ÉRIKA FIGUERÊDO ALVES

Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

OUTUBRO DE 2018

ÉRIKA FIGUERÊDO ALVES

Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Profª. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
OUTUBRO DE 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

A474 Alves, Érika Figuerêdo.

Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade / Érika Figuerêdo Alves. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

224 f. : il.
Bibliografia: 122 - 126.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2018.
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua.

1. Funções. 2. Máximos e Mínimos. 3. GeoGebra. 4. Jogos. 5. Situações-Problemas.. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

ÉRIKA FIGUERÊDO ALVES

Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 22 de OUTUBRO de 2018.

Profª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IFFluminense campus Campos Centro

Prof. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Profª. Liliana Angelina Leon Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADORA)

Dedico este trabalho à Deus e aos meus pais, que com amor e dedicação são inspiração para o sucesso nesta minha caminhada.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida.

À minha família, por todo apoio, carinho, compreensão e paciência.

À minha amiga Andréia Caetano, pelo incentivo e material emprestado.

Aos professores do PROFMAT-UENF, pelos conhecimentos compartilhados.

Ao Professor Oscar Alfredo Paz La Torre, coordenador do curso, por toda atenção, incentivo e paciência.

À minha orientadora Professora Liliana Angelina León Mescua, por todo carinho e assistência prestada.

Ao Professor Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, por toda ajuda no LaTex.

Aos meus colegas do mestrado, pelos momentos agradáveis e encorajamento nos momentos difíceis.

Aos professores que contribuíram com a pesquisa preenchendo questionário, pela disponibilidade em ajudar e boa vontade.

À sociedade Brasileira de Matemática-SBM e à UENF, pelo oferecimento deste curso.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram nessa minha caminhada.

Muito obrigada, certamente não chegaria até aqui sem o apoio de cada um!!!

“O que sabemos é uma gota, o que não sabemos é um oceano”.
“Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes”.
Isaac Newton

Resumo

A presente pesquisa tem por objetivo explorar de forma mais efetiva e ampliar o estudo do tema máximos e mínimos de funções por meio de uma sequência didática para turmas da 1ª série do Ensino Médio. A proposta é constituída por quatro atividades atrativas e dinâmicas que aliam a resolução de situações-problemas com jogos e a utilização do software GeoGebra. Busca-se, com estas atividades, aprofundar e fixar os conceitos que envolvem o tema, além de ampliá-los. Para tal, utilizou-se uma investigação de características geométricas relativas à posição da reta tangente ao gráfico de uma função, construindo uma estratégia que permita ao discente modelar e resolver diversos tipos de situações-problemas, sem o uso de técnicas de derivação ou comandos de software existentes. Para a escolha da metodologia de ensino foi levada em consideração a opinião de 14 professores que trabalham com turmas do Ensino Médio em escolas públicas do interior do estado do Rio de Janeiro. Todos consideram que a utilização de jogos e tecnologias é uma ferramenta valiosa para avivar o interesse dos estudantes. Esse estudo estimula a construção de conhecimentos por meio de uma postura ativa dos discentes e do professor como mediador e incentivador, tornando os conhecimentos adquiridos fortes aliados para resolver diversas situações cotidianas, inserindo significados na aprendizagem de matemática.

Palavras-chaves: Funções. Máximos e Mínimos. GeoGebra. Jogos. Situações-Problemas.

Abstract

This present research has the objective to explore and broaden more effectively the study fo the maximum and minimum functions through a didatic sequence for the groups of 1st year of High School. The proposal is constituted by four attractive and dynamic activities as well as the use of GeoGebra software. We look for, with these activities, to deepen and fix the concepts that involve the theme, besides of enlarging them. For this objective, it was used an investigation of geometric characteristics related to the position of the straight tangent to the graphic of the function, building a strategy which allows the student to model and solve various types of problem-situations, without the use of the derivation techniques or commands from the existing softwares. For the choice of the teaching methodology it was taken into consideration the opinion of 14 teachers who work with Public High School groups in the countryside of Rio de Janeiro. Everyone considers that the use of games and technology is a valuable tools to enliven the interest of the students. This study stimulates the construction of knowledges by an active posture from the students along with the teacher as a mediator and promoter, making the acquired knowledge a strong ally to solve various daily situations, adding meanings to the mathematics learning process.

Key-words: Functions, Maximum and Minimum. GeoGebra, Games, Problem-Situations

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos PCNEM
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

Lista de símbolos

$=$	Igual
$\cong$	Aproximadamente Igual
$\neq$	Diferente
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\%$	Por Cento
Δ	Delta
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leftrightarrow$	Se e somente se
$\in$	Pertence
$\subset$	Está Contido
$\leq$	Menor ou Igual
$\geq$	Maior ou igual
$-$	Subtração
$+$	Adição

Sumário

Introdução

O estudo de máximos e mínimos (extremos de uma função) tem desafiado o homem com frequência. Sempre que um novo produto é comercializado, há perguntas que são inevitáveis, dentre outras, “Como produzi-lo com o menor custo?”, “Como torná-lo mais eficiente?", “Como obter lucro máximo?”. Elas são investigadas pelos fabricantes constantemente.

A aplicabilidade em variadas situações concretas e a possibilidade de relacionamento com as diversas áreas do conhecimento são fatores que tornam o tema interessante e fazem refletir sobre sua abordagem mais intensa em sala de aula. Além disso, a visualização geométrica, algébrica e gráfica de funções possibilita que a exploração/investigação matemática ganhe papel de destaque, permitindo observar peculiaridades e produzindo diferentes formas de abordagem dos desafios propostos, exigindo estudantes atentos e ativos no processo de ensino e aprendizagem, tornando esse estudo muito rico.

Atualmente, o currículo mínimo do estado do Rio de Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2012) propõe a resolução de problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos de uma função do 2° grau como uma das habilidades esperadas para o 3º Bimestre da 1ª série do Ensino Médio. No 9° ano do Ensino Fundamental, o aluno tem contato com o conceito de função como a relação entre duas grandezas, utiliza pares ordenados para a construção de gráficos e resolvem problemas envolvendo informações apresentadas em gráficos. Nos primeiros dois bimestres da 1^a série do Ensino Médio, os alunos continuam o estudo de funções, realizando tarefas que exigem habilidades como a identificação da expressão algébrica que expressa uma regularidade e a análise de gráficos de funções variadas, estudando de forma aprofundada a função polinomial de 1º e 2º grau.

Numa análise de três livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio com características distintas; Livro 1 (IZZI et al., 2013), Livro 2 (SMOLE; DINIZ, 2013), Livro 3 (BARROSO, 2010); observa-se que o reconhecimento de máximos e mínimos de funções variadas tem sido tratado visualmente em gráficos "prontos" e o seu estudo em situações-problemas está restringido aqueles modelados por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola, as quais se deduzem por meio da característica de simetria do gráfico ou a partir de sua forma canônica, não existindo uma proposta de estudo mais ampla.

Além disso, o ensino de matemática continua encontrando desafios, entre eles, o desinteresse e os baixos níveis de aprendizagem dos estudantes na disciplina. Magarinus (2013, p. 22) comenta que muitos alunos consideram a matemática "[...] uma disciplina difícil e de conteúdos, muitas vezes, incompreensíveis, o que pode ser confirmado pelos baixos índices de rendimento apresentados em várias avaliações a nível nacional".

Segundo indicadores divulgados pelo INEP, nos anos de 2014 a 2015 a 1ª série do Ensino Médio apresentou os maiores índices de evasão $(12,9\%)$ e abandono $(8,6\%)$ escolar de toda a educação básica, apesar de ser o momento em que os estudantes deveriam iniciar uma nova trajetória estudantil, com o objetivo de ingressar numa universidade ou definir uma vocação profissional. Nesses indicadores, verificou-se que em 2015 um em cada quatro jovens $(22,5\%)$ entre 15 e 29 anos não estavam na escola nem no mercado de trabalho. É nessa série também que constatou-se as mais preocupantes taxas de reprovação $(17,3\%)$ e repetência $(15,3\%)$, (MILHORANCE, 2017).

Diante dos problemas apontados, justifica-se a introdução de metodologias de ensino que aumentem a motivação e a construção de novos conhecimentos, que permitam a realização de uma aprendizagem significativa e dinâmica, valorizando o aspecto criativo e conquistando a atenção. Refletindo formas de cativar esses estudantes.

Uma alternativa é o uso de jogos, como instrumento lúdico nas aulas de matemática do ensino médio, que proporcionam bons resultados tanto na aprendizagem quanto no aspecto motivacional, (PAULO, 2017). Tornando-se um momento de quebra da rotina das aulas e proporcionando maior interação entre os participantes, que desenvolvem a comunicação e argumentação, assim como permite fixar e explorar de forma mais atrativa e "leve" os conceitos e resolver problemas.

Strapason (2011) relata em seu trabalho "O Uso de Jogos como Estratégia de Ensino e Aprendizagem da Matemática no 1º ano do Ensino Médio" os resultados da aplicação de jogos elaborados pela autora que versam sobre Conceito de função, Função Polinomial de 1º grau e Função Polinomial de 2º grau, analisando se essa estratégia de ensino facilitava a aprendizagem destes conteúdos. Concluindo as atividades, ela observou que grande parte dos alunos teve suas dificuldades sanadas em relação ao assunto trabalhado, confirmando que essa prática pedagógica é eficaz e viável em sala de aula.

O uso de situações-problemas também se mostra bastante produtivo e sempre esteve presente na evolução/descobertas da matemática, permitindo explorar e construir novos saberes e conceitos, sendo o caminho percorrido até se chegar à solução procurada fundamental, (MAGARINUS, 2013).

Também a utilização da tecnologia como ferramenta metodológica no ensino de matemática é recomendada nas orientações curriculares para o Ensino Médio, onde destaca o uso da disciplina para entender a tecnologia e desta como ferramenta facilitadora para aprender a matemática, permitindo explorar e construir diferentes conceitos, (BRASIL, 2006). Uma boa opção para o ensino de funções é o uso do software GeoGebra, que possui fácil instalação e manipulação, permitindo, entre outros benefícios, a investigação matemática de características gráficas que proporcionem questionamentos, uma evolução e ampliação de ideias.

Tendo em vista o que foi apresentado até o momento, definiu-se que a presente pesquisa tem por objetivo explorar de forma mais efetiva e ampliar o estudo do tema máximos e mínimos de funções por meio de uma sequência didática para turmas da 1ª série do Ensino Médio. A proposta é constituída por quatro atividades atrativas e dinâmicas que aliam a resolução de situações-problemas com jogos e a utilização do software GeoGebra. Busca-se, com estas atividades, aprofundar e fixar os conceitos envolvidos à cerca do tema, além de ampliá-lo. Para tal, utilizou-se uma investigação de características da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática, servindo como base para generalizar os conceitos para outros tipos de funções e construir uma estratégia que permita ao discente modelar e resolver diversos tipos de situações-problemas, sem o uso de técnicas de derivação ou comandos de software existentes. Para a elaboração das atividades levou-se em consideração uma pesquisa realizada com professores que trabalham com turmas do Ensino Médio em escolas públicas do interior do estado do Rio de Janeiro, os quais apontaram, em sua maioria, que usam ou usariam os Jogos e o GeoGebra como ferramentas metodológicas, além disso pode-se verificar as dificuldades apontadas por esses educadores na sua prática diária, buscando formas de auxiliá-los e definindo objetivos metodológicos de ensino.

Autores como Moraes (2013), Mendes (2015), Marcolino (2016) e Duarte (2014) defendem, em seus trabalhos sobre o tema máximos e mínimos, o ensino e uso de técnicas de derivação para o cálculo de extremos de funções não-quadráticas na Educação Básica. Moraes (2013) e Mendes (2015) propõem o uso do software GeoGebra no reconhecimento e visualização dos máximos e mínimos de uma função, assim como na determinação precisa destes pontos por meio de seu comando "EXTREMO". Algumas diferenças em relação a este trabalho podem ser destacadas:

- Nenhum dos autores utiliza jogos para abordar o tema;
- Neste trabalho, as ferramentas já existentes no software GeoGebra para determinar máximos e mínimos não são utilizadas, mas busca-se a criação de uma estratégia para essa finalidade, com a investigação de características da reta tangente ao gráfico;
- Assim como nos trabalhos citados, é proposto situações-problemas típicas do Cálculo, mas é incluído questionamentos ao longo dessas atividades, buscando extrair o potencial máximo dos estudantes e contribuir na interpretação do problema.

A dissertação é composta por três capítulos. No capítulo 1 apresentam-se os conteúdos matemáticos relacionados ao tema máximos e mínimos e imprescindíveis no desenvolvimento do trabalho, incluindo exemplos, dentre esses questões do ENEM, que atualmente é a principal forma de ingresso no Ensino Superior. Contém também notas históricas.

O capítulo 2 traz os aspectos metodológicos do estudo de campo realizado com professores de matemática que trabalham com turmas da 1ª série do Ensino Médio em escolas estaduais do interior do estado de Rio de Janeiro.

No capítulo 3 investiga-se as práticas adotadas no ensino de matemática na atualidade, utiliza pesquisa por meio de questionário para captar um pouco dessa vivência dos docentes e desafios no processo de ensino e aprendizagem da disciplina, com o objetivo de contribuir com a escolha das metodologias de ensino utilizadas, que em seguida são apresentadas. Também expõe como o tema do trabalho está presente nos livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio e que habilidades e competências são esperadas desses alunos. Além disso, analisa a possibilidade de maior ênfase e ampliação do tema e aspectos importantes considerados no desenvolvimento das atividades.

Já no capítulo 4 é apresentada uma sequência de quatro atividades sugeridas para o 3° Bimestre de turmas da 1ª série do Ensino Médio, visando explorar o conceito de máximos e mínimos de funções, ampliando esse estudo.

Por fim, são expostas as Considerações Finais, Referências Bibliográficas e Apêndices com os materiais necessários para as atividades e os questionários.

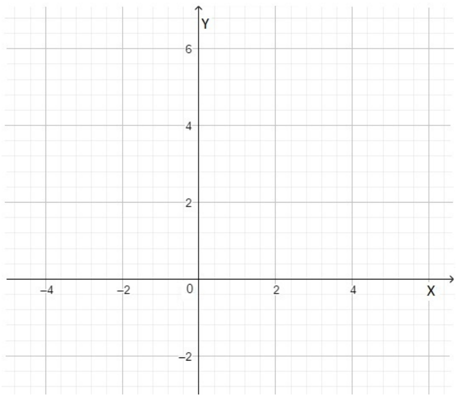
Capítulo 1

REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 O Sistema de Coordenadas Cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas (Figura 1) consiste em dois eixos perpendiculares OX e OY no plano, isto é, baseia-se em duas retas orientadas perpendiculares, onde usualmente OX é horizontal e com direção positiva para a direita e OY é vertical e com direção positiva para cima, além disso, fixa-se um ponto O de interseção chamado origem. Essas retas contam com uma unidade de comprimento fixada, (LIMA et al., 2006b).

Figura 1 – Sistema de Coordenadas Cartesianas

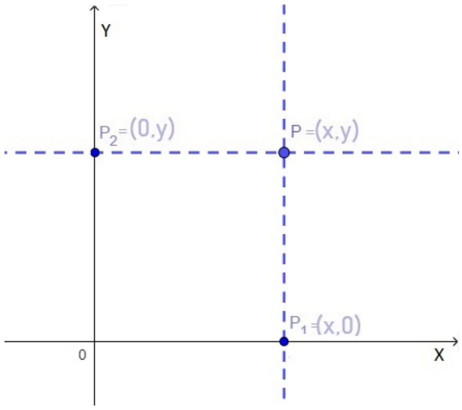


Fonte: Autoria Própria

O eixo horizontal é denominado eixo das abscissas, e as coordenadas de um ponto qualquer P_1 neste eixo é denotada por $(x, 0)$, onde x é a distância de P_1 a origem, $x = d(O, P_1)$, se P_1 está a direita de O, e $x = -d(O, P_1)$, se P_1 está a esquerda de O. Analogamente, o eixo vertical é denominado eixo das ordenadas, e as coordenadas do ponto qualquer P_2 neste eixo é denotada por $(0, y)$, onde y é a distância de P_2 a origem, $y = d(O, P_2)$, se P_2 está acima de O, e $y = -d(O, P_2)$, se P_2 está abaixo de O, (LIMA et al., 2006b).

Tomando um ponto P qualquer, para encontrar as respectivas coordenadas, deve-se traçar perpendiculares por P aos eixos OX e OY, encontrando, respectivamente, os pontos de interseção P_1 e P_2 (Figura 2). A coordenada x de P_1 é denominada abscissa de P e a coordenada y de P_2 é denominada ordenada de P. As coordenadas são representadas por um par ordenado (x, y), logo, pode-se escrever $P = (x, y)$.

Figura 2 – Um ponto genérico P no plano

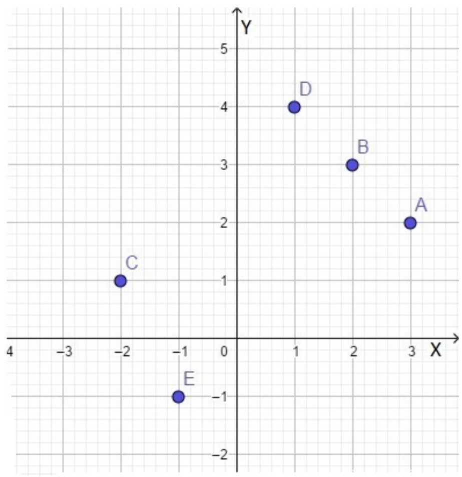


Fonte: Autoria Própria

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é chamado plano cartesiano, plano XY ou plano coordenado.

Exemplo 1.1. *A distribuição dos pontos* $A = (3, 2), B = (2, 3), C = (-2, 1), D = (1, 4)$ *e* $E = (-1, -1)$ *em um plano cartesiano pode ser visualizada na Figura 3:*

Figura 3 – Distribuição de pontos no Plano Cartesiano



Fonte: Autoria Própria

1.2 Função, Domínio, Contradomínio e Imagem

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre

> grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática, (BRASIL, 2002, p. 121).

Definição 1.1. *Se A e B são dois conjuntos não-vazios, uma função f de A em B, escrita $f : A \to B$, é uma associação, que a cada elemento x do conjunto A faz corresponder exatamente um elemento do conjunto B, designado por $f(x)$ e chamado a imagem de x. O conjunto A é chamado o domínio da função f e o conjunto B é chamado o contradomínio, (DELGADO; VILLELA, 2013).*

Definição 1.2. *A imagem de uma função f é o conjunto $f(A) = \{f(a)|a \in A\}$, (DELGADO; VILLELA, 2013).*

Definição 1.3. *Segundo Delgado e Villela (2013, p. 86), "Uma função real de variável real é uma função, tal que o seu domínio e o seu contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$."*

Essa associação se torna ainda mais interessante quando expressa por meio de uma fórmula (modelo, regra, ou lei).

Exemplo 1.2. *O percurso de um ciclista, que desenvolve velocidade constante, é acompanhado conforme Tabela 1:*

Tabela 1 – Tempo X Distância

Tempo (min)	Distância (m)
0	0
1	500
2	1000
3	1500
4	2000
...	...

Fonte: Autoria Própria

A cada tempo x corresponde uma única distância y, por isso, a distância é função do tempo. A lei que relaciona y com x é: $y = 500x$.

Exemplo 1.3. *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{-4x+2}{5}$, o valor de $f(-2)$ é $\frac{-4(-2)+2}{5} = \frac{10}{5} = 2$. Isto é, ao elemento $-2 \in \mathbb{R}$ faz corresponder exatamente um elemento, $2 \in \mathbb{R}$, designado por $f(-2)$ e chamado a imagem de -2. Gerando o par ordenado $(-2, 2)$ no plano XY.*

No caso em que não estiver definido o domínio e o contradomínio, admiti-se que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e que o domínio é $\mathbb{R}$ excluídos os valores x para os quais não faz sentido a regra que relaciona x a y.

Exemplo 1.4. *O Domínio da função f, onde:*

- $f(x) = 7x + 3$ *é* $\mathbb{R}$*, pois, qualquer que seja o valor real atribuído a* x*, o número* $7x + 3$ *também é real;*
- $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ *é* $\mathbb{R} - \{3\}$*, pois, para todo* x *real diferente de* 3*, o número* $\frac{x-5}{x-3}$ *é real;*
- $f(x) = \sqrt{x-4}$ *é* $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\}$*, pois só é um número real se* $x - 4 \geq 0$*;*
- $f(x) = \frac{2}{x-6} + \sqrt{x+1}$ *é* $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1 \text{ e } x \neq 6\}$*.*

1.3 Gráfico de uma Função

> A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas, (BRASIL, 2002, p. 121).

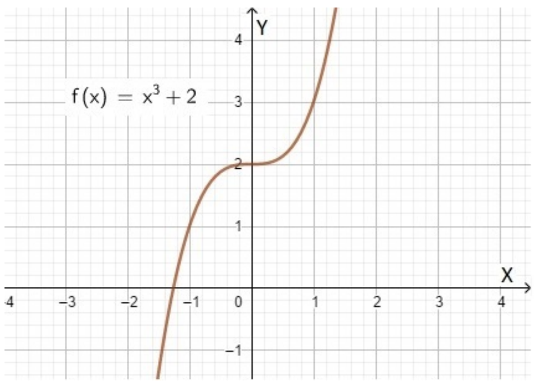
Definição 1.4. *De acordo com Munem e Foulis (2008, p. 21), "o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos $(x; y)$ no plano XY tal que x pertence ao domínio de f e y a imagem de f, e $y = f(x)$".*

Definição 1.5. *De modo intuitivo, uma função f é contínua quando seu gráfico pode ser traçado sem tirar o lápis do papel.*

Observação 1.1. *A continuidade de uma função é definida formalmente usando o conceito de limite, que não é abordado neste trabalho.*

Exemplo 1.5. *O gráfico da função contínua $f(x) = x^3 + 2$ pode ser observado na Figura 4:*

Figura 4 – Gráfico da função $f(x) = x^3 + 2$

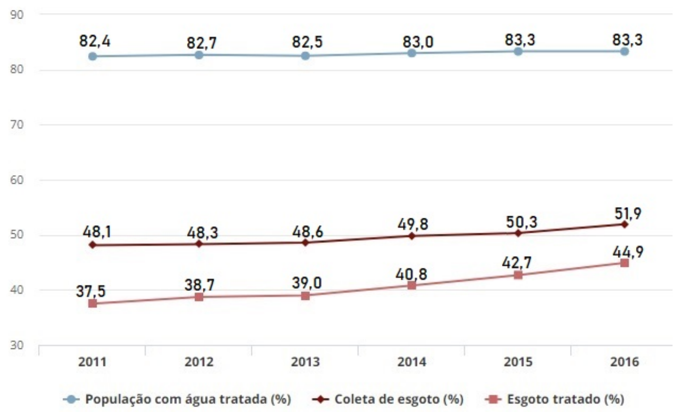


Fonte: Autoria Própria

A representação gráfica de uma função contribui para a organização e análise da situação apresentada e está presente com grande frequência no cotidiano, em jornais, revistas, internet, entre outros meios.

Exemplo 1.6. *O gráfico da Figura 5 ilustra a relação entre as grandezas: taxa da população com água tratada, taxa de coleta de esgoto, taxa de esgoto tratada e o tempo (considerando-se o período de 2011 a 2016). Cada relação define uma função: a cada ano está associada uma única taxa.*

Figura 5 – Saneamento básico



Fonte: Site G1 - (VELASCO, 2018)

- *Observa-se que o saneamento tem avançado lentamente no país, mas os números continuam preocupantes já que* $44,9\%$ *do esgoto gerado no Brasil em 2016 passa por tratamento,* $55,1\%$ *continuam sem o devido cuidado.*
- *Em 2016, 83,3*$\%$ *da população era abastecida com água potável e em 2011, o índice de atendimento era de 82,4*$\%$*, apresentando uma evolução de 0,9 ponto percentual.*
- *De 2015 a 2016 o abastecimento com água tratada se manteve constante.*
- *O período de 2015 a 2016 houve um crescimento mais rápido no tratamento de esgoto, 2,2 ponto percentual, em relação aos demais períodos.*
- *Em 2013 houve uma queda, decrescimento, em relação ao ano de 2012, no abastecimento de água.*

1.4 Zeros de uma Função

Definição 1.6. *O número real* x*, que pertence ao domínio da função, é chamado zero da função* f *quando* $f(x) = 0$*, isto é, é a abscissa do ponto de interseção do gráfico com o eixo* OX*, (BARROSO, 2010).*

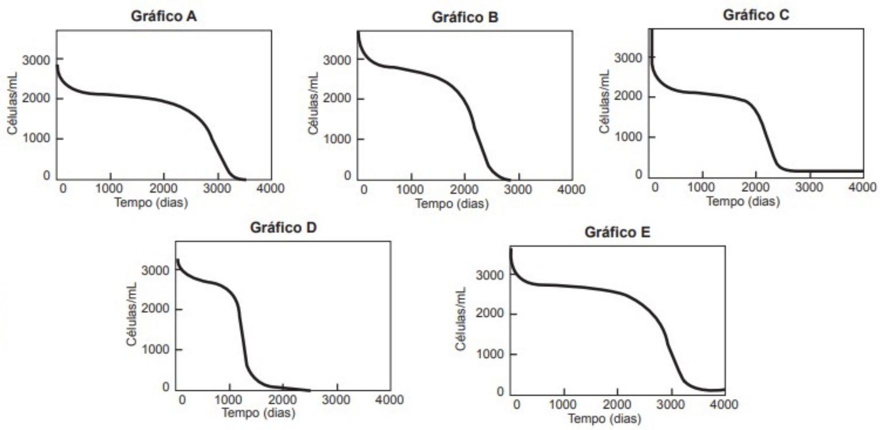
Exemplo 1.7. *A função:*

- $f(x) = 3x - 9$ *possui* $x = 3$ *como zero, pois:* $f(3) = 3(3) - 9 = 9 - 9 = 0$*;*

- $h(x) = \sqrt{x-4}$ *possui* $x = 4$ *como zero, pois:* $h(4) = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$*;*
- $m(x) = \frac{1}{x}$ *não possui zero, pois não existe valor de* x *que anule* $m(x)$*;*
- $g(x) = x^2 - 4$ *possui zeros* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = -2$.

Exemplo 1.8. ***(Questão 180 adaptada - 2ª Aplicação - 2° dia - caderno 6 – cinza -Enem 2014)*** *O modelo matemático desenvolvido por Kirschner e Webb descreve a dinâmica da interação das células não infectadas do sistema imunológico humano com os vírus HIV. Os gráficos (Figura 6) mostram a evolução no tempo da quantidade de células não infectadas no sistema imunológico de cinco diferentes pacientes infectados pelo vírus HIV. Quando a população das células não infectadas de um sistema imunológico é extinta (isto é, quando para um tempo* x_1 *a quantidade de células não infectadas* $f(x_1)$ *for nula (*$f(x_1) = 0$*,* x_1 *for zero da função)), o paciente infectado fica mais suscetível à morte, caso contraia alguma outra doença.*

Figura 6 – Figura da questão 180 - Prova Cinza do Enem 2014



Fonte: Site INEP - (INEP, 2014)

A partir desses dados, o sistema imunológico do paciente infectado que ficou mais rapidamente suscetível à morte (apresenta menor valor para x_1*) está representado pelo Gráfico D.*

1.5 Intervalos de Crescimentos e de Decrescimento

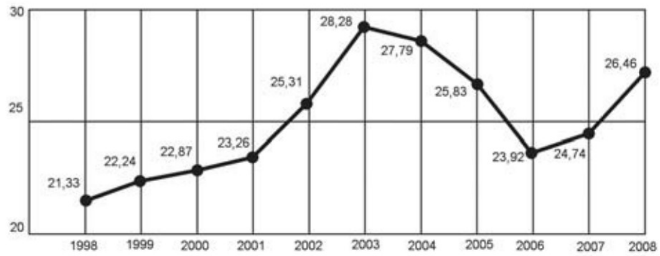
Definição 1.7. *De acordo com Figueiredo, Olivero e Ortegoza (2014, p. 23), "Uma função é crescente (não-decrescente) em um intervalo* $I = (a, b)$ *quando, se* $x_1 < x_2$*, então* $f(x_1) < f(x_2)$ *(respectivamente,* $f(x_1) \leq f(x_2)$*). Analogamente, uma função é chamada decrescente (não-crescente) e um intervalo* $I = (a, b)$*, quando, se* $x_1 < x_2$*, então* $f(x_1) > f(x_2)$ *(respectivamente,* $f(x_1) \geq f(x_2)$*)".*

Uma função pode ser crescente em alguns intervalos do seu domínio e decrescente em outros.

Exemplo 1.9. ***(Questão 176 - 2° dia - caderno 5 – amarelo -Enem 2011)*** *O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.*

O gráfico da Figura 7 mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro.

Figura 7 – Figura da questão 176 - Prova Amarela do Enem 2011



Fonte: Site INEP - (INEP, 2011)

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de 2003 e 2006; isto é, intervalo de decrescimento.

1.6 Função Afim

Definição 1.8. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, denomina-se função afim, (GUIDORIZZI, 2008).*

Em particular, se $b = 0$, a função $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, é chamada função linear. E, se $a = 0$, a função $f(x) = b$ é chamada função constante.

Exemplo 1.10. *São funções afins:*

- $f(x) = 3x + 4$, *onde* $a = 3$, $b = 4$;
- $g(x) = 3x$, *onde* $a = 3$, $b = 0$;
- $h(x) = \frac{3}{4}x - 2$, *onde* $a = \frac{3}{4}$, $b = -2$;
- $m(x) = -5x + 10$, *onde* $a = -5$, $b = 10$.

1.6.1 Taxa Média de Variação e Gráfico de uma Função Afim

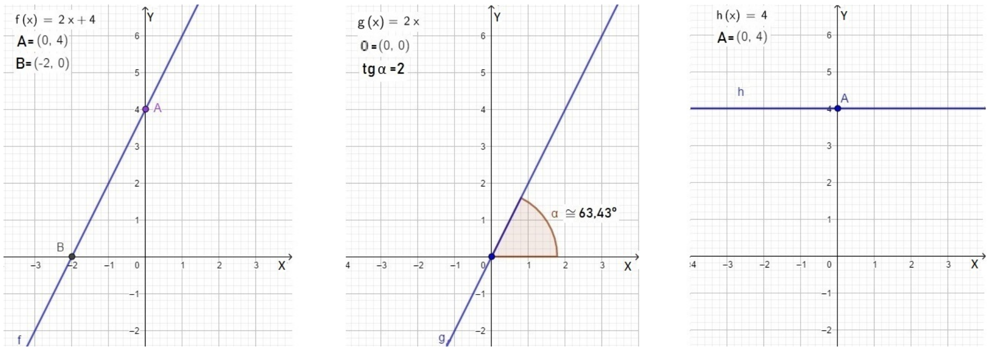
Definição 1.9. *De acordo com Munem e Foulis (2008), a Taxa Média de Variação m de $y = f(x)$ em relação a x quando x varia de x_1 a x_2 é:*

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1.1}$$

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta que passa pelo ponto $(0, b)$ e é paralela à reta $y = ax$. E o gráfico da função $f(x) = b$ é uma reta paralela ao eixo OX.

Exemplo 1.11. *Os gráficos das funções $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = 2x$ e $h(x) = 4$ podem ser visualizados, respectivamente, na Figura 8:*

Figura 8 – Gráfico das funções $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = 2x$ e $h(x) = 4$



Fonte: Autoria Própria

Na função afim $f(x) = ax + b$, a constante a é denominada coeficiente angular e determina a inclinação da reta representativa da função, $a = tg\alpha$. Além disso, ela pode ser interpretada como a taxa de variação da função, que nesse caso é constante para qualquer intervalo do domínio. Logo, para acréscimos iguais na variável x correspondem acréscimos iguais na variável $f(x)$.

Conclui-se que as funções afins são aquelas que possuem taxa constante de crescimento ou decrescimento, o que não ocorre para funções não-lineares onde a taxa de variação ("quão rápido" cresce ou decresce) varia.

Para encontrar a lei de formação de uma função afim, $f(x) = ax + b$, conhecendo dois pontos, $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, do gráfico, isto é, sendo x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$, valores do domínio de f, com respectivas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$, procede-se da seguinte forma:

- Sabe-se que a taxa de variação da função é

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1.2}$$

- Além disso, descoberto o valor para a constante a, facilmente encontra-se o valor de b, substituindo a na equação $f(x_1) = ax_1 + b$ ou $f(x_2) = ax_2 + b$.

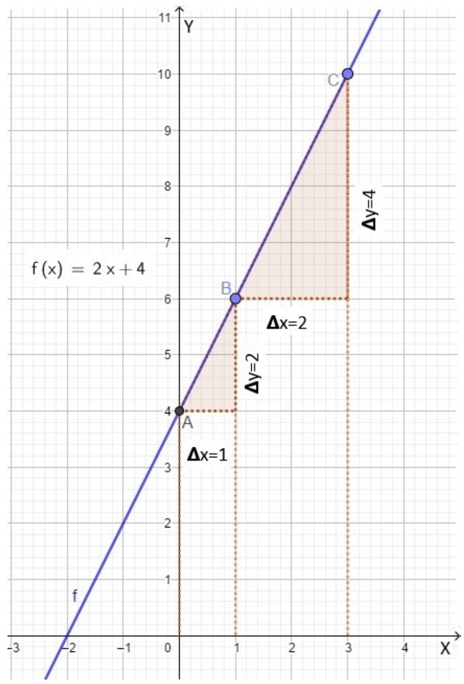
Exemplo 1.12. *Dada a função $f(x) = 2x + 4$, verifica-se por meio da Tabela 2 e da Figura 9 que a taxa de variação dessa função é 2. Concluindo também que ela é uma função crescente, já que, sendo $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, ocasionando um valor para sua taxa de variação ($a = 2$) positiva (pois Δ_x e Δ_y serão valores positivos).*

Tabela 2 – Taxa de variação da função $f(x) = 2x + 4$

x_1	x_2	$\Delta_x = x_2 - x_1$	y_1	y_2	$\Delta_y = y_2 - y_1$	$\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$
-5	-1	4	-6	2	8	2
0	1	1	4	6	2	2
1	2	1	6	8	2	2
1	3	2	6	10	4	2
2	5	3	8	14	6	2
3	8	5	10	20	10	2

Fonte: Autoria Própria

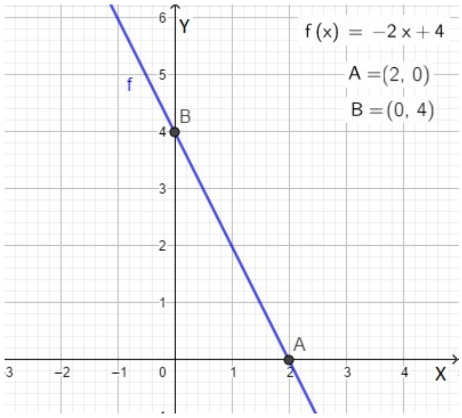
Figura 9 – Análise da taxa de variação da função $f(x) = 2x + 4$



Fonte: Autoria Própria

Exemplo 1.13. *Dada a função $f(x) = -2x+4$, verifica-se que ela é uma função decrescente, pois, sendo $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, ocasionando um valor para sua taxa de variação ($a = -2$) negativo (Δ_x será um valor positivo e Δ_y será um valor negativo), veja Figura 10.*

Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = -2x + 4$

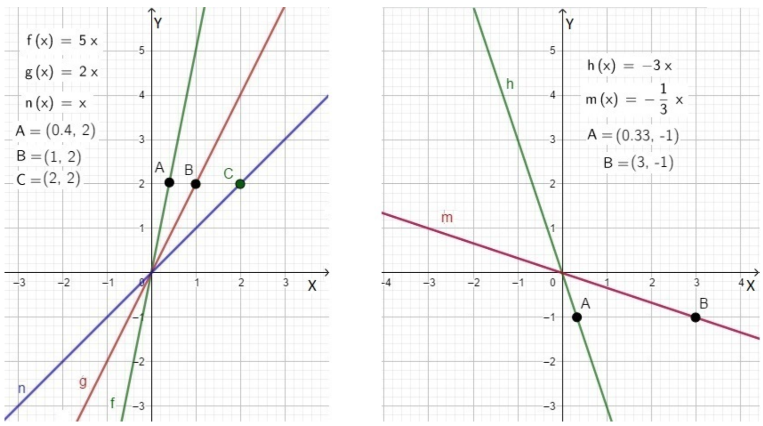


Fonte: Autoria Própria

Observou-se que taxas de variação positivas indicam crescimento da função e taxas de variação negativas indicam decrescimento da função. Resta atentar ao fato de que o valor absoluto dessa taxa indica um crescimento ou decrescimento mais acelerado do gráfico, veja o exemplo a seguir:

Exemplo 1.14. *A função $f(x) = 5x$ apresenta um crescimento mais acelerado do que a função $g(x) = 2x$, que por sua vez, apresenta um crescimento mais acelerado que a função $n(x) = x$ e a função $h(x) = -3x$ apresenta um decrescimento mais acelerado do que a função $m(x) = -\frac{1}{3}x$, veja Figura 11.*

Figura 11 – Crescimento e decrescimento de funções afins



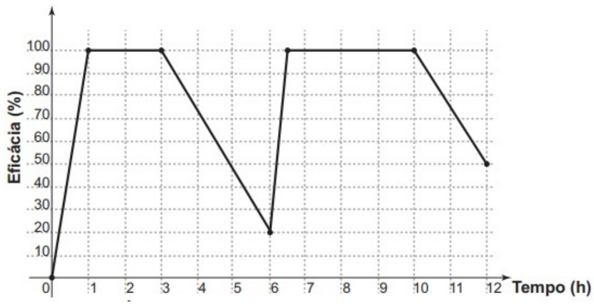
Fonte: Autoria Própria

Exemplo 1.15. ***(Questão 168 - 2ª aplicação - 2° dia - caderno 5 – amarelo -Enem 2016)*** *Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia*

(100%)*, e permaneceu em máxima eficácia durante 2 h. Após essas 2 h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo* 20% *de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em* 100% *por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento* 50% *de eficácia.*

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, o gráfico da Figura 12 representa tal estudo.

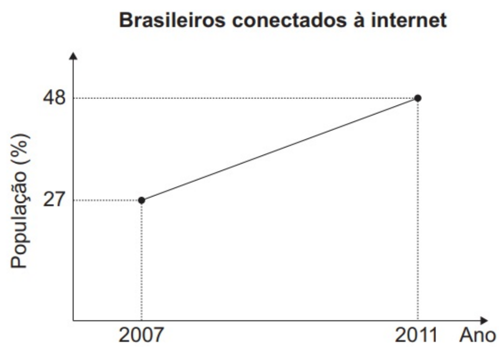
Figura 12 – Figura da questão 168 - Prova Amarela do Enem 2016



Fonte:Site INEP - (INEP, 2016a)

Exemplo 1.16. ***(Questão 160 adaptada - 3ª aplicação - 2° dia - caderno 13 – cinza -Enem 2016)*** *O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico da Figura 13.*

Figura 13 – Figura da questão 160 - Prova Cinza do Enem 2016



Fonte:Site INEP - (INEP, 2016b)

Supondo que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011, tem-se que a mesma função, $f(x) = ax + b$*, continua relacionando as grandezas, e observando que* $(2007, 27)$ *e* $(2011, 48)$ *são dois pontos do* *gráfico, temos que* $a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{48-27}{2011-2007} = \frac{21}{4} = 5,25$. *Assim,* $f(x) = 5,25x + b$ *e* $27 = 5,25(2007) + b$, *logo:* $b = -10509,75$.

Portanto, a estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2018 é igual a: $f(2018) = 5,25(2018) - 10509,75 = 84,75\%$

1.7 Função Quadrática

Definição 1.10. *De acordo com Lima et al. (2006a, p. 114), "Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se quadrática quando existem números reais* a, b *e* c, *com* $a \neq 0$, *tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$."

Exemplo 1.17. *São funções quadráticas:*

- $f(x) = 3x^2 + 2x + 8$, *onde* $a = 3$, $b = 2$ *e* $c = 8$;
- $g(x) = 0,5x^2 - 0,25x + 3,2$, *onde* $a = 0,5$, $b = -0,25$ *e* $c = 3,2$;
- $h(x) = x^2 - 4$, *onde* $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = -4$;
- $m(x) = 2x^2 + 5x$, *onde* $a = 2$, $b = 5$ *e* $c = 0$.

Exemplo 1.18. *Seja a função quadrática* $f(x) = x^2 - 2x + 4$, *o valor de* $f(-2)$ *é* $(-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$. *Gerando o par ordenado* $(-2, 12)$ *no plano* XY.

1.7.1 Função Quadrática e a Fórmula de Resolução da Equação do Segundo Grau

A Fórmula de Resolução da Equação do Segundo Grau, isto é, equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$ é uma importante ferramenta matemática. Pode-se deduzi-la através do método de completar quadrados:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.3}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

(1.4)

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned} \tag{1.5}$$

E, fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, tem-se que a Fórmula de Resolução da Equação do Segundo Grau pode ser reescrita da forma: $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Sabe-se que $\sqrt{\Delta}$ é um número real quando $\Delta \geq 0$, concluindo que a equação não possui solução real para $\Delta < 0$. Para $\Delta = 0$, teremos duas soluções reais e iguais a $\frac{-b}{2a}$ e, para $\Delta > 0$, teremos duas soluções reais e distintas.

A seção 1.4 apresentou o conceito de zero de uma função, que é o número real x tal que $f(x) = 0$. Fazendo $f(x) = 0$ na lei de formação da função quadrática depara-se com uma equação do segundo grau que facilmente poderá ser resolvida por meio da ferramenta acima, encontrando os valores para as raízes.

Exemplo 1.19. *A função:*

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ *não possui raízes reais, pois* $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.2.4 = -23$, *portanto, seu gráfico não corta o eixo das abscissas;*
- $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$ *possui raízes reais e iguais a* $\frac{-(-4)}{2.4} = \frac{1}{2}$, *pois* $\Delta = (-4)^2 - 4.4.1 = 0$, *portanto, seu gráfico corta o eixo das abscissas em um único ponto,* $B = (\frac{1}{2}, 0)$*;*
- $h(x) = x^2 - 5x + 6$ *possui raízes reais e distintas,* $x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1} = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$ *e* $x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1} = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$, *portanto, seu gráfico corta o eixo das abscissas em dois pontos,* $C = (2, 0)$ *e* $B = (3, 0)$.

Além disso, conhecendo-se o valor de uma imagem $f(x_1) = k$ da função $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, pode-se encontrar os respectivos valores possíveis para x_1 resolvendo a equação $a_1x_1^2 + b_1x_1 + (c_1 - k) = 0$, tomando $a = a_1$, $b = b_1$ e $c = c_1 - k$ na Fórmula de Resolução da Equação do Segundo Grau.

Exemplo 1.20. ***(Questão 147 - 2ª aplicação - 2° dia - caderno 5 – amarelo -Enem 2016)*** *Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número* f *de infectados é dado pela função* $f(t) = -2t^2 + 120t$ *(em que* t *é expresso em dia e* $t = 0$ *é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.*

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

Portanto, $f(t_1) = 1600$*, para algum dia* t_1*, e pode-se escrever:* $-2t_1^2 + 120t_1 - 1600 = 0$*. E* $t_1 = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4(-2)(-1600)}}{2(-2)} = \frac{-120 \pm \sqrt{1600}}{-4} = \frac{-120 \pm 40}{-4}$*. Concluindo que os possíveis valores para* t_1 *são 20 ou 40 dias, portanto a segunda dedetização começou no 20° dia.*

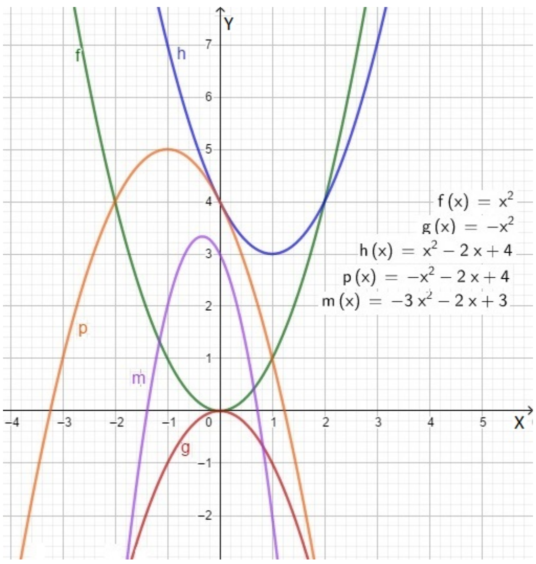
1.7.2 Gráfico de uma Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola. Ela pode ter concavidade (abertura) voltada para cima ou para baixo, dependendo do sinal do coeficiente a na lei de formação da função. Se $a > 0$, a parábola tem concavidade para cima e, se $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo.

Ele sempre corta o eixo das ordenadas no ponto $A = (0, c)$. Basta observar que $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$.

Exemplo 1.21. *Os gráficos das funções* $f(x) = x^2$*,* $g(x) = -x^2$*,* $h(x) = x^2 - 2x + 4$*,* $p(x) = -x^2 - 2x + 4$ *e* $m(x) = -3x^2 - 2x + 3$ *podem ser visualizados na Figura 14.*

Figura 14 – Gráfico de funções quadráticas

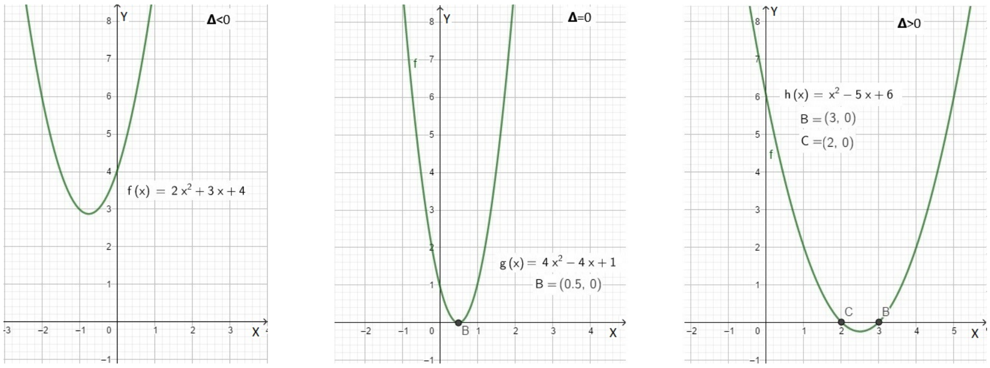


Fonte: Autoria Própria

O Exemplo 1.19 apresentou três funções que cortavam o eixo das abscissas em nenhum, um ou dois pontos, de acordo com o sinal de Δ, relembre.

Exemplo 1.22. *Os gráficos das funções* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$*,* $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$ *e* $h(x) = x^2 - 5x + 6$ *podem ser visualizados, respectivamente, na Figura 15:*

Figura 15 – Raízes de funções quadráticas

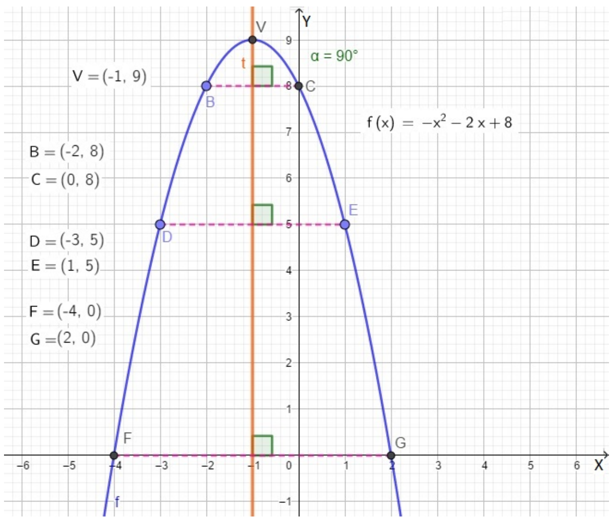


Fonte: Autoria Própria

Outra importante característica da parábola é a existência de uma reta t perpendicular ao eixo das abscissas que divide a parábola em duas partes simétricas, tal reta é denominada eixo de simetria. Logo, dois pontos de ordenadas iguais estão a uma mesma distância dessa reta.

A interseção do eixo de simetria com o gráfico da função é chamado de Vértice, veja Figura 16.

Figura 16 – Eixo de Simetria e Vértice da Parábola



Fonte: Autoria Própria

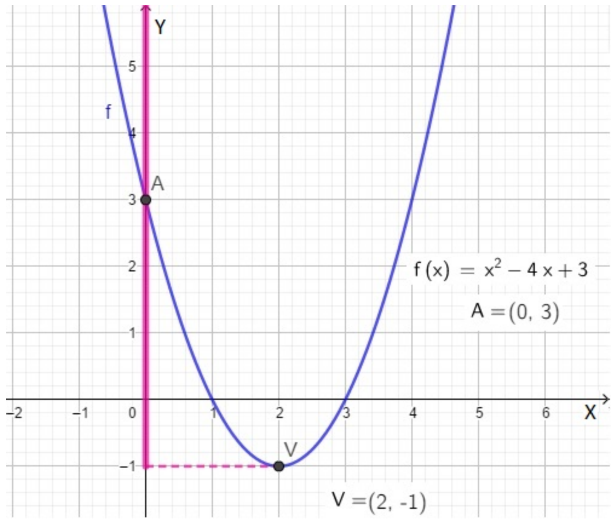
Como os zeros, $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, de uma função que corta o eixo das abscissas em dois pontos, estão a uma mesma distância do eixo de simetria da parábola, temos que $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$ é a abscissa do ponto V, vértice da parábola.

Isto é, $x_v = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}$.

Portanto, $y_v = ax_v{}^2+bx_v+c = a(\frac{-b}{2a})^2 + b(\frac{-b}{2a}) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2} = \frac{a(b^2-2b^2+4ac)}{4a^2} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$

Exemplo 1.23. *A representação visual da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, já que $a > 0$, corta o eixo das ordenadas em $A = (0, 3)$ e tem vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}) = (\frac{-(-4)}{2.1}, \frac{-((-4)^2-4.1.3)}{4.1}) = (2, -1)$, veja Figura 17.*

Figura 17 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Autoria Própria

Observando a Figura 17, conclui-se também que a imagem da função é o conjunto $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -1\}$

1.7.3 Taxa Média de Variação em uma Função Quadrática

Como visto na subseção 1.6.1, a taxa média de variação de uma função num intervalo de x_1 a x_2 é dada por:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1.6}$$

E as funções afins são aquelas que apresentam taxa de variação constante. Já em uma função quadrática, essa taxa varia.

Além disso, nos intervalos de crescimento de uma função essa taxa é positiva e nos intervalos de decrescimentos é negativa, podendo ter um crescimento mais acelerado, ou menos, dependendo do valor absoluto dessa taxa.

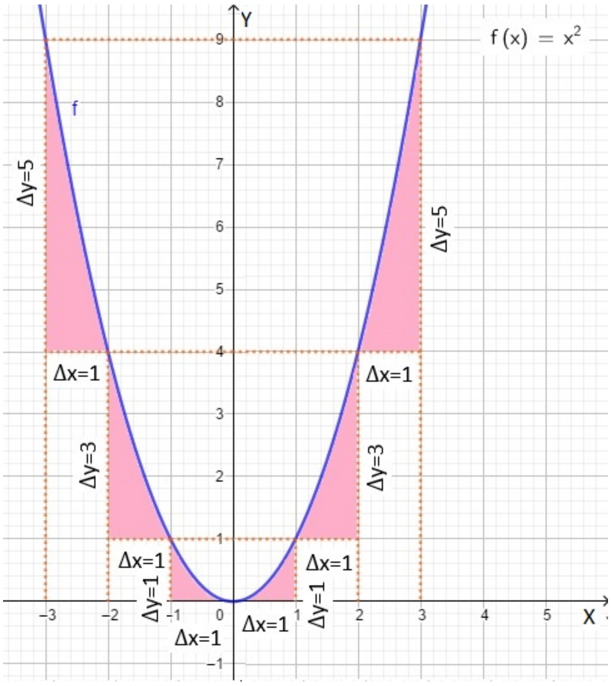
Exemplo 1.24. *Verifica-se por meio da Tabela 3 e da Figura 18 que a função quadrática $f(x) = x^2$ apresenta: no intervalo de $x_1 = -3$ a $x_2 = -2$, $m = 5$; no intervalo de $x_1 = -2$ a $x_2 = -1$, $m = -3$; no intervalo de $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$, $m = -1$; no intervalo de $x_1 = 0$ a $x_1 = 1$, $m = 1$; no intervalo de $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$, $m = 3$; no intervalo de $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$, $m = 5$.*

Tabela 3 – Taxa média de variação da função $f(x) = x^2$

x_1	x_2	$\Delta_x = x_2 - x_1$	y_1	y_2	$\Delta_y = y_2 - y_1$	$\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$
-3	-2	1	9	4	-5	-5
-2	-1	1	4	1	-3	-3
-1	0	1	1	0	-1	-1
0	1	1	0	1	1	1
1	2	1	1	4	3	3
2	3	1	4	9	5	5

Fonte: Autoria Própria

Figura 18 – Taxa média de variação em intervalos da função $f(x) = x^2$

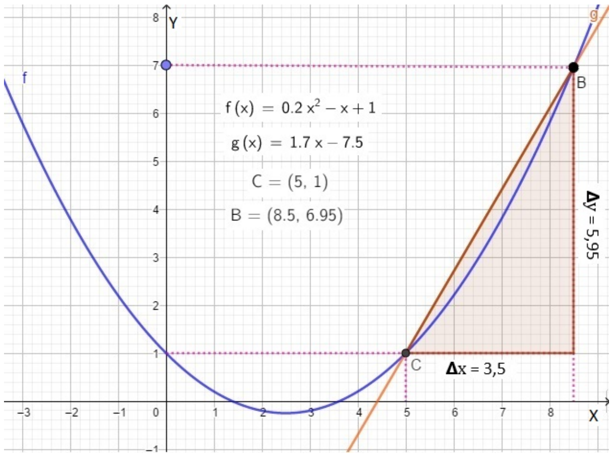


Fonte: Autoria Própria

A taxa média de variação em uma função não-linear em um intervalo de x_1 a x_2 coincide com a taxa de variação da função afim que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, isto é, é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico nesses pontos.

Exemplo 1.25. *As funções $f(x) = 0,2x^2 - x + 1$ e $g(x) = 1,7x - 7,5$ possuem taxa de variação média igual no intervalo de $x_1 = 5$ a $x_2 = 8,5$. Veja Figura 19.*

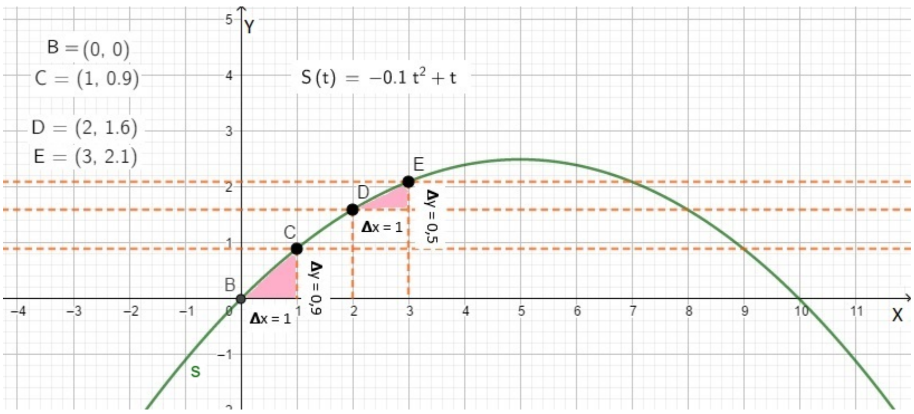
Figura 19 – Taxa média de variação: Função Quadrática X Função Afim



Fonte: Autoria Própria

Exemplo 1.26. *Num ambiente controlado, um objeto é lançado do solo para cima. Sua altura, em metros, do solo é função do tempo, em segundos. A lei que relaciona as grandezas é dada por $S(t) = -0,1t^2 + t$. A variação média da posição com relação ao tempo é o que chamamos de velocidade média. Observa-se, portanto, que a velocidade média de 0 a 1 segundo é 0,9m/s, e de 2 a 3 segundos é 0,5m/s. Veja a Figura 20.*

Figura 20 – Velocidade Média



Fonte: Autoria Própria

1.8 Valor Máximo e Valor Mínimo de uma Função

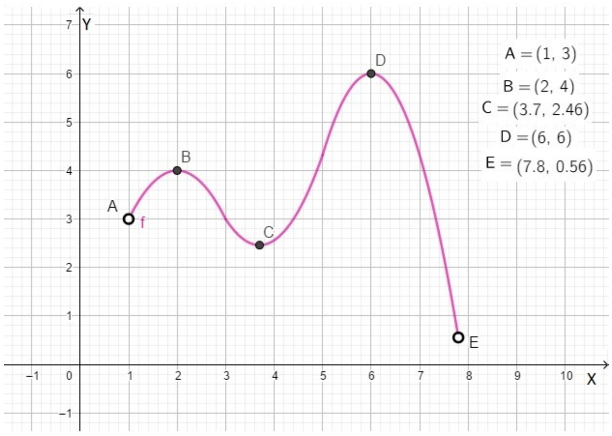
Definição 1.11. *Seja I um intervalo, uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ possui um máximo local $f(c)$ (respectivamente, mínimo local $f(c)$) em um ponto $(c, f(c))$ se existe um intervalo aberto J, onde $J \subset I$ e contém c, tal que $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) seja verdadeira para todo x em J, (MUNEM; FOULIS, 2008).*

Exemplo 1.27. *Seja I um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde $I = (1; 7, 8)$, com gráfico representado na Figura 21. Tem-se que f possui máximo local, 4, em $B = (2, 4)$, pois $2 \in J = (1, 5; 2, 5), J \subset I$ e $f(2) = 4 \geq f(x)$ para todo $x \in J$ e máximo local em $D = (6, 6)$, pois $6 \in J = (5, 5; 6, 5), J \subset I$ e $f(6) = 6 \geq f(x)$ para todo $x \in J$ e mínimo local em $C = (3, 7; 2, 46)$, pois $3, 7 \in J = (3; 4, 4), J \subset I$ e $f(3, 7) = 2, 46 \geq f(x)$ para todo $x \in J$.*

Definição 1.12. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja c um valor do intervalo I. Se $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) vale para todos os valores de x em I, então a função f possui valor máximo absoluto $f(c)$ (respectivamente, valor mínimo absoluto $f(c)$) no ponto $(c, f(c))$, (MUNEM; FOULIS, 2008).*

Exemplo 1.28. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde $I = (1; 7, 8)$, com gráfico representado na Figura 21. Tem-se que f possui máximo absoluto 6, em $D = (6, 6)$, pois $6 \in I$ e $f(6) = 6 \geq f(x)$ para todo $x \in I$.*

Figura 21 – Máximo e mínimo: Relativo X Absoluto



Fonte: Autoria Própria

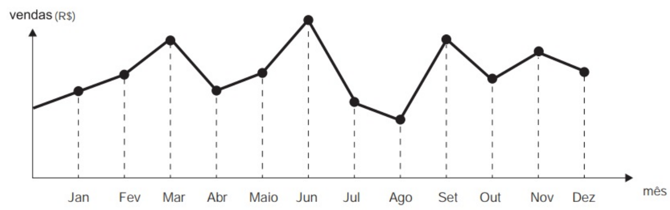
Os máximos e mínimos absolutos serão chamados apenas de máximos e mínimos, sendo a forma que costumam ser apresentados nos livros didáticos do Ensino Médio, onde a Definição 1.11 não é tratada.

Exemplo 1.29. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, do exemplo 1.28, onde $I = [1; 7, 8]$. Nesse caso, temos máximo em $D = (6, 6)$ e mínimo em $E = (7, 8; 0, 56)$.*

Exemplo 1.30. ***(Questão 140 - 2° dia - caderno 5 – amarelo -Enem 2012)** O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico da Figura 22, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.*

De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram junho e agosto.

Figura 22 – Figura da questão 140 - Prova Amarela do Enem 2012



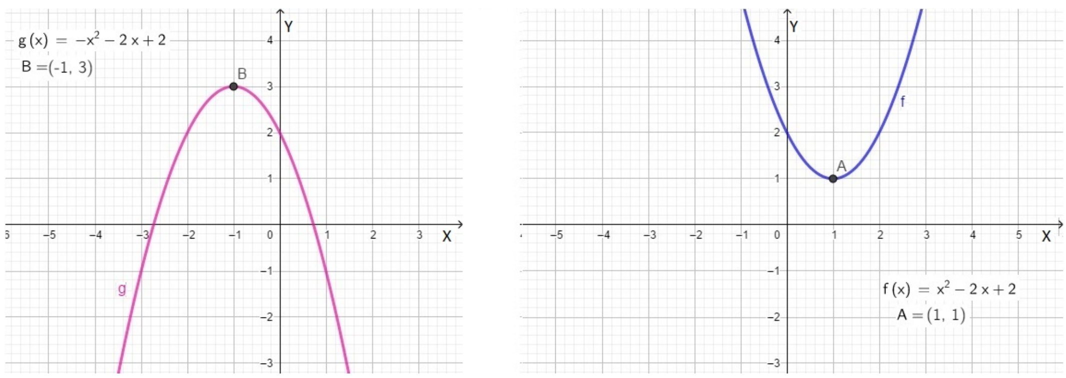
Fonte: Site INEP - (INEP, 2012)

Na subseção 1.7.2 viu-se que o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, quando $a > 0$, ou concavidade voltada para baixo, quando $a < 0$, e possui um ponto muito especial, chamado vértice, que pertence ao seu eixo de simetria.

Segundo as definições apresentadas, pode-se perceber que no seu vértice o gráfico da função apresenta valor máximo, se $a > 0$, ou valor mínimo, se $a < 0$.

Exemplo 1.31. *A função $g(x) = -x^2 - 2x + 2$ possui máximo, 3, em $B = (-1, 3)$ e a função $f(x) = x^2 - 2x + 2$ possui mínimo, 1, em $A = (1, 1)$, isto é, nos vértices das parábolas. Veja Figura 23.*

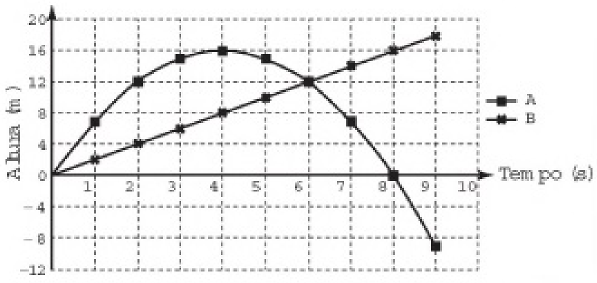
Figura 23 – Vértice da parábola X Máximo ou Mínimo



Fonte: Autoria Própria

Exemplo 1.32. ***(Questão 136 - 2° dia - caderno 5 – amarelo -Enem 2016)*** *Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico da figura Figura 24 mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.*

Figura 24 – Figura da questão 136 - Prova Amarela do Enem 2016



Fonte:Site INEP - (INEP, 2016c)

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

A altura alcançada pelo projétil A em função do tempo é uma função quadrática e seu máximo ocorre no vértice da parábola representativa da função, isto é, em $V = (4, 16)$.

A altura alcançada pelo projétil B em função do tempo é uma função afim. Seu gráfico passa pelos pontos $A = (0, 0)$ *e* $B = (6, 12)$*, isto é, sua representação gráfica é uma reta com coeficiente angular* $a_1 = \frac{12-0}{6-0} = 2$.

Logo, a nova trajetória do projétil B deve ser uma função afim onde seu gráfico é uma reta que passa por $A = (0, 0)$ *e* $V = (4, 16)$ *e com coeficiente angular* $a_2 = \frac{16-0}{4-0} = 4$

Conclui-se então que para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá aumentar em 2 unidades.

1.8.1 Taxa de Variação Instantânea

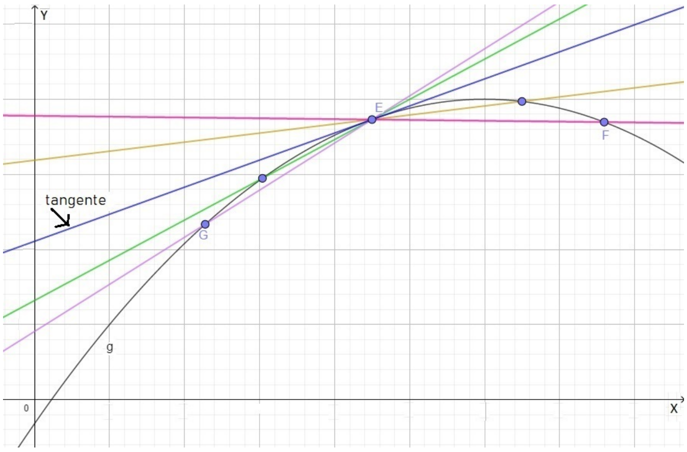
No Exemplo 1.26 viu-se que a taxa de variação média da posição em relação ao tempo num intervalo de t_1 a t_2 é a velocidade média. E encontrou, naquela situação específica ($s(t) = -0,1t^2 + t$), que no intervalo de $t_1 = 2$ a $t_2 = 3$ segundos, a velocidade média era 0,5m/s.

Isto não significa que o objeto manteve exatamente essa velocidade durante todo esse intervalo de tempo e nessa seção procura-se encontrar a velocidade exata num tempo t_i desse intervalo.

A essa taxa de variação em um ponto $E = (t_i, s(t_i))$, chama-se de taxa de variação instantânea. Ela é interpretada como o coeficiente da reta tangente ao gráfico no ponto E e possui as mesmas características relacionadas ao crescimento e decrescimento da função que as apresentadas para a taxa média de variação.

A reta tangente ao gráfico de uma função num ponto E é encontrada escolhendo no gráfico da função g um ponto F à direita e um ponto G à esquerda do ponto E, de forma que ao traçar as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{EG}$ e movimentar os pontos F e G em direção a E, isto é, percorrendo o gráfico da função de forma que se aproxime de E, tem-se que as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{EG}$ se aproximam de uma mesma posição final, que chama-se de reta tangente. Veja Figura 25. Sendo essa uma reta não-vertical, já que $F \neq E \neq G$.

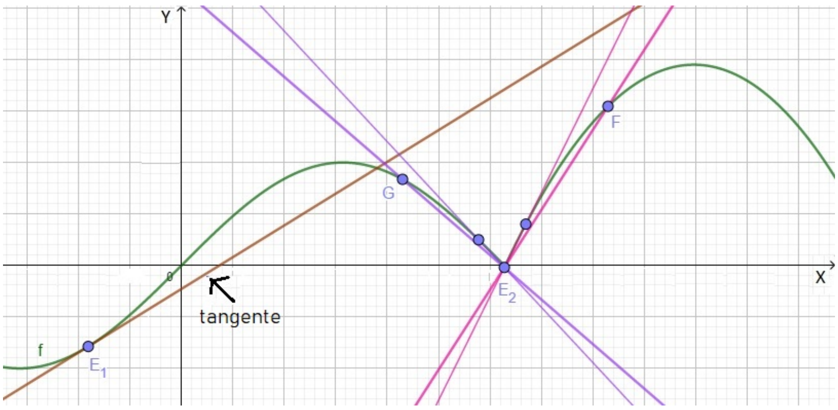
Figura 25 – Reta tangente ao gráfico de uma função g no ponto E



Fonte: Autoria Própria

É possível que a reta tangente não exista, caso em que as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{EG}$ não se aproximam de uma mesma posição final, e, diferentemente do que acontece na circunferência, ela pode interceptar o gráfico da função em mais de um ponto, veja Figura 26.

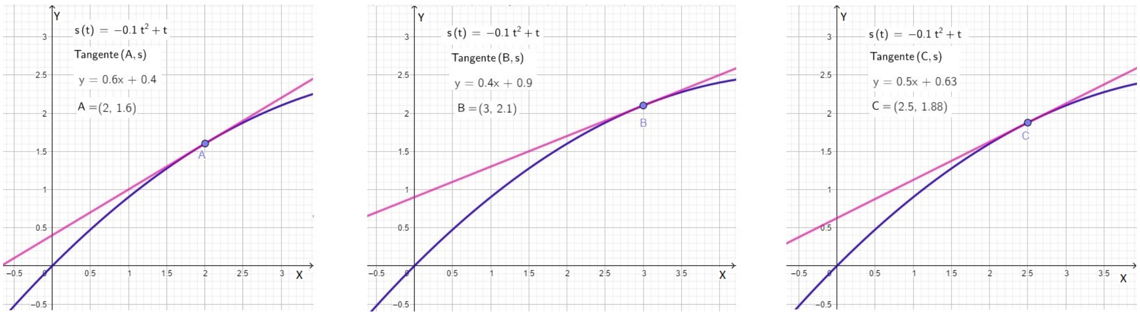
Figura 26 – Reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto E_1 e inexistência de reta tangente no ponto E_2



Fonte: Autoria Própria

Exemplo 1.33. *Voltando ao Exemplo 1.26 temos que a velocidade no instante $t_1 = 2$ é 0,6m/s, no instante $t_3 = 2,5$ é 0,5m/s e no instante $t_2 = 3$ é 0,4m/s. Veja Figura 27.*

Figura 27 – Taxa de variação instantânea



Fonte: Autoria Própria

A taxa de variação instantânea de uma função f num ponto $(a, f(a))$ é tão importante que lhe é dado um nome especial, a derivada de f em a, denotada por $f'(a)$, (HUGHES-HALLETT et al., 1999).

Não será feito um estudo aprofundado da derivada de um ponto, usar-se-á apenas a interpretação por meio da reta tangente ao gráfico.

Os teoremas dados a seguir buscam enriquecer o estudo sobre o tema e podem ser verificados para funções abordadas no Ensino Médio com o uso do GeoGebra. Prioriza-se apenas o estudo de gráficos contínuos, visto os gráficos descontínuos serem pouco trabalhados no Ensino Médio.

Teorema 1.1. ***(Pierre Fermat)*** [1] *Se uma função f possui um ponto de máximo e/ou mínimo relativo em $x = c$ e a função f possui derivada, coeficiente da reta tangente, neste ponto, então ela é nula, isto é, $f'(c) = 0$. Portanto, a taxa de variação instantânea nesse ponto é nula, (ÁVILA, 2006).*

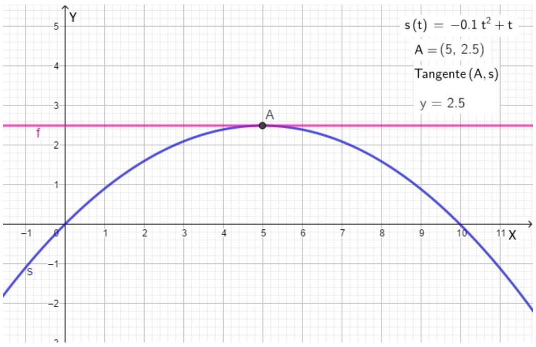
Exemplo 1.34. *No exemplo 1.26 temos que a velocidade no instante $t = 5$ segundos é 0 m/s, isto é, nesse instante o objeto alcança sua altura máxima e para, fazendo em seguida o retorno ao solo.*

Percebe-se na Figura 28 que a reta tangente ao gráfico no ponto máximo A, ponto de máximo relativo e absoluto, possui coeficiente angular nulo, isto é, é paralela ao eixo das abscissas.

Exemplo 1.35. *No gráfico da Figura 21 tem-se que a taxa de variação instantânea nos pontos B, C e D é nula, isto é, a tangente ao gráfico nesses pontos é paralela ao eixo das*

[1] "Pierre de Fermat (1601-1665) foi um advogado e político francês que viveu na cidade de Toulouse. Fermat tinha a matemática como um hobby e nunca atuou como matemático profissional. Porém, foi um dos maiores gênios criativos da matemática do seu tempo. Deixou contribuições significativas em diversas áreas, que o fazem ser visto como um dos precursores da moderna teoria dos números e ainda como um dos criadores da geometria analítica e do cálculo diferencial. Fermat não escreveu obras completas, sendo que muitos dos seus trabalhos permaneceram manuscritos em vida e ficaram conhecidos através de cartas a seus amigos e colaboradores", (MOL, 2013, p. 97).

Figura 28 – Taxa de variação instantânea nos pontos de máximo ou mínimo relativo



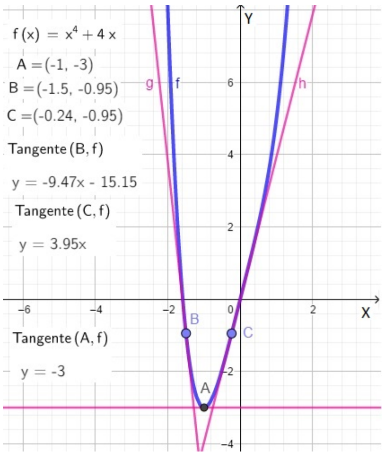
Fonte: Autoria Própria

abscissas.

Teorema 1.2. *Seja a função f definida e contínua no intervalo aberto (a, b); considere que o ponto c pertença a (a, b) e suponha que nesse intervalo f admita reta tangente em todos os pontos, exceto, possivelmente em c: Se $f'(x) > 0$ para todo ponto x em (a, c)e $f'(x) < 0$ para todo ponto x em (c, b), então f possui um máximo relativo em $(c, f(c))$. E, se $f'(x) < 0$ para todo ponto x em (a, c) e $f'(x) > 0$ para todo ponto x em (c, b), então f possui um mínimo relativo em $(c, f(c))$, (MUNEM; FOULIS, 2008).*

Exemplo 1.36. *Na Figura 29 tem-se que $f(x) = x^4 + 4x$ é uma função contínua em toda reta real e possui um mínimo em A=(-1,-3).*

Figura 29 – Gráfico da função $f(x) = x^4 + 4x$

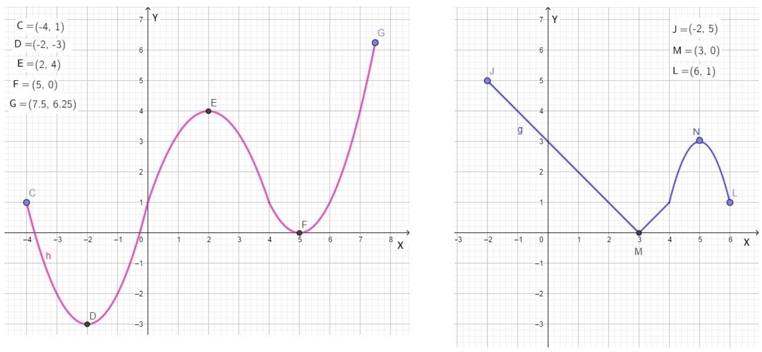


Fonte: Autoria Própria

Teorema 1.3. ***(Karl Weierstrass)*** *Se f é uma função contínua sobre um intervalo fechado $[a, b]$, então existem valores x_1 e x_2 em $[a, b]$ tal que para todo x em $[a, b]$ tem-se $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, isto é, f assume valor máximo $f(x_2)$ e valor mínimo $f(x_1)$ no intervalo $[a, b]$, (GUIDORIZZI, 2008).*

Exemplo 1.37. *Na Figura 30 tem-se que h e g são funções contínuas, h e g são definidas, respectivamente, nos intervalos fechados $[-4; 7,5]$ e $[-2, 6]$. A primeira possui mínimo, -3, em $D = (-2, -3)$, ponto de mínimo relativo, e máximo, 6,25, em $G = (7,5; 6,25)$, um ponto extremo do intervalo. A segunda possui mínimo, 0, em $M = (3, 0)$, ponto em que a função não admite reta tangente, e máximo, 5, em $J = (-2, 5)$, um ponto extremo do intervalo.*

Figura 30 – Máximo e mínimo de funções contínuas

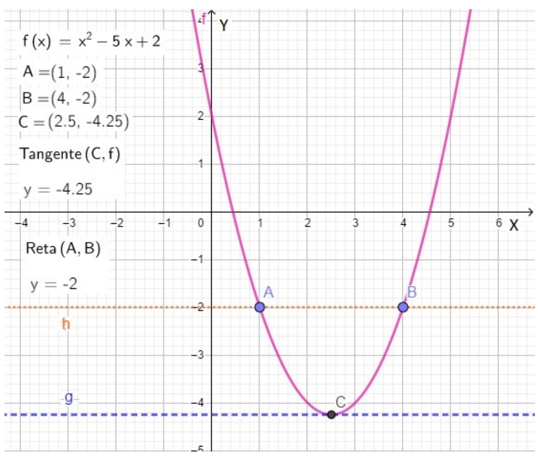


Fonte: Autoria Própria

Teorema 1.4. ***(Rolle)*** *Se f é continua no intervalo fechado $[a, b]$onde f possui derivada em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) e $f(b) = f(a)$, então existe pelo menos um número c com $a < c < b$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, (MUNEM; FOULIS, 2008).*

Exemplo 1.38. *Na Figura 31 tem-se que, em $f(x) = x^2 - 5x + 2$, $f(1) = f(4)$, logo existe $C = (2,5; -4,25)$ onde $f'(2,5) = 0$.*

Figura 31 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 2$



Fonte: Autoria Própria

1.8.2 Notas Históricas

O interesse por problemas de máximos e mínimos surgiu muito cedo. Observando a história de várias cidades, como Paris, Colônia e Braga, vemos muros de proteção construídos utilizando a percepção de que das curvas com igual perímetro, o círculo era a que apresentava maior área, veja Figura 32.

Figura 32 – Muros na cidade de Paris, Colônia e Braga

Fonte: Costa e Limberger (2007, p. 1)

Esse fato é de grande interesse e a esse desafio chamou-se de problema isoperimétrico no plano. Ele está entre os mais antigos problemas geométricos de máximos e mínimos e consiste em: "Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área", (KLASER; TELICHEVESKY, 2016, p. 1).

O épico "Eneida" do poeta romano Virgílio(70-19 a.C.), ilustra esse problema na famosa Lenda de Dido:

No século IX a.C., na cidade de Tiro, onde hoje é localizado o Líbano, existia uma princesa fenícia chamada Dido (ou Elisa). Com objetivo de subtrair seus tesouros, seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas. Com um grande número de seguidores, para se proteger, Dido fugiu em um navio disposta a fundar uma nova cidade, Cartago. No local escolhido para ser Cartago (onde hoje é a Tunísia), Dido tentou se estabelecer comprando as terras do rei local. Na negociação ficou definido que só teria em terras o que pudesse cercar com a pele de um boi. A princesa e seus seguidores decidirão então cortar a pele em tiras muito finas e abrangeram uma área na beira do mar em formato de semicírculo, (PEDROSO; PEREIRA, 2013).

Muitos outros fatos históricos poderiam ser contados. As orientações Curriculares para o Ensino Médio indicam que "[...] a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática", Brasil (2006, p. 86).

No exemplo a seguir apresenta-se recurso educacional multimídia que pode servir como ótima ferramenta para introdução do assunto otimização com contexto histórico.

Exemplo 1.39. ***(Projeto M³ Matemática Multimídia - Série: Matemática na Escola)*** *No vídeo "A Lenda de Dido", (COSTA; LIMBERGER, 2007), com duração aproximada de 10 minutos, é apresentado o problema isoperimétrico, os aspectos históricos relativos ao problema e busca aplicar em situações reais, com restrições.*

O primeiro método geral para a determinação de máximos e mínimos foi desenvolvido pelo advogado e político francês Pierre de Fermat(1601-1665), colocando-o como um dos precursores do Cálculo diferencial. Mas, somente após a primeira metade do século XVII, foi realizado um trabalho de sistematização que colocava os resultados de natureza infinitesimal dentro de uma estrutura teórica unificada, destacando-se os esforços independentes do físico inglês Isaac Newton (1642-1727) e do filósofo, jurista e político alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que tornam o cálculo infinitesimal em uma área com vida própria, com a criação de métodos gerais e processos algorítmicos, (MOL, 2013).

Figura 33 – Contribuidores Históricos

Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/9038477/

Capítulo 2

ASPECTOS METODOLÓGICOS

No presente capítulo encontram-se os aspectos metodológicos da pesquisa realizada com professores do Ensino Médio, indicando o instrumento de coleta de dados e os procedimentos adotados. A análise dos resultados é apresentada no Capítulo 3.

Para Fonseca (2002 apud GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 12), "[...] metodologia é o estudo da organização, dos caminhos a serem percorridos, para se realizar uma pesquisa ou um estudo, ou para se fazer ciência".

2.1 Tipo de Pesquisa

Segundo Prodanov (2013), pesquisar é buscar conhecimento para responder indagações propostas e para isso propõe um conjunto de ações planejadas as quais têm por base procedimentos racionais e sistemáticos.

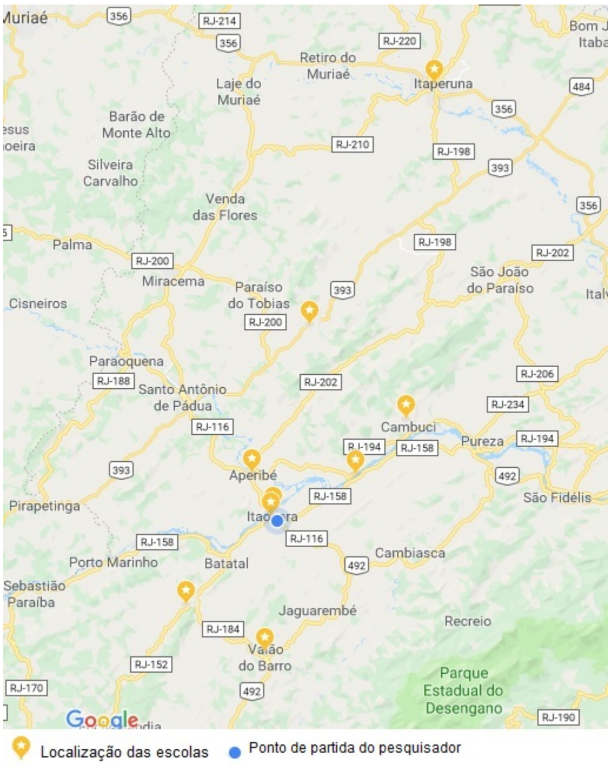
Esta pesquisa, em relação aos seus procedimentos técnicos, é classificada como um estudo de campo, aquele que é utilizado para "[...] conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema para o qual procuramos uma resposta, ou de uma hipótese, que queiramos comprovar, ou, ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles", (PRODANOV, 2013, p. 59).

Quanto a abordagem, trata-se de uma pesquisa qualitativa, aquela que não se preocupa com representatividade numérica e centra-se no aprofundamento, compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais, (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

2.2 Campo e Sujeitos da Pesquisa

A pesquisa teve como público alvo professores de matemática que trabalham com turmas do Ensino Médio em escolas estaduais localizadas no interior do estado do Rio de Janeiro; cidades de Itaocara, São Sebastião do Alto, Aperibé, Santo Antônio de Pádua, Cambuci e Itaperuna.

Figura 34 – Localização das escolas



Fonte: https://www.google.com.br/maps

2.3 Instrumento de Coleta de Dados

No estudo foi utilizado um questionário em papel com 12 perguntas. Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 201), "Questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador."

Na escolha desse instrumento levou-se em consideração a falta de tempo dos professores e a possibilidade de responderem de forma parcelada e em horário mais favorável.

Marconi e Lakatos (2003, p. 201) destaca as vantagens e desvantagens no uso do questionário, dentre essas, pode-se destacar:

- Vantagens: "há maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato", "há menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador", "há mais tempo para responder e em hora mais favorável", "obtém respostas que materialmente seriam inacessíveis".

- Desvantagens: "Percentagem pequena dos questionários que voltam", "grande número de perguntas sem respostas", "impossibilidade de ajudar o informante em questões mal compreendidas", "o desconhecimento das circunstâncias em que foram preenchidos."

O questionário desse estudo apresenta algumas perguntas fechadas, que "[...] são aquelas que o informante escolhe sua resposta entre duas opções: sim e não", (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 204), mas possui uma maioria de questões abertas, com o desejo de não influenciar nas respostas dos pesquisados e adquirir dados mais profundos e que representem de forma mais fiel a realidade vivenciada.

Segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 204), perguntas abertas "[...] são as que permitem ao informante responder livremente, usando linguagem própria, e emitir opiniões. Possibilita investigações mais profundas e precisas; entretanto, apresenta alguns inconvenientes: dificulta a resposta ao próprio informante, que deverá redigi-la, o processo de tabulação, o tratamento estatístico e a interpretação. A análise é difícil, complexa, cansativa e demorada."

2.4 Procedimentos da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em 7 (sete) etapas:

- **Identificação da problemática:** Após uma pesquisa bibliográfica, verificou-se que essa indicava para a existência de desafios no ensino de matemática na atualidade, entre eles, o despertar dos estudantes para a disciplina, os baixos níveis de aprendizagem e o uso de metodologias ultrapassadas. Além disso, foi realizada uma análise de três livros didáticos com características distintas e do currículo mínimo da 1ª série do ensino médio, constatando-se que o estudo de máximos e mínimos em situações-problemas tem se restringido aqueles modelados por uma função quadrática, não existindo uma proposta mais ampla. A partir disso, pode-se traçar objetivos para o estudo de campo.

- **Definição do objetivo do Estudo de Campo:** Investigar esse cenário atual do ensino de matemática, buscando contribuir com a escolha das metodologias de ensino utilizadas na sequência de atividades sugeridas e identificar quais as dificuldades apontadas por esses profissionais em sua prática diária, buscando formas de auxiliá-los, cativar os estudantes e tornar o ensino mais efetivo. Além disso, verificar a opinião dos professores sobre a expansão do assunto máximos e mínimos em situações-problemas para outros tipos de funções com auxilio da tecnologia.

- **Elaboração do questionário:** Nas duas primeiras perguntas desejou-se conhecer mais os profissionais pesquisados. As perguntas 3 e 4 buscavam investigar o interesse dos estudantes pela disciplina. As perguntas de 5 a 11 versam sobre o uso de jogos, tecnologia, investigação e dedução de fórmulas e métodos, atividades contextualizadas e o uso de situações problemas. A pergunta 12 trata da expansão do assunto máximos e mínimos, com a inclusão de situações-problemas modeladas por funções não-quadráticas, verificando a opinião desses professores.

- **Distribuição dos questionários:** Foram distribuídos 30 questionários entre os dias 1 a 10 de agosto de 2018 nas escolas.

- **Recolhimento dos questionários:** Aconteceu entre os dias 20 a 31 de agosto de 2018. Nessa etapa, identifica-se uma dificuldade encontrada nessa pesquisa, onde somente 14 professores devolveram os questionários respondidos.

- **Análise dos questionários:** As respostas aos questionários apresentaram vários pontos semelhantes, onde foi possível perceber as maiores dificuldades encontradas. Além disso, constatou-se que as sugestões apresentadas no questionário eram bem vistas pelos profissionais, apesar de muitos não utilizarem ou recorrerem a elas com pouca frequência.

- **Definição das contribuições para as propostas de atividades:** Foi possível realizar um resumo com tópicos importantes a serem considerados nas propostas de atividades, buscando sintetizar ideias e contribuir com a elaboração e definição de objetivos metodológicos.

Capítulo 3

ENSINO DE MATEMÁTICA NA ATUALIDADE

Este capítulo reflete sobre as práticas adotadas no ensino de matemática na atualidade, utilizando pesquisa por meio de questionário para captar um pouco dessa vivência dos docentes e desafios no processo de ensino e aprendizagem da disciplina, com o objetivo de contribuir com a escolha das metodologias de ensino utilizadas, que em seguida são apresentadas. Além disso, indica que conteúdos relacionados ao tema máximos e mínimos estão presentes nos livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio e que habilidades e competências são esperadas desses estudantes, também observando que assuntos eles já tiveram contato em anos anteriores e considerações acerca da possibilidade de maior ênfase e ampliação do tema, tendo em vista a sua ampla aplicabilidade. Por fim, destacam-se tópicos importantes considerados no desenvolvimento das atividades propostas.

3.1 Práticas Adotadas em Sala de Aula

> Uma observação sistemática de todo o processo de ensino remete a certas indagações referentes ao baixo rendimento escolar em matemática e a aversão a esta disciplina demonstrada pela maioria dos estudantes. O exposto é motivo de preocupação e há necessidade de se analisar a real situação e procurar alternativas capazes de transformar este cenário, (CÓL, 2011, p. 1).

Ainda hoje observa-se uma predominância de práticas tradicionais de ensino que privilegiam a transmissão passiva de saberes, em oposição aquelas que beneficiam a construção do conhecimento, onde o educador assume o papel de mediador, aquele que facilita e motiva a aprendizagem, considerando suas potencialidades e manifestando essa confiança, e onde o aluno é incentivado para uma postura ativa. Essa nova atitude frente ao ensino e aprendizagem beneficia a exploração significativa dos conteúdos matemáticos, proporcionando uma maior aquisição de competências e habilidades.

Referindo-se ao uso de metodologias ultrapassadas, Barbosa (2017, p. 16) explica que "diversos são os fatores que colaboram para tal acontecimento, desde a falta de apoio e investimento até a uma política de formação continuada do professor".

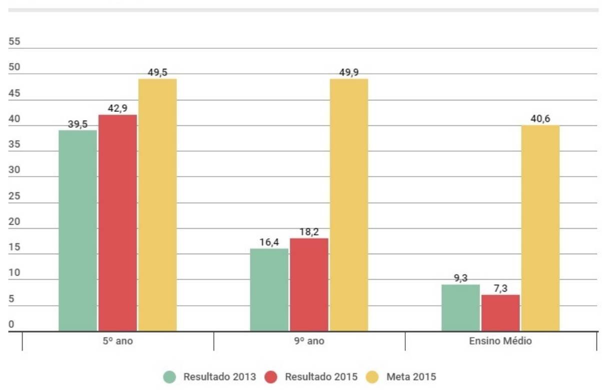
Esse autor também comenta que é um grande desafio a função do educador, que é alterada constantemente diante das transformações educacionais e assinala que "a história da educação no Brasil tem indicado caminhos, papéis, deveres e estigmas que se modificam através do tempo, a medida que a sociedade, a família e a escola também mudam", (BARBOSA, 2017, p. 24).

Entre essas mudanças, pode-se citar a presença cada vez mais constante da tecnologia no cotidiano das pessoas, indicando que os caminhos traçados para a educação moderna não devam ser definidos sem considerar a sua utilização. Sousa (2018) destaca a importância de propiciar essa inclusão, indicando que a tecnologia exerce enorme fascínio sobre os adolescentes, sendo fundamental o desenvolvimento de pesquisas direcionadas a esse assunto.

Segundo Miguel (2011, p. 375), no caso de uma análise atenta do fazer pedagógico, essa "[...] revelará que as crianças que chegam a escola normalmente gostam de matemática. Entretanto, não será difícil constatar também que esse gosto pela Matemática decresce proporcionalmente ao avanço dos alunos pelos diversos ciclos do sistema de ensino [...]."

Dados divulgados em 18/01/2017 (Figura 35) pelo *movimento Todos pela Educação* [1] indicam que apenas e $7,3\%$ dos alunos do Ensino Médio atingiram em 2015 níveis adequados de aprendizado, sendo um índice menor que os $9,3\%$ divulgados em 2013. E, considerando apenas as escolas públicas, o resultado é ainda pior, apenas $3,6\%$, (TOKARNIA, 2017).

Figura 35 – Nível da Aprendizagem em Matemática na Educação Básica



Fonte: Tokarnia (2017, p. 1)

[1] Fundado em 2006, o Todos Pela Educação é um movimento da sociedade brasileira que tem como missão engajar o poder público e a sociedade brasileira no compromisso pela efetivação do direito das crianças e jovens a uma Educação Básica de qualidade.

Procurando investigar esse cenário atual do ensino de matemática no intuito obter dados que orientem as escolhas metodológicas, foi realizada uma pesquisa com professores de matemática do Ensino Médio de escolas públicas, por meio da aplicação de questionário.

3.1.1 Resultados e Discussão da Pesquisa Realizada com Professores

Esse tópico tratará dos resultados e discussão a cerca das respostas dos questionários (Apêndice I) aos professores de matemática. A seguinte organização foi definida: As questões serão apresentadas de forma individual, na qual cada professor será citado pelo número da sua ficha, exemplo P1 (professor da ficha 1).

Nas perguntas 1 e 2 (Figura 36 e Figura 37) pode-se conhecer um pouco mais sobre os professores consultados:

• **Pergunta 1:** Qual sua formação profissional?

Figura 36 – Pergunta 1

Professores	Respostas
P1	Pós-graduação
P2	Pós-graduação
P3	Pós-graduação incompleta
P4	Graduação
P5	Graduação
P6	Mestrado
P7	Graduação
P8	Mestrado incompleto
P9	Pós-graduação
P10	Graduação
P11	Mestrado
P12	Pós-Graduação
P13	Pós-graduação
P14	Mestrado

Fonte: Autoria Própria

• **Pergunta 2:** Qual sua idade e a quanto tempo trabalha com o ensino de Matemática?

Figura 37 – Pergunta 2

Professores	Respostas
P1	44/24
P2	36/12
P3	34/4
P4	28/5
P5	32/4
P6	32/10
P7	31/7
P8	46/21
P9	37/11
P10	29/4
P11	41/11
P12	36/9
P13	38/13
P14	33/8

Fonte: Autoria Própria

Verificou-se que os sujeitos da pesquisa apresentam características muito distintas sobre as informações solicitadas, isto é, trata-se de uma amostra diversificada.

A partir da pergunta 3 buscou-se captar a vivência desses profissionais em sala de aula. Iniciando com uma pergunta que com certeza é motivo de debate constante nas escolas:

- **Pergunta 3:** Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

Figura 38 – Pergunta 3

Professores	Respostas
P1	Não
P2	Não
P3	Não
P4	Não
P5	Não
P6	Não
P7	Não
P8	Não
P9	Não
P10	Não
P11	Não
P12	Não
P13	Não
P14	Não

Fonte: Autoria Própria

Todos os professores concordaram (Figura 38) que existe uma falta de interesse dos estudantes pela matemática.

Brito (2014, p. 42) comenta que "[...] a Matemática ocupa um lugar essencial nos currículos escolares, mas, em contrapartida, pode-se observar elevadas taxas de reprovação e de insucesso, desprazer e, ou frustração, na aprendizagem e no ensino dessa matéria".

• **Pergunta 4:** No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

P1: "Falta de incentivo nas séries iniciais e uso da matemática como disciplina repreendedora, onde os alunos têm medo (principalmente nas séries iniciais). Para muitas crianças a (matemática) tabuada é cobrada como forma de castigo. A partir daí, muitas vezes, começa o bloqueio."

P2: "O conceito equivocado de que matemática é muito difícil, ás vezes, segundo eles, impossível de aprender. Uma base cheia de falhas, os estudantes chegam ao Fundamental II com muitas dificuldades em: tabuada, quatro operações e carregam essa falha."

P3: "Falta de base do ensino dos anos anteriores, parece que os alunos têm um certo "bloqueio", medo da matemática."

P4: "O fator cultural em torno da matemática, considerando-a como uma disciplina quase impossível de se aprender. Os pré-requisitos em determinados conteúdos influenciam na dificuldade dos alunos, que implica na falta de interesse da matemática como um todo."

P5: "Falta de conhecimentos prévios para o entendimento dos conteúdos, aspectos culturais, falta de incentivo aos estudos pelos familiares"

P6: "O fato mais relevante que considero é a cultura implantada de que a matemática é muito difícil. Aliado a isso, tem-se: Matemática ensinada desconectada da realidade do aluno, dificuldades no raciocínio lógico e na interpretação das questões."

P7: "Defasagem escolar e falta de interesse por parte dos alunos."

P8: "Falta de conhecimentos prévios. Não conseguem ligar a matemática com seu uso na vida."

P9: "Ser algo que busque raciocínio e interpretação."

P10: "Os principais fatores estão relacionados ao sistema de avaliação. Devido as várias recuperações paralelas e principalmente a Progressão Parcial (Dependência), que dá a chance do aluno poder perder em duas disciplinas e mesmo assim ser promovido a série seguinte."

P11: "Nossos alunos apresentam-se desinteressados por todas as áreas. Acho que, como característica da escola pública, muitos não têm um projeto de vida, não encontramos neles o desejo da conquista e da busca. Tudo está muito fácil, não querem ter trabalho."

P12: "Há um certo "pré-conceito" em relação à disciplina, onde muitos afirmam ser difícil e chata. Algo que colabora para isso é o desempenho de alguns colegas na sala de aula que não tornam suas aulas mais atrativas para os alunos."

P13: "Dificuldade de aprendizagem causada pela falta de conhecimentos anteriores (pré-requisitos/conhecimento elementar). Desinteresse/descaso gerado pela garantia de aprovação."

P14: "Conteúdos defasados e baixa autoestima."

Entre os fatores citados pelos professores consultados como possíveis determinantes para essa situação estão: a crença de que matemática é complicada, a falta de conhecimentos básicos que promovem dificuldades de aprendizagem, a ausência de incentivo por parte dos familiares aos estudos e o ensino de matemática desvinculado da realidade do aluno. Destacando-se assim a importância do coletivo (Escola, Família, Comunidade, Poder Público) no contexto educacional e o incentivo pelo gosto à matemática desde as séries iniciais.

Diante dessa situação, foi proposto aos docentes refletir a utilização de recursos e metodologias de ensino diversificadas no intuito de sanar esse quadro preocupante:

• **Pergunta 5:** Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes?

Figura 39 – Pergunta 5

Professores	Respostas
P1	Sim
P2	Sim
P3	Sim.
P4	Sim
P5	Sim
P6	Sim
P7	Sim.
P8	Sim
P9	Sim
P10	Sim
P11	Sim.
P12	Sim
P13	Sim
P14	Sim

Fonte: Autoria Própria

Todos os professores consideraram os jogos uma boa ferramenta para despertar o interesse dos estudantes.

• **Pergunta 6:** Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

P1: "Utilizo sempre que possível. Os jogos estimulam a aprendizagem, o raciocínio lógico e também a socialização do aluno, pois raramente joga-se sozinho."

P2: "Não utilizo com muita frequência, pois a educação no estado não propõe muitos recursos para tal aplicação. Os benefícios: Melhora o interesse pelas aulas, a participação em grupo, melhor retenção de conteúdos, interação social e diversão."

P3: "Às vezes; por meio deste recurso conseguem enxergar melhor certo tipo de situação ou problema, como por exemplo gráficos."

P4: "Não. O período curto com os alunos e o excesso de conteúdos em determinados períodos não favorecem um planejamento adequado para esse tipo de metodologia."

P5: "Não."

P6: "Raramente utilizo devido à falta de recursos e tempo para a aplicação. Benefícios: a aula se torna mais dinâmica, estimula o raciocínio lógico, contribui para a interação entre alunos e alunos-professor, aprendizagem de forma lúdica."

P7: "Sim. Os jogos, além de serem motivantes, ajudam na interação com os colegas e raciocínio lógico."

P8: "Sim. Utilizo jogos educativos no formato digital, o que tem despertado o interesse e motivação nos alunos."

P9: "A dinâmica faz um aprendizado ser mais concreto, diversificado e social."

P10: "Sim. Por meio de recursos podemos mostrar na prática as aplicações de matemática. Diversos jogos são bons para exercitar o raciocínio lógico (xadrez, dama, dominó, etc.) e outros jogos são bons para complementar os conteúdos dados em sala de aula, como por exemplo, a batalha naval para o estudo de plano cartesiano."

P11: "Utilizo com pouca frequência. Devido a minha correria do cotidiano, não sobra muito tempo para a organização. Porém, a utilização dos jogos desenvolve o raciocínio lógico, suas regras impõe limites, característica tão pouco desenvolvida pela família."

P12: "Sim. Os jogos tornam as aulas mais interessantes para os alunos, pois unem o conteúdo que está sendo estudado com brincadeiras, tornando o aprendizado mais lúdico."

P13: "Sim. O uso dessa ferramenta é mais utilizada no Ensino Fundamental II, com o objetivo de reforçar/fixar conteúdos estudados em sala de aula. A atividade/ferramenta é bem aceita em turmas em que o número de alunos é menor."

P14: "São utilizados jogos, oficinas e o GeoGebra. Os alunos têm apresentado um maior rendimento e interesse em aulas que oferecem algum dos recursos citados acima."

Apesar de considerarem o uso de jogos importante para despertar o interesse, alguns não o utilizam ou utilizam com pouca frequência, citando a falta de recursos e tempo para a elaboração e aplicação em sala de aula como determinantes. Entre os benefícios mais citados estão os de: estimular a aprendizagem, o raciocínio lógico e a socialização;

além de tornar as aulas mais dinâmicas.

Também Grando (2000, p. 28) confirma que:

> Considera-se que o jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação.

• **Pergunta 7:** Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes?

Figura 40 – Pergunta 7

Professores	Respostas
P1	Sim
P2	Sim
P3	Sim
P4	Sim
P5	Sim
P6	Sim
P7	Sim
P8	Sim
P9	Sim
P10	Sim
P11	Sim
P12	Sim
P13	Sim
P14	Sim

Fonte: Autoria Própria

Todos os professores consideraram o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar o interesse dos estudantes (Figura 40).

• **Pergunta 8:** Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

P1: "Sim. Utilizo grupos da turma no WhatsApp com a finalidade de maior interação Aluno x Professor. Envio questões extras e assuntos relacionados aos conteúdos estudados, além de questões que estimulem o raciocínio lógico. Permito também, muitas vezes, o uso do PhotoMath, um aplicativo de interesse no uso de funções."

P2: "Não. A escola que leciono não possui um espaço físico informatizado para tal utilização."

P3: Às vezes. Os alunos demonstram maior interesse quando utilizam este tipo de recurso e conseguem visualizar melhor um gráfico, por exemplo."

P4: "Poucas vezes. O fato dos alunos já usarem os meios tecnológicos frequentemente favorece o trabalho em sala de aula, o recurso visual e a praticidade contribuem muito. Em funções, gosto principalmente das manipulações e comportamento das mesmas."

P5: "Não, pois as escolas que trabalho não oferecem as estruturas necessárias para a utilização destes recursos."

P6: "Já utilizei algumas vezes. Com a utilização da tecnologia o aluno se envolve mais com o conteúdo a ser aprendido. Em especial, o ensino das funções por meio de recursos tecnológicos possibilita uma melhor associação entre a representação algébrica e gráfica, descoberta de características de diversas funções e também seus comportamentos."

P7:: "Às vezes. O uso da tecnologia é ótima fonte de pesquisa. Usar a tecnologia no ensino de funções ajuda os alunos a terem uma visão melhor dos gráficos, além de ser mais atrativo."

P8: "Tenho utilizado a calculadora gráfica Desmos para aprofundar o estudo do gráfico de funções."

P9: "Não utilizo por falta de recursos. A escola não dispõe de computadores suficientes."

P10: "Sim. Alguns softwares como WinPlot, GeoGebra, entre outros, são ótimas ferramentas para a visualização do "comportamento" dos gráficos das funções. Com esses recursos temos a possibilidade de gerar vários gráficos em poucos segundos. É um ótimo recurso para mostrarmos ao aluno o gráfico de várias funções, diversos pontos e o comportamento dos coeficientes das funções e seus resultados no gráfico."

P11: "Com pouca frequência. Não temos recursos de qualidade disponíveis. Com a tecnologia é possível desenvolver o desejo pela busca. No Ensino de funções é possível fazer uma ligação com o cotidiano e com as ferramentas para construção gráfica conseguimos despertar o interesse."

P12: "Sim. Os aplicativos tornam visíveis todas as peculiaridades de uma função, permitindo que os alunos explorem, alterem, brinquem, testem suas hipóteses e tirem suas conclusões de forma lúdica. Gosto bastante de usar o GeoGebra e o Graphmatica."

P13: "Não. Falta à escola um laboratório em condições de uso e que comporte a turma. Os alunos têm dificuldade para usar a internet como ferramenta de aprendizagem, porém dominam todos os aspectos sobre as redes sociais. Falta de treinamento do professor. Sugiro em minhas aulas "links" de aulas que trabalham/abordam assuntos(conteúdos) das séries anteriores, na tentativa de resgatar esses conteúdos."

P14: "Para o ensino de funções utilizo o GeoGebra, pelo fato de proporcionar uma melhor visualização em alguns aspectos, tais como: crescimento, zeros da função, etc."

Apesar de considerarem o uso da tecnologia importante para despertar o interesse, alguns não a utilizam ou utilizam com pouca frequência, indicando a falta de equipamentos e treinamento como determinantes. Entre os pontos positivos para o uso dessa ferramenta, citam a grande identificação dos alunos com a tecnologia. E sobre o uso de funções, foi mencionado a melhor associação entre a representação algébrica e gráfica, destacando a manipulação e observação de comportamentos. Além disso, vários indicaram usar aplicativos, softwares e sugerirem sites em seu trabalho diário.

A possibilidade de manipulação gráfica é com certeza um fator de destaque, possibilitando a experimentação e obtenção de resultados. E, se utilizada ativamente pelos alunos, estimula a construção dos conhecimentos de forma mais consistente.

Magarinus (2013, p. 25) comenta que "[...] o aluno terá maiores condições de apropriar-se dos saberes matemáticos quando for estimulado a pensar e fazer inferências sobre o objeto de estudo [...]".

• **Pergunta 9:** Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

P1: "Infelizmente não temos tempo hábil para dedução de fórmulas. O tempo é curto e o plano do Currículo Mínimo é enorme."

P2: "Sim. Mas, como já citei anteriormente, não são todos os alunos que demonstram interesse em aulas diversificadas, muitos têm muita dificuldade em resolver situações-problemas, fórmulas, mesmo com métodos atraentes. Percebo principalmente na Matemática como o “bicho papão”. Há ainda muita resistência no aprendizado da matemática."

P3: "Sim, mas os alunos não demonstram interesse, por isso não é tão utilizado."

P4: "Não."

P5: "Sim. Quando os alunos conseguem “enxergar” a origem das fórmulas, eles têm mais facilidade na resolução de problemas parecidos. Com isso, quando são propostas outras atividades, eles resolvem mais facilmente."

P6: "Considero importante sim, porém a maioria dos alunos foca apenas na fórmula final e não utiliza o desenvolvimento apresentado para resolver atividades posteriores."

P7: "Sim, para os alunos que têm interesse, acham interessante o resultado final das fórmulas, mas nossos alunos têm demonstrado cada dia menos interesse, a maioria acha chato a investigação de fórmulas, porém para os alunos que demonstram mais interesse na investigação também demonstram ter mais facilidade nas atividades."

P8: "Atividades de investigação eu utilizo e acho extremamente necessárias. Quanto ao fato de mostrar a dedução de fórmulas, geralmente não faço, em função do tempo reduzido e da quantidade considerável de conteúdos para a disciplina de matemática."

P9: "Sim. É preciso saber de onde parte todo o conhecimento. Aplicá-lo é muito mais simples e seguro."

P10: "Apesar de eu achar importante percebo que não faz muito sentido para o aluno a dedução de fórmulas. Nesse caso, geralmente eu foco no que eu acho importante, que é a aplicação das fórmulas. Hoje não costumo muito fazer dedução de fórmulas."

P11: "Com certeza. Infelizmente ainda continua sendo por meio da explanação dos professores devido à preguiça de pensar por parte dos alunos e por falta de conhecimentos básicos. Quando o aluno consegue entender e deduzir as fórmulas, ele terá, com certeza, maior facilidade posteriormente."

P12: "Sim. Já tivemos experiências de construções de desenhos usando aplicativos de forma que cada segmento (ou curva) deveria ficar em certa posição para que no final alguma imagem fosse construída usando apenas funções. Essa é uma, dentre tantas outras opções, que podemos usar para tornar o ensino-aprendizagem mais significativo."

P13: "Encontro muita dificuldade nesse tipo de tarefa. Reforço: Falta pré-requisitos! Observo que somente cerca de 10% dos alunos conseguem desenvolver esse tipo de atividade."

P14: "Sim. Os alunos ao utilizarem um recurso didático, como a torre de Hanói, desenvolvem a habilidade de utilizar a potenciação em relação aos movimentos necessários para mover os discos. Quando utilizamos o conteúdo relacionado à função exponencial, os alunos identificam e relacionam com a atividade anterior."

As respostas para a pergunta 9 foram muito diversificadas. Teve professor que não considerou a atividade de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos. Outros acreditam ser extremamente necessárias e consideram gerar mais facilidade em atividades posteriores. Porém a maioria cita que, apesar de julgarem relevantes, enfrentam dificuldades com esse tipo de proposta, apontando a ausência de conhecimentos básicos pelos alunos; falta de tempo hábil, sendo o conteúdo da disciplina extenso; desinteresse por parte dos alunos, que focam apenas na fórmula final e acham a abordagem chata.

Observou-se que essa atividade gera grandes desafios e mais uma vez a falta de pré-requisitos básicos é apontada pelos professores, o que gera um gasto maior de tempo em todas as tarefas, constatando-se mais uma vez o papel importante do trabalho coletivo na formação de cada aluno, atentando para as responsabilidades de cada sujeito no processo educacional.

O desinteresse por esse tipo de atividade chama atenção para a busca de novas formas de trazer esse trabalho para a sala de aula de modo que o aluno se sinta motivado.

Segundo Brasil (2006, p. 70):

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra- exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Também Cól (2011, p. 2) comenta que:

> A reprodução mecânica de listas de exercícios, a utilização de fórmulas prontas ou simplesmente "siga o modelo", sem mostrar o por quê? e para que? contribui para a desmotivação, o desinteresse e o desencantamento com a matemática, esta ciência que surgiu justamente da necessidade humana de situações reais.

Partindo dessa ideia, Gomes e Rodrigues (2014) sugere que o professor utilize durantes as aulas problemas que foram grandes desafios ao longo do tempo, utilizando os conceitos de História da Matemática como um "toque a mais" à sua prática pedagógica.

• **Pergunta 10:** As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

P1: "Sim. Muitos alunos, mesmo que não saibam ou não consigam resolver determinados assuntos, pelo menos tentam quando algo lhes chama atenção."

P2: "Sim. Os alunos questionam, resolvem as questões com um pouco mais de interesse. Apesar de, nos últimos anos, ter notado muito desinteresse por parte deles. Não é fácil despertá-los para a Matemática, porém essa diversificação ajuda."

P3: "Sim, o aluno demonstra maior interesse e entende melhor o assunto."

P4: "Sim. Por fazer parte do meio que vivem, os alunos ficam mais atentos e curiosos nos resultados possíveis."

P5: "Estas atividades atraem a atenção dos estudantes. Percebo que os alunos sentem-se mais 'animados' com as atividades, pois conseguem visualizar a matemática no seu cotidiano."

P6: "Essas atividades despertam muito mais o interesse dos alunos, os mesmos passam a participar mais da aula e ficam mais motivados para resolverem as tarefas."

P7: "Sim. Quando as atividades estão mais perto da sua realidade, o entendimento e interesse é muito maior, pois interagem melhor nas aulas."

P8: "Sim. São exatamente estas que interessam os alunos. E quando são aplicadas o nível de dedicação, atenção e motivação aumenta visivelmente."

P9: "Atrai, com certeza. Eles associam à sua vida prática aquilo que estamos passando em sala de aula e desperta bastante interesse."

P10: "Sim, por meio das atividades contextualizadas, o aluno tem a possibilidade de perceber as aplicações da matemática. Nesse caso, a matemática passa a ficar mais 'próxima' do aluno."

P11: "Sim. Conseguimos eliminar comentários do tipo: 'nunca vou utilizar isso para nada'."

P12: "Sim. A cada conteúdo novo trabalhado em sala de aula, os alunos sempre perguntam onde usarão aquele conhecimento em suas vidas. Mostrando exemplos ligados ao cotidiano dos alunos mostramos a importância daquele conteúdo e despertamos seu interesse na aprendizagem do mesmo."

P13: "Sim. Proponho constantemente essas atividades, as quais chamo de Desafio. Observo grande interesse, principalmente as relacionadas à Matemática Financeira."

P14: "Para estas atividades é necessário o uso de um recurso, como o GeoGebra, para complementar o aprendizado. Desse modo, o aluno interage em atividades relacionadas pré-determinadas."

As respostas para a pergunta 10 apontam as atividades contextualizadas, principalmente aquelas relacionadas ao cotidiano do aluno, como essenciais no processo de ensino e aprendizagem, atraindo a atenção e curiosidade do aluno.

Magarinus (2013, p. 25) concorda que "na busca por estas situações que favoreçam, antes de mais nada, a aprendizagem dos conceitos matemáticos, visualizamos na contextualização do saber uma ótima alternativa".

Brito (2014, p. 34) chama a atenção e esclarece que existe:

> [...] uma interpretação equivocada da ideia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata.

• **Pergunta 11:** Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

P1: "Leitura e interpretação."

P2: "Falta de atenção. Não querem ler, pensar. Não possuem suficientes conceitos básicos. Alguns alunos não dominam tabuada, quatro operações."

P3: "A interpretação é um dos maiores problemas, além da dificuldade em dominar conteúdos básicos de matemática."

P4: "Interpretação de texto, análise do problema (organização de operações)."

P5: "Eles têm maiores dificuldades em interpretar as situações-problemas e visualizarem os conteúdos matemáticos que devem ser utilizados."

P6: "A maior dificuldade encontra-se na interpretação dos problemas. Além disso, existe a mecanização da utilização de fórmulas sem uma análise detalhada do problema."

P7: "Nas situações-problemas a maior dificuldade está na interpretação, pois a maioria de nossos alunos não gostam de ler."

P8: "A interpretação do problema com a definição dos dados e dificuldade com os passos para a solução, em função da falta de conhecimentos prévios, essenciais para o encadeamento das ideias."

P9: "Interpretação. É um desafio fazê-los chegar a um resultado interpretando o contexto."

P10: "A preguiça de ler um problema."

P11: "Vejo como a interpretação do problema proveniente da falta de leitura por parte dos discentes."

P12: "Transformar em linguagem matemática aquilo que o problema fala, ou seja, a interpretação do problema."

P13: "Sem dúvidas: Interpretação e falta de conhecimentos básicos de matemática."

P14: "Resumidamente, em saber o que fazer. Os alunos leem e não interpretam, ou não conseguem identificar o que deve ser feito para resolver a situação."

Sobre as dificuldades na resolução de situações-problemas, na pergunta 11 os docentes apontaram a interpretação, aliada a ausência de conhecimentos prévios, mecanização de fórmulas e falta de leitura como determinantes. A interpretação foi a mais citada, fazendo refletir sobre as formas de "derrubar essas barreiras" criadas pelos estudantes, incentivando e atraindo a "sede" pelo descobrir em matemática.

Brito (2014, p. 33) comenta "que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento." O que não contribui para o estabelecimento de relações no intuito de tornar-se ferramentas eficazes "[...] para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos", (BRITO, 2014, p. 42) .

• **Pergunta 12:** As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

P1: "Sim. Geralmente tudo que envolve a tecnologia atrai o aluno."

P2: "Sim. Pontos negativos: Ausência de sala de informática com computadores em bom estado de manutenção e número suficiente para atender os alunos. Pontos positivos: Maior interesse dos alunos, estímulo para as aulas se tornarem mais dinâmicas."

P3: "Sim, muito positiva, pois o uso da tecnologia “motiva” o aluno, por outro lado, nem sempre podemos usá-la, pois a internet não permite, ou é lenta ou não está funcionando no dia da aula, etc."

P4: "Sim. A praticidade, no caso de material adequado nas escolas, torna o uso de softwares uma ferramenta de extrema importância, a manipulação dos mesmos, o recurso visual e o dinamismo tecnológico contribuem para um ensino significativo."

P5: "Sim. Tem a visualização geométrica com a mudança dos parâmetros e a possibilidade de exemplos distintos dentro da mesma função."

P6: "Com certeza essa abordagem será muito válida para o ensino do tema em questão, uma vez que facilitará o ensino por meio da visualização e também devido ao fato de possibilitar uma abordagem mais ampla do assunto."

P7: "Sim. Com a utilização da tecnologia, ou melhor, no uso do software, os alunos conseguem uma visualização mais ampla das representações gráficas das funções, porém na maioria das vezes a sala de informática das escolas não está funcionando."

P8: "Sim. A tecnologia é uma excelente aliada, porém muitos alunos acham difícil baixar aplicativos como o “Desmos”, por exemplo, alegando falta de memória em seus celulares."

P9: "Considero sim. O mundo hoje é tecnológico e mostrar que essa tecnologia vem para o ensino de matemática pode solucionar grande parte dos bloqueios que temos."

P10: "Sim. Considero essa abordagem positiva, pois, por meio do computador, o aluno pode visualizar diversas situações presentes nos gráficos sem precisar fazer tanto esforço e ganhando tempo, porém o aluno também deve saber fazer no papel."

P11: "Com certeza. A vantagem é possibilitar mostrar/apresentar diversos problemas práticos do cotidiano. A desvantagem está na falta de recursos oferecidos pelas escolas e a falta de conhecimento por parte dos docentes."

P12: "Sim. O ponto positivo é a facilidade de interpretação das situações-problemas. O ponto negativo é, na maioria das vezes, o péssimo estado dos laboratórios de informática (quando há) das escolas públicas."

P13: "Essa não é a realidade da escola pública."

P14: "Sim. Acredito que o uso de softwares pode favorecer o aprendizado, inclusive eu utilizei, mostrando o maior/menor valor que uma função pode obter."

Novamente na pergunta 12 os professores confirmaram a validade do uso da tecnologia em sala de aula. Um dos pesquisados comentou que é positiva a abordagem mais ampla do assunto otimização e a possibilidade de visualização gráfica facilitará o ensino.

Ramos (2018, p. 18) comenta que:

> A sociedade contemporânea despontou trazendo consigo sujeitos com motivações distintas. Na educação, o professor depara-se com um “novo aluno” que em suas interações sociais dispõe de todo um aparato tecnológico muitas vezes mais atraente do que a escola.

Durante a pesquisa foi possível perceber que a utilização de recursos e metodologias de ensino diversificadas não estão sendo utilizadas de forma frequente em sala de aula, apesar dos professores apontarem a grande maioria das sugestões como importantes motivadoras para a aprendizagem de matemática.

3.2 Metodologia de Ensino e Aprendizagem

A metodologia adotada neste trabalho procura aliar o uso de jogos, GeoGebra e resolução de situações-problemas no intuito de despertar os estudantes para a disciplina e contribuir para um ensino-aprendizagem de matemática mais efetivo.

Conforme aponta Mota (2009, p. 14):

> O desinteresse dos alunos na sala de aula e as dificuldades que por vezes enfrentam em relação à Matemática, são razões mais que suficientes para que os professores procurem novas estratégias de ensino para os ajudar a superar os seus receios e os seus obstáculos.

3.2.1 Os Jogos

Segundo Melo e Sardinha (2009, p. 6) "o uso dos jogos no Ensino de Matemática pode ser considerado didaticamente como estratégia de ensino e também como tendência matemática", assim como a História da Matemática e a resolução de Problemas.

A intima ligação entre jogo e aprendizado não é algo novo. Explorar a imaginação e curiosidade dos alunos, promovendo a troca de ideias entre os participantes e a construção coletiva de saberes por meio de trabalhos em grupo. Tornar a aprendizagem leve e divertida, quebrando a rotina das aulas e buscando despertar o interesse dos alunos pelo estudo da matemática. Estão entre os benefícios dessa ferramenta de ensino.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, destaca-se que:

> Os jogos e brincadeiras são elementos muito valiosos no processo de apropriação do conhecimento. Permitem o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, da liderança e do trabalho em equipe, utilizando a relação entre cooperação e competição em um contexto formativo. O jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica, prazerosa e participativa de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos, (BRASIL, 2006, p. 28).

Quando criança o ser humano vivencia um aprendizado alegre, tudo é colorido e cheio de vida. Ao crescer, esse ambiente é muitas vezes modificado por espaços de aprendizado estáticos, mesas enfileiradas, rotinas de estudo, onde "ficar quieto" às vezes é meta. No sentido de quebrar esse ciclo, pode-se perceber os jogos como auxiliadores para uma aprendizagem mais dinâmica.

> As atividades lúdicas são inerentes ao ser humano. Cada grupo étnico apresenta sua forma particular de ludicidade, sendo que o jogo se apresenta como um objeto cultural. Por isso, encontramos uma variedade infinita de jogos, nas diferentes culturas e em qualquer momento histórico, (GRANDO, 2000, p. 1).

Esse aspecto cultural e histórico do jogo pode ser ilustrado na Figura 41 onde tem-se, respectivamente, a Representação de uma partida de xadrez no Livros dos Jogos, do rei espanhol Alfonso X e a Decoração de túmulo mostra rainha Nefertari com um dos jogos do Egito, o Senet.

Figura 41 – A prática de Jogos como costume desde a Antiguidade

Fonte:http://www.cartaeducacao.com.br/aulas/a-magnifica-historia-dos-jogos$\%E2\%80\%A8/$

A criação de diferentes jogos e brincadeiras tem origem na necessidade do Homem em desenvolver atividades lúdicas e esse desejo não é minimizado ou modificado em função da idade. Diariamente o indivíduo realiza atividades lúdicas, como ouvir música, brincar com seu animal de estimação, caminhar ou ainda equilibra-se no meio-fio, (GRANDO, 2000).

Os jogos podem ser classificados como:

> 1) Jogos de azar: são aqueles que dependem apenas da sorte para haver um vencedor, pois o jogador não pode interferir no resultado. Por exemplo, lançamento de dados, cassinos, loterias. 2) Jogos quebra-cabeça: são aqueles em que o jogador, em geral, joga sozinho e sua solução inicialmente é desconhecida. Por exemplo, puzzles, charadas, enigmas, problemas do tipo Torre de Hanói. 3) Jogos de estratégia: são os que dependem exclusivamente do jogador, pois o fator sorte não interfere. O jogador precisa elaborar uma estratégia para tentar vencer. Exemplos: xadrez, damas. 4) Jogos de fixação de conceitos: são os que têm como objetivo a fixação de conceitos em uma determinada disciplina. Por exemplo, podem ser usados após a apresentação de um conteúdo e substituem extensas listas de exercícios. 5) Jogos computacionais: são projetados e executados em ambiente computacional, (GRANDO, 1995 apud STRAPASON, 2011, p. 39).

Além de possuir muitos benefícios, deve-se destacar os cuidados na utilização desse recurso em sala de aula, sendo importante que os objetivos "[...] estejam claros, a metodologia a ser utilizada seja adequada ao nível que se está trabalhando e, principalmente, que represente uma atividade desafiadora ao aluno para o desencadeamento do processo", (GRANDO, 2000, p. 28).

Também é importante trabalhar o "saber perder" para evitar desmotivações em novas atividades lúdicas que vierem a acontecer. Além disso, o professor deve estar a todo momento atento e fazer intervenções. De acordo com Grando (2000, p. 29):

> Este momento caracteriza-se pelos questionamentos e observações realizadas pelo orientador da ação a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de “jogadas erradas” realizadas

> anteriormente, etc.). Neste momento, a atenção está voltada para os procedimentos criados pelos sujeitos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática.

Por fim, uma característica muito interessante que deve-se destacar no uso de Jogos é o desenvolvimento do trabalho em Equipe, tendo um papel de socialização importante. Para Miguel (2011, p. 390) "o jogo exige o desenvolvimento da capacidade de atuar sozinho e em grupo, criando e obedecendo a regras, agindo e reagindo a estímulos próprios da ação." Também, no PCN+ (BRASIL, 2002) o trabalho em grupo é visto como importante recurso para o desenvolvimento de competências.

Grando (2000, p. 29) acrescenta que:

> Nesse processo de socialização no jogo, a criança ouve o colega e discute, identificando diferentes perspectivas e se justificando. Ao se justificar, argumenta e reflete sobre os seus próprios procedimentos em um processo de abstração reflexiva.

3.2.2 As Tecnologias

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio destacam que a tecnologia de informação e comunicação provocou impacto na configuração da sociedade atual, exigindo indivíduos capacitados para bem usá-la e reconhecendo-a como ferramentas para subsidiar o processo de aprendizagem matemática. E propõe que ambos caminhem juntos, isto é, buscando na matemática meios para entender a tecnologia, e na tecnologia meios para entender a matemática, (BRASIL, 2006).

Nessa segunda proposta, destacam-se os softwares de matemática dinâmica, programas de expressão, neles é possível, por exemplo, fazer experimentos, esboçar conjecturas, testar hipóteses e criar estratégias para resolver problemas. Algumas características, como oferecer diferentes representações para um mesmo objeto e permitir sua manipulação na tela, tornam essa ferramente um recurso valioso em sala de aula, (BRASIL, 2006).

Nesse sentido, Magarinus (2013, p. 31) comenta que "alguns programas procuram criar ambientes de investigação matemática a fim de contribuir na construção do conhecimento por parte dos alunos." E realça que o uso da tecnologia pode facilitar e proporcionar a abordagem de assuntos mais complexos.

Alguns desafios para a utilização dessa ferramenta podem ser destacados, dentre eles, Nascimento (2017, p. 28) comenta que:

> [...] muitas vezes o professor se depara com laboratórios trancados, com equipamentos antigos, falta de acesso à internet, sem contar com as dificuldades que ele apresenta para dominar as tecnologias digitais, por esse motivo há muitos laboratórios de informática renegados nas escolas.

Apesar disso, Barbosa (2018, p. 21-22) acentua que, "embora tímido, atualmente se tem um maior uso de ambientes informatizados para o ensino da matemática, que visa melhorar o desempenho dos estudantes e melhorar o ensino básico".

3.2.2.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica com fácil utilização. Ele possibilita explorar diversos conteúdos matemáticos, entre eles o estudo de funções.

Sobre a sua utilização em sala de aula, Moraes (2013, p. 32) orienta que:

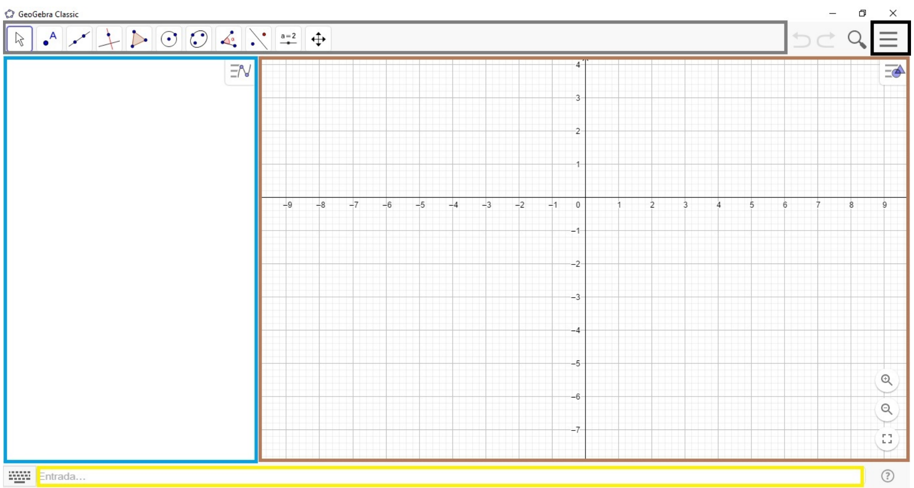
> O uso do software GeoGebra pode ser anterior à sistematização de um conteúdo, trabalhando a ideia para o melhor entendimento, posterior para aprimorar, refinar e explorar o seu conhecimento ou, ainda, durante o processo facilitando a visualização e a compreensão do que está sendo estudado.

Também, Barbosa (2017, p. 14-15) aponta as contribuições do uso do GeoGebra em sala de aula, destacando o fundamental e insubstituível papel do professor:

> Além das contribuições na atividade cognitiva relacionadas à matemática, o GeoGebra contribui para aumentar a motivação dos alunos para a aprendizagem. No entanto, esses recursos não ensinam por si só, é fundamental que o professor esteja preparado no momento de elaborar situações de aprendizagem. A figura do professor nunca poderá ser substituída pelo uso de ferramentas computacionais, pois os alunos não aprendem com o mero arrastar de objetos na tela.

A tela inicial do programa na versão 6.0 instalada em computador é apresentada na Figura 42:

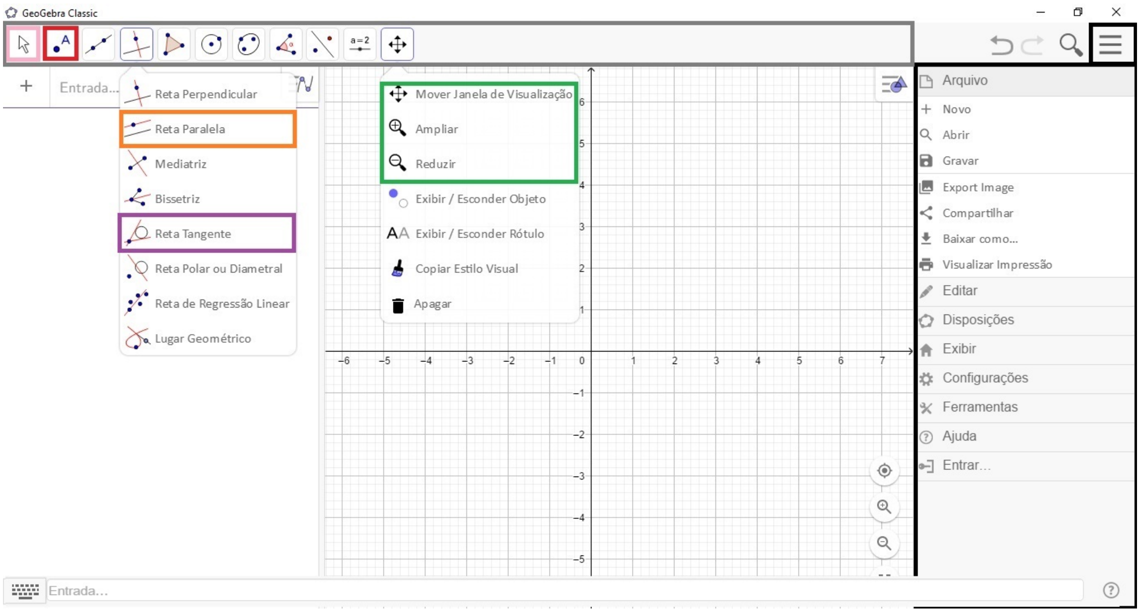
Figura 42 – Tela Inicial



Fonte: Autoria Própria

Destacado em cinza temos a Barra de Ferramentas, em azul, a Janela de Álgebra, em marron, a Janela de Visualização, em amarelo, o Campo de Entrada e em preto é exibida a Janela de Menus.

Figura 43 – Janela de Menus e a Barra de Ferramentas



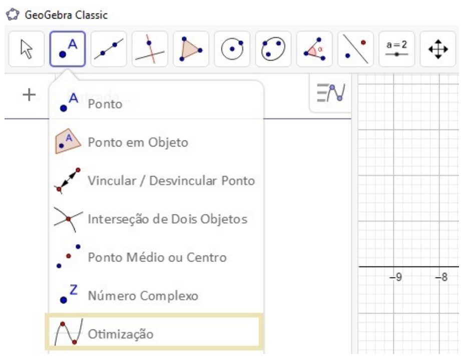
Fonte: Autoria Própria

As Ferramentas destacadas na Figura 43 são as que serão utilizadas nesse trabalho.

- Em rosa tem-se a ferramenta Mover: utilizada para selecionar ou arrastar objetos.
- Em vermelho tem-se a ferramenta Novo Ponto: para cria-lo basta clicar na janela de visualização ou sobre um objeto, criando um ponto sobre esse, ou ainda na interseção de duas linhas, criando um ponto de interseção.
- Em laranja tem-se a ferramenta Reta Paralela: para construí-la basta clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono.
- Em roxo tem-se a ferramenta Reta Tangente: para construí-la deve-se clicar sobre um ponto e depois no objeto ao qual a reta será tangente.
- Em verde tem-se as ferramentas Mover Janela de Visualização, Ampliar e Reduzir: Com elas, respectivamente, pode-se: mover o sistema de eixos, ajustando a área visível na Janela de Visualização e arrastando os eixos coordenados com o mouse consegue-se alterar a escala; ampliar a construção, clicando em qualquer lugar da Janela de Visualização; reduzir a construção, clicando em qualquer lugar da Janela de Visualização, (FRISKE et al., 2016).

Observação 3.1. *Nesta versão também tem-se a disposição a ferramenta Otimização, com o qual pode-se obter os pontos de máximo e mínimo locais e globais, veja sua localização na Figura 44.*

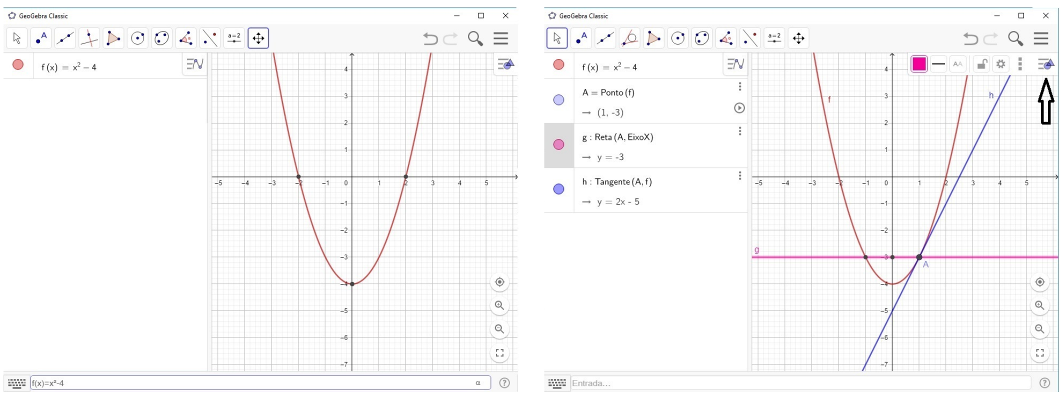
Figura 44 – Ferramenta Otimização



Fonte: Autoria Própria

Exemplo 3.1. *Inserindo a função $f(x) = x^2 - 4$ no Campo de Entrada seu gráfico é exibido na Janela de Visualização e sua lei de formação na Janela de Álgebra. Utilizando as ferramentas Novo Ponto, Reta Paralela e Reta Tangente, criou-se respectivamente, um ponto $A = (1, -3)$ sobre o gráfico de f, uma reta paralela ao eixo das abscissas passando por A e uma reta tangente ao gráfico de f também passando por A (Figura 45). Logo, percebe-se que a taxa de variação instantânea em $x = 1$ é 2, coeficiente angular da reta tangente no ponto $A = (1, -3)$.*

Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$



Fonte: Autoria Própria

É possível alterar a Cor e o traçado dos elementos da Janela de Visualização, selecionando esses objetos e utilizando a opção destacada com a seta na Figura 45.

3.2.3 Resolução de Situações-Problemas

A resolução de situações-problemas é importante na contextualização e na inserção de significados dos conteúdos abordados, além disso, buscam desafiar o aluno que necessita desenvolver táticas para alcançar seus objetivos. No que se refere a modelagem matemática desses problemas, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio destacam que:

> Ante uma situação-problema ligada ao "mundo real", com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento, (BRASIL, 2006, p. 85).

A matriz de referência ENEM (BRASIL, 2012) realça o enfrentamento de situações-problemas como parte do eixo cognitivo comum de todas as áreas do conhecimento, promovendo ações como: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas com o objetivo de tomar decisões.

O PCNEM aponta que:

> [...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático, (BRASIL, 2000, p. 41).

O pensar matemático diz respeito as habilidades de interligar conteúdos e saber aplicá-los para diferentes problemas propostos sem que haja a necessidade de nítida indicação do uso desses conhecimentos. É saber usá-los a favor de sua aprendizagem e torná-los instrumentos de vida. Enxerga-los como meios para resolver situações cotidianas e amar o desafio, como forma de evolução. Motivar-se e reconhecer a matemática como ferramenta para entender o mundo que os cerca, os fenômenos naturais, as tecnologias, economia, etc. E o fazer matemática está intimamente relacionado a atividade de investigação matemática.

Braumann (2002, p. 5) destaca que:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do

> mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detectivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andarem e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

3.3 Legislação e Livros Didáticos

No que se refere as habilidades e competências esperadas no campo algébrico simbólico, o currículo mínimo do Estado do Rio de Janeiro:

1. No 3º Bimestre da 1ª série do Ensino Médio, onde as atividades serão sugeridas, indica:
    - A identificação de uma função quadrática;
    - A representação gráfica de uma função quadrática;
    - A compreensão do significado dos coeficientes de uma função quadrática;
    - A utilização da função quadrática para resolver problemas;
    - A **resolução de problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos de uma função quadrática**, (RIO DE JANEIRO, 2012).
2. No 1º e 2º Bimestre, indica:
    - A compreensão do conceito de função através da dependência entre variáveis;
    - A identificação da expressão algébrica que expressa uma regularidade ou padrão;
    - A representação de pares ordenados no plano cartesiano;
    - A construção de gráficos de funções utilizando tabelas de pares ordenados;
    - A **análise de gráficos de funções** (crescimento, decrescimento, zeros, variação do sinal);
    - A identificação de uma função afim;
    - A utilização da função afim para resolver problemas significativos;
    - A identificação da função linear com o conceito de grandezas proporcionais
    - A representação gráfica de uma função afim;
    - A **compreensão do significado dos coeficientes de uma função afim**;

- A identificação de uma função afim descrita através do seu gráfico cartesiano, (RIO DE JANEIRO, 2012).

Além disso, entre os conteúdos abordados no Ensino Fundamental estão: o plano cartesiano; o conceito de função e sua representação gráfica por meio de pares ordenados; a equação do 2º grau; a equação irracional simples; a expressão algébrica; a equação do 1º grau; o sistema de equações do 1º grau; o perímetro e a área de figuras geométricas; o Teorema de Pitágoras; posições entre retas; o volume do cubo e do paralelepípedo; a semelhança de polígonos; a porcentagem, (RIO DE JANEIRO, 2012). Nota-se que o primeiro contato detalhado com as funções afim e quadrática ocorre na 1ª série do Ensino Médio. E que o aluno tem contato com outros tipos de funções por meio da análise gráfica.

A matriz de referência de Matemática e suas tecnologias do ENEM inclui as seguintes habilidades:

> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
>
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
>
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
>
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
>
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos, (BRASIL, 2012, p. 6).

E o PCN+, em sua seção Competências em Matemática, no que se refere a Modelos explicativos e representativos, detalha as seguintes habilidades: identificar, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos, sistemas naturais ou tecnológicos, analisando-os. Como exemplo, cita **a utilização de funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo ou prejuízo mínimo**, (BRASIL, 2002).

Analisando três livros didáticos da 1ª série do Ensino Médio com características distintas (Figura 46), sugeridos no PNLD (2015), Livro 1 (IZZI et al., 2013), Livro 2 (SMOLE; DINIZ, 2013), Livro 3 (BARROSO, 2010), observa-se que o reconhecimento de máximos e mínimos de funções variadas só é tratado visualmente em gráficos "prontos", já o cálculo algébrico dos mesmos está associado apenas a situações-problemas modeladas por funções quadráticas, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola, as quais se deduzem por meio da característica de simetria do gráfico ou a partir de sua forma canônica. Não existindo uma proposta de estudo mais aprofundada do tema máximos e mínimos, tendo em vista sua ampla aplicabilidade em situações-problemas diversas (de engenharia, fenômenos naturais, ...), as quais são modeladas por funções variadas.

Figura 46 – Análise de Livros Didáticos

Assunto	Livro 1	Livro 2	Livro 3
Apresenta a definição de máximos e mínimos de funções	Sim	Não	Sim
Apresenta as coordenadas do vértice da Parábola por meio da observação de características relacionadas a simetria de seu gráfico	Sim	Sim	Sim
Apresenta as coordenadas do vértice da Parábola por meio de análise da forma canônica da função	Sim	Não	Não
Associa o ponto de máximo ou mínimo de uma função do 2° grau ao vértice da parábola representativa da função	Sim	Sim	Sim
Propõe problemas de máximos e mínimos modelados por uma função quadrática	Sim	Sim	Sim
Propõe problemas de máximos e mínimos modelados por outros tipos de funções	Não	Não	Não
Propõe reconhecer máximos e mínimos através da análise de variados gráficos "prontos"	Sim	Não	Sim
Apresenta a taxa de variação média de uma função afim	Sim	Não	Sim
Apresenta a taxa de variação média de uma função não-afim	Sim	Não	Não
Apresenta noções de taxa de variação instantânea	Não	Não	Não

Fonte: Autoria Própria

Nesse sentido, como o aluno já trabalha a identificação de máximos e mínimos em diversos gráficos "prontos" de funções variadas, tendo o conhecimento do conceito de máximo e mínimo, além de possuir noções da taxa média de variação, pode-se refletir a possibilidade de modelagem de outros tipos de situações-problema e utilização da tecnologia, por meio do software GeoGebra, para buscar encontrar essas melhores soluções para funções variadas.

Tendo em vista os benefícios apontados do uso do GeoGebra em sala de aula para o processo de ensino e aprendizagem, com a possibilidade de exploração e investigação matemática de uma forma dinâmica, pode-se propor que a busca dessas soluções aconteça por meio de uma construção coletiva, formulando uma estratégia matemática para reconhecer máximos e mínimos ao observar as características relacionadas ao coeficiente angular da reta tangente em cada ponto do gráfico da função quadrática. A partir disso, pode-se generalizar as descobertas para outros tipos de funções. Além disso, percebe-se que o GeoGebra também auxilia na abordagem de vários conteúdos propostos no capítulo 1, entre eles a taxa média de variação e a taxa instantânea de variação de funções variadas, identificando-as como coeficiente angular de retas secantes e tangentes, respectivamente, ao gráfico.

Alguns autores como Mendes (2015, p. 9) defendem a abordagem de máximos e mínimos de diferentes funções e comenta que "[...] não é preciso mencionar aquela definição rebuscada da derivada, mas levar ao conhecimento do alunos as ideias intuitivas." Ele propõe o uso do GeoGebra para a localização de extremo, ponto A, digitando no Campo de Entrada "Extremos [f]", depois traçando as reta tangente a esse ponto, digitando "Tangente[A,f]", além disso, verifica que os extremos são as raízes de f', digitando "Derivada [f]" e "Raiz [f']". Também Moraes (2013) destaca os seguintes comandos: "Extremo", "Máximo e Mínimo"; para determinar os pontos de máximo e mínimo locais e globais de uma forma muito simples.

3.4 Contribuições para as Propostas de Atividades

A partir da revisão teórica e pesquisas realizadas delineou-se, como importantes para a elaboração das atividades sobre máximos e mínimos, os seguintes aspectos:

- Utilizar metodologias de ensino diversificadas, buscando despertar o interesse dos estudantes e atrair o gosto pela matemática.
- Propor uma nova postura por parte dos docentes, que devem fazer questionamentos ao longo das atividades, incentivando uma gradual evolução de ideias e buscando que os alunos explorem ao máximo cada atividade proposta;
- Possibilitar a construção do conhecimento por meio do incentivo de uma postura ativa pelos discentes e a troca de ideias em trabalhos em grupo;
- Buscar a contextualização como forma de tornar o aprendizado mais atrativo e "próximo" do aluno, utilizando-o inclusive na dedução das coordenadas do vértice da parábola, tornando a abordagem mais "leve" e cativando o aluno em cenários de canhões;
- Utilizar papel vegetal como material concreto que possibilita a exploração das características de simetria do gráfico de uma função quadrática;
- Utilizar o GeoGebra como ambiente tecnológico que permite a abordagem mais ampla do assunto, sem tornar o tema inacessível ao nível de ensino em que é proposto, possibilitando tarefas de investigação matemática;
- Propor a modelagem de situações-problemas de máximos e mínimos em funções variadas, ampliando a visão do aluno.
- Não fazer um estudo de forma isolada, mas utilizando a “bagagem” de conhecimentos já adquirida pelo aluno e a fixação de conteúdos já trabalhados.

Capítulo 4

PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste Capítulo é apresentada uma sequência de quatro atividades sugeridas para o 3° Bimestre de turmas da 1ª série do Ensino Médio, visando explorar o conceito de máximos e mínimos de funções, ampliando esse estudo. A ordem em que foram apresentadas as atividades buscou valorizar a evolução do conteúdo e contribuir com um entendimento melhor dos estudantes. E, com o objetivo de tornar a aprendizagem mais atrativa e dinâmica, foi utilizada a resolução de situações-problemas, jogos e GeoGebra.

4.1 Atividade 1: Batalha de Canhões

Objetivos do Jogo:

- Reconhecer uma função do 2° grau por meio de seu gráfico e lei de formação;
- Fazer uma correspondência entre o cenário do Jogo e um sistema de coordenadas, buscando facilitar o entendimento dos alunos;
- Localizar pontos no plano cartesiano;
- Definir e visualizar as raízes ou zeros de uma função do 2° grau e como as determinar algebricamente;
- Analisar o posicionamento de pontos do gráfico de uma função do 2° grau em relação ao eixo de simetria;
- Verificar a relação entre o coeficiente a do termo x^2 na lei de formação da função e a concavidade de seu gráfico;
- Descobrir as coordenadas do vértice de uma parábola que corta o eixo OX por meio da observação de características relacionadas a localização de suas raízes, evitando uma exposição de fórmulas prontas, o que muitas vezes parecem "vazias", sem significado;

- Associar o ponto máximo de uma função do 2° grau ao vértice de uma parábola côncava para baixo;
- Interpretar e resolver problemas utilizando os conhecimentos adquiridos.

Público Alvo Sugerido: Turmas da 1ª série do Ensino Médio.

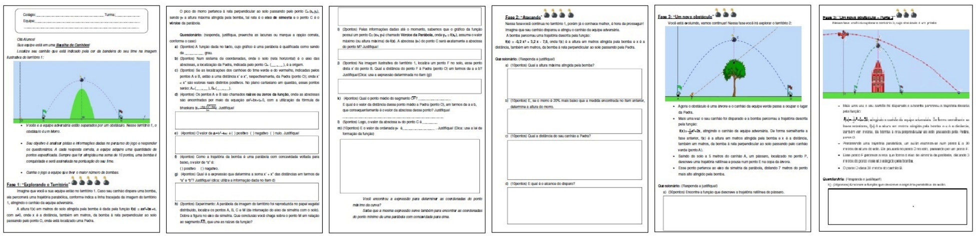
Pré-requisitos:

O aluno deve ter estudado noções de plano cartesiano, conceitos sobre função, função afim, e estar aprendendo sobre função de 2° grau. Além disso, deve saber construir e resolver sistemas de equações de 1° grau, porcentagem simples e ter conhecimentos básicos de geometria plana, como ponto médio e reta perpendicular.

Materiais Necessários:

- Ficha de Atividade do jogo (Figura 47), disponível no Apêndice A composta pelas instruções e desenvolvimento, que será distribuída as equipes;

Figura 47 – Ficha de Atividade impressa para o Jogo Batalha de Canhões



Fonte: Autoria Própria

- Folha de papel vegetal para experimento (Apêndice C), conforme instruções presentes dentro da ficha de atividades;
- Cartaz com a pontuação das equipes para ficar fixado na sala de aula durante jogo (Apêndice B);
- Folha branca e caneta para anotações pelo professor.

Não é necessário nenhum tipo de material extra de pesquisa e/ou calculadora.

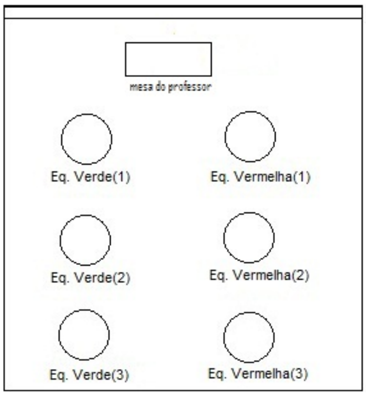
Recomendações Metodológicas:

Para uma turma de 30 alunos recomenda-se a seguinte organização:

- Divisão da turma em 6 equipes de 5 integrantes cada.
- Classificação das equipes por cores e numeração: Verde(1), Vermelha(1), Verde(2), Vermelha(2), Verde(3) e Vermelha(3). Aquelas com a mesma numeração disputam entre si.

- Organização física dos grupos de acordo com o esquema apresentado na Figura 48.

Figura 48 – Esquema de organização da sala de aula para o Jogo Batalha de Canhões



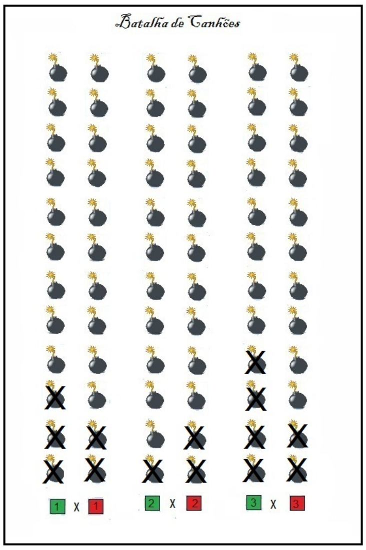
Fonte: Autoria Própria

Descrição Geral:

1. Distribuição e leitura da ficha de atividades impressas (Apêndice A), contendo as 4 fases do jogo:
   - **Fase 1: Explorando o Território**; reconhecer elementos Matemáticos no cenário do jogo, construindo "pontes" entre as informações apresentadas, utilizando noções de plano cartesiano e função de 2° grau. Partindo de uma evolução de ideias, os alunos são levados a reconhecer as coordenadas do vértice da parábola, ponto de máximo ou mínimo da função do 2° grau.
   - **Fase 2: Atacando**; utilizar os novos conhecimentos conquistados na fase 1 para uma função específica.
   - **Fase 3 e 4: Um novo obstáculo 1 e 2**; trabalhar com novas situações, buscando a lei de formação que descreve a trajetória de elementos (pássaro e avião) incluídos no cenário do jogo.
2. Cada fase contém uma tarefa composta de um ou mais itens com uma pontuação especificada, que são respondidos por cada equipe, por meio da troca de ideias entre os integrantes.
3. Ao final de cada item da tarefa, o professor verifica as respostas das equipes e anota numa folha branca a pontuação alcançada por cada uma. A seguir, é recomendável fazer comentários e esclarecimentos sobre as soluções obtidas por eles antes de dar continuidade a atividade. O professor deve destinar, aproximadamente, de 2 a 3 minutos em cada item para fazer suas exposições.

4. Ao final de cada fase, o professor soma a pontuação das equipes, a cada soma de 10 pontos uma bomba é conquistada e será sinalizada com “X” no cartaz de pontuação, na coluna da equipe, veja Figura 49. Caso haja sobra de pontos, eles acumulam para a próxima etapa.

Figura 49 – Exemplo de Pontuação das equipes ao final da Fase 1



Fonte: Autoria Própria

5. Ganha a equipe que tiver o maior número de bombas ao final das 4 fases.

Dificuldades previstas:

Devido a utilização de uma função geral, a fase 1 pode trazer mais dificuldades na interpretação da situação.

Possíveis continuações ou desdobramentos:

Usar translação para verificar as coordenadas do vértice da parábola também para funções que não cortam o eixo das abscissas.

Duração total Estimada:

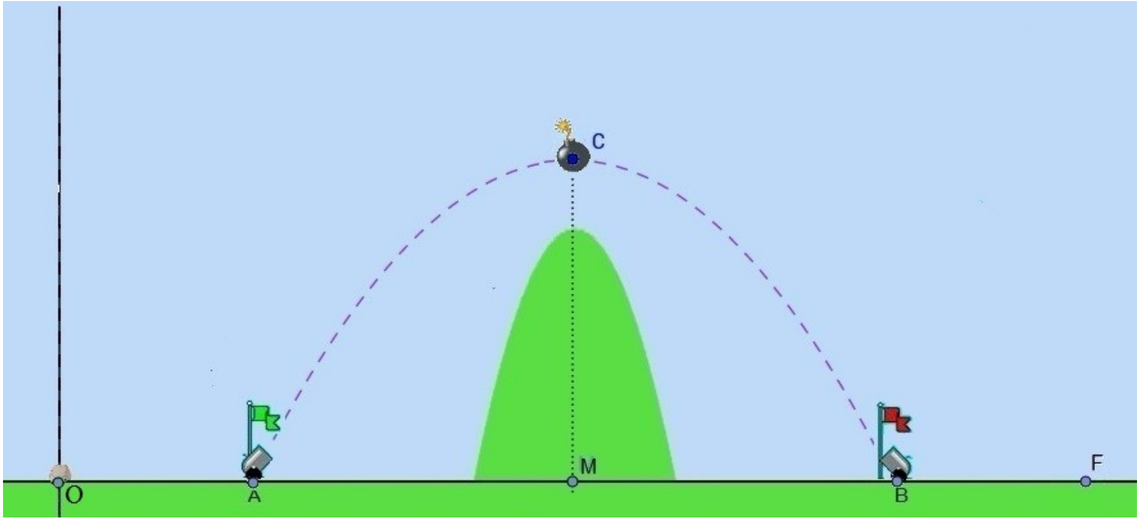
Aproximadamente, 150 min: 110 minutos para os alunos e 40 minutos para o professor.

A atividade:

1. **Fase 1: “Explorando o Território"**

   Imagine que você e sua equipe estão no território 1 (Figura 50). Caso seu canhão dispare uma bomba, ela percorrerá uma trajetória parabólica, conforme indica a linha tracejada da imagem, atingindo o canhão da equipe adversária.

Figura 50 – Território 1



Fonte: Autoria Própria

A altura $f(x)$ em metros do solo atingida pela bomba é dada pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pelo ponto O, onde está localizada uma Pedra.

O pico do morro pertence à reta perpendicular ao solo passando pelo ponto $C = (x_v, y_v)$, sendo y_v a altura máxima atingida pela bomba, tal reta é o eixo de simetria e o ponto C é o vértice da parábola.

a) (3pontos) A função dada no texto, cujo gráfico é uma parábola é qualificada como sendo de .... grau.

Solução:

- 2° grau

b) (2pontos) Num sistema de coordenadas, onde o solo (reta horizontal) é o eixo das abscissas, a localização da Pedra, indicada pelo ponto $O = (....,....)$, é a origem.

Solução:

- $O = (0, 0)$, é a origem.

c) (3pontos) Se as localizações dos canhões do time verde e do vermelho, indicadas pelos pontos A e B, estão a uma distância x' e x'', respectivamente, da Pedra (ponto O). No plano cartesiano em questão, esses pontos serão: $A = (....,....)$, $B = (....,....)$.

Solução:

- A=$(x', 0)$, B =$(x'', 0)$.

d) (4pontos) As abscissas dos pontos A e B, ... e ......, são chamadas raízes ou zeros da função. Justifique a afirmativa!

E podemos obtê-las por meio da resolução da equação de 2º grau: ....

Solução:

- x' e x'' são chamadas raízes ou zeros da função, pois $f(x') = 0$ e $f(x'') = 0$, isto é, são as abscissas dos pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas (solo). Podemos obtê-las por meio da resolução da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

e) (4pontos) Como a trajetória da bomba é uma parábola com concavidade voltada para ...., o valor de a é: ( ) positivo ( ) negativo.

Solução:

- A parábola tem concavidade voltada para baixo, logo o valor de a é negativo.

f) (4pontos) Com a utilização da Fórmula de Resolução da Equação do Segundo Grau, temos que as raízes, em termos de a, b e $\Delta = b^2 - 4ac$, são:......................

Solução:

- $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

g) (4pontos) Qual é a expressão que determina a soma $x' + x''$ das distâncias em termos de a e b? Justifique sua resposta!

Solução:

- $x' + x'' = x'' + x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$

h) (2pontos) Experimento: A parábola da imagem do território foi reproduzida no papel vegetal (Apêndice C) distribuído, localize os pontos A, B, C e M (de interseção do eixo de simetria com o solo). Dobre a figura no eixo de simetria. Que conclusão você chega sobre o ponto M em relação ao segmento AB, que une as raízes da função?

Solução:

- M é ponto médio do segmento.

i) (2pontos) Pelas informações dadas até o momento, sabemos que o gráfico da função possui um ponto $C = (x_v, y_v)$ chamado Vértice da Parábola, onde $y_v = f(x_v)$ assume o valor máximo (ou altura máxima) de $f(x)$. A abscissa (x_v) do ponto C será exatamente a abscissa do ponto M? Justifique sua resposta!

Solução:

- Sim! Pois pertencem a mesma reta vertical no sistema de coordenadas: o eixo de simetria do gráfico.

j) (3pontos) Na imagem ilustrativa do território 1 (Figura 50), localize um ponto F no solo, esse ponto dista x' do ponto B. Qual a distância do ponto F à Pedra (ponto O) em termos de a e b? Justifique sua resposta!

Solução:

- Observe que $\overline{OB} = x''$ e $\overline{BF} = x'$, logo a distância solicitada $\overline{OF}$ é: $x'' + x' = \frac{-b}{a}$

k) (4pontos) Qual o ponto médio do segmento OF ? ....

A distância desse ponto médio à Pedra (ponto O), em termos de a e b, é ...., consequentemente, o valor da abscissa desse ponto é .... Justifique suas respostas!

Solução:

- O ponto médio de OF é M, exatamente o mesmo ponto médio de AB. Observe que $\overline{OA} = x'$ e $\overline{BF} = x'$. A metade da distância $\frac{\overline{0F}}{2}$ será: $\frac{1}{2}.\frac{-b}{a}$ $= \frac{-b}{2a}$. Logo, a abscissa do ponto M é $\frac{-b}{2a}$.

l) (5pontos) Logo, o valor da abscissa x_v do ponto C é ....

Solução:

- Por i) e k), concluímos que x_v = $\frac{-b}{2a}$.

m) (10pontos) E o valor da ordenada y_v é .... Justifique sua resposta!

Solução:

- $y_v = a{x_v}^2 + bx_v + c = a(\frac{-b}{2a})^2 + b(\frac{-b}{2a}) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{a(b^2 - 2b^2 + 4ac)}{4a^2} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$

2. **Fase 2: "Atacando"**

Nessa fase você continua no território 1 (Figura 50), porém já o conhece melhor, é hora de prosseguir!

Imagine que seu canhão disparou e atingiu o canhão da equipe adversária.

A bomba percorreu uma trajetória descrita pela função:

$f(x) = -0,2x^2 + 3,2x - 7,8$, onde $f(x)$ é a altura em metros atingida pela bomba e x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pela Pedra.

a) (10pontos) Qual a altura máxima atingida pela bomba?

Solução:

- A altura máxima atingida pela bomba é o valor máximo de $f(x)$, dado pela expressão da ordenada do vértice da parábola y_v = $\frac{-\Delta}{4a}$ =$\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$ = $\frac{-(3{,}2^2-4.(-0{,}2).(-7{,}8))}{4(-0{,}2)}$ = $\frac{-4}{-0{,}8}$ = 5 metros.

b) (10pontos) E, se o morro é 20 % mais baixo que a medida encontrada no item anterior, determine a altura do morro.

Solução:

- 20 % de 5 = 1, logo, o morro tem altura de 5-1= 4 metros.

c) (10pontos) Qual a distância do seu canhão a Pedra?

Solução:

- Como a localização da Pedra representa o ponto $(0, 0)$ no sistema de coordenadas e os pontos A e B (pontos de localização dos canhões) são raízes, temos que a distância solicitada é encontrada por meio da equação do 2° grau $-0,2x^2 + 3,2x - 7,8 = 0$.
  x'= $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ = $\frac{-3{,}2+\sqrt{4}}{2(-0{,}2)}$ = $\frac{-1{,}2}{-0{,}4}$ = 3 metros (canhão A)
  x'' = $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ = $\frac{-3{,}2-\sqrt{4}}{2(-0{,}2)}$ = $\frac{-5{,}2}{-0{,}4}$ = 13 metros (canhão B)

d) (10pontos) E qual é o alcance do disparo?

Solução:

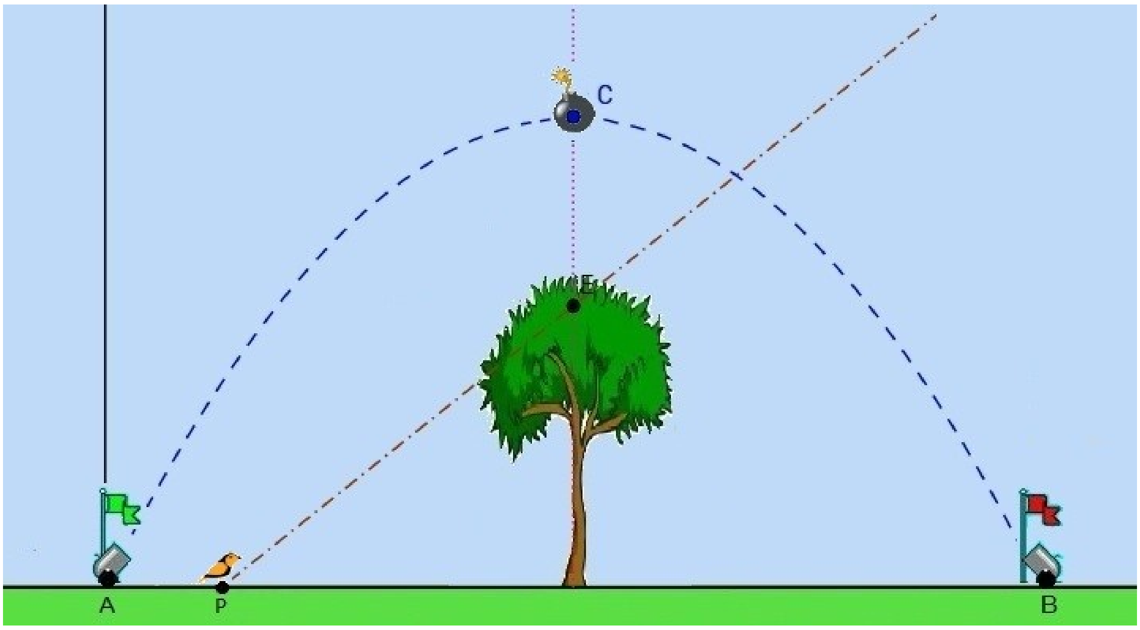
- O alcance do disparo é a distância do canhão A ao canhão B. Logo, será de 13-3= 10 metros

3. **Fase 3: “Um novo obstáculo 1"**

Você está evoluindo, vamos continuar! Nessa fase você irá explorar o território 2 (Figura 51):

- Agora o obstáculo é uma árvore e o canhão da equipe verde passa a ocupar o lugar da Pedra.
- Mais uma vez o seu canhão foi disparado e a bomba percorreu a trajetória descrita pela função:
  $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$, atingindo o canhão da equipe adversária. De forma semelhante a fase anterior, $f(x)$ é a altura em metros atingida pela bomba e x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pelo canhão verde (ponto A).
- Saindo do solo, à 5 metros do canhão A, um pássaro, localizado no ponto P, descreve uma trajetória retilínea e pousa num ponto E na copa da árvore.
- Esse ponto pertence ao eixo de simetria da parábola, distando 7 metros do ponto mais alto atingido pela bomba.

Figura 51 – Território 2



Fonte: Autoria Própria

a) (30pontos) Encontre a função que descreve a trajetória retilínea do pássaro.

Solução:

- O ponto mais alto atingido pela bomba é o vértice da parábola, de coordenadas dadas por (x_v,y_v), onde $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-(2^2-4.(-0{,}05).(0))}{4.(-0{,}05)} = \frac{-4}{-0{,}2} = 20$ e $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-0{,}05)} = 20$. Como o ponto na copa da árvore pertence ao eixo de simetria da parábola $(x = 20)$ e está a 7 metros de altura abaixo do vértice, concluímos que as coordenadas desse ponto são $(20, 20-7) = (20, 13)$.

  O pássaro descreve uma trajetória retilínea, sabe-se que a função cujo gráfico é uma reta é dada por $g(x) = ax+b$. Como o pássaro está no solo a uma distância de 5 metros do canhão A, ele parte do ponto $(5, 0)$. Conhecendo-se esses dois pontos do gráfico da trajetória do animal, podemos construir o seguinte sistema:

  $$\begin{cases} 20a+b=13 \\ 5a+b=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 20a+b=13(1) \\ b=-5a(2) \end{cases}$$

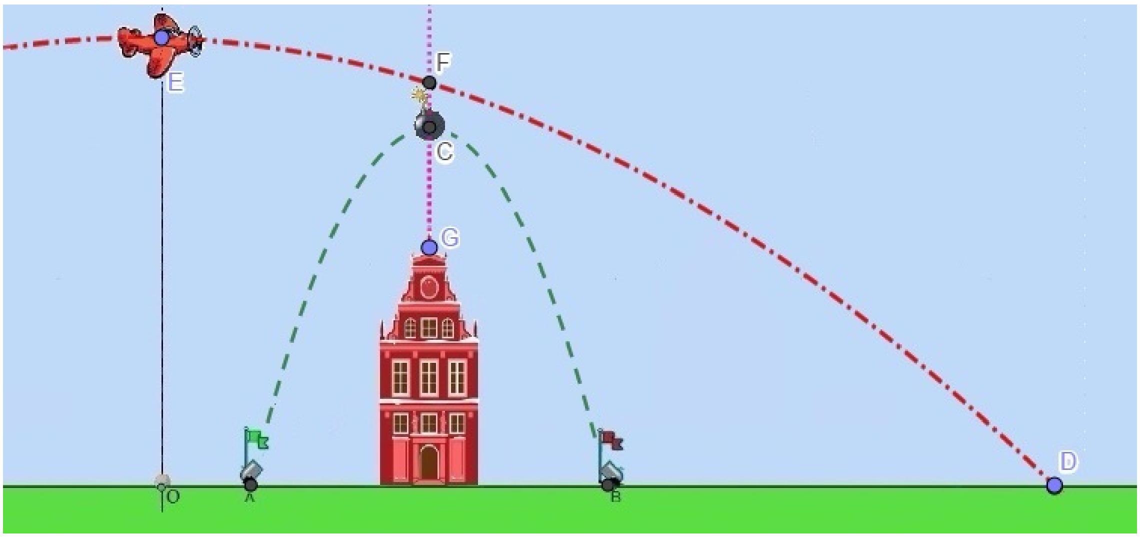
  Então, substituindo (2) em (1), temos: $20a+(-5a) = 13 \leftrightarrow 15a = 13 \leftrightarrow a = \frac{13}{15}$ Logo, $b = -5.\frac{13}{15} \leftrightarrow b = \frac{-13}{3}$. Então a função que descreve a trajetória é $g(x) = \frac{13}{15}x - \frac{13}{3}$.

4. **Fase 4: “Um novo obstáculo 2"**

Nessa fase você irá explorar o território 3 (Figura 52), cujo obstáculo é um prédio:

- Mais uma vez o seu canhão foi disparado e a bomba percorreu a trajetória descrita pela função:

Figura 52 – Território 3



Fonte: Autoria Própria

$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 6x - 30$, atingindo o canhão da equipe adversária. De forma semelhante as fases anteriores, $f(x)$ é a altura em metros atingida pela bomba e x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pela Pedra, ponto O.

- Percorrendo uma trajetória parabólica, um avião encontra-se num ponto E a 30 metros de altura do solo. Ele pousará no ponto D no solo, passando por um ponto F.
- Esse ponto F pertence a reta que forma o eixo de simetria da parábola, distando 3 metros do ponto mais alto atingido pela bomba.
- O ponto D dista 30 metros do canhão B.

a) (30pontos) Encontre a função que descreve a trajetória parabólica do avião.

Solução:

- O ponto mais alto atingido pela bomba é o vértice da parábola, de coordenadas dadas por (x_v,y_v), onde $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(6^2-4(\frac{-1}{6})(-30)}{4(\frac{-1}{6})} = \frac{-(36-20)}{\frac{-4}{6}} = \frac{-96}{-4} = 24$ e $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(\frac{-1}{6})} = \frac{-6}{(\frac{-2}{6})} = \frac{36}{2} = 18$. Como o ponto F pertence a reta que forma o eixo de simetria da parábola $(x = 18)$, e está a 3 metros de altura acima do vértice, concluímos que as coordenadas desse ponto são $(18, 24 + 3) = (18, 27)$.

  O avião está a 30 metros de altura do solo, logo encontra-se no ponto $E = (0, 30)$, isto é, se a função que descreve a trajetória parabólica é $g(x) = ax^2 + bx + c$ tem-se que $c = 30$, ponto que corta o eixo das ordenadas.

  Os canhões A e B estão localizados nos pontos:

$(x', 0)$= $(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0) = (\frac{-6+\sqrt{6^2-4(\frac{-1}{6})(-30)}}{2(\frac{-1}{6})}, 0) = (\frac{-6+\sqrt{16}}{\frac{-2}{6}}, 0) = (\frac{-6+4}{\frac{-2}{6}}, 0) = (\frac{-2}{\frac{-2}{6}}, 0) =$ $(6, 0)$ (canhão A) e

$(x", 0)$= $(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0) = (\frac{-6-\sqrt{6^2-4(\frac{-1}{6})(-30)}}{2(\frac{-1}{6})}, 0) = (\frac{-6-\sqrt{16}}{\frac{-2}{6}}, 0) = (\frac{-6-4}{\frac{-2}{6}}, 0) = (\frac{-10}{\frac{-2}{6}}, 0) =$ $(30, 0)$ (canhão B).

Portanto, o avião pousará em $D = (30 + 30, 0) = (60, 0)$.

Podemos construir o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 27 = (18)^2a + 18b + 30 \\ 0 = (60)^2a + 60b + 30 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 324a + 18b = -3 \\ 3600a + 60b = -30 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{6} - 18a(1) \\ 3600a + 60b = -30(2) \end{cases}$$

Então, substituindo (1) em (2), temos: $3600a + 60(-\frac{1}{6} - 18a) = -30 \leftrightarrow 3600a - 10 - 1080a = -30 \leftrightarrow 2520a = -20 \leftrightarrow 252a = -2 \leftrightarrow a = -\frac{1}{126}$

Logo, $b = -\frac{1}{6} - 18(-\frac{1}{126}) \leftrightarrow b = -\frac{21}{126} + \frac{18}{126} \leftrightarrow b = -\frac{3}{126} \leftrightarrow b = -\frac{1}{42}$. Então, a função que descreve a trajetória do avião é $g(x) = -\frac{1}{126}x^2 - \frac{1}{42}x + 30$.

4.2 Atividade 2: Escalada com Tijolos

Objetivos do Jogo:

- Identificar raízes, intervalos de crescimento e decrescimento, domínio e imagem, máximos e mínimos em diversos gráficos "prontos" de funções variadas. Além de encontrar a taxa média de variação num intervalo dado dessa função;
- Determinar se uma função quadrática possui ponto de máximo ou de mínimo a partir de "pistas" do enunciado;
- Identificar entre as funções lineares dadas no enunciado aquela que atingiu o ponto máximo mais rapidamente, "partindo" da origem do sistema de coordenadas, relacionando com o valor do coeficiente "a";
- Identificar entre as funções quadráticas dadas no enunciado aquela que possui maior valor máximo e menor valor mínimo;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos de uma função quadrática, utilizando as coordenadas do vértice da parábola;
- Utilizar a relação entre o coeficiente $"a"$ do termo x^2 na lei de formação da função quadrática e a existência de máximo ou de mínimo, a determinação da abscissa do vértice a partir da equação do eixo de simetria e a determinação da ordenada do vértice a partir da equação da reta horizontal tangente ao gráfico para resolver problemas.

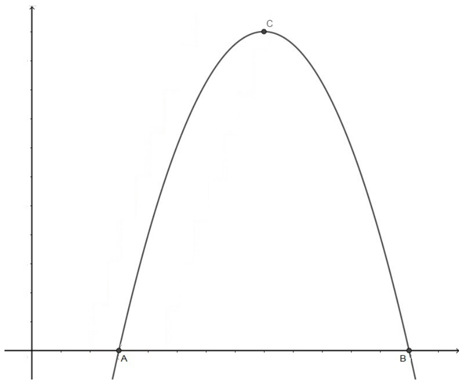
Público Alvo Sugerido: Turmas da 1ª série do Ensino Médio.

Pré-requisitos: O aluno já deve ter estudado os conteúdos da seção 1.1 a seção 1.8 do Capítulo 1. E ter realizado a atividade "Batalha de Canhões".

Materiais Necessários:

- Cartas do jogo, chamadas "cartas-tijolos" (Apêndice D);
- Cartas com as respostas, chamadas "cartas-respostas" (Apêndice E);
- Cartaz com o trajeto-escalada (Figura 53) das equipes, disponível para ampliação no Apêndice F, para ficar fixado na sala de aula durante jogo;

Figura 53 – Trajeto-Escalada



Fonte: Autoria Própria

- Fita crepe para colar as "cartas-tijolos" no trajeto.
- Folha branca e lápis para anotações pelo professor e cálculos pelos alunos;

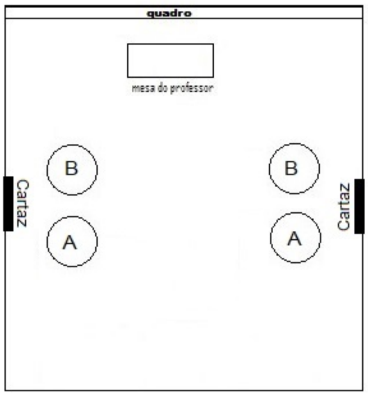
  Não é necessário uso de calculadora. É permitido consulta ao caderno e livro

Recomendações Metodológicas:

Para uma turma de 20 alunos recomenda-se a seguinte organização:

- Divisão da turma em 4 equipes (2 equipes A, 2 Equipes B) de 5 integrantes cada.
- Organização física das equipes de acordo com o esquema da Figura 54.

Figura 54 – Esquema de organização da sala de aula



Fonte: Autoria Própria

Descrição Geral:

1. Com as "cartas-tijolos" bem embaralhadas, cada equipe seleciona 1 carta do monte para a rodada. A equipe pode fazer um corte no monte (Figura 55) antes de selecionar sua carta.

Figura 55 – Corte

Fonte: Autoria Própria

2. A carta selecionada pode conter bônus (estrela) que dar direito a equipe de selecionar mais uma carta do monte.

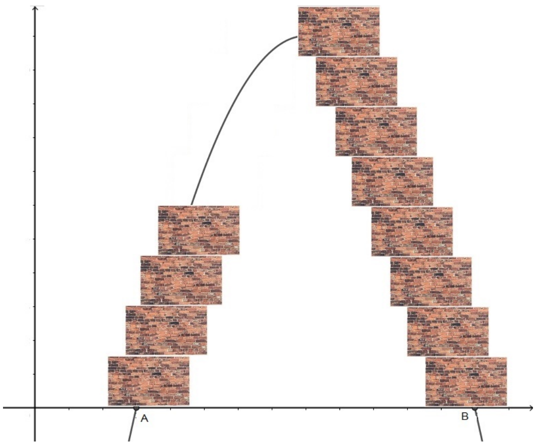
3. Cada equipe, por meio da troca de ideias entre os integrantes, resolve a questão proposta na sua carta. Ao final, as equipes buscam as cartas-respostas correspondentes (Figura 56) e conferem os resultados. Caso esteja correta, a equipe conquista a "carta-tijolo" e pode pregá-la com a fita crepe no seu trajeto-escalada do cartaz.

Figura 56 – Cartas-respostas

Fonte: Autoria Própria

4. Cada equipe sai do ponto de letra correspondente a da sua equipe, com o objetivo de alcançar a altura máxima em C.
5. Ganha a equipe que conseguir chegar primeiro no ponto C, veja Figura 57.

Figura 57 – Exemplo de trajeto-escalada ao final do jogo



Fonte: Autoria Própria

Duração total Estimada: Uma hora e 40 minutos.

Dificuldades previstas: Os alunos podem apresentar mais dificuldade na interpretação das cartas de números 9 e 10.

Possíveis continuações ou desdobramentos: Podem ser acrescentadas novas "cartas-tijolos" e o trajeto ampliado.

4.3 Atividade 3: "Sherlock Holmes" de Gráficos

Objetivos:

- Corroborar os pontos de máximo e mínimo de uma função quadrática obtidos por meio da fórmula conhecida do vértice de uma parábola, com o mostrado pela Janela de Visualização do GeoGebra.
- Identificar os intervalos de crescimento e decrescimento do gráfico de uma função quadrática com concavidade para cima e em outra com concavidade para baixo;
- Investigar características relacionadas ao coeficiente angular da reta tangente, taxa de variação instantânea, nesses intervalos (crescente + concavidade para cima, decrescente + concavidade para cima, crescente + concavidade para baixo, decrescente + concavidade para baixo);
- Investigar a reta tangente e paralela ao eixo OX no ponto de máximo e mínimo de uma função quadrática, verificando que elas coincidem, ambas possuem coeficiente angular nulo;
- Identificar a existência de ponto de máximo ou mínimo em um novo tipo de função;
- Utilizar os conhecimentos adquiridos nas investigações em uma função quadrática para encontrar esses pontos nesse novo tipo de função, construindo coletivamente uma estratégia de solução.

Público Alvo Sugerido: Turmas da 1ª série do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

O aluno deve ter estudado conceitos sobre função; incluindo análise gráfica, intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos; função afim; função do 2° grau e ter noções da taxa de variação média e taxa de variação instantânea como o coeficiente angular de retas secantes e tangentes ao gráfico de uma função qualquer. O aluno deve ter realizado as atividades Batalha de Canhões e Escalada com Tijolos.

Materiais Necessários:

- Fichas de Atividades (Apêndice G) composta pelas instruções e desenvolvimento, que será distribuída aos grupos;
- Computadores com o software GeoGebra instalado, podendo utilizar o laboratório de informática, se a escola possuir. Ou ainda podem ser utilizados celulares ou tablets.

  Não é necessário nenhum tipo de material extra de pesquisa e/ou calculadora.

Recomendações Metodológicas:

Para uma turma de 30 alunos recomenda-se a seguinte organização:

- Divisão da turma em 10 grupos de 3 integrantes cada.
- Organização física dos grupos depende do local em que a atividade irá ocorrer, procurando manter os membros de um mesmo grupo próximos.

Descrição Geral:

1. Distribuição e leitura da ficha de atividades impressas (Apêndice G), contendo as 5 "investigações":
2. Cada "investigação" contém orientações que visam auxiliar o aluno no uso do GeoGebra e no desenvolvimento geral da atividade.
3. Deve ser estimulada a troca de ideias entre os integrantes.

Dificuldades previstas:

Pode haver dificuldades no uso do software GeoGebra, visto ser algo novo para o aluno.

Possíveis continuações ou desdobramentos:

A atividade pode ser ampliada com a inclusão de outros tipos de funções. Além disso, pode-se utilizar a atividade para abordar o tema taxa média de variação.

Duração total Estimada:

Aproximadamente, 1 hora e 40 minutos. Sendo 20 minutos para cada investigação.

A atividade:

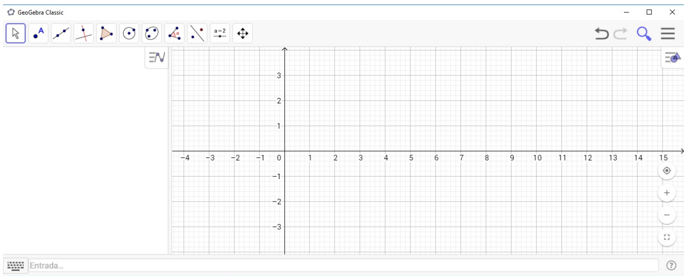
1. **Investigação 1: Intervalos de crescimento**

   Seja a função $f(x) = x^2 - 15x + 56$. Esboce seu gráfico utilizando o GeoGebra, seguindo os passos abaixo:

   a) Abra o GeoGebra.

   Solução:

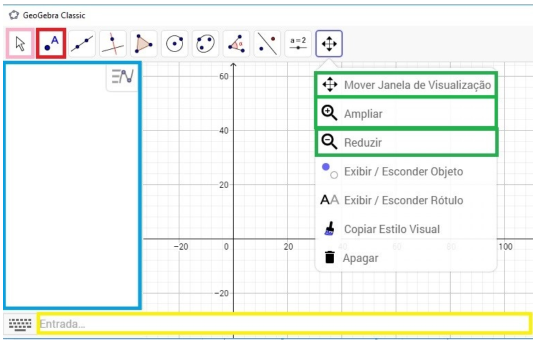
Figura 58 – Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Autoria Própria

b) Digite a função $f(x)$ no “campo de entrada” destacado em amarelo na Figura 59. O gráfico da função será exibido.

Figura 59 – Explorando a tela inicial do GeoGebra

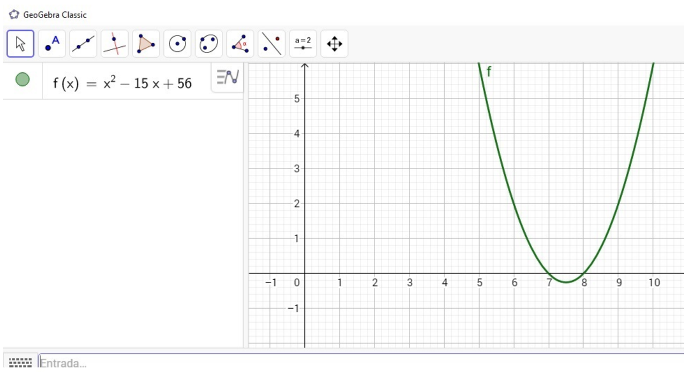


Fonte: Autoria Própria

Você pode Ajustar o plano cartesiano, se necessário, buscando uma melhor visualização, utilizando os botões "Mover Janela", "Reduzir" ou "Ampliar", destacados em verde na Figura 59.

Solução:

Figura 60 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 15x + 56$



Fonte: Autoria Própria

c) Calcule as coordenadas $(x_v,y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a})$ do vértice da parábola representativa da função.

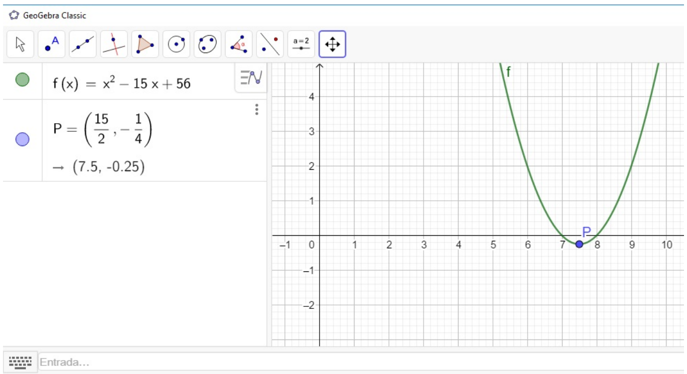
Solução:

- $P = (x_v,y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}) = (\frac{-(-15)}{2.1}, \frac{-((-15)^2-4.1.56)}{4.1}) = (\frac{15}{2}, \frac{-1}{4})$

d) Agora que você já encontrou os valores x_v e y_v, digite $P = (x_v,y_v)$ no "campo de entrada". O ponto será destacado no gráfico.

Solução:

Figura 61 – Destacando o ponto $P = (\frac{15}{2}, \frac{-1}{4})$



Fonte: Autoria Própria

e) Sabendo que uma função é crescente em um intervalo do seu domínio quando para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, onde $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$, observando o gráfico, identifique o intervalo de crescimento da função: ....

Solução:

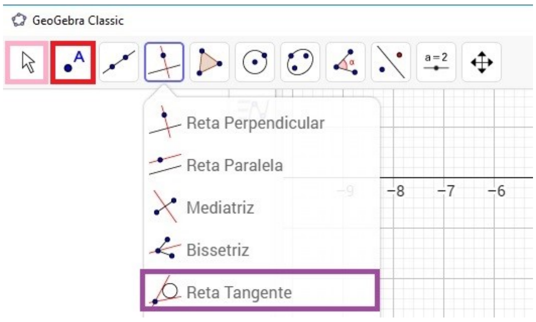
- Observando o gráfico, o intervalo de crescimento da função é para valores de $x > \frac{15}{2}$.

f) O intervalo de crescimento de uma função possui outras características, também importantes, relacionadas ao coeficiente angular da reta tangente, taxa de variação instantânea, nesses pontos do gráfico. Investigue, utilizando o GeoGebra, e apresente suas conclusões:

Marque um ponto "A" qualquer no intervalo de crescimento. *(Dica: Clique no botão "Novo Ponto", destacado em vermelho na Figura 62, e seguidamente sobre o gráfico da função).* As coordenadas do ponto "A" serão exibidas na "Janela de Álgebra" *(destacada em azul na Figura 59)*.

Trace a reta tangente ao gráfico no ponto "A" *(Dica: Clique na opção "Reta Tangente", destacada em roxo na Figura 62, no ponto A e seguidamente em uma parte qualquer do gráfico)*. Observe que a equação da reta formada é exibida na "Janela de Álgebra".

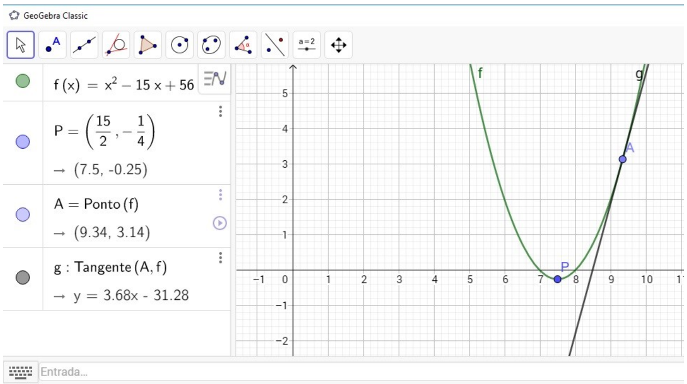
Figura 62 – Explorando a tela inicial do GeoGebra



Fonte: Autoria Própria

Solução:

Figura 63 – Reta Tangente em um ponto do gráfico



Fonte: Autoria Própria

g) Clique no botão "Mover", destacado em rosa na Figura 62, para deslizar o ponto “A” sobre o gráfico, dentro do intervalo de crescimento. Note a mudança do valor do coeficiente angular da reta tangente nesses pontos e tire suas conclusões:

Nos intervalos de crescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são:

( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

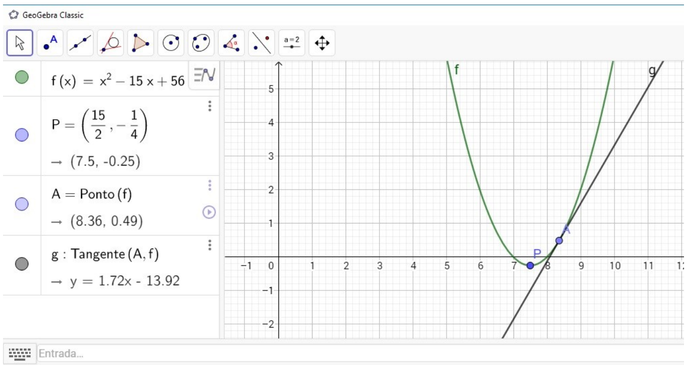
O gráfico da função possui concavidade voltada para................, e observa-se que, nos intervalos de crescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

( ) crescentes ( )decrescentes ( ) variam

Solução:

- Nos intervalos de crescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são positivos

Figura 64 – Deslizando com o ponto A



Fonte: Autoria Própria

O gráfico da função possui concavidade voltada para cima, e observa-se que, nos intervalos de crescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são crescentes, isto é, se $x_1 < x_2$ pertencem a esse intervalo, temos que em x_2 o gráfico apresenta crescimento mais acelerado.

2. **Investigação 2: Intervalos de decrescimento**

   Ainda trabalharemos com a função: $f(x) = x^2 - 15x + 56$.

   a) Sabendo que uma função é decrescente em um intervalo do seu domínio quando para quaisquer valores $x1$ e $x2$ desse intervalo, onde $x1 < x2$, tem-se que $f(x1) > f(x2)$, observando o gráfico, identifique o intervalo de decrescimento da função: ....

   Solução:

   - Observando o gráfico (Figura 61), o intervalo de decrescimento da função é para valores de $x < \frac{15}{2}$.

   b) O intervalo de decrescimento de uma função também possui características relacionadas ao coeficiente angular das reta tangente, taxa de variação instantânea, nesses pontos do gráfico. Utilizando o GeoGebra, investigue e apresente suas conclusões:

   Nos intervalos de decrescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são:

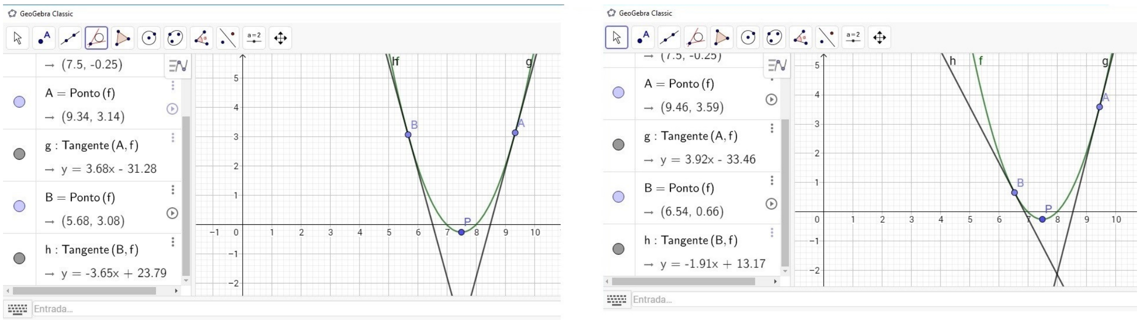
   ( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

   O gráfico da função possui concavidade voltada para ...., e observa-se que, nos intervalos de decrescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

   ( ) crescentes ( )decrescentes ( ) variam

   Solução:

Figura 65 – Deslizando com um ponto no intervalo de decrescimento da função



Fonte: Autoria Própria

- Nos intervalos de decrescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são negativos.
  O gráfico da função possui concavidade voltada para cima, e observa-se que, nos intervalos de decrescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são decrescentes, isto é, se $x_1 < x_2$ pertencem a esse intervalo, temos que em x_1 o gráfico apresenta decrescimento mais acelerado.

3. **Investigação 3: Máximos e/ou mínimos de uma função**

   Sabendo que: se uma função possui um ponto $P = (x_v,y_v)$ do gráfico, onde para qualquer $x \neq x_v$, pertencente ao domínio, temos que $f(x) > y_v = f(x_v)$, então dizemos que y_v é o valor mínimo da função; faça o que se pede:

   a) Vimos que, na função $f(x) = x^2 - 15x + 56$, $P = (.....,.....)$, logo, ... é o valor mínimo da função.

      Verifique, com o GeoGebra, qual o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico nesse ponto P. *(para isto, trace a reta tangente nesse ponto)*

      A equação da reta é:.................

      Solução:

      - $P = (\frac{15}{2}, \frac{-1}{4})$. Logo, $\frac{-1}{4}$ é o valor mínimo da função.
        A equação da reta tangente no ponto P é $y = \frac{-1}{4}$, logo o coeficiente angular é nulo. (Veja Figura 67)

   b) Trace a reta paralela ao eixo OX, passando por P *(Dica: clique na opção "Reta Paralela", destacada em laranja na Figura 66, e a seguir clique sobre o ponto P e o eixo OX)*

      A equação da reta é:.......................

      Que conclusão você chega sobre as retas formadas:........................

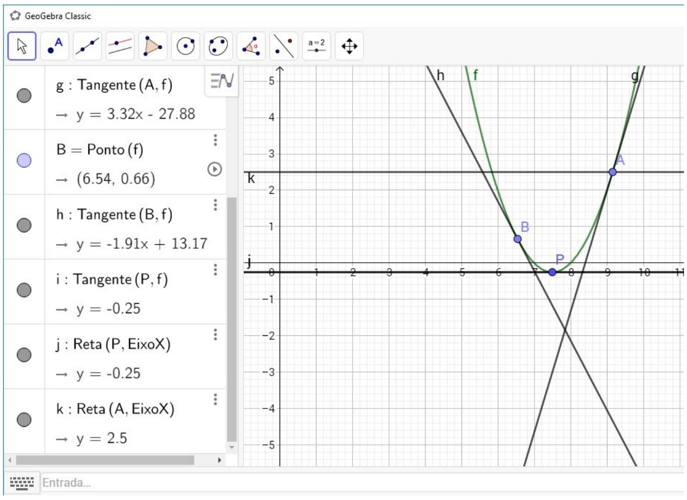
Figura 66 – Explorando o GeoGebra

Fonte: Autoria Própria

Solução:

- A equação da reta paralela ao eixo OX no ponto P é $y = \frac{-1}{4}$. Verifica-se, portanto, que as retas coincidem. (Veja Figura 67)

Figura 67 – A Reta Tangente e a Reta Paralela ao eixo OX no ponto de mínimo



Fonte: Autoria Própria

c) Trace a reta paralela ao eixo OX, passando por A, criado na investigação 1. Clique no botão "Mover" para deslizar o ponto A sobre o gráfico em direção a seu valor mínimo. Note a “mudança” entre as duas retas traçadas pelo ponto A, tangente e paralela, em algum outro ponto elas coincidem?

Solução:

- Deslizando o ponto A sobre o gráfico, observa-se que em nenhum outro ponto isso acontece. (Veja Figura 67)

4. **Investigação 4: mudanças de concavidade**

Sabendo que: se uma função possui um ponto $P = (x_v, y_v)$ do gráfico, onde para qualquer $x \neq x_v$, pertencente ao domínio, temos que $f(x) < y_v = f(x_v)$, então dizemos que y_v é o valor máximo da função; faça o que se pede:

a) Repita todas as investigações (1,2 e 3) para a função: $f(x) = -2x^2 + x - 1$, que possui concavidade voltada para ...., apresentando suas conclusões:

Nos intervalos de crescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são valores:

( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

O gráfico da função possui concavidade voltada para ...., e observa-se que, nos intervalos de crescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

( ) crescentes ( )decrescentes ( ) variam

Nos intervalos de decrescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangente ao gráfico em cada ponto são valores:

( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

O gráfico da função possui concavidade voltada para ...., e observa-se que, nos intervalos de decrescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

( ) crescentes ( )decrescentes ( ) variam

Na função, $P = (......, ...)$, logo, ... é o valor máximo da função.

A equação da reta tangente ao gráfico nesse ponto P é:..................

A equação da reta paralela ao eixo OX, passando por P é:..................

Que conclusão você chega sobre as retas formadas: ....

Você teria essa mesma conclusão para algum outro ponto do gráfico? ....

Solução:

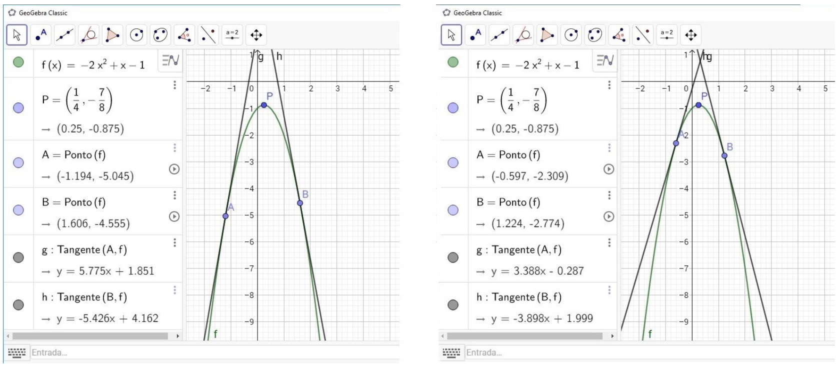
- Nos intervalos de crescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são valores positivos.

  O gráfico da função possui concavidade voltada para baixo, e observa-se que, nos intervalos de crescimento, os valores absolutos dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são decrescentes, isto é, se $x_1 < x_2$ pertencem a esse intervalo, temos que em x_1 o gráfico apresenta crescimento mais acelerado.

  Nos intervalos de decrescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são valores negativos.

  O gráfico da função possui concavidade voltada para baixo, e observa-se que, nos intervalos de decrescimento, os valores absolutos dos

Figura 68 – Mudança de concavidade



Fonte: Autoria Própria

coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são crescentes, isto é, se $x_1 < x_2$ pertencem a esse intervalo, temos que em x_2 o gráfico apresenta decrescimento mais acelerado.

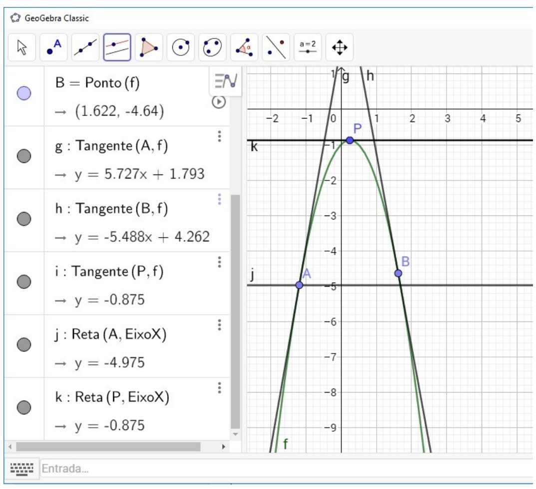
Na função $f(x) = -2x^2 + x - 1$, $P = (xv,yv) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}) = (\frac{-1}{2.(-2)}, \frac{-(1^2-4.(-2).(-1))}{4.(-2)}) = (\frac{1}{4}, \frac{-7}{8})$. Logo, $\frac{-7}{8}$ é o valor máximo da função.

A equação da reta tangente no ponto P é $y = \frac{-7}{8}$, logo o coeficiente angular é nulo.

A equação da reta paralela ao eixo OX no ponto P é $y = \frac{-7}{8}$.

Verificamos, portanto, que as retas coincidem. E deslizando o ponto A sobre o gráfico observa-se que em nenhum outro ponto isso acontece.

Figura 69 – A Reta Tangente e a Reta Paralela ao eixo OX no ponto de máximo



Fonte: Autoria Própria

5. **Investigação 5: Máximos e/ou mínimos de uma função – Aplicação em uma nova função**

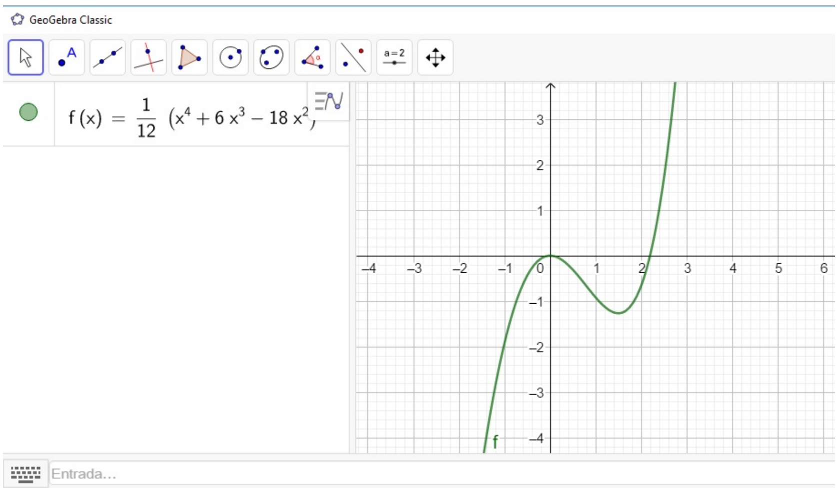
Como visto, o ponto mínimo ou máximo de uma função tem a seguinte característica: A reta tangente ao gráfico, quando existe, nesse ponto, coincide com a reta paralela ao eixo OX, também passando por esse ponto.

Seja a função $f(x) = \frac{1}{12}.(x^4+6x^3-18x^2)$, onde foi dado que seu domínio é o intervalo aberto $(0, 2)$. Perceba que esta não é uma função do 2° grau, logo seu ponto de máximo ou mínimo não pode ser encontrado pela expressão $(x_v,y_v) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a})$.

a) Esboce o gráfico de f utilizando o GeoGebra.

Solução:

Figura 70 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{12}.(x^4 + 6x^3 - 18x^2)$



Fonte: Autoria Própria

b) Observando o gráfico *(Fique atento ao domínio!)*, você já consegue concluir que a função possui um máximo ou mínimo?...................

Solução:

- Observando o gráfico de $f(x) = \frac{1}{12}.(x^4 + 6x^3 - 18x^2)$, cujo o domínio é o intervalo (0,2), identificamos que a função possui um mínimo.

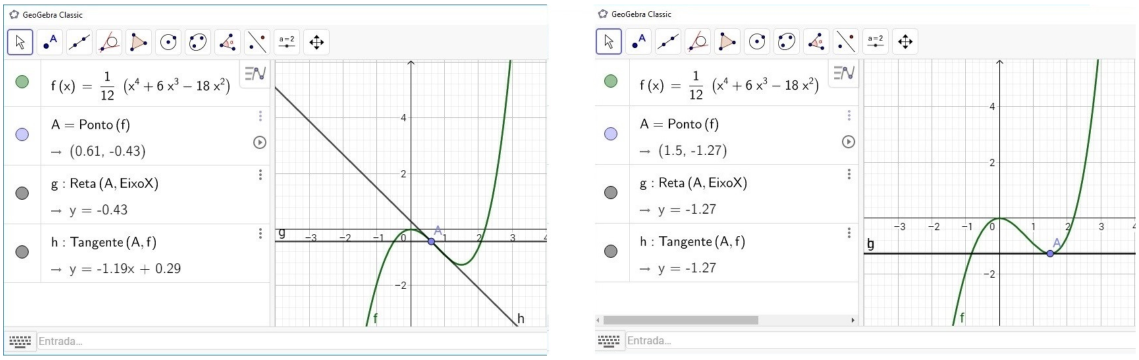
c) Vamos encontra-lo, utilizando nossas investigações!

- Marque um ponto A qualquer do gráfico. *(atenção aos valores válidos para x!)*
- Traçar a reta paralela ao eixo OX, passando por "A"
- Traçar a reta tangente ao gráfico no ponto "A"
- Clique no botão "Mover" para deslizar o ponto A sobre gráfico de $f(x)$ em direção a seu valor mínimo. Note a "mudança" entre as duas retas traçadas pelo ponto A, pois num certo momento os gráficos delas irão coincidir (*Verifique na "Janela de Álgebra" que ambas equações coincidem!)*.

(Dica, após ter selecionado o ponto A com o botão "Mover", você pode utilizar as setas do teclado para deslizar, caso prefira. Ampliar a janela de visualização também lhe ajudará, quanto mais próximo mais fácil será para deslizar com o ponto.)

Solução:

Figura 71 – Encontrando ponto mínimo da função $f(x) = \frac{1}{12}.(x^4 + 6x^3 - 18x^2)$



Fonte: Autoria Própria

d) Conclua as coordenadas do ponto máximo (ou mínimo) da função: ....

Solução:

- Deslizando o ponto, identificamos que em $A = (1,5; -1,27)$ a tangente e a paralela ao eixo OX coincidem. Logo, as coordenadas do ponto mínimo são $(1,5; -1,27)$.

e) Qual é o valor máximo (ou mínimo)? ....

Solução:

- O valor mínimo é -1,27.

4.4 Atividade 4: O Agricultor

Objetivos:

- Interpretar e modelar situações-problemas variadas, inclusive analisando as variáveis envolvidas e definindo o domínio para a função.

- Identificar e encontrar os pontos de máximo ou mínimo de funções variadas com auxílio do Geogebra;

Público Alvo Sugerido: Turmas da 1ª série do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

O aluno deve ter estudado conceitos sobre função, função afim e função do 2° grau; área do retângulo, volume do paralelepípedo e teorema de pitágoras. Além de ter realizado as atividades Batalha de Canhões e “Sherlock Holmes” de Gráficos.

Materiais Necessários:

- Fichas de Atividade (Apêndice H) composta pelas instruções e desenvolvimento, que será distribuída aos grupos;
- Computador com o software GeoGebra instalado, podendo utilizar o laboratório de informática, se a escola possuir. Ou ainda podem ser utilizados celulares ou tablets.

  Não é necessário nenhum tipo de material extra de pesquisa e o uso de calculadora é permitido somente onde for indicado.

Recomendações Metodológicas:

Para uma turma de 30 alunos recomenda-se a seguinte organização:

- Divisão da turma em 10 grupos de 3 integrantes cada.
- Organização física dos grupos depende do local em que a atividade irá ocorrer, procurando manter os membros de um mesmo grupo próximos.

Descrição Geral:

1. Distribuição e leitura da ficha de atividades impressas (Apêndice H), contendo os 3 “desejos” do agricultor.
2. Cada “desejo” contém questionamentos que visam auxiliar o aluno na interpretação e modelagem do problema, além da utilização do GeoGebra na busca da solução adequada que atenda ao agricultor, de forma que, aos poucos, os alunos possam adquirir habilidades para “atacar” diversos outros problemas. Os questionamentos podem e devem ser analisados por meio da troca de ideias entre os integrantes de cada grupo e também por toda a turma, com a mediação do professor.

Dificuldades previstas:

O Desejo 3 pode proporcionar mais dificuldades por apresentar uma função com radical.

Possíveis continuações ou desdobramentos:

Outros problemas podem ser trabalhados, sem a utilização de questionamentos, verificando se o aluno foi capaz de criar seu próprio "roteiro" para a interpretação.

Duração total Estimada:

Aproximadamente, 100 minutos: 30 minutos para os desejos 1 e 2 e 40 minutos para o desejo 3.

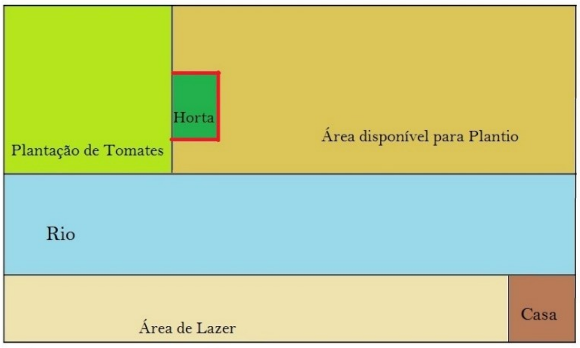
A atividade:

1. **Desejo 1: "A Horta"**

   Preocupado com o período de cheia, o agricultor deseja construir uma horta de área retangular um pouco acima do rio e ao lado da plantação cercada de tomates.

   Sua intenção é fazer uma cerca para delimitar a horta, conforme indica a linha vermelha da Figura 72:

   Figura 72 – A Fazenda

   Fonte: Autoria Própria

   Sabendo que o custo do metro do "arame liso" é de R$3,00 para os lados paralelos ao rio e do "arame farpado" é de R$5,00 para o lado paralelo a cerca da plantação de tomates. Se ele dispõe de R$120,00 para esta tarefa, quais as dimensões do retângulo destinado para plantio que você indica ao agricultor para produzir a maior área possível?

   a) Qual seu objetivo nessa questão?

      Você deseja encontrar as.................... do retângulo que **produzam área máxima.** (guarde essa informação!).

      Solução:

      - Encontrar as dimensões do retângulo que produzam área máxima.

   b) Como essas medidas, largura (laterais paralelas ao rio) e comprimento (lado paralelo a cerca já existente), ainda não são conhecidas, podemos atribuir incógnitas ("letras") para representá-las. Assim, denote por:

      .... a largura do retângulo, em metros.

      .... o comprimento do retângulo, em metros.

Solução:

- x a largura do retângulo, em metros.
  y o comprimento do retângulo, em metros.

c) Que outras informações podemos deduzir do texto?
O custo total do “arame liso” para as laterais da cerca é ....
O custo total do “arame farpado” para a frente da cerca é ....
Solução:

- O custo total do “arame liso” para as laterais da cerca é $3x + 3x = 6x$.
  O custo total do “arame farpado” para a frente da cerca é $5y$.

d) A expressão que determina o custo total da cerca é: $C =$ ....
Solução:

- A expressão que determina o custo total da cerca é $C = 6x + 5y$

e) Na expressão d), substituindo C pelo valor máximo que o agricultor pode gastar na cerca, R$............., temos a seguinte equação:.........................
Solução:

- O valor máximo que o agricultor pode gastar na cerca é R$120, logo $6x + 5y = 120$.

f) Você encontrou uma equação com duas incógnitas? Verifique por meio da Tabela 4 abaixo que existe mais de um valor para as incógnitas que produzirão o mesmo custo total, isto é, que satisfazem a equação e).

Tabela 4 – Custo Total

	Largura (m)	Comprimento (m)	Custo total (R$)
M1	3	20,4	
M2	9	13,2	
M3	15	6	
M4	17	3,6	
M5	24	1,2	

Fonte: Autoria Própria

Solução:

Tabela 5 – Custo Total - Solução

•

	Largura (m)	Comprimento (m)	Custo total (R$)
M1	3	20,4	(6)(3)+(5)(20,4)=120
M2	9	13,2	(6)(9)+(5)(13,2)=120
M3	15	6	(6)(15)+(5)(6)=120
M4	17	3,6	(6)(17)+(5)(3,6)=120
M5	24	1,2	(6)(24)+(5)(1,2)=150 (não serve como resposta)

Fonte: Autoria Própria

g) Conforme a informação em negrito no item a), as medidas (incógnitas) do retângulo devem produzir ....

Solução:

- Devem produzir área máxima.

h) Qual a expressão que determina a área em termos das incógnitas? $A =$.........

Solução:

- $A = x.y$

i) Verifique na Tabela 4 qual o valor da área produzida por cada dupla de valores.

Tabela 6 – Área

	Área (m²)
A1	
A2	
A3	
A4	
A5	......

Fonte: Autoria Própria

Solução:

Tabela 7 – Área - Solução

•

	Área (m²)
A1	61,2
A2	118,8
A3	90
A4	61,2
A5	......

Fonte: Autoria Própria

j) Porém, qualquer valor para as incógnitas poderão "servir" como solução para a nossa questão? .....

   Qual delas produziu a maior área? ....

   Solução:

   - Não.
     A2 produziu a maior área.

k) O valor anterior, corresponde a maior área possível que pode ser encontrada ou é possível existir outro valor que produza um melhor resultado? Vamos descobrir!

   Escreva a "equação custo total" encontrada em e): ....

   Escreva a expressão para a área encontrada em h): ....

   A área depende de duas variáveis (incógnitas), porém é possível reescreve-la utilizando apenas uma delas?

   (Dica: Isole uma das variáveis da equação e) e substitua na expressão.)

   Solução:

   - $6x + 5y = 120 \leftrightarrow y = 24 - \frac{6}{5}x$; substituindo na expressão da área:
     $A = x.y \leftrightarrow A = x.(24 - \frac{6}{5}x) \leftrightarrow A = 24x - \frac{6}{5}x^2$

l) A área depende de uma única variável ...., logo pode ser vista como uma função que depende dela, assim $A(....) =$ ....

   Solução:

   - $A(x) = 24x - \frac{6}{5}x^2$

m) As variáveis .... e ...., que representam respectivamente a largura e o comprimento do retângulo, poderiam assumir um valor menor ou igual a zero? Justifique: ....

   Há alguma outra exigência? Associe.

   (L) A largura do retângulo

   (C) O comprimento do retângulo

   (   ) Deve assumir valor maior ou igual a 20.

   (   ) Deve assumir valor positivo e menor que 20.

   (   ) Deve assumir valor maior ou igual a 24

   (   ) Deve assumir valor positivo e menor que 24.

   (   ) Não há nenhuma outra exigência

   Dica: retorne a expressão do custo em e).

   Solução:

- x e y não podem assumir valores menores ou iguais a zero, pois nesse caso a horta não existiria.

  Verifica-se também que o custo $6x$, gasto com "arame liso" para as laterais da cerca, não pode ser igual ou ultrapassar R$ 120; $6x < 120$, isto é, $0 < x < 20$; pois se gastar todo o valor do custo total para esses lados, não sobraria nada para o outro lado, o que inviabilizaria a formação da horta. Verifica-se também que o custo $5y$, gasto com "arame farpado" para a frente da cerca, não pode ser igual ou ultrapassar R$ 120; $5y < 120$, isto é, $0 < y < 24$. A análise é análoga à feita anteriormente.

  Logo:

  (L) Deve assumir valor positivo e menor que 20.

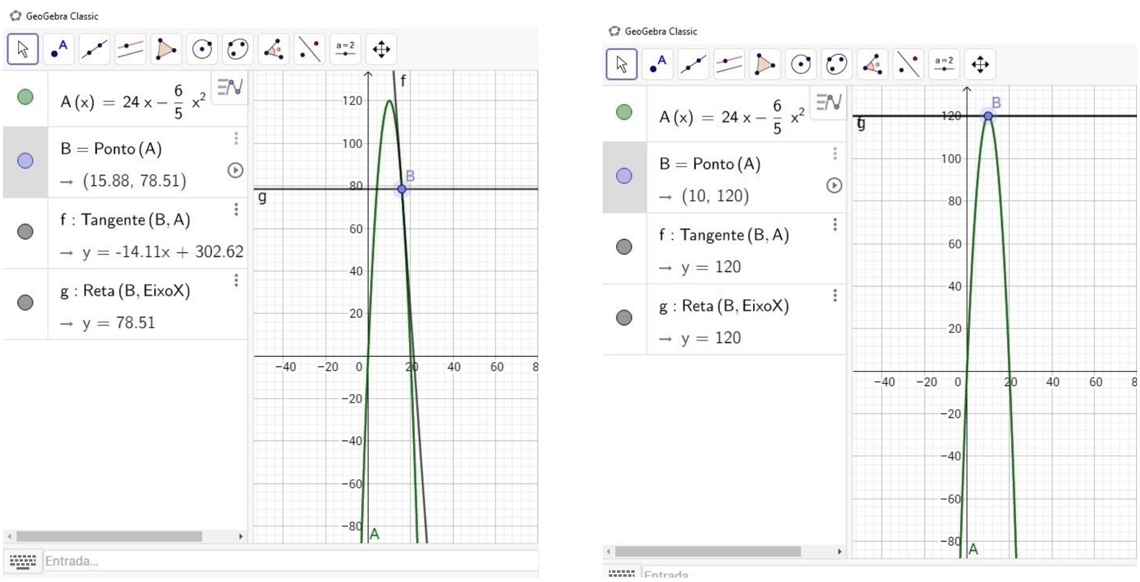
  (C) Deve assumir valor positivo e menor que 24.

n) Como queremos área máxima, devemos encontrar o ponto (x_v,y_v) do gráfico da função onde para qualquer $x \neq x_v$; (x é um valor "válido" para a situação, conforme análise feita em m); temos $A(x) < y_v = A(x_v)$, isto é y_v é o valor máximo (ou área máxima) de $A(x)$.

   Utilize os conhecimentos adquiridos na atividade "Batalha de Canhões" ou "Sherlock Holmes" de Gráficos para concluir as coordenadas do ponto máximo da função e qual a área máxima.

   Solução:

Figura 73 – Encontrando máximo da função $A(x) = 24x - \frac{6}{5}x^2$ no GeoGebra



Fonte: Autoria Própria

- Usando os conhecimentos adquiridos em "Sherlock Holmes" de Gráficos, o Ponto máximo é $B = (10, 120)$, logo a área máxima é 120 m².

E usando “Batalha de Canhões”, teríamos que $B = (\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}) = (\frac{-24}{2.\frac{-6}{5}}, \frac{(-(24^2-4.\frac{-6}{5}.0))}{4.\frac{-6}{5}}) = (10, 120)$, logo a área máxima é 120 m².

o) Finalize a atividade, indicando ao agricultor qual a melhor alternativa. *(Dica: Retorne ao item a) e relembre qual era seu objetivo, isto é, que informação o agricultor lhe solicitou).*

Solução:

- $y = 24 - \frac{6}{5}x \leftrightarrow y = 24 - \frac{6}{5}.10 = 12$
  Logo, as dimensões do retângulo que você indica ao agricultor para produzir área máxima são 10 metros de largura e 12 metros de comprimento.

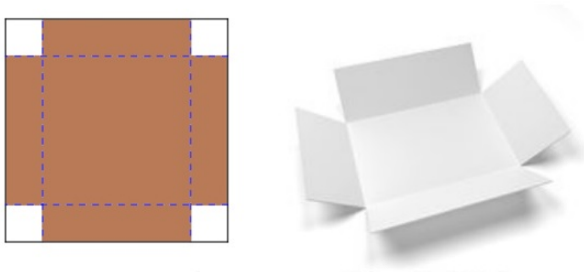
2. **Desejo 2: “Caixa para colheita”**

Agora, o agricultor deseja aproveitar uma tábua de madeira quadrada, de 6 metros de lado, disponível na sua fazenda, para fazer uma caixa sem tampa com o objetivo de armazenar seus tomates durante a colheita.

A caixa vai ser montada a partir do corte de quadrados iguais nos quatro cantos do material e “dobrando-se” os lados (serrando e pregando).

Veja a Figura 74 ilustrativa do corte:

Figura 74 – A Caixa



Fonte: Autoria Própria

Qual a medida do lado desses quadrados a serem retirados que você indica ao agricultor de forma que a caixa possua o maior volume?

a) Qual seu objetivo nessa questão?

Solução:

- Encontrar a medida do lado dos quadrados iguais que serão retirados nos quatro cantos da tábua, que produza o maior volume.

b) Como essa medida, lado dos quadrados a serem retirados, ainda não é conhecida, podemos atribuir incógnita (“letra”) para representá-la. Assim, denote por:

.... o lado dos quadrados a serem retirados, em metros.

Solução:

- x o lado dos quadrados a serem retirados, em metros.

c) Teste os seguintes valores para a incógnita:

Tabela 8 – Volume

	Valores (m)	Volume (m³)
V1	0,4	
V2	1,7	
V3	2,3	

Fonte: Autoria Própria

Qual deles produziu o maior volume? ....

Solução:

Tabela 9 – Volume - Solução

	Valores (m)	Volume (m³)
V1	0,4	0,4(6-(2)(0,4))(6-(2)(0,4))=10,816
V2	1,7	1,7(6-(2)(1,7))(6-(2)(1,7))=11,492
V3	2,3	2,3(6-(2)(2,3))(6-(2)(2,3))=4,508

Fonte: Autoria Própria

V2 produziu o maior volume.

Esse valor, corresponde ao maior volume possível que pode ser encontrado ou existe um outro valor que produza um melhor resultado? Vamos descobrir!

d) Qual a função que determina o volume em termos da incógnita? $V(...) =$ ....

(Dica: Use as informações disponíveis no texto e as figuras para identificar as dimensões da tábua de madeira e o corte a ser feito. A seguir, lembre que Volume = altura x largura x comprimento).

Solução:

- $V(x) = x(6-2x)(6-2x)$
  $V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

e) A variável ...., que representa o lado dos quadrados a serem retirados, poderia assumir um valor menor ou igual a zero? Justifique: ....

Há alguma outra exigência? Marque a alternativa correta e justifique:

( ) Deve assumir valores maiores ou iguais a 3.

( ) Deve assumir valores positivos e menores que 3.

( ) Não há nenhuma outra exigência.

Solução:

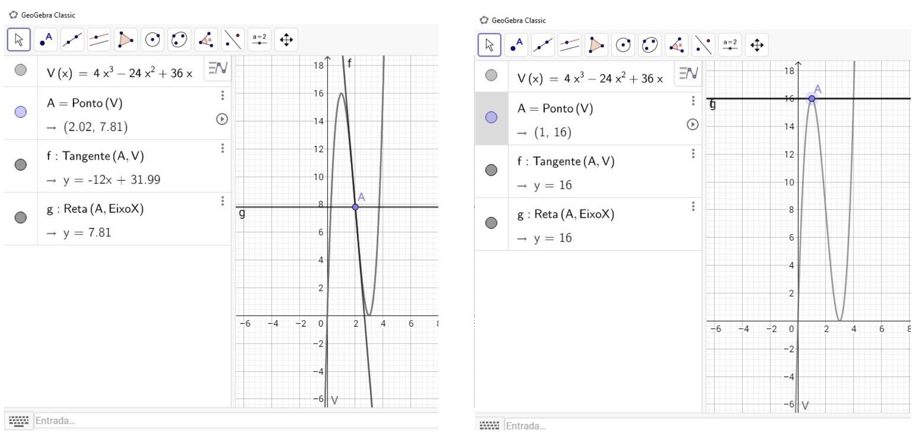
- x não pode assumir valor menor ou igual a zero, pois é o valor do lado dos quadrados a serem retirados.
  Verifica-se também que em cada lado da tábua será retirado $x + x = 2x$. Como o lado da tábua possui 6 metros, não podemos retirar um valor igual ou superior a 6 metros, pois inviabilizaria a formação da caixa; isto é $2x < 6$; então: $0 < x < 3$

f) Como queremos volume máximo, devemos encontrar o ponto $(x_v{,}y_v)$ do gráfico da função onde para qualquer $x \neq x_v$; onde x é um valor "válido" para a situação, conforme analise feita em e), temos $V(x) < y_v = V(x_v)$, isto é y_v é o valor máximo (ou volume máximo) de $V(x)$.

Utilize os conhecimentos adquiridos na atividade "Sherlock Holmes" de Gráficos para concluir as coordenadas do ponto máximo da função e qual o volume máximo.

Solução:

Figura 75 – Encontrando máximo da função $V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ no GeoGebra



Fonte: Autoria Própria

- Ponto máximo $A = (1, 16)$, logo o volume máximo é 16 m³.

g) Finalize a atividade, indicando ao agricultor qual a melhor alternativa.

(Dica: Retorne ao item a) e relembre qual era seu objetivo, isto é, que informação o agricultor lhe solicitou).

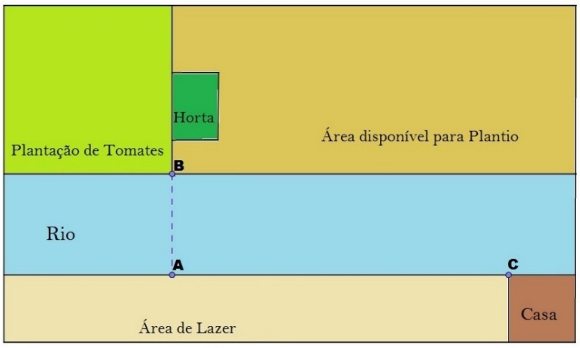
Solução:

- Logo, a medida do lado dos quadrados iguais que serão retirados nos quatro cantos da tábua é 1 metro.

3. **“Bomba para irrigação”**

O agricultor, para irrigar sua plantação, deseja instalar uma bomba de água no ponto B, localizado na margem do rio, oposta a sua casa (Ponto C). Porém, faz-se necessário energia elétrica para seu funcionamento. Considerando que o ponto B encontra-se 100m rio abaixo de sua casa e que o rio retilíneo tem 30m de largura, “Ele” solicitou então, uma conexão elétrica entre os pontos B e C (Veja Figura 76).

Figura 76 – Bomba para irrigação



Fonte: Autoria Própria

A empresa que irá realizar o serviço informou que o custo por metro da instalação de fiação por água é R$5,00 e por terra é R$4,00.

Qual deve ser a medida por terra e por água que você indica ao agricultor para que se tenha custo mínimo?

a) Qual seu objetivo nessa questão?

Solução:

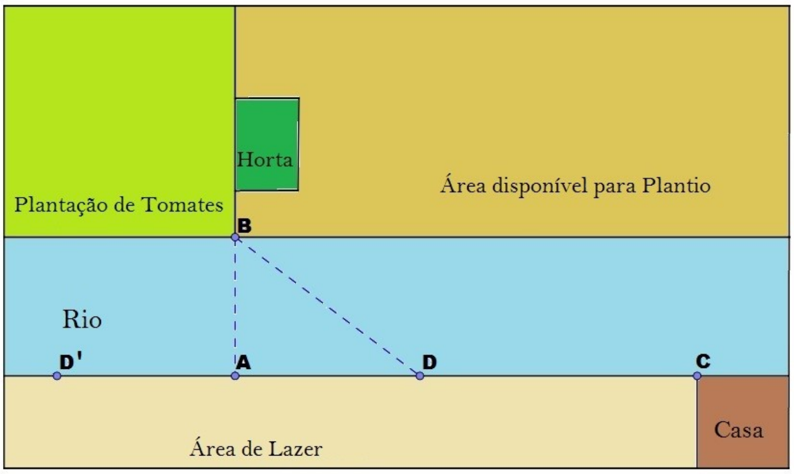
- Encontrar as medidas do percurso por terra e por água que produzam o menor custo.

b) Como o trajeto inicia por terra partindo do ponto C (casa), marque um ponto D na figura que ilustre o fim do percurso por terra. Assim,

- A medida de fiação por terra é representada pelo segmento............que simplificadamente denotaremos pela incógnita .... O custo da fiação por terra é $C_T =$ ....
- A medida de fiação por água é representada pelo segmento..........que simplificadamente denotaremos pela incógnita .... O custo da fiação por água é $C_A =$ ....
- As incógnitas anteriores podem assumir valores menores ou iguais a zero?
- É uma boa alternativa marcar o ponto D a uma distância maior que 100 metros de C? Justifique!

Solução:

Figura 77 – Percurso por Terra e por Água



Fonte: Autoria Própria

- A medida de fiação por terra é representada pelo segmento CD que simplificadamente denotaremos pela incógnita x. O custo da fiação por terra é $C_T = 4x$
- A medida de fiação por água é representada pelo segmento DB que simplificadamente denotaremos pela incógnita y. O custo da fiação por água é $C_A = 5y$.
- As incógnitas anteriores não podem assumir valores menores ou iguais a zero, pois são valores de distâncias.
- Não seria uma boa alternativa marcar um ponto D com mais de 100 metros de C, isto é $x > 100$ não é uma boa escolha. Pois, marcando um ponto D' com mais de 100 metros de C, observamos que sempre teremos um ponto D, com menos de 100 metros, onde $\overline{D'A} = \overline{DA}$, e os triângulos $D'AB$ e DAB são congruentes por LAL, logo $\overline{D'B} = \overline{DB}$, então, nas duas possibilidades (D e D'), teríamos percursos iguais por água, e sendo $\overline{CD} < \overline{CD'}$, CD é uma melhor alternativa por terra. Então $\overline{CD}$ não pode exceder 100 metros, pois aumentaria o custo certamente.

c) Se o ponto A é tal que AB representa a largura do rio, então o ângulo entre os segmentos AB e AC é ....

Solução:

- O ângulo entre os segmentos AB e AC é reto.

d) Os segmentos que unem os pontos B, A e D formam um polígono muito especial, chamado ...., que tem a seguinte relação entre as medidas de seus lados:.. , chamada teorema de ....

Solução:

- Os segmentos que unem os pontos B, A e D formam um polígono muito especial, chamado triângulo retângulo, que tem a seguinte relação entre as medidas de seus lados: a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos, chamada teorema de pitágoras.

e) Reescreva a equação d), utilizando as informações do texto e as incógnitas definidas, e isole a incógnita que representa a medida da fiação por água.

Solução:

- $y = \sqrt{30^2 + (100 - x)^2}$

f) Em e) você encontrou uma equação com duas incógnitas? Verifique através da Tabela 10 que teremos mais de um valor para as incógnitas que satisfazem a equação.

(nesse item é permitido uso de calculadora)

Tabela 10 – Distâncias

	Fiação por terra (m)	Fiação Aproximada por água (m)	Cálculos:
V1	23	82,64	
V2	44	63,53	
V3	78	37,20	

Fonte: Autoria Própria

Solução:

Tabela 11 – Distâncias - Solução

	Fiação por terra (m)	Fiação Aproximada por água (m)	$y = \sqrt{30^2 + (100 - x)^2}$
V1	23	82,64	$82,64 \cong \sqrt{30^2 + (100 - 23)^2}$
V2	44	63,53	$63,53 \cong \sqrt{30^2 + (100 - 44^2}$
V3	78	37,20	$37,20 \cong \sqrt{30^2 + (100 - 78)^2}$

Fonte: Autoria Própria

g) De b), podemos deduzir a expressão que determina o custo total C em termos das duas incógnitas definidas? $C =$ ....

Solução:

- $C = C_T + C_A = 4x + 5y$

Tabela 12 – Custo Total

	Custo ($R\$$)
C1	
C2	
C3	

Fonte: Autoria Própria

h) Verifique na tabela do item f), qual o valor do custo produzido por cada dupla de valores.

Qual deles produziu o menor Custo?..........................

Solução:

Tabela 13 – Custo Total - Solução

	Custo ($R\$$)
C1	505,20
C2	493,65
C3	498,00

Fonte: Autoria Própria

- C2 produziu o menor custo.

O valor anterior, corresponde ao menor custo possível que pode ser encontrado ou é possível existir outro valor que produza um melhor resultado? Vamos descobrir!

i) O custo total depende de duas incógnitas, porém é possível reescreve-lo utilizando apenas uma delas, para isso basta substituir e) em g).

Solução:

- $C = 4x + 5\sqrt{30^2 + (100 - x)^2}$

j) O custo total depende de uma única variável .... , definida no intervalo ...., logo, pode ser vista como uma função que depende dela, assim $C(...) =$................

Solução:

- O custo total depende de uma única variável x, definida no intervalo $(0, 100]$, logo, pode ser vista como uma função que depende dela, assim $C(x) = 4x + 5\sqrt{30^2 + (100 - x)^2}$

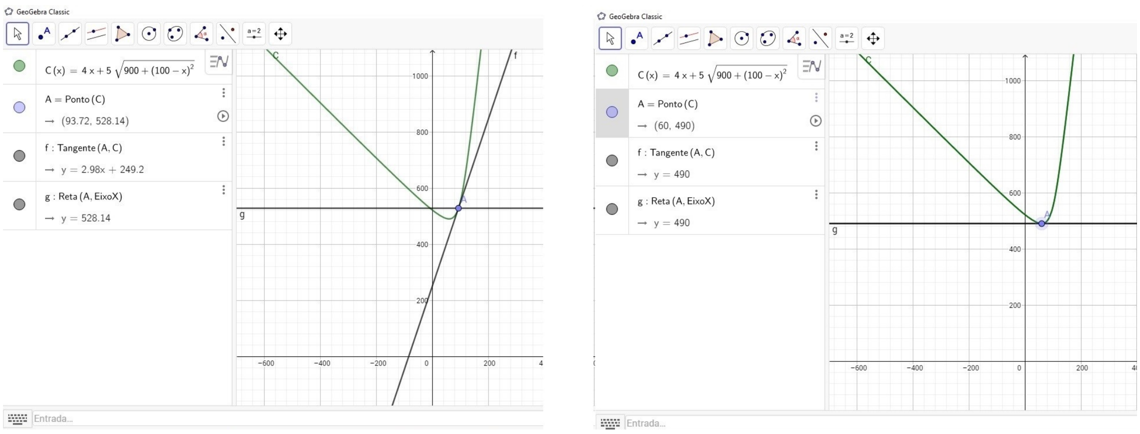
k) Como queremos o custo mínimo, devemos encontrar o ponto (x_v,y_v) do gráfico da função onde para qualquer $x \neq x_v$; onde x pertence ao domínio;

temos $C(x) > y_v = C(x_v)$, isto é y_v é o valor mínimo (ou custo mínimo) de $C(x)$.

Utilize os conhecimentos adquiridos na atividade “Sherlock Holmes” de Gráficos para concluir as coordenadas do ponto mínimo da função e qual o custo mínimo.

Solução:

Figura 78 – Encontrando ponto mínimo da função $C(x) = 4x + 5\sqrt{30^2 + (100 - x)^2}$



Fonte: Autoria Própria

- Ponto mínimo $A = (60, 490)$, logo o custo mínimo é R$ 490,00.

l) Finalize a atividade, indicando ao agricultor qual a melhor alternativa. *(Dica: Retorne ao item a) e relembre qual era seu objetivo, isto é, que informação o agricultor lhe solicitou).*

Solução:

- E, $y = \sqrt{30^2 + (100 - x)^2} = \sqrt{900 + (100 - 60)^2} = \sqrt{900 + (40)^2} = 50$

  Logo, as medidas do percurso por terra e por água que produzem o menor custo são, respectivamente, 60 e 50 metros .

Capítulo 5

Considerações Finais

Por meio da pesquisa deste trabalho pode-se perceber que o ensino de matemática na atualidade tem evidenciado desafios, entre eles despertar os alunos para a disciplina. Esse cenário foi confirmado no estudo de campo realizado com professores de matemática que trabalham com turmas de Ensino Médio em escolas estaduais do interior do estado do Rio de Janeiro, onde todos apontaram que há sim uma grande falta de interesse dos estudantes pela disciplina, sendo apontado diversos fatores como possíveis determinantes, como a crença de que matemática é complicada, a falta de conhecimentos básicos que promovem dificuldades de aprendizagem, a ausência de incentivo por parte dos familiares aos estudos e o ensino de matemática desvinculado da realidade do aluno.

Diante dessa situação, foi proposto aos docentes refletir a utilização de recursos e metodologias de ensino diversificadas, no intuito de contribuir com a melhora desse quadro preocupante. Pode-se perceber que a grande maioria das sugestões eram bem vistas pelos profissionais, apesar de muitos não utilizarem ou recorrerem a elas com pouca frequência, apontando diversas dificuldades, como, para o uso de jogos, a falta de recursos e tempo para a elaboração e aplicação em sala de aula. E, para a investigação e dedução de fórmulas e métodos, a ausência de conhecimentos básicos pelos alunos, falta de tempo hábil, sendo o conteúdo da disciplina extenso, desinteresse por parte dos alunos, que focam apenas na fórmula final e acham esse tipo de abordagem chata.

Tendo em vista as contribuições das pesquisas realizadas, com a identificação de obstáculos e pontos positivos, sugeriu-se nas atividades propostas a utilização de Jogos, situações-problemas e GeoGebra, buscando atrair o gosto pela matemática, trazendo variadas formas de desenvolver o tema máximos e mínimos em sala de aula da 1ª série do Ensino Médio, incluindo todo o material necessário para a realização das atividades propostas, incentivando a elaboração de estratégias pelos docentes para um ensino de matemática cada vez mais inovador e motivador de habilidades.

Ao sugerir essas atividades, buscou-se impulsionar a construção do conhecimento, por meio de uma postura ativa dos discentes e a troca de ideias em trabalhos em grupo, além de incentivar uma nova atitude do professor, assumindo o papel de mediador e incentivador da aprendizagem, propondo questionamentos e almejando extrair o potencial máximo de sua classe.

Pode-se também acompanhar como a tecnologia vem "somar", tornando-se forte aliada ao ensino. Utilizando o GeoGebra como meio que instiga o estudante ao desejo da busca, permitindo a visualização gráfica de diversos tipos de funções e possibilitando a abordagem mais ampla do assunto, sem tornar o tema inacessível ao nível de ensino em que é proposto, possibilitando tarefas de investigação matemática. Já que, como identificado na análise de três livros didáticos com características distintas e o currículo mínimo da 1ª série do Ensino Médio, o reconhecimento de máximos e mínimos de funções variadas tem sido tratado visualmente em gráficos "prontos"e o seu estudo em situações-problemas está restringido aqueles modelados por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola.

Neste sentido, foi possível convidar o aluno a sair um pouco da "zona de conforto", ampliando sua visão sobre a utilização de máximos e mínimos em situações-problemas, onde os alunos mecanicamente podem ser impulsionados à modelagem por uma função quadrática, acompanhando formas acessíveis de abordagem de outros tipos de funções com auxilio do software GeoGebra e questionamentos, propondo valorizar o aspecto desafiador das atividades. Buscou-se envolver o aluno, levando-o a engajar-se no processo do aprender. Com este momento, ficou clara a ressignificação do processo de aprendizagem do estudante, levando-o a vislumbrar a matemática como forte aliada para resolver situações no seu dia-a-dia.

Também, nessa abordagem mais ampla do assunto, pode-se observar a utilização da posição geométrica da reta tangente nos pontos de máximo e mínimo de uma função quadrática como base para construir uma estratégia coletiva para encontrar máximos e mínimos em outros tipos de funções "contínuas" que possuam reta tangente em seus extremos. Constatando-se as várias formas de abordagem, para além da exploração da parte algébrica desse estudo.

Ao fim de todas as atividades foi possível perceber como o tema pode ser abordado de forma mais intensa, com mais destaque, incluindo atividades contextualizadas, entre elas a dedução das coordenadas do vértice da parábola, que pode ser realizada de forma a cativar o aluno por meio de cenários de canhões, buscando métodos que tornem o estudo mais atrativo e dinâmico.

Apesar de o aspecto da sequência de atividades ser inovador, sabe-se que vários fatores influenciam no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, portanto essa proposta está sujeita a alterações, de acordo com a análise do professor sobre a sua turma. Também, sugere-se retornar esse estudo nas próximas etapas educacionais, após os estudantes terem contato de forma mais aprofundada com outros tipos de funções, como as trigonométricas.

Além disso, as atividades apresentadas não foram aplicadas em sala de aula, recomenda-se, então, em pesquisas futuras, a sua aplicação e descrição de resultados.

Referências

ÁVILA, G. S. de S. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Editora Blucher, 2006. Citado na página 43.

BARBOSA, A. B. L. *Uma Aplicação do GeoGebra no Ensino de Função Quadrática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró (RN), 2018. Citado na página 71.

BARBOSA, J. D. S. *Explorando o Espaço Através de Atividades Investigativas no Ensino da Matemática e o Uso do GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 71.

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 17, 25 e 76.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM)*: Parte iii - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF, 2000. Citado na página 74.

BRASIL. *PCN+ Ensino Médio*: Orientações curriculares nacionais. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 70 e 76.

BRASIL. *Matriz de Referência ENEM*. Brasília, 2012. Acesso em 03 de Agosto de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 76.

BRASIL MEC/SEB. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasil, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 19, 46, 63, 68, 70 e 74.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. *JP Ponte, C. Costa, AI Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & AF Dionísio (Eds.), Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores*, p. 5–24, 2002. Citado na página 74.

BRITO, W. A. T. de *Modelo de Recomendação de Jogos Baseado em Seleção de Conteúdo no Ensino da Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 56, 64, 65 e 66.

CÓL, L. de Possibilidades metodológicas para o ensino de matemática. *Colóquio Internacional de Educação e Seminário de Estratégias e Ações Multidisciplinares*, v. 1, n. 1, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 63.

COSTA, S.; LIMBERGER, R. *A Lenda de Dido*: Projeto m^3 matemática multimídia, série: Matemática na escola. 2007. Acesso em 21 de Maio de 2018. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126>. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

DELGADO, J. J. G.; VILLELA, M. L. T. *Pré-Cálculo*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Citado na página 23.

DUARTE, J. L. *Problemas de Máximos e Mínimos no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2014. Citado na página 19.

FIGUEIREDO, L. M.; OLIVERO, M.; ORTEGOZA, M. *Elementos de Matemática e Estatística*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2014. Citado na página 26.

FONSECA, J. J. S. Metodologia da pesquisa científica. UEC, Fortaleza, 2002. Citado na página 48.

FRISKE, A. I. et al. *Minicurso de GeoGebra*. Santa Maria - RS, 2016. Acesso em 03 de Agosto de 2018. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila_GeoGebra.pdf>. Citado na página 72.

GERHARDT, T. E. G.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de Pesquisa*. Porto Alegre: UFRGS, 2009. Citado na página 48.

GOMES, T. de A.; RODRIGUES, C. K. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 4, n. 3, 2014. Citado na página 63.

GRANDO, R. C. *O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995. Citado na página 69.

GRANDO, R. C. *O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 59, 68, 69 e 70.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 44.

HUGHES-HALLETT, D. et al. *Cáculo e Aplicações*. São Paulo: Editora Blucher, 1999. Citado na página 43.

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*: Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias. prova de matemática e suas tecnologias. 2° dia - caderno 5 – amarelo. 2011. Acesso em 22 de Abril de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf>. Citado na página 27.

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*: Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias. prova de matemática e suas tecnologias. 2° dia - caderno 5 – amarelo. 2012. Acesso em 22 de Abril de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/caderno_enem2012_dom_amarelo.pdf>. Citado na página 40.

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*: Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias. prova de matemática e suas tecnologias. 2ª aplicação - 2° dia - caderno 6 – cinza. 2014. Acesso em 22 de Abril de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2014/prova_caderno_cinza_6_2014.pdf>. Citado na página 26.

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*: Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias. prova de matemática e suas tecnologias. 2ª aplicação -2° dia - caderno 5 – amarelo. 2016. Acesso em 23 de Abril de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO_2.pdf>. Citado na página 31.

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*: Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias. prova de matemática e suas tecnologias. 3ª aplicação -2° dia - caderno 13 – cinza. 2016. Acesso em 23 de Abril de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2016/prova_caderno_cinza_13_2016.pdf>. Citado na página 31.

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*: Prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias. prova de matemática e suas tecnologias -2° dia - caderno 5 – amarelo. 2016. Acesso em 24 de Abril de 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO.pdf>. Citado na página 41.

IZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 76.

KLASER, P. K.; TELICHEVESKY, M. O problema isoperimétrico. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 46.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, v. 1*. Rio de Janeiro: SBM -Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado na página 32.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, v. 3*. Rio de Janeiro: SBM -Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado na página 21.

MAGARINUS, R. *Uma Proposta para o Ensino de Funções Através da Utilização de Objetos de Aprendizagem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria (RS), 2013. Citado 4 vezes nas páginas 18, 61, 64 e 70.

MARCOLINO, F. R. *Problemas de Máximos e Mínimos: Abordagem na Educação Básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Citado na página 19.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de metodologia científica*. São Paulo: Atlas, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

MELO, S. A. de; SARDINHA, M. O. B. Jogos no ensino aprendizagem de matemática: uma estratégia para aulas mais dinâmicas. *Revista F@pciência, ISSN 1984-2333*, v. 4, n. 2, p. 5–15, 2009. Citado na página 68.

MENDES, A. F. *Problemas de Otimização: Uma Proposta para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande (PB), 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 77.

MIGUEL, J. C. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: Implicações teórico-metodológicas. *Pinho, SZ; Saglietti, JRC (Org.)*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 70.

MILHORANCE, F. *Ensino (abaixo do) Médio*: Estatísticas do inep mostram que a 1ª série do nível médio tem os maiores Índices de evasão e repetência. 2017. Disponível em: <https://projetocolabora.com.br/educacao/primeiro-ano-do-ensino-medio-tem-recorde-de-evasao/>. Citado na página 18.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizont: CAEDUFMG, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 47.

MORAES, H. L. *Utilização do Software Geogebra no Estudo de Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo de Funções de uma Variável*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 19, 71 e 78.

MOTA, P. C. C. L. de M. *Jogos no Ensino da Matemática.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Porto, Portugal, 2009. Citado na página 67.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 24, 28, 38, 39, 44 e 45.

NASCIMENTO, S. S. do *A Importância das Mídias e Tecnologias no Processo de Ensino e Aprendizagem de matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luis - MA, 2017. Citado na página 70.

PAULO, J. V. de *O Uso de Jogos nas Aulas de Matemática do Ensino Médio: o que Dizem os Professores de Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru/SP, 2017. Citado na página 18.

PEDROSO, H. A.; PEREIRA, J. C. P. Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, p. 1–17, 2013. Citado na página 46.

PRODANOV, C. C. *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico*. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Citado na página 48.

RAMOS, D. M. *Investigação do Uso de Ambientes Gráficos no Ensino de Funções Elementares no Ensino Médio: Explorando o Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade federal de Goiás, Catalão, 2018. Citado na página 67.

RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo*: Matemática. Rio de Janeiro, 2012. Acesso em 21 de Abril de 2018. Disponível em: <http://www.rj.gov.br/c/document_library/get_file?uuid=55442b8d-85cb-47c8-80b4-42846f5c6d99&groupId=91317>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 75 e 76.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 76.

SOUSA, R. P. d. *O Ensino da Matemática na Educação Básica com o Auxílio do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2018. Citado na página 53.

STRAPASON, L. P. R. *O Uso de Jogos como Estratégia de Ensino e Aprendizagem da Matemática no 1º Ano do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Centro Universitário Franciscano de Santa Maria - UNIFRA, Santa Maria, RS, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 69.

TOKARNIA, M. *Só 7,3% dos Alunos Atingem Aprendizado Adequado em Matemática no Ensino Médio*. 2017. Acesso em 24 de Agosto de 2018. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-01/matematica-apenas-73-aprendem-o-adequado-na-escola>. Citado na página 53.

VELASCO, C. *Saneamento Avança, mas Brasil ainda Joga 55% do Esgoto que Coleta na Natureza, Diz Estudo*. 2018. Acesso em 21 de Abril de 2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/saneamento-avanca-mas-brasil-ainda-joga-55-do-esgoto-que-coleta-na-natureza-diz-estudo.ghtml>. Citado na página 25.

Apêndices

APÊNDICE A

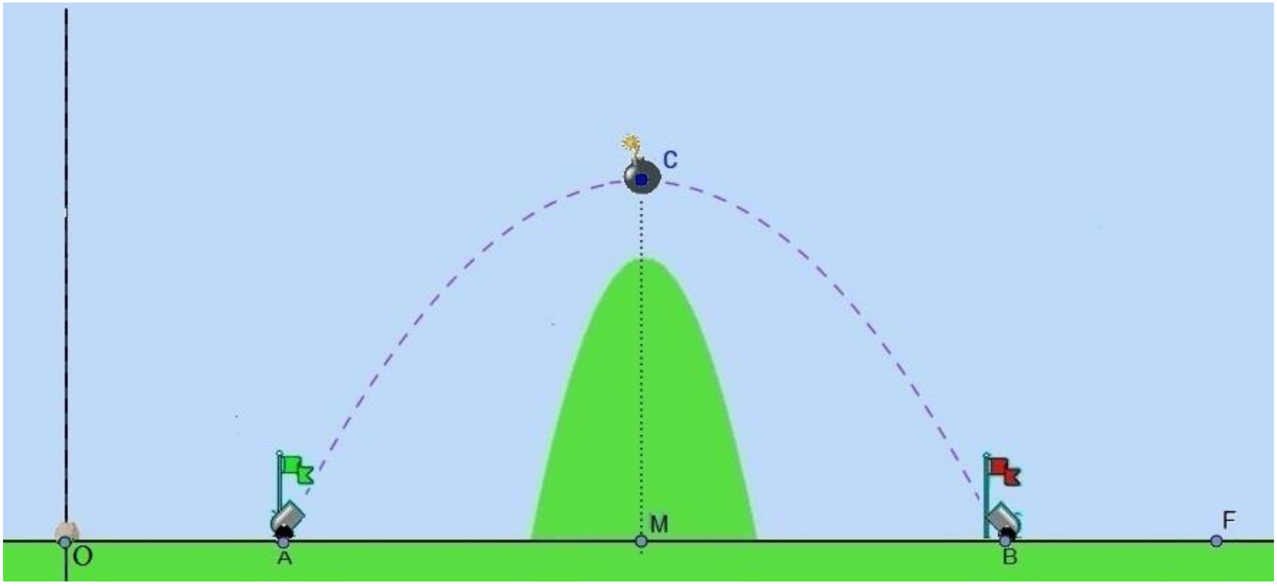
Ficha de Atividades do Jogo Batalha de Canhões

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Alunos:________________________________
Grupo:_________ Turma:_______ Data:____/____/___

Olá Alunos!

Sua equipe está em uma ***Batalha de Canhões****!*

Localize seu canhão que está indicado pela cor da bandeira do seu time na imagem ilustrativa do território 1:



- *Vocês e a equipe adversária estão separados por um obstáculo. Nesse território 1, o obstáculo é um Morro.*

- *Seu objetivo é analisar pistas e informações dadas no percurso do jogo e responder as tarefas. A cada resposta correta, a equipe adquire uma quantidade de pontos especificada. Sempre que for atingida uma soma de 10 pontos, uma bomba é conquistada e será assinalada na pontuação do seu time.*

- *Ganha o jogo a equipe que tiver o maior número de bombas.*

Fase 1: "Explorando o Território"

Imagine que você e sua equipe estão no território 1. Caso seu canhão dispare uma bomba, ela percorrerá uma trajetória parabólica, conforme indica a linha tracejada da imagem do território 1, atingindo o canhão da equipe adversária.

A altura f(x) em metros do solo atingida pela bomba é dada pela função **$f(x) = ax^2+bx+c$**, onde x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pelo ponto O, onde está localizada uma Pedra.

O pico do morro pertence à reta perpendicular ao solo passando pelo ponto C=(x_v,y_v), sendo y_v a altura máxima atingida pela bomba, tal reta é o **eixo de simetria** e o ponto C é o **vértice** da parábola.

Tarefa 1: (responda, justifique ou preencha as lacunas, conforme o caso)

a) (3pontos) A função dada no texto, cujo gráfico é uma parábola é qualificada como sendo de __________ grau.

b) (2pontos) Num sistema de coordenadas, onde o solo (reta horizontal) é o eixo das abscissas, a localização da Pedra, indicada pelo ponto O= (___,___), é a origem.

c) (3pontos) Se as localizações dos canhões do time verde e do vermelho, indicadas pelos pontos A e B, estão a uma distância x' e x'', respectivamente, da Pedra (ponto O). No plano cartesiano em questão, esses pontos serão: A=(___,___), B=(___,___).

d) (4pontos) As abscissas dos pontos A e B, _____ e _____, são chamadas **raízes ou zeros da função**. Justifique a afirmativa!

E podemos obtê-las por meio da resolução da equação de 2º grau: ___________________

e) (4pontos) Como a trajetória da bomba é uma parábola com concavidade voltada para ____________, o valor de "a" é: ( ) positivo ( ) negativo.

f) (4pontos) Com a utilização da Fórmula de Resolução da Equação do Segundo Grau, temos que as raízes, em termos de a, b e $\boldsymbol{\Delta}=b^2-4ac$, são:_____________________

g) (4pontos) Qual é a expressão que determina a soma x' + x" das distâncias em termos de "a" e "b"? Justifique sua resposta!

h) (2pontos) Experimento: A parábola da imagem do território foi reproduzida no papel vegetal distribuído, localize os pontos A, B, C e M (de interseção do eixo de simetria com o solo). Dobre a figura no eixo de simetria. Que conclusão você chega sobre o ponto M em relação ao segmento AB, que une as raízes da função?

i) (2pontos) Pelas informações dadas até o momento, sabemos que o gráfico da função possui um ponto **C= (x_v, y_v)** chamado **Vértice da Parábola,** onde **y_v = f(x_v)**, assume o valor máximo (ou altura máxima) de **f(x)**. A abscissa (x_v) do ponto C será exatamente a abscissa do ponto M? Justifique sua resposta!

j) (3pontos) Na imagem ilustrativa do território 1, localize um ponto F no solo, esse ponto dista x' do ponto B. Qual a distância do ponto F à Pedra (ponto O) em termos de a e b? Justifique sua resposta!

k) (4pontos) Qual o ponto médio do segmento OF? ____________________

A distância desse ponto médio à Pedra (ponto O), em termos de a e b, é ____________,

consequentemente, o valor da abscissa desse ponto é ______________.

Justifique suas respostas!

l) (5pontos) Logo, o valor da abscissa x_v do ponto C é _________

m) (10pontos) E o valor da ordenada y_v é____________________ . Justifique sua resposta! (Dica: use a lei de formação da função)

Você encontrou a expressão para determinar as coordenadas do ponto máximo da curva?

Saiba que a mesma expressão serve também para encontrar as coordenadas do ponto mínimo de uma parábola com concavidade para cima.

<u>Fase 2: "Atacando"</u> 

Nessa fase você continua no território 1, porém já o conhece melhor, é hora de prosseguir! Imagine que seu canhão disparou e atingiu o canhão da equipe adversária.

A bomba percorreu uma trajetória descrita pela função:

$f(x) = -0{,}2\ x^2 + 3{,}2\ x - 7{,}8$, onde f(x) é a altura em metros atingida pela bomba e x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pela Pedra.

Tarefa 2: (Responda e justifique!)

a) (10pontos) Qual a altura máxima atingida pela bomba?

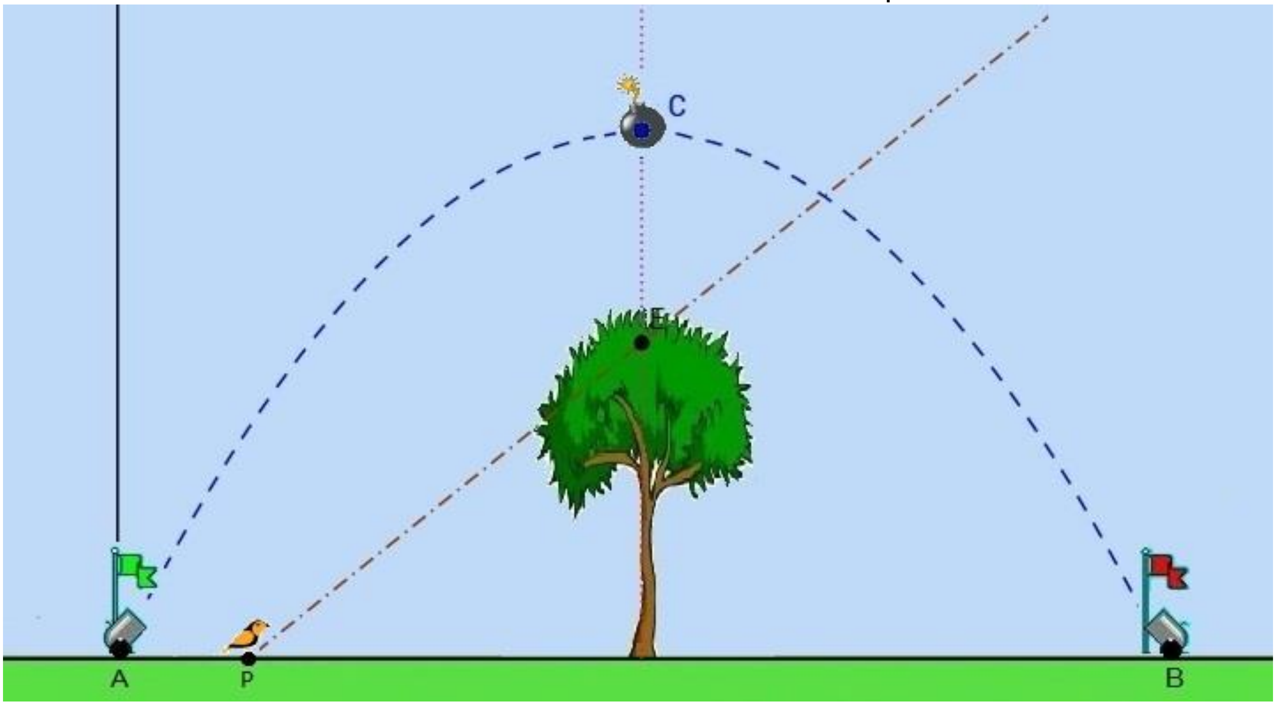
b) (10pontos) E, se o morro é 20% mais baixo que a medida encontrada no item anterior, determine a altura do morro.

c) (10pontos) Qual a distância do seu canhão a Pedra?

d) (10pontos) E qual é o alcance do disparo?

<u>Fase 3: “Um novo obstáculo – Parte 1</u>” 

Você está evoluindo, vamos continuar! Nessa fase você irá explorar o território 2:



- Agora o obstáculo é uma árvore e o canhão da equipe verde passa a ocupar o lugar da Pedra.
- Mais uma vez o seu canhão foi disparado e a bomba percorreu a trajetória descrita pela função:

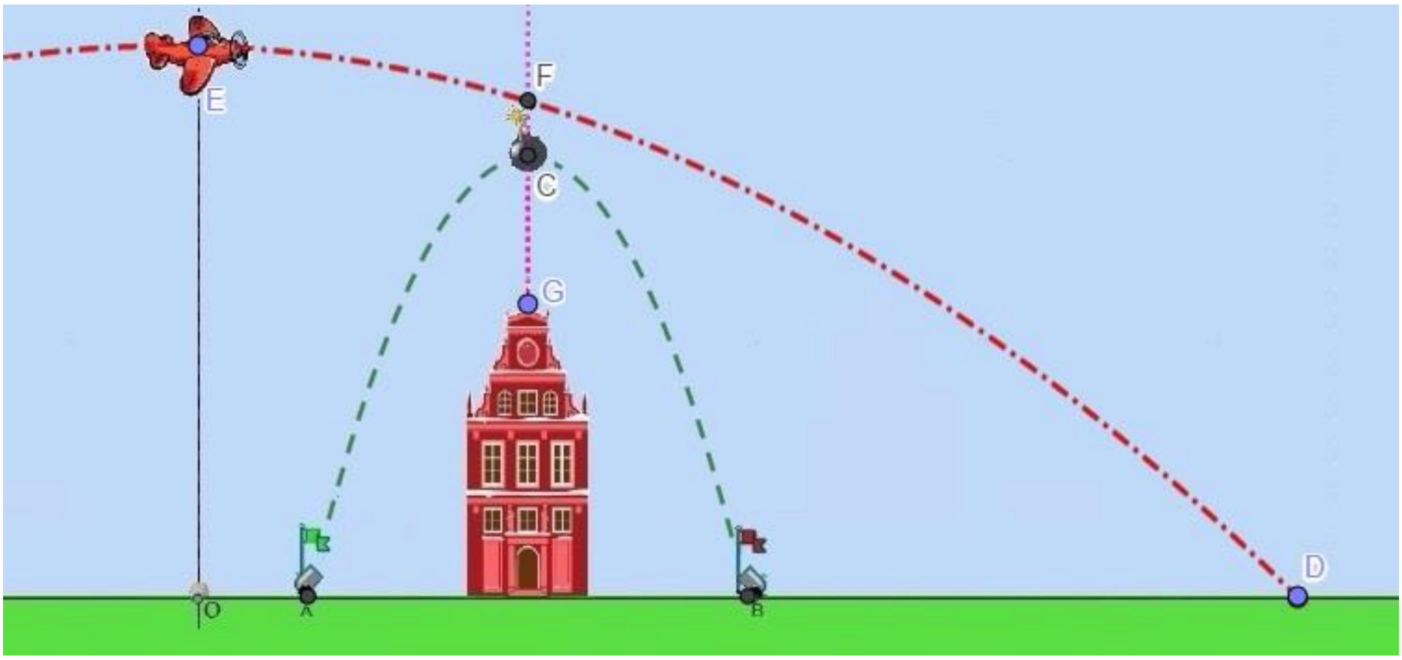
  $f(x)=-\frac{1}{20}x^2+2x$, atingindo o canhão da equipe adversária. De forma semelhante a fase anterior, f(x) é a altura em metros atingida pela bomba e x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pelo canhão verde (ponto A).
- Saindo do solo, à 5 metros do canhão A, um pássaro, localizado no ponto P, descreve uma trajetória retilínea e pousa num ponto E na copa da árvore.
- Esse ponto pertence ao eixo de simetria da parábola, distando 7 metros do ponto mais alto atingido pela bomba.

Tarefa 3: (Responda e justifique!)

a) (30pontos) Encontre a função que descreve a trajetória retilínea do pássaro.

<u>Fase 4: “Um novo obstáculo – Parte 2”</u>

Nessa fase você irá explorar o território 3, cujo obstáculo é um prédio:



- Mais uma vez o seu canhão foi disparado e a bomba percorreu a trajetória descrita pela função:

  $f(x)=-\frac{1}{6}x^2+6x-30$, atingindo o canhão da equipe adversária. De forma semelhante as fases anteriores, f(x) é a altura em metros atingida pela bomba e x é a distância, também em metros, da bomba à reta perpendicular ao solo passando pela Pedra, ponto O.
- Percorrendo uma trajetória parabólica, um avião encontra-se num ponto E a 30 metros de altura do solo. Ele pousará no ponto D no solo, passando por um ponto F.
- Esse ponto F pertence a reta que forma o eixo de simetria da parábola, distando 3 metros do ponto mais alto atingido pela bomba.
- O ponto D dista 30 metros do canhão B.

Tarefa 4: (Responda e justifique!)

a) (30pontos) Encontre a função que descreve a trajetória parabólica do avião.

APÊNDICE B

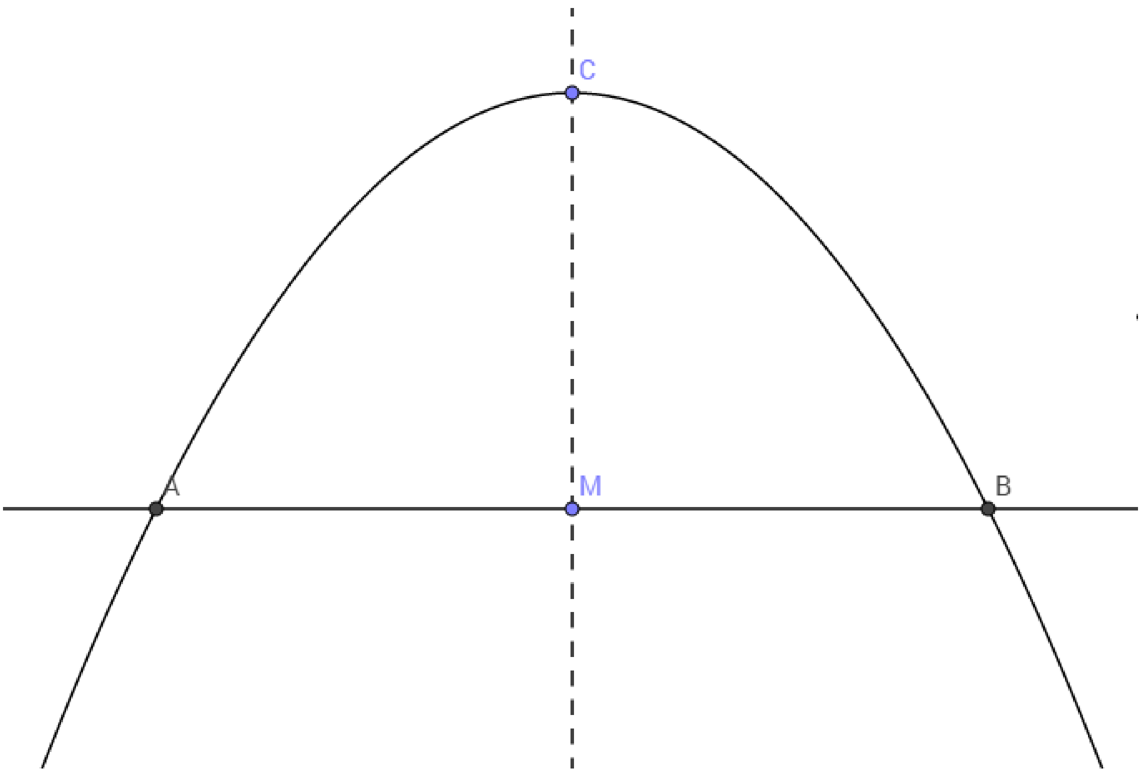
Modelo de Cartaz de Pontuação do Jogo Batalha de Canhões

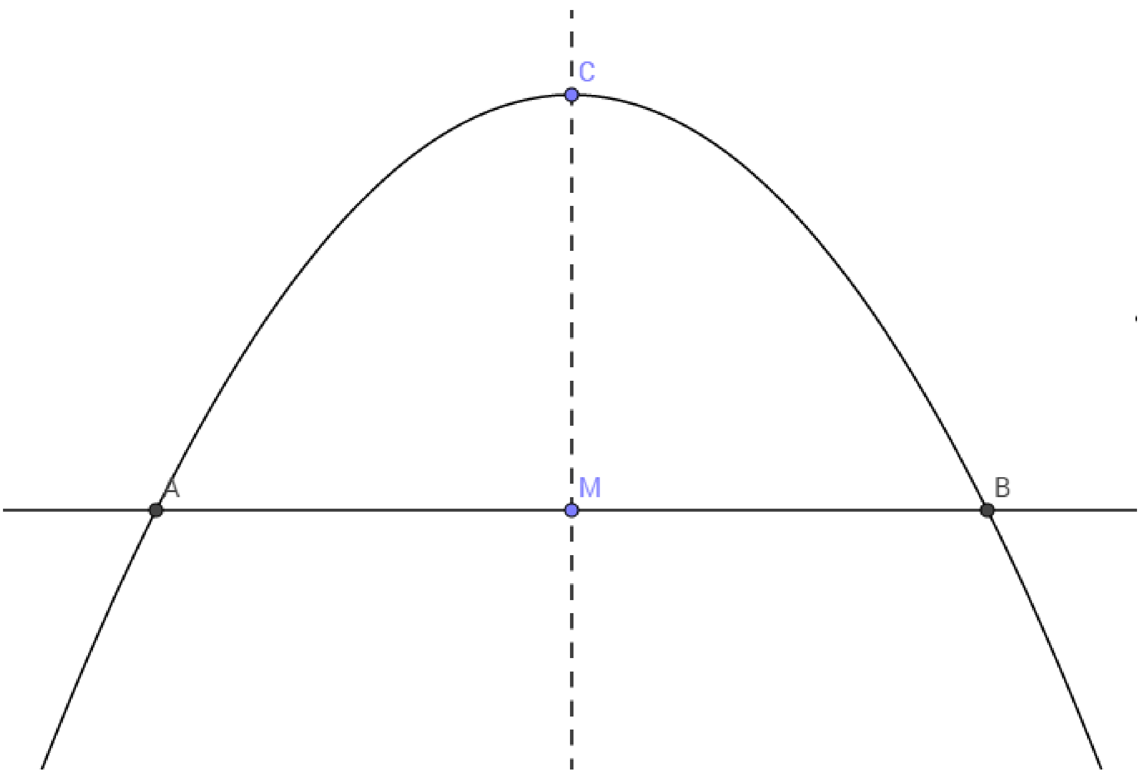
Batalha de Canhões

1 X 1 2 X 2 3 X 3

APÊNDICE C

Parábola para Impressão no papel vegetal para o Jogo Batalha de Canhões


C
A
M
B


C
A
M
B

APÊNDICE D

Cartas-Tijolos

Cartas-Tijolos Frente

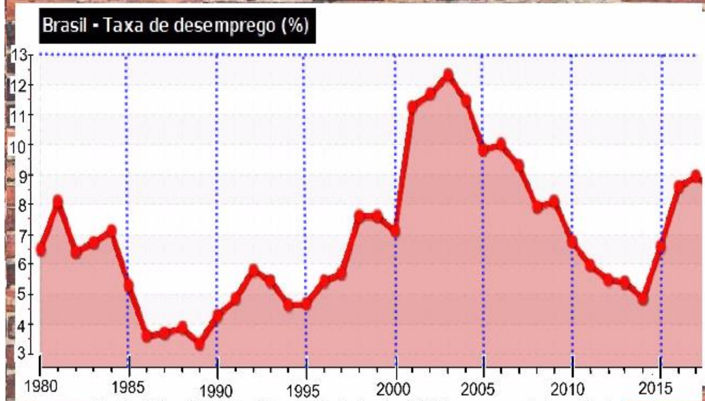
Seis pessoas saem do repouso e percorrem um trajeto de 6 metros com velocidade constante.
A distância percorrida, em metros, é função do tempo, em segundos.
Sejam $f(t)=2t$, $g(t)=\frac{3}{5}t$, $h(t)=\frac{3}{2}t$, $p(t)=t$, $r(t)=\frac{9}{4}t$ e $q(t)=\frac{7}{3}t$
as funções que descrevem essas trajetórias.
Em qual delas o objetivo, a distância máxima, foi alcançada no menor tempo.

1

Fonte: https://pt.actualitix.com/pais/bra/estatistica-agricultura-brasil.php

Em que ano a área utilizada para a produção de cereais foi a maior verificada?

2



Fonte: https://pt.actualitix.com/pais/bra/estatistica-economia-brasil.php

Em que ano a taxa de desemprego foi a maior verificada?
E a menor?
Em que período aconteceu um crescimento mais acelerado da taxa de desemprego?

3


Fonte: https://alvimgraphic.wordpress.com/category/infograficoinfographics/page/3/

Suponha que em uma competição de hipismo, na modalidade salto, a altura, em metros, alcançada pelo cavalo em função do tempo, em segundos, é dada por: $h(t)= -\frac{50}{9}t^2 + \frac{20}{3}t$. Qual foi a altura máxima atingida?

4

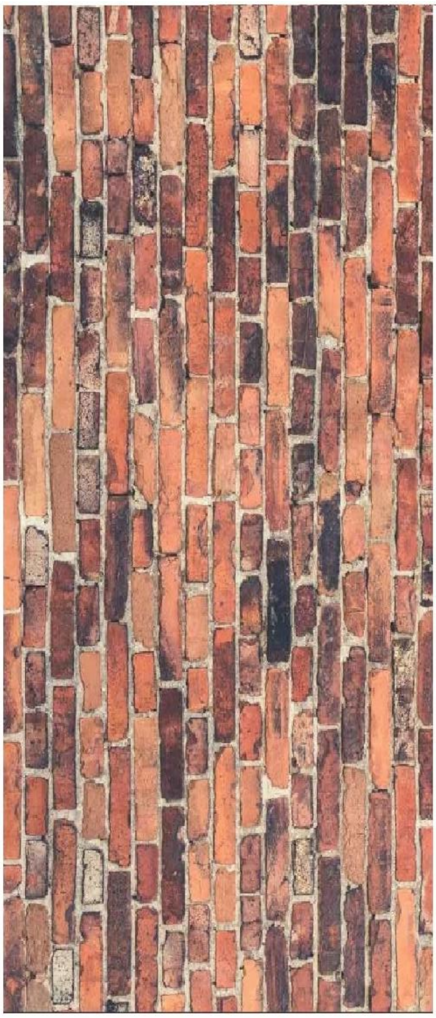
Uma função quadrática não tem zeros e a interseção do seu gráfico com o eixo das ordenadas ocorre em B=(0,-7), ela possui ponto de máximo ou de mínimo?

5

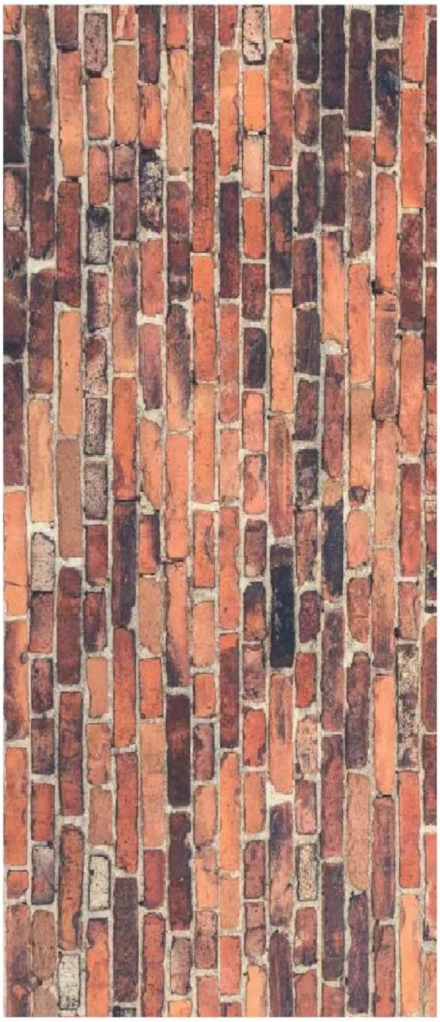
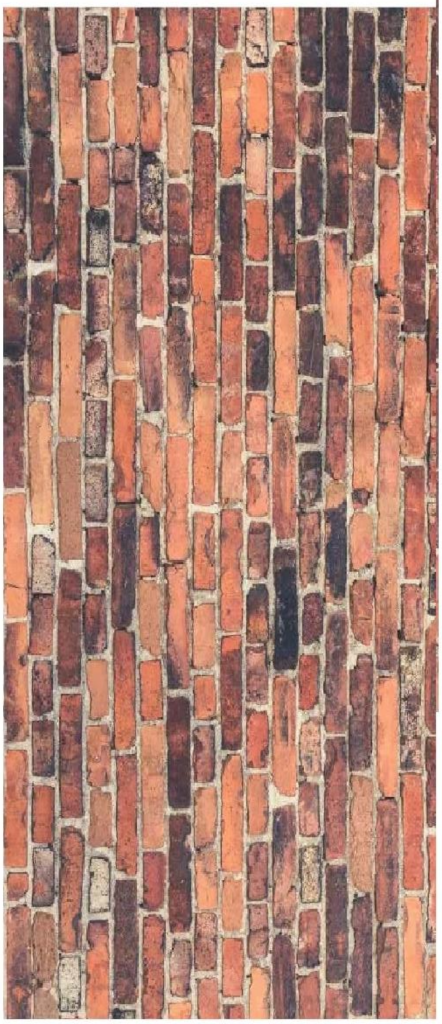
Os zeros de uma função quadrática são 3 e 9 e o vértice da parábola que a representa é V=(6,-2), ela possui ponto de máximo ou de mínimo?

6

Cartas-Tijolos Verso





Dada a função: $g(x)=(-p-5)x^2-4x+p$

a) Para que valores de p a função é quadrática e possui mínimo?

b) Existe algum valor de p que faça o gráfico da função passar pelo ponto (0,-5) ?

7

O gráfico da função $f(x)=6x^2+bx+c$ tem máximo em $V=(1,-3)$.

Quais os valores de b e c?

8

Seja $f(x) = \frac{-3}{2}x^2 - (k-3)x - \frac{15}{2}$

uma função quadrática.

Determine o valor de k, sabendo que x=-3 é a equação do eixo de simetria do gráfico de f.

E determine seu valor máximo.

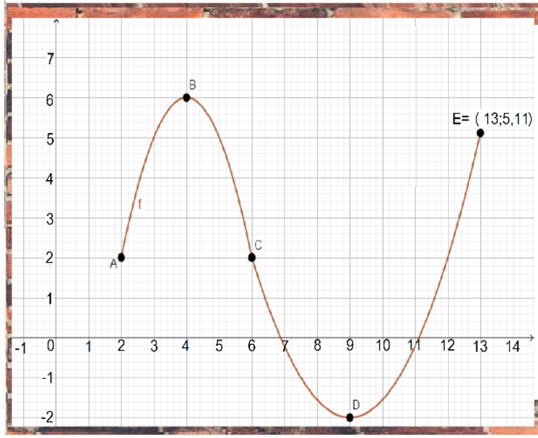
9

Determine o valor de k para que a função quadrática

$f(x)= (k+1)x^2 +2x+k$

possua valor máximo e seu gráfico seja tangente a reta $y = -1$.

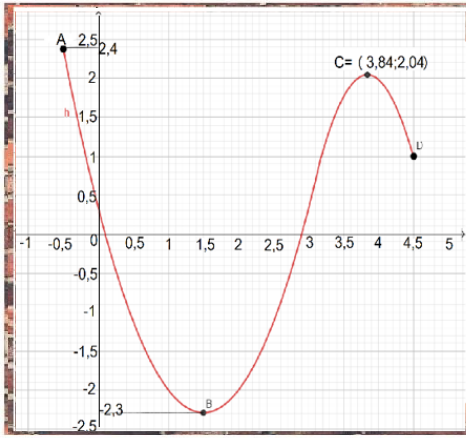
10



Uma função f possui gráfico conforme apresentado na imagem ao lado. Determine:

- O valor máximo e mínimo.
- O Domínio e a Imagem.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento.
- A taxa média de variação no intervalo de $x_1=2$ a $x_2=4$.

11

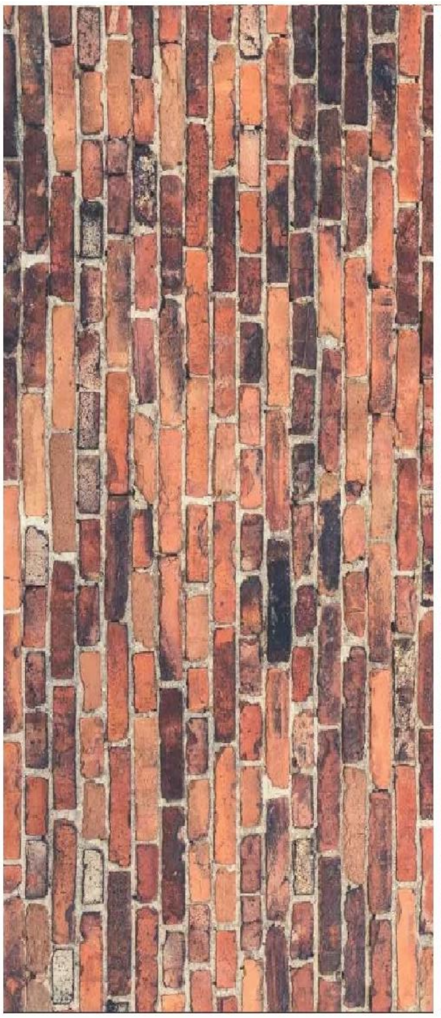
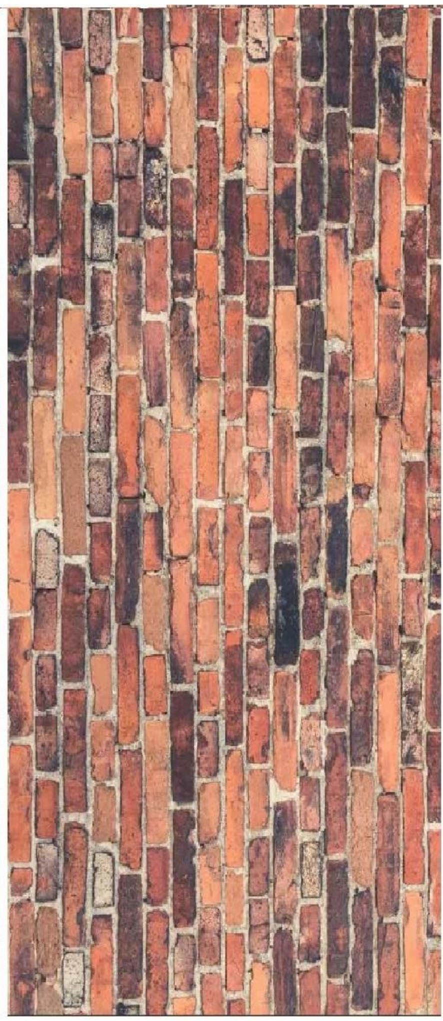


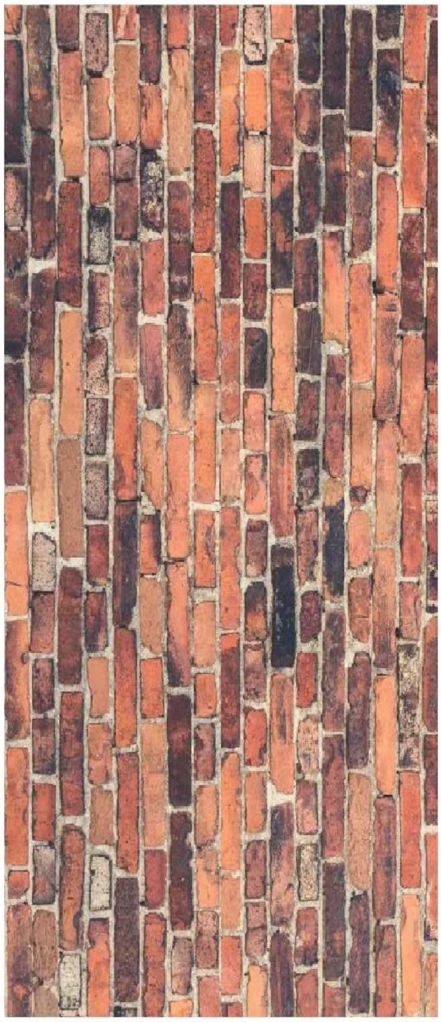
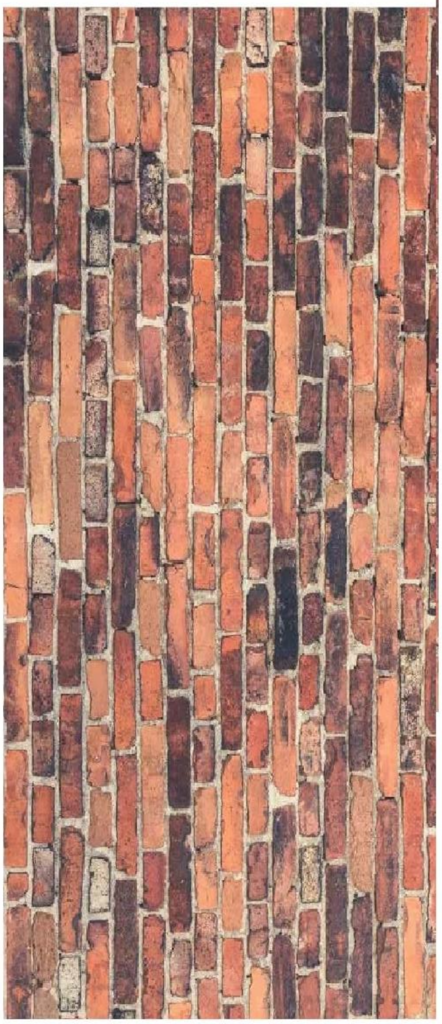
Uma função h possui gráfico conforme apresentado na imagem ao lado. Determine:

- O valor máximo e mínimo.
- O Domínio e a Imagem.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento.

12

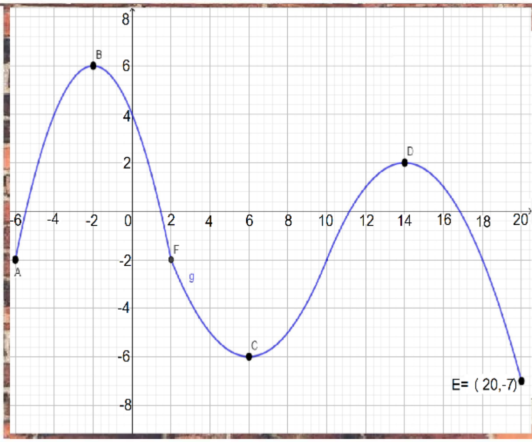
Cartas-Tijolos Verso

Um objeto é lançado do solo para cima, para o ar. Sua altura, em metros, do solo é função do tempo, em segundos. A lei que relaciona as grandezas é dada por $S(t) = -0{,}2\,t^2 + t$.
Determine:
- o instante em que sua velocidade é nula.
- a altura máxima atingida pelo objeto.
- o instante em que ele atinge a altura de 1,2 metros.

13

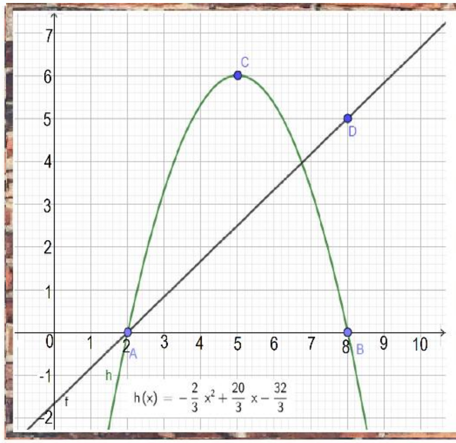


Uma função g possui gráfico conforme apresentado na imagem ao lado. Determine:
- O valor máximo e mínimo.
- O Domínio e a Imagem.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento.
-A taxa média de variação no intervalo de $x_1=-2$ a $x_2=2$.

14

Um determinado produto é produzido por uma empresa com custo C, em reais, definido pela seguinte função $C(x) = x^2 - 60x + 1000$, onde x é a quantidade de unidades produzidas.
Determine a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.

15



Em quanto deve aumentar ou reduzir o coeficiente angular da reta dada na imagem ao lado, para que ela continue passando pelo ponto A, mas possa interceptar a parábola no seu ponto máximo.

16

Qual das funções abaixo é representada por uma parábola com maior valor máximo?

$$f(x) = \frac{1}{9}\left(-5x^2 + 40x - 35\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(-x^2 + 18x - 65\right)$$

17

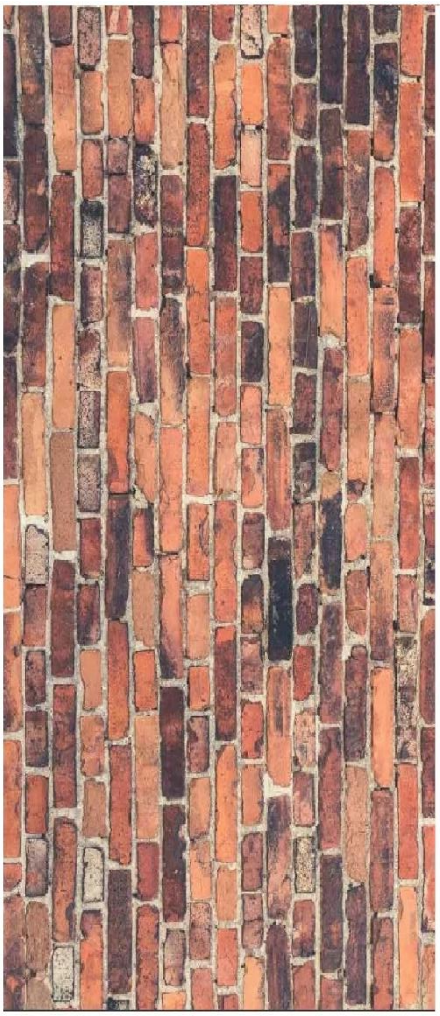
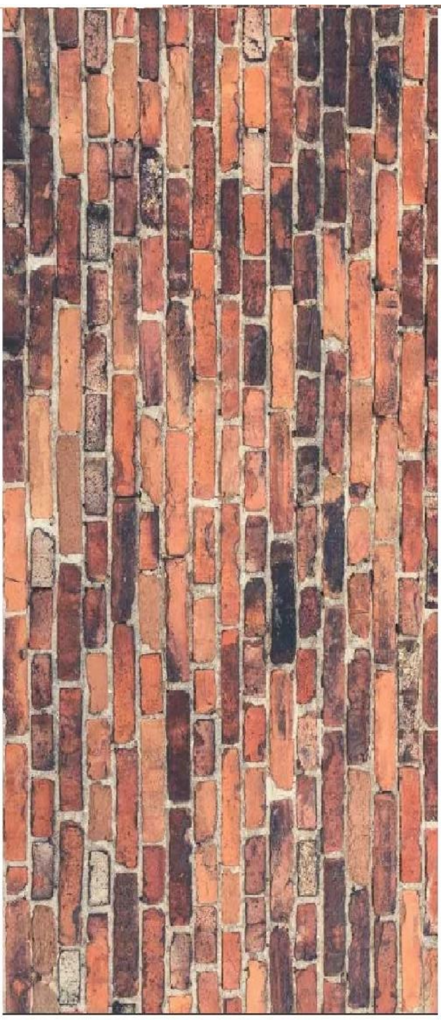
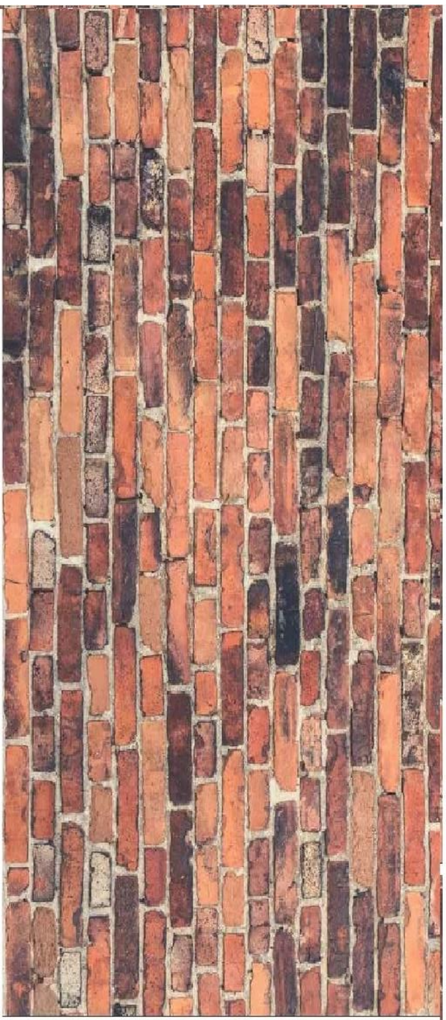
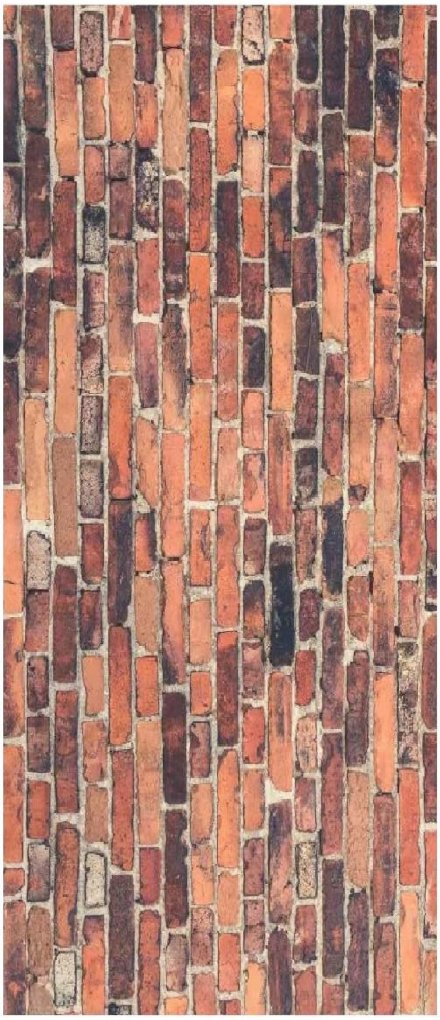
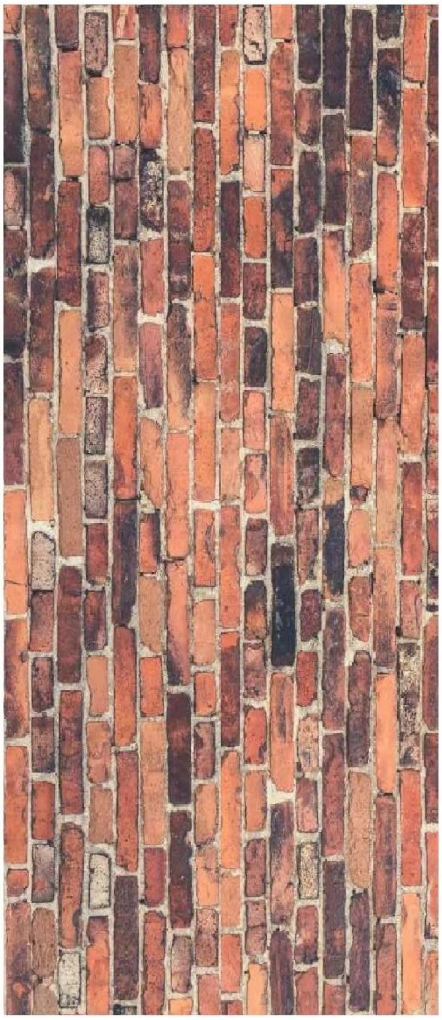
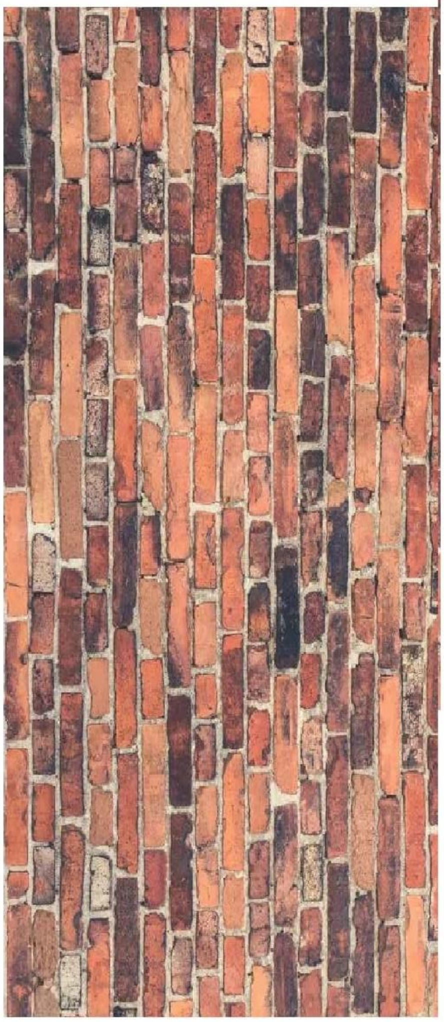
Qual das funções abaixo é representada por uma parábola com menor valor mínimo ?

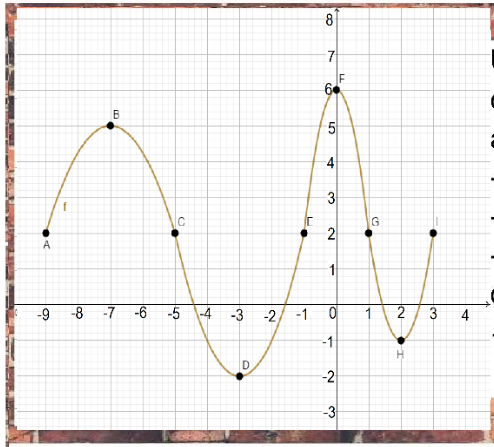
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 13\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 - 30x + 79\right)$$

18

Cartas-Tijolos Verso

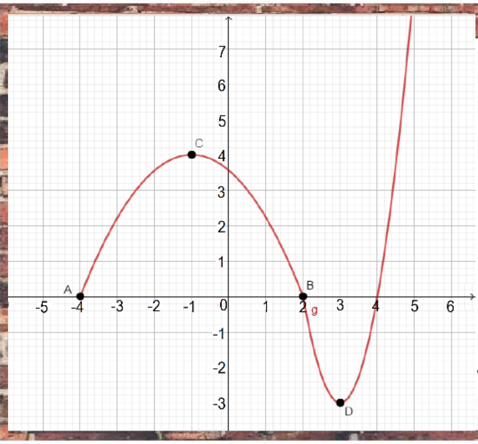









Uma função f possui gráfico conforme apresentado na imagem ao lado. Determine:

- O valor máximo e mínimo.
- O Domínio e a Imagem.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento.
- A taxa média de variação no intervalo de $x_1=-3$ a $x_2=-1$

19



Uma função g possui gráfico conforme apresentado na imagem ao lado. Determine:

- O valor máximo e mínimo, caso existam.
- O Domínio e a Imagem.
- Os intervalos de crescimento e decrescimento.
- As Raízes
- A taxa média de variação no intervalo de $x_1=-1$ a $x_2=2$

20

Seja a função $f(x)=2x^2-bx+c$, em que $f(5)=4$ e $f(1)=-4$. Determine:

- Os valores b e c.
- o valor mínimo da função
- o valor da expressão $f(9)-2f(6)$.

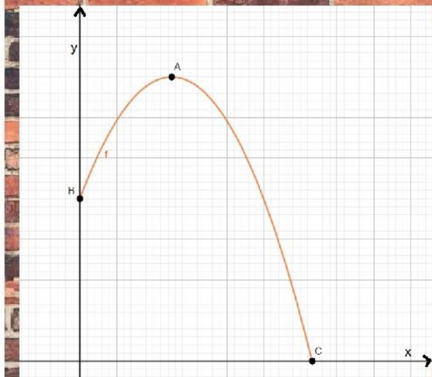
21

Para que valores reais de m a função: $f(x)=2x^2-3mx+2$, possui raízes reais iguais? E qual o valor mínimo.

22

Qual o maior valor inteiro possível de m, para que a função $f(x)=x^2-5x+m-1$ tenha 2 raízes reais e distintas. E determine o valor mínimo da função.

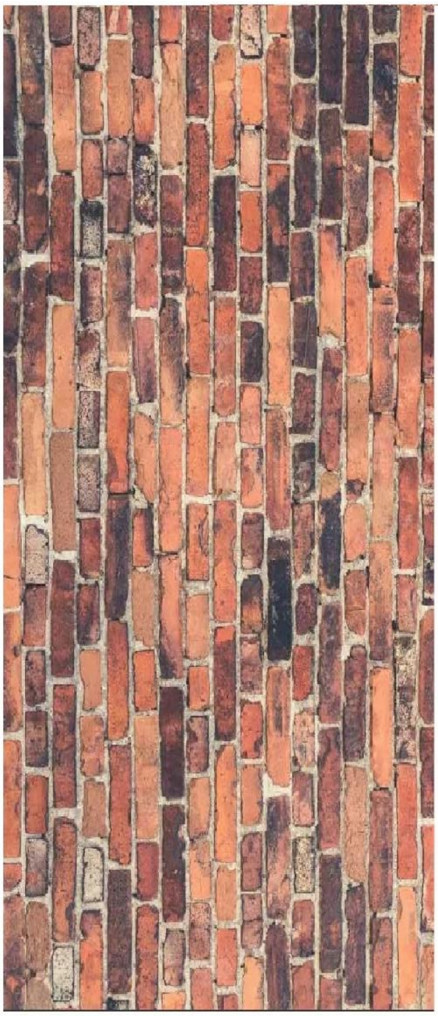
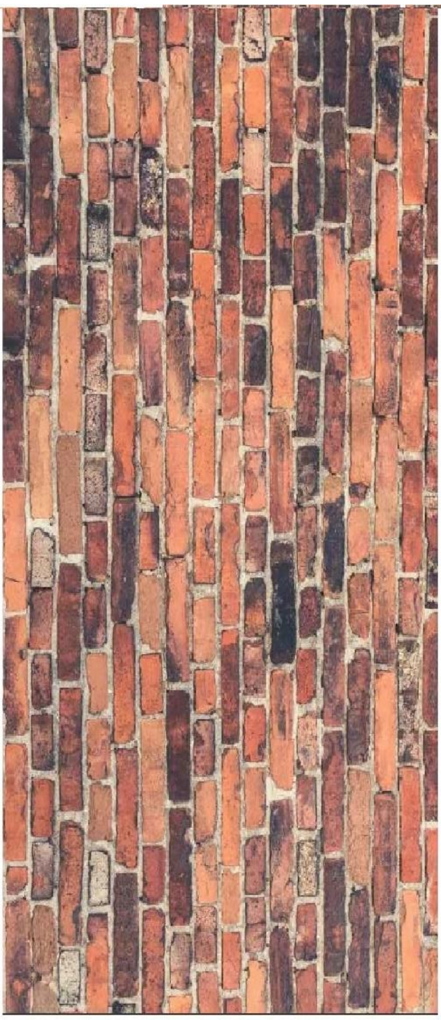
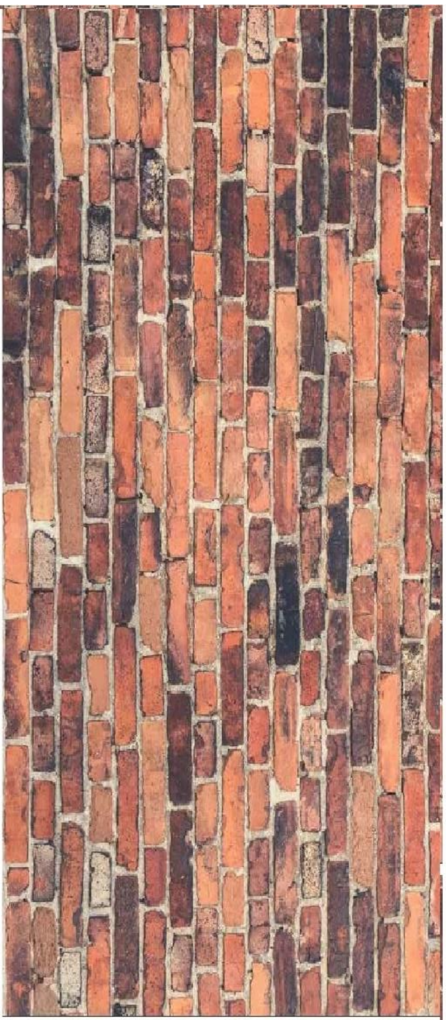
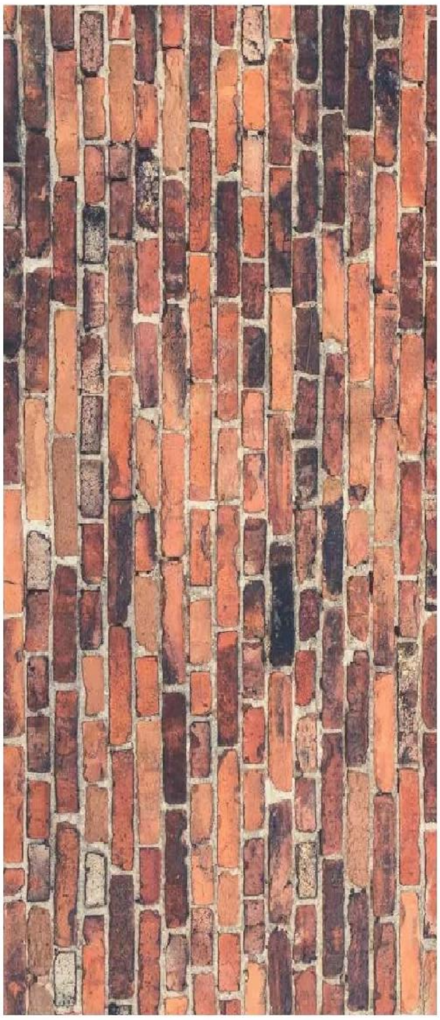
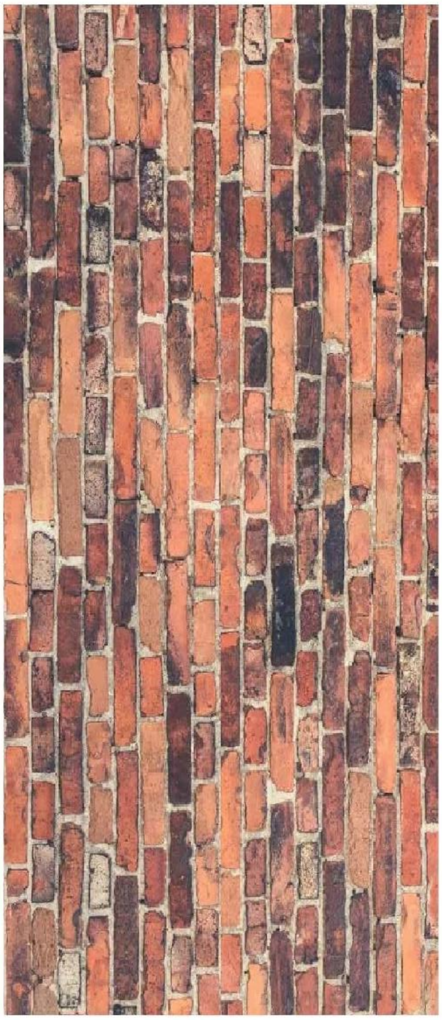
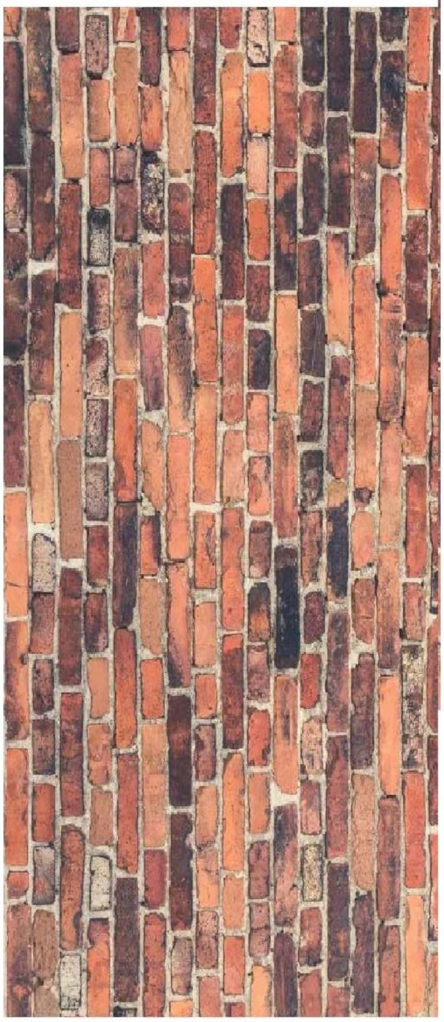
23



Uma empresa determinou queda no preço de determinado produto. Em x dias após a queda nos preços, as vendas diárias foram expressadas por $f(x)=-6x^2+60x+200$. Depois de quantos dias a venda atingiu o valor máximo?

24

Cartas-Tijolos Verso

APÊNDICE E

Cartas-Respostas

Cartas-Respostas Frente

$r(t)=\frac{7}{3}t$	1987	2003 1989 2000-2001	2 m
máximo	mínimo	a) p<-5 b) Não.	b=-12 C=3
K=12 Máximo: 6	K=-2	Máximo: 6 Mínimo:-2 Domínio: [2,13] Imagem: [-2,6] Crescimento: (2,4)U(9,13) Decrescimento: (4,9) Tmv: 2	Máximo: 2,4 Mínimo:-2,3 Domínio: [-0,5;4,5] Imagem: [-2,3;2,4] Dec.: (-0,5;1,5)U(3,84;4,5) Crescimento: (1,5;3,84)
Velocidade nula: 2,5 s Altura máxima: 1,25m Altura 1,2m: 2 e 3s	Máximo: 6 Mínimo:-7 Domínio: [-6,20] Imagem: [6,-7] Crescimento: (-6,-2)U(6,14) Dec.: (-2,6)U(14,20) Tmv: -2	30 unidades para custo Mínimo de R$100,00	Aumentar $\frac{7}{6}$
$f(x)=\frac{1}{9}\left(-5x^2+40x-35\right)$	$g(x)=\frac{1}{4}\left(3x^2-30x+79\right)$	Máximo: 6 Mínimo:-2 Domínio: [-9,3] Imagem: [-2,6] Cresc.: (-9,-7)U(-3,0)U(2,3) Dec.: (-7,-3)U(0,2) Tmv: 2	Mínimo:-3 Máximo: Não possui Dom.: [-4,∞) e Im.: [-3, ∞) Cresc.: (-4,-1)U(3, ∞) Dec.: (-1,3) Raízes: -4,2 e 4 Tmv: $\frac{-4}{3}$
b=10 c=4 Mínimo:-8,5 f(9)-2f(6)=44	$m=\frac{4}{3}\ ou\ \frac{-4}{3}$ Mínimo: 0	m=7 mínimo:-0,25	5 dias

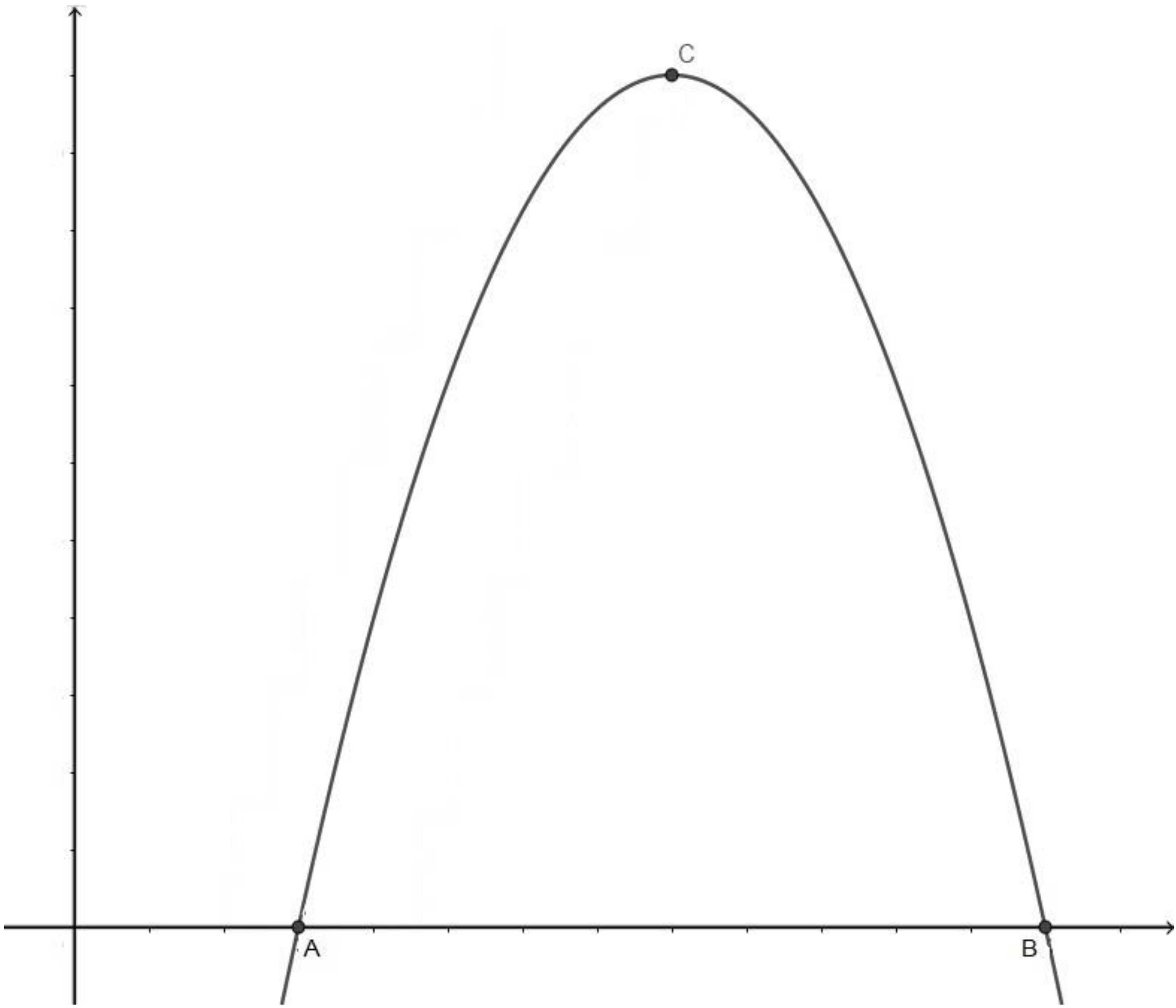
Cartas-Respostas Verso

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24

APÊNDICE F

Modelo de Cartaz Trajeto-Escalada para ampliação

Trajeto-Escalada



APÊNDICE G

Ficha da Atividade "Sherlock Holmes" de Gráficos

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

Alunos:________________________________

Grupo:__________ Turma:_______ Data:___/___/___

Olá Aluno!

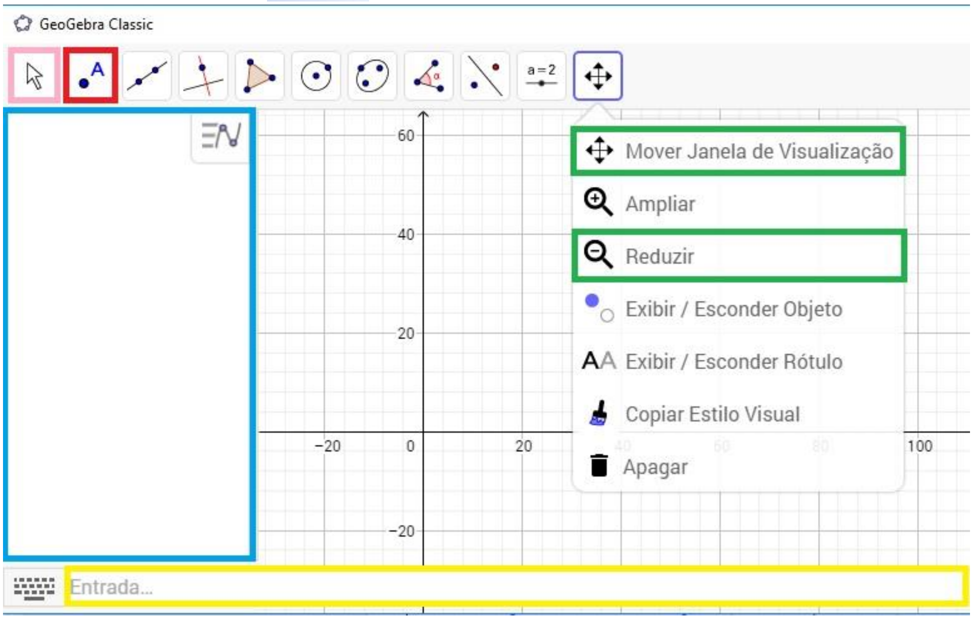
*Hoje você é "**<u>Sherlock Holmes" de Gráficos</u>**!*

A lupa, ferramenta comum dos investigadores, hoje será substituída pelo software GeoGebra!

<u>Investigação 1: Intervalos de crescimento</u>

Seja a função $f(x)=x^2-15x+56$. Esboce seu gráfico utilizando o GeoGebra, seguindo os passos abaixo:

a) Abra o GeoGebra



b) Digite a função f(x) no "campo de entrada" destacado em amarelo na imagem acima.
O gráfico da função será exibido.
Você pode Ajustar o plano cartesiano, se necessário, buscando uma melhor visualização, utilizando os botões ***Mover Janela*** e ***Reduzir*** .

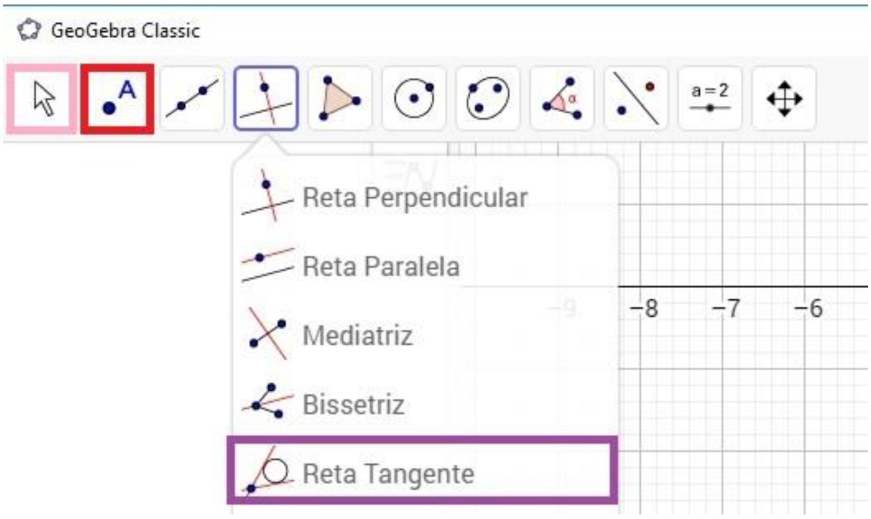
c) Calcule as coordenadas $(x_v,y_v)=(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a})$ do vértice da parábola representativa da função:

d) Agora que você já encontrou os valores x_v e y_v, digite $P=(x_v,y_v)$ no “campo de entrada”. O ponto será destacado no gráfico.

e) Sabendo que uma função é crescente em um intervalo do seu domínio quando para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, onde $x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$, observando o gráfico, identifique o intervalo de crescimento da função: ____________

f) Os intervalos de crescimento de uma função possuem outras características, também muito importantes, relacionadas ao coeficiente angular da reta tangente, taxa de variação instantânea, nesses pontos do gráfico. Investigue, utilizando o GeoGebra, e apresente suas conclusões:

Marque um ponto “**A”** qualquer no intervalo de crescimento. (*Dica: Clique no botão **Novo Ponto***  *e seguidamente sobre o gráfico da função*). As coordenadas do ponto “**A”** serão exibidas na “Janela de Álgebra” (destacada em azul na imagem inicial).



Trace a reta tangente ao gráfico no ponto “**A**” (*Dica: Clique na opção **Reta Tangente**, destacada em roxo na figura acima, no ponto **A** e seguidamente em uma parte qualquer do gráfico)*. Observe que a equação da reta formada é exibida na “Janela de Álgebra”.

g) Clique no botão ***Mover***  para deslizar o ponto “**A**” sobre o gráfico, dentro do intervalo de crescimento. Note a mudança do valor do coeficiente angular da reta tangente nesse ponto e tire suas conclusões:

Nos intervalos de crescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são:

( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

O gráfico da função possui concavidade voltada para ___________, e observa-se que, nos intervalos de crescimento, os **valores absolutos** dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

(   ) crescentes (   )decrescentes (   ) variam

Investigação 2: Intervalos de decrescimento

Ainda trabalhando com a mesma função: $f(x)=x^2-15x+56$.

a) Sabendo que uma função é *decrescente em um intervalo do seu domínio quando para quaisquer valores* x_1 *e* x_2 *desse intervalo, onde* $x_1 < x_2$, *tem-se que* $f(x_1) > f(x_2)$, observando o gráfico, identifique o intervalo de decrescimento da função: ____________

b) Os intervalos de decrescimento de uma função também possuem características relacionadas ao coeficiente angular das reta tangente, taxa de variação instantânea, nesses pontos do gráfico. Utilizando o GeoGebra, investigue e apresente suas conclusões:

   Nos intervalos de decrescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são:

   (   )positivos (   )negativos (   )variam entre valores positivos e negativos

   O gráfico da função possui concavidade voltada para ___________, e observa-se que, nos intervalos de decrescimento, os **valores absolutos** dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

   (   ) crescentes (   )decrescentes (   ) variam

Investigação 3: Máximos e/ou mínimos de uma função

Sabendo que: se uma função possui um ponto $P=(x_v,y_v)$ do gráfico, onde para qualquer $x \neq x_v$, pertencente ao domínio, temos que **$f(x) > y_v = f(x_v)$** , então dizemos que **y_v é o valor mínimo da função; faça o que se pede:**

a) Vimos que, na função $f(x)=x^2-15x+56$, P= (_______,_______), logo, ______ é o valor mínimo da função.

   Verifique, com o GeoGebra, qual o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico nesse ponto P. (para isto, trace a reta tangente nesse ponto)

   A equação da reta é:____________________

b) Trace a reta paralela ao eixo **OX**, passando por “**P”** (*Dica: clique na opção **Reta Paralela**, destacada em laranja na figura abaixo, e a seguir clique sobre o ponto P e o eixo **OX***)

   A equação da reta é:_______________________

   Que conclusão você chega sobre as retas formadas:_______________________

c) Trace a reta paralela ao eixo **OX**, passando por “**A”** , criado na investigação 1.

Clique no botão ***Mover***  para deslizar o ponto “**A**” sobre o gráfico em direção a seu valor mínimo. Note a “mudança” entre as duas retas traçadas pelo ponto A, tangente e paralela, em algum outro ponto elas coincidem? _______________

Investigação 4: mudanças de concavidade

Sabendo que: se uma função possui um ponto P=(x_v,y_v) do gráfico, onde para qualquer $x \neq x_v$, pertencente ao domínio, temos que **$f(x) < y_v = f(x_v)$** , então dizemos que **y_v é o valor máximo da função.**

a) Repita todas as investigações (1,2 e 3) para a função: $f(x)=-2x^2+x-1$, que possui concavidade voltada para _______________, apresentando suas conclusões:

Nos intervalos de crescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico em cada ponto são valores:

( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

O gráfico da função possui concavidade voltada para ___________, e observa-se que, nos intervalos de crescimento, os **valores absolutos** dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

( ) crescentes ( )decrescentes ( ) variam

Nos intervalos de decrescimento de uma função, os valores dos coeficientes angulares das retas tangente ao gráfico em cada ponto são valores:

( )positivos ( )negativos ( )variam entre valores positivos e negativos

O gráfico da função possui concavidade voltada para ___________, e observa-se que, nos intervalos de decrescimento, os **valores absolutos** dos coeficientes angulares das retas tangentes nos pontos são:

( ) crescentes ( )decrescentes ( ) variam

Na função, P= (_______,_______), logo, ______ é o valor máximo da função.

A equação da reta tangente é:________________________

A equação da reta paralela ao eixo **OX** é:________________________

Que conclusão você chega sobre as retas formadas: _________________________

Você teria essa mesma conclusão para algum outro ponto do gráfico? __________

Investigação 5: Máximos e/ou mínimos de uma função – Aplicação em uma nova função

Como visto, o ponto mínimo ou máximo de uma função tem a seguinte característica: A reta tangente ao gráfico, quando existe, nesse ponto, coincide com a reta paralela ao eixo OX, também passando por esse ponto.

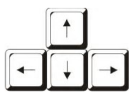
Seja a função **f(x)=** $\frac{1}{12}\left(x^4 + 6x^3 - 18x^2\right)$, onde foi dado que seu domínio é o intervalo aberto (0,2). Perceba que esta não é uma função do 2° grau, logo seu ponto de máximo ou mínimo não pode ser encontrado pela expressão $(x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$.

a) Esboce o gráfico de f utilizando o GeoGebra.

b) Observando o gráfico (Fique atento ao domínio!), você já consegue concluir que a função possui um máximo ou mínimo? ________________________.

c) Vamos encontra-lo, utilizando nossas investigações!

- Marque um ponto A qualquer do gráfico. (*atenção aos valores válidos para **x**!)*
- Traçar a reta paralela ao eixo **OX**, passando por "**A"**
- Traçar a reta tangente ao gráfico no ponto "**A**"
- Cique no botão ***Mover***  para deslizar o ponto "**A**" sobre gráfico de f(x) em direção a seu valor máximo. Note a "mudança" entre as duas retas traçadas pelo ponto A, pois num certo momento os gráficos delas irão coincidir *(Verifique na "Janela de Álgebra" que ambas equações coincidem).*

  (*Dica, após ter selecionado o ponto A com o botão mover, você pode utilizar as setas do teclado*  *para deslizar, caso prefira. Ampliar a janela de visualização também lhe ajudará, quanto mais próximo mais fácil será para deslizar com o ponto)*

d) Conclua as coordenadas do ponto máximo (ou mínimo) da função: ________________

e) Qual é o valor máximo (ou mínimo)? ________________________

Parabéns investigador! Você concluiu seu trabalho.

Observe que agora você é capaz de descobrir o ponto máximo e/ou mínimo de qualquer função que contenha reta tangente.

APÊNDICE H

Ficha da Atividade O Agricultor

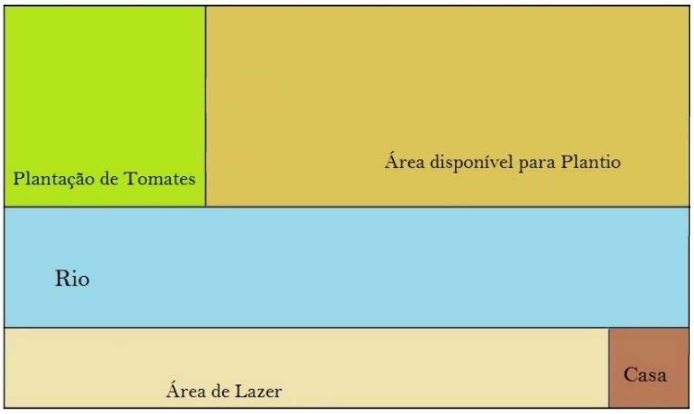
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Alunos:___________________________________
Grupo:_________ Turma:_______ Data:____/____/___

Olá Aluno!

*Sua tarefa de hoje é ajudar **O Agricultor** a organizar e administrar sua nova fazenda, analisando os desejos indicados por ele e apresentar as melhores soluções.*

Para isso, você pode contar com a ajuda do software GeoGebra!

Veja a figura ilustrativa da fazenda:

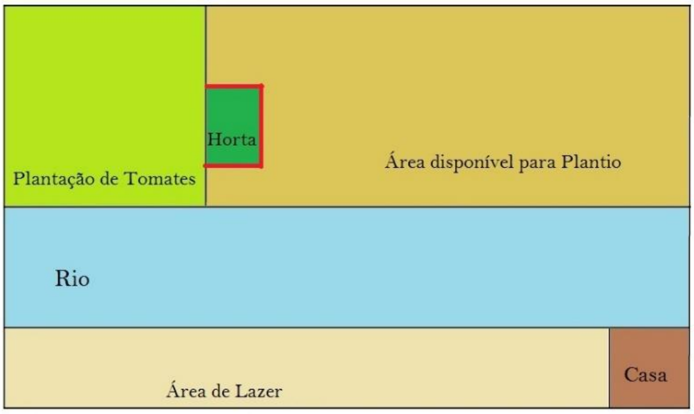


O agricultor destinou a área acima do Rio para seus cultivos, e abaixo do Rio para lazer, onde se encontra também sua casa.

Desejo 1: “A Horta”

Preocupado com o periodo de cheia, o agricultor deseja construir uma horta de área retangular um pouco acima do rio e ao lado da plantação cercada de tomates.

Sua intenção é fazer uma cerca para delimitar a horta, conforme indica a linha vermelha da imagem:



Sabendo que o custo do metro do “arame liso” é de R$3,00 para os lados paralelos ao rio e do “arame farpado” é de R$5,00 para o lado paralelo a cerca da plantação de tomates. Se ele dispõe de R$120,00 para esta tarefa, quais as dimensões do retângulo destinado para plantio que você indica ao agricultor para produzir a maior área possível?

Orientações:

a) Qual seu objetivo nessa questão?

Você deseja encontrar as___________________ do retângulo que **produzam área máxima (guarde essa informação!).**

b) Como essas medidas, largura (laterais paralelas ao rio) e comprimento (lado paralelo a cerca já existente), ainda não são conhecidas, podemos atribuir incógnitas ("letras") para representá-las. Assim, denote por:

___________ a largura do retângulo, em metros.

___________ o comprimento do retângulo, em metros.

c) Que outras informações podemos deduzir do texto?

O custo total do "arame liso" para as laterais da cerca é ______________

O custo total do "arame farpado" para a frente da cerca é ______________

d) A expressão que determina o custo total da cerca é: C = ________________

e) Na expressão d), substituindo C pelo valor máximo que o agricultor pode gastar na cerca, R$___________, temos a seguinte equação:_________________________________

f) Você encontrou uma equação com duas incógnitas? Verifique através da tabela abaixo que existe mais de um valor para as incógnitas que produzirão o mesmo custo total, isto é, que satisfazem a equação e).

	Largura (m)	Comprimento (m)	Custo total (R$)
M1	3	20,4	
M2	9	13,2	
M3	15	6	
M4	17	3,6	
M5	24	1,2	

g) Conforme a informação em negrito no item a), as medidas (incógnitas) do retângulo devem produzir _________________________

h) Qual a expressão que determina a área em termos das incógnitas? A=_______________

i) Verifique na tabela do item f) qual o valor da área produzida por cada dupla de valores.

	Área (m²)
A1	
A2	
A3	
A4	
A5	....

j) Porém, qualquer valor para as incógnitas poderão “servir” como solução para a nossa questão? $\boxed{\text{SIM}}$ $\boxed{\text{NÂO}}$

Qual delas produziu a maior área? _____________.

k) O valor anterior, correponde a maior área possível que pode ser encontrada ou é possível existir outro valor que produza um melhor resultado? **Vamos descobrir!**

Escreva a “equação custo total” encontrada em e) :_______________________

Escreva a expressão para a área encontrada em h): _______________________

A área depende de duas variáveis (incógnitas), porém é possível reescreve-la utilizando apenas uma delas? (*Dica: Isole uma das variáveis da equação e) e substitua na expressão*.)

____

l) A área depende de uma única variável _____, logo pode ser vista como uma função que depende dela, assim A(__) =_________________

m) As variáveis _______ e _____, **que representam respectivamente a largura e o comprimento do retângulo,** poderiam assumir um valor menor ou igual a zero? Justifique: ____.

Há alguma outra exigência? Associe:

(C) O comprimento do retângulo

(L) A largura do retângulo

( ) Deve assumir valores maiores ou iguais a 20.

( ) Deve assumir valores positivos, menores que 20.

( ) Deve assumir valores maiores ou iguais a 24.

( ) Deve assumir valores positivos, menores que 24.

( ) Não há nenhuma outra exigência.

Dica: retorne a expressão do custo em e).

n) Como queremos **área máxima**, devemos encontrar o ponto (x_v,y_v) do gráfico da função onde **<u>para qualquer $x \neq x_v$</u>**; (x é um valor “válido” para a situação, conforme análise feita em m); temos **<u>$A(x) < y_v = A(x_v)$</u>**, isto é **y_v é o valor máximo (ou área máxima) de A(x)**.

Utilize os conhecimentos adquiridos na atividade ***“Batalha de Canhões”*** ou *“**Sherlock Holmes” de Gráficos*** para concluir as coordenadas do ponto máximo da função e qual a área máxima.

____

____

o) Finalize a atividade, indicando ao agricultor qual a melhor alternativa. (*Dica: Retorne ao item a) e relembre qual era seu objetivo, isto é, que informação o agricultor lhe solicitou).*

____

____

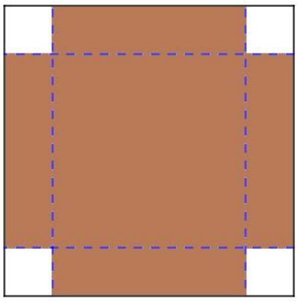
____

<u>Desejo 2: “Caixa para colheita</u>”

Agora, o agricultor deseja aproveitar uma tábua de madeira quadrada, de 6 metros de lado, disponível na sua fazenda, para fazer uma caixa sem tampa com o objetivo de armazenar seus tomates durante a colheita.

A caixa vai ser montada a partir do corte de quadrados iguais nos quatro cantos do material e "dobrando-se" os lados (serrando e pregando).

Veja a imagem ilustrativa do corte:



Qual a medida do lado desses quadrados a serem retirados que você indica ao agricultor de forma que a caixa possua o maior volume?

Orientações:

a) Qual seu objetivo nessa questão?

____

b) Como essa medida, lado dos quadrados a serem retirados, ainda não é conhecida, podemos atribuir incógnita ("letra") para representá-la. Assim, denote por:

___________ o lado dos quadrados a serem retirados, em metros.

c) Teste os seguintes valores para a incógnita:

	Valores (m)	Volume (m³)
V1	0,4	
V2	1,7	
V3	2,3	

Qual deles produziu o maior volume? __________

Esse valor, corresponde ao maior volume possível que pode ser encontrado ou existe um outro valor que produza um melhor resultado? **Vamos descobrir!**

d) Qual a função que determina o volume em termos da incógnita? V(__) = _________________

(*Dica: Use as informações disponíveis no texto e as figuras para identificar as dimensões da tábua de madeira e o corte a ser feito. A seguir, lembre que Volume = altura x largura x comprimento*).

e) A variável _______, **que representa o lado dos quadrados a serem retirados,** poderia assumir um valor menor ou igual a zero? Justifique: ______________________________.

Há alguma outra exigência? Marque a alternativa correta e justifique:

( ) Deve assumir valores maiores ou iguais a 3.

( ) Deve assumir valores positivos, menores que 3.

( ) Não há nenhuma outra exigência.

____

____

f) Como queremos **volume máximo**, devemos encontrar o ponto (x_v,y_v) do gráfico da função onde **para qualquer $x \neq x_v$**; onde x é um valor "válido" para a situação, conforme analise feita em e), temos $V(x) < y_v = V(x_v)$, isto é **y_v é o valor máximo (ou volume máximo) de V(x)**. Utilize os conhecimentos adquiridos na atividade ***"Sherlock Holmes" de Gráficos*** para concluir as coordenadas do ponto máximo da função e qual o volume máximo.

____

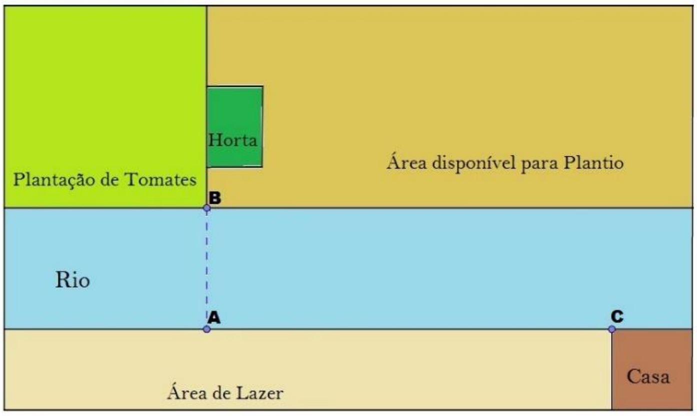
____

g) Finalize a atividade, indicando ao agricultor qual a melhor alternativa. (*Dica: Retorne ao item a) e relembre qual era seu objetivo, isto é, que informação o agricultor lhe solicitou).*

____

Desejo 3: "Bomba para irrigação"

O agricultor, para irrigar sua plantação, deseja instalar uma bomba de água no ponto B, localizado na margem do rio, oposta a sua casa (Ponto C). Porém, faz-se necessário energia elétrica para seu funcionamento. Considerando que o ponto B encontra-se 100m rio abaixo de sua casa e que o rio retilíneo tem 30m de largura, "Ele" solicitou então, uma conexão elétrica entre os pontos B e C (veja a imagem).



A empresa que irá realizar o serviço informou que o custo por metro da instalação de fiação por água é R$5,00 e por terra é R$4,00.

Qual deve ser a medida por terra e por água que você indica ao agricultor para que se tenha custo mínimo?

Orientações:

a) Qual seu objetivo nessa questão?

____

b) Como o trajeto inicia por terra partindo do ponto C (casa), marque um ponto **D** na figura que ilustre o fim do percurso por terra. Assim,

- A medida de fiação por terra é representada pelo segmento__________que simplificadamente denotaremos pela incognita ________ . O custo da fiação por terra é C_T = _______
- A medida de fiação por água é representada pelo segmento__________que simplificadamente denotaremos pela incognita ________ . O custo da fiação por água é C_A = _______
- As incógnitas anteriores podem assumir valores menores ou iguais a zero? __________
- É uma boa alternativa marcar o ponto D a uma distância maior que 100 metros de C? Justifique!____

  ____

c) Se o ponto A é tal que $\overline{AB}$ representa a largura do rio, então o ângulo entre os segmentos AB e AC é _________.

d) Os segmentos que unem os pontos B, A e D formam um poligono muito especial, chamado ____________________________, que tem a seguinte relação entre as medidas de seus lados:________________________________ , chamada teorema de _________________.

e) Reescreva a equação d), utilizando as informações do texto e as incógnitas definidas, e isole a incógnita que representa a medida de fiação por água:

____

f) Em e) você encontrou uma equação com duas incógnitas? Verifique através da tabela abaixo que teremos mais de um valor para as incógnitas que satisfazem a equação. (*nesse item é permitido uso de calculadora*)

	Fiação por terra (m)	Fiação Aproximada por água (m)	Cálculos:
V1	23	82,64	
V2	44	63,53	
V3	78	37,20	

g) De b), podemos deduzir a expressão que determina o custo total C, em termos das duas incógnitas definidas? C = ______________________ .

h) Verifique na tabela do item f), qual o valor do custo produzido por cada dupla de valores.

	Custo (R$)
C1	
C2	
C3	

Qual deles produziu o menor Custo?____

O valor anterior, correponde ao menor custo possível que pode ser encontrado ou é possível existir outro valor que produza um melhor resultado? **Vamos descobrir!**

i) O custo total depende de duas incógnitas, porém é possível reescreve-lo utilizando apenas uma delas, para isso basta substitua e) em g): ____________________________

j) O custo total depende de uma única variável _____ , definida no intervalo __________, logo, pode ser vista como uma função que depende dela, assim C(__) =_______________.

k) Como queremos **o custo mínimo**, devemos encontrar o ponto (x_v,y_v) do gráfico da função onde **para qualquer** $x \neq x_v$; onde x pertence ao domínio; temos $C(x) > y_v = C(x_v)$, isto é y_v **é o valor mínimo (ou custo mínimo) de C(x)**.

*Utilize os conhecimentos adquiridos na atividade "**Sherlock Holmes" de Gráficos** para concluir as coordenadas do ponto mínimo da função e qual o custo mínimo.*

____

____

l) Finalize a atividade, indicando ao agricultor qual a melhor alternativa. (*Dica: Retorne ao item a) e relembre qual era seu objetivo, isto é, que informação o agricultor lhe solicitou).*

____

____

APÊNDICE I

Questionários

Questionário

Município: SÃO SEBASTIÃO DO ALTO Data: 06/08/2018 Ficha N°: 01

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Licenciatura em Matemática / Pós Graduação

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

44 anos / 24 anos

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

• Falta de incentivo nas séries iniciais.
• Uso da matemática como disciplina repreendora, onde os alunos têm medo (principalmente nas séries iniciais) Para muitas crianças a ~~(matemática)~~ tabuada é cobrada como forma de castigo. A partir daí, muitas vezes, começa o bloqueio.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Utilizo sempre que possível.
Os jogos estimulam a aprendizagem o raciocínio lógico e também a socialização do aluno, pois raramente joga sozinho.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Sim. Utilizo grupos da turma no whatzzap com a finalidade de maior interação entre professor x aluno. Envio questões extras e assuntos relacionados aos conteúdos estudados, além de questões que estimulam o raciocínio lógico.
Permito também muitas vezes o uso do app Photomath, um aplicativo interessante no uso de funções.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Infelizmente não temos tempo hábil para dedução de fórmulas. O tempo é curto e o plano do Currículo Mínimo é enorme.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim. Muitos alunos, mesmo que não saibam ou não consigam resolver determinados assuntos, pelo menos tentam quando algo lhes chama atenção.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Leitura e interpretação

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim. Geralmente, tudo que envolve a tecnologia, atrai o aluno.

Questionário

Município: SÃO SEBASTIÃO DO ALTO Data: 06/08/2018 Ficha N°: 02

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Pós GRADUAÇÃO - Matemática

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

36 anos - Trabalho há 12 anos

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

* O conceito equivocado de que matemática é muito difícil, às vezes segundo eles impossível de aprender.
* Uma base cheia de falhas, os estudantes chegam ao fundamental II com muita dificuldade em: TABUADA, Quatro operações e carregam essa falha,

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim; não com muita frequencia, pois a educacão no Estado não propõe muitos récursos para tal aplicação.
* Os benefícios: Melhora o interesse pelas aulas
* A participação em grupo
* Melhor retenção do conteúdo, Interação social e diversão

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Não. A escola que leciono não possui um espaco físico informatizado para tal utilização.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim. Mas como já citei anteriormente não são todos os alunos que demonstram interesse em aulas diversificadas, muitos tem muita dificuldade em resolver situações problemas, fórmulas mesmo com métodos atraentes. Percebo principalmente na Matematica com o "bicho papão". Há ainda muita resistência no aprendizado da matemática.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim. Os alunos questionam, resolvem as questões com um pouco mais de interesse. Apesar de nos últimos anos ter notado muito desinteresse por parte deles. Não é fácil despertá-lo para a matemática, porém essa diversificação ajuda.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

* Falta de atenção, não querem ler, pensar.
* Pré-requisitos ⇒ Não possuem suficiente conceitos básicos. Alguns alunos não dominam tabuada, quatro operações

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim.

* Pontos Negativos ⇒ Ausência de Sala de informática com computadores em bom estado e nº suficiente para atender os alunos.

* Positivo ⇒ Maior interesse dos alunos, estímulo as aulas por se tornarem mais dinâmica.

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

UENF

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 28/08/2018 Ficha N°: 03

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Licenciatura plena em Matemática, pós graduando

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

34 anos, trabalho com matemática a 4 anos.

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

Falta de base do ensino dos anos anteriores, parece que os alunos têm um certo "bloqueio", medo da matemática.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

As vezes; através deste recurso eles conseguem enxergar melhor certo tipo de situação ou problema como por exemplo: gráficos.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

As vezes; os alunos demonstram maior interesse quando utilizam este tipo de recurso e conseguem visualizar melhor um gráfico, por exemplo.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim, mas os alunos não demonstram interesse, por isso não é tão utilizado

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim, o aluno demonstra maior interesse e entende melhor o assunto.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

A interpretação é um dos maiores problemas, além da dificuldade em dominar conteúdos básicos de matemática.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim, muito positiva, pois o uso da tecnologia "motiva" o aluno; por outro lado, nem sempre podemos usá-la, pois a internet não permite, ou é lenta ou não está funcionando no dia da aula etc.

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

UENF

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Questionário

Município: APERIBÉ Data: 15/08/2018 Ficha N°: 04

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

IDADE: 28 ANOS - TEMPO DE TRABALHO: 5 ANOS

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

O FATOR CULTURAL EM TORNO DA MATEMÁTICA, CONSIDERANDO A MATEMÁTICA COM UMA DISCIPLINA QUASE IMPOSSÍVEL DE SE APRENDER. AS PRÉ-REQUISITOS EM DETERMINADOS CONTEÚDOS INFLUENCIA A DIFICULDADE DOS ALUNOS, QUE IMPLICA NA FALTA DE INTERESSE DA MATEMÁTICA COMO UM TODO.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

NÃO. O PERÍODO CURTO COM OS ALUNOS E O EXCESSO DE CONTEÚDOS EM DETERMINADOS PERÍODOS NÃO FAVORECE UM PLANEJAMENTO ADEQUADO PARA ESSE TIPO DE METODOLOGIA.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

POUCAS VEZES. O FATO DOS ALUNOS JÁ USAREM OS MEIOS TECNOLÓGICOS FREQUENTEMENTE FAVORECE O TRABALHO EM SALA DE AULA, O RECURSO VISUAL, A PRATICIDADE CONTRIBUEM MUITO. EM FUNÇÕES, GOSTO PRINCIPALMENTE DAS MANIPULAÇÕES E COMPORTAMENTO DAS MESMAS.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

NÃO.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

SIM. POR FAZER PARTE DO MEIO QUE VIVEM, OS ALUNOS FICAM MAIS ATENTOS E CURIOSOS NOS RESULTADOS POSSÍVEIS.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

INTERPRETAÇÃO DE TEXTO;
ANÁLISE DO PROBLEMA (ORGANIZAÇÃO DE OPERAÇÕES);

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

SIM. A PRATICIDADE EM CASO DE MATERIAL ADEQUADO NAS ESCOLAS TORNA O USO DE SOFTWARES UMA FERRAMENTA DE EXTREMO IMPORTÂNCIA, A MANIPULAÇÃO DOS MESMOS, O RECURSO VISUAL E O DINAMISMO TECNOLÓGICO CONTRIBUEM PARA UM ENSINO SIGNIFICATIVO.

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

PROFMAT

UENF

Questionário

Município: Sto Ant. de Pádua Data: 04/08/18 Ficha N°: 05

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?
   Licenciatura em Matemática

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?
   32 / 4

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?
   ( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?
   - Falta de conhecimento prévios para o entedimento dos conteúdos.
   - Aspectos culturais
   - Falta de incentivo aos estudos pelos familiares

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Não.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Não, pois as escolas que trabalho ~~em~~ não oferecem as estruturas necessárias para a utilização destes recursos.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim. Quando os alunos conseguem "enxegar" a origem das fórmulas, eles tem maiores facilidades na resolução de problemas parecidos. Com isso, quando são propostos outras atividades, eles resolvem mais facilmente.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Estas atividades atraem a atenção dos estudantes. Percebo que os alunos sentem mais "animados" com as atividades, pois conseguem visualizar a matemática no seu cotidiano.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Eles tem maiores dificuldades em interpretar as situações problemas e visualizarem os conteúdos matemáticos que devem ser utilizados.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim. Tem a visualização geométrica com as mudanças dos parâmetros e a possibilidade de exemplos distintos dentro da mesma função

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

UENF

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 13/08/2018 Ficha N°: 06

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Professora de Matemática (Mestre)

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

32 anos de idade e há 10 anos lecionando.

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

O fato mais relevante que considero é a cultura implantada que a matemática é muito difícil. Aliado a isso, tem-se:
- Matemática ensinada desconectada da realidade do aluno.
- Dificuldades no raciocínio lógico e na interpretação das questões.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Raramente utilizo devido a falta de recursos e tempo para aplicação.
Benefícios: a aula se torna mais dinâmica; estimula o raciocínio lógico; contribui para a interação entre alunos e alunos-professor; aprendizagem de forma lúdica.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Já utilizei algumas vezes. Com a utilização das tecnologias, o aluno se envolve mais com o conteúdo a ser aprendido.
Em especial, o ensino das funções através de recursos tecnológicos possibilita uma melhor associação entre a representação algébrica e gráfica, descobertas de características de diversas funções e também seus comportamentos.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Considero importante sim, porém a maioria dos alunos focam apenas na fórmula final e não utilizam o desenvolvimento apresentado para resolverem atividades posteriores.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Essas atividades despertam muito mais o interesse dos alunos, os mesmos passam a participar mais das aula e ficam mais motivados para resol- verem as tarefas.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

A maior dificuldade encontra-se na interpretação dos problemas. Aliado a isso, existe a mecanização da utiliza- ção de fórmulas sem uma análise deta- lhada do problema.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Com certeza essa abordagem será muito válida para o ensino do tema em questão, uma vez que, facilitará o ensino através da visualização e também devido ao fato de possibilitar uma abordagem mais ampla do assunto.

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

UENF

Questionário

Município: Itaocara Data: 11/09/2018 Ficha N°: 07

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?
Licenciatura em matemática

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?
31 anos. 7 anos

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?
( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?
Defasagem escolar e falta de interesse por parte dos alunos.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim. Os jogos além de ser motivante, ajuda na interação com os colegas e raciocínios lógicos.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Às vezes. O uso da tecnologia é ótima fonte de pesquisa. Usar a tecnologia no ensino de funções ajuda os alunos a ter uma visão melhor dos gráficos, além de ser mais atrativo.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim, para os alunos que tem interesse acham super interessante o resultado final das fórmulas, mas nossos alunos tem se demonstrado cada dia menos interessados, por isso, a maioria acham uma chatisse a investigação de fórmulas, porém para os alunos que demonstraram mais interesse na investigação também demonstraram mais facilidade nas atividades.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim. Quando as atividades estão mais perto da sua realidade o intendimento e o interesse e muito maior, pois interagem melhor nas aulas.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

nas situações-problemas a maiores dificuldades estão nas interpretações, pois a maioria de nossos alunos não gostam de ler.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim. Com a utilização da tecnologia, ou melhor, no uso do software os alunos conseguem uma visão mais ampla das representações gráficas das funções, porém na maioria das vezes a sala de informática das escolas não estão funcionando.

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

PROFMAT

UENF

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 14/08/2018 Ficha N°: 08

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Licenciada em Matemática / Especialista em Informática em Educação / Mestranda em Ensino e suas Tecnologias

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

46 anos / 21 anos

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?
( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

- Falta de conhecimento prévio
- Não conseguem linkar a matemática com o seu uso na vida

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim, utilizo jogos educativos no formato digital, o que tem despertado interesse e motivação nos alunos.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

- Tenho utilizado a calculadora gráfica Desmos para aprofundar o estudo do gráfico de funções,

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Atividades de investigação eu utilizo e acho extremamente necessárias, quanto ao fato de mostrar a dedução de fórmulas, geralmente não faço, em função do tempo reduzido e da quantidade considerável de conteúdos para a disciplina de Matemática.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim, são exatamente estas que interessam aos alunos. E quando são aplicadas o nível de dedicação, atenção e motivação aumenta visivelmente.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

A interpretação do problema com definição dos dados e dificuldades com os passos para a solução, em função da falta de conhecimentos prévios, essenciais para o encadeamento das ideias.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim, a tecnologia é uma excelente aliada, porém muitos alunos acham difícil baixar aplicativos como o "Desmos", por exemplo, alegando falta de memória em seus celulares.

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

PROFMAT

UENF

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 14/08/2018 Ficha N°: 09

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Pós graduada em Psicopedagogia

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

Tenho 37 anos. Há 11 anos.

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?
   ( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

Por algo que busque raciocínio e concentração.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X)Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim. A dinâmica faz um aprendizado ser mais concreto, diversificado e social.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Não utilizo por falta de recursos. A escola não dispõe de computadores suficientes...

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim. É preciso saber de onde parte todo o conhecimento. Aplicá-lo é muito mais simples e seguro.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Atrai, com certeza. Eles associam na sua vida prática aquilo que estamos passando em sala de aula e desperta bastante interesse.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Interpretação. É um grande desafio fazê-los chegar a um resultado interpretando o contexto.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Considero sim. O mundo hoje é tecnológico e mostrar que essa tecnologia vem para o ensino de matemática pode solucionar grande parte dos bloqueios que temos.

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 14/08/2018 Ficha N°: 10

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

   Licenciatura em Matemática

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

   Tenho 29 anos e trabalho a 4 anos.

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

   ( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

   Os principais fatores estão relacionados ao sistema de avaliação. Dando as várias recuperações paralelas e devido principalmente a Progressão Parcial (dependência) que dá a chance do aluno poder perder em duas disciplinas e mesmo assim é promovido à série seguinte.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim, através de recursos podemos mostrar na prática as aplicações matemáticas. Diversos jogos são bons para exercitar o raciocínio lógico do aluno (xadrez, dama, dominó, etc) e outros jogos são bons para complementar os conteúdos dados em sala de aula, como por exemplo, a batalha naval para o estudo de plano cartesiano.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Sim, utilizo esse recurso. Alguns softwares como Winplot, Geogebra, entre outros são ótimas ferramentas para a visualização do "comportamento" dos gráficos das funções. Com esses recursos temos a possibilidade de gerar vários gráficos em poucos segundos. É um ótimo recurso para mostrarmos aos aluno o gráfico de várias funções, diversos pontos e o comportamento dos coeficientes da função e seus resultados no gráfico da função.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Apesar de eu achar importante percebo que não faz muito sentido para o aluno a dedução de fórmulas. Nesse caso, geralmente eu foco no que eu acho mais importante, que é a aplicação das fórmulas. Hoje não costumo muito fazer dedução de fórmulas.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim através das atividades contextualizadas, o aluno tem a possibilidade de perceber as aplicações da matemática. Nesse caso a Matemática passa a ficar mais "próxima" do aluno.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

A preguiça de ler um problema.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim, considero essa abordagem positiva pois através do computador o aluno pode visualizar diversas situações presentes no gráfico sem precisar fazer tanto esforço e ganhando tempo, porem o aluno também tem que saber fazer no papel também.

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 14/08/2018 Ficha N°: 11

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Mestrado - Modelagem computacional.

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

41 anos, 11 anos no ensino de matemática

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

Nossos alunos apresentam-se desinteressados por todas as áreas. Acho que, como característica de escolas públicas, muitos não têm um projeto de vida, não encontramos neles o desejo da conquista e da busca. Tudo está muito fácil, não querem ter trabalho.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Utilizo com pouca frequência. Devido a minha correria do cotidiano, não sobra muito tempo para a organização.
Porém, a utilização dos jogos desenvolve o raciocínio lógico, e suas regras impõe limites, característica tão pouca desenvolvida pela família.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Com pouca frequência. Não temos recursos de qualidade disponíveis.
Com a tecnologia é possível desenvolver o desejo pela busca.
No ensino de funções é possível fazer uma ligação com o cotidiano e com as ferramentas para construção de gráficos conseguimos despertar o interesse.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Com certeza. Infelizmente ainda continua sendo através da explanação dos professores devido a preguiça de pensar por parte dos alunos e por falta de conhecimentos básicos.
Quando o aluno consegue entender e deduzir as fórmulas, ele terá, com certeza, maior facilidade posteriormente.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim. Conseguimos eliminar comentários do tipo: "nunca vou utilizar isso pra nada!"

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Vejo como a interpretação do problema, proveniente da falta de leitura por parte dos discentes.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

com certeza. a vantagem é que é possível mostrar/apresentar diversos problemas práticos do cotidiano. a desvantagem está na falta de recursos oferecidos pelas escolas e a falta de conhecimento por parte dos docentes.

Questionário

Município: ITAOCARA Data: 28/08/2018 Ficha N°: 12

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Licenciatura Plena em Matemática; Pós-graduada em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

Tenho 36 anos e leciono Matemática há quase 10 anos.

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

Há um certo "pré-conceito" em relação à disciplina, onde muitos afirmam ser difícil e chata. Algo que colabora para isso é o desempenho de alguns colegas na sala de aula que não tornam suas aulas mais atrativas para os alunos.

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim. Os jogos tornam as aulas mais interessantes para os alunos pois unem o conteúdo que está sendo estudado com brincadeiras, tornando o aprendizado mais lúdico.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Sim. Os aplicativos tornam visíveis todas as peculiaridades de uma função, permitindo que os alunos explorem, alterem, brinquem, testem suas hipóteses e tirem suas conclusões de forma lúdica. Gosto bastante de usar o Geogebra e o Graphmatic.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim. Já tivemos experiências de construções de desenhos usando aplicativos de forma que cada segmento (ou curva) deveria ficar em certa posição para que, no final, alguma imagem fosse construída usando apenas funções. Essa é uma, dentre tantas outras, opções que podemos usar para tornar o ensino-aprendizagem mais significativo.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim. A cada conteúdo novo, ao ser trabalhado na sala de aula, os alunos sempre perguntam onde usarão aquele conhecimento em suas vidas. Mostrando exemplos ligados ao cotidiano dos alunos, mostramos a importância daquele conteúdo e despertamos seu interesse na aprendizagem do mesmo.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Transformar em linguagem matemática aquilo que o problema fala, ou seja, a interpretação do problema.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim. O ponto positivo é a facilidade de interpretação das situações-problema. O ponto negativo é, na maioria das vezes, o péssimo estado dos laboratórios de informática (quando há) das escolas públicas.

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Érika Figuerêdo Alves
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua

PROFMAT — UENF

Questionário

Município: Itaperuna Data: 12/08/18 Ficha N°: 13

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

Matemática - Licenciatura
Psicopedagogia - Pós graduação

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

38 anos / 18 anos (Rede Particular)
13 anos (Rede Pública - SEEDUC - RJ)

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

→ dificuldade de aprendizagem causada pela falta de conhecimentos anteriores (pré-requisitos / conhecimento elementar);
→ desinteresse / descaso gerado pela garantia de aprovação - esta, a fim de cumprir uma "meta" (Estado).

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

Sim. O uso dessa ferramenta é mais utilizado no Ensino Fundamental II, com o objetivo de reforçar/fixar conteúdos estudados em sala de aula. A atividade/ferramenta é bem aceita em turmas em que o número de alunos é menor.

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Não! Explico: ① falta à escola um laboratório em condições de uso e que comporte a turma.
② os alunos tem dificuldade para usar a internet como ferramenta de aprendizagem - porém dominam todos os aspectos sobre as redes sociais.
③ falta de treinamento do professor.

→ Sugiro em minhas aulas, "links" de aulas que trabalham/abordam assuntos (conteúdos) das séries anteriores, na tentativa de resgatar esses conteúdos.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Encontro muita dificuldade nesse tipo de tarefa. Reforço: falta pré-requisitos!

Observo que somente cerca de 10% dos alunos conseguem desenvolver esse tipo de atividade.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Sim. Proponho constantemente essas atividades - as quais chamo de DESAFIO. Observo grande interesse, principalmente os relacionados à Matemática Financeira.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Sem dúvidas: interpretação + falta de conhecimento básico de matemática.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Essa não é a realidade da escola pública.

Questionário

Município: Cambuci Data: 30/08 Ficha N°: 14

Olá professor! O questionário abaixo é parte de uma pesquisa referente a Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Os dados do questionário serão somente empregados para o referido trabalho, sem que nomes sejam mencionados. Muito obrigada pela sua participação!

1. Qual sua formação profissional?

   mestre em matemática

2. Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

   33 anos . 8 anos

Com base em sua vivência em sala de aula, responda:

3. Os estudantes, em sua maioria, demonstram interesse pela matemática?

   ( )Sim (X)Não

4. No caso de resposta negativa, quais os fatores que você considera serem determinantes para essa situação?

   Conteúdos defasados, baixa auto estima

5. Você identifica o uso de jogos como uma boa ferramenta metodológica para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

6. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado?

São utilizados jogos, oficinas, o Geogebra. Os alunos tem apresentado um maior rendimento e interesse em aulas que oferecem alguns dos recursos citados acima

7. Você identifica o uso da tecnologia como uma boa opção para despertar mais o interesse dos estudantes? (X) Sim ( ) Não

8. Você utiliza esse recurso em sala de aula? Em caso afirmativo, quais outros benefícios para a aprendizagem que você tem verificado? Em especial, destaque aqueles relacionados ao ensino de funções, com a exploração gráfica de peculiaridades.

Para o ensino de funções, eu utilizo o Geogebra, pelo fato de proporcionar uma melhor visualização em alguns aspecto, tais como: crescimento, grau de função, etc.

9. Você considera as atividades de investigação e dedução de fórmulas e métodos importantes para a aquisição dos conhecimentos matemáticos? Em caso afirmativo, de que forma você tem percebido isso em sala de aula? Esses alunos demonstram alguma facilidade em desenvolver as atividades posteriores? Comente.

Sim. Os alunos ao utilizarem um recurso didático, como a Torre de Hanoi, desenvolvem a habilidade de utilizar a potenciação em relação aos movimentos necessários para mover os discos. Quando utilizamos o conteúdo relacionado à função exponencial, os alunos identificam e relacionam com a atividade anterior.

10. As atividades contextualizadas, principalmente relacionadas ao cotidiano costumam atrair a atenção dos estudantes? O que você percebe de diferencial nessas propostas quando aplicadas em sala de aula?

Para estas atividades é necessário o uso de um recurso, como o geogebra, para complementar o aprendizado. Desse modo, o aluno interage em atividades relacionadas pré-determinadas.

11. Quais as maiores dificuldades dos alunos em relação a resolução de situações-problemas?

Resumidamente, em saber o que fazer. Os alunos leem e não interpretam (ou não conseguem) identificar o que deve ser feito para resolver a situação.

12. As situações-problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos, denominadas problemas de otimização, normalmente são trabalhadas através da modelagem por uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola. Com a utilização da tecnologia seria possível determinar essas melhores soluções por meio de análises gráficas ou ainda comandos existentes no software para outros tipos de funções relacionadas a diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão

do aluno sobre esse estudo. Você considera essa abordagem positiva para sala de aula? Justifique, incluindo pontos positivos e/ou negativos.

Sim. Acredito que o uso de softwares podem favorecer o aprendizado, inclusive eu utilizei, mostrando o maior/menor valor que uma função pode obter.