do quinto postulado de Euclides.

4.1 Sacccheri

O matemático italiano e padre jesuíta Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) é considerado o precursor daqueles que viriam a descobrir as geometrias não-euclidianas.

> "No próprio ano em que morreu ele publicou um livro chamado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides com toda falha retirada) em que fez um elaborado esforço para provar o postulado das paralelas"([4], 1996, página 301).

Esse livro trouxe a primeira investigação científica do quinto postulado de Euclides ([8], 2004). Saccheri aplicou o método de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) para provar o postulado das paralelas. Primeiro, considerou um quadrilátero birretangular isósceles, ou seja, um quadrilátero $ABCD$ com os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABC$ retos e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ iguais (Veja figura 4).

Os ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são chamados de ângulos superiores. Foi sobre esses ângulos que Saccheri chegou a conclusão que eles eram iguais e assim, analisou os três hipóteses possíveis: ângulos retos, obtusos ou agudos.

Chama-se um ângulo de agudo quando este é menor que um ângulo reto e de obtuso quando este é maior que um ângulo reto.

Saccheri estudou os casos do ângulo agudo e obtuso buscando por alguma contradição. Chegou a conclusão que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior e menor do que dois ângulos retos, respectivamente, aos ângulos obtuso e agudo.

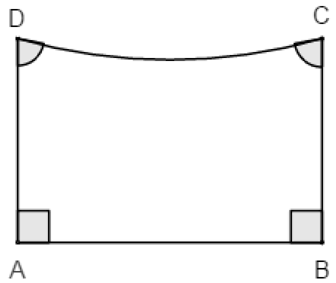


Figura 4: Quadrilátero de Saccheri

Proposição 4. *Os ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$, superiores de um quadrilátero de Saccheri são congruentes.*

Demonstração. Traçando as diagonais AC e BD no quadrilátero de Saccheri obteremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BAD$ que são congruentes pelo caso LAL (Proposição 2). Podemos concluir que os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BDC$ são congruentes pelo caso LLL (Proposição 3). Portanto, os ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são congruentes.

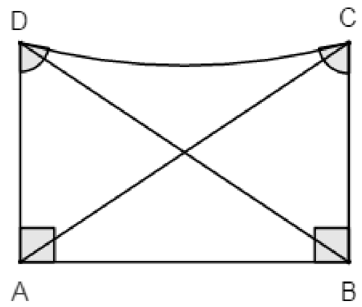


Figura 5: Diagonais do Quadrilátero de Saccheri

□

Teorema 4. *O segmento que liga os pontos médios da base e do topo do Quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos.*

Demonstração. Sejam E e F os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ (base) e $\overline{CD}$ (topo) respectivamente, conforme a Figura 6.

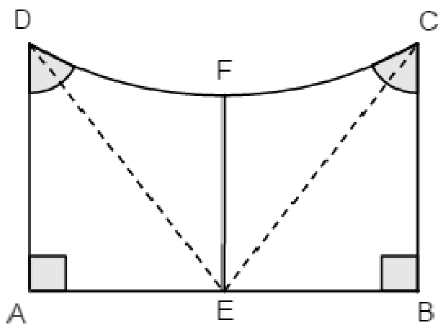


Figura 6: Pontos médios do topo e da base do Quadrilátero de Saccheri

Temos $\triangle AED \cong \triangle BEC$ (Pela Prop. 1), assim $AE \cong BE$ e, portanto o $\triangle ABF$ é isósceles, pois $\triangle AFE \cong \triangle BFE$. Segue que $\overline{EF}$ é altura além de mediana. Também o $\triangle DEC$ é isósceles com $\overline{FE}$ perpendicular a $\overline{DC}$. Observe que o quadrilátero $AFED$ tem três ângulos retos.

□

4.2 Lambert

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) foi um matemático suiço que deixou o seu nome na história da matemática como um dos que chegaram mais próximo da descoberta das geometrias não-euclidianas. Na verdade ele é mais lembrado pela prova que o π é irracional em 1761. Seguindo os mesmos passos de Saccheri, Lambert também usou um quadrilátero mas supondo que este possuísse três ângulos retos e levou em consideração os três casos possíveis para o quarto ângulo (agudo, reto e obtuso). Em sua homenagem esses quadriláteros são chamados de *Quadriláteros de Lambert*.

Para Andrade:

> "Lambert foi um excelente matemático mas seu brilho fica menor por ter tido a pouca sorte de ser contemporâneo de expoentes como o suiço Leonard Euler (1707 - 1783), e do francês Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783) dois que ficaram longe do teorema das paralelas".

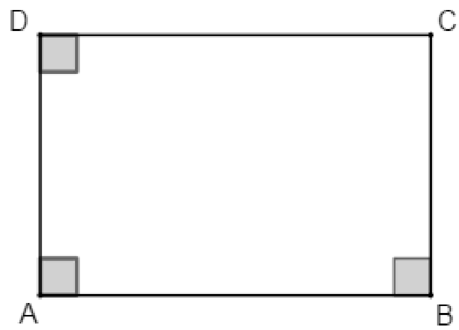


Figura 7: Quadrilátero de Lambert

Seu objetivo era mostrar que o quarto ângulo era reto.

4.3 Gauss

O alemão Johann Karl friedrich Gauss (1777 - 1855), é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Filho de um artesão foi um menino prodígio que utilizava seu tempo em se divertir resolvendo cálculos matemáticos. A sua genialidade ficou evidente desde cedo. Um caso famoso dessa genialidade aconteceu aos dez anos.

Durante a aula o seu professor mandou que todos os alunos somassem os números de 1 a 100. Rapidamente, Gauss entregou a resposta para espanto do professor que olhou com certa desconfiança, já que a tarefa deveria levar muito tempo para ser respondida. Ao olhar a resposta correta, o seu professor ficou assustado ao ver que um garoto de dez anos conseguiu somar tantos números mentalmente.

Gauss escreveu sobre os mais variados ramos da matemática e os seus trabalhos foram muito relevantes para o seu desenvolvimento, em especial para a teoria dos números e astronomia. Um destes foi sobre o quinto postulado de Euclides. Chegou à conclusão que não seria possível demonstrá-lo e que a existência de geometrias diferentes à de Euclides era possível. Como na época vivera sobre a influência da filosofia de Kant e do domínio da igreja, Gauss não apresentou os seus resultados e deixou que outros matemáticos continuassem a tentativa de provar o quinto postulado. Mesmo assim, é considerado o precursor desta nova geometria que surgia.

4.4 Boliay

O jovem Húngaro János Boliay (1802 - 1860), filho do matemático Farkas Boliay colega de classe de Gauss, ficou conhecido pelo seu trabalho na geometria não- euclidiana. Desde cedo o jovem János apresentava uma mente brilhante. Excelente músico e um matemático dedicado se interessou pela demonstração do quinto postulado de Euclides graças ao seu pai Farkas. Acompanhou o trabalho de Farkas e Gauss que trocavam correspondência a cerca de suas descobertas. Após muito tempo dedicado em vão e por achar uma tarefa árdua Farkas aconselha o filho János a desistir. Segundo Boyer, Farkas escreveu ao filho oficial do exército o seguinte:

> "Pelo amor de Deus, imploro a você, desista. Receie isto tanto quanto as paixões sensuais porque isso, também, pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de sua saúde, paz de espirito e felicidade na vida".([4], 1996, página 361)

Mesmo após o pedido do pai, János continuou o seu estudo e ao substituir o quinto postulado por uma de suas negações, admitindo que por um ponto fora de uma reta dada passa pelo menos um par de retas paralelas à reta dada surgindo assim a Geometria Hiperbólica.

Assim que publica esse trabalho, o seu pai Farkas comunica o amigo Gauss sobre o feito do filho e ele o responde que não poderia elogiá-lo já que estaria elogiando a si mesmo pois esses resultados já faziam parte de seus trabalhos há alguns anos. Decepcionado com a notícia, János deixou de publicar novos trabalhos e seu nome está ligado à matemática apenas pelo seu trabalho com a Geometria hiperbólica.

4.5 Lobachewsky

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856) foi um matemático russo, o seu pai era funcionário público e morreu quando ele tinha apenas sete anos. De família humilde conseguiu estudar na Universidade de Kazan onde aos vinte e um anos se tornou professor e em seguida Reitor.

Suas descobertas sobre o quinto postulado começam a aparecer quando em suas aulas de Geometria ouvia que nenhuma prova de ser verdadeiro havia sido encontrada. Ao ler um artigo em francês sobre o teorema das paralelas, Lobachewski escreveu e apresentou vários resultados, inclusive a data de publicação do seu primeiro artigo é considerada como a data não oficial do nascimento da geometria não-euclidiana. Com a publicação de seu artigo intitulado "Sobre os Princípios da Geometria"nasce oficialmente a Geometria não-euclidiana.

Convencido de que não é possível provar o quinto postulado de Euclides usando os outros quatro, Lobachewski desenvolve uma nova geometria contradizendo àquela escrita por Euclides. Esta substitui o quinto postulado de Euclides pela seguinte hipótese: por um ponto fora de uma reta dada podem passar mais de uma reta paralela à reta dada.

Foi difícil compreender a existência dessa nova geometria, inclusive o próprio Lobachewski a chama de "Geometria imaginária"em um primeiro momento.

> "Num certo sentido a descoberta da geometria não-euclidiana vibrou um golpe devastador na filosofia Kantiana, comparável ao efeito da descoberta dos incomensuráveis no pensamento pitagórico". ([4], 1996, página 360)

4.6 Riemann

O matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) foi outro que escreveu sobre as geometrias não-euclidianas. De saúde frágil e tímido o jovem ingressou na Universidade de Göttingen para estudar teologia aos dezenove anos graças ao apoio de seu pai, um pastor luterano. Apaixonado pela matemática, resolve estudar na Universidade de Berlin, retornando para Göttingenem anos depois para obter o título de doutor sob a orientação de Gauss.

Riemann era um matemático que tinha interesse em geometria, teoria dos números e análise. Diferente de Lobachewski e Boliay que usaram o método axiomático e a negação do quinto postulado, de acordo com Eves,

> "Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso. As três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann foram batizadas por Klein em 1871 de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente".([8], 2004, página 544)

Ele apresentou o plano como a superfície esférica, os pontos como posições e as retas como circunferências máximas da superfície esférica. Em sua homenagem, essa nova Geometria ela também ficou conhecida como Geometria Riemanniana e foi usada como base para o desenvolvimento da teoria da relatividade de Einstein.

4.7 Substitutos do Quinto Postulado

A busca pela prova do quinto postulado de Euclides levou a inúmeros novos enunciados para este. Estes novos enunciados foram chamados de substitutos.

> "A maneira de provar que uma proposição P é um substituto para o quinto postulado é a seguinte: primeiramente, devemo saber que P é uma proposição da Geometria euclidiana. Depois, devemos demonstrar que, na teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais P, pode-se provar o quinto postulado de Euclides como uma proposição". ([3], 2007, pág. 9)

Assim, para que P seja substituto do quinto postulado, devemos primeiro prová-lo utilizando apenas os resultados da *Geometria Neutra* e depois utilizá-lo para provar o quinto postulado.

Vejamos alguns dos substitutos mais famosos do quinto postulado.

1. **Axioma das paralelas:** Coube ao matemático escocês Jonh Playfair (1748-1819) fazer a denominação mais conhecida do 5º postulado, o Axioma das paralelas: **Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada.**

   Demonstração. 1º) Vamos provar o axioma das Paralelas: Sejam r e P uma reta e um ponto fora da reta dada, respectivamente. Então de acordo com os quatro primeiros postulados e de acordo com a seguinte proposição da geometria euclidiana: Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes iguais, então, as duas retas são paralelas, existe uma reta *r'* paralela a r, cuja construção é a seguinte: trace uma reta s perpendicular a r por P e, a partir de P, a reta *r'* perpendicular a s. Então *r'* é a paralela a r. Para provar a unicidade basta supor que exista outra reta *r"*, paralela a r por P. Esta reta forma um ângulo agudo com s. Portanto pelo quinto postulado temos que *r"* intercepta r. O que contradiz nossa hipótese. Portanto *r"*=*r'*.

   2º) Vamos provar o quinto postulado usando a teoria desenvolvida a partir dos quatro postulados de Euclides mais o axioma das paralelas de Playfair, para isso faremos uso da figura abaixo.

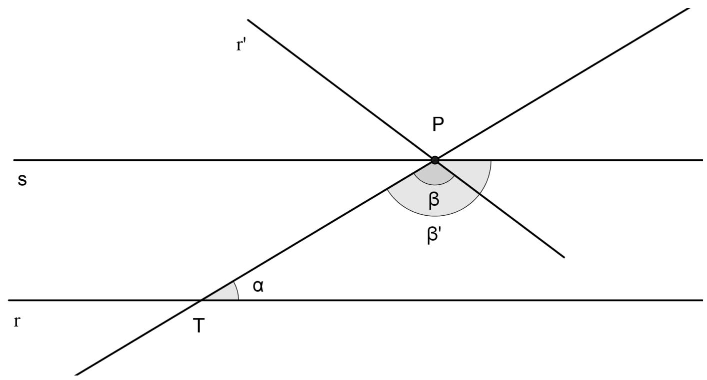


Figura 8: Retas paralelas

   Supondo $\alpha + \beta < 180°$ e que as retas r e *r'* são paralelas, traçamos pelo ponto P uma reta s formando um ângulo β' tal que $\alpha + \beta' = 180°$. Então s é paralelo a r. Logo temos duas retas distintas passando por P e paralelas a uma mesma reta, o que é absurdo segundo o quinto postulado de Euclides. Portanto r e *r'* se encontram.

   □

2. **A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos**

Demonstração. 1º) Vamos provar a proposição acima através da teoria de Euclides. Para isso utilizaremos a seguinte proposição:

Proposição 1. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.*

Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Pelo vértice A trace uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$. Nomeie os ângulos formados com o vértice A, como indicado na figura seguinte.

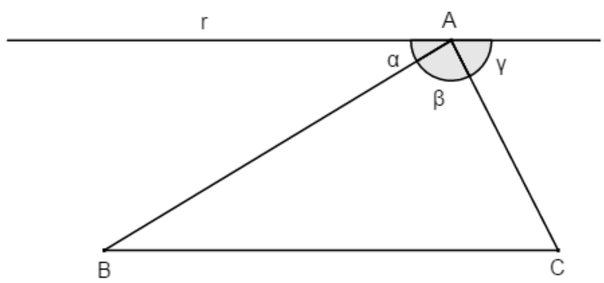


Figura 9: Triângulo ABC

Tem-se $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Como $\overline{AB}$ é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta da proposição anterior que $\alpha = \angle ABC$. Como $\overline{AC}$ é também transversal às duas paralelas, então $\gamma = \angle ACB$. Portanto

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

2º) Agora vamos provar o 5º postulado usando os quatro primeiros postulados mais o substituto. Queremos provar que se a soma dos ângulos de qualquer triângulo é dois ângulos retos, então, por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela a uma reta dada. Para isso precisaremos dos seguintes lemas e o axioma de Pasch.

Lema 1. *Um ângulo externo de um triângulo é sempre igual à soma dos dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

Lema 2. *Por um ponto P, pode-se sempre traçar uma reta, formando, com uma reta dada, ângulo menor do que qualquer número positivo prefixado.*

Axioma de Pasch 1. *Sejam A, B e C três pontos não colineares e seja m uma reta que não contem nenhum destes pontos. Se m corta o segmento AB, então ela também corta o segmento AC ou o segmento CB.*

Admitindo a validade dos lemas, sejam P um ponto de uma reta r. A reta perpendicular à reta s passando por P intercepta s no ponto A. Sabemos como construir uma reta paralela à reta s passando por P: basta tomar a reta r perpendicular ao segmento $\overline{PA}$ passando por P.

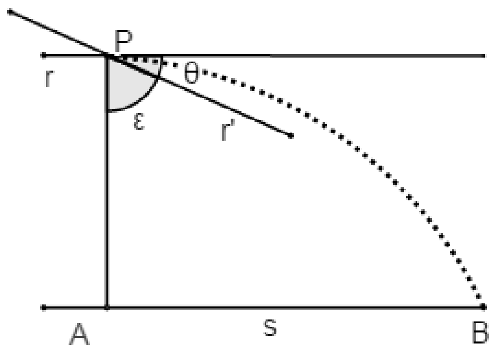


Figura 10: Retas Perpendiculares

Seja r' qualquer outra reta que passa pelo ponto P. Seja θ o ângulo entre r e r'. A reta r' forma com o $\overline{PA}$ um ângulo ϵ complementar de θ. Observamos que, de acordo com o Lema 2, podemos traçar uma reta pelo ponto P que intercepta s em um ponto B, formando um ângulo menor do que ϵ. Então o triângulo $\triangle PAB$, que é retângulo em A tem o ângulo em P maior do que θ. Portanto, a reta r' entra no $\triangle PAB$ pelo vértice P e, pelo axioma de Pasch, corta o lado oposto que é o $\overline{AB}$. Portanto não é paralela a m.

□

3. **Existe um par de retas equidistantes**

Demonstração. 1º) Vamos provar que o substituto acima pertence à teoria de Euclides. Sejam r e s retas paralelas. Sobre r tome dois pontos A e A' e deles, baixe perpendiculares à reta s. Sejam B e B' respectivamente os pés dessas perpendiculares. Devemos provar que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Para isso trace $\overline{A'B}$ como indicado na figura seguinte.

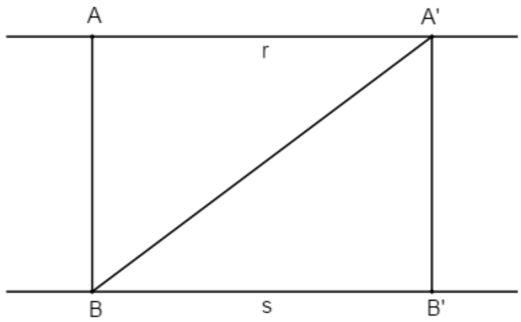


Figura 11: r e s retas paralelas

Observe que $\angle AA'B \cong \angle A'BB'$ e que $\angle A'AB = 90°$, portanto os $\triangle AA'B$ e $\triangle B'BA'$ são retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa congruentes, logo estes triângulos são congruentes. A congruência é a que leva A em B', A' em B e B em A'. Logo $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

2º) Provaremos agora que considerando o substituto acima podemos deduzir o 5º postulado mostrando que existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos. De fato, se r e s são as duas retas equidistantes, de pontos O e Q na reta r, baixe perpendiculares à reta s e designe por P e R, respectivamente, os pés destas perpendiculares. De um ponto qualquer S do segmento $\overline{PR}$, baixe uma perpendicular $\overline{ST}$ à reta s. Por hipótese, $\overline{PO} = \overline{ST} = \overline{RQ}$.

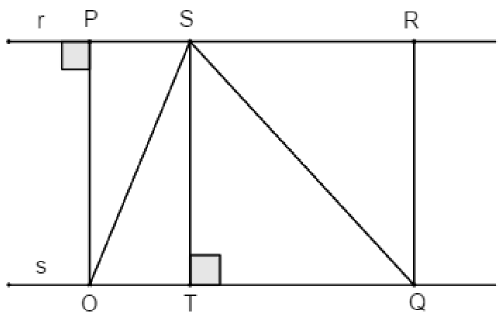


Figura 12: ST perpendicular a s

Por construção, os triângulos $\triangle OPS$, $\triangle STO$, $\triangle SQR$ e $\triangle QTS$, são retângulos. Perceba que os dois primeiros e os dois últimos triângulos são congruentes, de onde segue que: $\angle TOS \cong \angle PSO$ e $\angle TQS \cong \angle QSR$. Portanto a soma dos ângulos internos do $\triangle OSQ$ é igual a dois ângulos retos, já que:

$\angle TOS + \angle OSQ + \angle SQT = \angle PSO + \angle OSQ + \angle QSR = \angle PSR = 180°$. $\square$

Os substitutos apresentados, e outros que existem, são muito importantes para a geometria e contribuíram de forma significativa para demonstrar o quanto o quinto postulado foi essencial para o desenvolvimento desta. Segundo Barbosa,

> "Sem ele, ou sem um de seus equivalentes, não teríamos a teoria da soma dos ângulos de um triângulo, toda a teoria dos triângulos semelhantes e, consequentemente a Trigonometria, deixaria de existir,e o tratamento dado por Euclides para o conceito de área teria de ser amplamente revisto". ([3], 2007, página 16)

5 GEOMETRIA ELÍPTICA

Desenvolvida por Riemann, foi apresentada na Universidade de Gottingen durante a sua palestra para o corpo docente com o intuito de expor um *Habilitationsschrift* (habilitação escrita), que de costume era pedida para aqueles que se tornaram Privatdozent (professor em cargo probatório e não remunerado). Segundo Boyer,

> "Suas geometrias eram não-euclidianas num sentido muito mais geral do que a de Lobachewsky, em que a questão é simplesmente de quantas paralelas são possíveis por um ponto". ([4], 2004, página 377)

Dentre os modelo da geometria elíptica usaremos o que considera o plano como sendo uma esfera e a reta como um círculo máximo chamada de Geometria Esférica. Modelo é um ambiente que usamos para garantir a validade dos conceitos, postulados e teoremas.

Para o estudo desta precisaremos definir alguns conceitos essenciais:

1. **Esfera:** Conjunto de todos os pontos do espaço tal que a distância ao ponto O, centro da esfera, é menor ou igual ao comprimento de um segmento de reta $\overline{AB}$ fixado.

2. **Superfície Esférica:** Conjunto de todos os pontos do espaço tal que a distância ao ponto centro O é igual ao comprimento de um segmento de reta $\overline{AB}$.

3. **Pontos Antípodas:** São os pontos obtidos pela Interseção de uma reta euclidiana que passa pelo centro O com a superfície esférica.

4. **Reta:** circunferência máxima (ou geodésica) obtida pela interseção de um plano euclidiano com a esfera passando pelo centro desta.

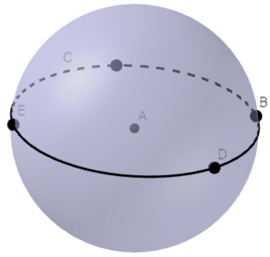


Figura 13: Circunferência Máxima

5. **Ângulo:** interseção de duas circunferências máximas

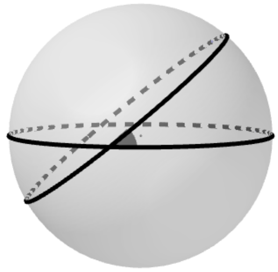


Figura 14: Ângulo na esfera

6. **Distância:** Sejam A e B dois pontos de uma esfera. A distância entre eles é o menor comprimento do arco desta circunferência.

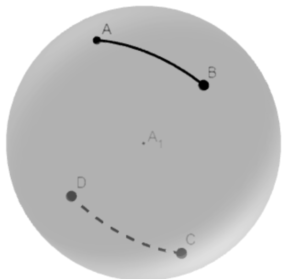


Figura 15: Distância entre pontos na esfera

7. **Fuso esférico:** região que está compreendida entre duas circunferências máximas.

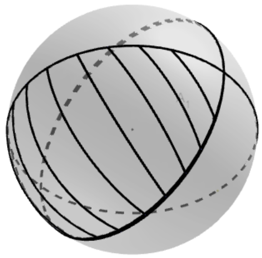


Figura 16: Fuso esférico

8. **Triângulo esférico:** figura formada pelos arcos das circunferências máximas, contidos em um mesmo hemisfério, e unem três pontos distintos que não pertencentes a uma mesma circunferência máxima.

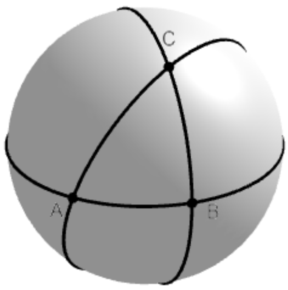


Figura 17: Triângulo esférico ABC

Diferente da geometria euclidiana, a geometria esférica tem uma superfície que pode ser finita, mas ilimitada e a reta (círculo máximo) tem comprimento finito, mas é ilimitada, pois percorrendo uma circunferência máxima retornamos ao ponto de partida e pode continuar percorrendo-a. Por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada, isso implica a não existência de retas paralelas.

postulado 6. *Dada uma reta e um ponto P, não pertencente a reta dada, não existe retas paralelas a ela passando por P.*

Teorema 5. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo esférico retângulo é maior do que dois ângulos retos.*

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$ retângulo $\angle ABC$ e E o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ conforme Figura 18. Seja ainda, o segmento $\overline{ED}$ perpendicular ao segmento $\overline{BC}$. Com régua e compasso, construa o segmento $\overline{AF}$ tal que $\angle CAF$ e o segmento $\overline{DC}$ sejam congruentes, respectivamente, a $\angle ACB$ e o segmento $\overline{AF}$. Consequentemente, o $\angle AFE$ também é reto e os pontos D, E e F são colineares. Portanto, $ABDF$ é um quadrilátero de Lambert com $\angle BAF$ obtuso. Logo, a soma dos dois ângulos agudos do $\triangle ABC$, que é exatamente igual ao $\angle BAC$, é maior do que um ângulo reto.

□

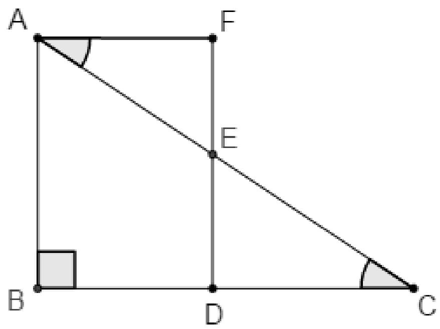


Figura 18: Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico retângulo

Teorema 6. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo esférico é maior do que dois ângulos retos.*

Demonstração. Se $\triangle ABC$ for retângulo o resultado segue do Teorema 5. Consideremos o caso em que $\triangle ABC$ não é retângulo. Vejamos na figura abaixo.

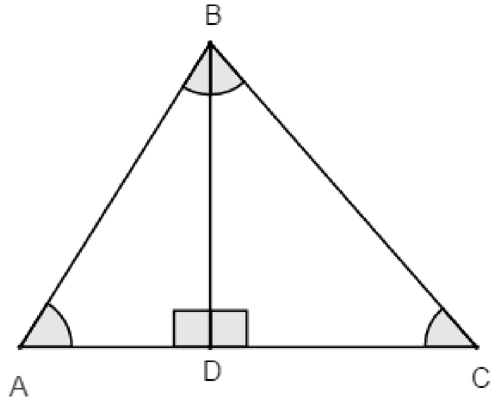


Figura 19: Triângulo ABC

Primeiro, baixe uma perpendicular do ponto B em relação ao lado $\overline{AC}$ e seja D o pé desta perpendicular. Teremos assim, os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ com o ângulo reto no vértice D. Do teorema acima, temos que a soma dos ângulos internos dos triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são ambas maiores que dois ângulos retos. Portanto, a soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$ é maior que dois ângulos retos. $\square$

Teorema 7. *Os ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$ do topo de um quadrilátero de Saccheri são obtusos.*

Demonstração. Trace uma diagonal, por exemplo $\overline{AC}$, dividindo o quadrilátero em dois triângulos. Pelo Teorema 6, a soma dos ângulos internos dos triângulos será maior que dois ângulos retos. Portanto, os ângulos do topo serão obtusos.

$\square$

Teorema 8. *A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é maior do que dois ângulos rasos.*

Demonstração. A prova também é consequência do Teorema 6. Divida o quadrilátero em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ e em seguida some os seus ângulos.

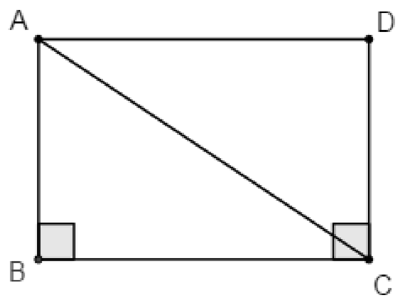


Figura 20: Quadrilátero $ABCD$

□

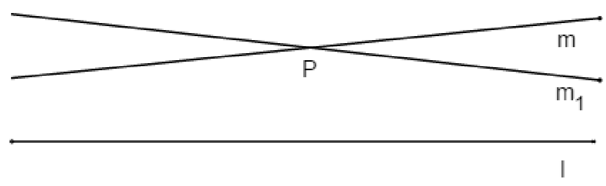
Dentre algumas diferenças que poderíamos citar, apresentaremos apenas alguns assuntos que foram abordados no corpo deste trabalho. Para isso, faremos o uso de uma tabela inspirada naquela construída por Davis e Hersh em *A experiência Matemática (1995, página 211)*.

Conceito Matemático	Geometria Euclidiana	Geometria Elíptica
Por um ponto A fora de uma reta r:	Passa uma única reta paralela a r	Não passa nenhuma reta paralela à reta r
Retas paralelas:	são equidistantes	não existem
Se uma reta intercepta uma de duas paralelas	interseta a outra	não pode intersetar a outra
A Hipótese de Saccheri válida é:	a do ângulo reto	a do ângulo obtuso
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede:	180°	mais do que 180°
A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero mede:	360°	mais do que 360°

6 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A Geometria Hiperbólica está fundamentada na Geometria Neutra com a substituição do postulado das paralelas pelo **Postulado de Lobachewski**:

postulado 7. *Dada uma reta e um ponto P, não pertencente a reta dada, existem pelo menos duas retas distintas paralelas a ela passando por P.*



Teorema 9. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Demonstração. Seja um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C. Sabemos, com base nos quatro primeiro postulados, que a soma de quaisquer dois ângulos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Assim, os outros dois ângulos do triângulo dado são agudos.

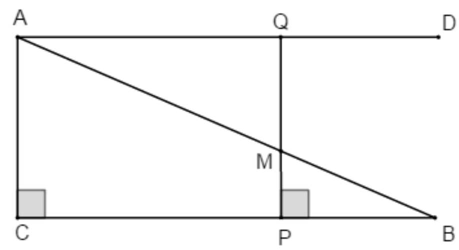


Figura 21: Triângulo retângulo ABC

Trace o segmento $\overline{AD}$ de sorte que $\angle DAB = \angle ABC$. Seja Mo ponto médio de $\overline{AB}$. Baixe a perpendicular $\overline{MP}$ ao lado $\overline{BC}$. Na semirreta $\overrightarrow{AD}$, marque um ponto D tal que $\overline{AQ} = \overline{PB}$. Temos, então, $\angle AQM = \angle BPM$. Consequentemente, $\angle MQA$ é um ângulo reto e P, M e Q são colineares. Portanto, $ACPQ$ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice A. Logo, a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo ABC, que é exatamente igual ao ângulo $\angle CAD$, é menor do que um ângulo reto, daí o resultado. Segundo Barbosa, essa é a prova original feita por Lobachewski. ([3], 2007, página 68) $\square$

Teorema 10. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Demonstração. Se $\triangle ABC$ for um triângulo retângulo o resultado segue do teorema acima. Consideremos o caso em que o triângulo $\triangle ABC$ não é retângulo. Vejamos na figura abaixo.

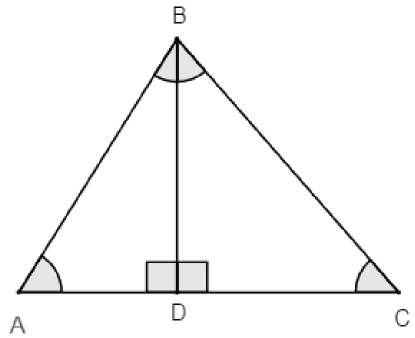


Figura 22: Triângulo retângulo ABC

Primeiro, baixe uma perpendicular do ponto B em relação ao lado $\overline{AC}$ e seja D o pé desta perpendicular. Teremos assim, os triângulos retângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ com o ângulo reto no vértice D. Do teorema acima, temos que a soma dos ângulos internos dos triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são ambas menores que dois ângulos retos. Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ é menor que dois ângulos retos. $\square$

Teorema 11. *Os $\angle BCD$ e $\angle CDA$ do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.*

Demonstração. Trace uma diagonal, por exemplo $\overline{AC}$, dividindo o quadrilátero em dois triângulos. Pelo Teorema 11, a soma dos ângulos internos dos triângulos será menor que dois ângulos retos. Portanto, os ângulos do topo serão agudos.

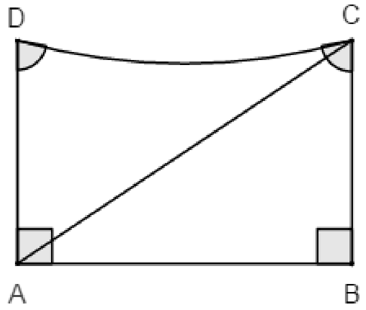


Figura 23: Diagonal AC

□

Teorema 12. *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero* $ABCD$*é menor do que dois ângulos rasos.*

Demonstração. A prova deste também é consequência do Teorema 11. Divida o quadrilátero em dois triângulos e em seguida some os seus ângulos internos. □

Teorema 13. *Todos os triângulos hiperbólicos são congruentes.*

Demonstração. Usaremos o caso particular de congruência AAA da Geometria Hiperbólica, ou seja, se os três ângulos de um triângulo são respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Sejam os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ de modo que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$, conforme Figura 25. Suponha, por absurdo, que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} > \overline{A'C'}$, então seja D um ponto em $\overline{AB}$ e E um ponto em $\overline{AC}$ de forma tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$. Por consequência $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$. Admitindo, sem perda de generalidade, que $\overline{AD} < \overline{AB}$ e $\overline{AE} < \overline{AC}$, teríamos o quadrilátero $BDEC$ com a soma dos ângulos internos igual a quatro ângulos retos, pelo Teorema 13 isso é um absurdo.

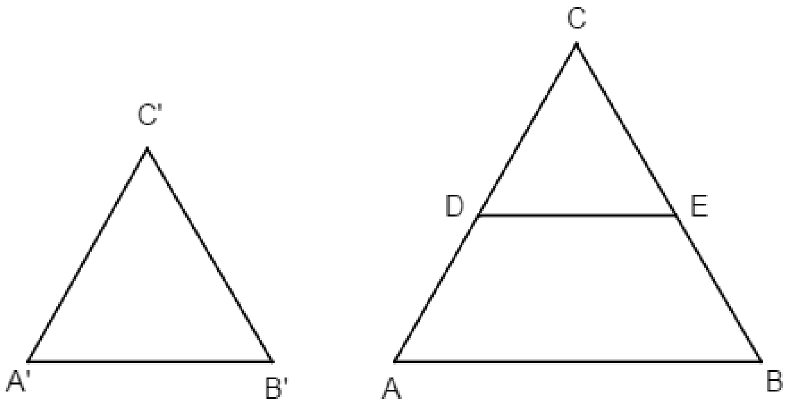


Figura 24: Triângulos congruentes

□

A seguir, apresentamos na tabela abaixo os mesmos conceitos matemáticos da tabela 1 comparando agora a geometria euclidiana com geometria hiperbólica.

Conceito Matemático	Geometria Euclidiana	Geometria Hiperbólica
Por um ponto A fora de uma reta r:	Passa uma única reta paralela a r	Passa no mínimo duas retas paralelas a r
Retas paralelas:	são equidistantes	existem infinitas
Se uma reta intercepta uma de duas paralelas	intercepta a outra	pode ou não interceptar a outra
A Hipótese de Saccheri válida é:	a do ângulo reto	a do ângulo agudo
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede:	$180°$	menos do que $180°$
A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero mede:	$360°$	menos do que $360°$

6.1 Modelos para a Geometria Hiperbólica

Chamamos de modelo um conjunto de resultados nos quais definimos os conceitos primitivos e verificamos os axiomas. Nesta seção, faremos a apresentação de três modelos para a Geometria hiperbólica.

6.1.1 Modelo de Beltrami

O matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) foi o primeiro a apresentar um modelo para a Geometria Hiperbólica. Influenciado pelos trabalhos de Lobachevsky, Gauss e Riemann, ele concretizou a geometria hiperbólica em seu ensaio de 1868 utilizando uma pseudoesfera, que consiste em uma superfície gerada pela revolução de uma tractrix sobre a sua assíntota.

O modelo da pseudoesfera de Beltrami não atende completamente a geometria hiperbólica, pois em alguns pontos não podemos prolongar as retas hiperbólicas.

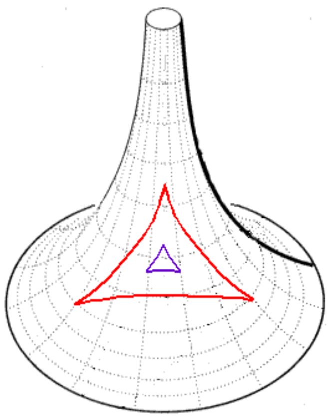


Figura 25: Triângulo Hiperbólico

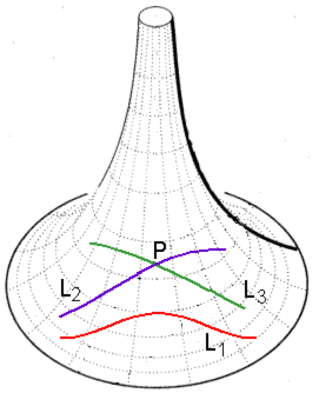


Figura 26: Retas paralelas no modelo de Beltrami

6.1.2 Modelo do Disco de Poincaré

O disco de Poincaré é um círculo unitário aberto $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; ||z|| < 1\}$ dos complexos, de centro O e circunferência ϕ. Vejamos a definição dada no Disco de Poincaré aos seguintes termos indefinidos.

Definição 1. *O Plano Hiperbólico é o círculo* $\mathbb{H}^2$.

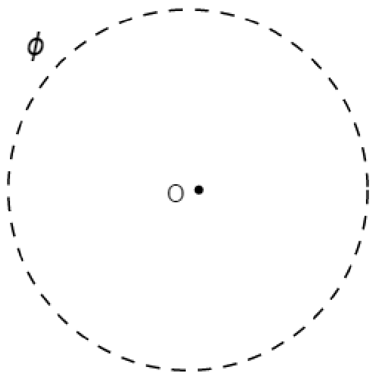


Figura 27: Plano Hiperbólico

Definição 2. ***Ponto:*** *é um elemento de* $\mathbb{H}^2$.

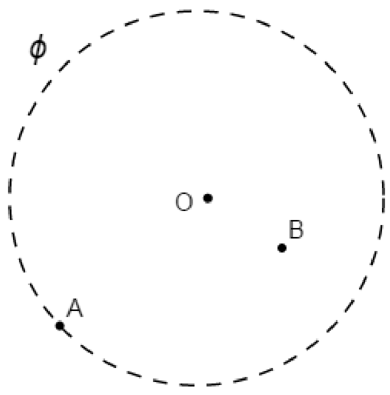


Figura 28: O ponto A não pertence ao Plano Hiperbólico e o ponto B pertence.

Definição 3. ***Reta:*** *subconjunto de* $\mathbb{H}^2$ *gerado pela interseção* ($\mathbb{H}^2 - \phi$) *com o diâmetro ou interseções de com um círculo perpendicular ao bordo de* $\mathbb{H}^2$.

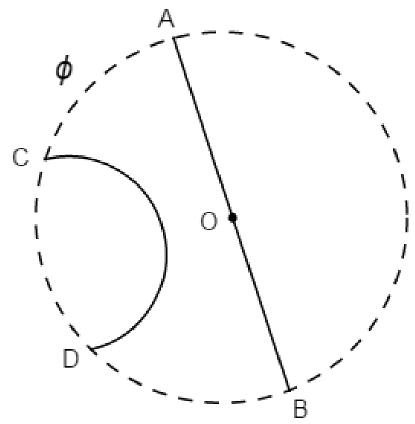


Figura 29: Retas no Plano Hiperbólico

Na Figura 29 temos o modelo para o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica Plana, onde o Axioma das Paralelas de Hilbert é substituído pelo Axioma de Lobachewsky.

6.1.3 Modelo do Disco de Klein

O modelo do Disco de Klein é o círculo $\mathbb{H}^2$ acima definido. Neste modelo as geodésicas (a menor distância entre dois pontos é diferente da geometria plana, onde a menor distância é uma reta) são segmentos de retas euclidianas. Vejamos:

Definição 4. *O Plano Hiperbólico é o círculo* $\mathbb{H}^2$.

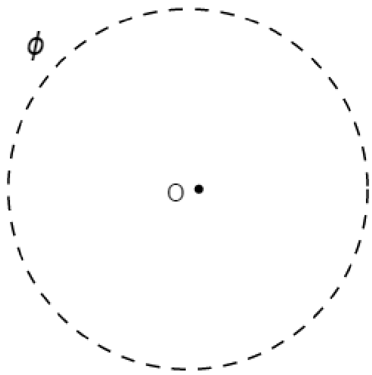


Figura 30: Disco de Klein

Definição 5. ***Ponto:*** *é um elemento de* $\mathbb{H}^2$.

Definição 6. ***Reta Hiperbólica ou Geodésica:*** *Interseção da reta euclidiana que passam pelos pontos A e B com $\mathbb{H}^2$, ou seja, uma corda com extremidades que não tocam a circunferência ϕ.*

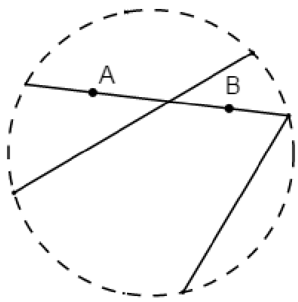


Figura 31: Reta ou Geodésica no Disco de Klein

Já citamos a importância da Geometria Riemanniana para a teoria da relatividade de Einstein, mas para Carmo,

> "Provavelmente a aplicação mais importante das geometrias não euclidianas foi a sua influência na concepção matemática do século vinte e um. A existência de tais geometrias mostrou a necessidade de se raciocinar com rigor e manter a intuição sob controle"([5], 1987, página 9)

7 SOFTWARES

A educação tem se apropriado cada vez mais das novas tecnologias para melhorar ou aprimorar o processo de ensino-aprendizagem. O computador, um dos ícones da revolução tecnológica, se transformou em uma importante ferramenta para ajudar o professor a acompanhar essa mudança que ocorre com os educandos pela busca do conhecimento. A informação está disponível a qualquer um o tempo todo através da *internet* (rede global de computadores conectados), ou seja, o acesso ficou mais fácil e rápido e isso reflete diretamente na abordagem que o professor faz acerca dos conteúdos a serem ministrados.

O uso de *Softwares* educativos (software com objetivo educacional) contribui para estreitar a relação teoria e prática a medida que possibilita a apresentação de resultados abstratos ou teóricos em tempo real na tela de qualquer dispositivo. Dessa forma, torna-se possível a substituição da imaginação pela observação e isso pode provoca uma abertura ao novo, fazendo com que as aulas sejam mais atrativas e interessantes para o aluno.

Com o propósito claro de sugestão e divulgação, faremos a síntese de dois *softwares* usados para o estudo da geometria dinâmica. O primeiro por ser muito conhecido pelos professores de matemática e o segundo pela condição de mostrar na sua tela as Geometria euclidiana e não-euclidianas simultaneamente.

7.1 Geogebra

Desenvolvido nos Estados Unidos por Markus Hohenwarter e ganhador de vários prêmios, o GeoGebra é um software livre de matemática dinâmica que tem diversas utilidades com o objetivo de ampliar o conhecimento em ambiente de sala de aula. O seu nome vem de geometria e álgebra, mas também pode ser usado para o cálculo. Pode ser utilizado em vários sistemas operacionais como Microsoft Windows, Linux, Macintosh etc, devido a sua plataforma JAVA. Apresenta uma interface simples e intuitiva.

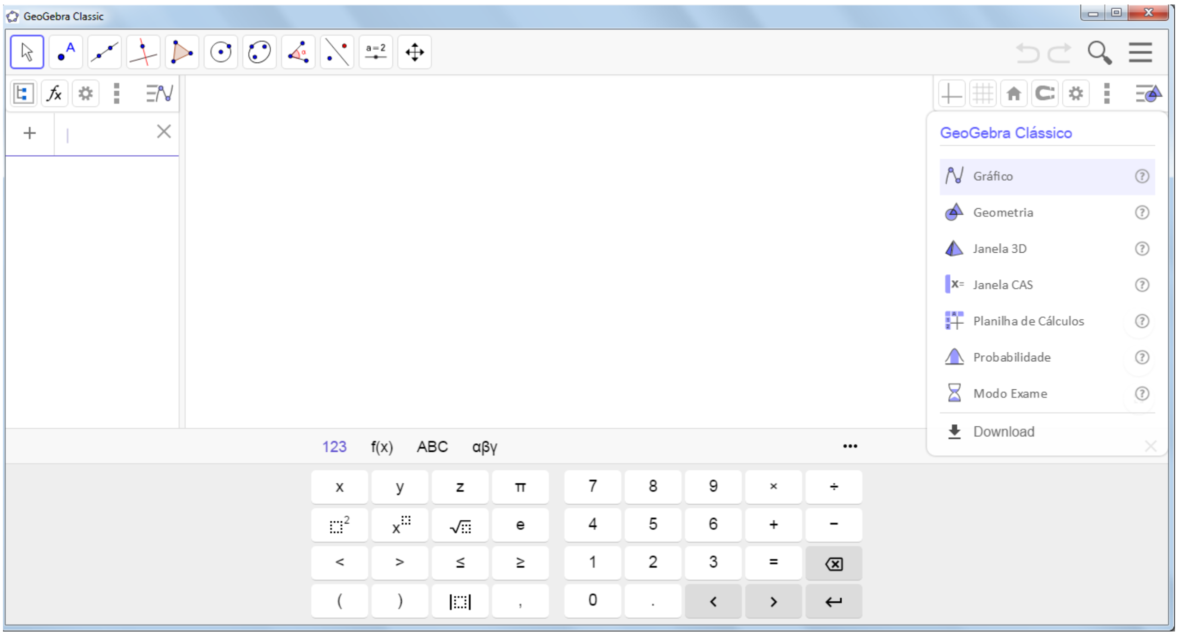


Figura 32: Interface do Geogebra

Na interface do Geogebra encontramos uma janela gráfica que se divide em área de trabalho e janela algébrica com uma entrada que pode ser usada para escrever desde coordenadas até funções. Podemos inserir na área de trabalho o sistema de coordenadas cartesianas como também alguns tipos de malhas que ajudam na hora da construção geométrica. Os seus comandos usam imagens sugestivas e indicativas que facilitam a sua manipulação.

Figura 33: Barra de ferramentas

Algumas vantagens que o uso do software Geogebra traz para o ensino de matemática, e em especial a geometria, são:

- Possibilidade de movimentar as figuras em várias direções para comparas ou analisar.

- Apresenta diversas representações de um objeto, podendo ser usado para comparações ou investigações.

- A sua plataforma em JAVA permite que as construções sejam disponibilizadas na web, assim é possível o compartilhamento e interação.

- Conta com um repositório online onde o usuário tem acesso a construções de outros.

- Suas construções são interativas e dinâmicas.

7.2 Cinderella

Criado pelo J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp, o software Cinderella é um programa gratuito, usado para o estudo de geometria dinâmica (àquela criada por programas gráficos que permitem construções geométricas e manipulações). Desenvolvido inicialmente na plataforma NEXT, o seu nome é em homenagem ao barco que os amigos navegavam. Com a decadência da plataforma NEXT os dois começaram um novo projeto para a plataforma JAVA. Diferente da primeira versão que era voltada para o estudo de geometria projetiva, a nova versão disponibilizava a Geometria Euclidiana e não-euclidiana.

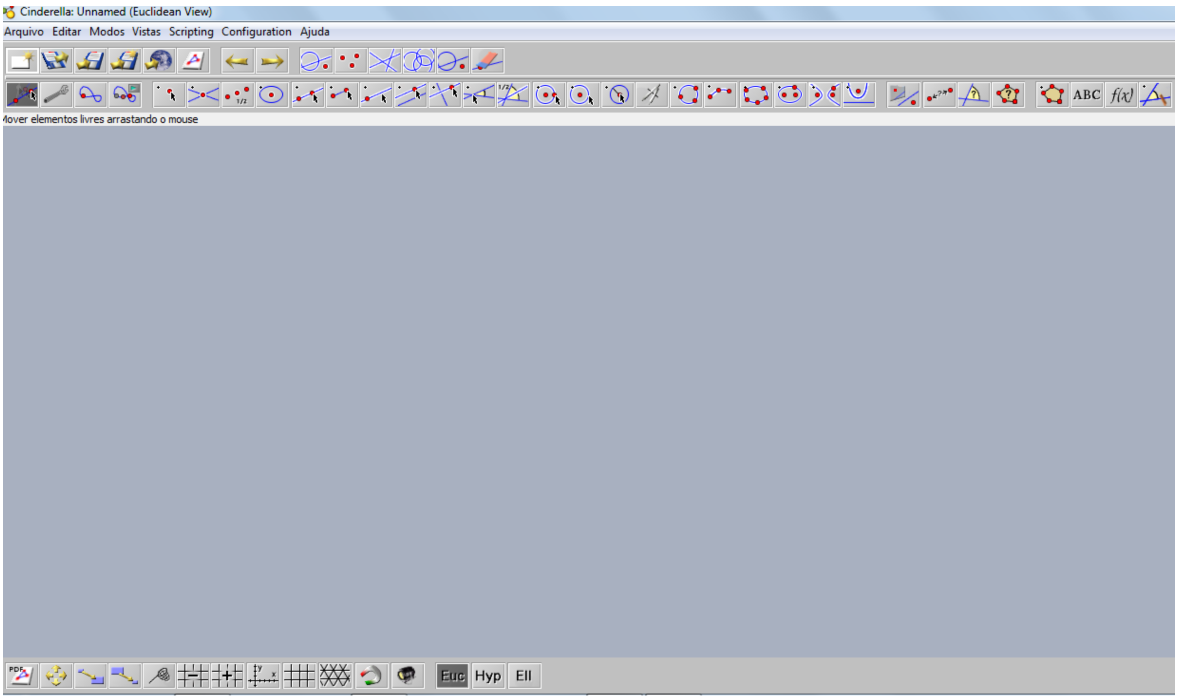


Figura 34: Interface do Cinderella 2.8

De fácil manipulação (ao toque do mouse) e de aparência simples, o Cinderella apresenta vários recursos especiais. Alguns destes listamos abaixo.

- Permite a manipulação e construção de desenhos com apenas a utilização do mouse, dispensando o conhecimento em programação.

- Possibilita a visualização simultânea de figuras na geometria euclidiana e não-euclidiana.

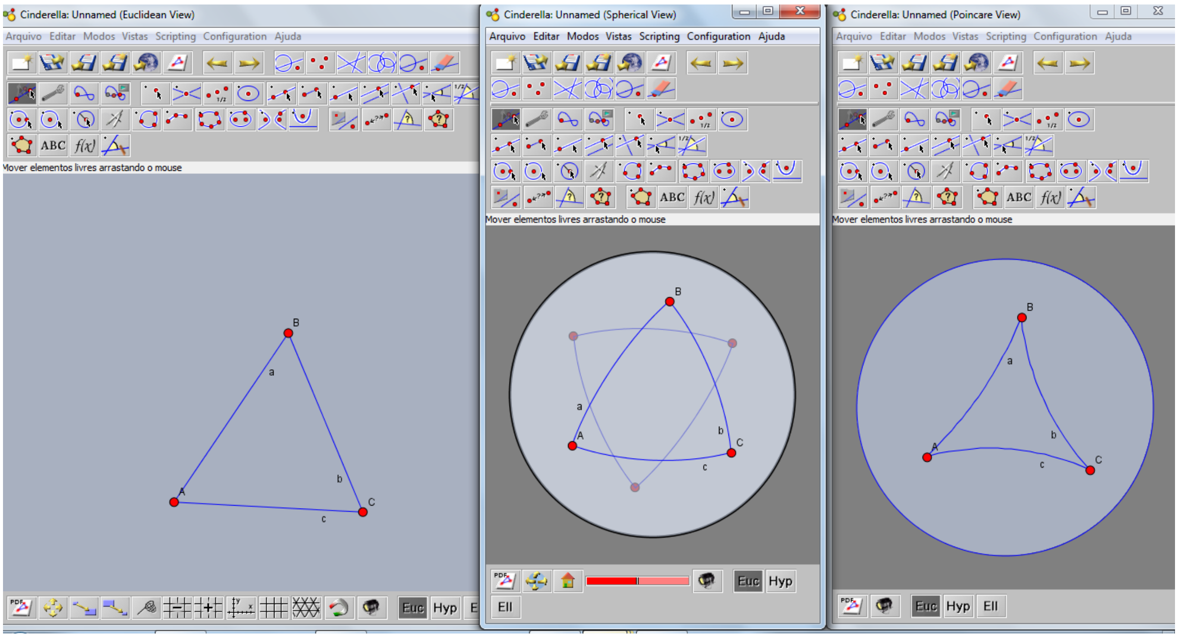


Figura 35: Vista simultânea das geometria euclidiana e não euclidiana

Na imagem acima temos um triângulo $\triangle ABC$, respectivamente, no plano euclidiano, esférico e no disco de Poincaré.

- A sua plataforma em JAVA permite que as construções sejam disponibilizadas na web, assim é possível o compartilhamento e interação.

- Cria exercícios interativos que facilitam a aprendizagem e faz a correção automática.

- Apresenta comandos com imagens sugestivas, facilitando a identificação da função de cada um.

8 ATIVIDADES SUGERIDAS

Neste capítulo, faremos sugestões de algumas atividades com o apoio dos softwares apresentados na seção 7, visando facilitar a compreensão da temática abordada neste trabalho e contribuir para ampliar a utilização de softwares educacionais em sala de aula tornando-as mais dinâmicas e assim proporcionando ao aluno uma aprendizagem significativa, aliando o lado da curiosidade com o uso da tecnologia.

Atividade 1 - Segmento de Reta

SOFTWARE GEOGEBRA

1. Ao abrir o Geogebra vá na barra de ferramentas e clique sobre o ícone configurações. Escolha a opção "janela de visualização 3D"e uma nova janela será aberta.

2. Clique sobre o ícone "esfera"e escolha a opção "Esfera Dados o Centro e um de Seus Pontos"ou "Esfera Dados Centro e Raio".

3. Após a escolha, clique em dois pontos, caso tenha escolhido a primeira opção, e aparecerá a esfera. Veja a figura abaixo.

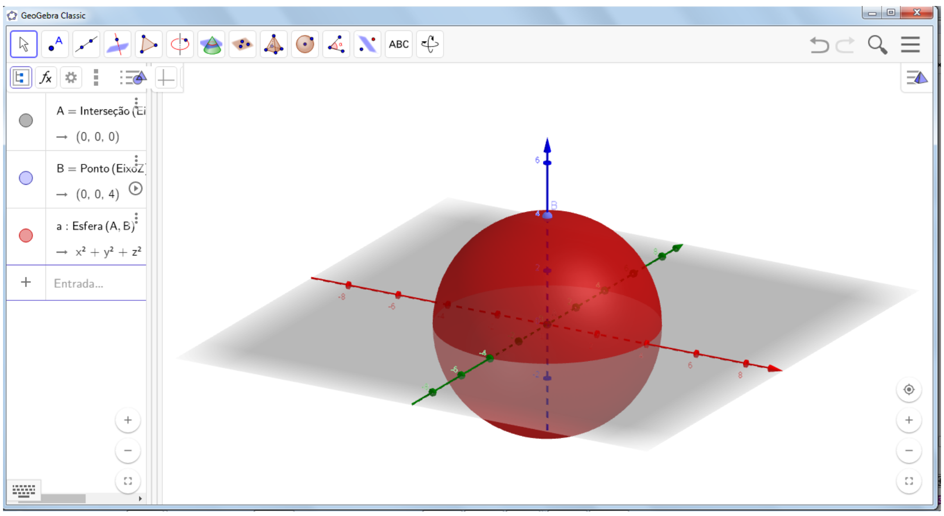


Figura 36: Esfera no Geogebra

4. Clique sobre o ícone círculo e escolha a opção "Arco Circular".

5. Coloque o primeiro ponto no centro da esfera e os outros dois sobre a esfera, formando um segmento de reta esférico.

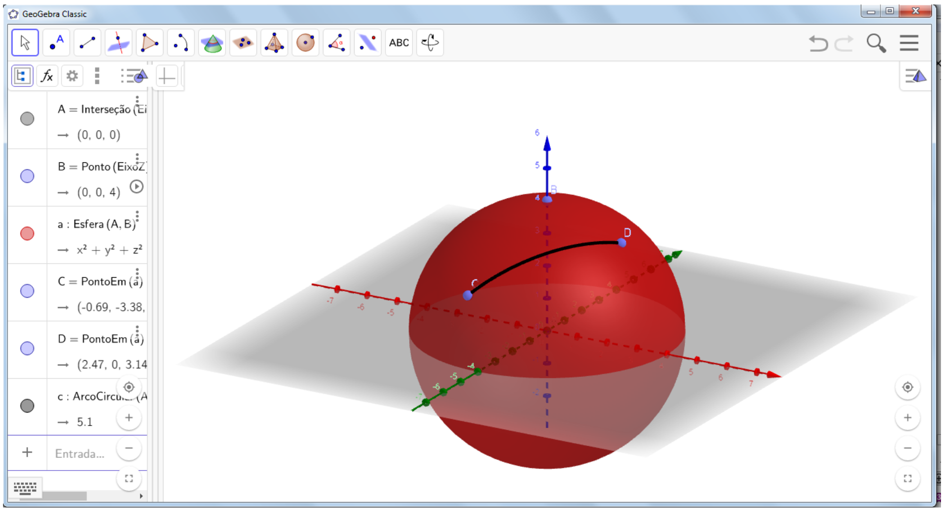


Figura 37: Segmento de Reta

6. Reflita com os alunos sobre a esfera e compare-a com o Globo terrestre. Indague acerca da reta está sobre uma superfície curva e em seguida discuta sobre a inviabilidade do modelo euclidiano para fazer esse estudo.

Objetivo da atividade: Instigar a curiosidade do aluno, apresentando-o essa nova possibilidade, e permitir que o aluno perceba a conexão deste conceito com a realidade.

Atividade 2 - Reconhecendo retas

SOFTWARE CINDERELLA

1. Ao abrir o Cinderella vá na barra de ferramentas e no ícone vistas clique em Geometria Hiperbólica (ou ctrl+2) e será aberto uma nova página. Faça o mesmo para abrir a janela para a Geometria Esférica (ou ctrl+3).

2. Clique sobre o ícone "traçar linha através de ponto".

3. Faça questionamentos aos alunos acerca dos três modelos expostos.

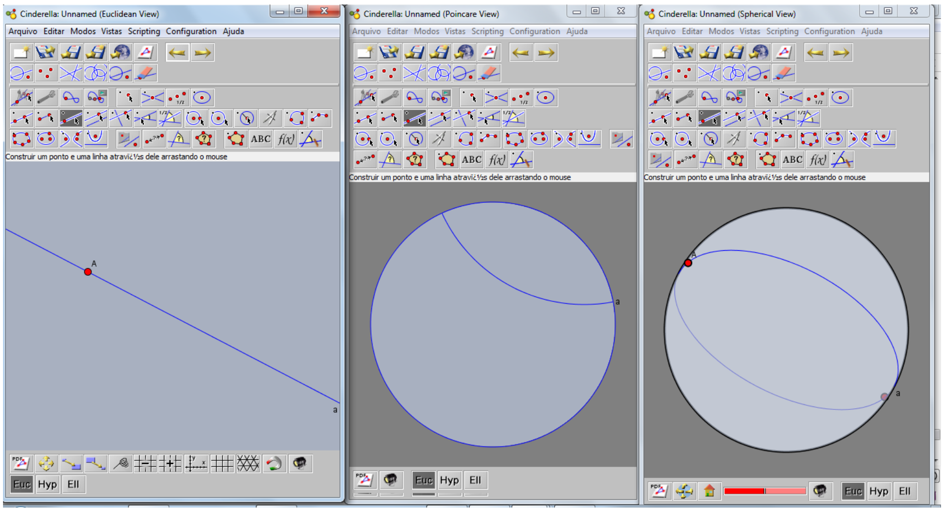


Figura 38: Reta

Objetivo da atividade: Proporcionar a apropriação dos conceitos de retas nos vários modelos.

Atividade 3 - Retas Paralelas

SOFTWARE GEOGEBRA

1. Ao abrir o Geogebra vá na barra de ferramentas e clique sobre o ícone configurações. Escolha a opção "janela de visualização 3D"e uma nova janela será aberta.

2. Clique sobre o ícone "esfera"e escolha a opção "Esfera Dados o Centro e um de Seus Pontos"ou "Esfera Dados Centro e Raio".

3. Após a escolha, clique no centro do eixo e digite o valor do raio, caso tenha escolhido a segunda opção, e aparecerá a esfera. Veja a figura abaixo.

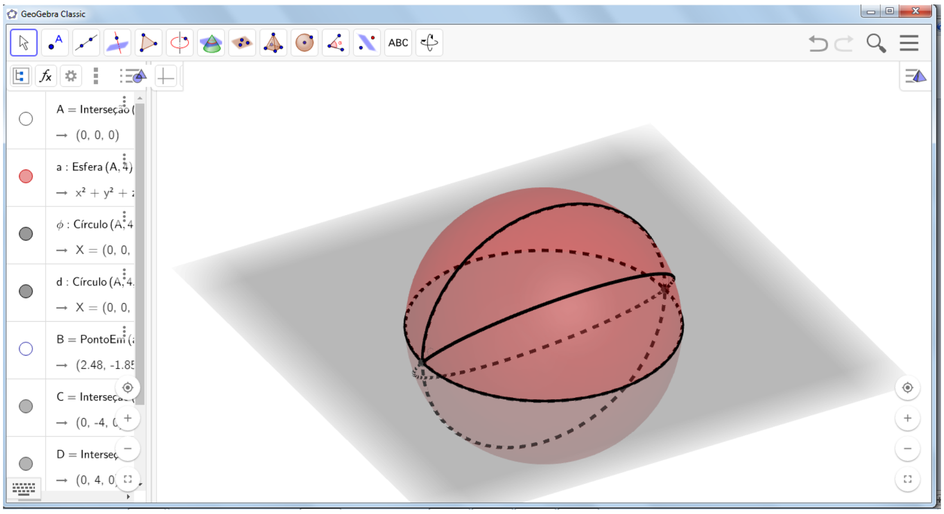


Figura 39: Reta Esférica

4. Clique sobre o ícone círculo e escolha a opção "Círculo (Centro - Raio + Direção)".

5. Coloque o primeiro ponto no centro da esfera e em seguida clique a superfície da esfera, formando uma reta esférica ou circunferência máxima (tem o mesmo cento e raio da esfera).

6. Repita esses itens quantas vezes achar necessário e aproveite para demonstrar que não é possível traçar reta paralela a nenhuma reta dada. Durante a construção questione os alunos sobre a interseção destas.

Objetivo da atividade: Apresenta aos alunos a Esfera com modelo da Geometria Elíptica e uma de suas principais propriedades, a não existência de retas paralelas.

Atividade 4 - Soma dos ângulos internos de um triângulo

SOFTWARE CINDERELLA

1. Ao abrir o Cinderella vá na barra de ferramentas e no ícone vistas clique em Geometria Hiperbólica (ou ctrl+2) e será aberto uma nova página. Faça o mesmo para abrir a janela para a Geometria Esférica (ou ctrl+3).

2. No modelo euclidiano clique sobre o ícone "traçar um segmento".

3. Com um clique com o botão esquerdo do mouse crie um ponto e arraste-o até o local desejado criando o segundo ponto.

4. Repita o processo acima até construir um triângulo qualquer

5. O triângulo aparecerá nos outros dois modelos.

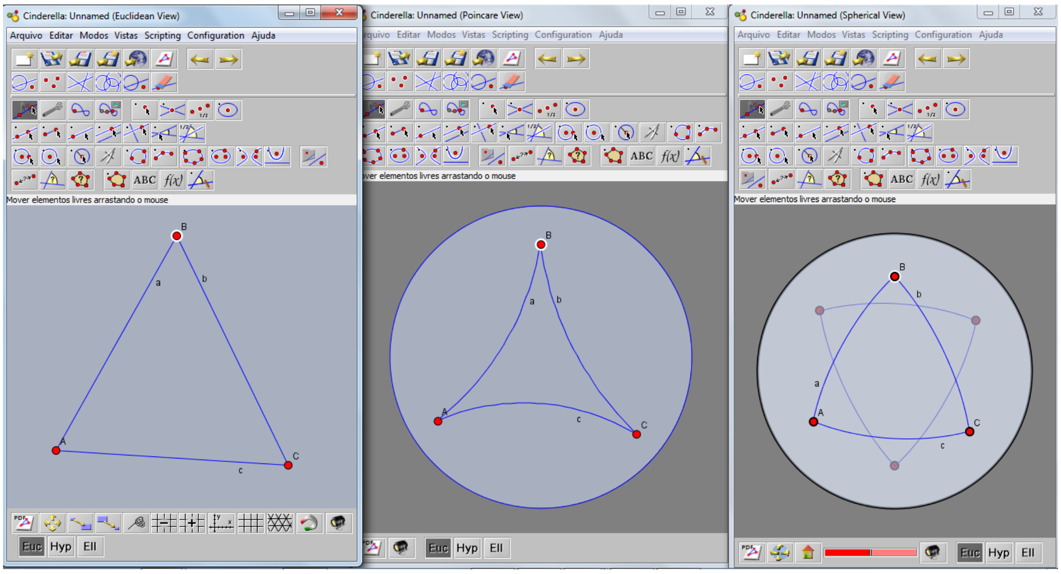


Figura 40: Soma dos ângulos internos de um Triângulo

6. Faça questionamentos aos alunos acerca dos três modelos expostos de triângulos. Mostre que os modelos apresentam ângulos cuja soma pode ser maior (Modelo Esférico), menor (Modelo Hiperbólico) e igual a dois ângulos retos (Modelo Euclidiano).

Objetivo da atividade: Proporcionar ao aluno a percepção dos ângulos internos do triângulo hiperbólico e elíptico utilizando para isso a construção deste. Permitir que o mesmo comprove a veracidade desta propriedade.

Atividade 5 - Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

SOFTWARE CINDERELLA

1. Ao abrir o Cinderella vá na barra de ferramentas e no ícone vistas clique em Geometria Hiperbólica (ou ctrl+2) e será aberto uma nova página. Faça o mesmo para abrir a janela para a Geometria Esférica (ou ctrl+3).

2. No modelo euclidiano clique sobre o ícone "traçar eixos coordenados"e em seguida em "traçar grade retangular".

3. Com um clique com o botão esquerdo do mouse crie um ponto sobre uma reta da grade e arraste-o sobre esta reta até o local desejado criando o segundo ponto.

4. Repita o processo acima até construir um retângulo qualquer

5. O quadrilátero aparecerá nos outros dois modelos com ângulos diferentes.

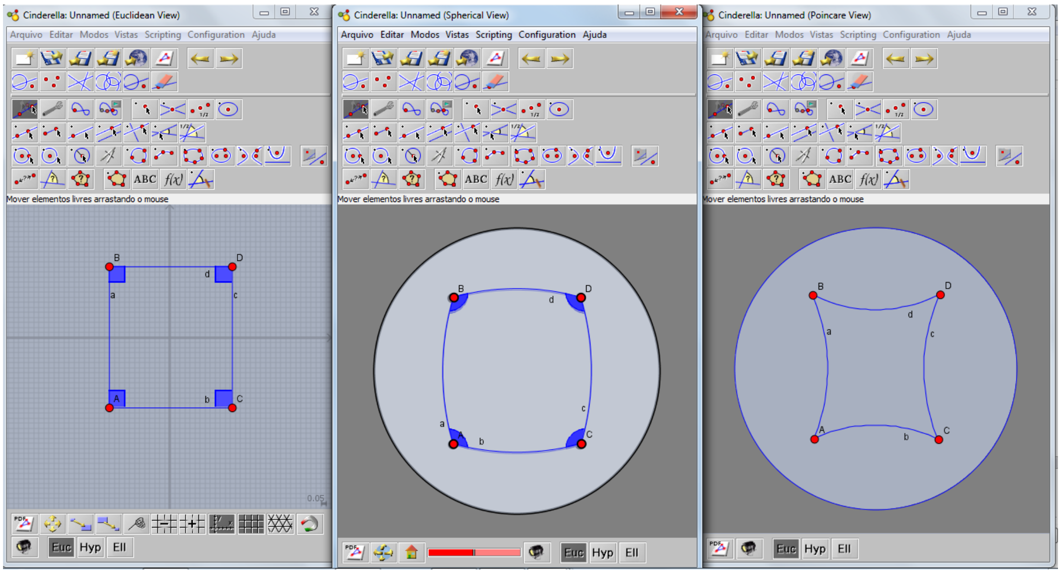


Figura 41: Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

6. Faça questionamentos aos alunos acerca dos três modelos expostos de quadriláteros. Mostre que os modelos apresentam ângulos cuja soma pode ser maior (Modelo Esférico), menor (Modelo Hiperbólico) e igual a quatro ângulos retos (Modelo Euclidiano).

Objetivo da atividade: Proporcionar ao aluno a percepção dos ângulos internos do quadrilátero utilizando para isso a construção deste. Permitir que o mesmo comprove a veracidade desta propriedade.

Referências

[1] Andrade, P., *Introdução à Geometria Hiperbólica: o modelo de Poincaré*. Coleção textos universitários. Rio de Janeiro, SBM, 2013, 259 p.

[2] Andrade, P., *Introdução à geometria projetiva*. Rio de Janeiro: SBM, 2010, 162 p.

[3] Barbosa, J.L.M., *Geometria Hiperbólica*. Publicações Matemáticas. Rio de janeiro, IMPA, 2007, 165 p.

[4] Boyer, C.B., *História da Matemática*, Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 1996. 478 p.

[5] Carmo, M. P., *Geometrias não-euclidianas*. Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro, número 6, dez. 1987.

[6] Carvalho da Rocha, L.F., *Introdução à Geometria Hiperbólica plana*. Rio de Janeiro, IMPA,1987, 252 p. (16º Colóquio Brasileiro de Matemáticas).

[7] Davis, P.J. e Hersh, R., *A Experiência Matemática*. Lisboa, Gradiva, 1995, 252 p.

[8] Eves, Howard W. *Introdução à História da Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Editora UNICAMP, 2004, 844 p.

[9] Martos, Z. G. *Geometrias Não Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria No Ensino Fundamental*. Rio Claro, 2002. 179 f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

[10] Mlodinow, Leonard. *A janela de Euclides: A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço*. tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2005, 295 p.