

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Transformações de Möbius e projeções na esfera de Riemann.

Caio Eduardo Martins Raiz

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Caio Eduardo Martins Raiz

Transformações de Möbius e projeções na esfera de Riemann.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

USP – São Carlos
Dezembro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R161t Raiz, Caio Eduardo Martins
Transformações de Möbius e projeções na esfera de
Riemann / Caio Eduardo Martins Raiz; orientador
Prof. Dr. Tiago Henrique Picon. -- São Carlos, 2018.
123 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Números Complexos. 2. Geometria Analítica em
C. 3. Transformações de Möbius. 4. Projeções na Esfera
de Riemann. I. Picon, Prof. Dr. Tiago Henrique,
orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Caio Eduardo Martins Raiz

Möbius transformations and Riemann sphere projections.

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

USP – São Carlos
December 2018

Este trabalho é dedicado ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família. Aos meus pais, minha irmã e minha tia Léo, responsáveis pelas condições necessárias para que esse projeto pudesse ser concretizado, agradeço pelos valores transmitidos, pela educação de primeira e pelo apoio constante em todas as fases de minha vida. À minha mulher, sempre a melhor companheira, agradeço pelo apoio incondicional, pelo carinho e pela dedicação sobre-humana para comigo e com nosso maior patrimônio, Manu e Duda. Agradeço também à CAPES, ao IMPA e à USP por possibilitarem a execução desse projeto. Aos meus colegas de turma do PROFMAT, em especial ao grupo da carona, agradeço pelos excelentes momentos que passamos juntos, pela ótima convivência e pela intesa amizade que construímos. Não poderia deixar de agradecer aos diretores Marcos do Amaral e Suely Cangane pelo grande apoio, principalmente na conciliação dos horários para que eu pudesse frequentar as aulas do programa de pós-graduação. Agradeço também ao meu primo Prof. Dr. Samuel Coelho Faria, o "doc", pela sabedoria de dizer as palavras certas no momento certo. Por fim, gostaria de agradecer a todos os professores da USP, em especial à Profa. Dra. Kátia Andreia Gonçalves de Azevedo e ao Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves pela enorme contribuição em minha formação. E ao meu orientador, o Prof. Dr. Tiago Henrique Picon, só tenho a agradecer muito pela brilhante orientação. Agradeço pela autonomia que me foi dada, pelas intervenções pontuais, pelas questões desafiadoras levantadas e pelas sugestões e críticas. Muito obrigado por ter sido sempre um verdadeiro "mestre", um exemplo.

“Too much ego will kill your talent.”

RESUMO

RAIZ, C. E. M. **Transformações de Möbius e projeções na esfera de Riemann.** 2018. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Nessa dissertação exploramos os efeitos geométricos das Transformações de Möbius em \mathbb{C} utilizando projeções na Esfera de Riemann. Como aplicação, apresentamos a ação de algumas transformações aplicadas em cônicas no plano. Uma atividade didática voltada aos alunos do Ensino Médio sobre Transformações de Möbius utilizando o Geogebra é apresentada.

Palavras-chave: Números Complexos, Geometria Analítica em \mathbb{C} , Transformações de Möbius, Projeções na Esfera de Riemann.

ABSTRACT

RAIZ, C. E. M. **Möbius transformations and Riemann sphere projections.** 2018. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In the course of this dissertation we explore the geometric effects of the Möbius Transforms in \mathbb{C} using projections in the Riemann sphere. As an application, we present the action of some transformations applied on conics in the plane. A didactic activity aimed at high school students about Möbius Transformations using Geogebra is presented.

Keywords: Complex Numbers, Analytic Geometric in \mathbb{C} , Möbius Transformations, Riemann Sphere Projections.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo 2.1.1	23
Figura 2 – Exemplo 2.1.2	26
Figura 3 – Exemplo 2.1.3	29
Figura 4 – Exemplo 2.1.4	31
Figura 5 – Elipse ξ e os focos F_1 e F_2	32
Figura 6 – Exemplo 2.1.5	35
Figura 7 – Exemplo 2.1.6	38
Figura 8 – $T_\alpha(z) = z + \alpha$	40
Figura 9 – Exemplo 2.2.1. $r \parallel T_\alpha(r)$	43
Figura 10 – z_1, z_2, z_3 e z_4 na circunferência π de raio $\sqrt{2}$ e centro z_0	45
Figura 11 – Exemplo 2.2.2. As circunferências π e $T_\alpha(\pi)$	46
Figura 12 – Homotetia pelo fator ρ_0 e Rotação pelo ângulo θ_0	47
Figura 13 – $M_\beta(z) = (H_{\rho_0} \circ R_{\theta_0})(z) = (R_{\theta_0} \circ H_{\rho_0})(z)$	49
Figura 14 – Exemplo 2.2.3. $\Delta_1 \sim \Delta_2$ - Ângulos preservados e lados dobrados.	50
Figura 15 – Exemplo 2.2.4. r e $M_\beta(r)$ - Bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente.	53
Figura 16 – Exemplo 2.2.5. As circunferências π e $M_\beta(\pi)$ $\beta = -1 - i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$	56
Figura 17 – $z = \rho e^{i\theta}$ e $w = \rho^{-1} e^{-i\theta}$	57
Figura 18 – Exemplo 2.2.6. $I(z)$ transforma a reta r na reta $I(r)$. Ambas passam pela origem.	61
Figura 19 – Exemplo 2.2.7. $I(z)$ transforma retas que não passam pela origem em circunferências que passam pela origem	63
Figura 20 – Exemplo 2.2.8. $I(z)$ transforma circunferências em retas ou em circunferências.	68
Figura 21 – Exemplo 2.2.9. Gráfico da curva $I(\xi)$	72
Figura 22 – Exemplo 2.2.10. Gráfico da hipérbole ψ e da curva $I(\psi)$	75
Figura 23 – As duas soluções da equação (2.30) com a restrição $ z = 1$	76
Figura 24 – z_1 e z_2 são as únicas soluções com a restrição $ z = 1$ para a Equação 2.30 com $n + 2$ divisível por 6	78
Figura 25 – $f(z) = (h \circ g)(z)$	82
Figura 26 – $f(z) = (k \circ j \circ h \circ g)(z)$	84
Figura 27 – Projeção na superfície esférica.	92
Figura 28 – Retas que passam pela origem e suas projeções na esfera(meridianos).	97

Figura 29 – Reta que não passa pela origem, sua projeção na esfera(circunferência) gerada pela intersecção da esfera com o plano de equação 4.12	98
Figura 30 – Circunferências centradas na origem de α_1 projetadas na esfera(Paralelos).	99
Figura 31 – Circunferências centradas em $z_0 = k + ki$, $ k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e raio $\sqrt{2k^2 - 1}$	100
Figura 32 – $T_\alpha(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_\alpha \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$	102
Figura 33 – $M_\beta(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_{M_\beta} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$	104
Figura 34 – $I(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)}$	105
Figura 35 – Passos 1, 2 e 3.	108
Figura 36 – Passo 4.	108
Figura 37 – Passo 5.	109
Figura 38 – Passos 6 e 7.	109
Figura 39 – Exemplo 4.3.1. Movimentos de rotação e translação da esfera \mathbb{S} combinados com as projeções $\pi_{\mathbb{S}}$ e $\pi_{\mathbb{R}^2}$ produzem o mesmo efeito que a transformação $f(w)$	110
Figura 40 – Em Exibir, selecione <i>Janela de Álgebra</i> , <i>Janela de Visualização</i> e <i>Campo de Entrada</i>	116
Figura 41 – O vetor de translação u , com $ u = \alpha $ e orientado de O para α	117
Figura 42 – A curva formada pelo rastro de w_1 é exatamente uma circunferência obtida a partir da translação da circunferência c	118
Figura 43 – A curva delimitada pelo rastro de w_2 revela os efeitos provocados pela transformação Multiplicação por complexo.	119
Figura 44 – A multiplicação por complexo provoca uma ampliação ou redução e também uma rotação da curva.	120
Figura 45 – A multiplicação por complexo vista como uma composição de Homotetia com Rotação.	121
Figura 46 – O rastro deixado por w_3 delimita uma curva fechada correspondente à inversão de uma hipérbole.	122
Figura 47 – A inversão de diferentes hipérbolas, criadas a partir da variação do parâmetro a	122

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO COMPLEXO	21
2.1	Introdução: <i>Geometria Analítica no conjunto dos números complexos</i>	21
2.1.1	<i>Equação da reta</i>	21
2.1.2	<i>Equação da Circunferência</i>	25
2.1.3	<i>Equação da Elipse e da Hipérbole</i>	30
2.2	Transformações elementares no conjunto dos números complexos e a mágica das Inversões	37
2.2.1	<i>Translação</i>	39
2.2.2	<i>Multiplicação por um número complexo</i>	45
2.2.3	<i>Inversão</i>	55
2.3	Aplicação	74
3	TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS	79
3.1	Transformação de Möbius	79
3.2	Composição de transformações elementares	81
3.3	Existência, unicidade e método de determinação de uma Transformação de Möbius	84
4	TRANSFORMAÇÕES E PROJEÇÕES NA ESFERA	89
4.1	Projeções na superfície Esférica e no Plano	89
4.2	Movimentos da Esfera	101
4.3	Transformações de Möbius e a Esfera	106
5	APLICAÇÃO DIDÁTICA	115
5.1	Metodologia	115
5.2	Ideia Geral	115
5.3	Desenvolvimento	116
5.3.1	<i>Translação</i>	116
5.3.2	<i>Multiplicação por complexo</i>	118
5.3.3	<i>Inversão</i>	120
	REFERÊNCIAS	123

INTRODUÇÃO

O assunto dessa monografia está inserido no ambiente do conjunto dos números complexos, também conhecido como conjunto dos números imaginários. Não é de se estranhar que ao se atribuir a um número o nome de "imaginário", o senso comum nos leve a crer que tal número é apenas fruto da criatividade do homem, uma abstração ou mera ilusão que de fato não existe. Dizer que o número i é a raiz quadrada de -1 por exemplo reforça a ideia de que os números complexos não passam de uma conveniente convenção matemática, bem diferente dos números reais, que como a própria nomenclatura indica, fazem parte do nosso cotidiano. O que faz por exemplo o número 5 ser facilmente aceito e considerado como um número que existe, enquanto que o número i seja considerado apenas como uma abstração, algo intangível, uma invenção da mente humana? O curioso é que o conceito de número muito provavelmente seja uma das primeiras abstrações da realidade na história da humanidade. O número 5 por exemplo, não é o símbolo 5, é na verdade uma ideia, representada pelo símbolo 5 ou pela palavra cinco. Quando nos referimos ou escrevemos esse número, temos a sensação de que se trata de algo real, palpável, tangível, mas no fundo, é apenas a representação de um conceito. Se tomarmos como exemplo um jogador de futebol, que ao final de 36 partidas disputadas em um campeonato, tenha marcado 27 gols, é comum analisarmos a média de gols marcados por partida para comparar com outros jogadores que podem não ter disputado a mesma quantidade de jogos ou até mesmo para tentar aferir a eficiência e a capacidade do jogador de decidir partidas. O número racional 0,75, que representa a média de gols por partida, não faz o menor sentido na situação concreta, uma vez que é impossível marcar 0,75 gols em uma partida. Se apresentarmos esse número racional na forma de fração, podemos interpretar esse número como: "Esse jogador leva em média 4 jogos para marcar 3 gols". Ainda assim, mesmo que esse número faça mais sentido nessa representação, é muito comum que nos primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos apresentem dificuldade para compreender e aceitar frações como números. No mundo atual o conjunto dos números complexos é um conceito amplamente utilizado em diversas áreas como Matemática, Física, Química e Engenharia.

Neste trabalho, o principal objetivo é estudar uma classe especial de funções em uma variável complexa, a saber Transformações de Möbius. A organização do texto se dará da seguinte forma. O Capítulo 2, se propõe a discutir resultados clássicos de Geometria Analítica no conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , baseado em conceitos já conhecidos no espaço vetorial \mathbb{R}^2 . Como \mathbb{C} é um corpo algébrico, ele apresenta propriedades adicionais em relação a \mathbb{R}^2 , tendo em vista uma nova operação: multiplicação. A partir da soma e da multiplicação de números complexos, podemos analisar e manipular transformações elementares da Geometria como translação, rotação e homotetia. Além disso podemos também manipular e compreender melhor as inversões, que apresentam características geométricas intrigantes. As Transformações de Möbius são apresentadas no Capítulo 3 e podem ser facilmente compreendidas a partir de projeções e transformações em uma esfera apoiada no plano complexo, assunto abordado no Capítulo 4. O Capítulo 5 é destinado a uma aplicação didática a ser desenvolvida com alunos de Ensino Médio e em cursos de graduação em Matemática. Vale ressaltar que pré-requisitos básicos, bem como notações, de Geometria Analítica serão previamente assumidos (DELGADO, 2012).

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO COMPLEXO

2.1 Introdução: *Geometria Analítica no conjunto dos números complexos*

Inicialmente vamos discutir alguns resultados já conhecidos de Geometria Analítica em \mathbb{R}^2 no conjunto dos números complexos. As equações da reta e de algumas cônicas serão apresentadas não mais em função das coordenadas x e y de \mathbb{R}^2 mas sim em função de z e \bar{z} , ambos pertencentes a \mathbb{C} .

2.1.1 Equação da reta

Vamos identificar $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Considere uma reta r que passa pelo ponto $P_0 = x_0 + y_0i \cong (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor não nulo $\vec{v} = (a, b)$ fixado. Desse modo, se um ponto $P = x + yi \cong (x, y)$ pertence à reta r , então $\overrightarrow{PP_0} \perp \vec{v}$, ou seja, $\langle \overrightarrow{PP_0}, \vec{v} \rangle = 0$ ¹. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{PP_0}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0 \\ ax + by - ax_0 - by_0 &= 0 \\ ax + by &= ax_0 + by_0. \end{aligned}$$

Definindo $c = ax_0 + by_0$, a equação cartesiana da reta r em \mathbb{R}^2 é dada por

$$r: \quad ax + by = c. \tag{2.1}$$

¹ (DELGADO, 2012) Geometria Analítica - Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Crissaff, Capítulo 2, página 40

Para cada número complexo $z = x + yi$ e seu conjugado $\bar{z} = x - yi$, podemos escrever

$$z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\bar{z}i - zi}{2}.$$

Substituindo as identidades acima em (2.1), temos:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + b \left(\frac{\bar{z}i - zi}{2} \right) &= c \\ az + a\bar{z} + b\bar{z}i - bzi &= 2c \\ (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} &= 2c. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta r nas variáveis z e \bar{z} com coeficientes complexos se escreve como

$$\bar{B}z + B\bar{z} = C, \quad (2.2)$$

no qual $B = a + bi$ e $C = 2c$.

Exemplo 2.1.1. Determine a equação da reta no plano complexo que passa por $z_1 = 2$ e $z_2 = 4 + i$.

Já sabemos que a equação procurada é da forma $\bar{B}z + B\bar{z} = C$ com $B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{R}$ e $|B| \neq 0$. Sendo $B = a + bi$ e substituindo z por z_1 e z_2 dados, temos:

$$\begin{aligned} \bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ (a - bi)2 + (a + bi)2 &= C \\ 4a &= C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ (a - bi)(4 + i) + (a + bi)(4 - i) &= C \\ 8a + 2b &= C. \end{aligned}$$

Portanto, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 4a &= C \\ 8a + 2b &= C \end{cases} \Rightarrow 8a + 2b = 4a \Rightarrow b = -2a.$$

Desse modo $B = a - 2ai$ com $a \neq 0$. Tomando $(a = 1)^2$, a equação da reta no plano complexo que passa por z_1 e z_2 se escreve como

$$(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} = 4.$$

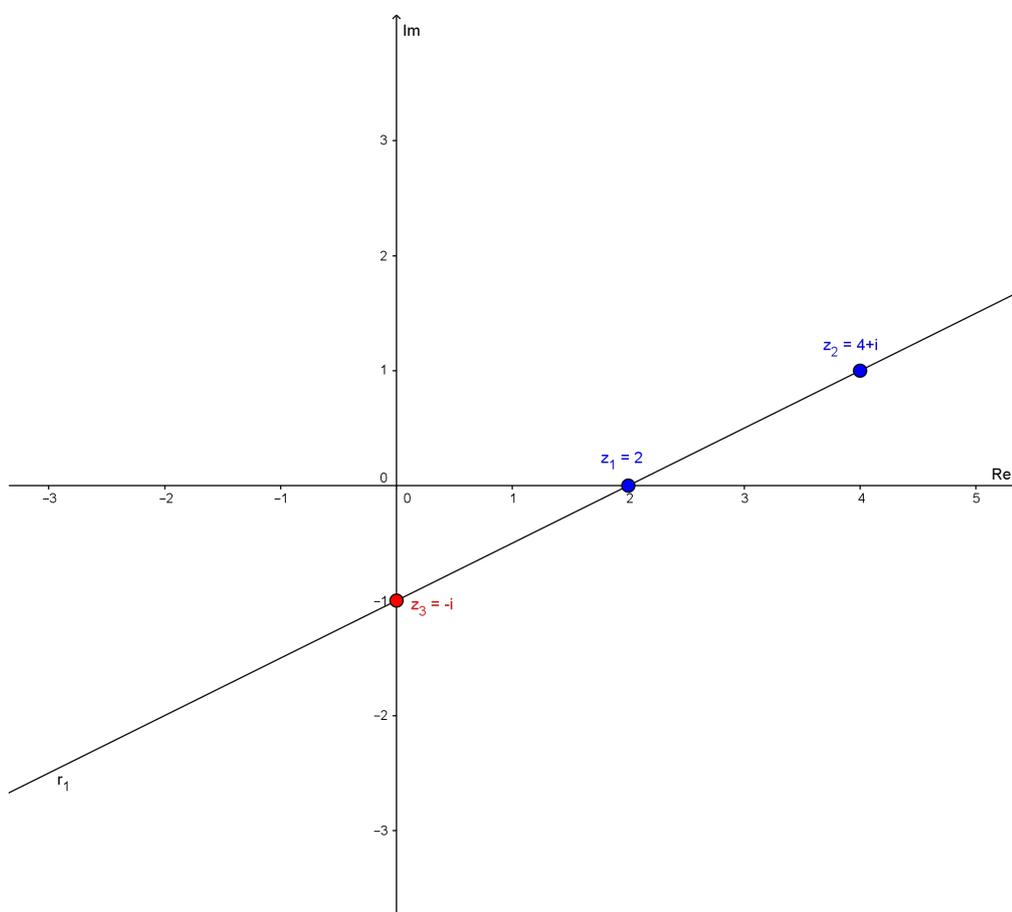


Figura 1 – Exemplo 2.1.1

Observe que o gráfico da reta no plano complexo (Figura 1) intercepta o eixo imaginário em $z_3 = -i$. Logo, z_3 satisfaz a equação da reta, como demonstramos a seguir substituindo z por

² O número real não nulo a pode ser escolhido livremente. A escolha de outro valor diferente para a apenas gera uma equação equivalente, que naturalmente representa a mesma reta.

z_3 , isto é,

$$\begin{aligned}(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} &= 4 \\ (1 + 2i) - i + (1 - 2i)i &= 4 \\ -i - 2i^2 + i - 2i^2 &= 4 \\ 4 &= 4.\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.2. A reta no plano complexo que passa por $z_1 = -2 - 2i$ e $z_2 = 1 + 4i$ intercepta os eixos real e imaginário em dois números complexos distintos. Encontre tais números.

Inicialmente, vamos escrever a equação da reta que passa por z_1 e z_2 em \mathbb{C} . Essa equação é da forma

$$\bar{B}z + B\bar{z} = C.$$

Sendo $B = a + bi$, temos:

$$\begin{aligned}\bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ (a - bi)(-2 - 2i) + (a + bi)(-2 + 2i) &= C \\ -2a - 2ai + 2bi + 2bi^2 - 2a + 2ai - 2bi + 2bi^2 &= C \\ -4a - 4b &= C\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ (a - bi)(1 + 4i) + (a + bi)(1 - 4i) &= C \\ a + 4ai - bi - 4bi^2 + a - 4bi + bi - 4bi^2 &= C \\ 2a + 8b &= C.\end{aligned}$$

Logo, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -4a - 4b = C \\ 2a + 8b = C \end{cases} \Rightarrow -4a - 4b = 2a + 8b \Rightarrow a = -2b.$$

Tomando $b = 1$, temos a equação da reta determinada por z_1 e z_2 por

$$(-2 - i)z + (-2 + i)\bar{z} = 4. \quad (2.3)$$

Sejam z_3 e z_4 os números complexos nos quais a reta intercepta os eixos real e imaginário, respectivamente. Já que z_3 pertence ao eixo real, podemos escrever $z_3 = k + 0i$, $k \in \mathbb{R}$. Como

z_3 também pertence à reta determinada por z_1 e z_2 , então ele deve satisfazer a identidade (2.3). Assim,

$$\begin{aligned}(-2-i)z_3 + (2+i)\overline{z_3} &= 4 \\(-2-i)k + (2+i)k &= 4 \\-2k - ki - 2k + ki &= 4 \\-4k &= 4 \\k &= -1.\end{aligned}$$

Logo, $z_3 = -1$.

Vamos escrever agora $z_4 = 0 + ki$, $k \in \mathbb{R}$, uma vez que z_4 é um imaginário puro. Como z_4 também pertence à reta determinada por z_1 e z_2 , temos:

$$\begin{aligned}(-2-i)z_4 + (2+i)\overline{z_4} &= 4 \\(-2-i)ki + (-2+i)(-ki) &= 4 \\-2ki - ki^2 + 2ki - ki^2 &= 4 \\2k &= 4 \\k &= 2.\end{aligned}$$

Portanto $z_4 = 2i$.

2.1.2 Equação da Circunferência

Dados um ponto $C = x_0 + y_0i \cong (x_0, y_0)$ e um número real positivo r , o lugar geométrico dos pontos que distam de C exatamente r é chamado de circunferência de centro C e raio r e será denotado genericamente por π . Um ponto $P = x + yi \cong (x, y)$ pertence à circunferência π se, e somente se, $d(P, C) = r$, ou seja,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (2.4)$$

A partir dessa equação, também conhecida com equação reduzida da circunferência π , podemos obter a sua equação geral:

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \\x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 &= r^2 \\x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y &= r^2 - (x_0^2 + y_0^2).\end{aligned}$$

Logo, se $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ e $c = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$, a equação geral da circunferência π é dada por

$$\pi: \quad x^2 + y^2 + ax + by = c. \quad (2.5)$$

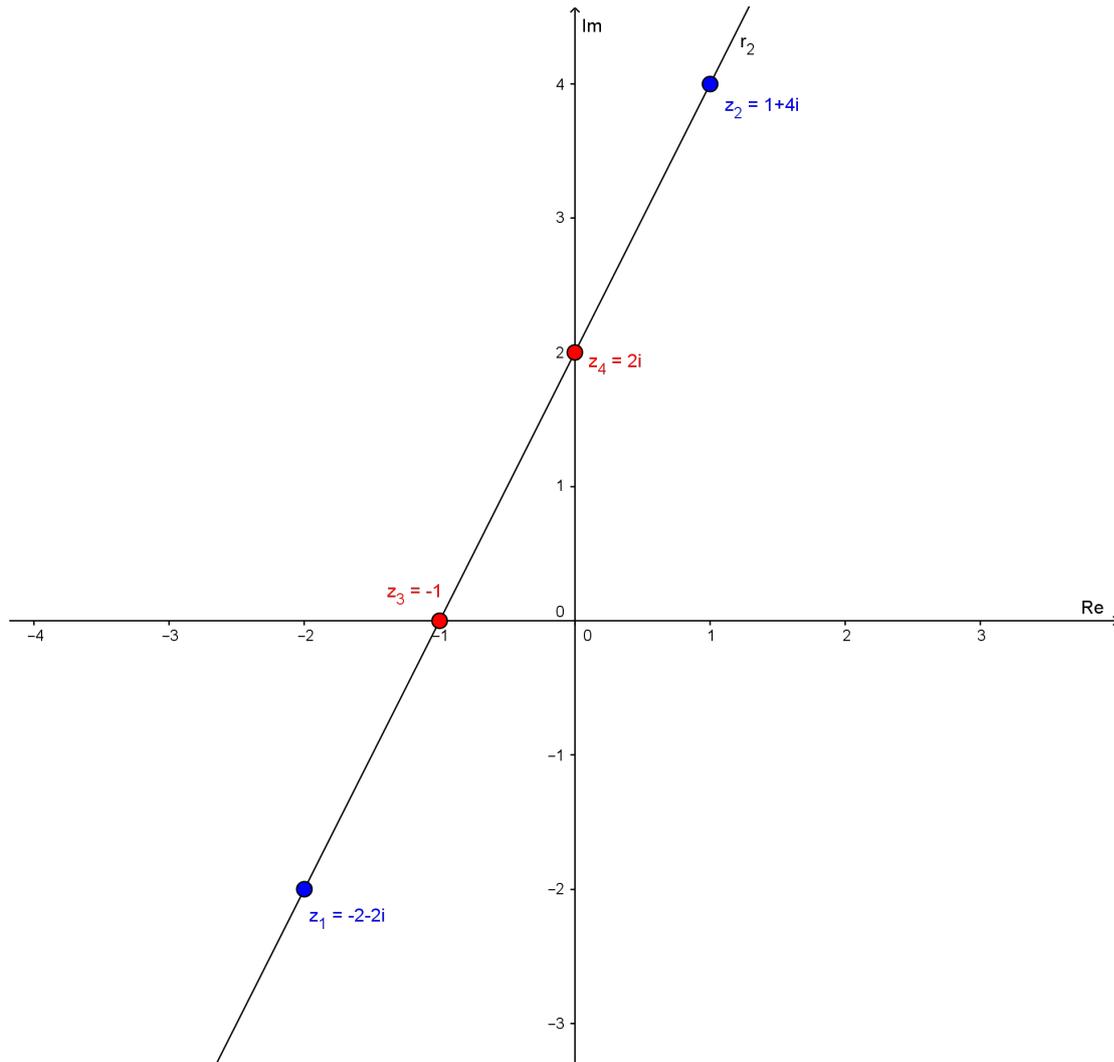


Figura 2 – Exemplo 2.1.2

Observação 2.1.1. A equação geral de uma circunferência qualquer é da forma $dx^2 + dy^2 + a'x + b'y = c'$, com $d \neq 0$. Esta equação pode ser sempre escrita como acima, dividindo toda a equação por d e fazendo $a = \frac{a'}{d}$, $b = \frac{b'}{d}$ e $c = \frac{c'}{d}$. Caso $d = 0$, não teremos os termos quadráticos, logo temos um caso degenerado que é simplesmente uma reta.

Utilizando as identificações anteriores

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad y = \frac{\bar{z}i - zi}{2},$$

segue que

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2.$$

Assim, podemos reescrever a identidade (2.5) do seguinte modo

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by &= c \\z\bar{z} + a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{\bar{z}i - zi}{2}\right) &= c \\|z|^2 + \left(\frac{a-bi}{2}\right)z + \left(\frac{a+bi}{2}\right)\bar{z} &= c.\end{aligned}$$

Conclusão: A equação da circunferência π em relação às variáveis z e \bar{z} se escreve como

$$|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c \quad (2.6)$$

no qual $B = \frac{a+bi}{2}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Vejam agora como escrever o centro e o raio da circunferência π em função dos coeficientes B e c .

1. Centro:

$$C = (x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{(B+\bar{B})}{2}, -\frac{(B-\bar{B})}{2i}\right).$$

2. Raio:

$$r = \sqrt{c + x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{c + |B|^2}.$$

Assim, concluímos que a circunferência π , cuja equação é dada por

$$\pi: |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c,$$

possui centro em $z_0 = -\frac{(B+\bar{B})}{2} - \frac{(B-\bar{B})}{2i}i$ e raio $r = \sqrt{c + |B|^2}$.

Exemplo 2.1.3. Encontre a equação da circunferência π_1 centrada em $z_0 = 1 + i$ de raio unitário. Podemos afirmar que essa circunferência intercepta os eixos real e imaginário?

Utilizando as identificações obtidas acima, temos o seguinte:

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Leftrightarrow (1, 1) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right).$$

Logo, $a = b = -2$. Assim, $B = -1 - i$, o que implica $|B|^2 = 2$. Por fim temos

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{c + |B|^2} \\c &= r^2 - |B|^2 \\c &= 1 - 2 \\c &= -1.\end{aligned}$$

A equação da circunferência π_1 é dada por

$$|z|^2 + (-1 + i)z + (-1 - i)\bar{z} = -1.$$

Queremos agora encontrar um número real, caso possível, que pertença à circunferência π_1 . Chamando tal número de z_1 , podemos escrever $z_1 = k$, para $k \in \mathbb{R}$. Substituindo z por z_1 na equação anterior, temos

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-1 + i)z + (-1 - i)\bar{z} &= -1 \\ |z_1|^2 + (-1 + i)z_1 + (-1 - i)\bar{z}_1 &= -1 \\ |k|^2 + (-1 + i)k + (-1 - i)k &= -1 \\ |k|^2 - k + ki - k - ki &= -1 \\ k^2 - 2k + 1 &= 0 \\ (k - 1)^2 &= 0 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $z_1 = 1$ é o único número real que pertence à circunferência π_1 . Analogamente, chamando $z_2 = ki$, para $k \in \mathbb{R}$, temos que z_2 pertence à circunferência π_1 se

$$\begin{aligned} |z_2|^2 + (-1 + i)z_2 + (-1 - i)\bar{z}_2 &= -1 \\ |ki|^2 + (-1 + i)ki + (-1 - i)(-ki) &= -1 \\ k^2 - ki + ki^2 + ki + ki^2 &= -1 \\ k^2 - 2k + 1 &= 0 \\ (k - 1)^2 &= 0 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $z_2 = i$ é o único número imaginário puro que pertence à circunferência π_1 .

Concluimos então que a circunferência π_1 passa pelos eixos real e imaginário em $z_1 = 1$ e $z_2 = i$, respectivamente. A partir do gráfico (Figura 3), é possível observar que z_1 está uma unidade ao sul e z_2 uma unidade ao leste de z_0 . Se tomarmos uma unidade ao norte e uma unidade ao oeste de z_0 , encontramos $z_3 = 1 + 2i$ e $z_4 = 2 + i$, respectivamente. É evidente que z_3 e z_4 pertencem à circunferência π_1 , e de fato satisfazem sua equação:

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-1 + i)z + (-1 - i)\bar{z} &= -1 \\ |z_3|^2 + (-1 + i)z_3 + (-1 - i)\bar{z}_3 &= -1 \\ |1 + 2i|^2 + (-1 + i)(1 + 2i) + (-1 - i)(1 - 2i) &= -1 \\ 5 - 1 - 2i + i + 2i^2 - 1 + 2i - i + 2i^2 &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |z|^2 + (-1+i)z + (-1-i)\bar{z} &= -1 \\
 |z_4|^2 + (-1+i)z_4 + (-1-i)\bar{z}_4 &= -1 \\
 |2+i|^2 + (-1+i)(2+i) + (-1-i)(2-i) &= -1 \\
 5 - 2 - i + 2i + i^2 - 2 + i - 2i + i^2 &= -1 \\
 -1 &= -1.
 \end{aligned}$$

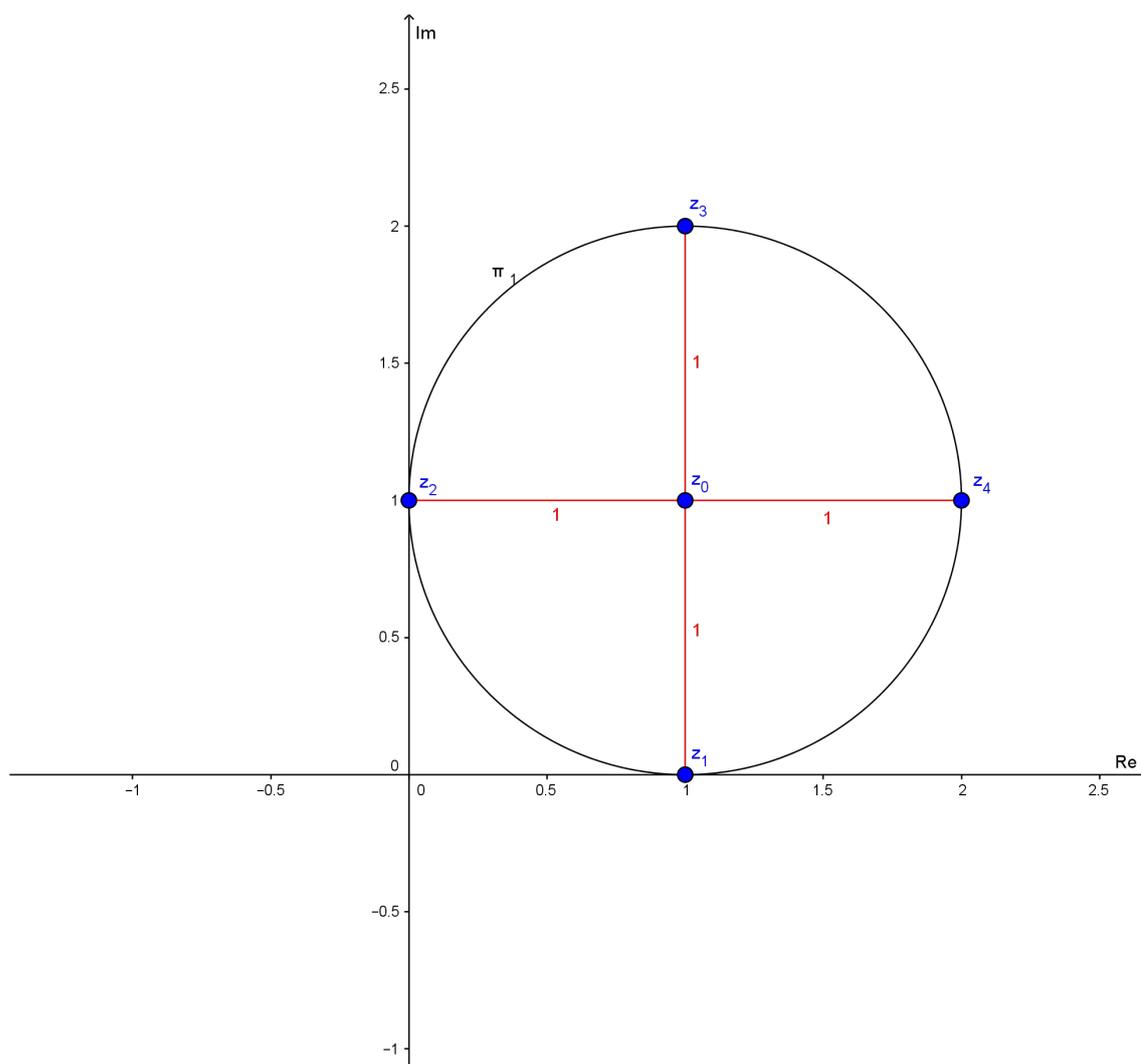


Figura 3 – Exemplo 2.1.3

Exemplo 2.1.4. Determine o centro e o raio da circunferência π_2 cuja equação em \mathbb{C} é dada por $|z|^2 + (-1 - 2i)z + (-1 + 2i)\bar{z} = 0$.

Da equação geral da circunferência π_2 , temos $B = -1 + 2i$, $\bar{B} = -1 - 2i$ e $c = 0$.

Então,

$$C = \left(-\frac{(B + \bar{B})}{2}, -\frac{(B - \bar{B})}{2i} \right) = (1, -2) \text{ e } r = \sqrt{c + |B|^2} \Rightarrow r = \sqrt{0 + 5} = \sqrt{5}.$$

Logo, a circunferência π_2 possui centro em $z_0 = 1 - 2i$ e raio $\sqrt{5}$.

É válido observar que sempre que uma circunferência de equação $|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c$ tiver $c = 0$, o número complexo $z = 0$ pertencerá à circunferência, o que de fato ocorre nesse exemplo (Figura 4). Além disso, observando o gráfico, notamos que a circunferência em questão também passa pelos eixos real e imaginário em $z_1 = 2$ e $z_2 = -4i$, respectivamente. Substituindo z por z_1 e z_2 na equação geral, comprovamos que z_1 e z_2 de fato pertencem à circunferência, isto é

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-1 - 2i)z + (-1 + 2i)\bar{z} &= 0 \\ |z_1|^2 + (-1 - 2i)z_1 + (-1 + 2i)\bar{z}_1 &= 0 \\ |2|^2 + (-1 - 2i)2 + (-1 + 2i)2 &= 0 \\ 4 - 2 - 4i - 2 + 4i &= 0 \\ 4 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-1 - 2i)z + (-1 + 2i)\bar{z} &= 0 \\ |z_2|^2 + (-1 - 2i)z_2 + (-1 + 2i)\bar{z}_2 &= 0 \\ |-4i|^2 + (-1 - 2i)(-4i) + (-1 + 2i)4i &= 0 \\ 16 + 4i + 8i^2 - 4i + 8i^2 &= 0 \\ 16 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

2.1.3 Equação da Elipse e da Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ com distancia igual a $2c$, $c > 0$, denominamos o conjunto elipse ξ o lugar geométrico dos pontos $P = x + yi \cong (x, y)$ cuja soma das distancias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a$, com $a > c > 0$, isto é

$$\xi = \{P \in \mathbb{R}^2; \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\},$$

no qual $d(P, Q)$ denota a distância euclidiana entre dois pontos no plano.

Afim de ilustrar no plano a elipse ξ , por conveniência vamos adotar um sistema de coordenadas ortonormal no qual o centro C , ponto médio de F_1 e F_2 , é a origem do sistema, o primeiro vetor formado pela reta que contém F_1 e F_2 e de sentido $\overrightarrow{F_1F_2}$ e o segundo vetor ortogonal a $\overrightarrow{F_1F_2}$, sentido positivo do sistema. Dessa forma se $P = x + yi \cong (x, y)$ pertence à elipse ξ , então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

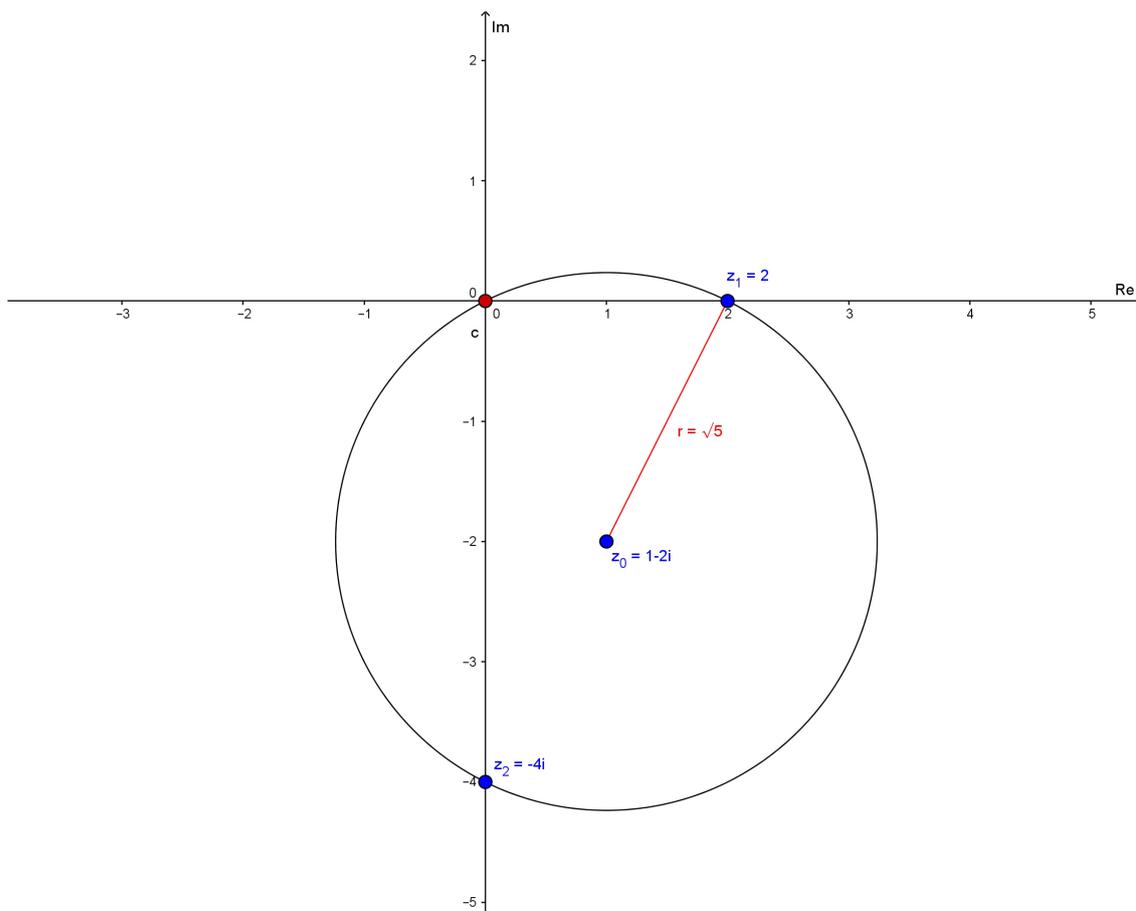


Figura 4 – Exemplo 2.1.4

Desenvolvendo essa equação, chegamos ao que conhecemos como equação reduzida da elipse ξ que em relação ao sistema de coordenadas definido anteriormente é escrita na forma

$$\xi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{no qual } b^2 = a^2 - c^2.$$

A elipse ξ' obtida a partir da translação da elipse ξ pelo vetor $\vec{t} = (x_0, y_0)$ tem sua equação reduzida, em relação ao sistema de coordenadas definido anteriormente, escrita na forma

$$\xi' : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Podemos encontrar a equação geral da elipse ξ' a partir do desenvolvimento de sua equação reduzida, isto é

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2 - 2x_0x + x_0^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2y_0y + y_0^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y &= a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2. \end{aligned}$$

Então, a equação geral da elipse ξ' tem a forma:

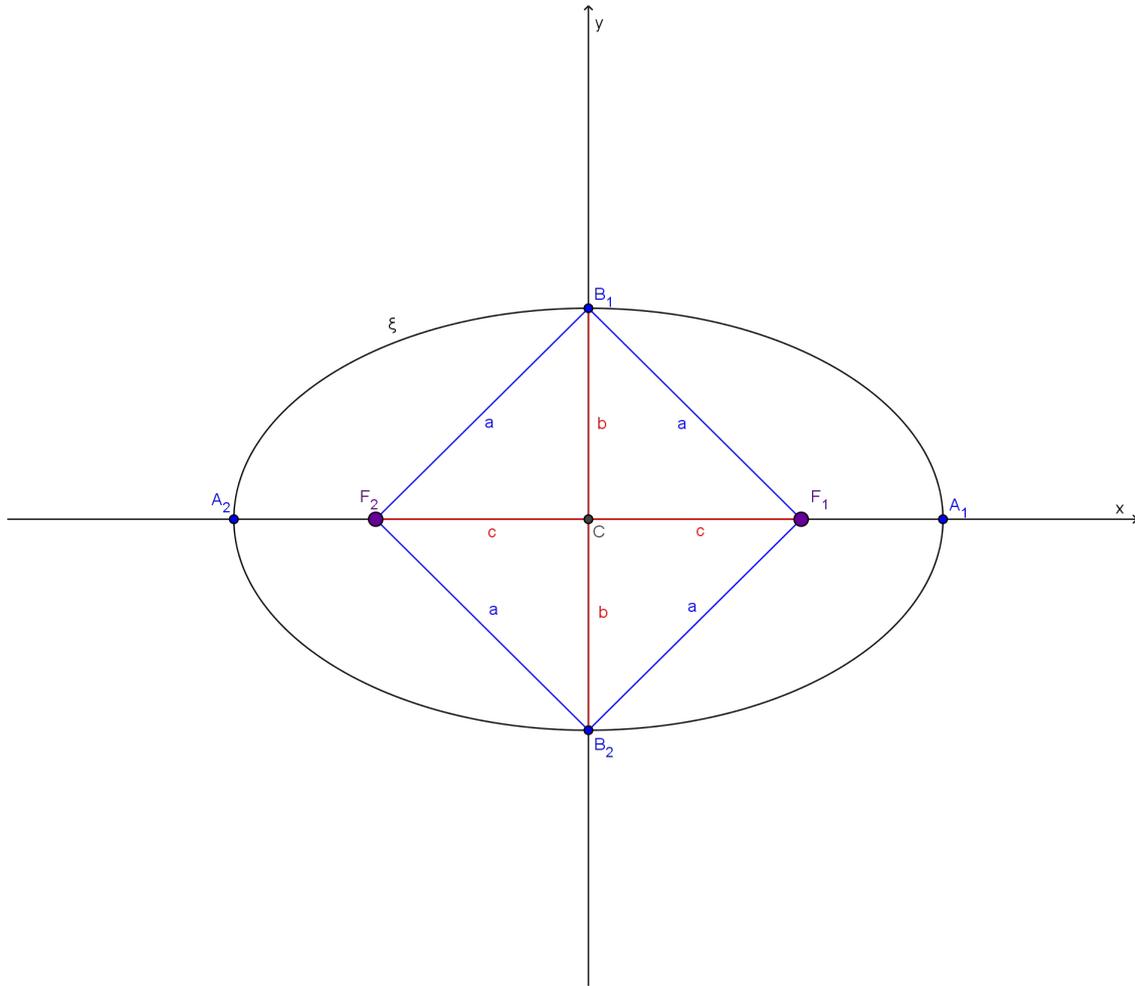


Figura 5 – Elipse ξ e os focos F_1 e F_2

$$\xi' : \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

no qual $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = a^2b^2 - (b^2x_0^2 + a^2y_0^2)$.

Reescrevendo a equação nas variáveis z e \bar{z} temos:

$$\begin{aligned}
 Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey &= F \\
 A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + C\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + D\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + E\left(\frac{\bar{z}i - zi}{2}\right) &= F \\
 A\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) + C\left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) + \frac{D}{2}z + \frac{D}{2}\bar{z} + \frac{Ei}{2}\bar{z} - \frac{Ei}{2}z &= F \\
 \frac{A}{4}z^2 + \frac{A}{2}z\bar{z} + \frac{A}{4}\bar{z}^2 - \frac{C}{4}z^2 + \frac{C}{2}z\bar{z} - \frac{C}{4}\bar{z}^2 + \left(\frac{D}{2} - \frac{Ei}{2}\right)z + \left(\frac{D}{2} + \frac{Ei}{2}\right)\bar{z} &= F \\
 \left(\frac{A-C}{4}\right)z^2 + \left(\frac{A+C}{2}\right)z\bar{z} + \left(\frac{A-C}{4}\right)\bar{z}^2 + \left(\frac{D}{2} - \frac{Ei}{2}\right)z + \left(\frac{D}{2} + \frac{Ei}{2}\right)\bar{z} &= F \\
 \left(\frac{A-C}{4}\right)(z^2 + \bar{z}^2) + \left(\frac{A+C}{2}\right)z\bar{z} + \left(\frac{D}{2} - \frac{Ei}{2}\right)z + \left(\frac{D}{2} + \frac{Ei}{2}\right)\bar{z} &= F.
 \end{aligned}$$

Portanto, a equação da elipse ξ' em \mathbb{C} é dada por

$$\xi' : \quad G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F, \quad (2.7)$$

no qual $G = \frac{b^2 - a^2}{4}$, $H = \frac{a^2 + b^2}{2}$, $F = a^2b^2 - (b^2x_0^2 + a^2y_0^2)$ e $B = -b^2x_0 + -a^2y_0i$.

Exemplo 2.1.5. Encontre a equação da elipse ξ em \mathbb{C} que passa por $z_1 = 2 + 6i$ e tem $w_1 = 6 + 3i$ e $w_2 = -2 + 3i$ como seus focos.

Com os dados fornecidos, podemos concluir que:

1. A elipse ξ tem centro em $z_0 = 2 + 3i$, ponto médio de w_1 e w_2 .
2. A reta focal, reta que contém os pontos w_1 e w_2 , é paralela à reta real e a distância focal é igual a 8. Logo, $c = 4$.
3. A reta não focal, reta mediatriz do segmento formado pelos pontos w_1 e w_2 , é paralela ao eixo imaginário, e além disso,

$$\begin{aligned} d(z_1, w_1) + d(z_1, w_2) &= 2a \\ 5 + 5 &= 2a \\ a &= 5. \end{aligned}$$

4. Nesse caso, temos a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, $b^2 = a^2 - c^2$, ou seja, $b = 3$.

Assim,

$$G = -4; \quad H = 17; \quad F = -36; \quad B = -18 - 75i.$$

Portanto a equação da elipse ξ em \mathbb{C} , conforme os itens apresentados é dada por

$$-4(z^2 + \bar{z}^2) + 17|z|^2 + (-18 + 75i)z + (-18 - 75i)\bar{z} = -36.$$

Vamos agora mostrar que os números complexos $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = -3 + 3i$, $z_3 = 2$ e $z_4 = 7 + 3i$ satisfazem a equação encontrada e, assim de fato pertencem à elipse ξ . Veja (Figura 6)

$$\boxed{z = z_1}$$

$$\begin{aligned} -4(z^2 + \bar{z}^2) + 17|z|^2 + (-18 + 75i)z + (-18 - 75i)\bar{z} &= -36 \\ -4(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + 17|z_1|^2 + (-18 + 75i)z_1 + (-18 - 75i)\bar{z}_1 &= -36 \\ -4(-64) + 17 \cdot 40 - 36 - 108i + 150i + 450i^2 - 36 + 108i - 150i + 450i^2 &= -36 \\ -36 &= -36; \end{aligned}$$

$$z = z_2$$

$$\begin{aligned} -4(z^2 + \bar{z}^2) + 17|z|^2 + (-18 + 75i)z + (-18 - 75i)\bar{z} &= -36 \\ -4(z_2^2 + \bar{z}_2^2) + 17|z_2|^2 + (-18 + 75i)z_2 + (-18 - 75i)\bar{z}_2 &= -36 \\ -4(0) + 17 \cdot 18 + 54 - 54i - 225i + 225i^2 + 54 + 54i + 225i + 225i^2 &= -36 \\ -36 &= -36; \end{aligned}$$

$$z = z_3$$

$$\begin{aligned} -4(z^2 + \bar{z}^2) + 17|z|^2 + (-18 + 75i)z + (-18 - 75i)\bar{z} &= -36 \\ -4(z_3^2 + \bar{z}_3^2) + 17|z_3|^2 + (-18 + 75i)z_3 + (-18 - 75i)\bar{z}_3 &= -36 \\ -4(8) + 17 \cdot 4 - 36 + 150i - 36 - 150i &= -36 \\ -36 &= -36; \end{aligned}$$

$$z = z_4$$

$$\begin{aligned} -4(z^2 + \bar{z}^2) + 17|z|^2 + (-18 + 75i)z + (-18 - 75i)\bar{z} &= -36 \\ -4(z_4^2 + \bar{z}_4^2) + 17|z_4|^2 + (-18 + 75i)z_4 + (-18 - 75i)\bar{z}_4 &= -36 \\ -4(80) + 17 \cdot 58 - 126 - 54i + 525i + 225i^2 - 126 + 54i - 525i + 225i^2 &= -36 \\ -36 &= -36. \end{aligned}$$

Vamos agora reescrever a equação da hipérbole nas variáveis z e \bar{z} . Assim, considere dois pontos distintos F_1 e F_2 em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ com distância igual a $2c$, $c > 0$. Denominaremos por hipérbole ψ o lugar geométrico dos pontos $P = x + yi \cong (x, y)$ cujo módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a$, com $c > a > 0$, isto é

$$\psi = \{P \in \mathbb{R}^2; \quad |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Analogamente ao que fizemos com a elipse, podemos desenvolver uma equação para identificar analiticamente se um ponto P pertence à hipérbole ψ , isto é, obter uma equação reduzida em relação a um sistema de coordenadas escolhido a partir de F_1 e F_2 . Desse modo, vamos adotar um sistema de coordenadas ortonormal no qual o centro C , ponto médio de F_1 e F_2 , é a origem do sistema, o primeiro vetor formado pela reta que contém F_1 e F_2 e de sentido $\overrightarrow{F_1 F_2}$ e o segundo vetor ortogonal a $\overrightarrow{F_1 F_2}$, sentido positivo do sistema. Assim, a equação reduzida da hipérbole ψ , em relação a esse sistema de coordenadas, é dada por

$$\psi: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{no qual} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

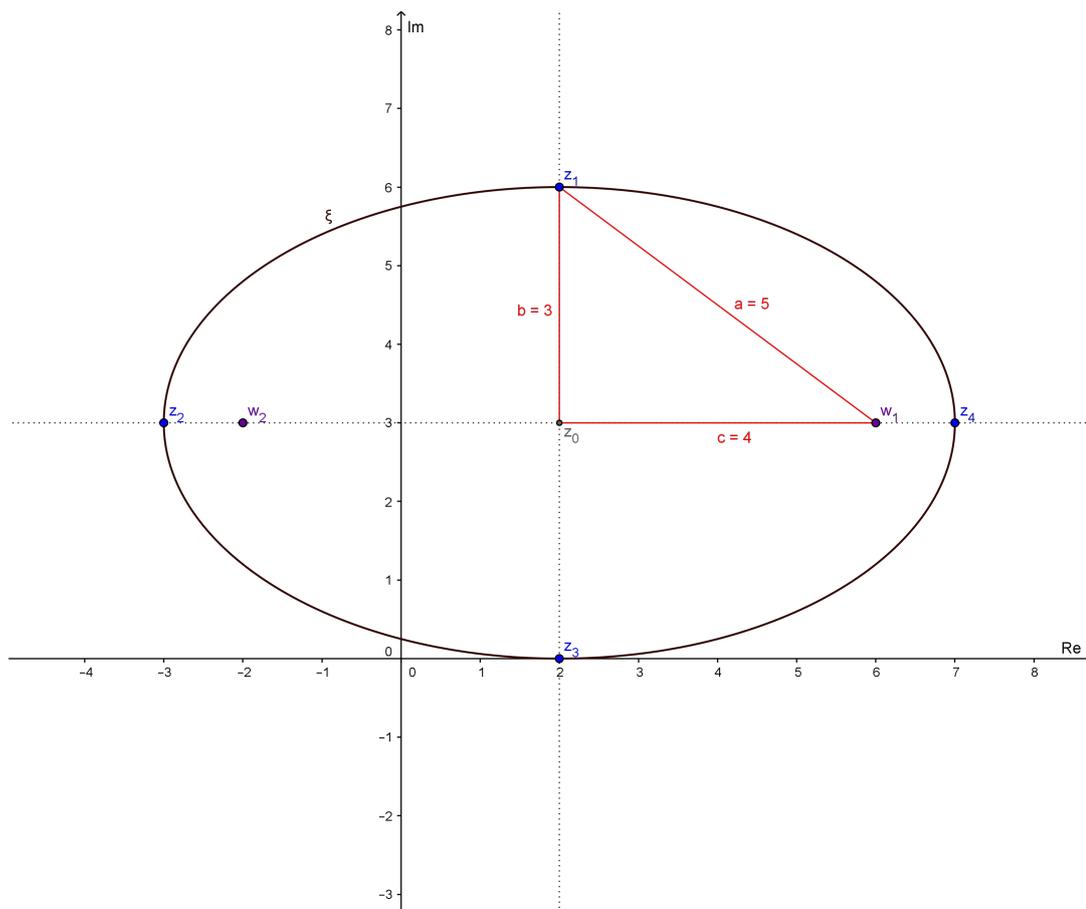


Figura 6 – Exemplo 2.1.5

Desse modo, a equação reduzida de uma hipérbole ψ' obtida a partir da translação da hipérbole ψ por um vetor $\vec{t} = (x_0, y_0)$, em relação ao sistema de coordenadas anteriormente centrado em (x_0, y_0) , é dada por

$$\psi' : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.8)$$

A partir dessa equação, podemos obter a equação geral da hipérbole ψ' como

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2 - 2x_0x + x_0^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2y_0y + y_0^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y &= a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2. \end{aligned}$$

Então, a equação geral da hipérbole ψ' tem a forma:

$$\psi' : Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F_h,$$

no qual $A = b^2$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$ e $F_h = a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2$.

A construção acima nos mostra que a equação geral da hipérbole ψ' possui semelhança com a equação geral da elipse ξ' nas variáveis cartesianas. Entretanto, a partir dos coeficientes A e C , podemos identificar a cônica representada pela equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$.

Se $AC > 0$, a equação pode representar:

- uma elipse.
- um ponto.
- o conjunto vazio.

Se $AC < 0$, a equação pode representar:

- uma hipérbole.
- um par de retas concorrentes.

Em uma variável complexa $z \in \mathbb{C}$, chegamos à equação da hipérbole ψ' .

$$\psi' : \quad G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F_h, \quad (2.9)$$

no qual $G = \frac{a^2 + b^2}{4}$, $H = \frac{b^2 - a^2}{2}$, $F_h = a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2$ e $B = (-b^2x_0) + (a^2y_0)i$.

Analogamente, podemos mostrar que a equação da hipérbole ψ'' em \mathbb{C} , em relação ao sistema de coordenadas que foi fixado anteriormente, com focos $F_1 = x_0 + (y_0 + c)i \cong (x_0, y_0 + c)$ e $F_2 = x_0 + (y_0 - c)i \cong (x_0, y_0 - c)$, é dada por

$$\psi'' : \quad -G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F_v, \quad (2.10)$$

com $G = \frac{a^2 + b^2}{4}$, $H = \frac{b^2 - a^2}{2}$, $F_v = a^2b^2 + a^2x_0^2 - b^2y_0^2$ e $B = (a^2x_0) + (-b^2y_0)i$.

Exemplo 2.1.6. Encontre a equação da hipérbole ψ centrada em $z_0 = -2 + 2i$, que tangencia o eixo real em $z_1 = -2$ e tem $w_2 = -2 + (2 + \sqrt{5})i$ como um de seus focos.

1. A hipérbole ψ tem centro em $z_0 = -2 + 2i$. Logo, $x_0 = -2$ e $y_0 = 2$.
2. O eixo focal da hipérbole ψ , reta que contém os focos, é paralelo ao eixo imaginário. Logo, $c = \text{Im}(w_2) - \text{Im}(z_0)$, ou seja, $c = \sqrt{5}$.

3. Uma vez que z_0 é ponto médio de w_1 e w_2 , podemos concluir que $w_1 = -2 + (2 - \sqrt{5})i$ é o outro foco dessa hipérbole. Assim, temos que

$$\begin{aligned} |d(z_1, w_1) - d(z_1, w_2)| &= 2a \\ |\sqrt{5} - 2 - 2 + \sqrt{5}| &= 2a \\ |-4| &= 2a \\ a &= 2. \end{aligned}$$

4. A relação $c^2 = a^2 + b^2$ é válida para a hipérbole ψ e portanto $b = 1$.

Assim,

$$G = -\frac{5}{4}, \quad H = -\frac{3}{2}, \quad F_2 = 16, \quad B = -8 - 2i.$$

Portanto, a equação da hipérbole ψ em \mathbb{C} é:

$$-\frac{5}{4}(z^2 + \bar{z}^2) + \frac{3}{2}|z|^2 + (-8 + 2i)z + (-8 - 2i)\bar{z} = 16.$$

Vamos verificar que $z_1 = -2$ e $z_2 = -2 + 4i$, pertencentes à hipérbole ψ , de fato satisfazem a sua equação:

$$\boxed{z = z_1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{5}{4}(z^2 + \bar{z}^2) - \frac{3}{2}|z|^2 + (-8 + 2i)z - (-8 - 2i)\bar{z} &= 16 \\ -\frac{5}{4}((-2)^2 + (-2)^2) - \frac{3}{2}2^2 + (-8 + 2i)(-2) + (-8 - 2i)(-2) &= 16 \\ -10 - 6 + 16 - 4i + 16 + 4i &= 16 \\ 16 &= 16; \end{aligned}$$

$$\boxed{z = z_2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{5}{4}(z^2 + \bar{z}^2) - \frac{3}{2}|z|^2 + (-8 + 2i)z + (-8 - 2i)\bar{z} &= 16 \\ -\frac{5}{4}((-2 + 4i)^2 + (-2 - 4i)^2) - \frac{3}{2}((-2)^2 + 4^2) + (-8 + 2i)(-2 + 4i) + (-8 - 2i)(-2 - 4i) &= 16 \\ 30 - 30 + 16 - 32i - 4i + 8i^2 + 16 + 32i + 4i + 8i^2 &= 16 \\ 16 &= 16. \end{aligned}$$

2.2 Transformações elementares no conjunto dos números complexos e a mágica das Inversões

Nesta seção, trataremos de algumas *transformações no plano complexo*. Podemos definir uma função de uma variável complexa como uma função $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, com S subconjunto de \mathbb{C} ,

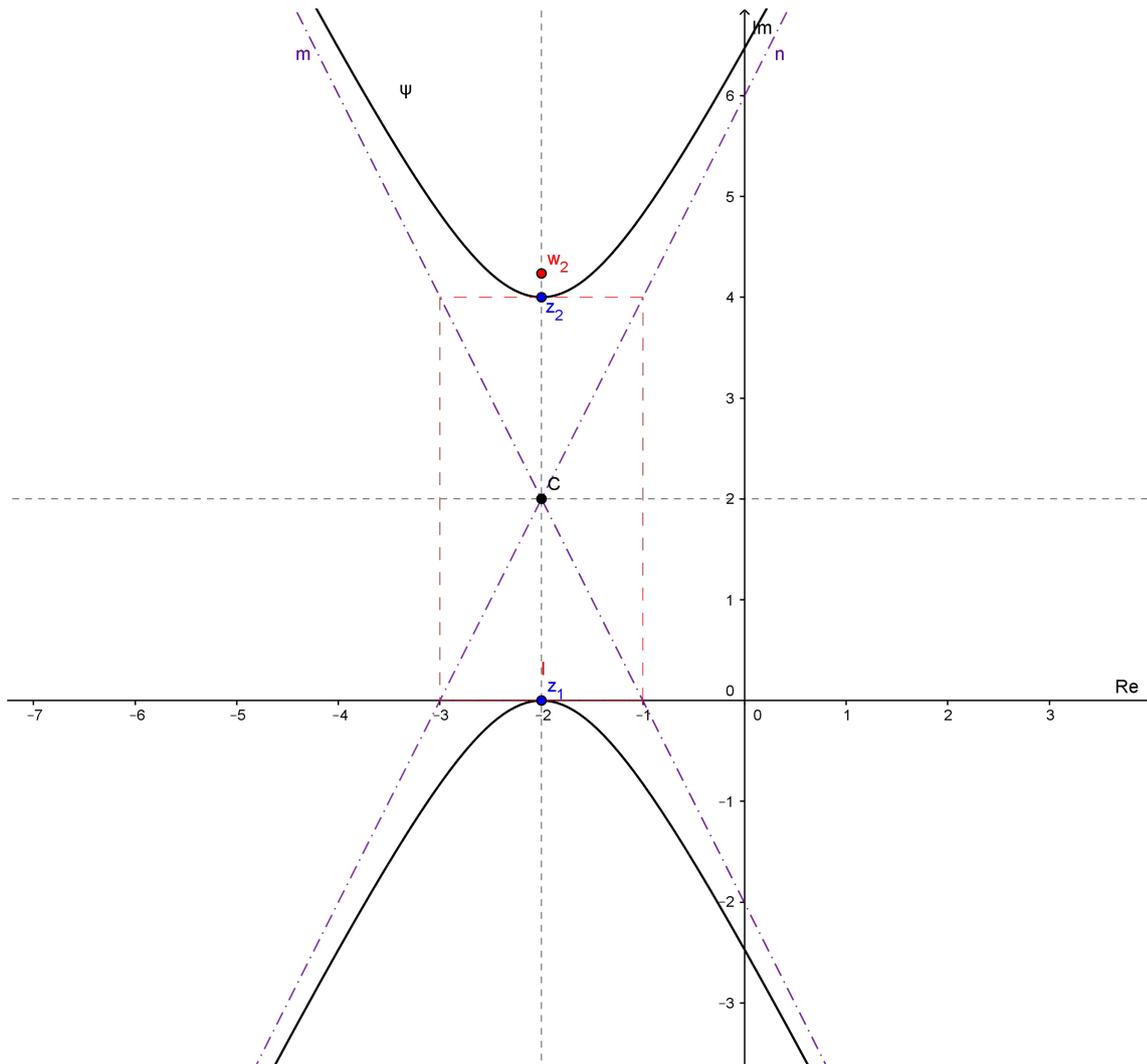


Figura 7 – Exemplo 2.1.6

que associa a cada número complexo z em S a um número complexo w . O conjunto S é chamado de domínio de f e denotamos w como imagem de $z \in S$, isto é, $f(z) = w$. Para que uma função esteja bem definida, é necessário exibirmos o seu domínio e sua lei de formação. Entretanto, caso o domínio não seja apresentado, vamos considerar o maior subconjunto possível de acordo com a lei de formação. É conveniente observar que, diferentemente de uma função de uma variável real cujas propriedades podem ser facilmente exibidas através de seu gráfico, uma função de uma variável complexa não suporta uma representação gráfica visual adequada, justamente pelo fato de que o gráfico pertence a $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Para contornar tal situação, vamos apresentar informações gráficas de uma função em uma variável complexa indicando pares ordenados correspondentes de números complexos z (domínio) e w (imagem), desenhando separadamente os planos do domínio e da imagem quando necessário. A esse processo, chamaremos de mapeamento ou simplesmente, transformação. A fim de se obter uma informação mais clara e concisa, exibiremos, em alguns casos, um esboço das imagens de curvas e regiões do domínio, ao invés de apresentar apenas a imagem de pontos isolados. Termos já notoriamente conhecidos como *Translação*,

Rotação e Reflexão são utilizados para transmitir características geométricas importantes de alguns mapeamentos. Nesses casos, será mais conveniente considerar um único plano para o domínio e a imagem.

Vamos apresentar abaixo algumas transformações elementares com propriedades e peculiaridades interessantes.

2.2.1 Translação

Fixado $\alpha \in \mathbb{C}$, considere a transformação $T_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$T_\alpha(z) = z + \alpha.$$

Admitindo que $\alpha = x_0 + y_0i$, $z = x + yi$ e $w = u + vi$, temos:

$$w = T_\alpha(z) = z + \alpha \Leftrightarrow u + vi = x + yi + x_0 + y_0i \Leftrightarrow u + vi = (x + x_0) + (y + y_0)i.$$

Assim, $u = \operatorname{Re}(w) = x + x_0$ e $v = \operatorname{Im}(w) = y + y_0$.

Uma *translação* tem a propriedade de que retas no domínio são transformadas em retas no contradomínio e círculos são transformados em círculos. Vamos demonstrar tal fato algebricamente e ilustra-lo nos Exemplos 2.2.1 e 2.2.2. Considere a reta

$$r : \quad \bar{B}z + B\bar{z} = C.$$

Denotaremos por $T_\alpha(r)$ a imagem de todos os complexos z que pertencem à reta r , ou seja, $T_\alpha(r) = \{w = T_\alpha(z), \bar{B}z + B\bar{z} = C\}$. Tome $w \in T_\alpha(r)$, logo existe $z \in r$ de modo que $w = T_\alpha(z)$. Assim, $w = T_\alpha(z) = z + \alpha$, ou seja, $z = w - \alpha$. Uma vez que $z \in r$ e portanto satisfaz sua equação, segue que

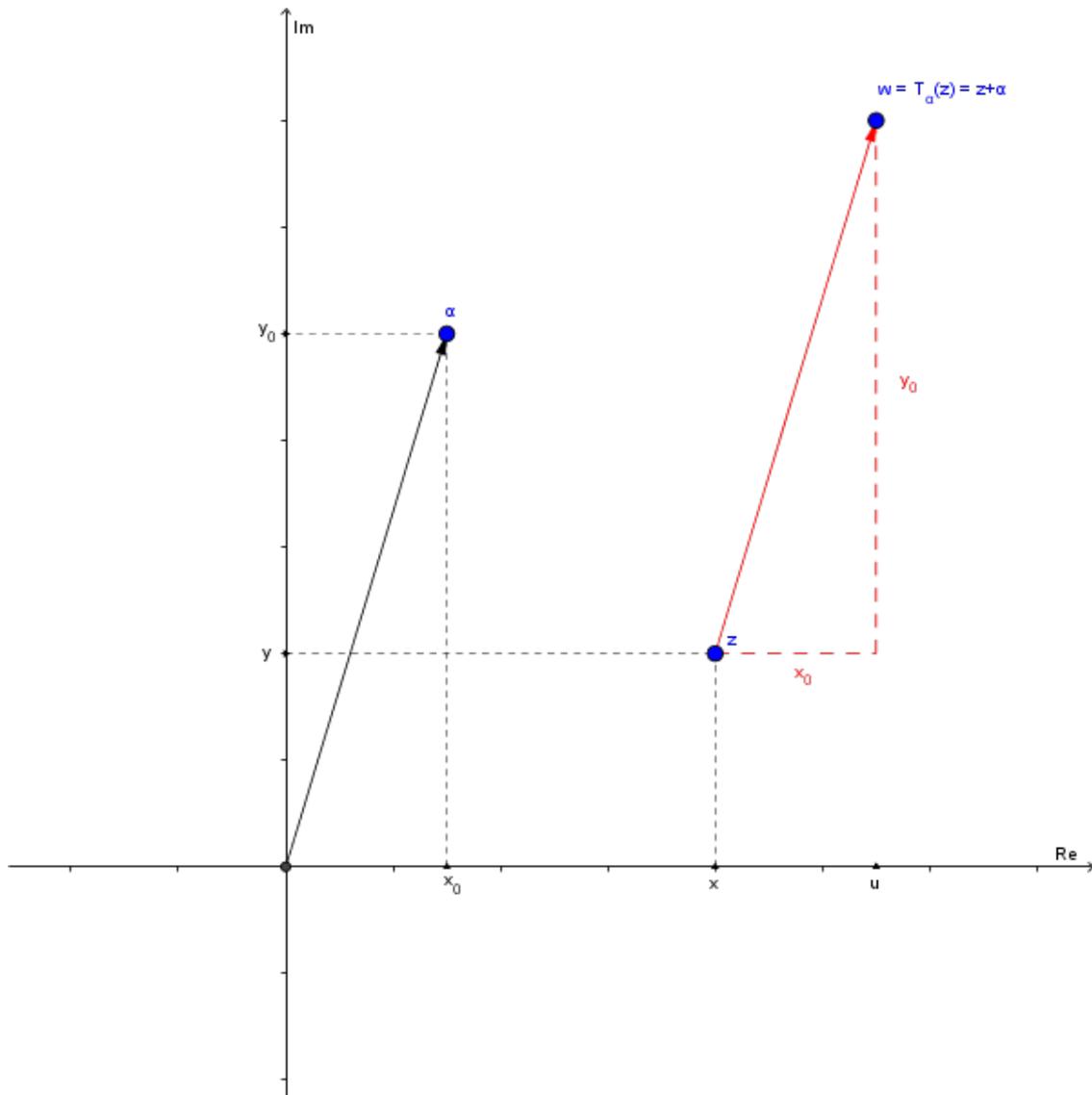
$$\begin{aligned} \bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ \bar{B}(w - \alpha) + \overline{B(w - \alpha)} &= C \\ \bar{B}w - \bar{B}\alpha + B\bar{w} - B\bar{\alpha} &= C \\ \bar{B}w + B\bar{w} &= C + \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Definindo $C' := \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, temos que $T_\alpha(r) = w$ satisfaz

$$T_\alpha(r) : \quad \bar{B}w + B\bar{w} = C', \tag{2.11}$$

que representa uma reta.

Observação 2.2.1. Comparando as equações das retas r e $T_\alpha(r)$, concluímos que elas apresentam os mesmos coeficientes B e \bar{B} , diferindo apenas no coeficiente independente C e C' . Note que $T_\alpha(r)$ e r serão coincidentes se, e somente se, $C = C'$, ou seja, $T_\alpha(r) = r \Leftrightarrow \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha} = 0$. Como

Figura 8 – $T_\alpha(z) = z + \alpha$

$|B| \neq 0$, para que isto ocorra, devemos ter $\alpha = 0$ (*caso trivial*) ou, usando a mesma notação já utilizada para B e α , segue que

$$\begin{aligned} \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha} &= 0 \\ (a - bi)(x_0 + y_0i) + (a + bi)(x_0 - y_0i) &= 0 \\ ax_0 + by_0 &= 0. \end{aligned}$$

Identificando B e α em \mathbb{R}^2 , isto é, $B = a + bi \cong (a, b)$ e $\alpha = x_0 + y_0i \cong (x_0, y_0)$, a observação acima nos mostra que:

$$ax_0 + by_0 = 0 \Leftrightarrow \langle B, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{OB} \perp \vec{O\alpha}.$$

Como B é perpendicular à reta r , α deve ser paralelo a r . Resumindo: $T_\alpha(r)$ e r são retas paralelas e só serão coincidentes se $\alpha = 0$ ou α pertence a uma reta paralela a reta r .

Exemplo 2.2.1. Seja $T_\alpha(z) = z + \alpha$ com $\alpha = 2 + i$. Calcule $T_\alpha(r)$, no qual r é a reta que passa por $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 5 + 5i$.

Inicialmente vamos calcular $w_1 = T_\alpha(z_1)$ e $w_2 = T_\alpha(z_2)$, isto é,

$$w_1 = T_\alpha(z_1) = z_1 + \alpha = 3 + 2i + 2 + i = 5 + 3i,$$

e

$$w_2 = T_\alpha(z_2) = z_2 + \alpha = 5 + 5i + 2 + i = 7 + 6i.$$

Já sabemos que a equação da reta r se escreve na forma (2.2). Como $B = a + bi$ e r passa por z_1 e z_2 , temos:

$$\bar{B}z + B\bar{z} = C$$

$$\bar{B}z_1 + B\bar{z}_1 = C$$

$$(a + bi)(3 + 2i) + (a + bi)(3 - 2i) = C$$

$$6a + 4b = C,$$

e

$$\bar{B}z + B\bar{z} = C$$

$$\bar{B}z_2 + B\bar{z}_2 = C$$

$$(a + bi)(5 + 5i) + (a + bi)(5 - 5i) = C$$

$$10a + 10b = C.$$

Logo,

$$6a + 4b = 10a + 10b$$

$$2a = -3b.$$

Tomando $a = 3$, temos $b = -2$ e $C = 10$. Assim, a reta r que passa por z_1 e z_2 tem equação:

$$r: (3 + 2i)z + (3 - 2i)\bar{z} = 10.$$

Com a equação da reta r , podemos encontrar a equação da reta $T_\alpha(r)$, usando os resultados obtidos nesta seção. A equação de $T_\alpha(r)$ se escreve na forma da equação (2.11), com $C' = C + \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha}$. Assim,

$$C' = C + \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha}$$

$$C' = 10 + (3 + 2i)(2 + i) + (3 - 2i)(2 - i)$$

$$C' = 18.$$

Portanto, a equação da reta $T_\alpha(r)$ é dada por

$$T_\alpha(r) : (3 + 2i)z + (3 - 2i)\bar{z} = 18.$$

Só nos resta verificar que w_1 e w_2 satisfazem essa equação.

$$\begin{aligned} (3 + 2i)z + (3 - 2i)\bar{z} &= 18 \\ (3 + 2i)w_1 + (3 - 2i)\bar{w}_1 &= 18 \\ (3 + 2i)(5 + 3i) + (3 - 2i)(5 - 3i) &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (3 + 2i)z + (3 - 2i)\bar{z} &= 18 \\ (3 + 2i)w_2 + (3 - 2i)\bar{w}_2 &= 18 \\ (3 + 2i)(7 + 6i) + (3 - 2i)(7 - 6i) &= 18 \\ 18 &= 18. \end{aligned}$$

Como era de se esperar, as retas r e $T_\alpha(r)$ são paralelas (ver Figura 9).

Vamos agora demonstrar que T_α transforma circunferências em circunferências. Considere a circunferência π , dada por

$$\pi : |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c.$$

Tome $w \in T_\alpha(\pi)$, então existe $z \in \pi$ tal que $w = T_\alpha(z)$. Desse modo, $z = w - \alpha$. Substituindo z por $w - \alpha$ na equação da circunferência π acima, ficamos com:

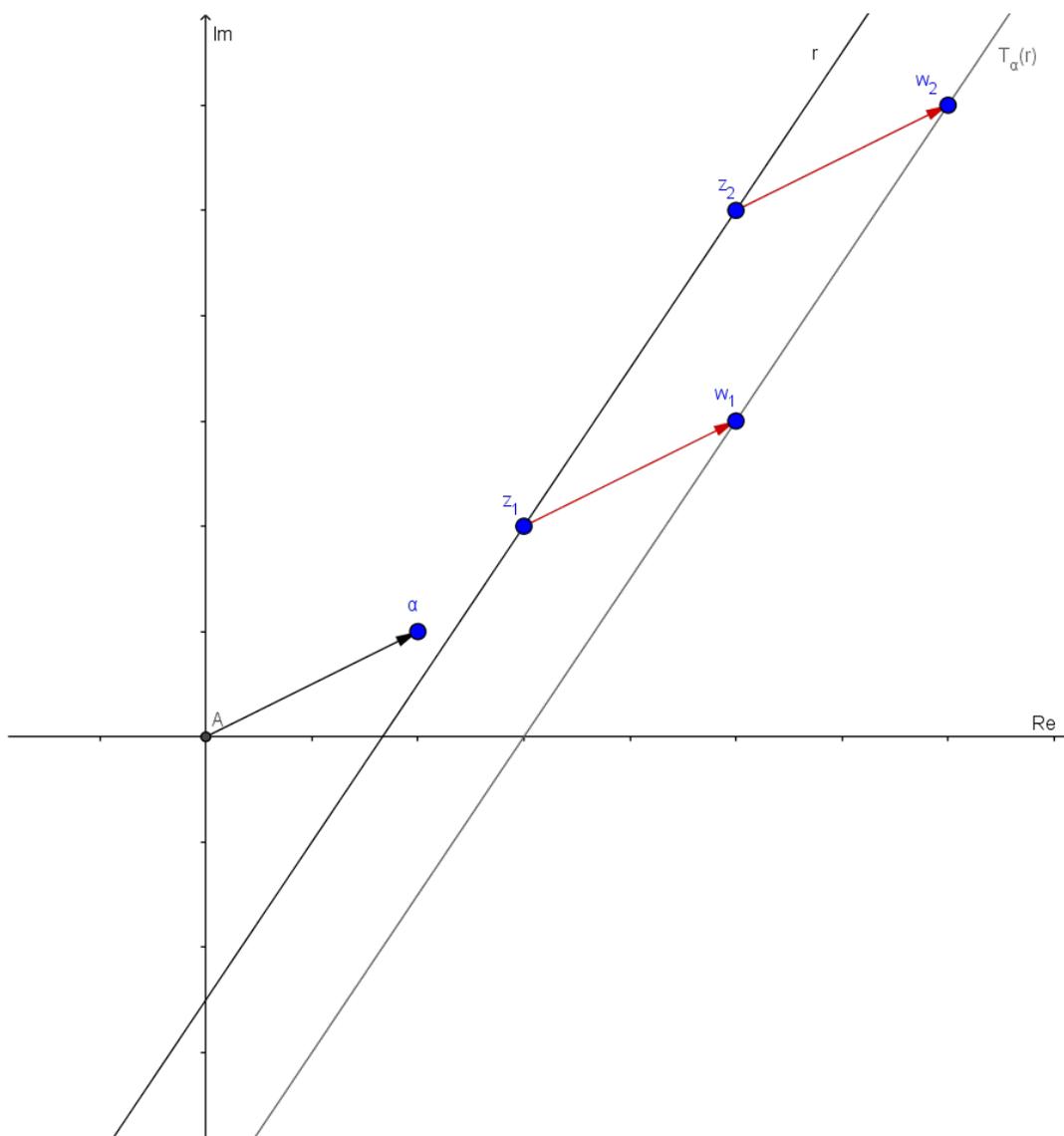
$$\begin{aligned} |w - \alpha|^2 + \bar{B}(w - \alpha) + B\overline{(w - \alpha)} &= c \\ (w - \alpha)\overline{(w - \alpha)} + \bar{B}w - \bar{B}\alpha + B\bar{w} - B\bar{\alpha} &= c \\ w\bar{w} - w\bar{\alpha} - \alpha\bar{w} + \alpha\bar{\alpha} + \bar{B}w - \bar{B}\alpha + B\bar{w} - B\bar{\alpha} &= c \\ |w|^2 + (\bar{B} - \bar{\alpha})w + (B - \alpha)\bar{w} &= c - |\alpha|^2 + \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, se $w \in T_\alpha(\pi)$, então w satisfaz a equação acima. Assim, concluímos que $T_\alpha(\pi)$ é uma circunferência representada pela equação:

$$T_\alpha(\pi) : |w|^2 + \bar{B}'w + B'\bar{w} = c', \quad (2.12)$$

no qual $c' = c - |\alpha|^2 + \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha}$.

Exemplo 2.2.2. Considere a transformação T_α como no exemplo anterior, com $\alpha = -2 + i$. Calcule $T_\alpha(\pi)$ no qual π é a circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro em $z_0 = 1 + i$.

Figura 9 – Exemplo 2.2.1. $r \parallel T_\alpha(r)$

Inicialmente, vamos encontrar a equação da circunferência π usando os resultados já obtidos na Seção 2.1.2. Como $B = \frac{a+bi}{2}$, temos:

$$C = (1, 1) \Leftrightarrow \left(-\frac{B+\bar{B}}{2}, -\frac{B-\bar{B}}{2i} \right) = (1, 1) \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) = (1, 1).$$

Logo, $a = -2$, $b = -2$ e $B = -1 - i$. Além disso,

$$c = r^2 - |B|^2 = \sqrt{2}^2 - 2 = 0.$$

Portanto, a equação da circunferência π é dada por

$$\pi: |z|^2 + (-1+i)z + (-1-i)\bar{z} = 0. \quad (2.13)$$

Agora que já sabemos a equação da circunferência π , podemos calcular os coeficientes

da equação de $T_\alpha(\pi)$. Dessa forma

$$B' = B - \alpha$$

$$B' = -1 - i - (-2 + i)$$

$$B' = 1 - 2i,$$

e

$$c' = c - |\alpha|^2 + \bar{B}\alpha + B\bar{\alpha}$$

$$c' = 0 - 5 + 2$$

$$c' = -3.$$

Então, a equação da circunferência $T_\alpha(\pi)$ é dada por

$$T_\alpha(\pi) : |w|^2 + (1 + 2i)w + (1 - 2i)\bar{w} = -3.$$

Observando a Equação 2.13, fica evidente que $z_1 = 0 + 0i$ pertence a essa circunferência. A partir disso, usando congruência de triângulos (veja a Figura 10), podemos afirmar que $z_2 = 2i$, $z_3 = 2 + 2i$ e $z_4 = 2$ também estão na circunferência π , isto é, tais pontos satisfazem a equação da circunferência π . Vamos então mostrar que $w_i = T_\alpha(z_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$ satisfaz a equação encontrada para a circunferência $T_\alpha(\pi)$. Assim

$$|w_1|^2 + (1 + 2i)w_1 + (1 - 2i)\bar{w}_1 = -3$$

$$5 + (1 + 2i)(-2 + i) + (1 - 2i)(-2 - i) = -3$$

$$5 - 2 + 2i^2 - 2 + 2i^2 = -3$$

$$-3 = -3,$$

$$|w_2|^2 + (1 + 2i)w_2 + (1 - 2i)\bar{w}_2 = -3$$

$$13 + (1 + 2i)(-2 + 3i) + (1 - 2i)(-2 - 3i) = -3$$

$$13 - 2 + 6i^2 - 2 + 6i^2 = -3$$

$$-3 = -3,$$

$$|w_3|^2 + (1 + 2i)w_3 + (1 - 2i)\bar{w}_3 = -3$$

$$9 + (1 + 2i)3i + (1 - 2i)(-3i) = -3$$

$$9 + 6i^2 + 6i^2 = -3$$

$$-3 = -3,$$

$$|w_4|^2 + (1 + 2i)w_4 + (1 - 2i)\bar{w}_4 = -3$$

$$1 + (1 + 2i)i + (1 - 2i)(-i) = -3$$

$$1 + 2i^2 + 2i^2 = -3$$

$$-3 = -3.$$

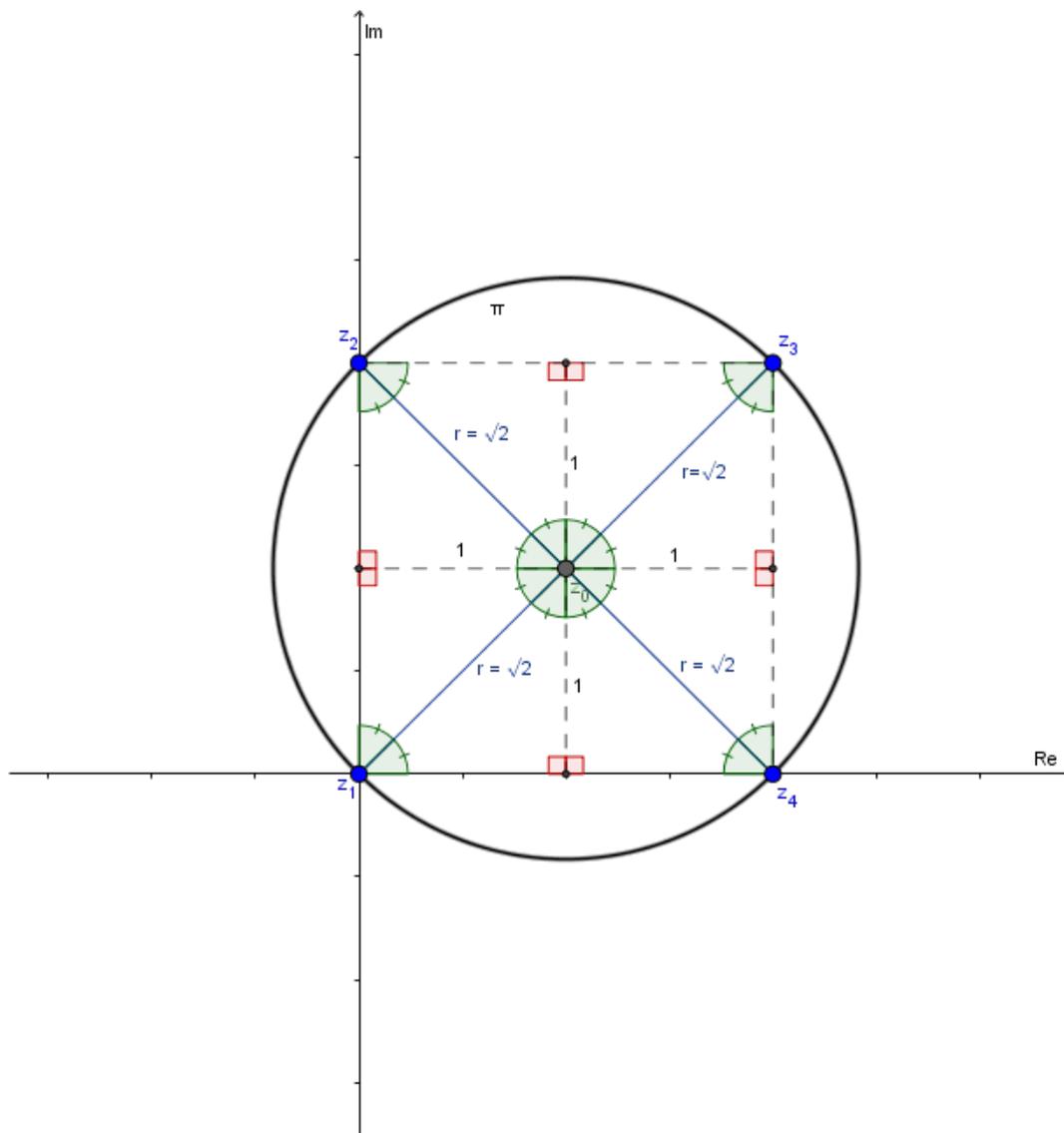


Figura 10 – z_1, z_2, z_3 e z_4 na circunferência π de raio $\sqrt{2}$ e centro z_0

2.2.2 Multiplicação por um número complexo

Dado $\beta \in \mathbb{C}$, considere a transformação $M_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$M_\beta(z) = \beta z.$$

Por conveniência podemos escrever a transformação acima utilizando coordenadas polares. Escrevendo $\beta = \rho_0 e^{i\theta_0}$ e $z = \rho e^{i\theta}$, no qual $\rho_0, \rho > 0$ e $\theta_0, \theta \in [0, 2\pi[$, temos

$$w = M_\beta(z) = \beta z = \rho \rho_0 e^{i(\theta + \theta_0)}.$$

Desse modo, podemos observar que w é um número complexo cujo módulo é obtido a partir do produto entre o módulo de z e o módulo de β (**chamado fator de homotetia** ρ_0), e argumento igual ao argumento de z acrescido do argumento de β (**chamado angulo de rotação** θ_0) (veja a Figura 12).

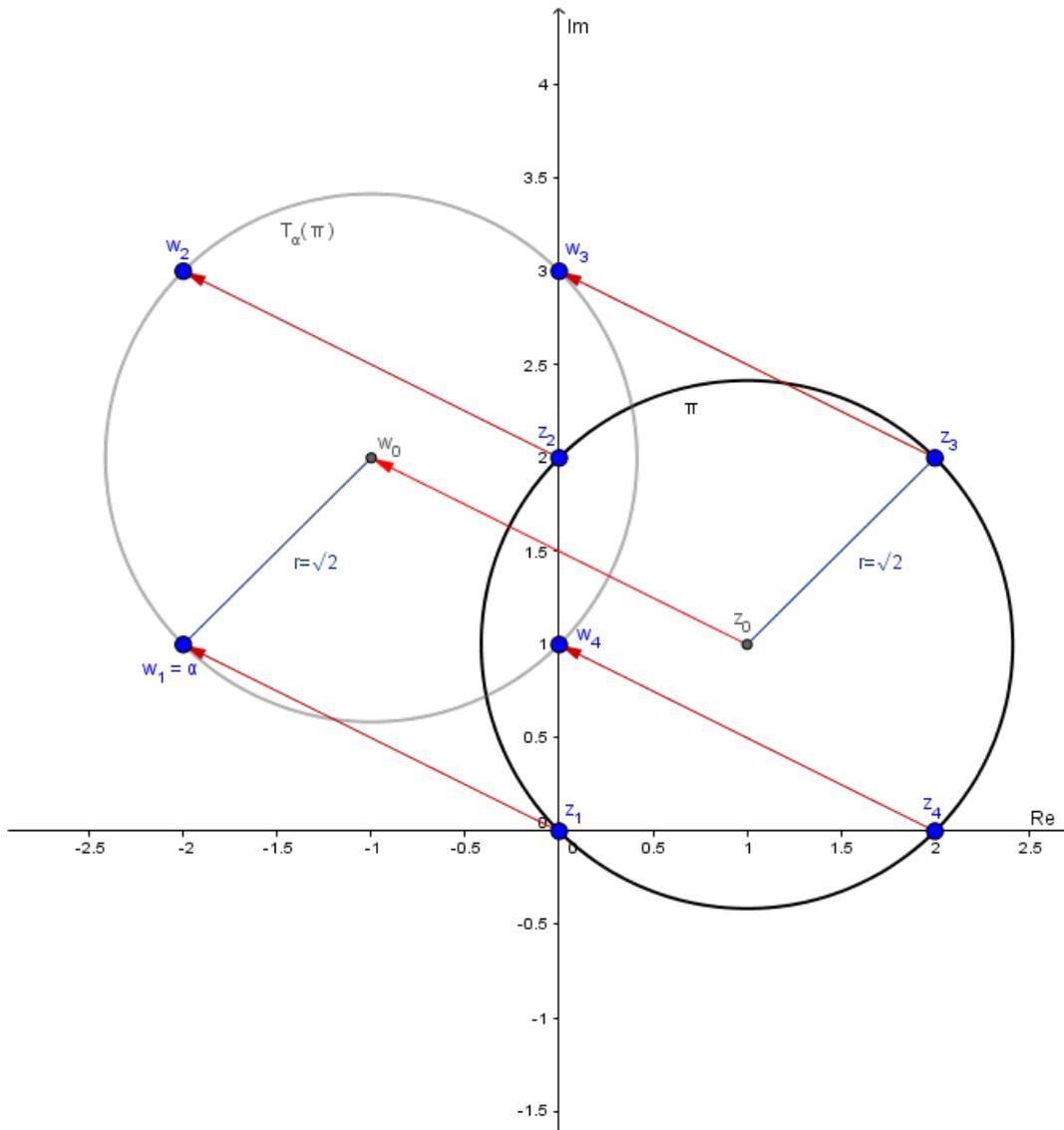


Figura 11 – Exemplo 2.2.2. As circunferências π e $T_\alpha(\pi)$

Analisando a influencia do módulo e do argumento de β isoladamente, podemos escrever a transformação $M_\beta(z)$ como uma composição de outras duas transformações definidas a seguir.

$H_{\rho_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$H_{\rho_0}(z) = \rho_0 z, \quad \rho_0 \in \mathbb{R}^+,$$

e

$R_{\theta_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$R_{\theta_0}(z) = e^{i\theta_0} z, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi[.$$

Com as transformações $H_{\rho_0}(z)$ e $R_{\theta_0}(z)$ definidas como acima, a transformação $M_\beta(z)$ pode ser escrita como:

$$M_\beta(z) = (H_{\rho_0} \circ R_{\theta_0})(z) = (R_{\theta_0} \circ H_{\rho_0})(z),$$

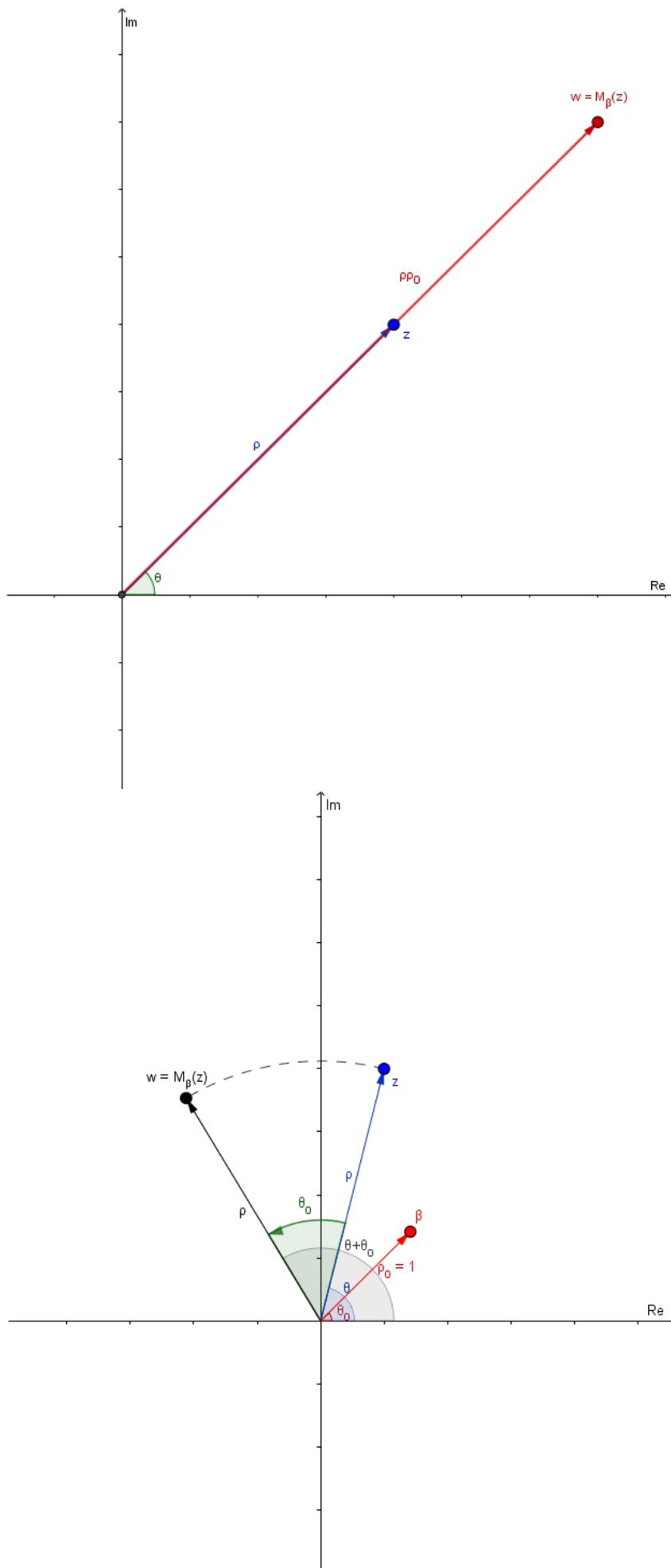


Figura 12 – Homotetia pelo fator ρ_0 e Rotação pelo ângulo θ_0

já que

$$(H_{\rho_0} \circ R_{\theta_0})(z) = H_{\rho_0}(e^{i\theta_0}z) = \rho_0 e^{i\theta_0}z = e^{i\theta_0}\rho_0 z = R_{\theta_0}(\rho_0 z) = (R_{\theta_0} \circ H_{\rho_0})(z).$$

Exemplo 2.2.3. Considere a transformação $M_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $M_\beta(z) = \beta z$, com $\beta = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Verifique a imagem dessa transformação no conjunto Δ_1 , triângulo formado pelos vértices $z_1 = 3$, $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Inicialmente, vamos calcular as imagens w_1 , w_2 e w_3 dos vértices do triângulo Δ_1 .

$$w_1 = M_\beta(z_1) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 3 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$w_2 = M_\beta(z_2) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\pi},$$

$$w_3 = M_\beta(z_3) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Como já era de se esperar, a transformação $M_\beta(z)$ dobra o módulo e acrescenta um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad no argumento de cada complexo de seu domínio. Portanto, o triângulo Δ_2 formado por w_1 , w_2 e w_3 é semelhante a Δ_1 , já que seus lados correspondentes são proporcionais, com constante de proporcionalidade igual a 2. Se tomarmos, por exemplo, o lado do triângulo Δ_2 formado por w_2 e w_3 que mede 4 e o lado do triângulo Δ_1 , formado por z_2 e z_3 cuja medida é 2, observamos essa relação.

$$d(z_2, z_3) = \sqrt{(2-0)^2 + (2-2)^2} = 2,$$

e

$$d(w_2, w_3) = \sqrt{(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2 + (0-2\sqrt{2})^2} = 4.$$

Além disso, fica claro nesse exemplo que essa transformação preservou ângulos, já que os ângulos correspondentes de Δ_1 e Δ_2 são congruentes (Figura 14).

Vamos agora aplicar a função M_β a uma reta genérica r determinada pela equação $\bar{B}z + B\bar{z} = C$. Se $w = M_\beta(z)$, então

$$w = \beta z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w}{\beta} = \frac{w\bar{\beta}}{|\beta|^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ \bar{B}\left(\frac{w\bar{\beta}}{|\beta|^2}\right) + B\overline{\left(\frac{w\bar{\beta}}{|\beta|^2}\right)} &= C \\ \bar{\beta}\bar{B}w + \beta B\bar{w} &= C|\beta|^2 \\ \bar{B}'w + B'\bar{w} &= C', \end{aligned}$$

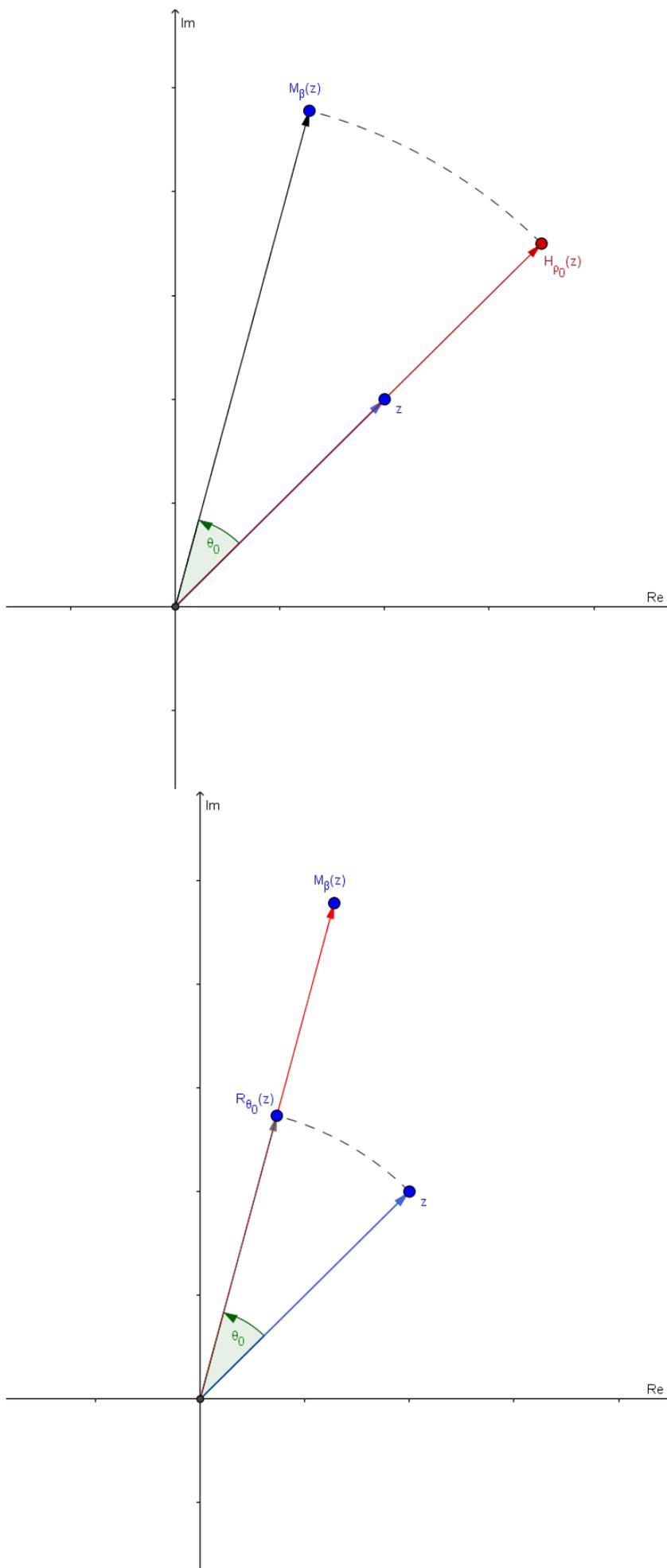


Figura 13 – $M_\beta(z) = (H_{\rho_0} \circ R_{\theta_0})(z) = (R_{\theta_0} \circ H_{\rho_0})(z)$

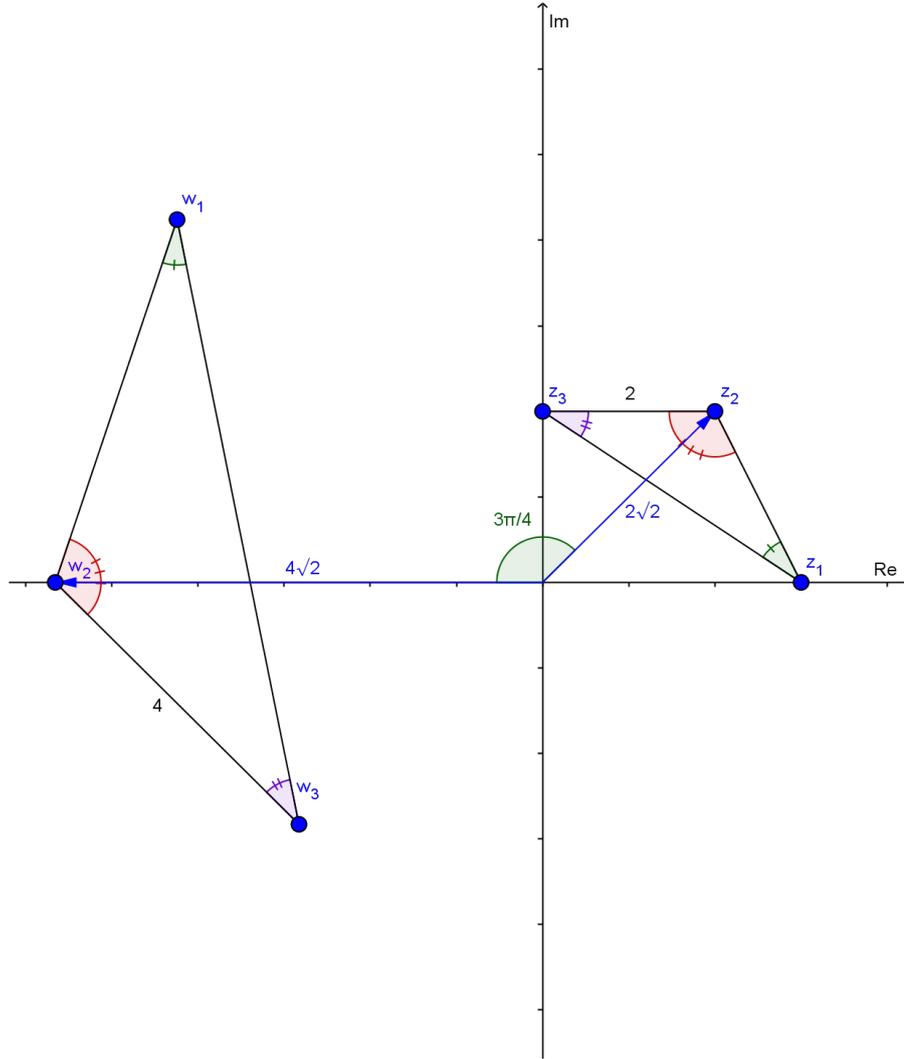


Figura 14 – Exemplo 2.2.3. $\Delta_1 \sim \Delta_2$ - Ângulos preservados e lados dobrados.

com $B' = \beta B$ e $C' = C|\beta|^2$. Como w satisfaz a equação acima, com $B' \in \mathbb{C}$ e $C' \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que $M_\beta(r)$ também é uma reta, ou seja, $M_\beta(z)$ transforma retas em retas.

Considere agora a circunferência π cuja equação em \mathbb{C} é dada por $|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c$. Se $w \in M_\beta(\pi)$, então $w = M_\beta(z)$, para algum $z \in \pi$. Assim

$$|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c$$

$$\left| \frac{w\bar{\beta}}{|\beta|^2} \right|^2 + \bar{B} \left(\frac{w\bar{\beta}}{|\beta|^2} \right) + B \left(\frac{\overline{w\bar{\beta}}}{|\beta|^2} \right) = c$$

$$|w|^2 \frac{|\bar{\beta}|^2}{|\beta|^4} + \frac{\bar{\beta}\bar{B}}{|\beta|^2} w + \frac{\beta B}{|\beta|^2} \bar{w} = c$$

$$|w|^2 + \bar{\beta}\bar{B}w + \beta B\bar{w} = c|\beta|^2$$

$$|w|^2 + \bar{B}'w + B'\bar{w} = c',$$

com $B' = \beta B$ e $c' = c|\beta|^2$. Portanto, w satisfaz a equação de uma circunferência, ou seja, $M_\beta(\pi)$ é uma circunferência cuja equação é dada por

$$|w|^2 + \overline{B'}w + B'\overline{w} = c', \quad (2.14)$$

com os coeficientes B' e c' sendo obtidos a partir dos coeficientes B e c da equação da circunferência π . Logo, $M_\beta(z)$ transforma circunferências em circunferências.

Exemplo 2.2.4. Considere a transformação $M_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$M_\beta(z) = \beta z,$$

com $\beta = \frac{3}{2}i$ e a reta r que passa por $z_1 = -1 - i$ e $z_2 = 2 + 2i$. Verifique a imagem dessa transformação no conjunto formado pelos pontos da reta r .

Inicialmente vamos encontrar a equação da reta r . Chamando $B = a + bi$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{B}z_1 + B\overline{z_1} &= C \\ (a - bi)(-1 - i) + (a + bi)(-1 + i) &= C \\ -2a + 2bi^2 &= C \\ -2a - 2b &= C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{B}z_2 + B\overline{z_2} &= C \\ (a - bi)(2 + 2i)(a + bi)(2 - 2i) &= C \\ 4a - 4bi^2 &= C \\ 4a + 4b &= C. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -2a - 2b &= 4a + 4b \\ 6a &= -6b \\ a &= -b. \end{aligned}$$

Tomando $a = 1$, temos $b = -1$, $\beta = 1 - i$ e $C = 0$. Desse modo, a equação da reta r é dada por

$$r : (1 + i)z + (1 - i)\overline{z} = 0.$$

Agora que já temos a equação da reta r , podemos encontrar a equação da reta $M_\beta(r)$. Para isto, vamos calcular seus coeficientes utilizando as representações acima. Assim,

$$B' = \beta B = \frac{3}{2}i(1 - i) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i,$$

e

$$C' = C|\beta|^2 = 0.$$

Portanto, a equação da reta $M_\beta(r)$ é dada por

$$M_\beta(r) : \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right)w + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right)\bar{w} = 0.$$

Podemos também calcular as imagens dos pontos z_1 e z_2 que determinam a reta r . Chamando de w_1 e w_2 as imagens de z_1 e z_2 , respectivamente, temos

$$w_1 = M_\beta(z_1) = \beta z_1 = \frac{3}{2}i(-1 - i) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i,$$

e

$$w_2 = M_\beta(z_2) = \beta z_2 = \frac{3}{2}i(2 + 2i) = -3 + 3i.$$

Observando o gráfico (veja a Figura 15) é fácil perceber que a reta r é a bissetriz dos quadrantes ímpares e que $M_\beta(r)$ é a bissetriz dos quadrantes pares. Mas vamos comprovar esse fato algebricamente. Seja $z = a + bi \in r$. Logo,

$$\begin{aligned} (1+i)z + (1-i)\bar{z} &= 0 \\ (1+i)(a+bi) + (1-i)(a-bi) &= 0 \\ 2a + 2bi^2 &= 0 \\ a &= b. \end{aligned}$$

Portanto, $z = a + ai$, com $a \in \mathbb{R}$. Ou seja, $Re(z) - Im(z) = 0$, que é equivalente à equação $x - y = 0$ em \mathbb{R}^2 . Note que z_1 e z_2 claramente satisfazem essa condição.

Analogamente, seja $w = c + di \in M_\beta(r)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right)w + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right)\bar{w} &= 0 \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right)(c+di) + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right)(c-di) &= 0 \\ 3c - 3di^2 &= 0 \\ d &= -c. \end{aligned}$$

Então, $w = c - ci$, com $c \in \mathbb{R}$. Isto é, $Re(z) + Im(z) = 0$, que é equivalente à equação $x + y = 0$ em \mathbb{R}^2 . Condição evidentemente atendida por w_1 e w_2 .

Na prática, a transformação $M_\beta(z)$ rotacionou a reta r (bissetriz dos quadrantes ímpares) em $\frac{\pi}{2}$ rad (argumento de β), gerando a reta $M_\beta(r)$ (bissetriz dos quadrantes pares). Além disso, a razão entre os segmentos $\overline{w_1 w_2}$ e $\overline{z_1 z_2}$ é igual a $\frac{3}{2}$ (módulo de β).

Exemplo 2.2.5. Seja π a circunferência de raio 2 centrada em $z_0 = 2 + 2i$ e a transformação $M_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $M_\beta(z) = \beta z$, com $\beta = -1 - i$. Determine $M_\beta(\pi)$.

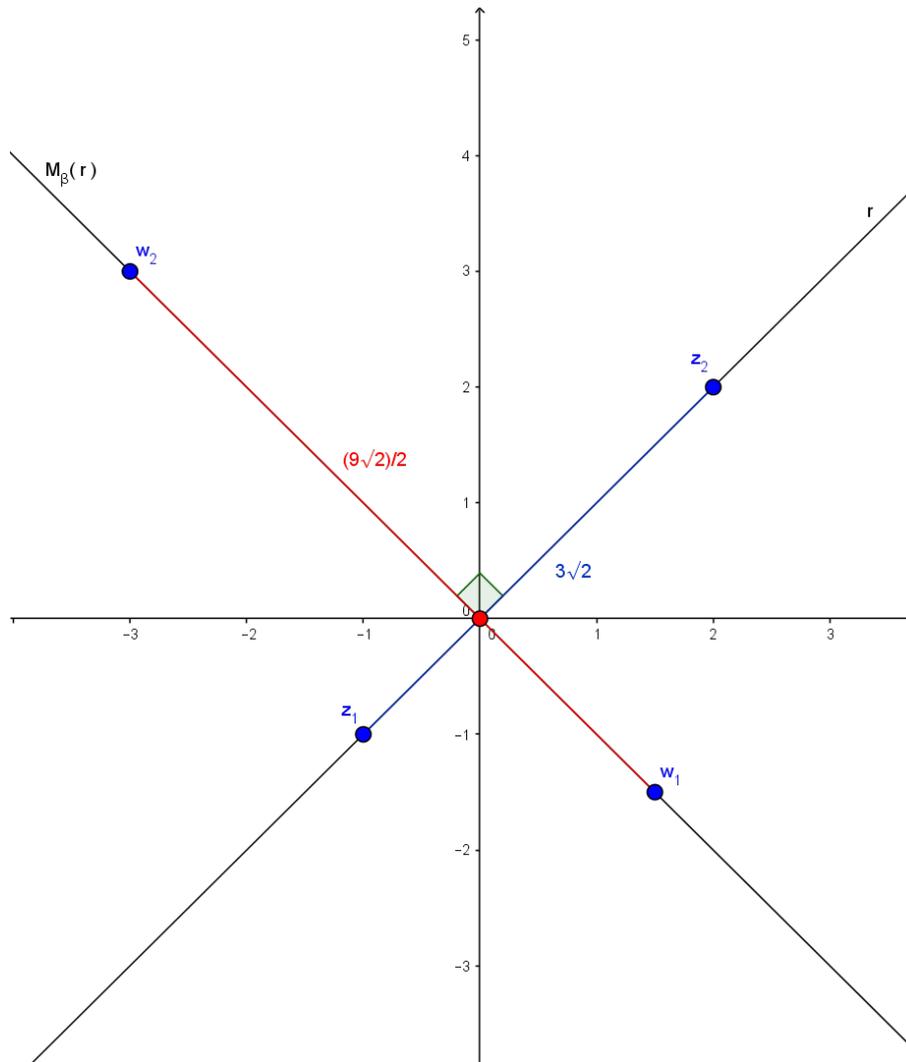


Figura 15 – Exemplo 2.2.4. r e $M_\beta(r)$ - Bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente.

A equação da circunferência π é da forma da Equação 2.6. Utilizando as representações da seção anterior, temos:

$$Centro = (2, 2) \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, 2) \Leftrightarrow a = -4 \quad e \quad b = -4.$$

Assim, $B = -2 - 2i$ e portanto $c = r^2 - |B|^2 = -4$. Logo, a equação da circunferência π é dada por

$$\pi: |z|^2 + (-2 + 2i)z + (-2 - 2i)\bar{z} = -4 \tag{2.15}$$

Analogamente, a equação da circunferência $M_\beta(\pi)$ é da forma da Equação 2.14. Então,

$$B' = \beta B = (-1 - i)(-2 - 2i) = 2 + 2i + 2i + 2i^2 = 4i,$$

$$c' = |\beta|^2 c = -4 \cdot 2 = -8.$$

Portanto, a equação da circunferência $M_\beta(\pi)$ é dada por

$$M_\beta(\pi): |w|^2 - 4iw + 4i\bar{w} = -8. \tag{2.16}$$

Os números complexos $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$ e $z_3 = 2 + 4i$ pertencem à circunferência π . Vamos comprovar esse fato verificando que z_1 , z_2 e z_3 satisfazem a Equação 2.15.

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-2 + 2i)z + (-2 - 2i)\bar{z} &= -4 \\ |z_1|^2 + (-2 + 2i)z_1 + (-2 - 2i)\bar{z}_1 &= -4 \\ 4 - 4 + 4i - 4 - 4i &= -4 \\ -4 &= -4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-2 + 2i)z + (-2 - 2i)\bar{z} &= -4 \\ |z_2|^2 + (-2 + 2i)z_2 + (-2 - 2i)\bar{z}_2 &= -4 \\ 4 - 4i + 4i^2 + 4i + 4i^2 &= -4 \\ -4 &= -4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z|^2 + (-2 + 2i)z + (-2 - 2i)\bar{z} &= -4 \\ |z_3|^2 + (-2 + 2i)z_3 + (-2 - 2i)\bar{z}_3 &= 4 \\ 20 - 4 - 8i + 4i + 8i^2 - 4 + 8i - 4i + 8i^2 &= -4 \\ -4 &= -4. \end{aligned}$$

Vamos agora, calcular as imagens w_1 , w_2 e w_3 de z_1 , z_2 e z_3 , respectivamente.

$$\begin{array}{lll} w_1 = M_\beta(z_1) & w_2 = M_\beta(z_2) & w_3 = M_\beta(z_3) \\ w_1 = \beta z_1 & w_2 = \beta z_2 & w_3 = \beta z_3 \\ w_1 = (-1 - i)2 & w_2 = (-1 - i)2i & w_3 = (-1 - i)(2 + 4i) \\ w_1 = -2 - 2i, & w_2 = 2 - 2i, & w_3 = 2 - 6i. \end{array}$$

Vamos comprovar também que w_1 , w_2 e w_3 estão na circunferência $M_\beta(\pi)$ e por isso satisfazem

a Equação 2.16. Assim

$$\begin{aligned}
 |w|^2 - 4iw + 4i\bar{w} &= -8 \\
 |w_1|^2 - 4i(-2 - 2i) + 4i(-2 + 2i) &= -8 \\
 8 + 8i + 8i^2 - 8i + 8i^2 &= -8 \\
 -8 &= -8, \\
 |w|^2 - 4iw + 4i\bar{w} &= -8 \\
 |w_2|^2 - 4i(2 - 2i) + 4i(2 + 2i) &= -8 \\
 8 - 8i + 8i^2 + 8i + 8i^2 &= -8 \\
 -8 &= -8, \\
 |w|^2 - 4iw + 4i\bar{w} &= -8 \\
 |w_3|^2 - 4i(2 - 6i) + 4i(2 + 6i) &= -8 \\
 40 - 8i + 24i^2 + 8i + 24i^2 &= -8 \\
 -8 &= -8.
 \end{aligned}$$

A partir de z_0 , centro da circunferência π , podemos encontrar $w_0 = M_\beta(z_0)$, que é o centro da circunferência $M_\beta(\pi)$, isto é

$$\begin{aligned}
 w_0 &= M_\beta(z_0) \\
 w_0 &= \beta z_0 \\
 w_0 &= (-1 - i)(2 + 2i) \\
 w_0 &= -2 - 2i - 2i - 2i^2 \\
 w_0 &= -4i.
 \end{aligned}$$

Sabemos também que o raio da circunferência π é igual a 2 e o raio da circunferência $M_\beta(\pi)$ é igual ao comprimento do segmento w_0w_1 ou do segmento w_0w_3 . Ambos medem $2\sqrt{2}$ e a razão entre os raios das circunferências $M_\beta(\pi)$ e π é $\sqrt{2}$. Além disso, a corda z_2z_3 em π mede $2\sqrt{2}$, enquanto que a corda w_2w_3 em $M_\beta(\pi)$ mede 4. Logo, a razão entre a corda correspondente na circunferência $M_\beta(\pi)$ e uma corda na circunferência π também é igual a $\sqrt{2}$. Isso ajuda a comprovar que a circunferência $M_\beta(\pi)$ é gerada a partir de uma rotação de $\frac{5\pi}{4}$ rad(argumento de β) da circunferência π e tem seu raio, diâmetro e cordas $\sqrt{2}$ (módulo de β) vezes maiores que os seus correspondentes em π (veja a Figura 16).

2.2.3 Inversão

Considere agora a transformação $I : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$I(z) = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

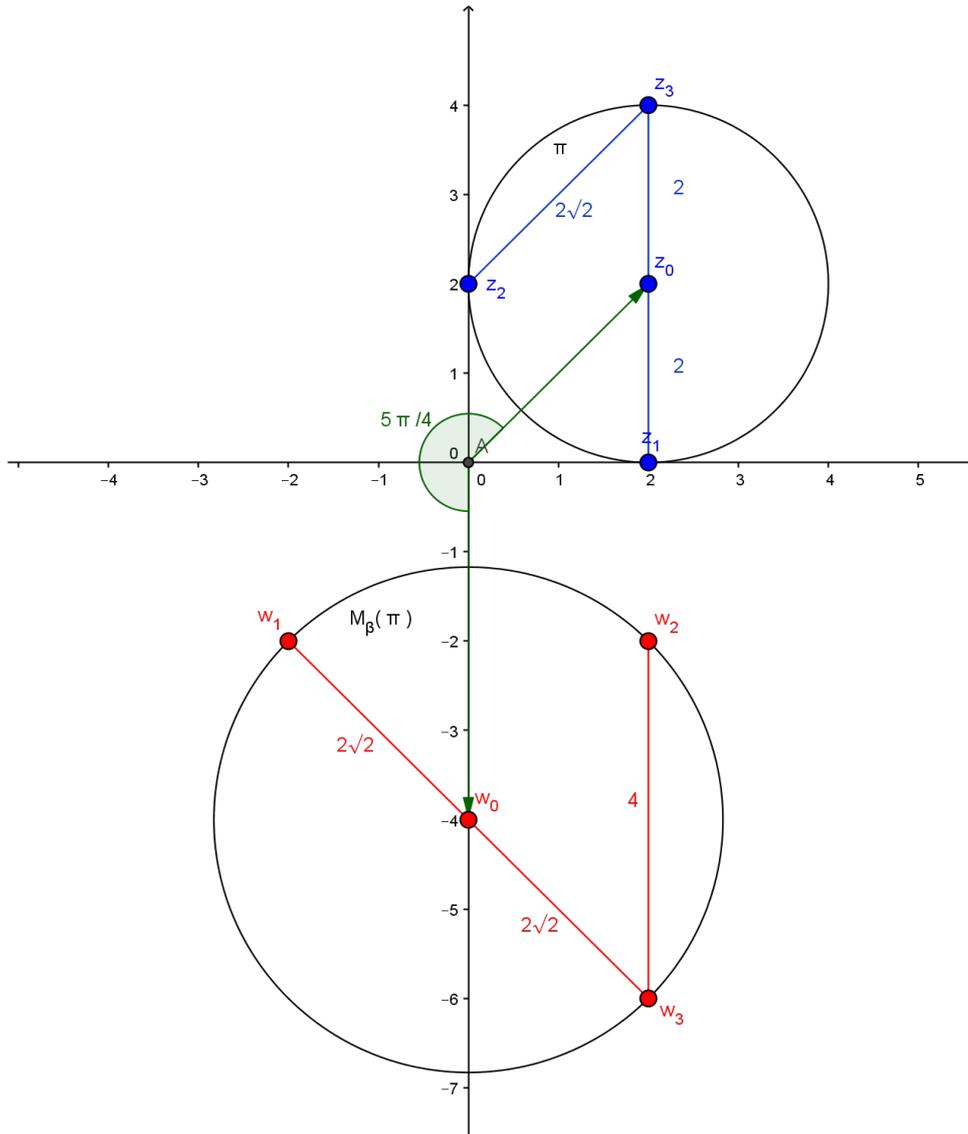


Figura 16 – Exemplo 2.2.5. As circunferências π e $M_\beta(\pi)$

$$\beta = -1 - i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Escrevendo z em sua forma exponencial $z = \rho e^{i\theta}$ podemos reescrever a transformação como

$$I(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)} = \rho^{-1} e^{-i\theta}.$$

Desse modo, se w pertence à imagem de $I(z)$, então w é um número complexo com módulo igual ao inverso do módulo de z e argumento oposto ao argumento de z . Diante disso, a transformação $I(z)$ pode ser decomposta em duas funções, sendo irrelevante a ordem de aplicação das duas. Uma delas é uma multiplicação pelo número real $\frac{1}{|z|^2}$. Esta transformação pode ser vista geometricamente como uma inversão em relação ao círculo unitário, alterando apenas o módulo mas não o argumento. A outra é a conjugação, que faz uma reflexão em torno do eixo real mantendo o módulo inalterado e ajustando apenas o argumento (veja a Figura 17). Isso é facilmente comprovado algebricamente quando escrevemos a transformação $I(z)$ do seguinte

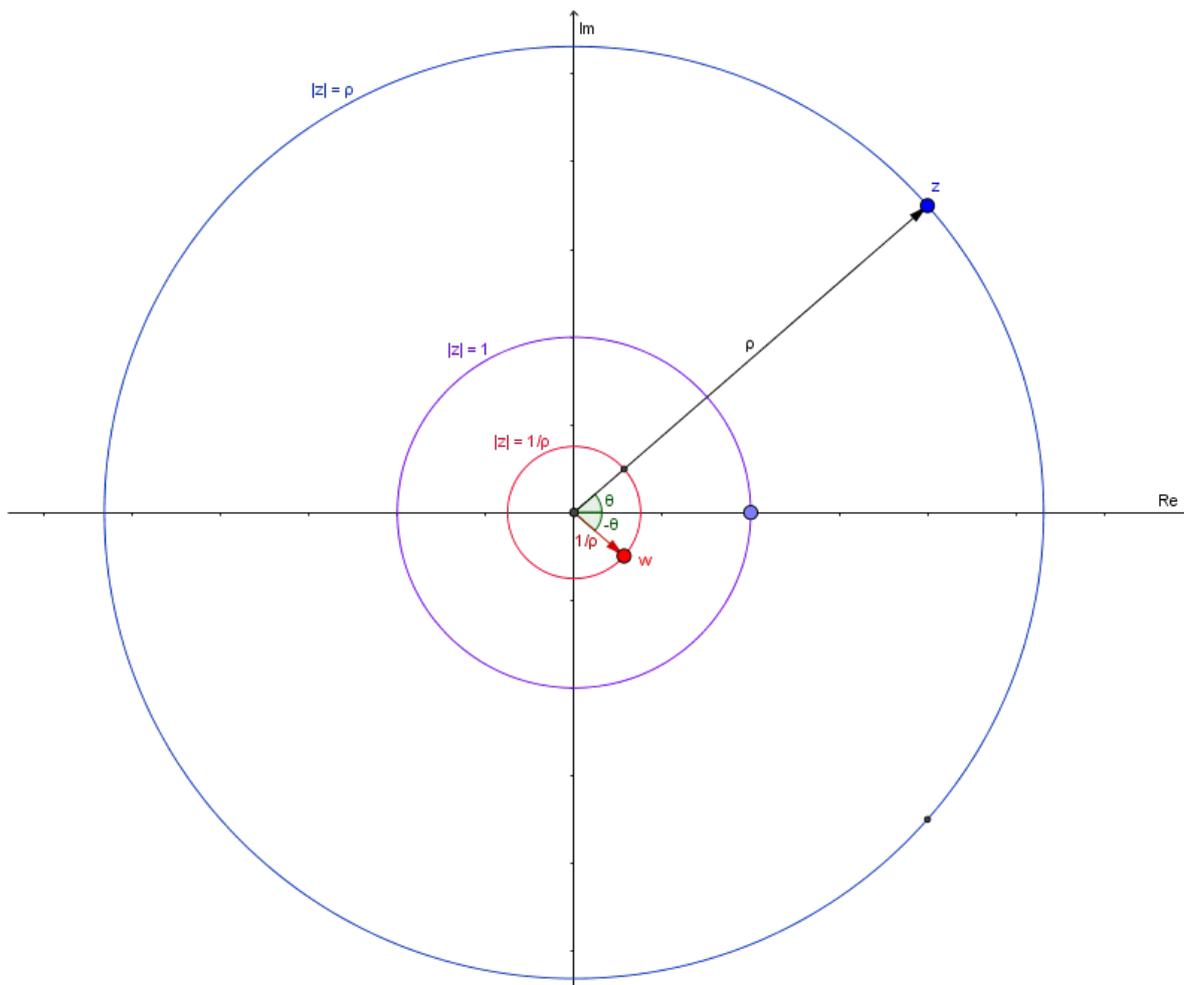


Figura 17 - $z = \rho e^{i\theta}$ e $w = \rho^{-1} e^{-i\theta}$.

modo:

$$I(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Sem dúvida, um dos resultados mais interessantes em relação à função $I(z)$ é investigar sua imagem quando aplicadas em retas e circunferências. As transformações apresentadas até aqui, transformam retas em retas e circunferências em circunferências. No caso da inversão essa relação pode ser alterada, isto é, retas podem ser levadas em retas ou em circunferências e vice-versa. Vamos demonstrar esse resultado a seguir.

Considere a transformação $I(z)$ anterior e uma reta r dada pela equação

$$r: \bar{B}z + B\bar{z} = C. \tag{2.17}$$

Tome $w \in I(r)$, isto é, existe z pertencente à reta r de modo que $w = I(z)$. Assim, podemos escrever

$$w = I(z) \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{w}.$$

Como z pertence à reta r , então z satisfaz a Equação 2.17. Assim, substituindo z por $\frac{1}{w}$ nessa equação, temos:

$$\begin{aligned}\bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ \bar{B}\frac{1}{w} + B\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} &= C \\ \frac{\bar{B}}{w} + \frac{B}{\bar{w}} &= C \\ \frac{\bar{B}}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} + \frac{B}{\bar{w}} \cdot \frac{w}{w} &= C \\ \frac{\bar{B}\bar{w}}{|w|^2} + \frac{Bw}{|w|^2} &= C \\ \bar{B}\bar{w} + Bw &= C|w|^2.\end{aligned}$$

Nesse ponto, vamos analisar a natureza da equação acima em função do parâmetro C .

- Caso $C = 0$

Nessa condição, a reta r passa pela origem $0 + 0i$ e podemos afirmar que w satisfaz a equação

$$\bar{B}'w + B'\bar{w} = 0,$$

com $B' = \bar{B}$, isto é, w pertence à uma reta que também passa pela origem $0 + 0i$. Concluimos então que $I(z)$ transforma retas que passam pela origem em retas que passam pela origem.

- Caso $C \neq 0$

Neste caso, podemos afirmar que a reta r não passa pela origem. Manipulando a equação anterior temos:

$$\begin{aligned}\bar{B}\bar{w} + Bw &= C|w|^2 \\ \frac{\bar{B}\bar{w}}{C} + \frac{Bw}{C} &= \frac{C|w|^2}{C} \\ |w|^2 - \frac{\bar{B}}{C}\bar{w} - \frac{B}{C}w &= 0 \\ |w|^2 + \bar{B}''w + B''\bar{w} &= 0,\end{aligned}$$

no qual $B'' = -\frac{\bar{B}}{C}$, ou seja, w pertence a uma circunferência que passa pela origem $0 + 0i$. Portanto $I(z)$ transforma retas que não passam pela origem em circunferências que passam pela origem.

Agora, considere a circunferência π cuja equação é dada por

$$\pi : |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c. \quad (2.18)$$

Se $w \in I(\pi)$, então existe z na circunferência π tal que $w = I(z)$. Podemos escrever $z = \frac{1}{w}$ e substituir na Equação 2.18, já que z satisfaz essa equação.

$$\begin{aligned} |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} &= c \\ \left| \frac{1}{w} \right|^2 + \bar{B} \frac{1}{w} + B \overline{\left(\frac{1}{w} \right)} &= c \\ \frac{1}{|w|^2} + \frac{\bar{B}\bar{w}}{|w|^2} + \frac{Bw}{|w|^2} &= c \\ 1 + \bar{B}\bar{w} + Bw &= c|w|^2 \\ c|w|^2 - \bar{B}\bar{w} - Bw &= 1. \end{aligned}$$

Analogamente ao caso da reta, vamos analisar a natureza da equação acima em função do parâmetro c .

- Caso $c = 0$

Neste caso, podemos afirmar que a circunferência π passa pela origem. Por outro lado, w satisfaz a equação $\bar{B}'''w + B'''\bar{w} = 1$, com $B''' = -\bar{B}$, que representa uma reta que não passa pela origem. Assim, podemos concluir que $I(z)$ transforma circunferências que passam pela origem em retas que não passam pela origem.

- Caso $c \neq 0$

Já nesta situação, a circunferência π não passa pela origem e w satisfaz a equação $c|w|^2 - \bar{B}\bar{w} - Bw = 1$. Como $c \neq 0$, essa equação pode ser escrita assim:

$$\begin{aligned} c|w|^2 - \bar{B}\bar{w} - Bw &= 1 \\ |w|^2 + \frac{-\bar{B}}{c}\bar{w} - \frac{B}{c}w &= \frac{1}{c} \\ |w|^2 + \bar{B}''''w + B''''\bar{w} &= \frac{1}{c}, \end{aligned}$$

no qual $B'''' = -\frac{\bar{B}}{c}$, logo a equação representa uma circunferência que não passa pela origem, uma vez que $\frac{1}{c} \neq 0$. Logo, concluímos que $I(z)$ transforma circunferências que não passam pela origem em circunferências que não passam pela origem.

Resumindo, $I(z)$ transforma:

- (i) Retas que passam pela origem em retas que passam pela origem.
- (ii) Retas que não passam pela origem em circunferências que passam pela origem.
- (iii) Circunferências que passam pela origem em retas que não passam pela origem.
- (iv) Circunferências que não passam pela origem em circunferências que não passam pela origem.

Exemplo 2.2.6. Considere a reta r que passa por $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = -2 - 4i$. Mostre que $I(r)$ é uma reta e que, assim como r , também passa pela origem.

Usando os resultados obtidos na Seção 2.1.1, temos que a equação da reta r é da forma $\overline{B}z + B\bar{z} = C$, com $B = a + bi$. Fazendo as substituições por z_1 e z_2 , encontramos

$$B = 2 - i \quad \text{e} \quad C = 0.$$

Logo, a equação da reta r é dada por

$$(2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 0. \quad (2.19)$$

Acabamos de mostrar que nesse caso $I(r)$ também é uma reta cuja equação é da forma

$$\overline{B'}w + B'\bar{w} = 0,$$

com $B' = \overline{B}$. Logo, $B' = 2 + i$ e a equação da reta $I(r)$ é

$$(2 - i)z + (2 + i)\bar{z} = 0. \quad (2.20)$$

Exemplo 2.2.7. Considere a reta r que passa por $z_1 = \frac{1}{2}$ e $z_2 = \frac{1}{2}i$ e a reta s que passa por $z_3 = -1$ e $z_4 = i$. Represente r , s , $I(r)$ e $I(s)$ no plano complexo e mostre que $I(r)$ e $I(s)$ se interceptam em dois complexos distintos.

As retas r e s não passam pela origem, logo podemos afirmar que $I(r)$ e $I(s)$ são circunferências que passam pela origem. Fazendo os cálculos necessários, encontramos as equações de r e s em \mathbb{C} , dadas por

$$r: (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 1 \quad \text{e} \quad s: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = -2.$$

A partir das equações de r e s , podemos encontrar as equações de $I(r)$ e $I(s)$. A equação de $I(r)$ tem a forma

$$|w|^2 + \overline{B'}w + B'\bar{w} = 0,$$

com $B' = -\frac{\overline{B}}{C}$. Logo, a equação de $I(r)$ é dada por

$$I(r): |w|^2 + (-1 - i)w + (-1 + i)\bar{w} = 0. \quad (2.21)$$

Usando os conceitos desenvolvidos na Seção 2.1.2, é possível mostrar que $I(r)$ intercepta os eixos real e imaginário em $w_1 = I(z_1) = 2$ e $w_2 = I(z_2) = -2i$, respectivamente.

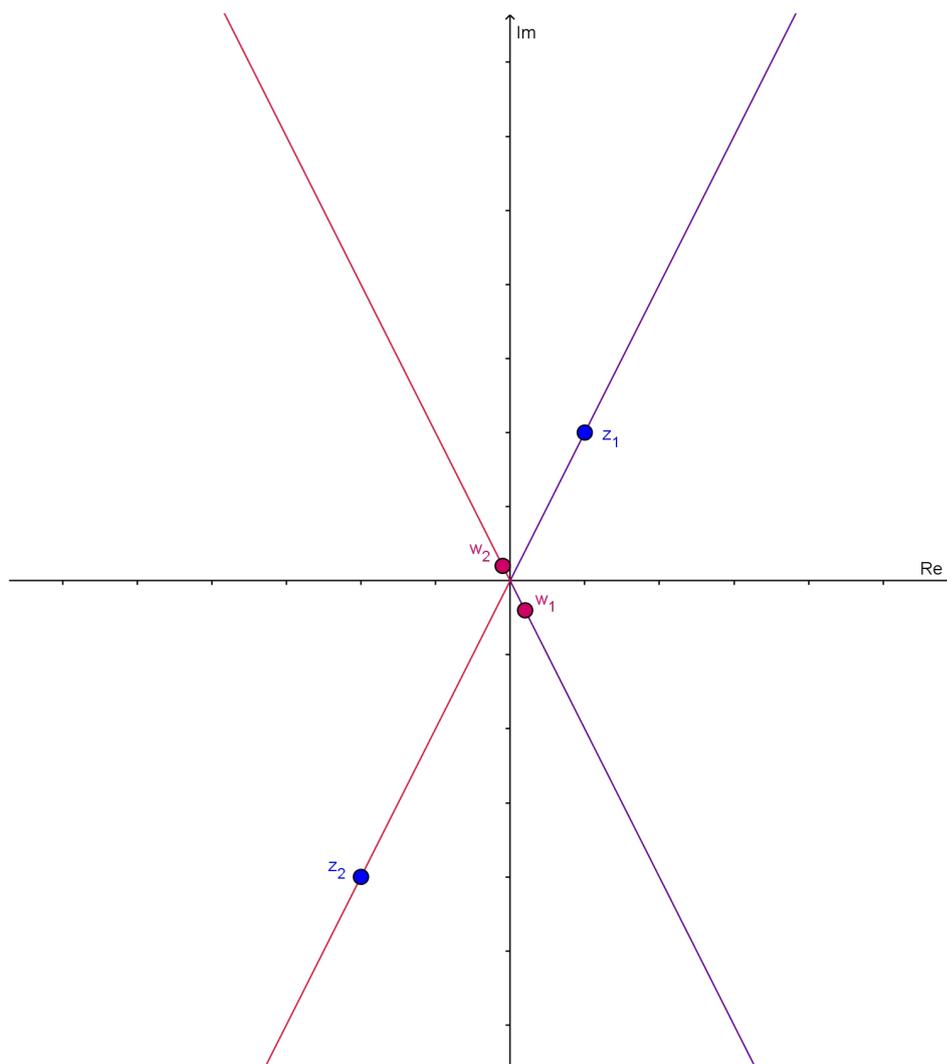


Figura 18 – Exemplo 2.2.6. $I(z)$ transforma a reta r na reta $I(r)$. Ambas passam pela origem.

Analogamente, podemos concluir que a equação de $I(s)$ é dada por

$$I(s) : |w|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)w + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{w} = 0. \quad (2.22)$$

A circunferência $I(s)$ intercepta os eixos real e imaginário em $w_3 = I(z_3) = -1$ e $w_4 = I(z_4) = -i$. Vale ressaltar que $w_3 = z_3$, ou seja, z_3 é um ponto fixo pois $I(z)$ o transforma nele mesmo.

Já sabemos que $I(r)$ e $I(s)$ se interceptam na origem. Vamos procurar, caso possível, um outro complexo no qual elas também se interceptam. Um ótimo candidato é $w_5 = I(z_5)$, sendo z_5 o complexo onde r e s se interceptam. Logo, z_5 deve satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} (1-i)z + (1+i)\bar{z} = 1 \\ (1+i)z + (1-i)\bar{z} = -2 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$\begin{aligned}2z + 2\bar{z} &= -1 \\z + \bar{z} &= -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Subtraindo as equações, temos:

$$\begin{aligned}-2iz + 2i\bar{z} &= 3 \\2i(-z + \bar{z}) &= 3 \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Portanto, $z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$. Logo,

$$w_5 = I(z_5) = \frac{1}{z_5} = \frac{\bar{z}_5}{|z_5|^2} = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i.$$

Só nos resta confirmar que $w_5 \in I(r) \cap I(s)$, isto é, w_5 satisfaz as Equações (2.21) e (2.22). Assim

$$\begin{aligned}|w|^2 + (-1 - i)w + (-1 + i)\bar{w} &= 0 \\|w_5|^2 + (-1 - i)w_5 + (-1 + i)\bar{w}_5 &= 0 \\ \frac{8}{5} + (-1 - i)\left(-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i\right) + (-1 + i)\left(-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i\right) &= 0 \\ \frac{8}{5} + \frac{4}{5} - \frac{12}{5} &= 0 \\ 0 &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|w|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)w + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{w} &= 0 \\|w_5|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)w_5 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\bar{w}_5 &= 0 \\ \frac{8}{5} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i\right) &= 0 \\ \frac{8}{5} - \frac{2}{5} - \frac{6}{5} &= 0 \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Concluimos então que as circunferências $I(r)$ e $I(s)$ se interceptam em

$$z_0 = 0 + 0i \quad \text{e} \quad w_5 = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i.$$

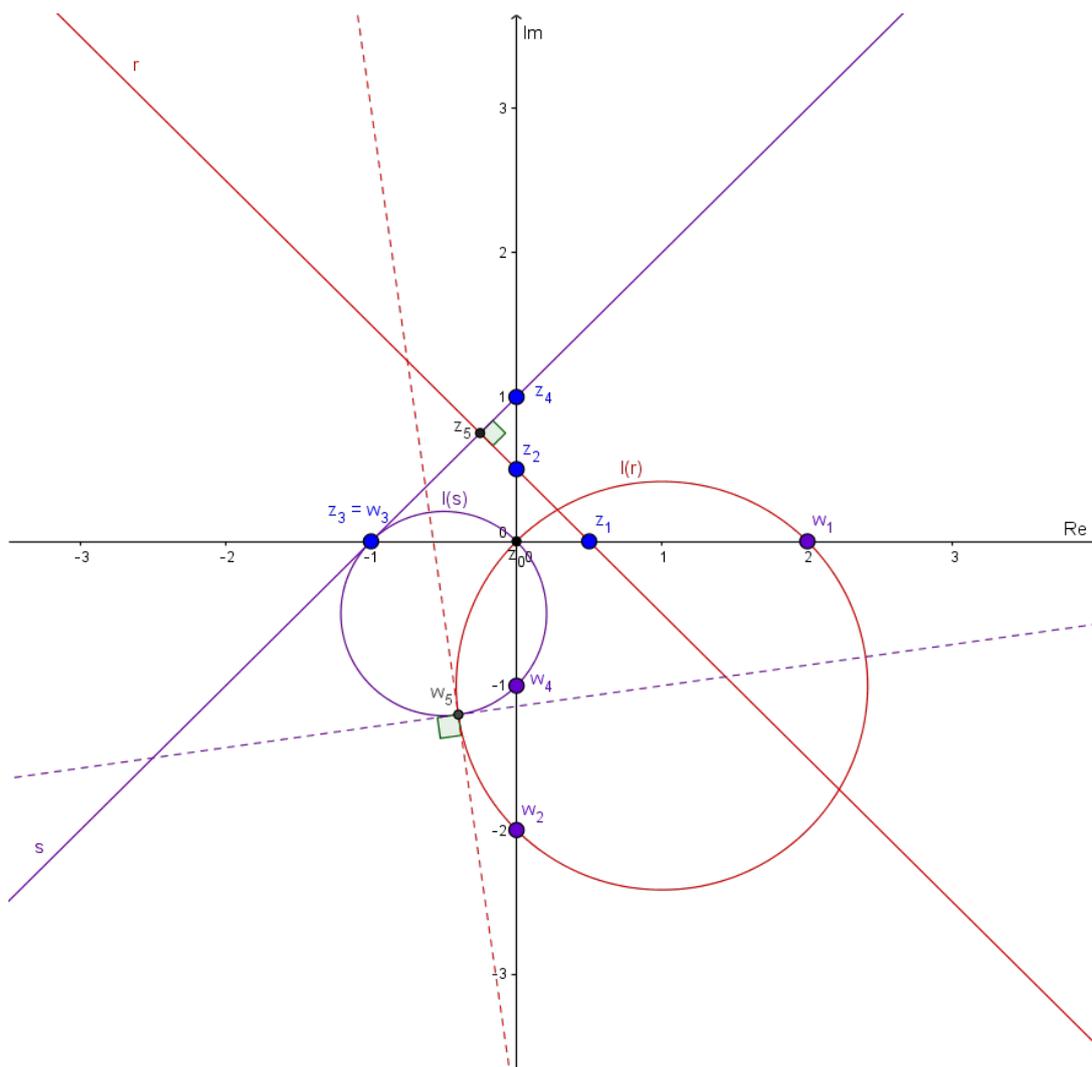


Figura 19 – Exemplo 2.2.7. $I(z)$ transforma retas que não passam pela origem em circunferências que passam pela origem

Por fim, cabe observar que as retas r e s são perpendiculares e as retas tangentes a $I(r)$ e $I(s)$ por w_5 também o são. E isso não acontece por acaso. Embora não tenha sido demonstrado, $I(z)$ é uma transformação que preserva ângulos, chamada Transformação conforme³(veja a Figura 19).

Exemplo 2.2.8. Considere a circunferência π centrada na origem com raio igual a 2 e a transformação $T(z) = z + 2i$. Calcule $I(\pi)$ e $I(T(\pi))$.

Em relação à circunferência π , temos:

$$C = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) = (0, 0).$$

Logo, $a = b = 0$, ou seja, $B = 0 + 0i$. Além disso,

$$c = r^2 - |B|^2 = 2^2 - 0^2 = 4.$$

³ (CHURCHILL, 2009) Complex Variables and Applications - James Ward Brown and Ruel V. Churchill, Capítulo 9

Assim, a equação da circunferência π é escrita da forma

$$\pi : |z|^2 = 4.$$

A circunferência π certamente não passa pela origem e já sabemos que $I(z)$ transforma circunferências que não passam pela origem em circunferências que não passam pela origem. Ou seja, $I(\pi)$ também é uma circunferência que não passa pela origem. Usando os resultados obtidos anteriormente, podemos deduzir que a equação da circunferência $I(\pi)$ é da forma

$$I(\pi) : |w|^2 = \frac{1}{4}.$$

Já sabemos também que a translação $T(z)$ leva circunferências em circunferências. Então, a equação da circunferência $T(\pi)$ se escreve na forma

$$T(\pi) : |z|^2 + \overline{B'}z + B'\overline{z} = c',$$

com $B' = B - 2i$ e $c' = c - |2i|^2 + \overline{B}2i + B\overline{2i}$. Assim, temos $B' = -2i$ e $c' = 0$. Logo, a equação da circunferência $T(\pi)$ é:

$$T(\pi) : |z|^2 + 2iz - 2i\overline{z} = 0.$$

Considere agora os complexos $z_1 = 4i$ e $z_2 = 2 + 2i$, ambos em $T(\pi)$. Como $T(\pi)$ passa pela origem, a inversão leva $T(\pi)$ em uma reta que não passa pela origem, ou seja, $I(T(\pi))$ é uma reta que não passa pela origem. Para encontrar a equação dessa reta, vamos calcular $w_1 = I(z_1)$ e $w_2 = I(z_2)$:

$$\begin{array}{ll} w_1 = I(z_1) & w_2 = I(z_2) \\ w_1 = \frac{1}{z_1} & w_2 = \frac{1}{z_2} \\ w_1 = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} & w_2 = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \\ w_1 = -\frac{1}{4}i, & w_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i. \end{array}$$

A equação da reta $I(T(\pi))$ é da forma da Equação (2.2). Já que w_1 e w_2 pertencem à essa reta,

temos:

$$\begin{aligned} \bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ \bar{B}w_1 + B\bar{w}_1 &= C \\ (a - bi) \left(-\frac{1}{4}i\right) + (a + bi) \left(\frac{1}{4}i\right) &= C \\ -\frac{1}{4}ai + \frac{1}{4}bi^2 + \frac{1}{4}ai + \frac{1}{4}bi^2 &= C \\ -\frac{1}{2}b &= C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}z + B\bar{z} &= C \\ \bar{B}w_2 + B\bar{w}_2 &= C \\ (a - bi) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right) + (a + bi) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) &= C \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}ai - \frac{1}{4}bi + \frac{1}{4}bi^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}ai + \frac{1}{4}bi + \frac{1}{4}bi^2 &= C \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b &= C. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2}b \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Tomando $b = 2$, temos

$$\begin{aligned} B = a + bi & & C = -\frac{b}{2} \\ B = 2i, & & C = -1. \end{aligned}$$

Então a equação da reta $I(T(\pi))$ pode ser escrita da forma

$$-2iz + 2i\bar{z} = -1.$$

Vamos procurar agora a intersecção das circunferências π e $T(\pi)$, isto é, um complexo z que satisfaça o sistema:

$$\begin{cases} |z|^2 = 4, \\ |z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} = 0. \end{cases}$$

Se $z = x + yi \in \pi \cap T(\pi)$, temos:

$$\begin{aligned} |z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} &= 0 \\ 4 + 2iz - 2i\bar{z} &= 0 \\ 2iz - 2i\bar{z} &= -4 \\ 2i^2z - 2i^2\bar{z} &= -4i \\ \bar{z} - z &= -2i \\ -2yi &= -2i \\ y &= 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |z|^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $z_3 = -\sqrt{3} + i$ e $z_4 = \sqrt{3} + i$ estão na intersecção de π e $T(\pi)$.

Vamos mostrar também que $w_3 = I(z_3)$ e $w_4 = I(z_4)$ estão na intersecção de $I(\pi)$ e $I(T(\pi))$. Assim

$$\begin{aligned} w_3 &= I(z_3) & w_4 &= I(z_4) \\ w_3 &= \frac{1}{z_3} & w_4 &= \frac{1}{z_4} \\ w_3 &= \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} & w_4 &= \frac{\bar{z}_4}{|z_4|^2} \\ w_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i, & w_4 &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Observe que $|w_3|^2 = |w_4|^2 = \frac{1}{4}$, ou seja, w_3 e w_4 satisfazem à equação da circunferência $I(\pi)$. Além disso, w_3 e w_4 também satisfazem a equação de $I(T(\pi))$.

$$\begin{aligned} -2iz + 2i\bar{z} &= -1 \\ -2iw_3 + 2i\bar{w}_3 &= -1 \\ -2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right) + 2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right) &= -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2 &= -1 \\ i^2 &= -1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 -2iz + 2i\bar{z} &= -1 \\
 -2iw_4 + 2i\bar{w}_4 &= -1 \\
 -2i\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right) + 2i\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right) &= -1 \\
 -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2 &= -1 \\
 i^2 &= -1.
 \end{aligned}$$

Assim, demonstramos que w_3 e $w_4 \in I(\pi) \cap I(T(\pi))$.

Como última observação, o ângulo formado pelas retas tangentes a π e $T(\pi)$ que passam por z_4 possuem a mesma medida que o angulo formado pela reta tangente a $I(\pi)$ que passa por w_4 com a reta $I(T(\pi))$. Já mencionado no exemplo anterior, isso ocorre porque a inversão é uma transformação que preserva ângulos (veja a Figura 20).

Uma pergunta natural referente à função inversão é a seguinte: podemos classificar a imagem da inversão de hipérbolas e elipses? A principio, parece fazer sentido que a função inversão transforme elipses em elipses ou hipérbolas e vice-versa. Entretanto, em geral, isso não acontece.

Considere uma elipse ξ cuja equação é dada por

$$\xi : \quad G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F,$$

e $w \in I(\xi)$. Logo, existe $z \in \xi$ tal que $w = I(z)$, ou seja, $w = \frac{1}{z}$. Assim, podemos substituir z por $\frac{1}{w}$ na equação de ξ , como a seguir.

$$\begin{aligned}
 G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} &= F \\
 G\left(\left(\frac{1}{w}\right)^2 + \overline{\left(\frac{1}{w}\right)^2}\right) + H\left|\frac{1}{w}\right|^2 + \bar{B}\frac{1}{w} + B\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} &= F \\
 G\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{\bar{w}^2}\right) + H\frac{1}{|w|^2} + \bar{B}\frac{1}{w} + B\frac{1}{\bar{w}} &= F \\
 G\left(\frac{w^2 + \bar{w}^2}{|w|^4}\right) + H\frac{1}{|w|^2} + \bar{B}\frac{\bar{w}}{|w|^2} + B\frac{w}{|w|^2} &= F \\
 G(w^2 + \bar{w}^2) + H|w|^2 + \bar{B}w|w|^2 + B\bar{w}|w|^2 &= F|w|^4.
 \end{aligned}$$

Assim, a inversão transforma a elipse ξ em uma curva de equação

$$I(\xi) : \quad G(w^2 + \bar{w}^2) + H|w|^2 + \bar{B}w|w|^2 + B\bar{w}|w|^2 = F|w|^4. \quad (2.23)$$

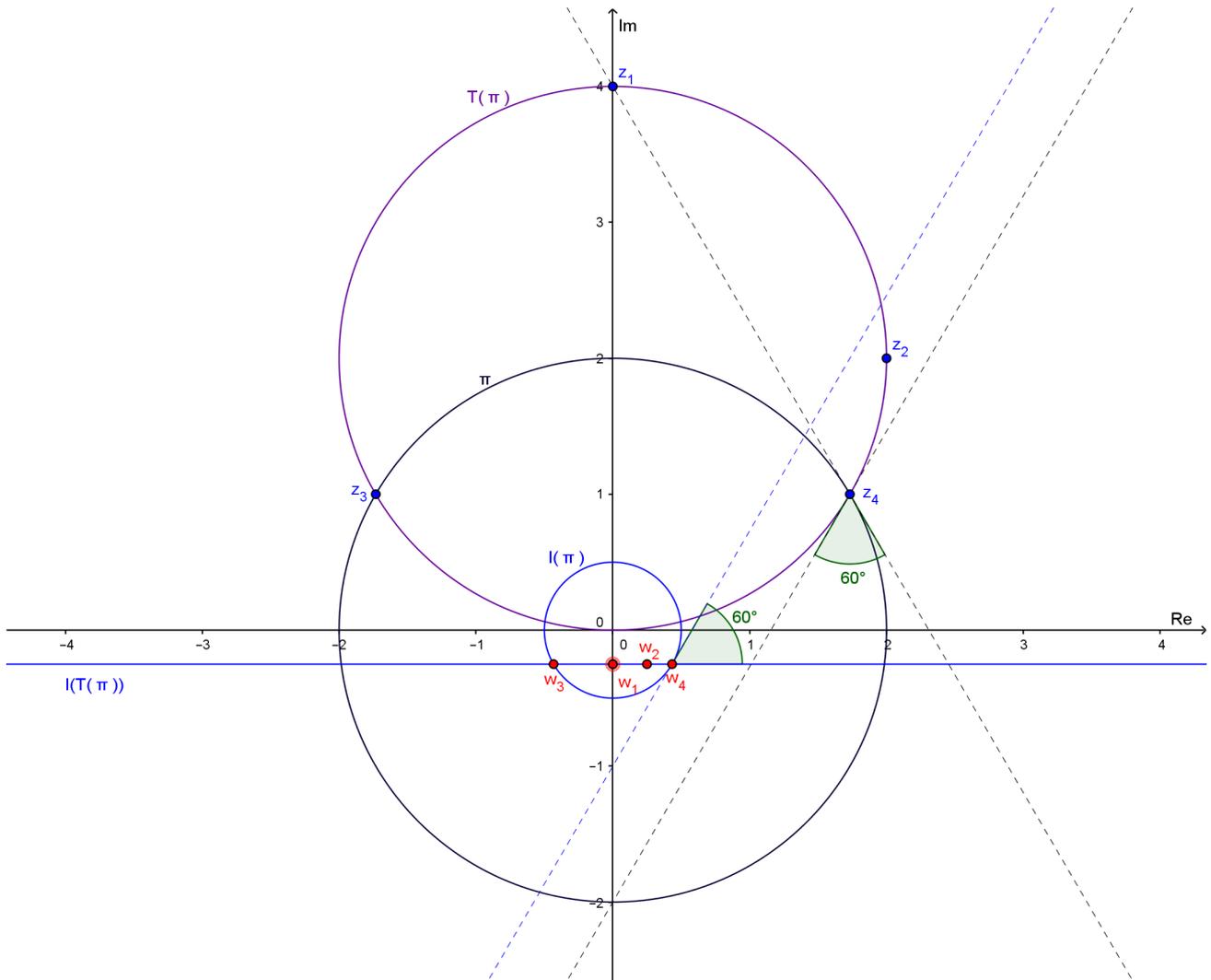


Figura 20 – Exemplo 2.2.8. $I(z)$ transforma circunferências em retas ou em circunferências.

Embora apresente certa semelhança na aparência com as equações que definem uma elipse ou uma hipérbole, a equação encontrada para a curva $I(\xi)$ possui termos que a diferencia bastante das equações que representam as cônicas já vistas. O mesmo processo pode ser aplicado para a inversão de uma hipérbole. A sua equação terá a mesma forma da Equação (2.23), com uma leve alteração na estrutura dos coeficientes. Vamos explorar casos particulares de elipses e hipérbolas para desvendar melhor o comportamento das novas curvas criadas a partir da inversão dessas duas cônicas.

Exemplo 2.2.9. Considere uma elipse ξ centrada na origem com eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados. Determine $I(z)$.

Como a elipse está centrada na origem a equação de ξ se escreve na forma:

$$G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 = F, \quad (2.24)$$

no qual $G = \frac{b^2 - a^2}{4}$, $H = \frac{a^2 + b^2}{2}$ e $F = a^2b^2$. Então, a inversão transforma a elipse ξ em uma

curva cuja equação é dada por

$$G(w^2 + \bar{w}^2) + H|w|^2 = F|w|^4. \quad (2.25)$$

Com o intuito de compreender melhor essa curva, vamos voltar para \mathbb{R}^2 e utilizar as técnicas já conhecidas de Geometria Analítica do plano. Para isso, vamos substituir os coeficientes G , H e F como acima, e w por $u + vi$.

$$\begin{aligned} G(w^2 + \bar{w}^2) + H|w|^2 &= F|w|^4 \\ \frac{b^2 - a^2}{4}((u + vi)^2 + \overline{(u + vi)^2}) + \frac{a^2 + b^2}{2}|u + vi|^2 &= a^2b^2|u + vi|^4 \\ \frac{b^2 - a^2}{4}(2(u^2 - v^2)) + \frac{a^2 + b^2}{2}(u^2 + v^2) &= a^2b^2(u^2 + v^2)^2 \\ \frac{b^2u^2 - b^2v^2 - a^2u^2 + a^2v^2 + b^2u^2 + b^2v^2 + a^2u^2 + a^2v^2}{2} &= a^2b^2(u^2 + v^2)^2 \\ \frac{2(b^2u^2 + a^2v^2)}{2} &= a^2b^2(u^2 + v^2)^2 \\ \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= (u^2 + v^2)^2 \\ u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} &= 0. \end{aligned}$$

A equação acima apresenta termos de quarto grau, por isso vamos fazer uma mudança de variável. Seja $x_1 = u^2$ e $y_1 = v^2$. Desse modo, a equação pode ser escrita por:

$$x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 - \frac{x_1}{a^2} - \frac{y_1}{b^2} = 0 \quad (2.26)$$

Assim, queremos encontrar os pontos do plano cujas coordenadas x e y satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} u = \pm\sqrt{x_1} & \text{com } x_1 \geq 0, \\ v = \pm\sqrt{y_1} & \text{com } y_1 \geq 0, \\ (x_1, y_1) & \text{satisfaz (2.26)}. \end{cases}$$

Vamos propor uma mudança no sistema de coordenadas para outro sistema de modo que a imagem da cônica procurada seja facilmente esboçada nesse novo sistema. Inicialmente, vamos escrever a Equação 2.26 na forma matricial:

$$X^tAX + 2BX = 0.$$

Nesse caso, temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a^2} & -\frac{1}{2b^2} \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

O próximo passo é verificar se essa cônica possui centro transladado, o que acontece se existir solução para o sistema $AC = -B^t$, com $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

$$AC = -B' \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{2a^2} \\ c_1 + c_2 = -\frac{1}{2b^2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2b^2} \Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = \pm b.$$

Como temos a e b estritamente positivos, devemos ter $a = b$. Entretanto, se $a = b$, então ξ é uma circunferência e este caso já foi detalhado e não nos interessa nesse momento. Assim, concluímos que essa cônica não possui centro trasladado, isto é não podemos encontrar um novo sistema de coordenadas no qual a cônica representada em (2.26) está centrada na origem do sistema.

Nosso próximo passo é propor uma mudança no sistema de coordenadas $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ para $S' = \{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, de modo que a equação da cônica em relação a esse novo sistema de coordenadas não apresente termo misto. Para que isso ocorra, basta tomarmos \vec{v}_1 e \vec{v}_2 como os autoversores associados aos autovalores da matriz A . Assim, vamos procurar um vetor não nulo \vec{u} que satisfaça a equação $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, ou seja $(A - \lambda Id)\vec{u} = 0$, isto é,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 1.$$

Logo, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores da matriz A . Desse modo, $u_1 = (1, -1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 0$ e $u_2 = (1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 2$.

Finalmente, basta tomarmos $\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ e $\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}$. Portanto, $\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Quando mudamos o sistema de coordenadas $S = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ para $S' = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, a equação da cônica passa a ser escrita na forma:

$$\lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(y'_1)^2 + 2BRX' = 0,$$

em que R é a matriz de rotação, cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos autoversores, isto é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(y'_1)^2 + 2BRX' &= 0 \\ 2(y'_1)^2 + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a^2} & -\frac{1}{2b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 2(y'_1)^2 + \frac{\sqrt{2}(a^2 - b^2)}{2a^2b^2}x'_1 - \frac{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}{2a^2b^2}y'_1 &= 0. \end{aligned}$$

A equação acima representa uma parábola e no sistema de coordenadas S' sua imagem pode ser facilmente desenhada. Nosso interesse se limita apenas aos pontos dessa parábola pertencentes ao 1º quadrante, ou seja, os pontos (x_1, y_1) tais que $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$. Para cada par ordenado (x_1, y_1) satisfazendo as condições citadas, tomamos os pontos (u, v) tais que:

$$\begin{cases} u = \pm\sqrt{x_1}, \\ v = \pm\sqrt{y_1}. \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico, vamos considerar $a = 1$ e $b = 2$. Nesse caso, a equação da parábola no sistema de coordenadas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, é da forma

$$2(y'_1)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}x'_1 - \frac{5\sqrt{2}}{8}y'_1 = 0.$$

Traçada essa parábola, vamos considerar para cada ponto $P = (u, v)$ do 1º quadrante que pertença a essa parábola, os pontos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sqrt{u}, \sqrt{v}), \\ P_2 &= (-\sqrt{u}, \sqrt{v}), \\ P_3 &= (-\sqrt{u}, -\sqrt{v}), \\ P_4 &= (\sqrt{u}, -\sqrt{v}). \end{aligned}$$

Desse modo, podemos traçar o gráfico da curva procurada a partir dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 . A Figura 21 mostra o gráfico da inversão da elipse ξ , cujas equações são:

$$\begin{aligned} \xi : \quad & \frac{3}{4}(z^2 + \bar{z}^2) + \frac{5}{2}|z|^2 = 4, \\ I(\xi) : \quad & \frac{3}{4}(w^2 + \bar{w}^2) + \frac{5}{2}|w|^2 = 4|w|^4. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.10. *Esboce o gráfico da hipérbole ψ , cuja distância focal é igual a $2\sqrt{2}$, centrada em $z_0 = 0 + 0i$ e que tem $z_1 = -1$ como um de seus vértices. Em seguida, esboce o gráfico de $I(\psi)$.*

Inicialmente, vamos analisar a hipérbole ψ . Essa hipérbole está centrada na origem, logo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Além disso, $a = 1$ e $c = \sqrt{2}$ já que z_1 é um vértice, z_0 é o centro e a distância focal é $2\sqrt{2}$. Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (\sqrt{2})^2 &= 1^2 + b^2 \\ b &= 1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da hipérbole ψ é:

$$\frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2) = 1. \tag{2.27}$$

Já temos condições de esboçar o gráfico de ψ mas antes, vamos analisar $I(\psi)$. Com as informações encontradas, podemos concluir que a equação da curva $I(\psi)$ é:

$$\frac{1}{2}(w^2 + \bar{w}^2) = |w|^4. \tag{2.28}$$

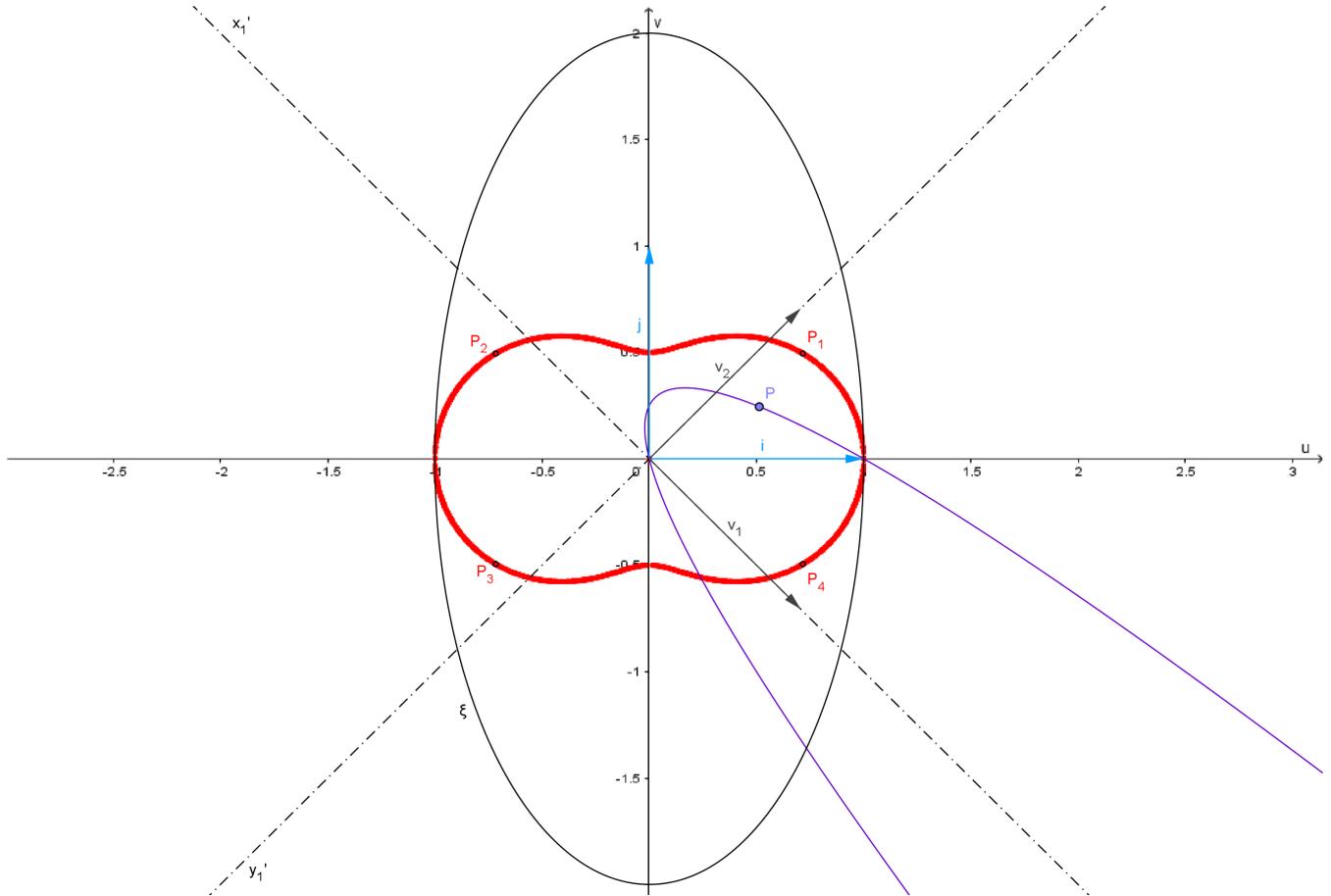


Figura 21 – Exemplo 2.2.9. Gráfico da curva $I(\xi)$

Analogamente ao que foi feito no exemplo anterior, se $w = u + vi$, temos que a equação da curva $I(\psi)$ em \mathbb{R}^2 pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ((u + vi)^2 + (u - vi)^2) &= (u^2 + v^2)^2 \\ \frac{1}{2} (u^2 + 2uvi + v^2i^2 + u^2 - 2uvi + v^2i^2) &= (u^2 + v^2)^2 \\ \frac{1}{2} (2u^2 - 2v^2) &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\ u^2 - v^2 &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\ u^4 + v^4 + 2u^2v^2 - u^2 + v^2 &= 0. \end{aligned}$$

Nesse ponto, vamos fazer uma mudança de variáveis para visualizar a quádrlica. Assim, tome $x_1 = u^2$ e $y_1 = v^2$ e a equação passa a ser

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 - x_1 + y_1 = 0. \quad (2.29)$$

Vamos reescrever (2.29) em um novo sistema de coordenadas, caso possível, no qual nesse novo sistema não teremos os termos lineares e mistos. Vamos então escrever a Equação 2.29 na forma matricial:

$$X^tAX + 2BX = 0.$$

Nesse caso, temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

O passo seguinte é verificar se essa quádrlica possui centro transladado, o que acontece se existir solução para o sistema $AC = -B^t$, com $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

$AC = -B^t \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{2} \\ c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Logo, o sistema $AC = -B^t$ é impossível, ou seja, essa cônica não possui centro transladado, isto é não podemos encontrar um novo sistema de coordenadas no qual a cônica representada em (2.29) está centrada na origem do sistema.

Agora vamos propor uma mudança no sistema de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ para $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, de modo que a equação da cônica em relação a esse novo sistema de coordenadas não apresente termo misto. Para que isso ocorra, basta tomarmos \vec{v}_1 e \vec{v}_2 como os autoversores associados aos autovalores da matriz A . Assim, vamos procurar um vetor não nulo \vec{u} que satisfaça a equação $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, ou seja $(A - \lambda Id)\vec{u} = 0$, isto é,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 1.$$

Logo, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores da matriz A . Desse modo, $u_1 = (1, -1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 0$ e $u_2 = (1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 2$.

Finalmente, basta tomarmos $\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ e $\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}$. Portanto, $\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Quando mudamos o sistema de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ para $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, a equação da cônica passa a ser escrita na forma:

$$\lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(y'_1)^2 + 2BRX' = 0,$$

em que R é a matriz de rotação, cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos autoversores, isto é

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(y'_1)^2 + 2BRX' &= 0 \\ 2(y'_1)^2 + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 2(y'_1)^2 - \sqrt{2}x'_1 &= 0. \end{aligned}$$

A equação acima representa uma parábola. No sistema de coordenadas $\{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, seu gráfico pode ser facilmente desenhado. Nosso interesse se limita apenas aos pontos dessa parábola pertencentes ao 1º quadrante, ou seja, os pontos (x_1, y_1) tais que $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$. Para cada par ordenado (x_1, y_1) satisfazendo as condições citadas, tomamos os pontos (u, v) tais que:

$$\begin{cases} u = \pm\sqrt{x_1}, \\ v = \pm\sqrt{y_1}. \end{cases}$$

Uma vez traçada essa parábola, vamos considerar para cada ponto $P = (u, v)$ do 1º quadrante que pertença a essa parábola, os pontos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sqrt{u}, \sqrt{v}), \\ P_2 &= (-\sqrt{u}, \sqrt{v}), \\ P_3 &= (-\sqrt{u}, -\sqrt{v}), \\ P_4 &= (\sqrt{u}, -\sqrt{v}). \end{aligned}$$

Desse modo, podemos traçar o gráfico da curva procurada a partir dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 . A Figura 22 mostra o gráfico da inversão da hipérbole ψ , cujas equações são:

$$\begin{aligned} \psi &: \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2) = 1, \\ I(\psi) &: \frac{1}{2}(w^2 + \bar{w}^2) = |w|^4. \end{aligned}$$

2.3 Aplicação

Vamos apresentar uma aplicação do estudo anterior no seguinte exercício.

Seja n um inteiro positivo. Prove que $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ tem uma raiz satisfazendo $|z| = 1$ se, e somente se, $n + 2$ é divisível por 6.

Demonstração. (\Rightarrow)

Hipótese: $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ tem uma raiz com $|z| = 1$.

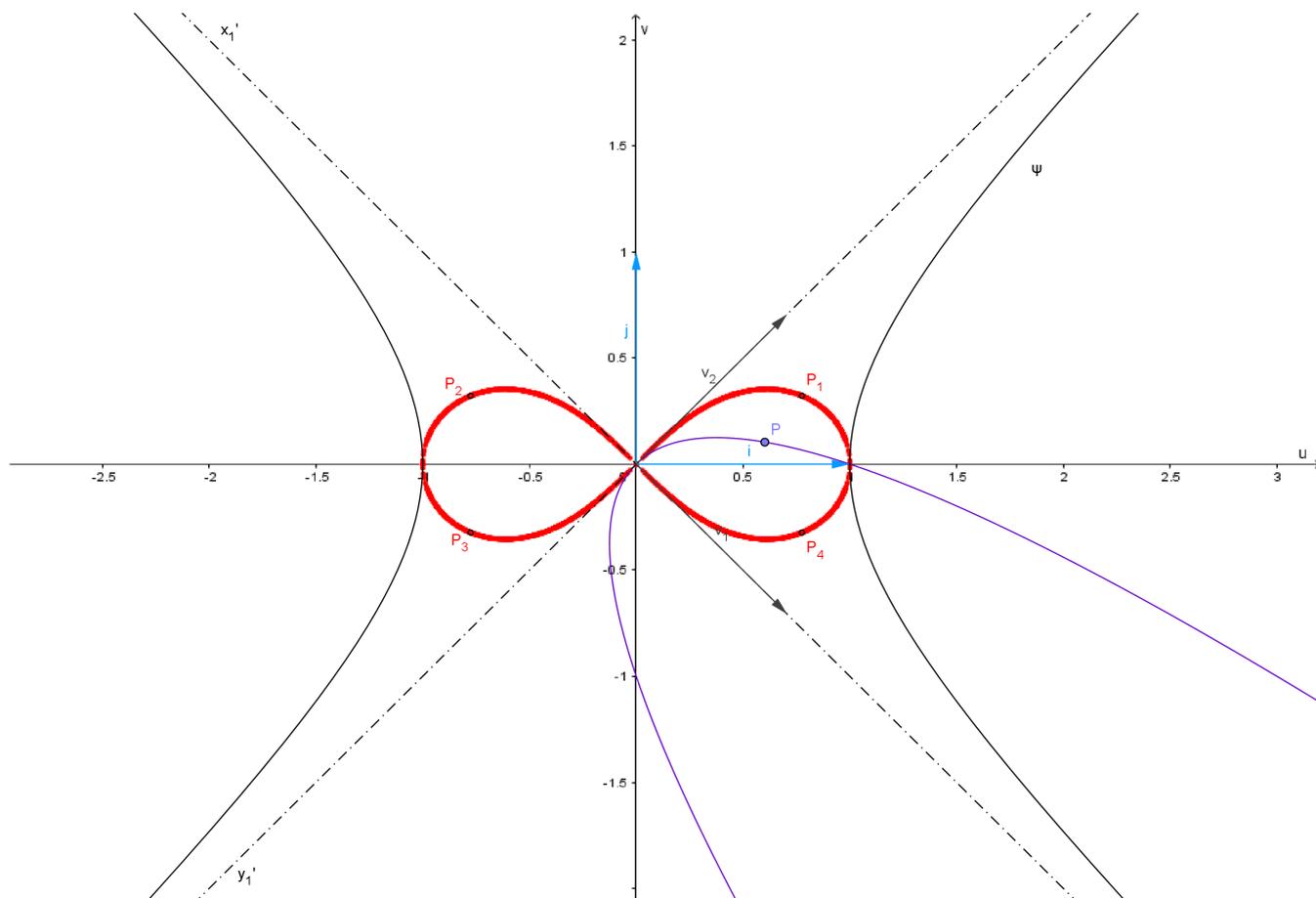


Figura 22 – Exemplo 2.2.10. Gráfico da hipérbole ψ e da curva $I(\psi)$

Tese: $n + 2$ é divisível por 6.

A partir da hipótese, podemos assumir que existe $z_1 \in \mathbb{C}$, com $|z_1| = 1$ de modo que

$$z_1^{n+1} - z_1^n - 1 = 0. \quad (2.30)$$

Logo,

$$\begin{aligned} z_1^{n+1} - z_1^n &= 1 \\ z_1^n(z_1 - 1) &= 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Uma vez que $|z_1| = 1$, temos que $|z_1^n| = 1$. Assim a Equação 2.31 nos garante que

$$|z_1^n| \cdot |z_1 - 1| = 1,$$

e podemos concluir que

$$|z_1 - 1| = 1.$$

Portanto, z_1 deve satisfazer

$$\begin{cases} |z_1| = 1, \\ |z_1 - 1| = 1, \end{cases}$$

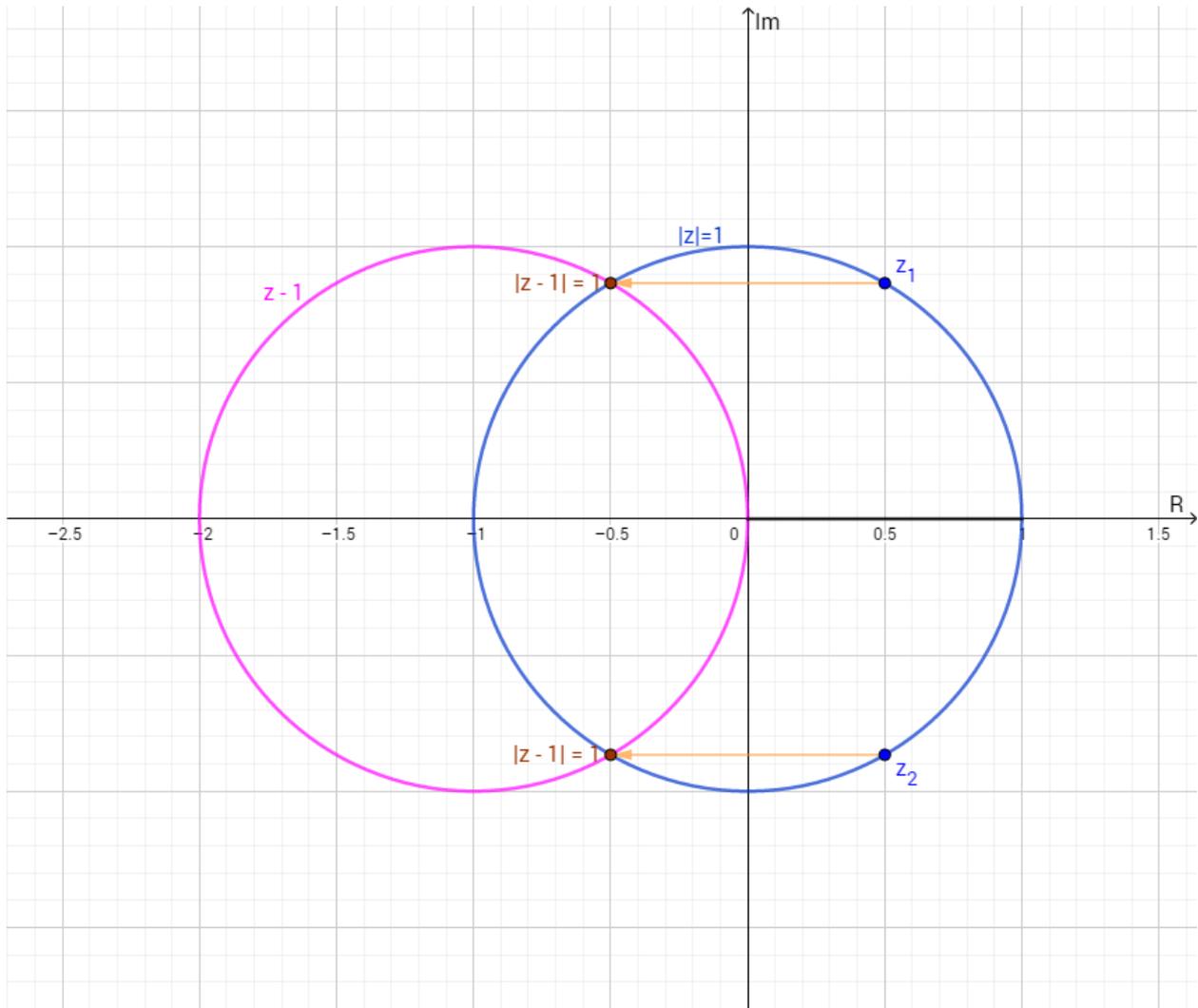


Figura 23 – As duas soluções da equação (2.30) com a restrição $|z| = 1$.

ou seja, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (veja a Figura 23).

Se $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, então $z_1 - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Como z_1 é solução da Equação 2.31, temos

$$\begin{aligned} (e^{i\frac{\pi}{3}})^n \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} &= 1 \\ e^{i\frac{n\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} &= e^{i2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{(n+2)\pi}{3} &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ n+2 &= 6k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Se $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$, então $z_1 - 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Logo, temos

$$\begin{aligned} (e^{i\frac{5\pi}{3}})^n \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} &= 1 \\ e^{i\frac{5n\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} &= e^{i2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{(5n+4)\pi}{3} &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ n &= \frac{6k-4}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ n+2 &= 6 \cdot \left(\frac{k+1}{5}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como n é um número inteiro e positivo, $n+2$ também é inteiro e positivo. Desse modo, devemos tomar os valores de k no conjunto $\{4, 9, 14, 19, \dots\}$ para que isso ocorra. E assim, temos que $n+2$ é um múltiplo de 6. Portanto, podemos concluir que a Equação 2.30 com a restrição $|z| = 1$ apresenta apenas duas possíveis soluções, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, e para que sejam de fato soluções temos que $n+2$ deve ser divisível por 6.

(\Leftarrow)

Hipótese: $n+2$ é divisível por 6.

Tese: $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ tem uma raiz com $|z| = 1$.

Da hipótese, podemos deduzir que

$$n+2 = 6k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a Equação 2.30 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} z^{6k-1} - z^{6k-2} - 1 &= 0 \\ z^{6k-1} - z^{6k-2} &= 1 \\ z^{6k-2}(z-1) &= 1 \\ z^{6k-2} &= \frac{1}{z-1}. \end{aligned}$$

Queremos encontrar uma solução z_1 para essa equação com a restrição $|z_1| = 1$. Observe que $|z^{6k-2}| = 1$ se $|z| = 1$. Os números complexos de módulo unitário delimitam uma circunferência de raio unitário e centro em $0 + 0i$. Desse modo, tanto z quanto z^{6k-2} pertencem à essa circunferência. Como $z-1$ é uma translação horizontal, podemos concluir que $z-1$ pertence à circunferência de raio unitário e centro em $-1 + 0i$. Assim, basta aplicar a inversão dessa circunferência para identificar a figura geométrica a qual $\frac{1}{z-1}$ pertence. De acordo com os resultados já vistos nesse capítulo, a inversão de uma circunferência que passa em $0 + 0i$ é uma reta, neste caso, uma reta paralela ao eixo imaginário passando por $-\frac{1}{2} + 0i$.

Logo, com a restrição $|z| = 1$, as únicas possíveis soluções para a equação

$$z^{6k-2} = \frac{1}{z-1},$$

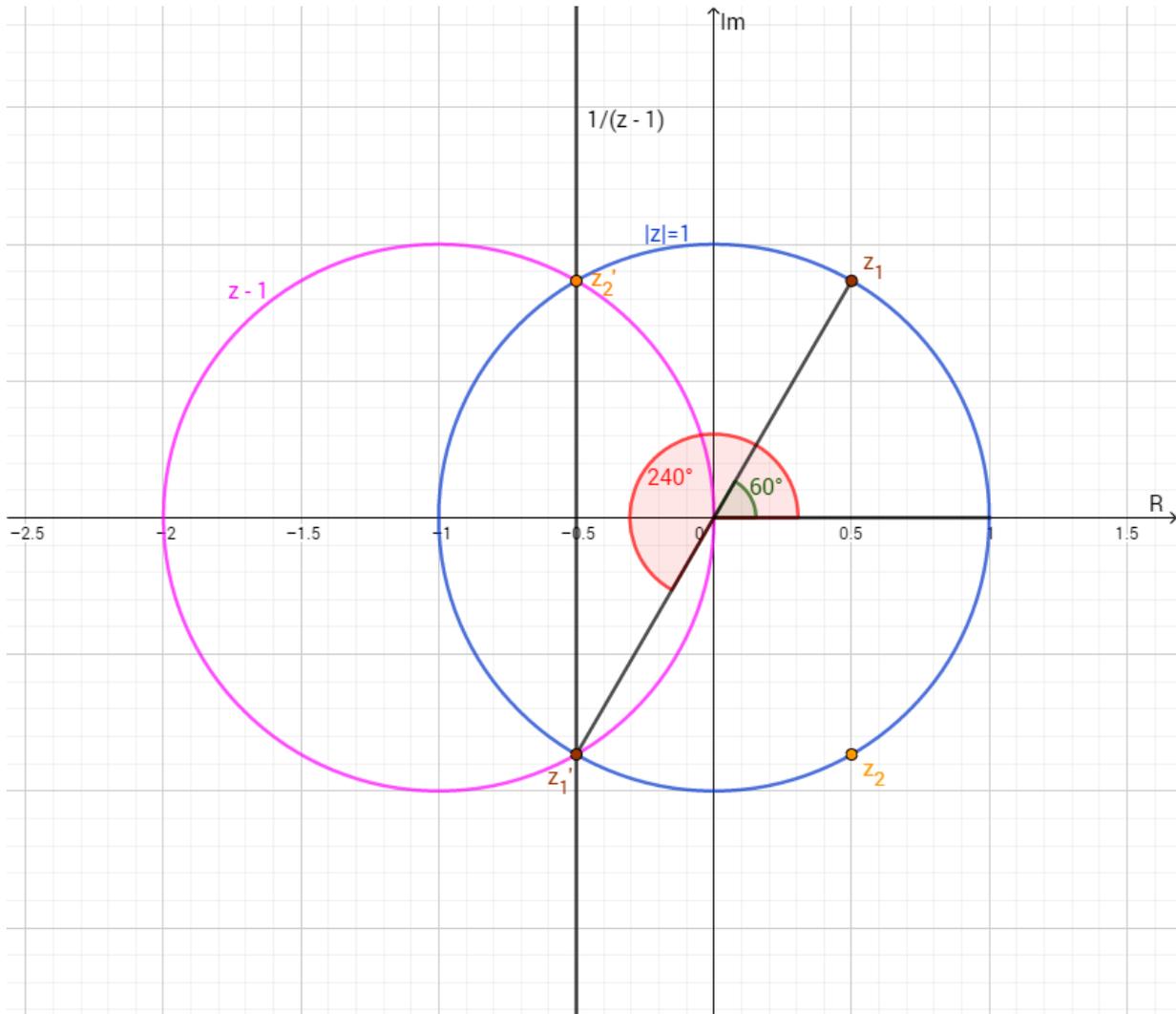


Figura 24 – z_1 e z_2 são as únicas soluções com a restrição $|z| = 1$ para a Equação 2.30 com $n + 2$ divisível por 6

são $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (veja a Figura 24). Só nos resta conferir se pelo menos uma dessas é de fato uma solução para a Equação 2.30. Note que

$$\begin{aligned}
 z^{n+1} - z^n - 1 &= 0 \\
 z^{6k-1} - z^{6k-2} &= 1 \\
 z^{6k-2} &= \frac{1}{z-1} \\
 \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6k-2} &= \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} \\
 e^{(2k\pi - \frac{2\pi}{3})i} &= \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} \\
 e^{-i\frac{2\pi}{3}} &= e^{-i\frac{2\pi}{3}}.
 \end{aligned}$$

□

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

3.1 Transformação de Möbius

As transformações de Möbius, também conhecidas como transformações lineares fracionárias, são funções racionais da forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{no qual } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0. \quad (3.1)$$

Vamos analisar a condição $ad - bc \neq 0$ em (3.1). Esta condição nos garante que $f(z)$ não se trata de uma transformação constante e que o domínio de f , denotado por $D(f)$, é não vazio. Vejamos todos os casos possíveis em que $ad - bc = 0$.

(i) $a = b = 0$ ($c \neq 0$ ou $d \neq 0$). Então

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

(ii) $a = c = 0$ ($d \neq 0$). Então

$$f(z) = \frac{b}{d}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(iii) $b = d = 0$ ($c \neq 0$). Então

$$f(z) = \frac{a}{c}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(iv) $c = d = 0$. Então

$$f(z) \text{ não está definida. } D(f) = \emptyset.$$

(v) $c \neq 0$ e $ad - bc = 0$. Então

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{a(cz+d)}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

Essa condição também nos garante que $f(z)$ é injetora. Sejam z_1 e $z_2 \in D(f)$ tais que $f(z_1) = f(z_2)$.

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(z_2) \\ \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd &= acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd \\ (ad - bc)z_1 &= (ad - bc)z_2 \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

Agora, vamos analisar o domínio e a imagem de $f(z)$.

- $c = 0$, então

$$f(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad a \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

Neste caso, temos $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{C}$. Assim, temos $f(z)$ sobrejetora.

- $c \neq 0$, a função $f(z)$ fica bem definida se, e somente se, $cz + d \neq 0$. Logo, temos $D(f) = \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Se $w = f(z)$, então

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} \\ w(cz + d) &= az + b \\ z &= \frac{b - wd}{wc - a}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $wc - a \neq 0$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $w = f(z)$. Portanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

A fim de garantir que as transformações de Möbius sejam aplicações bijetoras, vamos contornar essas restrições nesses pontos "críticos" do domínio e da imagem de $f(z)$. Para isto, vamos considerar a união do plano complexo com o ponto infinito, denotado por ∞ . Essa união será denotada por $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, chamado plano complexo estendido. Usando a ideia de limite, podemos estabelecer como $f(z)$ será definida nesse novo ponto.

- $c = 0$, então

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Logo, $z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z) \rightarrow \infty$.

- $c \neq 0$, então

$$f(z) = \frac{a + \frac{b\bar{z}}{|z|^2}}{c + \frac{d\bar{z}}{|z|^2}}.$$

Logo, $z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z) \rightarrow \frac{a}{c}$.

De acordo com essas observações, vamos definir $f(\infty) = \frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, e $f(\infty) = \infty$ caso contrário. Agora que $f(z)$ já está bem definida, ainda temos um impasse quando $z = -\frac{d}{c}$, $c \neq 0$. Nesse caso, podemos definir $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. Resumindo, vamos definir uma transformação de Möbius com $ad - bc \neq 0$ como uma aplicação bijetora $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } c = 0 \text{ e } z = \infty, \\ \infty, & \text{se } c \neq 0 \text{ e } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c}, & \text{se } c \neq 0 \text{ e } z = \infty, \\ \frac{az+b}{cz+d}, & \text{se } z \neq -\frac{d}{c}, \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2 Composição de transformações elementares

Para a transformação de Möbius definida em (3.2), vamos considerar os dois casos a seguir:

1. $c = 0$

Nesse caso, temos necessariamente $d \neq 0$, uma vez que $bc - ad \neq 0$. Então podemos escrever a transformação f da seguinte forma:

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad \text{no qual } \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{C}.$$

Essa transformação pode ser vista como uma multiplicação por um complexo seguida de uma translação. Basta representar f como uma transformação composta de outras duas transformações g e h , definidas por $g(z) = \frac{a}{d}z$ e $h(z) = z + \frac{b}{d}$. Consequentemente, $f(z) = (h \circ g)(z)$.

Considerando os números complexos z , $z' = g(z)$, $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ em suas formas algébrica e exponencial como a seguir, a transformação f associa a cada número complexo z a um novo número complexo $z'' = f(z) = (h \circ g)(z) = h(z')$ da forma:

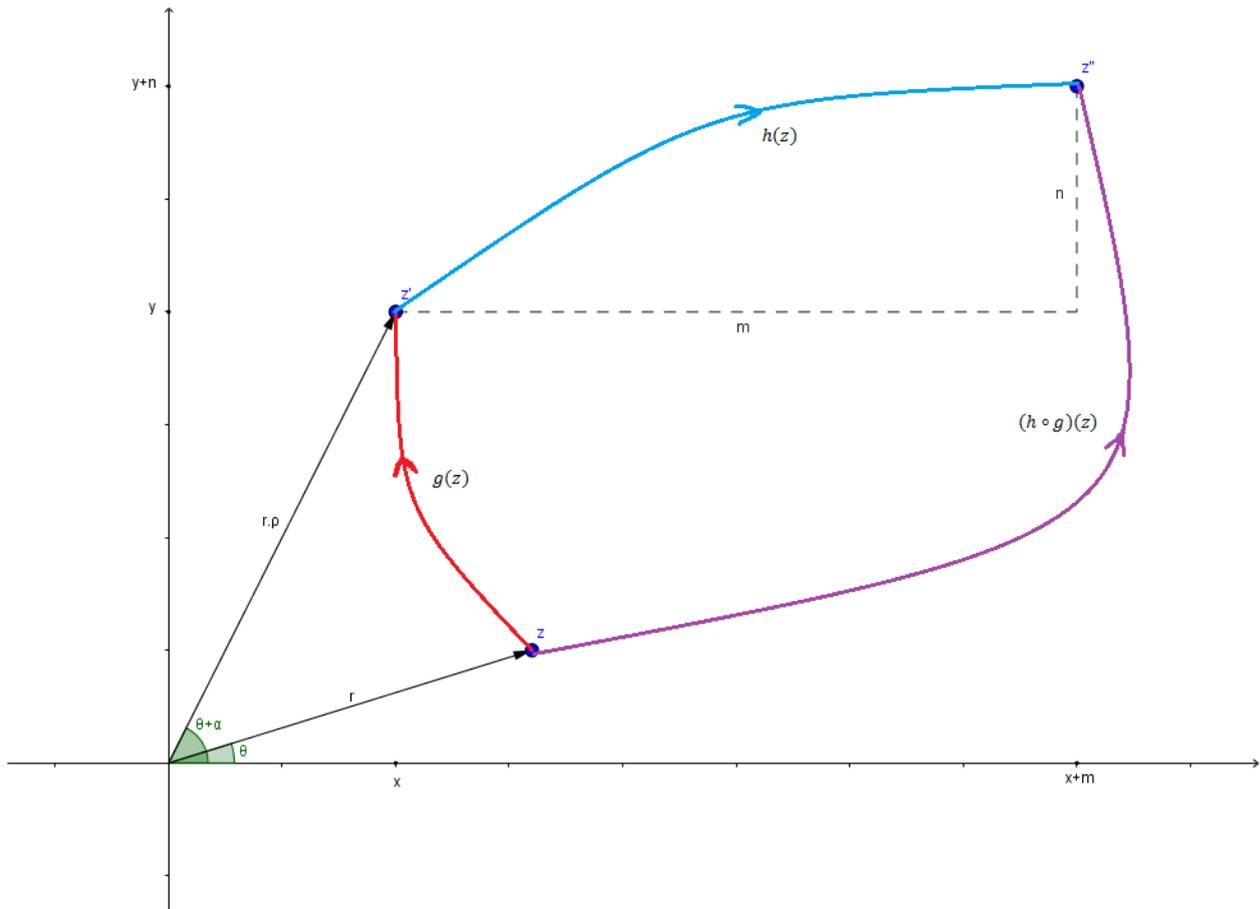
$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta}, & \frac{a}{d} &= \rho e^{i\alpha}, & \text{nos quais } r, \rho, x, y, m, n &\in \mathbb{R}, \\ z' &= x + yi, & \frac{b}{d} &= m + ni, & \text{nos quais } \theta, \alpha &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Inicialmente z é levado em z' por g ,

$$z' = g(z) = \frac{a}{d}z = r\rho e^{i(\theta+\alpha)}.$$

Dessa forma, z' é obtido a partir de z após uma homotetia (tem seu módulo multiplicado por ρ) e uma rotação (tem seu argumento acrescido de α). Em seguida, z' é levado em z'' por h ,

$$z'' = h(z') = z' + \frac{b}{d} = (x+m) + (y+n)i,$$

Figura 25 – $f(z) = (h \circ g)(z)$

isto é, z'' é obtido a partir de z' após uma translação (m unidades na horizontal e n unidades na vertical) (veja a Figura 25).

2. $c \neq 0$

Ajustando a expressão $\frac{az+b}{cz+d}$, temos:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{acz+bc+ad-ad}{c \cdot (cz+d)} = \frac{a \cdot (cz+d) + bc - ad}{c \cdot (cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

Logo,

$$f(z) = a' + b' \cdot \frac{1}{z+c'}, \quad \text{nos quais } a' = \frac{a}{c}, b' = \frac{bc-ad}{c^2} \text{ e } c' = \frac{d}{c}.$$

Então, nesse caso uma transformação de Möbius também pode ser vista como uma associação de transformações elementares: *translação*, *multiplicação por complexo* e *inversão*. Considerando os números complexos z , z' , a' , b' e c' em suas formas algébrica e exponencial como a seguir, vamos encaminhar esse processo em 4 passos:

$$\begin{aligned}
 z &= x + yi, \\
 b' &= \rho e^{i\alpha}, \\
 z' &= (x + m) + (y + n)i = re^{i\theta}, \\
 c' &= m + ni, \\
 d' &= p + qi,
 \end{aligned}$$

no qual $x, y, m, n, p, q, r, \rho \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \theta \in [0, 2\pi[$.

a) **1º passo: Translação**

Considere a transformação $g(z) = z + \frac{d}{c}$. Essa transformação leva cada número complexo z em um outro número complexo z' , transladado m unidades na horizontal e n na vertical.

$$z = x + yi \longrightarrow z' = (x + m) + (y + n)i.$$

b) **2º passo: Inversão**

Agora, vamos considerar a transformação $h(z) = \frac{1}{z}$. Essa transformação é aplicada logo após a transformação $g(z)$ levar z em z' e associa a cada número complexo z' um outro número complexo z'' , que tem o inverso de seu módulo e o oposto de seu argumento.

$$z' = re^{i\theta} \longrightarrow z'' = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

c) **3º passo: Multiplicação por um número complexo**

Nesse passo, vamos considerar a transformação $j(z) = w \cdot z$ que associa à cada número complexo z'' da imagem de $h(z)$ a um outro número complexo z''' , com módulo multiplicado por ρ (módulo de w) e argumento acrescido de α (argumento de w).

$$z'' = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \longrightarrow z''' = \frac{\rho}{r}e^{i(-\theta+\alpha)}.$$

d) **4º passo: Translação**

Por fim, considere a transformação $k(z) = z + \frac{a}{c}$ que leva cada número complexo z''' da imagem de $j(z)$ em um novo número complexo z'''' , transladado p unidades na horizontal e q unidades na vertical. (veja a Figura 26)

$$z''' = x''' + y'''i \longrightarrow z'''' = (x''' + p) + (y''' + q)i.$$

Após analisar os casos acima, fica claro que uma transformação de Möbius pode ser vista como uma combinação de transformações elementares já observadas.

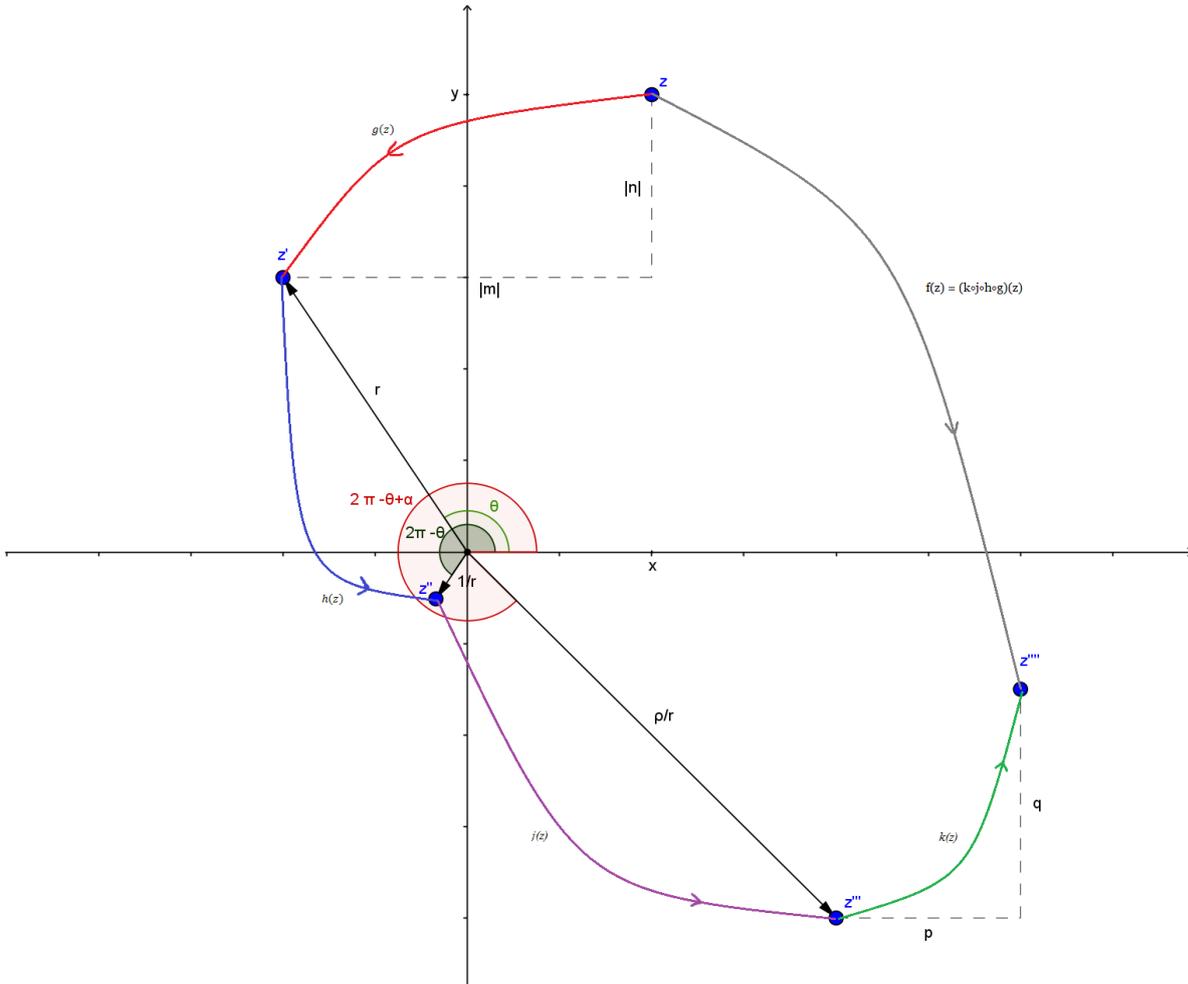


Figura 26 – $f(z) = (k \circ j \circ h \circ g)(z)$

3.3 Existência, unicidade e método de determinação de uma Transformação de Möbius

O objetivo desta seção é mostrar que conhecendo as imagens de três números complexos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, existe uma única transformação de Möbius que associa esses três complexos em suas respectivas imagens. Uma vez garantidas a existência e a unicidade, vamos também apresentar um método para determinar essa transformação. Inicialmente, vamos definir um conceito muito importante para a demonstração dos resultados a seguir.

Definição 3.3.1. Um complexo $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ é chamado de **ponto fixo** da transformação de Möbius f quando $f(z_0) = z_0$.

Proposição 3.3.1. Uma transformação de Möbius, exceto a função identidade, possui no máximo dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Demonstração. Considere a transformação de Möbius $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Para determinar os pontos fixos de f em $\widehat{\mathbb{C}}$, basta encontrar as soluções da equação $f(z) = z$. Vamos analisar as soluções dessa equação nos dois casos a seguir:

1. $c = 0$

Neste caso, pela definição de f em (3.2), temos $f(\infty) = \infty$. Logo, ∞ é um ponto fixo de f . Se existir um outro ponto fixo de f então ele pertence a \mathbb{C} , assim

$$\begin{aligned} f(z) &= z \\ \frac{az+b}{d} &= z \\ (a-d)z + b &= 0. \end{aligned}$$

Em \mathbb{C} , essa equação:

- a) admite uma única solução, $z = \frac{-b}{a-d}$, caso $a \neq d$.
- b) não admite solução, caso $a = d$ e $b \neq 0$, isto é, se f é uma translação.
- c) admite infinitas soluções, caso $a = d$ e $b = 0$ se, e somente se, f é a identidade.

2. $c \neq 0$

Neste caso, ∞ não é ponto fixo de f , já que, pela definição de f em (3.2), temos $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Além disso, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. Logo, se existirem pontos fixos de f , eles necessariamente pertencem a \mathbb{C} . Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= z \\ az+b &= cz^2 + dz \\ cz^2 + (d-a)z - b &= 0. \end{aligned}$$

Segundo Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio de grau 2 com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa. Assim, f tem pelo menos um ponto fixo em \mathbb{C} . Por outro lado, um polinômio de grau 2 em um domínio de integridade¹ tem no máximo 2 raízes nesse domínio de integridade. Como \mathbb{C} é um domínio de integridade, f tem pelo menos um e no máximo dois pontos fixos. Assim, a proposição esta demonstrada.

□

Proposição 3.3.2. Se duas transformações de Möbius possuem as mesmas imagens em três complexos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, então essas transformações são iguais.

¹ (VILLELA, 2012) Polinômios e Equações Algébricas - Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela, Capítulo 4 - Proposição 4.1

Demonstração. Sejam f e g , duas transformações de Möbius tais que

$$f(z_1) = g(z_1), \quad f(z_2) = g(z_2) \quad e \quad f(z_3) = g(z_3),$$

com z_1, z_2 e $z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos. Assim, para $j = 1, 2, 3$, temos

$$(f^{-1} \circ g)(z_j) = f^{-1}(g(z_j)) = f^{-1}(f(z_j)) = z_j.$$

Desse modo, z_1, z_2 e z_3 são pontos fixos da transformação $f^{-1} \circ g$, que também é uma transformação de Möbius². Logo, de acordo com a proposição anterior, $f^{-1} \circ g$ é a transformação identidade, ou seja, f e g são idênticas. \square

Com o resultado acima, podemos afirmar que para z_1, z_2 e z_3 , distintos e w_1, w_2 e w_3 também distintos, se existir uma transformação de Möbius f tal que $f(z_j) = w_j$, para $j = 1, 2, 3$, essa transformação é única. Além de garantir que tal transformação sempre existe, vamos apresentar um método para determiná-la. Adotando $w = f(z)$, a equação

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \quad (3.3)$$

define, implicitamente, uma transformação de Möbius f , que mapeia os complexos z_1, z_2 e z_3 (distintos) em w_1, w_2 e w_3 (distintos), respectivamente. Escrevendo a equação 3.3 como a seguir, vamos verificar esse fato.

$$(w - w_1)(w_2 - w_3)(z - z_3)(z_2 - z_1) = (w - w_3)(w_2 - w_1)(z - z_1)(z_2 - z_3). \quad (3.4)$$

- $z = z_1$

$$\begin{aligned} (w - w_1)(w_2 - w_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) &= (w - w_3)(w_2 - w_1)(z_1 - z_1)(z_2 - z_3) \\ (w - w_1)(w_2 - w_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) &= 0 \\ (w - w_1) &= 0 \\ w &= w_1. \end{aligned}$$

- $z = z_2$

$$\begin{aligned} (w - w_1)(w_2 - w_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) &= (w - w_3)(w_2 - w_1)(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \\ (w - w_1)(w_2 - w_3) &= (w - w_3)(w_2 - w_1) \\ w &= w_2. \end{aligned}$$

² A composição de funções de Möbius é também uma função de Möbius, assim como a inversa de transformação de Möbius é de Möbius. (VILLELA, 2012) Polinômios e Equações Algébricas - Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela, Capítulo 2, página 73

- $z = z_3$

$$\begin{aligned}(w - w_1)(w_2 - w_3)(z_3 - z_3)(z_2 - z_1) &= (w - w_3)(w_2 - w_1)(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) \\ 0 &= (w - w_3)(w_2 - w_1)(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) \\ 0 &= w - w_3 \\ w &= w_3.\end{aligned}$$

Assim, desenvolvendo a equação 3.4, obtemos w em função de z , $w = f(z)$.

Exemplo 3.3.1. *Determine a transformação de Möbius f tal que $f(1) = i$, $f(i) = -1$ e $f(-1) = 1$.*

Adotando a notação usada na equação 3.3, temos:

$$\begin{array}{lll} z_1 = 1, & z_2 = i, & z_3 = -1, \\ w_1 = i, & w_2 = -1, & w_3 = 1. \end{array}$$

Agora, basta substituir esses valores na equação (3.3) e efetuar o produto cruzado para obter w em função de z .

$$\begin{aligned}\frac{(w - i)(-1 - 1)}{(w - 1)(-1 - i)} &= \frac{(z - 1)(i - (-1))}{(z - (-1))(i - 1)} \\ (w - i)(-2)(z + 1)(i - 1) &= (w - 1)(-1 - i)(z - 1)(i + 1) \\ 2wz - 4wi + 2w &= 4zi + 2z + 2 \\ w &= \frac{(1 + 2i)z + 1}{z + (1 - 2i)}.\end{aligned}$$

Então, a transformação de Möbius f , dada por

$$f(z) = \frac{(1 + 2i)z + 1}{z + (1 - 2i)},$$

é a única transformação de Möbius tal que:

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{(1 + 2i)1 + 1}{1 + (1 - 2i)} = \frac{2 + 2i}{2 - 2i} = i; \\ f(i) &= \frac{(1 + 2i)i + 1}{i + (1 - 2i)} = \frac{i - 1}{1 - i} = -1; \\ f(-1) &= \frac{(1 + 2i)(-1) + 1}{-1 + (1 - 2i)} = \frac{-2i}{-2i} = 1.\end{aligned}$$

O método para determinação da transformação de Möbius através da equação 3.3 também pode ser usado se ∞ for um dos pontos do domínio ou da imagem. Suponhamos que $z_1 = \infty$.

Como uma função linear fracionária é contínua em todo plano complexo estendido³, vamos reescrever a equação (3.3) e calcular o limite quando $|z_1|$ tende para o infinito.

$$\lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{z}{z_1} - 1\right)z_1(z_2 - z_3)}{(z - z_3)\left(\frac{z_2}{z_1} - 1\right)z_1} = \lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{z\bar{z}_1}{|z_1|^2} - 1\right)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)\left(\frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2} - 1\right)} = \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)}.$$

Na prática, basta omitirmos os fatores da equação 3.3 que contenham um ponto do domínio ou da imagem igual a infinito.

Exemplo 3.3.2. Determine a transformação de Möbius f tal que $f(0) = -1$, $f(1) = \infty$ e $f(\infty) = 1$.

Temos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, & z_2 &= 1, & z_3 &= \infty, \\ w_1 &= -1, & w_2 &= \infty, & w_3 &= 1. \end{aligned}$$

Agora, basta resolver a equação a seguir, com w em função de z .

$$\begin{aligned} \frac{(w - w_1)}{(w - w_3)} &= \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} \\ \frac{(w - (-1))}{(w - 1)} &= \frac{(z - 0)}{(1 - 0)} \\ w + 1 &= zw - z \\ w &= \frac{z + 1}{z - 1}. \end{aligned}$$

Assim, a transformação de Möbius dada por

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - 1},$$

é a única transformação de Möbius tal que:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1; \\ f(1) &= f\left(\frac{a}{c}\right) = \infty; \\ f(\infty) &= -\frac{d}{c} = -\frac{-1}{1} = 1. \end{aligned}$$

³ (CHURCHILL, 2009) Complex Variables and Applications - James Ward Brown and Ruel V. Churchill, Capítulo 9

TRANSFORMAÇÕES E PROJEÇÕES NA ESFERA

O objetivo deste capítulo é mostrar que dada uma transformação de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{no qual} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad e \quad ad - bc \neq 0,$$

e uma esfera dada por

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, z_0 > 0\}, \quad (4.1)$$

existe uma transformação $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M \circ \pi_{\mathbb{S}})(w), \quad (4.2)$$

no qual $\pi_{\mathbb{R}^2}$ e $\pi_{\mathbb{S}}$ são projeções da superfície de uma esfera em \mathbb{R}^3 no plano e do plano na superfície de uma esfera em \mathbb{R}^3 , respectivamente.

4.1 Projeções na superfície Esférica e no Plano

Inicialmente, vamos identificar cada número complexo w^1 a um ponto $P := P(w) \in \mathbb{R}^3$, de livre escolha, da seguinte maneira:

$$w = a + bi \quad \rightarrow \quad P = (a, b, 0).$$

Considere a esfera \mathbb{S} em \mathbb{R}^3 , centrada em $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com $z_0 > 0$ e raio $R > 0$, dada por

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, z_0 > 0\}. \quad (4.3)$$

¹ A notação mais comum para representar um número complexo é a letra z , porém vamos reservá-la nesse capítulo para a representação do eixo vertical em \mathbb{R}^3

Vamos denotar por polo norte de \mathbb{S} o ponto $N = (x_0, y_0, z_0 + R)$. Evidentemente, o ponto N satisfaz a equação da esfera \mathbb{S} . Considere também a reta r que passa por N e P cuja equação vetorial é dada por

$$X \in r: \quad X = N + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

no qual $\vec{v} = \overrightarrow{NP}$. Observe que como o ponto N pertence tanto à esfera \mathbb{S} quanto à reta r , temos que a reta r é tangente ou secante em relação à esfera \mathbb{S} . Podemos afirmar que a reta r não é tangente à esfera \mathbb{S} e vamos mostrar isso por absurdo. Suponha que a reta r seja tangente à esfera \mathbb{S} , isto é, N é o único ponto de intersecção entre r e \mathbb{S} . O vetor \vec{v} , vetor diretor da reta r , é perpendicular ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{C_0N}$. A reta que liga o centro da esfera ao ponto de tangência é perpendicular com a reta tangente.

Como $\vec{v} \perp \vec{u}$, temos

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \langle (0, 0, R), (a - x_0, b - y_0, -z_0 - R) \rangle &= 0 \\ R(-z_0 - R) &= 0 \quad (R \neq 0) \\ -z_0 - R &= 0 \\ z_0 &= -R. \end{aligned}$$

Como o raio da esfera \mathbb{S} é por definição um número real maior que zero, temos que $z_0 < 0$, o que contraria a definição da esfera \mathbb{S} . Portanto, a suposição de que a reta r é tangente à esfera \mathbb{S} é um absurdo. Assim, podemos afirmar que a reta r é secante à esfera \mathbb{S} . Então, além de N , podemos encontrar um outro ponto, que é único, na intersecção da reta r com a esfera \mathbb{S} . Denotaremos esse ponto por projeção do ponto P na superfície esférica de \mathbb{S} , ou $\pi_{\mathbb{S}}(P)$. Além de exibir as coordenadas desse ponto, vamos mostrar também que ele é único. Já que o ponto $\pi_{\mathbb{S}}(P)$ pertence à reta r , ele satisfaz a equação paramétrica dessa reta, que é dada por

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda(a - x_0), \\ y = y_0 + \lambda(b - y_0), \\ z = z_0 + R - \lambda(z_0 + R), \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Por outro lado, esse ponto também pertence à esfera \mathbb{S} e portanto deve satisfazer a sua equação. Então,

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= R^2 \\ (\lambda(a - x_0))^2 + (\lambda(b - y_0))^2 + (R - \lambda(z_0 + R))^2 &= R^2 \\ \lambda^2(a - x_0)^2 + \lambda^2(b - y_0)^2 + R^2 - 2\lambda R z_0 + 2\lambda R^2 + \lambda^2 z_0^2 + 2\lambda^2 R z_0 + \lambda^2 R^2 &= R^2 \\ \lambda(\lambda(a - x_0)^2 + \lambda(b - y_0)^2 + \lambda z_0^2 + 2\lambda z_0 R + 2z_0 R + \lambda R^2 + 2R^2) &= 0 \\ \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda &= \frac{-2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2}. \end{aligned}$$

Como era de se esperar, encontramos duas soluções possíveis para o parâmetro λ , já que a reta r é secante à esfera \mathbb{S} . Substituindo os valores encontrados para λ na identidade (4.5), encontramos as coordenadas, em \mathbb{R}^3 , dos pontos de intersecção de r e \mathbb{S} . A solução $\lambda = 0$ recupera as coordenadas do ponto N . Logo, a outra solução encontrada para λ refere-se ao ponto $\pi_{\mathbb{S}}(P)$. Assim, as coordenadas do ponto $\pi_{\mathbb{S}}(P)$, em \mathbb{R}^3 , são:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2} (a - x_0), \\ y &= y_0 + \frac{2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2} (b - y_0), \\ z &= z_0 + R - \frac{2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2} (z_0 + R). \end{aligned}$$

Desse modo, podemos relacionar cada ponto do plano complexo com um ponto da esfera em \mathbb{R}^3 , com exceção do seu polo norte. Como nenhum ponto do plano complexo pode ser associado ao polo norte da esfera, vamos estender o domínio da nossa projeção para o plano complexo estendido, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e associar o ponto ∞ ao polo norte da esfera.

Definição 4.1.1. Dada a esfera

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, z_0 > 0\}, \quad (4.6)$$

definimos a transformação projeção na superfície esférica de \mathbb{S} como

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{S}} : \quad \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{S} \\ \infty &\longrightarrow (x_0, y_0, z_0 + R) \\ a + bi &\longrightarrow (x, y, z) \end{aligned}$$

no qual

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2} (a - x_0), \\ y = y_0 + \frac{2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2} (b - y_0), \\ z = z_0 + R - \frac{2R(z_0 + R)}{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 + R)^2} (z_0 + R). \end{cases}$$

Definida a transformação $\pi_{\mathbb{S}}$, cabe a pergunta: $\pi_{\mathbb{S}}$ é uma transformação bijetora?. A resposta é sim e vamos demonstrar esse fato a seguir. Para isso, vamos tomar o processo inverso, ou seja, associar cada ponto de uma esfera dada a um número do plano complexo. Assim, seja $Q = (x_q, y_q, z_q)$ um ponto na superfície esférica de \mathbb{S} , $Q \neq N$, e considere a reta s que passa por N e Q , dada pela equação vetorial

$$X \in r : \quad X = N + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

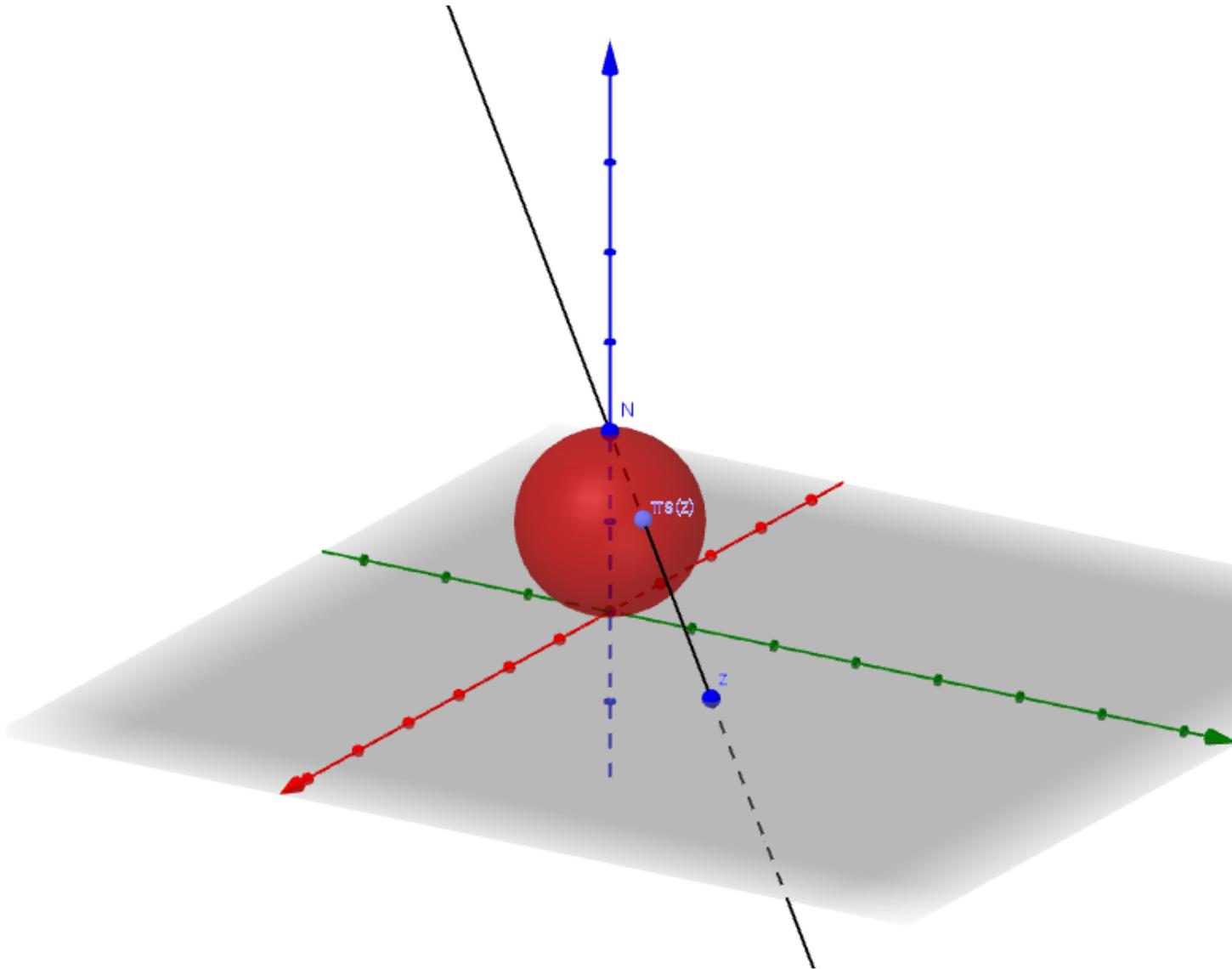


Figura 27 – Projeção na superfície esférica.

no qual $\vec{v} = \overrightarrow{NQ}$.

A reta s intercepta o plano $\mathbb{R}^2 \cong \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$ em apenas um ponto. Caso contrário, a reta s seria paralela ao plano \mathbb{R}^2 , ou seja, seu vetor diretor seria perpendicular com o vetor normal, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_3, \vec{v} \rangle &= 0 \\ \langle (0, 0, 1), (x_q - x_0, y_q - y_0, z_q - (z_0 + R)) \rangle &= 0 \\ z_q - (z_0 + R) &= 0 \\ z_q &= z_0 + R. \end{aligned}$$

Chegamos a uma contradição já que, se $Q \in \mathbb{S}$ e $z_q = z_0 + R$, então $x_q = x_0$ e $y_q = y_0$, ou seja, $Q = N$, que de fato é uma contradição. Assim, denotaremos esse único ponto de intersecção de s

com o plano \mathbb{R}^2 por projeção do ponto Q da esfera \mathbb{S} no plano \mathbb{R}^2 , ou $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q)$. Como esse ponto pertence à reta s , ele satisfaz a equação paramétrica dessa reta, dada por

$$s : \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_q - x_0), \\ y = y_0 + \lambda(y_q - y_0), \\ z = z_0 + R + \lambda(z_q - (z_0 + R)). \end{cases}$$

Por outro lado, como esse ponto também pertence ao plano \mathbb{R}^2 , devemos ter $z = 0$. Então,

$$\begin{aligned} z_0 + R + \lambda(z_q - (z_0 + R)) &= 0 \\ \lambda(z_q - (z_0 + R)) &= -(z_0 + R) \\ \lambda &= \frac{z_0 + R}{z_0 + R - z_q}. \end{aligned}$$

Substituindo o parâmetro λ na equação paramétrica da reta s , encontramos as coordenadas da projeção do ponto Q no plano \mathbb{R}^2 . Escrevemos o ponto $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q) = (x, y, z)$ em \mathbb{R}^3 como

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_q(z_0 + R) - x_0 z_q}{z_0 + R - z_q}, \\ y &= \frac{y_q(z_0 + R) - y_0 z_q}{z_0 + R - z_q}, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo, temos uma relação biunívoca entre $\mathbb{S} - \{N\}$ e \mathbb{C} . Em relação ao ponto N , polo norte da esfera, vamos definir a projeção desse ponto como sendo o ponto infinito, de modo que a transformação da esfera no plano complexo estendido seja bijetora.

Definição 4.1.2. Dada a esfera \mathbb{S} , definida em (4.6) e um ponto $Q = (x_q, y_q, z_q)$, $Q \in \mathbb{S}$ e $Q \neq N$, definimos a transformação *projeção no plano complexo estendido* como

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{R}^2} : \quad \mathbb{S} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ N &\longrightarrow \infty \\ (x_q, y_q, z_q) &\longrightarrow x + yi \end{aligned}$$

no qual

$$\begin{cases} x = \frac{x_q(z_0 + R) - x_0 z_q}{z_0 + R - z_q}, \\ y = \frac{y_q(z_0 + R) - y_0 z_q}{z_0 + R - z_q}. \end{cases}$$

Evidentemente, da maneira como as projeções foram estabelecidas, a composição entre as transformações definidas em (4.1.1) e (4.1.2) resulta na identidade, ou seja, essas projeções são transformações inversas. Assim, para $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ e $Q \in \mathbb{S}$, temos

$$(\pi_{\mathbb{S}} \circ \pi_{\mathbb{R}^2})(Q) = Q \tag{4.8}$$

e

$$(\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) = w. \quad (4.9)$$

Em outras palavras, se tomarmos a projeção na superfície esférica de um certo $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, obteremos um ponto na esfera \mathbb{S} , digamos Q_w . Se em seguida tomarmos a projeção de Q_w no plano complexo estendido, obteremos novamente w . Vamos mostrar a validade da identidade 4.9 e de maneira análoga pode ser verificado a validade da identidade 4.8.

Considere a esfera \mathbb{S} definida em (4.6) e seu polo norte N . Para $w = a + bi$, temos

$$\pi_{\mathbb{S}}(w) = Q_w = (x_q, y_q, z_q), \quad \text{com} \quad \begin{cases} x_q = x_0 + \frac{2R(z_0+R)}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}(a-x_0), \\ y_q = y_0 + \frac{2R(z_0+R)}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}(b-y_0), \\ z_q = z_0 + R - \frac{2R(z_0+R)}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}(z_0+R). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) &= \pi_{\mathbb{R}^2}(\pi_{\mathbb{S}}(w)) = \pi_{\mathbb{R}^2}(Q_w) \\ &= \frac{x_q(z_0+R) - x_0z_q}{z_0+R-z_q} + \frac{y_q(z_0+R) - y_0z_q}{z_0+R-z_q}i. \end{aligned}$$

Só nos resta mostrar agora que as partes real e imaginária de $(\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$ são, respectivamente, a e b . Fazendo as substituições, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \pi_{\mathbb{S}}](w) &= \frac{x(z_0+R) - x_0z}{z_0+R-z} \\ &= \frac{\left(x_0 + \frac{2R(z_0+R)(a-x_0)}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}\right)(z_0+R) - x_0\left(z_0+R - \frac{2R(z_0+R)^2}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}\right)}{(z_0+R) - \left(z_0+R - \frac{2R(z_0+R)^2}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}\right)} \\ &= \frac{\frac{2R(z_0+R)^2(a-x_0)+2R(z_0+R)^2x_0}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}}{\frac{2R(z_0+R)^2}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}} = \frac{2R(z_0+R)^2(a-x_0+x_0)}{2R(z_0+R)^2} \\ &= a, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}[\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \pi_{\mathbb{S}}](w) &= \frac{y(z_0 + R) - y_0 z}{z_0 + R - z} \\
&= \frac{\left(y_0 + \frac{2R(z_0+R)(b-y_0)}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}\right)(z_0 + R) - y_0 \left(z_0 + R - \frac{2R(z_0+R)^2}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}\right)}{(z_0 + R) - \left(z_0 + R - \frac{2R(z_0+R)^2}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}\right)} \\
&= \frac{\frac{2R(z_0+R)^2(b-y_0)+2R(z_0+R)^2 y_0}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}}{\frac{2R(z_0+R)^2}{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0+R)^2}} = \frac{2R(z_0 + R)^2(b - y_0 + y_0)}{2R(z_0 + R)^2} \\
&= b.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\pi_{\mathbb{R}^2}$ e $\pi_{\mathbb{S}}$ são transformações inversas. Uma vez que uma função possui inversa à direita e à esquerda se, e somente se, é bijetiva², podemos concluir que essas duas projeções são bijetoras.

Vamos apresentar exemplos de algumas curvas do plano complexo estendido e suas projeções na superfície esférica de \mathbb{S} . Nos exemplos abaixo, denominaremos os planos Oxy , Oxz e Oyz respectivamente, por α_1 , α_2 e α_3 . Além disso, para facilitar a compreensão e a visualização, vamos considerar a esfera \mathbb{S} tangenciando, em seu polo sul, o plano complexo estendido na origem. Desse modo,

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}.$$

Nesse caso, se $w = c + di$, temos

$$\pi_{\mathbb{S}}(w) = (x, y, z), \quad \text{com} \quad \begin{cases} x = \frac{c}{|w|^2+1}, \\ y = \frac{d}{|w|^2+1}, \\ z = \frac{|w|^2}{|w|^2+1}. \end{cases}$$

Exemplo 4.1.1. Retas que passam pela origem em \mathbb{R}^2 são projetadas na esfera na forma de circunferências que passam pela origem em \mathbb{R}^3 e pelo polo norte da esfera, conhecidas como meridiano.

Uma reta que passa pela origem tem equação da forma

$$\bar{B}w + B\bar{w} = 0, \quad \text{com} \quad B = a + bi. \quad (4.10)$$

² (LIMA, 2007)Curso de Análise - Elon Lages Lima, Capítulo 1, página 22

Tome $w = c + di$ pertencente a uma reta desse tipo. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}(a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) &= 0 \\ ac + adi - bci - bdi^2 + ac - adi + bci - bdi^2 &= 0 \\ 2ac + 2bd &= 0 \\ ac + bd &= 0.\end{aligned}$$

Observe agora o que ocorre com as coordenadas de $\pi_{\mathbb{S}}(w) = (x, y, z)$ em \mathbb{R}^3 , isto é

$$\begin{aligned}ax + by &= a \left(\frac{c}{|w|^2 + 1} \right) + b \left(\frac{d}{|w|^2 + 1} \right) \\ ax + by &= \frac{ac + bd}{|w|^2 + 1} \\ ax + by &= 0.\end{aligned}$$

Esse resultado obtido representa um plano em \mathbb{R}^3 , perpendicular ao plano α_1 e que passa pela origem de \mathbb{R}^3 e pelo polo norte de \mathbb{S} . Assim, $\pi_{\mathbb{S}}(w)$ pertence à intersecção desse plano com a esfera \mathbb{S}^3 . Na Figura 28, podemos observar esse efeito para diferentes retas que passam pela origem de \mathbb{R}^2 .

Exemplo 4.1.2. Retas que não passam pela origem em \mathbb{R}^2 são projetadas na esfera na forma de circunferências que não passam pelo polo sul mas que passam pelo polo norte.

Uma reta que não passa pela origem tem equação da forma

$$\bar{B}w + B\bar{w} = C, \quad \text{com } B = a + bi \text{ e } C \neq 0. \quad (4.11)$$

Nesse caso, se $w = c + di$ pertence a uma reta desse tipo, temos que

$$\begin{aligned}(a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) &= C \\ ac + adi - bci - bdi^2 + ac - adi + bci - bdi^2 &= C \\ 2ac + 2bd &= C \\ ac + bd &= \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Assim em relação às coordenadas de $\pi_{\mathbb{S}}(w) = (x, y, z)$ em \mathbb{R}^3 , podemos observar o seguinte

$$\begin{aligned}ax + by + \frac{C}{2}z &= a \left(\frac{c}{|w|^2 + 1} \right) + b \left(\frac{d}{|w|^2 + 1} \right) + \frac{C}{2} \left(\frac{|w|^2}{|w|^2 + 1} \right) \\ ax + by + \frac{C}{2}z &= \frac{ac + bd + \frac{C}{2}|w|^2}{|w|^2 + 1} \\ ax + by + \frac{C}{2}z &= \frac{\frac{C}{2} + \frac{C}{2}|w|^2}{|w|^2 + 1} \\ ax + by + \frac{C}{2}z &= \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

³ A intersecção de um plano com uma esfera quando não vazia gera uma circunferência.

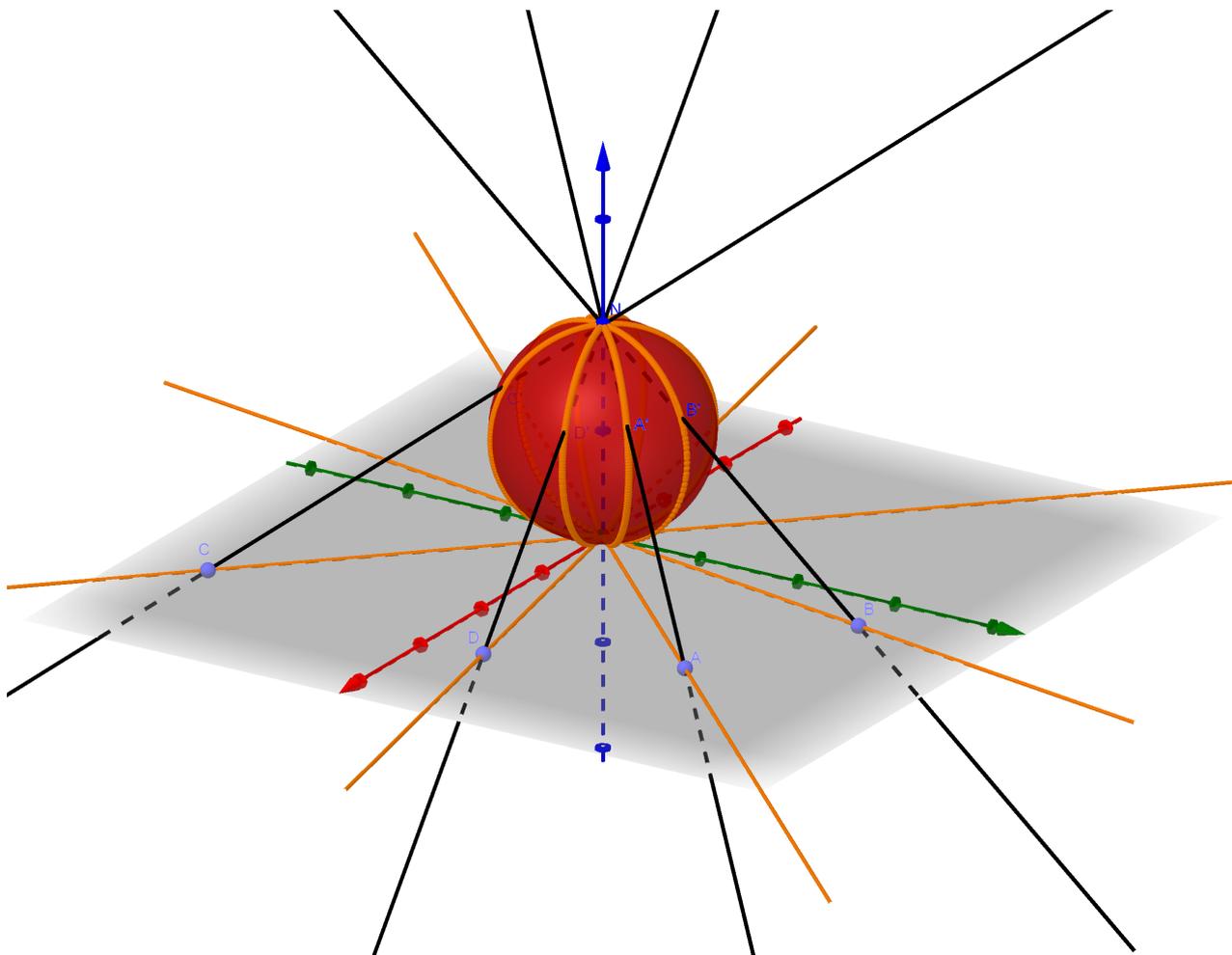


Figura 28 – Retas que passam pela origem e suas projeções na esfera(meridianos).

Analogamente ao que ocorreu no exemplo anterior, $\pi_{\mathbb{S}}(w)$ pertence à intersecção da esfera com o plano de equação

$$ax + by + \frac{C}{2}z = \frac{C}{2}. \quad (4.12)$$

Nesse caso, o plano obtido de equação 4.12 não será perpendicular a nenhum dos planos: α_1 , α_2 e α_3 . A Figura 29 mostra esta situação.

Exemplo 4.1.3. *Circunferências centradas na origem em \mathbb{R}^2 são projetadas na esfera na forma de circunferências contidas em planos paralelos ao plano α_1 . São conhecidas como paralelos. Uma circunferência centrada na origem tem equação da forma*

$$|w|^2 = k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Se $w = c + di$ pertence a uma circunferência dessas e se $\pi_{\mathbb{S}}(w) = (x, y, z)$ em \mathbb{R}^3 , temos

$$z = \frac{|w|^2}{|w|^2 + 1} = \frac{k}{k + 1}$$

e

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{(|w|^2 + 1)^2} + \frac{d^2}{(|w|^2 + 1)} = \frac{c^2 + d^2}{(|w|^2 + 1)} = \frac{k}{(k + 1)^2}.$$

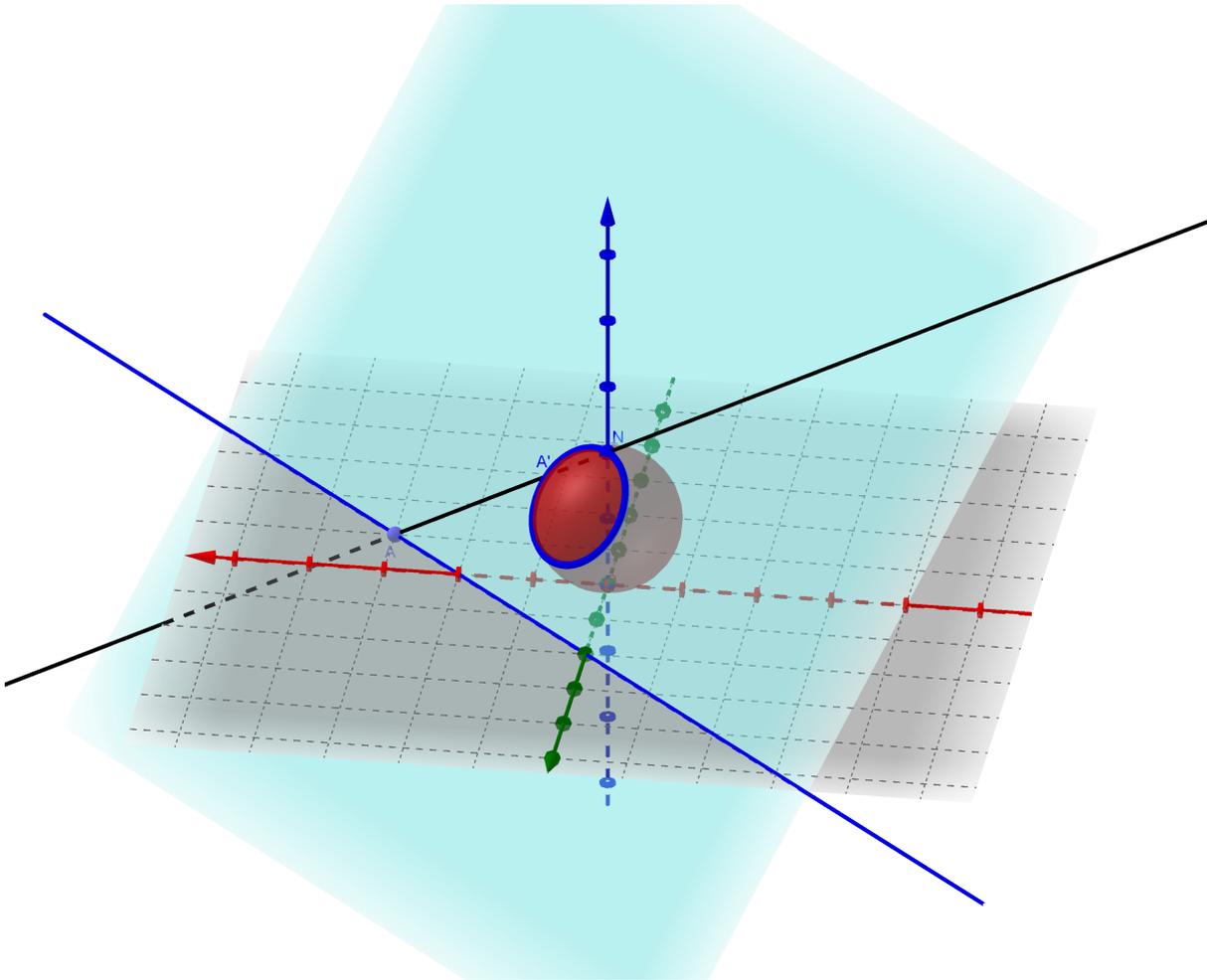


Figura 29 – Reta que não passa pela origem, sua projeção na esfera(circunferência) gerada pela intersecção da esfera com o plano de equação 4.12

A partir desse resultado, podemos observar que a projeção na esfera é uma circunferência centrada em $(0, 0, \frac{k}{k+1})$ e raio $\frac{\sqrt{k}}{k+1}$, resultante da intersecção do plano de equação

$$z = \frac{k}{k+1},$$

e o cilindro de equação

$$x^2 + y^2 = \frac{k}{(k+1)^2}.$$

A Figura 30 mostra algumas circunferências centradas na origem de α_1 com diferentes raios e suas respectivas projeções na esfera, os paralelos.

Exemplo 4.1.4. *Circunferência centrada em $z_0 = k + ki$, com $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e raio igual a $\sqrt{2k^2 - 1}$, é projetada na esfera \mathbb{S} na forma de circunferência contida no plano perpendicular ao plano α_1 de equação*

$$x + y = \frac{1}{2k}. \quad (4.14)$$

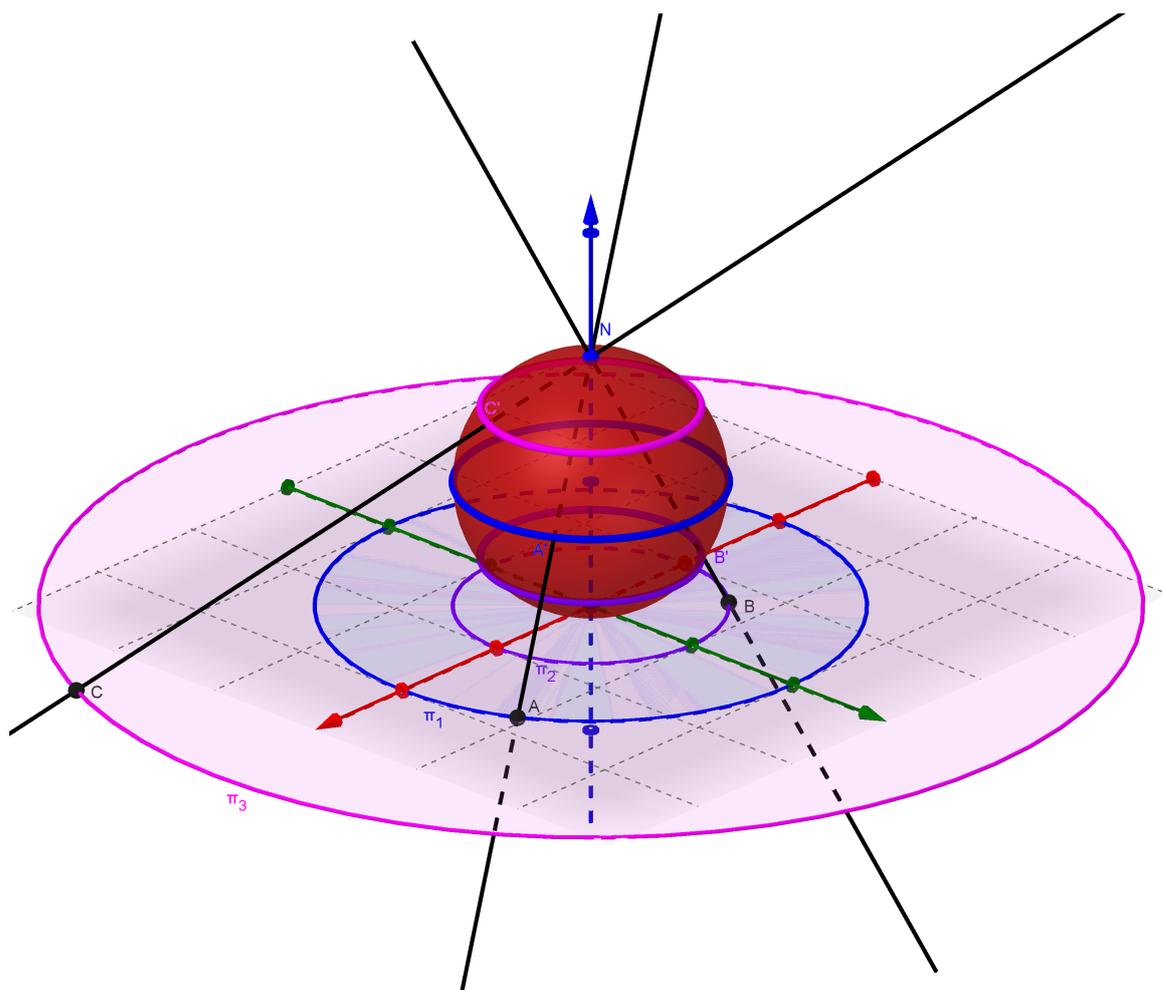


Figura 30 – Circunferências centradas na origem de α_1 projetadas na esfera (Paralelos).

De acordo com os resultados obtidos nos capítulos anteriores, podemos escrever a equação dessa circunferência da seguinte forma:

$$|w|^2 + (-k + ki)w + (-k - ki)\bar{w} = -1. \quad (4.15)$$

Tome $w = c + di$ nessa circunferência. Assim, temos

$$\begin{aligned} |w|^2 + 1 &= (k - ki)w + (k + ki)\bar{w} \\ &= kc + kdi - kci - kdi^2 + kc - kdi + kci - kdi^2 \\ &= 2kc + 2kd \\ &= 2k(c + d). \end{aligned}$$

Observe que as coordenadas x e y de $\pi_{\mathbb{S}}(w)$ em \mathbb{R}^3 são dadas por

$$\begin{cases} x = \frac{c}{|w|^2 + 1}, \\ y = \frac{d}{|w|^2 + 1}. \end{cases}$$

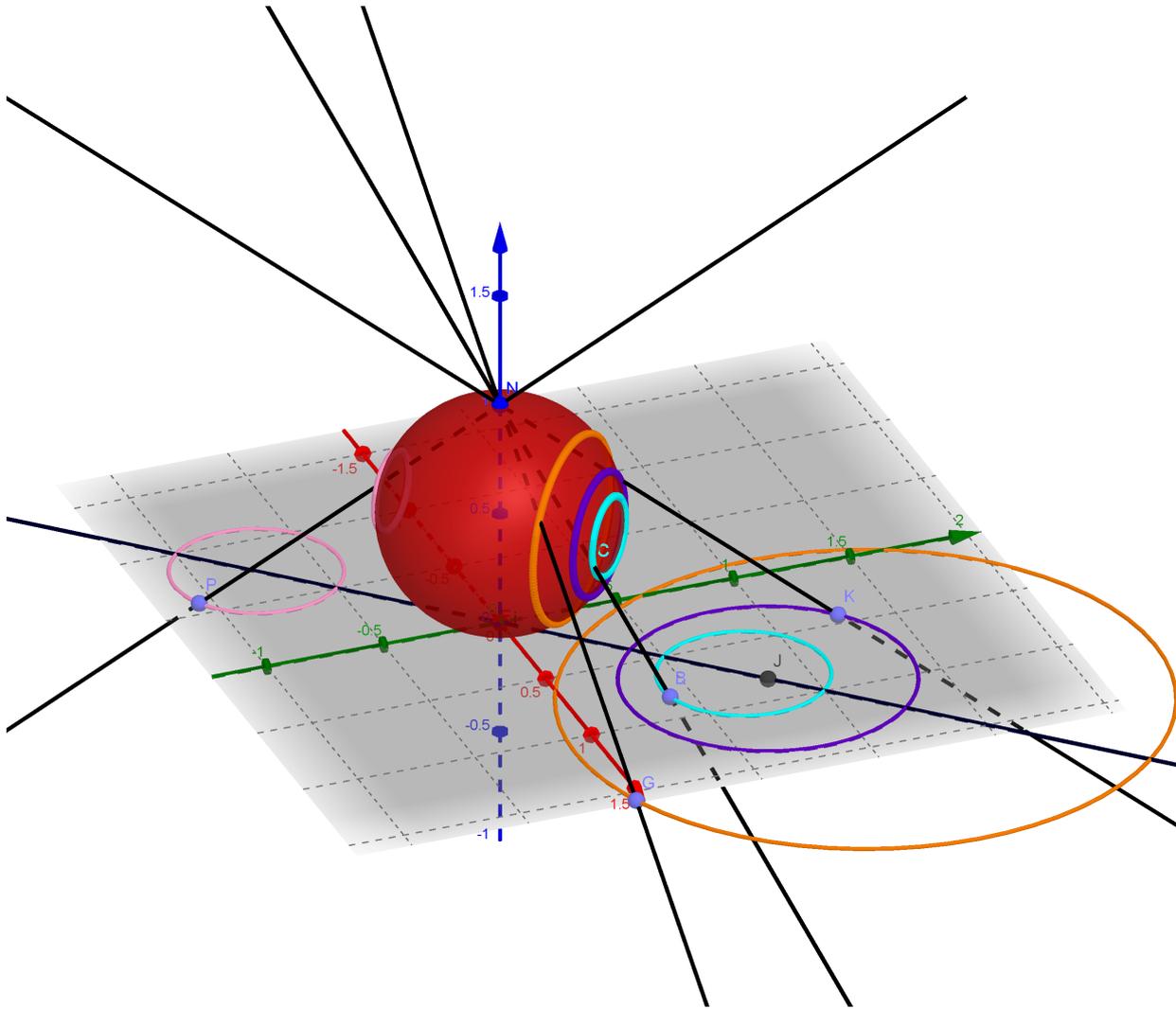


Figura 31 – Circunferências centradas em $z_0 = k + ki$, $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e raio $\sqrt{2k^2 - 1}$.

Logo, podemos identificar a relação abaixo entre essas coordenadas em \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned}
 x + y &= \frac{a}{|w|^2 + 1} + \frac{b}{|w|^2 + 1} \\
 &= \frac{a + b}{|w|^2 + 1} \\
 &= \frac{a + b}{2k(a + b)} \\
 &= \frac{1}{2k}.
 \end{aligned}$$

Portanto, se w pertence à circunferência de equação 4.15, então $\pi_{\mathbb{S}}(w)$ pertence ao plano de equação 4.14. Logo, $\pi_{\mathbb{S}}(w)$ pertence à intersecção desse plano com a esfera \mathbb{S} . A Figura 31 mostra algumas circunferências que apresentam essa característica.

4.2 Movimentos da Esfera

Vamos propor agora algumas transformações em \mathbb{R}^3 relacionadas com as transformações de Möbius. Nosso objetivo é mostrar que fixadas uma transformação de Möbius f e uma esfera \mathbb{S} definida em (4.1), existe uma transformação $M : \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}' \subset \mathbb{R}^3$, tal que se $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, $f(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$, isto é, inicialmente encontramos a projeção de w na superfície esférica de \mathbb{S} e em seguida aplicamos a transformação M em \mathbb{S} , gerando \mathbb{S}' , para finalmente aplicar a projeção da esfera \mathbb{S}' no plano, resultando em $w' \in \widehat{\mathbb{C}}$, de modo que $w' = f(w)$.

Vamos analisar inicialmente algumas transformações de Möbius elementares, *translação, multiplicação por complexo e inversão*. Como a esfera \mathbb{S} deve ser escolhida de modo que a sua equação tenha a forma da equação 4.1, com o objetivo de simplificar os resultados, vamos considerar a esfera de diâmetro unitário apoiada sobre o plano complexo completado, de modo que seu polo sul, o único ponto de tangência, seja a origem de \mathbb{R}^3 . Desse modo, a equação da esfera \mathbb{S} é dada por

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}.$$

Assim, definida a esfera \mathbb{S} , se $w = a + bi = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $Q = (x_q, y_q, z_q) \in \mathbb{S}$, temos

$$\pi_{\mathbb{S}}(w) = \left(\frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{b}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right)$$

e

$$\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_w) = \frac{x_q}{1 - z_q} + \frac{y_q}{1 - z_q}i.$$

1. Translação.

Fixado $\alpha = x_0 + y_0i \in \mathbb{C}$, considere a transformação de Möbius $T_\alpha : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, definida por

$$T_\alpha(w) = w + \alpha = (a + x_0) + (b + y_0)i, \quad \text{para } w \in \mathbb{C}, \text{ e}$$

$$T_\alpha(\infty) = \infty.$$

Considere também a transformação $\mathbb{M}_{T_\alpha} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\mathbb{M}_{T_\alpha}(Q) = (x_q + x_0, y_q + y_0, z_q).$$

Observe que a transformação \mathbb{M}_{T_α} é uma translação em \mathbb{R}^3 . Assim, quando aplicamos essa transformação em \mathbb{S} , temos uma nova esfera, \mathbb{S}' , apenas transladada por α , ou seja,

$$\mathbb{S}' = \mathbb{M}_{T_\alpha}(\mathbb{S}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}.$$

Afirmção: $T_\alpha(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{T_\alpha} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$.

Definidas as transformações, vamos calcular $(\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{T_\alpha} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$. Já sabemos que

$$\pi_{\mathbb{S}}(w) = \left(\frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{b}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right).$$

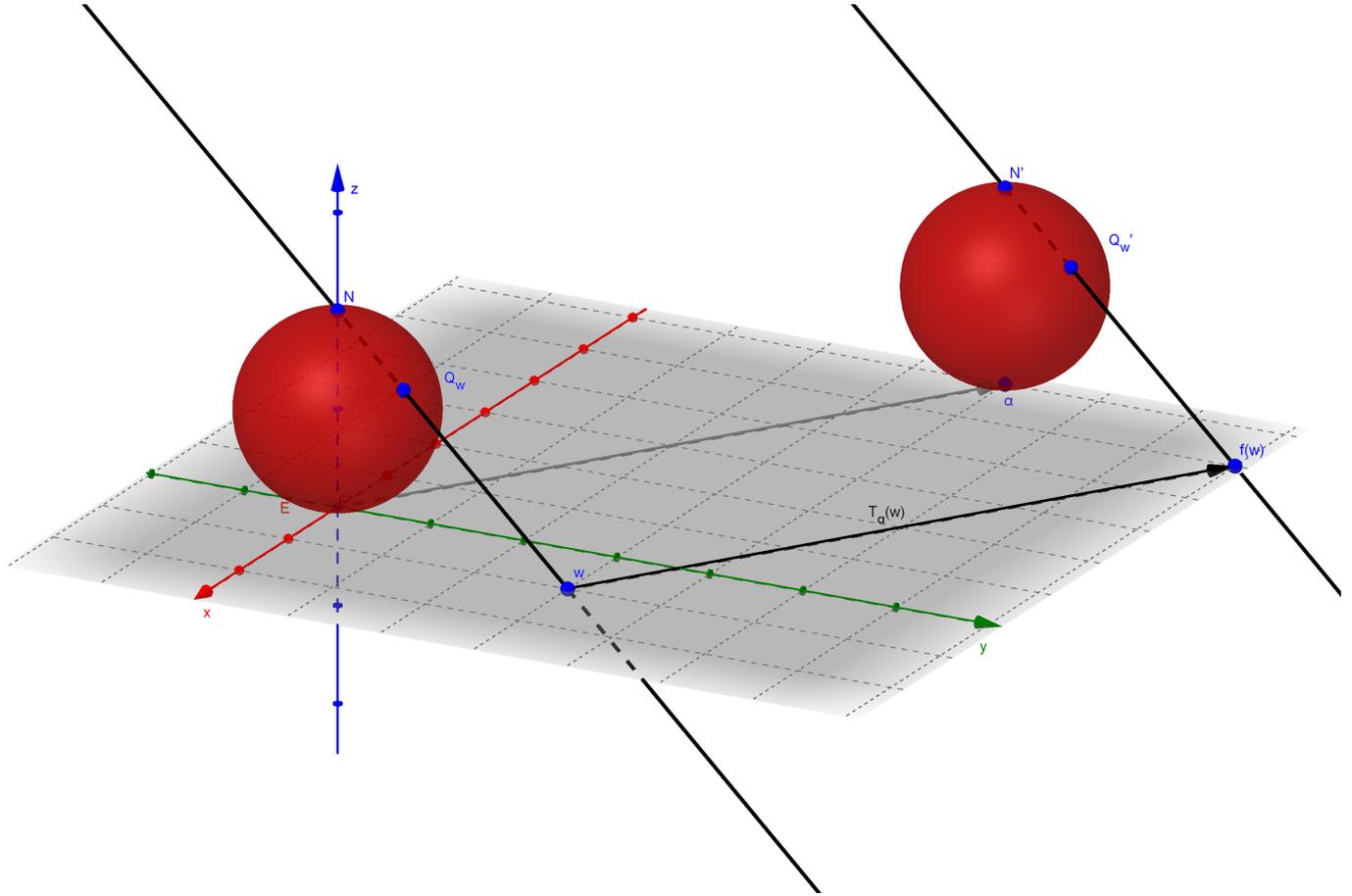


Figura 32 – $T_\alpha(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_\alpha \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$.

Logo,

$$(\mathbb{M}_{T_\alpha} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) = \mathbb{M}_{T_\alpha}(\pi_{\mathbb{S}}(w)) = \left(\frac{a}{\rho^2+1} + x_0, \frac{b}{\rho^2+1} + y_0, \frac{\rho^2}{\rho^2+1} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{T_\alpha} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) &= \pi_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{M}_{T_\alpha} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) \\ &= \left(\frac{\frac{a}{\rho^2+1} + x_0 - x_0 \frac{\rho^2}{\rho^2+1}}{1 - \frac{\rho^2}{\rho^2+1}} \right) + \left(\frac{\frac{b}{\rho^2+1} + y_0 - y_0 \frac{\rho^2}{\rho^2+1}}{1 - \frac{\rho^2}{\rho^2+1}} \right) i \\ &= \left(\frac{\frac{a+x_0\rho^2+x_0-x_0\rho^2}{\rho^2+1}}{\frac{1}{\rho^2+1}} \right) + \left(\frac{\frac{b+y_0\rho^2+y_0-y_0\rho^2}{\rho^2+1}}{\frac{1}{\rho^2+1}} \right) i \\ &= (a+x_0) + (b+y_0)i = T_\alpha(w). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a afirmação é de fato verdadeira.

2. Multiplicação por Complexo

Fixado $\beta = \rho_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$, considere a transformação $M_\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, dada por

$$M_\beta(w) = \beta w = \rho_0 \rho e^{i(\theta+\theta_0)}, \quad \text{para } w \in \mathbb{C}$$

Considere também a transformação em \mathbb{R}^3 , \mathbb{M}_{M_β} , definida por

$$\mathbb{M}_{M_\beta}(Q) = (x_q \cos \theta_0 - y_q \sin \theta_0, x_q \sin \theta_0 + y_q \cos \theta_0, z_q + \rho_0 - 1).$$

A transformação definida acima é uma rotação em torno do eixo-z combinada com uma translação vertical. Assim, essa transformação rotaciona um ponto Q de \mathbb{R}^3 em torno do eixo-z por um ângulo θ_0 e o translada verticalmente $\rho_0 - 1$ unidades. Então, quando aplicamos essa transformação em \mathbb{S} , o resultado é uma esfera \mathbb{S}' dada por

$$\mathbb{S}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - \rho_0 + 0.5)^2 = 0.25\}.$$

Afirmção: $M_\beta(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{M_\beta} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$.

Como

$$\pi_{\mathbb{S}}(w) = \left(\frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{b}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} \right),$$

temos que

$$\left(\mathbb{M}_{M_\beta} \circ \pi_{\mathbb{S}} \right)(w) = \mathbb{M}_{M_\beta}(\pi_{\mathbb{S}}(w)) = \left(\frac{a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0}{\rho^2 + 1}, \frac{a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0}{\rho^2 + 1}, \rho_0 - \frac{1}{\rho^2 + 1} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \left(\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_{M_\beta} \circ \pi_{\mathbb{S}} \right)(w) &= \pi_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{M}_{M_\beta} \circ \pi_{\mathbb{S}} \right)(w) \\ &= \left(\frac{a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0}{\rho^2 + 1} \rho_0 \right) + \left(\frac{a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0}{\rho^2 + 1} \rho_0 \right) i \\ &= \left(\frac{a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0}{\rho_0 - \left(\rho_0 - \frac{1}{\rho^2 + 1} \right)} \right) + \left(\frac{a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0}{\rho_0 - \left(\rho_0 - \frac{1}{\rho^2 + 1} \right)} \right) i \\ &= (a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0) \rho_0 + (a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0) \rho_0 i \\ &= \rho_0 (\rho \cos \theta \cos \theta_0 - \rho \sin \theta \sin \theta_0 + \rho \cos \theta \sin \theta_0 i + \rho \sin \theta \cos \theta_0 i) \\ &= \rho \rho_0 (\cos(\theta + \theta_0) + \sin(\theta + \theta_0) i) \\ &= \rho \rho_0 e^{i(\theta + \theta_0)} = M_\beta(w). \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a afirmação é verdadeira.

3. Inversão

Considere agora a transformação $I: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, definida por

$$I(w) = \frac{1}{w}, \quad w \neq 0.$$

Mantendo a notação usada até aqui, a condição $w \neq 0$ implica que $\rho \neq 0$ e então podemos escrever a transformação $I(w)$ do seguinte modo:

$$I(w) = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)}, \quad \rho \neq 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Considere também a transformação em \mathbb{R}^3 , \mathbb{M}_I , dada por

$$\mathbb{M}_I(Q) = (x_q, -y_q, 1 - z_q).$$

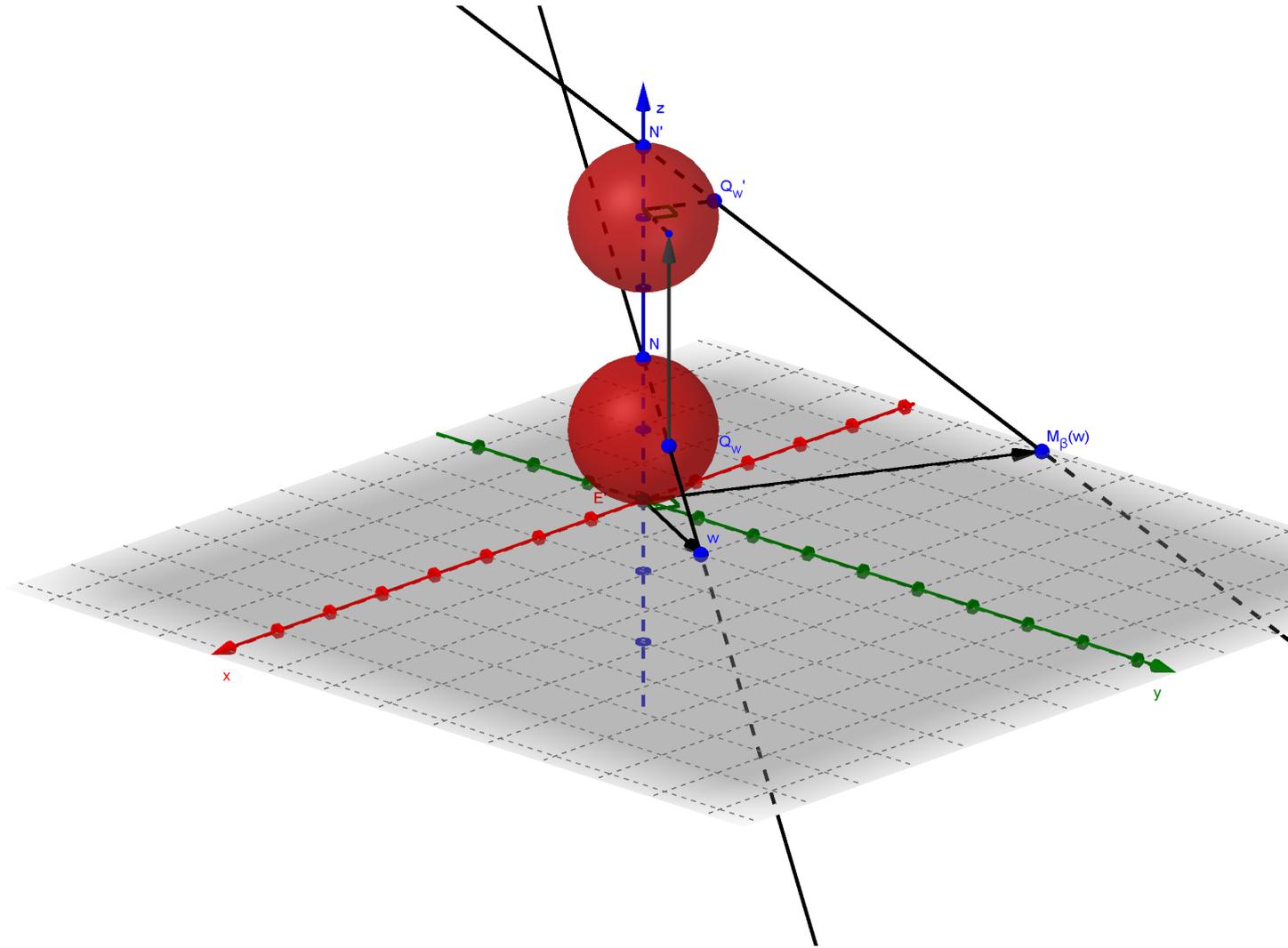


Figura 33 – $M_\beta(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_{M_\beta} \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$

Em termos geométricos, essa transformação é uma rotação, com ângulo de π rad, de um ponto Q de \mathbb{R}^3 em torno da reta que passa pelo centro de \mathbb{S} , isto é $(0, 0, 0.5)$, e é paralela ao eixo- x . Assim, se aplicamos essa transformação em algum ponto da esfera \mathbb{S} , o resultado também é um ponto da esfera \mathbb{S} , ou seja,

$$\mathbb{M}_I(\mathbb{S}) = \mathbb{S}.$$

Afirmção: $I(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$.

Para mostrar que a afirmação acima é verdadeira, vamos calcular $(\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \mathbb{M}_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)$. Assim, temos que

$$(\mathbb{M}_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) = \mathbb{M}_I(\pi_{\mathbb{S}}(w)) = \left(\frac{a}{\rho^2 + 1}, \frac{-b}{\rho^2 + 1}, \frac{1}{\rho^2 + 1} \right).$$

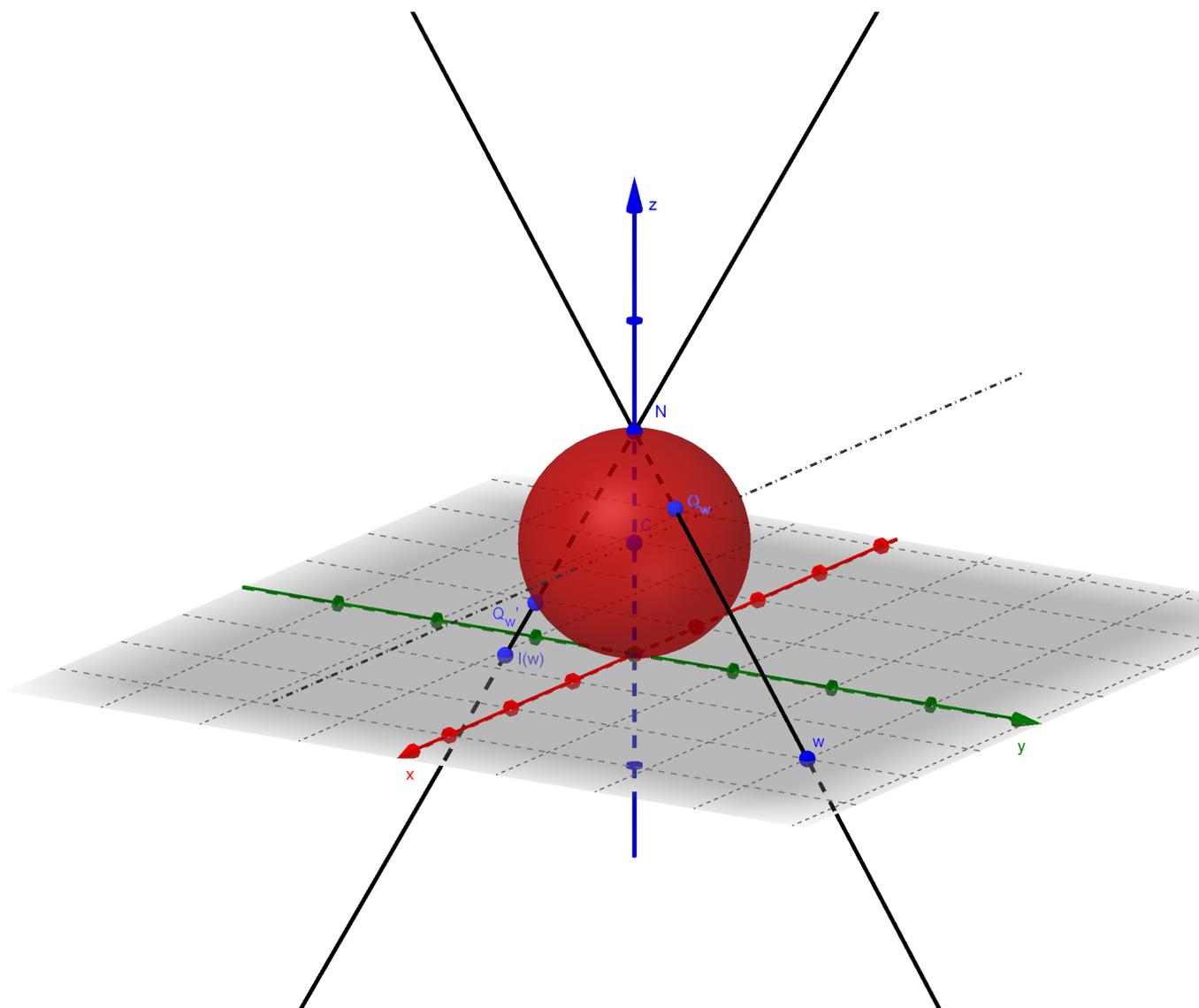


Figura 34 – $I(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) &= \pi_{\mathbb{R}^2}(M_I \circ \pi_{\mathbb{S}})(w) \\
 &= \left(\frac{\frac{a}{\rho^2+1}}{1 - \frac{1}{\rho^2+1}} \right) + \left(\frac{\frac{-b}{\rho^2+1}}{1 - \frac{1}{\rho^2+1}} \right) i \\
 &= \left(\frac{\frac{a}{\rho^2+1}}{\frac{\rho^2}{\rho^2+1}} \right) + \left(\frac{\frac{-b}{\rho^2+1}}{\frac{\rho^2}{\rho^2+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho^2} \bar{w} \\
 &= \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)} = I(w).
 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a afirmação é mesmo verdadeira.

4.3 Transformações de Möbius e a Esfera

Com os resultados obtidos na seção anterior, dada uma transformação de Möbius

$$f(w) = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad ad - bc \neq 0, \quad (4.16)$$

já que podemos escrever $f(w)$ como uma combinação de transformações elementares (*translação*, *multiplicação por complexo e inversão*), é possível escolher uma esfera \mathbb{S} adequada e uma transformação M em \mathbb{R}^3 , também combinação de transformações elementares em \mathbb{R}^3 (*translação e rotação*) de modo que

$$f(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M \circ \pi_{\mathbb{S}})(w).$$

Como a transformação de Möbius f pode ser escrita na forma

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1, \quad \text{no qual}$$

$$f_1(w) = w + \frac{d}{c}, \quad f_2(w) = \frac{1}{w}, \quad f_3(w) = \left(\frac{bc - ad}{c^2} \right) w \quad \text{e} \quad f_4(w) = w + \frac{a}{c}.$$

basta executar o procedimento seguinte para replicar o comportamento da transformação $f(w)$ através de projeções e movimentos de uma esfera. Para isso, considere a transformação de Möbius definida em (4.16) e considere também que

$$\frac{d}{c} = x_1 + y_1 i, \quad \frac{bc - ad}{c^2} = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad \frac{a}{c} = x_2 + y_2 i.$$

Desse modo, basta executar os seguintes passos:

1º Passo:

Tomar a esfera \mathbb{S} de diâmetro unitário centrada em $C = (-x_1, -y_1, 0.5)$.

2º passo:

Projetar $w = a + bi$ na esfera \mathbb{S} através da projeção $\pi_{\mathbb{S}}(w)$, obtendo $Q_w \in \mathbb{S}$.

3º passo:

Transladar a esfera \mathbb{S} pelo vetor $u_1 = (x_1, y_1, 0)$, obtendo a esfera \mathbb{S}' com o mesmo diâmetro de \mathbb{S} , centro em $C' = (0, 0, 0.5)$ e Q'_w o ponto transladado de $Q_w \in \mathbb{S}$ em \mathbb{S}' .

4º passo:

Rotacionar em π rad a esfera \mathbb{S}' em torno da reta r , cuja equação vetorial é:

$$X \in r: \quad X = (0, 0, 0.5) + \lambda(1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

obtendo Q''_w .

5º passo:

Rotacionar em θ_0 rad a esfera em torno do eixo-z e transladar verticalmente a esfera pelo vetor $v = (0, 0, \rho_0 - 1)$, obtendo Q_w''' .

6º passo:

Transladar a esfera pelo vetor $u_2 = (x_2, y_2, 0)$, obtendo Q_w'''' .

7º passo:

Aplicar a projeção $\pi_{\mathbb{R}^2}$ em Q_w'''' , obtendo $f(w)$.

Exemplo 4.3.1. Considere a transformação de Möbius

$$f(w) = \frac{w + 2i}{-iw + 1 + i}.$$

Aplique o procedimento descrito acima para encontrar M e em seguida observe como essa transformação mapeia a reta s que passa por $w_1 = 2$ e $w_2 = i$.

De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{d}{c} = -1 + i, \quad \frac{bc - ad}{c^2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad e \quad \frac{a}{c} = i.$$

Assim, podemos aplicar o procedimento:

1º passo:

Tome a esfera \mathbb{S} de diâmetro unitário e centrada em $C = (1, -1, 0.5)$.

2º passo:

Projete $w_1 = 2$ na esfera \mathbb{S} , obtendo $Q_{w_1} \in \mathbb{S}$,

$$Q_{w_1} = \pi_{\mathbb{S}}(w_1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

3º passo:

Translade a esfera \mathbb{S} pelo vetor $u_1 = (-1, 1, 0)$, obtendo a esfera \mathbb{S}' , centrada em $C' = (0, 0, 0.5)$ e diâmetro unitário, e $Q'_{w_1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \mathbb{S}'$.

4º passo:

Rotacione em π rad a esfera \mathbb{S}' em torno da reta r , que passa por C' e é paralela ao eixo real, obtendo a esfera \mathbb{S}'' e $Q''_{w_1} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{S}''$.

5º passo:

Rotacione em $\frac{3\pi}{4}$ rad a esfera \mathbb{S}'' em torno do eixo-z e, em seguida, translade verticalmente pelo vetor $v = (0, 0, \sqrt{2} - 1)$, obtendo a esfera \mathbb{S}''' e o ponto dessa esfera $Q'''_{w_1} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)$.

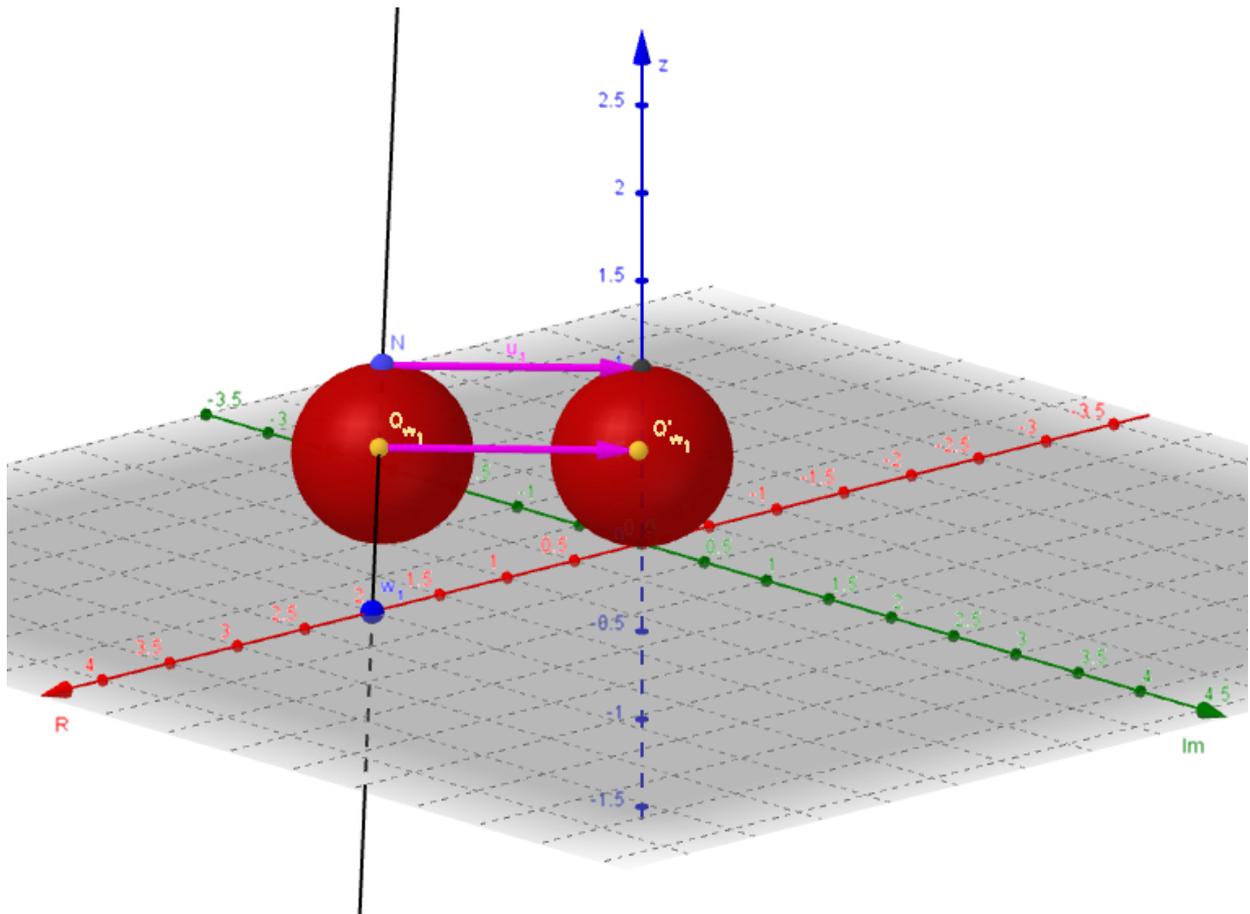


Figura 35 – Passos 1, 2 e 3.

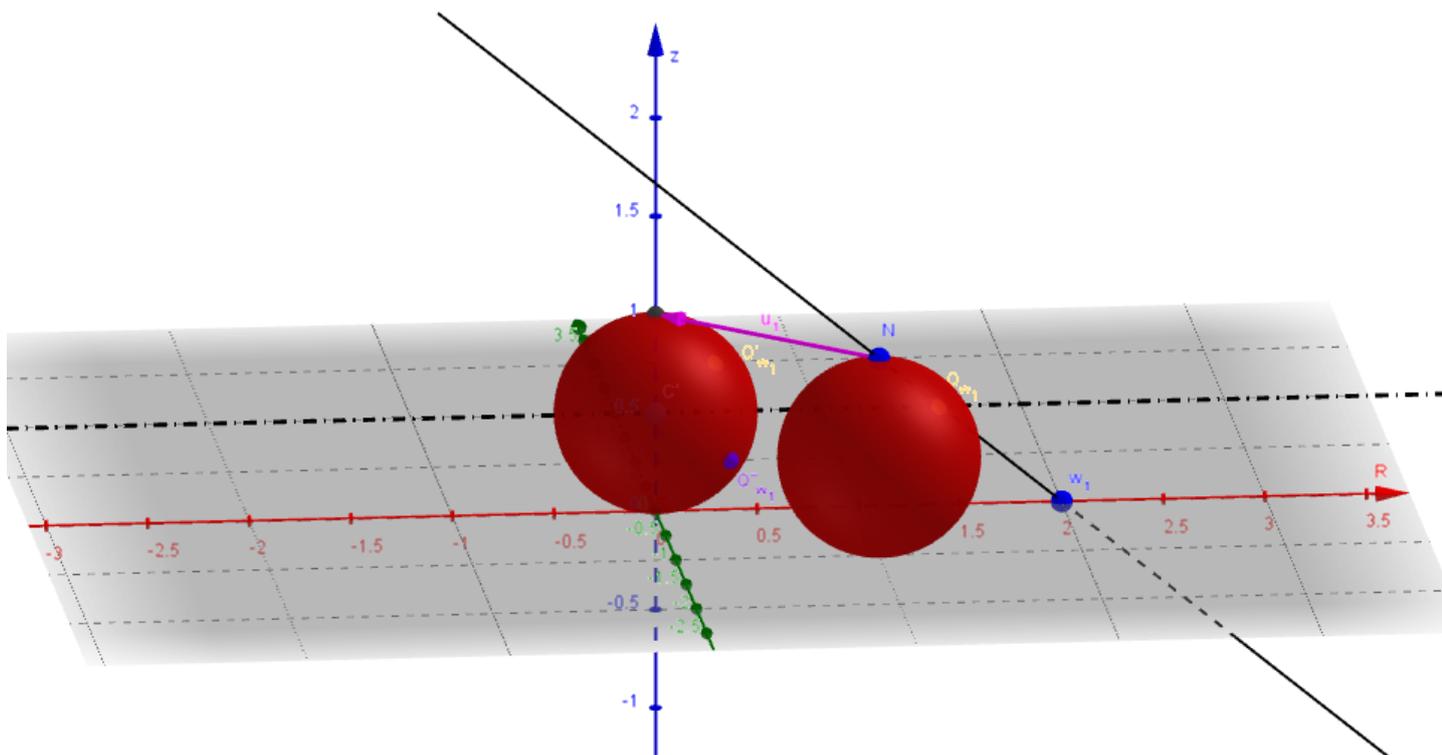


Figura 36 – Passo 4.

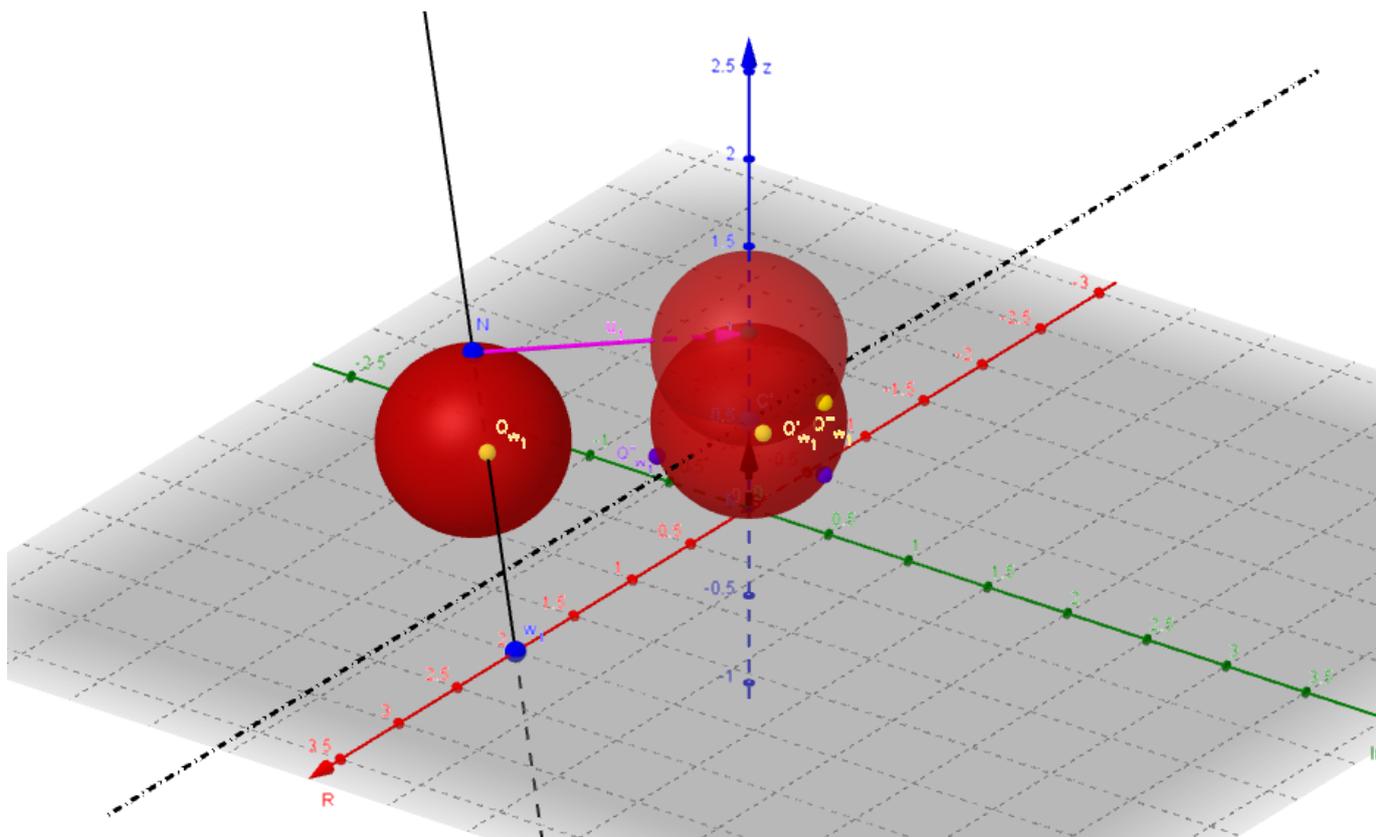


Figura 37 – Passo 5.

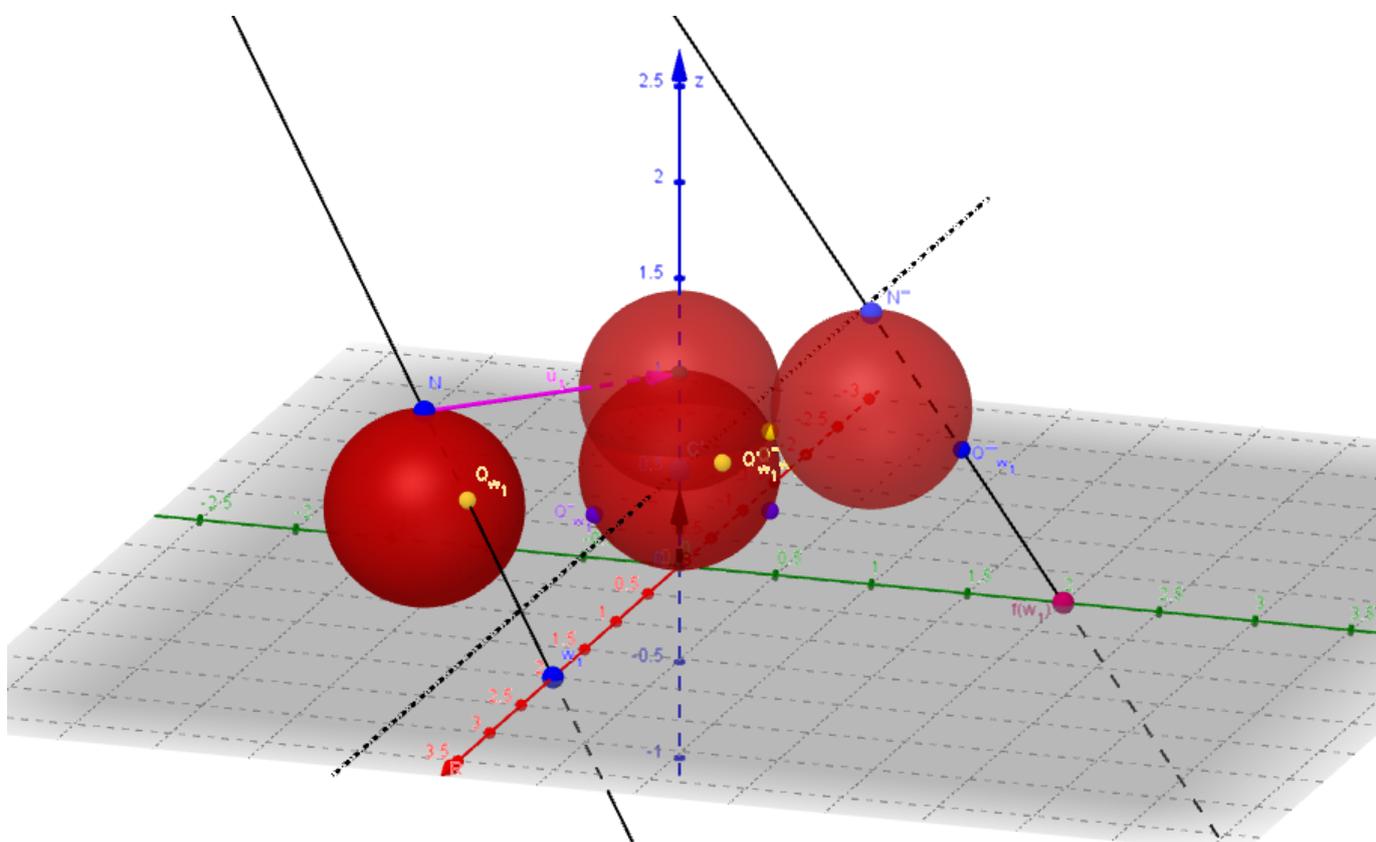


Figura 38 – Passos 6 e 7.

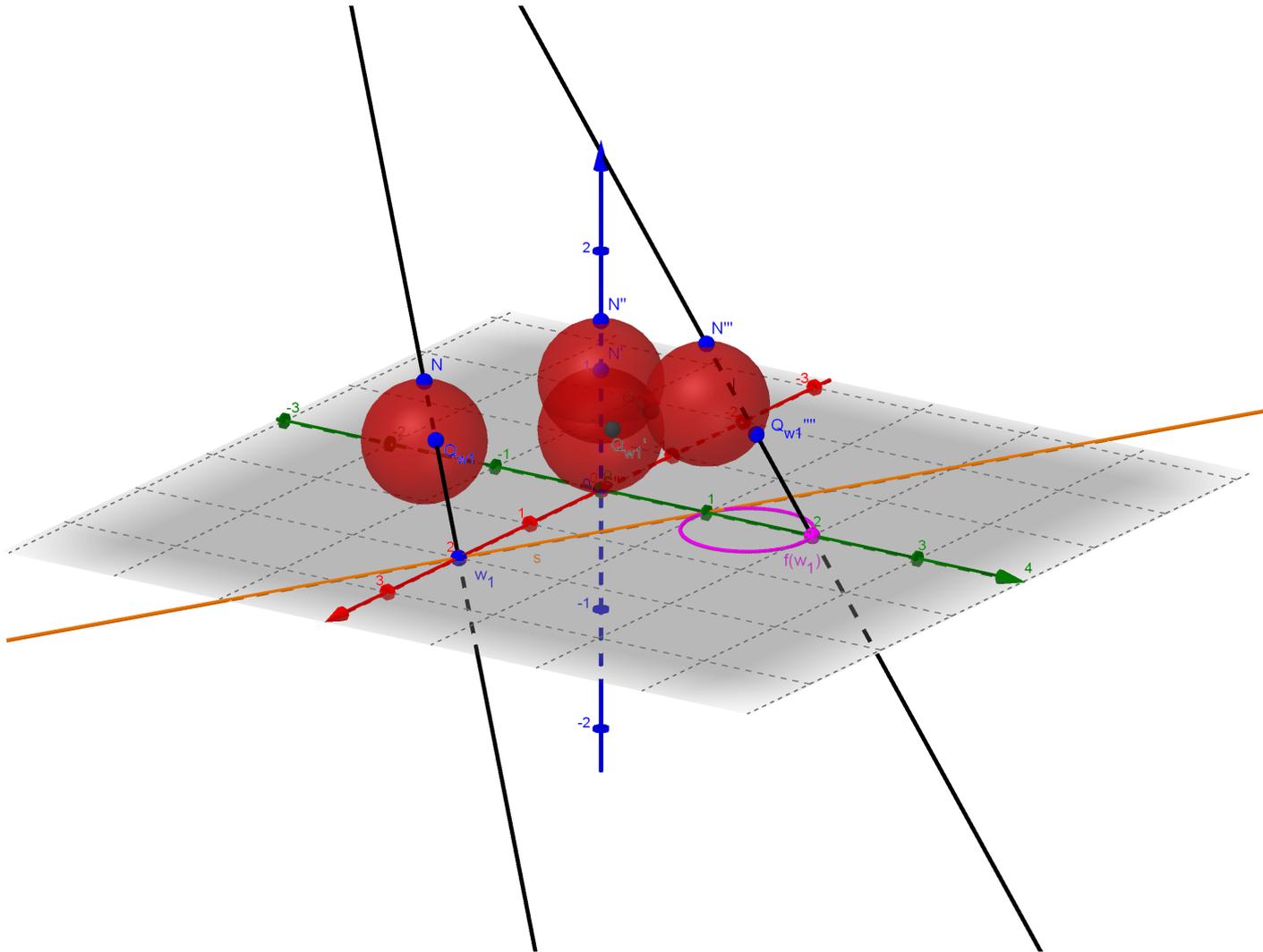


Figura 39 – Exemplo 4.3.1. Movimentos de rotação e translação da esfera \mathbb{S} combinados com as projeções $\pi_{\mathbb{S}}$ e $\pi_{\mathbb{R}^2}$ produzem o mesmo efeito que a transformação $f(w)$.

6º passo: Translade a esfera \mathbb{S}''' pelo vetor $u_2 = (0, 1, 0)$, obtendo a esfera \mathbb{S}'''' e o ponto $Q_{w_1}'''' = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3} + 1, \sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)$.

7º passo: Aplique a projeção $\pi_{\mathbb{R}^2}$ em Q_{w_1}'''' , obtendo $f(w) = \pi_{\mathbb{R}^2}(Q_{w_1}''') = 2i$.

A Figura 39 mostra a aplicação do procedimento e a reta s sendo transformada em uma circunferência por $f(w)$. Evidentemente, $w_1 \in s$ e $f(w_1) \in f(s)$, que é uma circunferência.

Observe que no procedimento descrito acima a esfera \mathbb{S} é escolhida de acordo com a transformação de Möbius dada, ou seja, \mathbb{S} depende de $f(w)$. Podemos então levantar o seguinte questionamento: dadas uma transformação de Möbius $f(w)$ e uma esfera \mathbb{S} quaisquer, existe uma transformação M em \mathbb{R}^3 , combinação de movimentos elementares (rotação e translação), de modo que

$$f(w) = (\pi_{\mathbb{R}^2} \circ M \circ \pi_{\mathbb{S}})(w)?$$

A resposta para essa pergunta é sim e vamos agora apresentar um método em que a esfera \mathbb{S} é totalmente independente da transformação de Möbius $f(w)$. O processo pode ser aplicado para qualquer esfera em \mathbb{R}^3 , entretanto vamos nos restringir a esferas tangentes ao plano complexo estendido em seu polo sul, com diâmetro unitário. Para isso, considere a transformação $f(w)$ e a esfera \mathbb{S} como a seguir:

$$f(w) = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad \text{no qual} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

e

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}.$$

Já sabemos, pelos resultados obtidos no capítulo anterior, que uma transformação de Möbius está bem definida se conhecemos três pontos distintos do plano complexo estendido e suas respectivas imagens. Dessa forma, vamos tomar w_1, w_2 e w_3 pertencentes ao plano complexo estendido de tal forma que:

$$f(w_1) = \infty, \quad f(w_2) = 0 \quad e \quad f(w_3) = 1.$$

Como $f(w)$ é uma função bijetora, certamente w_1, w_2 e w_3 existem. Uma vez encontrados os 3 pontos podemos seguir o procedimento:

1. Projete w_1, w_2 e w_3 na esfera \mathbb{S} através da projeção $\pi_{\mathbb{S}}(w)$, obtendo:

$$Q_1 = \pi_{\mathbb{S}}(w_1), \quad Q_2 = \pi_{\mathbb{S}}(w_2) \quad e \quad Q_3 = \pi_{\mathbb{S}}(w_3).$$

2. Considere o plano α definido pelos pontos $Q_1, N = (x_0, y_0, 1)$ e $C = (x_0, y_0, 0.5)$. Considere também a reta r passando por C , perpendicular ao plano α e o ângulo $\beta = \widehat{Q_1CN}$. Rotacione em β rad a esfera \mathbb{S} em torno da reta r , no sentido de Q_1 para N . Com isso, Q_1' passa a ser o novo polo norte da esfera \mathbb{S}' , obtida através da rotação da esfera \mathbb{S} .
3. Projete Q_2' no plano complexo estendido através da projeção $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q)$, obtendo um número complexo da forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Translade a esfera \mathbb{S}' pelo vetor $\vec{v} = (-a, -b, 0)$. Até aqui já conseguimos dois resultados importantes. A esfera \mathbb{S}'' , obtida através de rotação e translação da esfera \mathbb{S} , tem Q_1'' como polo norte e $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_2'') = 0$. Antes de apresentar o próximo passo, vamos considerar os resultados já realizados e os objetivos ainda não alcançados. Para não estragar os resultados já obtidos, vamos propor no passo seguinte uma translação da esfera \mathbb{S}'' por um vetor \vec{u}_1 , paralelo ao vetor $\overrightarrow{OQ_1''}$, no qual O é a origem em \mathbb{R}^3 . Desse modo, após a translação, Q_1''' , obtido através de Q_1'' , será o polo norte da esfera \mathbb{S}''' e $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_2''') = 0$. Assim, considerando $Q_1'' = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q_3'' = (x_3, y_3, z_3)$, vamos tomar um ponto $P = (x_p, y_p, z_p)$ pertencente à reta que passa por O e por Q_1'' de modo que após a translação da esfera \mathbb{S}'' pelo vetor $\vec{u}_1 = \overrightarrow{Q_1''P}$, tenhamos $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_3''') = w_4$, no qual $|w_4| = 1$. Logo, P pertence à reta r_1 , cuja equação é

$$P = Q_1'' + \lambda \overrightarrow{OQ_1''}. \quad (4.17)$$

A reta r_2 que passa por $P = Q_1'''$ e por Q_3''' é paralela à reta que passa por Q_1'' e por Q_3'' , logo se $X = (x, y, z)$ pertence a r_2 sua equação é

$$X = P + \delta \overrightarrow{Q_1'' Q_3''}. \quad (4.18)$$

Se X pertence ao plano complexo estendido, devemos ter $z = 0$, ou seja $\delta = \frac{z_p}{1-z_3}$. Assim, as coordenadas x e y são:

$$x = x_p + \frac{z_p}{1-z_3} \quad e \quad y = y_p + \frac{z_p}{1-z_3}.$$

Uma vez que P satisfaz a equação (4.17), suas coordenadas podem ser escritas do seguinte modo:

$$x_p = x_1(1-\lambda); \quad y_p = y_1(1-\lambda); \quad z_p = 1-\lambda.$$

Portanto, as coordenadas de X são:

$$\begin{aligned} x &= x_1(1-\lambda) + \frac{1-\lambda}{1-z_3}(x_3-x_1) \Rightarrow x = (1-\lambda) \frac{x_3-x_1z_3}{1-z_3}, \\ y &= y_1(1-\lambda) + \frac{1-\lambda}{1-z_3}(y_3-y_1) \Rightarrow y = (1-\lambda) \frac{y_3-y_1z_3}{1-z_3}, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é ter $\sqrt{x^2+y^2} = 1$, ou seja $x^2+y^2 = 1$. Assim, fazendo as substituições, temos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \left((1-\lambda) \frac{x_3-x_1z_3}{1-z_3} \right)^2 + \left((1-\lambda) \frac{y_3-y_1z_3}{1-z_3} \right)^2 &= 1 \\ (1-\lambda)^2 \left(\left(\frac{x_3-x_1z_3}{1-z_3} \right)^2 + \left(\frac{y_3-y_1z_3}{1-z_3} \right)^2 \right) &= 1 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_3-x_1z_3}{1-z_3} \right)^2 + \left(\frac{y_3-y_1z_3}{1-z_3} \right)^2}} &= (1-\lambda). \end{aligned}$$

Desse modo, vamos transladar a esfera S'' pelo vetor $\vec{u} = \overrightarrow{Q_1'' P}$, no qual as coordenadas de P são:

$$x_p = x_1k, \quad y_p = y_1k, \quad z_p = k, \quad \text{com } k = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_3-x_1z_3}{1-z_3} \right)^2 + \left(\frac{y_3-y_1z_3}{1-z_3} \right)^2}}.$$

Assim, a esfera S''' , obtida através da translação da esfera S'' pelo vetor \vec{u} , tem Q_1''' como polo norte, $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_2''') = 0$ e $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_3''') = w_4$, com $|w_4| = 1$.

4. Considere $Q_1'' = (x_1, y_1, z_1)$, $Q_3'' = (x_3, y_3, z_3)$ e $P = (x_p, y_p, z_p)$, cujas as coordenadas são dadas por:

$$x_p = x_1 k, \quad y_p = y_1 k, \quad z_p = k, \quad \text{com } k = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_3 - x_1 z_3}{1 - z_3}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_1 z_3}{1 - z_3}\right)^2}}.$$

Translade a esfera \mathbb{S}'' pelo vetor $\vec{u} = \overrightarrow{Q_1'' P}$.

5. Considere o ângulo γ formado pelo eixo real positivo do plano estendido e o módulo de w_3 . Rotacione em γ rad a esfera \mathbb{S}''' em torno do eixo-z, no sentido de w_3 para o eixo real positivo. Agora, alcançamos todos os resultados pretendidos. Temos Q_1'''' como polo norte da esfera \mathbb{S}'''' , $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_2'''') = 0$ e $\pi_{\mathbb{R}^2}(Q_3'''') = 1$.

Exemplo 4.3.2. Considere a transformação de Möbius dada por

$$f(w) = \frac{(1 - 3i)w + 6 + 2i}{(3 - i)w - 6 + 2i},$$

e a esfera \mathbb{S} de diâmetro unitário e centro em $C = (3, -4, 0.5)$ e aplique o procedimento descrito acima.

Inicialmente, vamos observar o seguinte: A equação da esfera \mathbb{S} é dada por:

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25\}, \quad (4.19)$$

e os pontos estratégicos para a aplicação do procedimento descrito são tais que:

$$\begin{aligned} f(w_1) = \infty &\Rightarrow w_1 = \frac{-d}{c} \Rightarrow w_1 = 2; \\ f(w_2) = 0 &\Rightarrow w_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow w_2 = -2i; \\ f(w_3) = 1 &\Rightarrow w_3 = \frac{d - b}{a - c} \Rightarrow w_3 = 3 - 3i. \end{aligned}$$

Uma vez que temos w_1 , w_2 e w_3 conhecidos e a esfera \mathbb{S} definida, basta seguir o procedimento descrito acima do primeiro ao quinto passo.

Confira no link abaixo o vídeo com a animação do procedimento descrito passo a passo.

[Link para o vídeo.](#)

APLICAÇÃO DIDÁTICA

O objetivo principal desse capítulo é apresentar algumas atividades que possam ser desenvolvidas com alunos de Ensino Médio sobre números complexos. Tais atividades serão desenvolvidas a partir do software Geogebra, versão 6.0.414.0 que foi escolhido por ser gratuito e já utilizado por boa parte dos professores de Matemática. As atividades abordam principalmente os conceitos sobre números complexos e as transformações no plano complexo mas também se apoiam em conteúdos clássicos da Geometria como: retas e cônicas.

5.1 Metodologia

As atividades foram elaboradas de modo que o uso do software Geogebra ajude na visualização e melhor compreensão dos efeitos provocados por algumas transformações no plano complexo, como inversões. Diante disso, é recomendável que cada aluno tenha acesso ao software e participe ativamente da construção seguindo as instruções passo a passo. No decorrer das atividades, os alunos devem ter autonomia e incentivo para alterarem livremente os parâmetros, criando seus próprios exemplos de aplicações das transformações trabalhadas. A partir de seus exemplos o aluno tem a possibilidade de verificar ou confirmar propriedades características de cada transformação.

5.2 Ideia Geral

As transformações no plano complexo definidas no Capítulo 2, a saber *translação*, *multiplicação por complexo* e *inversão* serão aplicadas em algumas curvas. Assim, cada ponto pertencente à essa curva será transformado em outro ponto do plano complexo. A união de todos os pontos obtidos a partir da transformação dos pontos dessa curva será chamada de imagem da curva. A visualização de uma curva e de sua imagem facilitam a compreensão dos efeitos causados por cada transformação. Desde casos mais simples como a translação de uma reta,

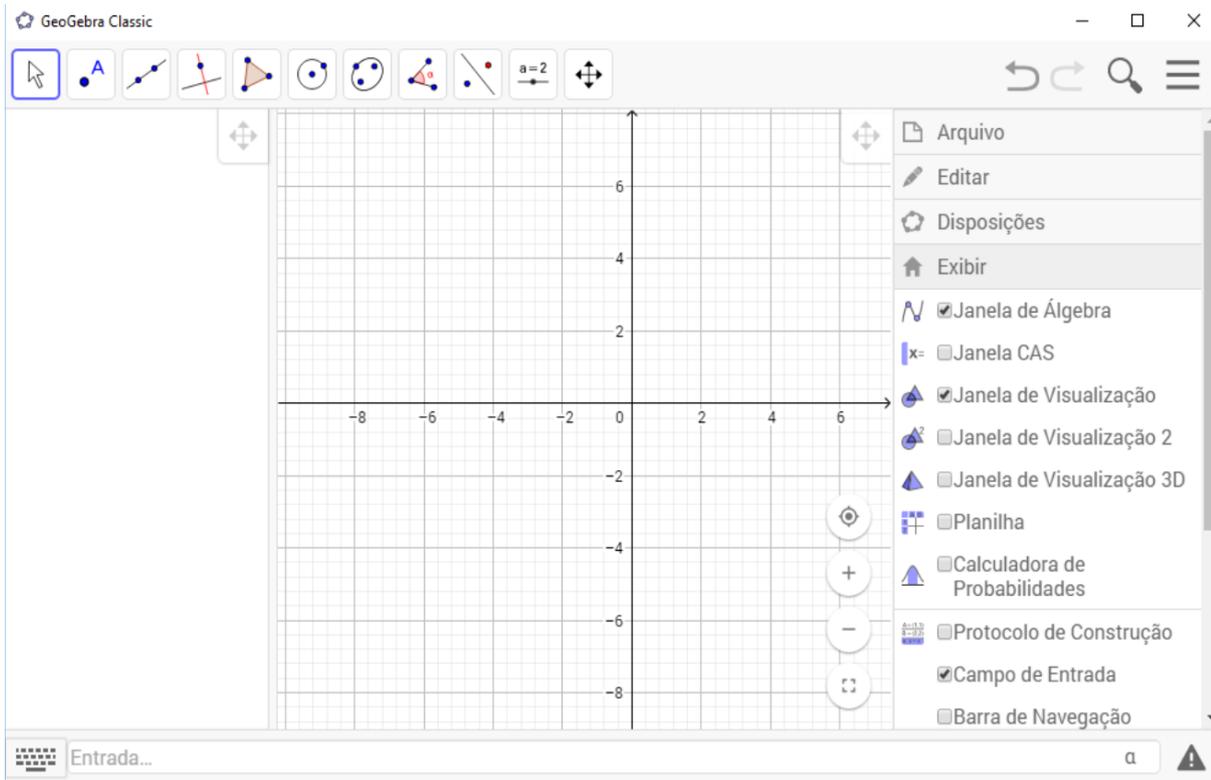


Figura 40 – Em Exibir, selecione *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Campo de Entrada*.

até os mais complexos como a inversão de uma hipérbole podem ser facilmente percebidos e compreendidos com o auxílio da visualização gráfica do software. Vale ressaltar que o estudo de Transformações de \mathbb{C} em \mathbb{C} não é permitida via gráfico, uma vez que o conjunto pertence a um ambiente em \mathbb{R}^4 .

5.3 Desenvolvimento

A versão utilizada do software é a 6.0.400.0-offline e pode ser baixada gratuitamente pelo link www.geogebra.org/download. Após abrir o GeoGebra, clicar na aba do menu no canto superior direito da tela e escolher a opção Exibir. Em seguida, selecionar apenas os itens: Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Campo de Entrada (ver Figura 40). Embora os roteiros sejam praticamente iguais para as três transformações, vamos apresentá-los separadamente e como um guia a ser seguido. Ressaltamos uma vez que os usuários devem ser incentivados a interagir e escolher as curvas a serem transformadas e também os parâmetros que preferirem na *translação* e na *multiplicação por complexo*.

5.3.1 Translação

Vamos aplicar a transformação *Translação*, definida no Capítulo 2 como a seguir: Fixado $\alpha \in \mathbb{C}$, considere a transformação $T_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$T_{\alpha}(z) = z + \alpha.$$

Inicialmente, vamos implementar os números complexos $O = 0 + 0i$ e $\alpha = a + bi$, no qual $a, b \in \mathbb{C}$ (escolha livre). Podemos fazer isso digitando diretamente no campo de entrada os comandos " $O = 0 + 0i$ " e " $\alpha = a + bi$ ". Na implementação de α , o programa automaticamente vai sugerir a criação de "controles deslizantes para a,b". Com isso, podemos escolher o intervalo de valores que a e b podem assumir e fazer animações, identificando a influência de cada um desses parâmetros.¹ Em seguida vamos criar um vetor que representa a *translação*, clicando na terceira ferramenta da esquerda para a direita e procurando a opção Vetor. Após selecionar essa ferramenta, clique primeiramente em O e em seguida em α (ver Figura 41).

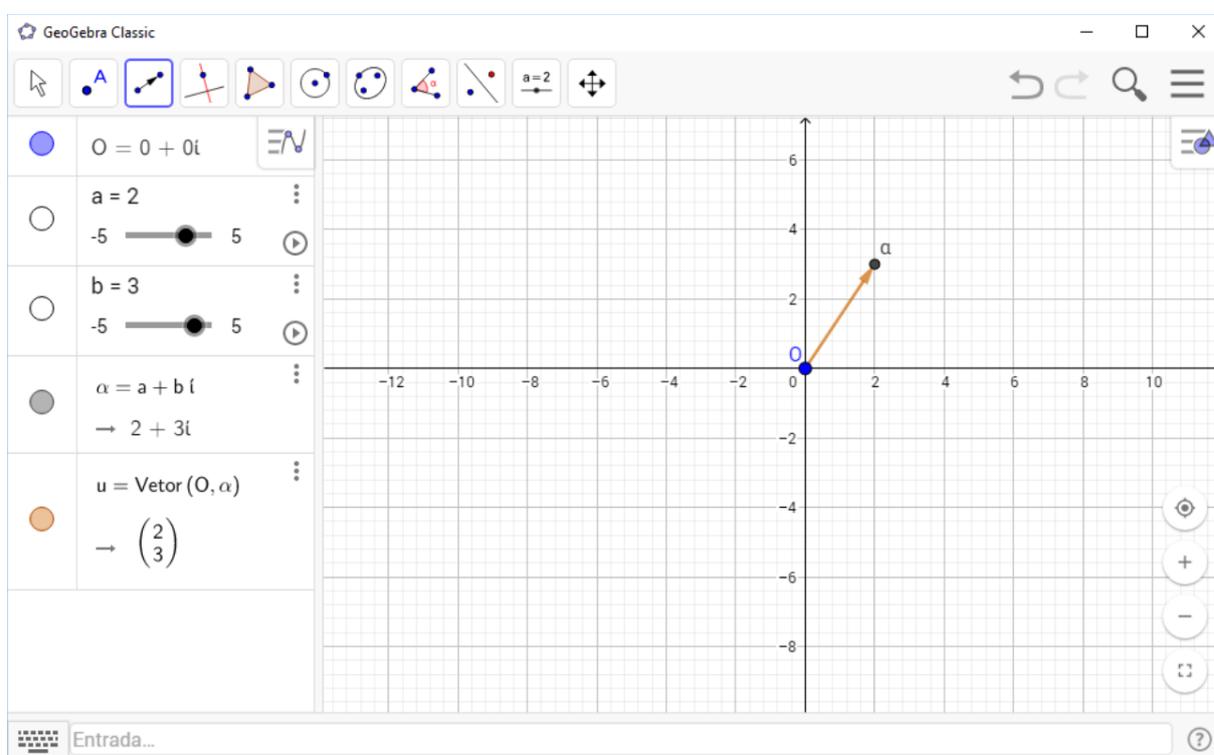


Figura 41 – O vetor de translação u , com $|u| = |\alpha|$ e orientado de O para α .

O próximo passo é implementar a curva a ser transladada, por exemplo uma circunferência de centro $C_1 = (-3, 2)$ e raio unitário. Isso pode ser feito de várias maneiras, como por exemplo, implementar primeiro o centro, digitando no campo de entrada o comando " $C_1 = (-3, 2)$ " e depois a circunferência, selecionando a ferramenta "Círculo dados Centro e Raio". Após a exibição da circunferência, vamos criar um número complexo qualquer que pertença a essa circunferência, selecionando a ferramenta "Ponto" e clicando em cima dessa curva. Em seguida, vamos mudar a representação do ponto criado de "coordenadas cartesianas" para "número complexo", clicando no ponto e abrindo a opção "Configurações", selecionando a opção desejada na aba "Álgebra". Vamos também renomear o ponto criado para " z_1 " de modo a facilitar a notação.

¹ Não esquecer de colocar um espaço entre b e i na implementação de α , caso contrário o Geogebra entende bi como um controle deslizante a ser criado e o número α não será um número complexo.

Agora podemos implementar o número complexo w_1 , imagem de z_1 , isto é, $w_1 = T_\alpha(z_1)$. Para isto, vamos digitar no campo de entrada o comando " $w_1 = \alpha + z_1$ ", selecionar a opção "Exibir rastro" em configurações de w_1 , mudar o tamanho do ponto para 2 na aba "Estilo" e mudar a cor de visualização para vermelho. Desse modo, ao selecionarmos a opção "animação" em z_1 , podemos observar o efeito da transformação $T_\alpha(z)$ a partir do rastro deixado por w_1 . Para confirmar que essa transformação se trata realmente de uma translação, podemos utilizar a ferramenta do software "Translação por um vetor", selecionar a circunferência e o vetor $\vec{O\alpha}$, e verificar que a curva obtida é exatamente igual à curva formada pelo rastro de w_1 (ver Figura 42). Ativando a opção "animação" para os parâmetros a e b , podemos observar com maior clareza os efeitos produzidos por cada um deles. O parâmetro a , que corresponde a parte real do número complexo α , é responsável pela translação horizontal de $T_\alpha(z)$, enquanto que o parâmetro b , correspondente à parte imaginária de α , regula a translação vertical dessa transformação.

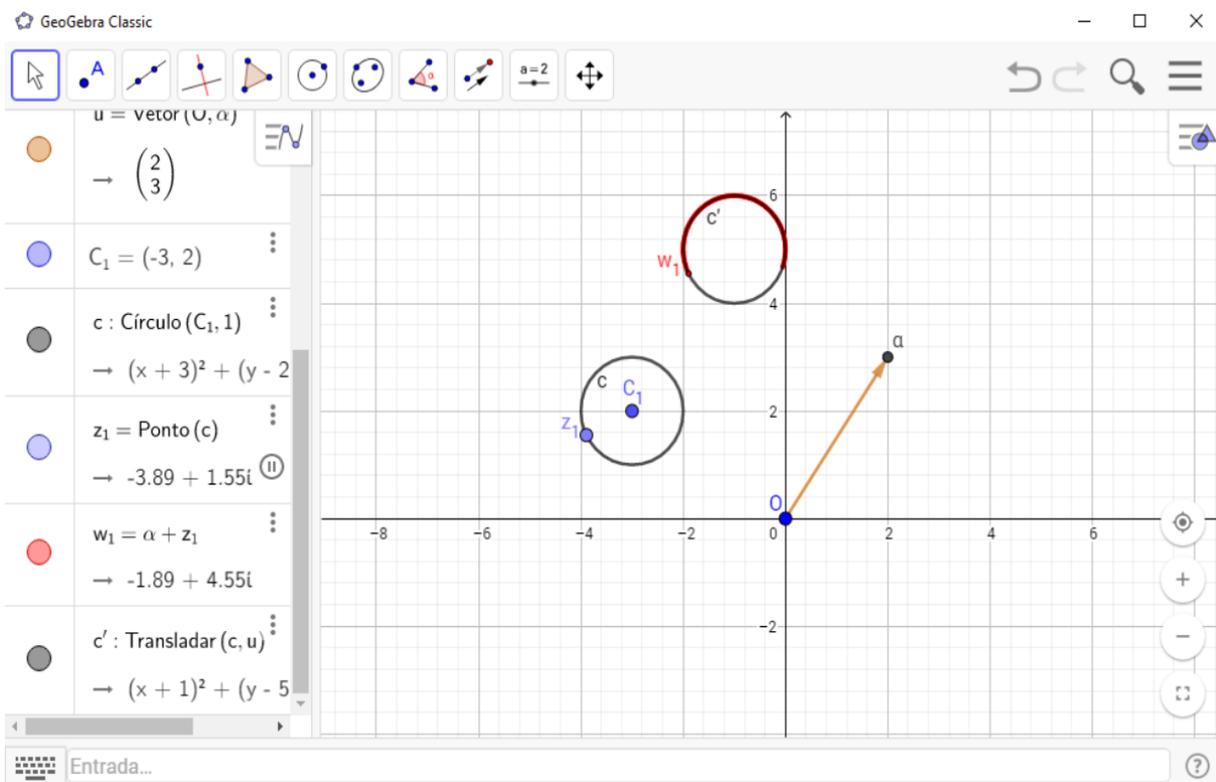


Figura 42 – A curva formada pelo rastro de w_1 é exatamente uma circunferência obtida a partir da translação da circunferência c .

5.3.2 Multiplicação por complexo

Considere a transformação $M_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$M_\beta(z) = \beta z, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Vamos começar implementando os números complexos $O = 0 + 0i$ e $\beta = a + bi$, criando os controles deslizantes a e b . Em seguida vamos calcular o módulo e o argumento de β , usando

os seguintes comandos no campo de entrada, " $\rho = \text{abs}(\beta)$ " e " $\theta = \text{arg}(\beta)$ ". O próximo passo é implementar uma curva, por exemplo, uma elipse cujos focos são $F_1 = (4, 4)$, $F_2 = (4, 2)$ e um dos extremos é $V = (4, 1)$. Após implementar esses pontos, utilizar a ferramenta "Elipse", selecionando primeiramente os focos F_1 e F_2 para depois incluir o vértice V . Agora vamos criar um número complexo que pertença à essa elipse, selecionando a ferramenta "Ponto" e clicando sobre a curva. Esse ponto deve ser renomeado para z_2 e sua representação deve ser alterada de "coordenadas cartesianas" para "número complexo". Assim, podemos criar w_2 , imagem de z_2 , com o comando " $w_2 = \beta z_2$ " no campo de entrada. Ativar a opção "Exibir rastro" para w_2 , mudar o tamanho do ponto para 2 na aba "Estilo" em Configurações e escolher uma cor com maior destaque para realçar melhor os efeitos provocados por essa transformação. Em seguida, iniciar a animação de z_2 e observar o desenho formado pelo rastro de w_2 (ver Figura 43). Para confirmar as propriedades dessa transformação já destacadas no Capítulo 2, aplique

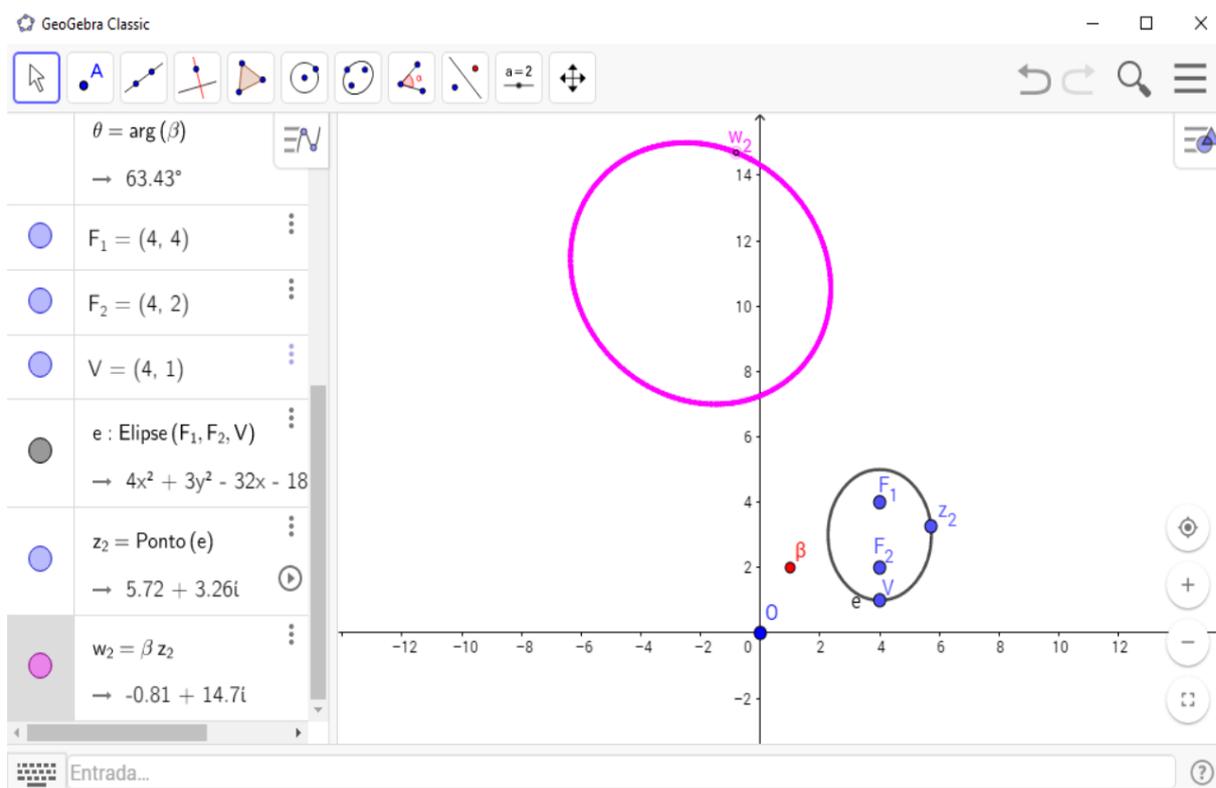


Figura 43 – A curva delimitada pelo rastro de w_2 revela os efeitos provocados pela transformação Multiplicação por complexo.

a transformação nos focos F_1 e F_2 e também no vértice V , com os comandos " $M_1 = \beta F_1$ ", " $M_2 = \beta F_2$ " e " $M = \beta V$ " no campo de entrada. Construa uma elipse com focos M_1 , M_2 e um dos vértices M e verifique que o rastro deixado por w_2 quando z_2 percorre a elipse original é exatamente essa elipse transformada. Em seguida, utilize a ferramenta "Distancia, Comprimento ou Perímetro" para calcular as distancias entre M_2 e M e F_2 e V . Verifique que a razão entre essas distancias é igual a ρ , módulo de β . Utilize a ferramenta "Área" para calcular a área da elipse transformada e da elipse original. Verifique que a razão entre essas áreas é igual a ρ^2 .

Além disso, implemente os vetores $u = \overrightarrow{F_1F_2}$ e $v = \overrightarrow{M_1M_2}$ utilizando a ferramenta "Vetor" e calcule o ângulo entre esses dois vetores com o auxílio da ferramenta "Ângulo". Verifique que o ângulo entre esses vetores é igual a θ , argumento de β . Desse modo, podemos verificar que a transformação M_β realmente produziu uma ampliação/redução da elipse original com fator de ampliação/redução igual a ρ , módulo de β e também uma rotação em torno da origem com ângulo de rotação igual a θ , argumento de β (ver Figura 44). Podemos verificar isso utilizando as

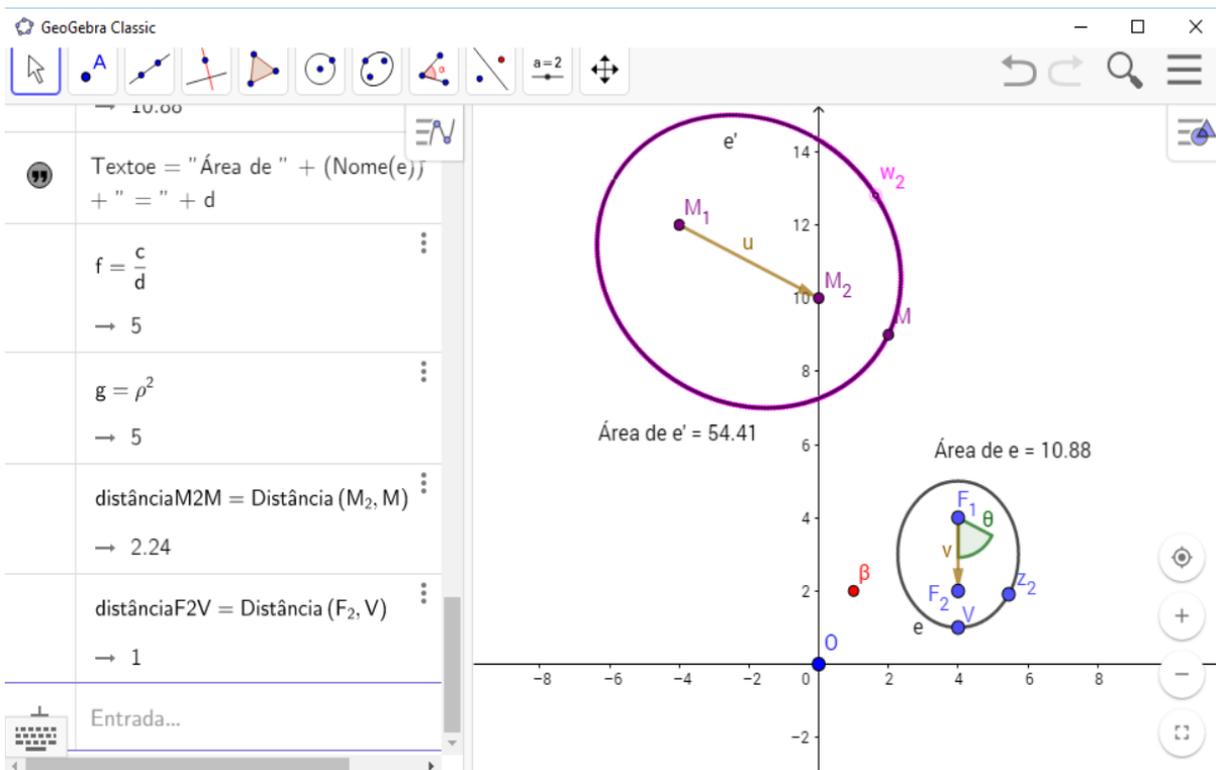


Figura 44 – A multiplicação por complexo provoca uma ampliação ou redução e também uma rotação da curva.

ferramentas "Homotetia" e "Rotação em torno de um ponto" em qualquer ordem. Por exemplo, utilize a ferramenta "Homotetia" na elipse original, clique em seguida em O e escolha ρ para o fator. O passo seguinte é utilizar a ferramenta "Rotação em torno de um ponto" na elipse criada no passo anterior, clicar em O e escolher θ para o ângulo. (ver Figura 45).

5.3.3 Inversão

Considere a transformação $I: \widehat{\mathbb{C}} \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ dada por

$$I(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } z = 0 \\ 0 & \text{se } z = \infty \\ \frac{1}{z} & \text{se } z \neq 0 \end{cases} .$$

Inicialmente, implemente a hipérbole cujos focos são $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$ e um dos extremos é $V = (a, 0)$, a partir da ferramenta "Hipérbole" selecionando primeiramente os

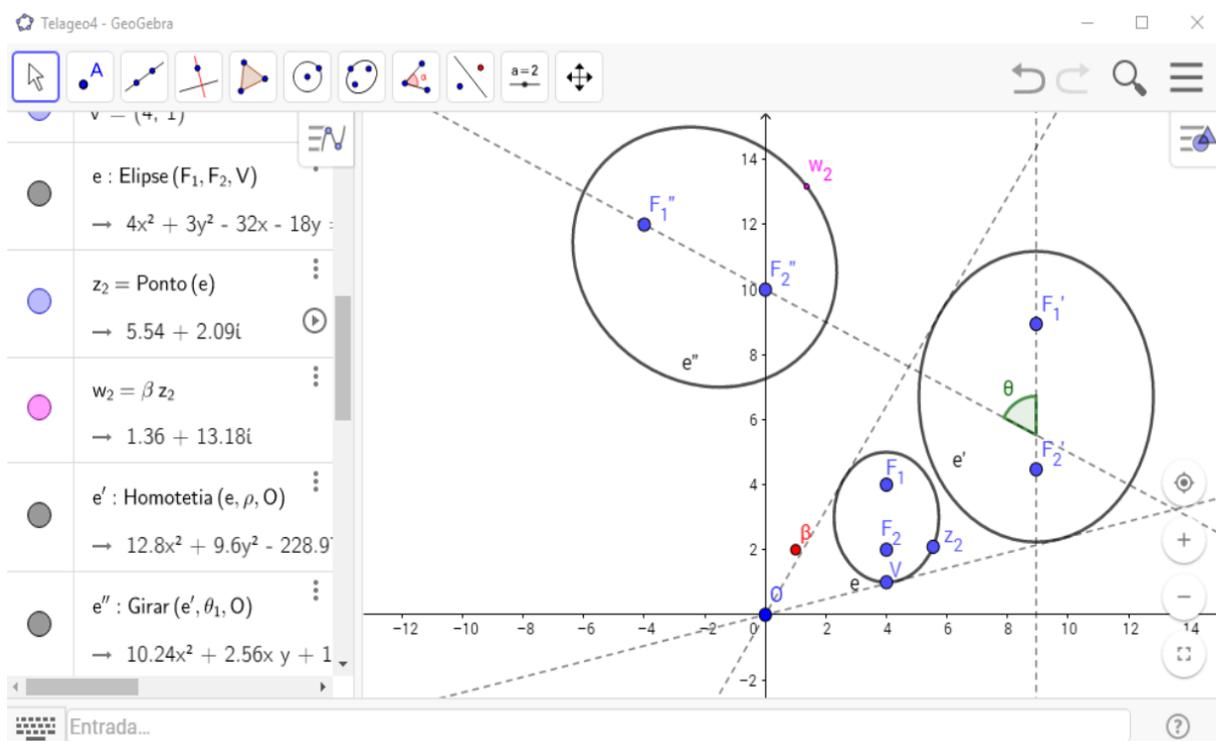


Figura 45 – A multiplicação por complexo vista como uma composição de Homotetia com Rotação.

focos e depois o vértice. Crie o controle deslizante a , variando de 0 a 1 e em seguida crie um número complexo que pertença à essa hipérbole, selecionando a ferramenta "Ponto" e clicando sobre a curva. Esse ponto deve ser renomeado para z_3 e sua representação deve ser alterada de "coordenadas cartesianas" para "número complexo". Desse modo, podemos criar w_3 , imagem de z_3 , com o comando " $w_3 = \frac{1}{z_3}$ ". Ativar a opção "Exibir rastro" para w_3 , mudar o tamanho do ponto para 2 na aba "Estilo" em Configurações e escolher uma cor com maior destaque para realçar melhor os efeitos provocados por essa transformação. Em seguida, iniciar a animação de z_3 e observar o desenho formado pelo rastro de w_3 (ver Figura 46). Variando o valor de a podemos verificar melhor o formato da curva produzida pela inversão de uma hipérbole "centrada" na origem (ver Figura 47). Outros exemplos também devem ser abordados. A inversão de circunferências e retas podem produzir outras circunferências ou retas e devem ser livremente exploradas pelos alunos até que consigam perceber, a partir da observação de vários exemplos, que tipo de circunferência a inversão transforma em outra circunferência e aquelas que são transformadas em retas. Desse modo, devem ser estimulados a implementarem diferentes retas ou circunferências e em seguida, aplicarem o procedimento descrito acima.

É extremamente importante que os alunos tenham autonomia para variar livremente os parâmetros de modo a verificar na prática os efeitos produzidos por essas transformações.

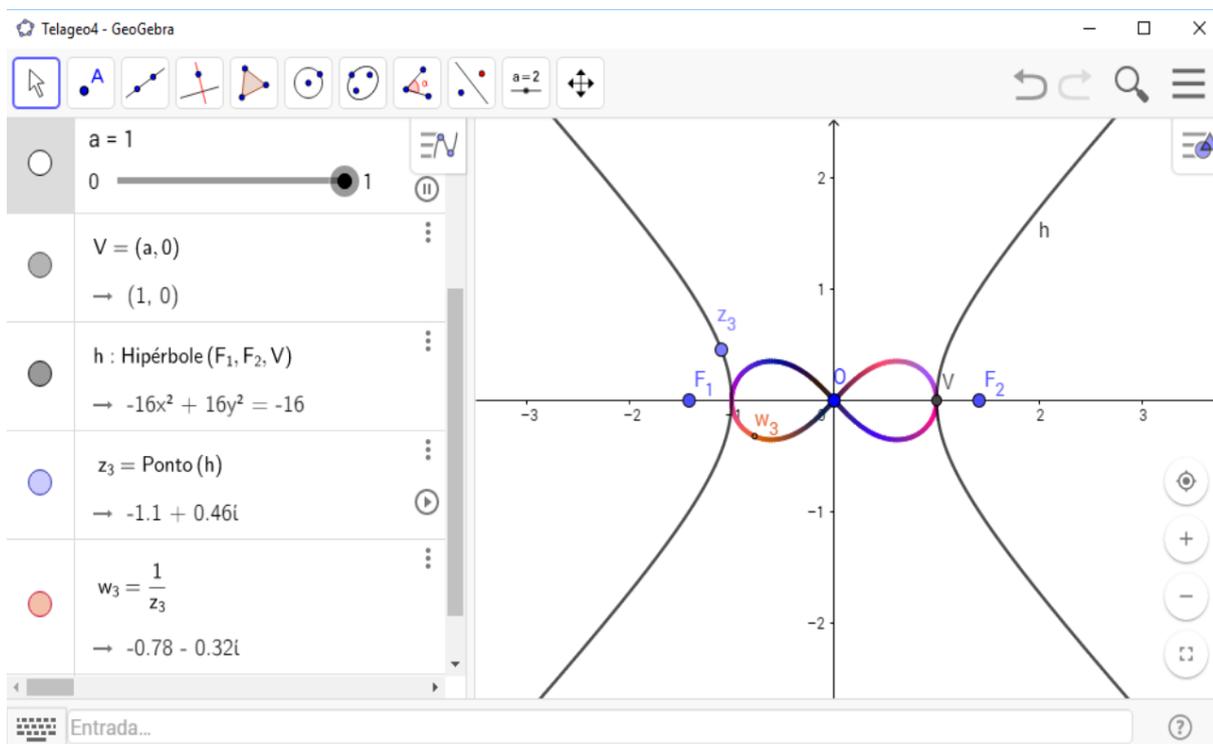


Figura 46 – O rastro deixado por w_3 delimita uma curva fechada correspondente à inversão de uma hipérbole.

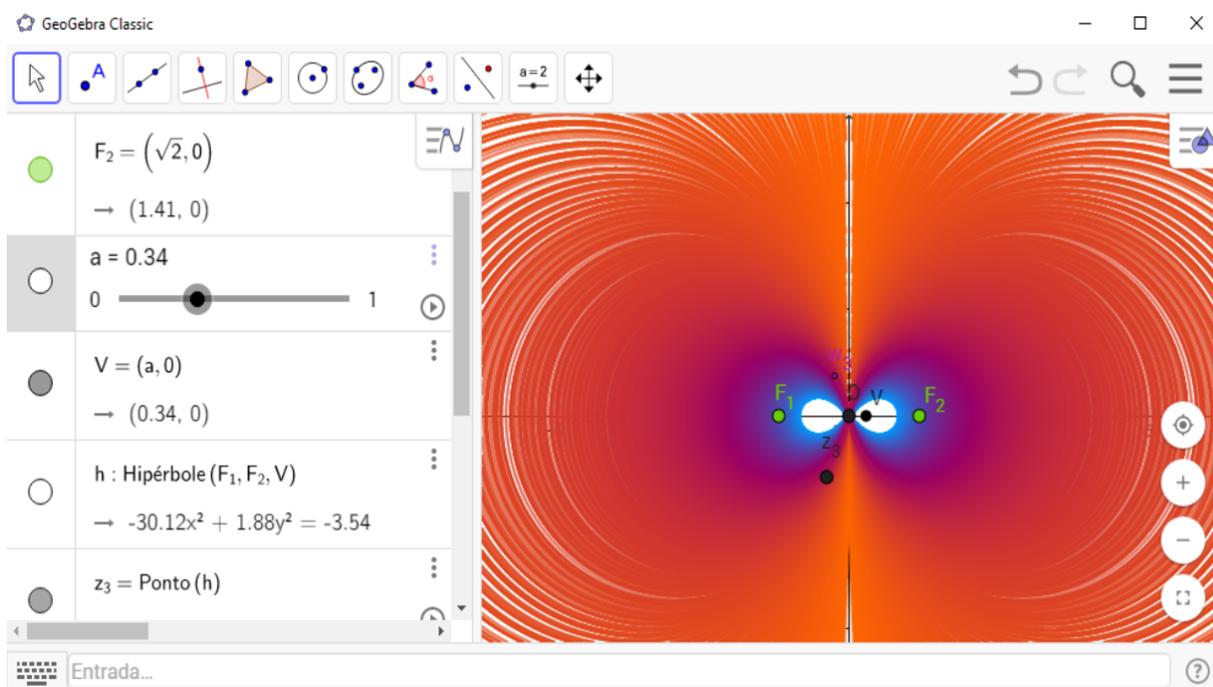


Figura 47 – A inversão de diferentes hipérboles, criadas a partir da variação do parâmetro a .

REFERÊNCIAS

CHURCHILL, J. W. B. e R. V. **Complex Variables and Applications**. 1221 Avenue of the Americas, New York, NY 10020: McGraw-Hill Higher Education, 2009. Citado nas páginas 63 e 88.

DELGADO, K. F. e L. C. J. **Geometria Analítica**. Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico 22460-320 - Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado nas páginas 20 e 21.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 1**. Estrada Dona Castorina, 110 22460-320 - Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Citado na página 95.

VILLELA, A. H. e M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico 22460-320 - Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado nas páginas 85 e 86.

