INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Registros de Representação Semiótica de Funções Quadráticas: Análise de um Livro Didático

JOSIAS BARBOSA DE MIRANDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Professor Doutor Amari Goulart.

IFSP
São Paulo
2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M672r Miranda, Josias Barbosa de
Registros de representação semiótica de funções quadráticas: análise de um livro didático / Josias Barbosa de Miranda. São Paulo: [s.n.], 2018.
102 f.

Orientador: Amari Goulart

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Livro Didático. 2. Função Quadrática. 3. Registros de Representação Semiótica. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

JOSIAS BARBOSA DE MIRANDA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS:
Análise de um livro didático

Dissertação apresentada e aprovada em 28 de novembro de 2018 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Amari Goulart
IFSP – Campus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Ms. Samuel Francisco
IFSP – Campus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires
Universidade Federal de Uberlândia – Campus Ituiutaba
Membro da Banca

“Bem-aventurado o homem cuja força está em Ti...”

Salmos 84.5

Para meus pais

AGRADECIMENTOS

A Deus por me permitir chegar ao final desta jornada.

Aos meus pais, grandes incentivadores e apoiadores deste projeto. Que ofereceram inúmeros conselhos e a quem quero todos os dias orgulhar e devolver apenas um pouco de tudo o que fizeram por mim.

A minha esposa Bruna Miranda, que em muitos momentos me fez continuar e não desistir. De forma inequívoca eu afirmo: sem você eu não teria conseguido!

Aos meus familiares, meus queridos irmãos Jonatas, Joelma e Juliana que sempre torceram por mim.

Aos colegas e todos os professores do PROFMAT, com quem pude aprender e trocar muitas ideias e informações que foram vitais para chegar ao fim.

Aos queridos amigos e parceiros, Marcelo, Sérgio e Adilson todos aqueles que algum momento puderam me ajudar e contribuíram com conselhos e observações que foram muito importantes.

Aos professores Henrique, Rogério, Samuel e Flávia que trouxeram importantes sugestões e contribuições para a formatação e organização desta pesquisa.

Ao meu orientador, professor Amari Goulart, por tanta paciência, dedicação, incentiva e orientação para que pudesse concluir esse trabalho.

RESUMO

Para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a aprendizagem de um objeto matemático está diretamente ligada à capacidade do aluno transitar entre diferentes formas de representar esse objeto. A Função Quadrática, que tem diversas aplicações para matemática e outras áreas do conhecimento, tem muitas formas de representação, a lei de formação, tabela, gráfica e língua natural, entre outras. O livro didático ainda é um instrumento muito relevante nas aulas de matemática no Brasil, analisamos, neste trabalho, como o livro didático mais indicado no catálogo do Plano Nacional do Livro Didático do Ensino Médio propõe os exercícios relacionados a Função Quadrática. Mais especificamente se esses exercícios favorecem a mobilização dos diferentes tipos de representação do objeto função quadrática e em qual sentido se dá essa mobilização. Neste trajeto, discutimos e apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, apresentamos a trajetória do Plano Nacional do Livro Didático, a Base Nacional Comum Curricular e ainda fizemos uma análise do objeto matemático Função Quadrática. Concluímos que apesar de uma predominância dos exercícios cuja solução permanece em um mesmo tipo de registro, a solução de muitos dos exercícios propostos, permitem ao estudante de matemática mobilizar diferentes tipos de representação do mesmo objeto matemático. No livro analisado, o sentido em que as transformações são propostas, ainda que tenha grande parte das tarefas partindo do registro algébrico para o gráfico, também oferece rotas que fogem deste itinerário tradicional.

Palavras-chaves: Livro didático, Função quadrática, Registros de representação semiótica.

REGISTERS OF SEMIOTIC REPRESENTATION OF QUADRATIC FUNCTIONS: ANALYSIS OF A DIDACTIC BOOK

ABSTRACT

For the Theory of Registers of Semiotic Representation, the learning of a mathematical object is directly linked to the ability of the student to cross between different ways of representing this object. The Quadratic Function, which has several applications for mathematics and other areas of knowledge, has many forms of representation, law of formation, table, graph and natural language, among others. As the textbook is still a very relevant instrument in mathematics classes in Brazil, we analyze, in this study, how the most indicated textbook in the catalog of the High School Didactic Book National Plan proposes the exercises related to the Quadratic Function. Specifically, if these exercises promote the mobilization of the different types of representation of the Quadratic Function Object and the way this mobilization takes place. On this way, we discuss and present the Theory of Semiotic Representation Registers, we present the trajectory of the National Didactic Book Plan, the National Curricular Common Base, and we have also analysis of the mathematical object Quadratic Function. We conclude that, despite the predominance of the exercises in which the solution remains in the same type of register, the solution of many exercises proposed allow the student of mathematics to mobilize different types of representation of the same mathematical object, even more, the way in which the transformations are proposed, even though great part of the tasks are from the algebraic register to the graphic register, the analyzed textbook also offers alternative routes to the traditional itinerary.

Keywords: Textbook, quadratic function, registers of semiotic representation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Pág.

SUMÁRIO

`

INTRODUÇÃO

Inegavelmente o livro didático, mesmo com os avanços tecnológicos, ainda ocupa um lugar central na sala de aula. Segundo Maia (2016) ele é uma das principais influencias, senão a principal, ao trabalho do professor e funciona, em parceria com o professor, como elemento mediador entre o aluno e os objetos matemáticos, tais fatos motivaram a realização desta pesquisa. Vamos aqui analisar um livro didático do Ensino Médio usando como referencia a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003).

Para a nossa análise, algumas decisões importantes precisaram ser tomadas. Das muitas coisas que podem e até devem ser analisadas em um livro didático, decidimos manter o nosso olhar apenas para os exercícios que são propostos e analisamos somente o capítulo referente ao objeto matemático função quadrática.

Por que escolhemos a função quadrática? A função quadrática é um objeto matemático extremamente relevante, com aplicações para inúmeras situações cotidianas, situações no próprio contexto matemático, matemática financeira e também a possibilidade de conexão com outras áreas do conhecimento, principalmente com a Física.

Para a teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2003), quanto maior for a mobilidade com registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. Desta forma, quanto mais o estudante de matemática transita entre as diferentes representações um objeto matemático, maior é a possibilidade de aprendizado deste objeto.

Com esse “norte” analisaremos os exercícios propostos pelo livro didático. Para melhor orientar a pesquisa, vamos procurar responder as seguintes questões:

1 – Os exercícios propostos no capítulo de funções quadráticas de um livro didático do Ensino Médio propõem a mobilização dos diferentes registros de representação semiótica?

2 –Se sim, em qual sentido se dão as mobilizações propostas?

No primeiro capítulo apresentamos os resultados de algumas pesquisas que tem alguns pontos de intersecção com os objetivos desta pesquisa, ainda que não estejam ligadas necessariamente ao mesmo objeto matemático.

No segundo capítulo apresentamos o referencial teórico desta pesquisa, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Também discutimos a relação entre o professor e o livro didático, o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e também sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O terceiro capítulo é dedicado a apresentação da metodologia que adotaremos para a análise do livro didático e também o critério de escolha deste livro didático que vamos analisar. Neste capítulo apresentamos as possibilidades de representação de uma função quadrática, além do exemplo de um enunciado que propõe a conversão de registro de representação semiótica de funções quadráticas.

O quarto capítulo será dedicado a análise da função quadrática nos documentos oficiais e também desta enquanto objeto matemático, em que apresentamos a definição de função quadrática, passando pela demonstração de que seu gráfico é uma parábola, além de discutir o vértice, concavidade da parábola, eixo de simetria, imagem da função e a forma canônica da função quadrática.

No quinto capítulo realizamos a análise do livro didático. Apresentamos uma análise geral dos exercícios propostos no capítulo de função quadrática e discutiremos mais detalhadamente alguns enunciados e suas implicações, tomando como referência a TRRS, além disso apresentamos a tabulação dos resultados da análise.

1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo será dedicado à revisão de literatura, apresentamos a seguir alguns trabalhos (artigos e dissertações) cujas observações e conclusões têm relevância para o tema que vamos apresentar ao longo desta pesquisa. A seleção destes trabalhos se deu no início desta pesquisa, quando ainda buscávamos acumular material sobre aquilo que pretendemos discutir, com isso podemos inclusive situar o nosso trabalho no processo de produção científica.

Inicialmente apresentamos o trabalho de **Moretti e Thiel (2012)**. Um artigo cujo tema é **"O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica"**. Os autores apresentam uma discussão sobre o ensino de matemática hermético, que seria um tipo de ensino fechado sobre si mesmo, considerando o modo como os registros de representação são utilizados. O ensino de matemática hermético, para Moretti e Thiel (2012), é aquele que está baseado em um único sistema semiótico e quando trata de mais de um sistema, desconsidera a possibilidade de articulação destes registros.

Elementos fundamentais para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), são as transformações de registros de representação, sendo que estas transformações podem ser tratamentos ou conversões. Os tratamentos são transformações que permanecem dentro de um mesmo tipo de registro de representação e as conversões são as transformações que partem de um tipo de registro de representação e chegam a outro tipo distinto do primeiro, desenvolveremos essa discussão mais tarde.

Para Duval (2003), existe a grande necessidade de articular com registros de representação semiótica, o que significa que a aprendizagem de um determinado objeto matemático exige que o aluno possa transitar entre dois tipos de representação, no mínimo, o tempo inteiro.

Moretti e Thiel (2012) alertam para o fato de que um ensino de matemática pode ser considerado hermético mesmo quando usa diferentes tipo de registros de representação, considerando que o fato de que, não basta que a abordagem dos objetos matemáticos seja feita considerando conversões entre as diferentes formas de representar o objeto, mas que haja a devida coordenação entre essas representações. Sem a devida coordenação o ensino se torna fechado sobre si mesmo.

Para Moretti e Thiel (2012), um exemplo disso é visto quando se devota um tempo enorme para o ensino das operações básicas, mas gasta-se pouco ou quase nenhum tempo para dar significado a elas. Para tratar dos significados dessas operações seria necessário não a inclusão de um ou outro exemplo ao longo do debate, mas incluir de forma constante e coordenada os diferentes tipos de registros de representação. Fato que pode, sem dúvida alguma, ser trazido para o ensino do objeto função quadrática.

Com relação à função quadrática, Moretti e Thiel (2012), dirão que para a conversão entre o gráfico e a equação, alguns elementos importantes para manter a ideia de conversão em ambos os sentidos, são: o sinal do coeficiente "a", que indicariam se a concavidade da parábola está voltada para baixo ou para cima e também as coordenadas do vértice, sendo que, o restante da conversão, pode ser realizado com elementos de raciocínio, argumentação e dedução, que para Duval (2003) compõe um tipo de registro de representação.

Um pressuposto que defenderemos neste trabalho é justamente que o livro didático proponha exercícios que possibilitem ao aluno transitar entre os diferentes registros de representação de um objeto matemático fazendo a devida coordenação entre esses registros. Desta forma as considerações de Moretti e Thiel (2012) são extremante relevantes.

O segundo trabalho que vamos analisar, é um artigo apresentado por **Maggio, Soares e Nehring (2011)**, cujo tema é **"Registros de representação semiótica da função afim: Análise de livros didáticos de matemática no Ensino Médio"**. Como o próprio tema explicita, a intenção das autoras é analisar, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como são as atividades propostas por dois livros didáticos do Ensino Médio e quais os seus reflexos para a prática do professor.

Após apresentar uma breve discussão sobre o objetivo da matemática no contexto escolar, a importância do conceito de função e algumas situações que motivaram a realização da pesquisa, as autoras esclareceram o que elas pretendiam observar quanto às atividades que são propostas pelo livro didático: Classificação das atividades em situações-problema e problemas "fechados"; Articulação entre os campos da matemática e/ou conexões da matemática com outras áreas do conhecimento e com situações do cotidiano; Tratamentos explorados e enfatizados; Conversões exploradas e enfatizadas, bem como os sentidos privilegiados; e Procedimentos abordados e enfatizados no registro gráfico, globais ou pontuais.

Ainda que Maggio, Soares e Nehring (2011) não desenvolvam uma discussão sobre o mesmo objeto matemático que vamos observar nesta pesquisa, o terceiro e o quarto tópico que as autoras tinham como foco de observação nos interessa em particular.

Com relação aos tratamentos, as autoras verificaram que ambos os livros analisados priorizaram o tratamento dentro do registro algébrico, explorando muito pouco outros tipos de tratamento, como o tratamento dentro do registro gráfico, tal fato fica evidenciado pelo fato de que ambos os livros propuseram apenas uma situação com esse perfil.

Com relação às conversões, Maggio, Soares e Nehring (2011) verificaram que um dos livros didáticos privilegia de forma muito intensa a conversão partido do registro algébrico para o registro gráfico sendo que este sentido de conversão representa quase 80% das conversões observadas, sendo que apenas 10% das conversões são em sentido oposto. O segundo livro privilegia principalmente as conversões partindo do registro de língua natural para o registro algébrico e também do registro algébrico para o registro gráfico, conversões no sentido oposto desta segunda são propostas em quantidade muito inferior.

Dentre algumas conclusões apresentadas, chama-nos atenção a seguinte:

> [...] conversões no sentido gráfico → algébrico não são priorizadas pelos livros, assim como o tratamento gráfico que exijam procedimentos globais. Estes fatos podem acarretar prejuízos no ensino-aprendizagem do conceito de função afim, pois os livros didáticos são utilizados pela maioria dos professores como roteiro principal na organização e condução de suas aulas. (MAGGIO, SOARES e NEHRING, 2011 p.38)

Obviamente não se pode concluir muita coisa com relação aos livros didáticos de matemática em geral, quando são analisados apenas dois livros, todavia, o que se observa nos livros que foram analisados por Maggio, Soares e Nehring (2011) é um certo caminho “tradicional” que as conversões seguem quando se trata de funções, que seria partir de uma representação algébrica, geralmente a lei de formação, para o esboço do gráfico da função, sendo o sentido inverso geralmente pouco ou nenhuma vez explorado.

De acordo com as autoras, sendo o livro didático como um “manual” do professor de matemática, a priorização deste sentido de conversão pode influenciar negativamente a maneira como os alunos aprendem esse objeto matemático.

O terceiro trabalho que analisamos é uma dissertação apresentada por **Maia (2007)**, cujo tema é **“Função quadrática: Um estudo didático de uma abordagem**

computacional”. A autora se propõe a fazer um estudo a respeito do ensino da função quadrática com a utilização de um software para esse fim. A autora também propõe uma sequência didática para apresentação deste conteúdo, tendo como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e Teoria das Situações Didáticas de Guy Brosseau.

A sequência didática foi, de acordo com a autora, orientada pela análise de livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, dentre outras coisas. Daremos especial atenção ao capítulo no qual a autora faz a análise de livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, mais precisamente três livros de cada segmento.

Quanto a análise dos livros do Ensino Fundamental, Maia (2007) observou que: a maior quantidade de tarefas esteve relacionada a construção de gráficos – que em outras palavras seria a conversão do registro algébrico para o registro gráfico – e também a localizar e/ou determinar pontos – procedimento que geralmente é feito por meio do tratamento dentro do registro algébrico.

Sobre os livros do ensino fundamental Maia (2007) comenta:

> Observando as técnicas apresentadas pelos livros analisados podemos concluir que pouco se realiza a passagem da representação gráfica da função quadrática para sua representação algébrica. [...] As técnicas apresentadas reforçam a ideia de que o procedimento privilegiado para a construção do gráfico é o procedimento por pontos. Do ponto de vista cognitivo, construir gráficos dessa maneira pode tornar o aprendizado falho, no sentido de que este procedimento implica numa visão pontual do gráfico, na qual o aluno se preocupa em encontrar pares ordenados e localizá-los no plano cartesiano, e não fazendo muitas vezes a volta, ou seja, a partir do gráfico obter a expressão algébrica. (MAIA, 2007 p.43,44)

Tal como na pesquisa que analisamos anteriormente, Maia (2007) também diz que quando se trata de conversão de registros envolvendo a representação algébrica e a representação gráfica, os livros privilegiam apenas um sentido desta conversão, o que na visão da autora, dificulta a compreensão do objeto matemático.

Uma proposta da autora para fazer a conversão em sentido inverso, ou seja, partido do gráfico para a representação algébrica, é “permitir que os alunos descubram a forma canônica da função quadrática de modo que percebam que as modificações nesta escrita algébrica produzem modificações na representação gráfica e vice-versa” (MAIA, 2007, p. 47).

Quanto a análise dos livros didáticos do ensino médio, a conclusão obtida por Maia (2007) é praticamente a mesma, sendo também a construção de gráficos e a localização e/ou determinação de pontos os tipos de tarefas mais encontrados, quadro idêntico ao encontrado nos livros do Ensino Fundamental. Ainda de forma muito semelhante ao que a autora já havia encontrado, as tarefas propostas, privilegiam uma maneira de construção de gráficos que dificulta a passagem da representação gráfica para a representação algébrica.

Uma das coisas que vamos analisar nesta pesquisa é se o livro didático mais escolhido no Plano Nacional do Livro Didático do Ensino Médio, pelo menos no capítulo dedicado às funções quadráticas, rompe com esse tradicional caminho, que é apontado pelas duas últimas pesquisas que apresentamos anteriormente.

2 – REFERENCIAL TEÓRICO E DOCUMENTOS OFICIAIS

Vamos neste capítulo apresentar o referencial teórico que mais adiante norteará a análise do livro didático, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Vamos ainda apresentar o Plano Nacional do Livro Didático, fazendo uma breve apresentação das políticas estatais que visavam a distribuição do livro didático e das diferentes fases do programa. Também apresentamos e discutimos a nova Base Nacional Comum Curricular além de uma discussão sobre a relação entre o livro didático e o professor.

2.1 A teoria dos registros de representação semiótica

Duval (1995) apresentou um modelo sobre funcionamento cognitivo do pensamento humano, tal modelo tem sido amplamente explorado e servido como base teórica para várias pesquisas em educação matemática, inclusive no Brasil. Segundo Duval (2003), diferentemente de outras áreas do conhecimento humano, sobretudo das ciências da natureza, a matemática é composta por objetos de natureza totalmente abstrata, “os objetos matemáticos, começando pelos números, não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos”. (DUVAL 2003, p. 14). Ainda de acordo com esse autor, para que se tenha acesso aos objetos matemáticos é necessário que se recorra a representações semióticas desse objeto.

A semiótica, numa definição resumida, é o estudo dos signos e linguagens como produtores de significados. Hanura (2000) diz que, se pensarmos na matemática como uma linguagem, teremos a ela atrelada, um conjunto de regras que são organizadas a partir de signos. Duval (2003) usará o termo ‘registro’ quando se referir a signos que pertencem ou fazem referência a um mesmo sistema semiótico, sendo esse sistema definido como uma família de símbolos.

Duval (1995) estabelece três tipos de representações. O primeiro tipo são as **representações mentais,** que são representações internas e conscientes do sujeito que são definidas por concepções dos estudantes sobre toda sorte de fenômenos. O segundo tipo são as **representações computacionais,** que são representações não conscientes do sujeito, que as executa sem que haja um prévio estabelecimento de estratégias para tal execução, ou seja, é feita de forma quase instantânea. E por fim, as **representações semióticas,** que são externas e conscientes, e são constituídas de signos pertencentes a um sistema de representação.

No estudo da matemática há uma grande diversidade de representações semióticas: os sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, gráficos cartesianos ou mesmo a língua natural. Duval (2003) propõe uma divisão dos sistemas semióticos em quatro grandes grupos. Tal divisão, está apresentada no quadro 1:

Quadro 1 – Tipos de registros de representação

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA **A**	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA **B**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritimizáveis. **1**	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos. **2**	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p. 14)

Por exemplo, a lei de formação de uma função quadrática, é um registro algébrico, fica, portanto, na célula denominada sistemas de escrita (célula 2A). A representação gráfica desta função, é um registro gráfico (célula 2B). Todavia, problemas ou situações envolvendo funções quadráticas podem extrapolar as células que citamos acima. Podem ser elaborados enunciados em língua natural (célula 1A), que posteriormente exigiriam uma conversão para outro tipo de registro de representação, ou mesmo, uma situação cujo enunciado envolve uma figura geométrica (célula 1B) e um posterior tratamento dessa figura conduziria a uma lei de formação de uma função e mais tarde a apresentação de dados em gráficos, ou seja, nesse processo ocorreriam duas transformações de registros de representação.

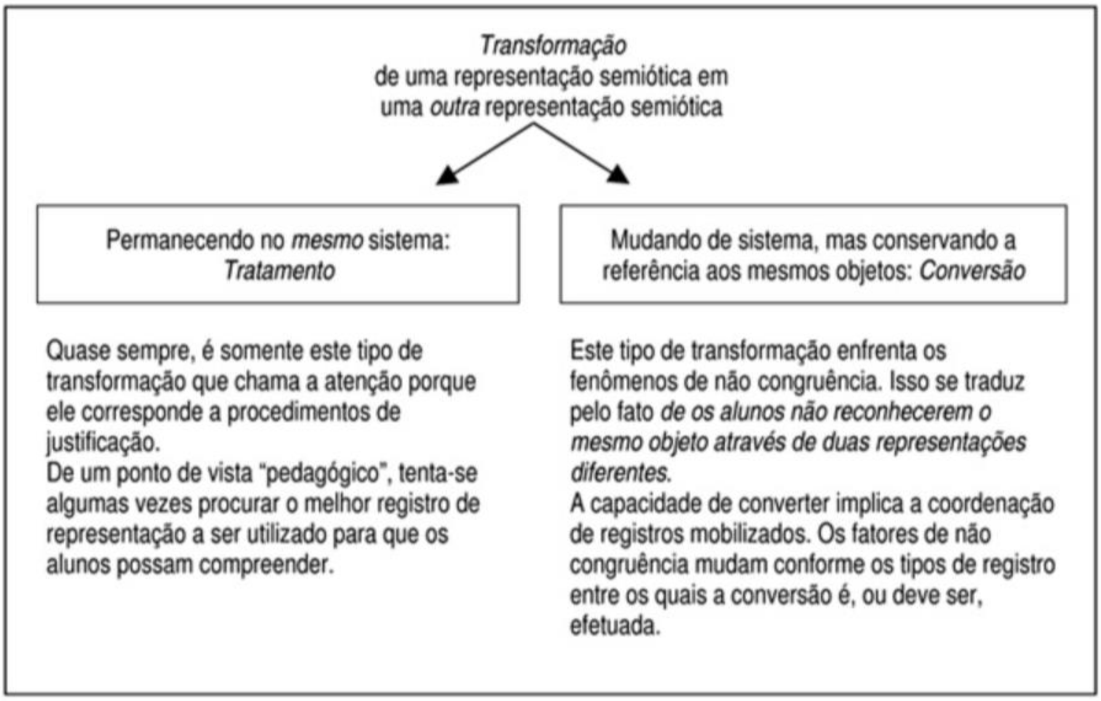
Segundo Duval (2003) a hipótese fundamental da aprendizagem consiste em transitar por diferentes tipos de representação. De acordo com este autor:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. [...] Podemos então antecipar a hipótese, ou, em linguagem matemática, "conjecturar" o seguinte: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas. (DUVAL, 2003, p.14)

Um outro ponto central na teoria dos registros de representação semiótica, são as transformações dos registros de representação, que são extremamente relevantes numa perspectiva de ensino e aprendizagem. São dois tipos de transformação: tratamento e conversão. Para Duval (2003) essas transformações são "radicalmente diferentes".

Para esclarecer as principais diferenças, Duval (2003) propõe o que segue no quadro 2:

Quadro 2 – Transformações de registros de representação



Fonte: Duval (2003, p. 15)

Os **tratamentos** são as transformações que ficam dentro de um mesmo tipo de registro. Um clássico exemplo de tratamento pode ser visto ao resolvermos a seguinte operação de adição $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. Podemos fazê-la da seguinte forma:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$$

A mesma operação poderia ser realizada de outra forma:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0,5} + \mathbf{0,75} = \mathbf{1,25}$$

Na primeira resolução o tratamento empregado foi o uso de uma fração equivalente a primeira parcela da adição, de forma que ambas pudessem ter o mesmo denominador, para a posterior realização da operação. Já na segunda resolução, houve outro tipo de tratamento, recorreu-se a representação decimal das frações. Ambas as resoluções se mantiveram dentro do mesmo sistema de representação, mesmo havendo na segunda resolução uma alteração na forma da representação, não há necessariamente uma mudança de registro. Voltando ao *quadro 1* ambas as resoluções não extrapolam a célula 2A, em ambas as soluções se usa apenas o registro numérico. Outros exemplos que podemos apresentar: a resolução de uma equação ou mesmo de um sistema de equações; completar uma figura usando critérios de simetria. Os tratamentos são normalmente utilizados em procedimentos de justificação ou de demonstração/prova. A transformação feita em um procedimento de tratamento é simplesmente lateral.

As transformações classificadas como **conversões** são aquelas que partem de um sistema semiótico para outro, por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica.

> A conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes ou para obter um segundo registro que serve como suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. (DUVAL, 2003, p.16)

Para Duval (2003) a conversão, dentro do ponto de vista cognitivo, aparece como uma atividade fundamental, pois ela acarreta mecanismos que estão mais ligados a compreensão do objeto matemático em questão. Ainda que ambos os tipos de transformações tenham implicações pedagógicas, a conversão está, portanto, mais ligada ao aprendizado em matemática.

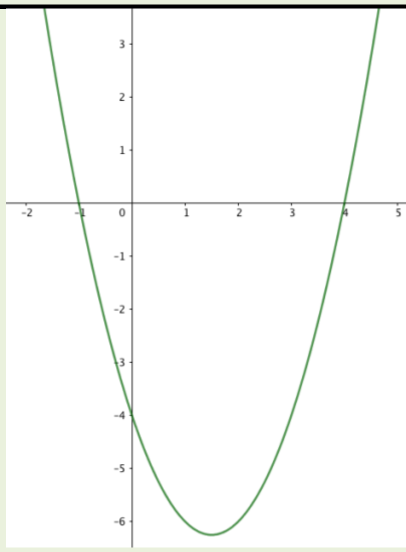
As conversões, enfrentam muitas vezes o fenômeno da não congruência. Ora, *quando a conversão entre registros é congruente?* Para responder a essa questão temos, de acordo com Duval (2003), que comparar a representação no registro de partida com a representação finalizada no registro de chegada. Nesta comparação dois cenários se apresentam:

1 – A representação na chegada revela (ou transparece) a representação de saída, neste caso Duval dirá que a conversão “está próxima de uma situação de simples codificação”. Neste caso a conversão é dita **congruente**;

2 – A representação de chegada não revela nada da representação de saída, desta forma a representação é dita **não congruente**.

Todavia, uma ressalva deve ser feita, existem situações intermediárias, nas quais a representação não é exatamente congruente e não pode ser dita totalmente não congruente. Para exemplificar essa situação, apresentamos o quadro 3, onde são feitas representações de uma função quadrática cuja representação algébrica é dada por $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x - 4}$. Suponha que um estudante escolheu alguns valores para x e determinou os valores correspondentes para y, depois com esses pontos encontrados esboçou um gráfico.

Quadro 3 – Comparação de registros de representação

<table>
<tr><th>Registro de partida</th><th>Registro de chegada</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>$\boldsymbol{x}$</th><th>$\boldsymbol{f(x)}$</th></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{-2}$</td><td>$\boldsymbol{6}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{-1}$</td><td>$\boldsymbol{0}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{0}$</td><td>$\boldsymbol{-4}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{1}$</td><td>$\boldsymbol{-6}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{2}$</td><td>$\boldsymbol{-6}$</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: O autor.

Note que ao localizar no plano cartesiano os pontos indicados pela tabela, pode-se ter uma noção do como será o gráfico desta função, todavia, dos pontos que foram elencados nessa tabela, nota-se que o vértice não foi contemplado, dessa forma o aluno, para esboçar o gráfico, precisaria “chutar” qual seria a posição do vértice. Ao olhar para a posição dos pontos o gráfico (registro de chegada) transparece a tabela (registro de saída), ou seja, os registros mostram traços de congruência, todavia, a ausência do vértice como um dos pontos da tabela é uma clara manifestação de não congruência.

Duval (2003) afirma que não devemos jamais confundir um objeto matemático com a sua representação, todavia, essa situação representa um paradoxo, que o autor chama de paradoxo da compreensão: *“*como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação? *“* (DUVAL 2003, p. 21).

Justamente para enfrentar este paradoxo que a mudança de registro de representação se faz necessária.

> Existe como que um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (DUVAL, 2003, p.21)

Para Duval (2003) a compreensão em matemática está diretamente ligada a capacidade de mudar de registro porque segundo este autor “é a articulação de registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso” (DUVAL 2003, p. 22).

A conversão de registros de representação é um processo fundamental para a aprendizagem de qualquer objeto matemático. Sendo assim, o professor deve oportunizar e selecionar situações que favoreçam a mobilização de mais de um tipo de representação do objeto em estudo.

2.2 O livro didático e o professor

O livro didático apresenta-se como material extremamente relevante para o aluno e, em muitos casos, é o que orienta grande parte do trabalho realizado pelo professor. Portanto, o livro didático é elemento central em grande parte das salas de aulas no Brasil. O livro é veículo “por meio do qual os conhecimentos matemáticos são discutidos, repensados e construídos em sala de aula” (MAIA, 2016 p. 21).

Sobre a importância do livro didático na cultura escolar brasileira, Ogliari (2014) escreveu: “O livro didático de matemática acompanha o ensino da disciplina no Brasil desde o século XVIII, constituindo, juntamente com os professores de cada época, o ideário do que seria a matemática ‘ensinável’”. (OGLIARI 2014, p. 100)

O livro didático, para o professor de matemática no Brasil, sempre foi uma espécie de manual que contém toda a matemática a ser ensinada e discutida. De acordo com Maggio, Soares e Nehring (2011) o livro didático é usado como roteiro principal na organização e condução das aulas. Muitas vezes até mesmo a ordem que os conteúdos devem ser trabalhados é influenciada pelo livro didático nas quais os conteúdos mais “importantes” são trazidos primeiro e aqueles que, em tese, poderiam ser “suprimidos” são apresentados no final do livro.

Mesmo após um grande amadurecimento na relação do professor de matemática com o livro didático desta disciplina, é impossível negar a centralidade que ele ainda ocupa na escola brasileira. Mesmo levando em conta vários recursos tecnológicos que nos últimos anos foram colocados a disposição do professor, o livro ainda ocupa um espaço decisivo nos planejamentos e na prática do professor, sobretudo o de matemática.

O livro ainda é o principal recurso que intermedia o conteúdo matemático e os estudantes. Maia (2016) aponta um equivoco muito cometido nas salas de aula com relação ao uso do livro didático. O professor muitas vezes permite que a intermediação entre o conhecimento e o aluno possa ser feita diretamente por meio da leitura dos textos apresentados no livro sem a interferência do docente. Todavia, “isso só se efetiva quando estes (alunos) têm capacidade de interpretação” (MAIA 2016, p. 21). Como o professor já possui o domínio da linguagem que permeia os livros didáticos, ele “acha que somente a leitura, por parte dos alunos, é suficiente para a compreensão desses textos” (MAIA 2016, p. 21).

Dada a centralidade e importância que o livro didático no Brasil, desde os anos de 1930 ele passou a ser alvo de políticas estatais, sendo a última e mais recente política o Plano Nacional do Livro Didático. Sobre o trajeto dessas políticas estatais trataremos a seguir.

2.3 O plano nacional do livro didático

Apesar de o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) ter sido instituído no ano de 1985, a relação oficial entre o Estado e o livro didático no Brasil é bem mais antiga do que isso. De acordo com Cassiano (2013) e Castro (1996) o ponto de partida nessa relação ocorreu no período do Estado Novo, quando o Ministério da Educação anuncia por meio do Decreto-Lei nº 93, de 21 de dezembro de 1937, a criação do Instituto Nacional do Livro (INL).

Um ano mais tarde foi criada, por meio do Decreto-Lei nº 1006, de 30 de dezembro de 1938, a Comissão Nacional do Livro Didático. Esta comissão seria formada por um total de quinze membros cujas qualidades incluíam “notório preparo pedagógico” e “reconhecido valor moral” ainda que no documento não houvesse maiores esclarecimentos sobre o significado destes termos.

Todavia, o principal interesse do Estado era o uso do livro como uma ferramenta política e ideológica, ainda que declaradamente o objetivo desta comissão fosse evitar possíveis “inexatidões e impropriedades” nos livros didáticos. Os livros didáticos são, para Choppin (2004), um instrumento de poder. “Os livros didáticos constituíram-se e continuam a se constituir como poderosos instrumentos de unificação, até mesmo de uniformização nacional, linguística, cultural e ideológica”. (CHOPPIN 2004, p. 560)

Para Choppin (2004) o poder político se vê forçado a controlar estreitamente, e até a orientar em seu proveito, a concepção e o uso do livro didático. Este autor ainda diz que, tendo em vista o público alvo dos livros didáticos, jovens em idade de escolarização, este caráter político fica ainda mais evidenciado, já que, esse público é, dentro de uma visão daquela época, pouco crítico e manipulável. Dado que o uso dos livros didáticos é perene ao longo da vida escolar do aluno, pode-se lentamente impregnar ideias e conceitos.

Considerando todos esses fatores, Cassiano (2013) aponta que o livro didático é uma importante referência da relação de forças estabelecida em várias sociedades, em diversos momentos entre os atores do sistema educacional, dado que a liberdade para a produção e uso deste tipo de livro varia consideravelmente de uma realidade para outra.

De 1938 a 1985, ano do lançamento do PNLD, os programas do livro, em maior ou menor grau, não se distanciaram dessa perspectiva de controle e intervenção do Estado, sobretudo no período da ditatura militar.

O decreto nº 91.542 que instaurou Plano Nacional do Livro Didático, data de 19 de agosto de 1985, ele vincula diretamente o PNLD ao *Programa Educação para Todos: caminho para a mudança* (PET) que era parte de um documento ainda maior denominado *Compromisso com a Nação.* Esse documento trazia um discurso de reformista cujo objetivo era, em tese, a consolidação da democracia e profundas mudanças na política econômica.

O PNLD seria, portanto, o sucessor do Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF). Em comparação com programas anteriores, Cassiano (2013) aponta que, alguns princípios trazidos pelo PNLD eram até então inéditos, sobretudo a aquisição e distribuição gratuita de livros didáticos para os alunos da rede pública do que mais tarde seria chamado de ensino fundamental (1ª a 8ª série).

Na proposta do então ministro da educação Marco Maciel[1], vemos elencados alguns dos principais problemas a serem enfrentados por aquela administração:

1 – A falta de uma consciência nacional sobre a importância política social da educação.
2 – Baixa produtividade no ensino.
3 – Aviltamento da carreira do magistério
4 – Inexistência de um adequado fluxo de recursos financeiros para a educação.
5 – Insuficiência e má distribuição espacial de vagas nas escolas.

O discurso da Nova República demonstrava uma preocupação com as camadas sociais de menor poder aquisitivo, uma constatação da insuficiência na oferta de vagas e também o problema da retenção e evasão escolar que atingem, principalmente, essas camadas. Dentre algumas justificativas para tal situação encontra-se a inadequação dos currículos e a ausência de bibliotecas e de materiais didáticos nas escolas das áreas mais pobres. Com grande parte das famílias vivendo em situação financeira dificílima, chegando inclusive a uma situação de carência nutricional, a aquisição de materiais por parte desta camada era impossível.

Um excerto do texto do PET dirá:

> Em verdade as dificuldades que permeiam a educação básica são vastas e complexas. Os esforços e recursos aplicados para suplantá-las só produzem resultados seguros, a médio e longo prazos. Há, no entanto, um inalienável compromisso a que a nação brasileira não pode faltar: o de enfrentar o desafio de universalizar o acesso à educação, vencer o analfabetismo e proporcionar atendimento educativo em crescentes níveis de qualidade. (BRASIL, 1985, p.2)

[1] Marco Antônio de Oliveira Maciel foi ministro da educação no governo Sarney e vice-presidente do Brasil na administração FHC.

Fornecer o livro didático para o aluno é, portanto, umas das propostas para o enfrentamento dos desafios que foram elencados, ela aparece em dois momentos no documento, para melhoria da produtividade da educação e na assistência ao aluno carente. Fato que destacamos também é que, o fornecimento da merenda escolar, neste documento, aparece sempre acompanhado do fornecimento do livro didático.

Höfling (2000) dirá que o PNLD foi apenas uma nova roupagem institucional para um programa que seguia a mesma lógica organizacional e orçamentária de programas anteriores, não sendo tão inovador de fato. No documento que instaura o PNLD não se faz nenhuma referência ao seu antecessor (o PLIDEF), dando a impressão de algo totalmente novo, mas para este autor a ideia oculta era a de desvinculação da imagem do atual governo de seu antecessor, uma ditadura.

Mesmo diante desta afirmação, as principais alterações trazidas pelos PNLD em relação aos seus antecessores que estão presentes no decreto que o instituiu são:

a) distribuição gratuita do livro didático para todos os alunos matriculados em escolas públicas no 1ª grau (Art. 1).

b) participação dos professores no processo de escolha dos livros didáticos, mediante análise e indicação dos livros. (Art. 2)

c) Adoção de livros reutilizáveis levando em conta a qualidade do material empregado na produção do livro e o seu acabamento. O que representaria o fim da compra do livro descartável, os exercícios não mais seriam feitos no próprio livro. (Art. 3)

O decreto instituía o ano de 1986 para o início da distribuição dos livros didáticos. Com exceção da compra de livros reutilizáveis, os outros dois pontos “inovadores” não foram alcançados imediatamente. A execução do PNLD ficou por conta da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que foi fundada em 1983 e também era a responsável pela execução do PLIDEF.

A participação dos professores, foi fator de estrangulamento do PNLD por muitos anos, visto que Freitag et al (1993) apontam que a compra e venda do livro eram de certa forma predeterminada por outros atores, sobrando um espaço mínimo ou mesmo nenhum espaço para efetiva participação do professor. Além de outros escândalos denunciados naquela época, como a entrega de livros que não haviam sido escolhidos.

Um importante fator a ser destacado é que, tanto no decreto que instituiu o programa, quanto nas portarias que o regulamentaram, não consta a fonte financiadora desse projeto. De acordo com Cassiano (2013) isto causou grande sazonalidade no início do programa. Um financiamento regular para o programa só foi instituído a partir de 1993. A ausência da fonte financiadora interferiu diretamente na garantia da distribuição gratuita do livro didático para todos os alunos do Ensino Fundamental (então 1º grau) nos primeiros anos de implementação do programa, fato que só seria alcançado em 1995, numa outra fase do programa.

Todavia, ainda que não houvesse um fluxo financeiro adequado e nem todas as escolas recebessem os livros, houve um aumento substancial da quantidade de livros em circulação nas escolas públicas. Höfling (2000) compara relatórios da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), em 1983 foram distribuídos cerca de 12 milhões de livros em todo território nacional ainda sob o PLIDEF (antecessor do PNLD) esse número chegou a 55 milhões de volumes em 1987.

Já sob o advento do Plano Decenal de Educação para Todos (PNE) 1993-2003 vemos inaugurada uma nova fase do PNLD. O plano foi constituído a partir de um compromisso assumido pelo Brasil na Conferência Mundial de Educação para Todos, realizada em Jomtien, Tailândia, em 1990. Ocasião na qual o Brasil assume, juntamente com outros países, o compromisso de universalizar o acesso a educação básica até o final do século.

O plano decenal de educação apresentava, em suma, a direção na qual os esforços e investimentos do governo seriam concentrados, além de apontar quais seriam as estratégias que seriam adotadas. Cassiano (2013) aponta que cópias do PNE foram distribuídas para todos os atores do contexto educacional, o que incluía inclusive as editoras, dado que o livro didático foi apontado no documento como elemento fundamental para que se possa atingir os objetivos que foram elencados no plano.

É importante ressaltar que o Plano Decenal de Educação para Todos tinha como principal objetivo a universalização do acesso ao ensino, todavia, com a garantia de um mínimo de qualidade. A busca por essa qualidade fez com que, dentre outras observações, a qualidade dos livros que eram distribuídos pelo PNLD fosse questionada e colocada em pauta.

Em um primeiro momento, como mostra o excerto abaixo, a baixa qualidade foi relacionada a uma possível deficiência na formação dos professores que faziam escolhas equivocadas.

> O livro didático constitui um dos principais insumos da instituição escolar. Os aspectos referentes à sua política, economia, gerência e pedagogia são indissociáveis das demais características da questão educacional brasileira. Embora existam no mercado editorial livros de inegável qualidade, o País ainda não conseguiu formular uma política consistente para o livro didático que enfatize o aspecto qualitativo. O princípio da livre escolha pelo professor esbarra em sua insuficiente habilitação para avaliar e selecionar. (BRASIL, 1993, p. 25)

No ano de 1993 o Governo Federal através da portaria nº 113º de 6 de agosto daquele ano, institui uma comissão para avaliar a qualidade dos livros que estavam sendo comprados pelo MEC para as séries iniciais do ensino fundamental. Essa comissão, mais tarde, chegaria a conclusão que muitas das obras eram preconceituosas, desatualizadas e com erros conceituais.

No ano de 1996 o MEC oficializa a avaliação pedagógica dos livros comprados pelo PNLD. Cassiano (2013) aponta que inicialmente essa avaliação era feita por meio de comissões divididas por áreas do conhecimento, que posteriormente iriam definir quais seriam de fato os critérios para a escolha dos livros. Os resultados da análise eram divulgados por meio dos Guias de Livros didáticos que eram distribuídos para as escolas em todo o país para orientar a escolha dos professores. Estes guias continuam a ser lançados anualmente até os dias de hoje. Esse processo oficial de análise dos livros didáticos também repercutiu nas redes particulares, visto que a mídia na época ofereceu muita publicidade sobre assunto.

Outro ponto levantado pelo Plano Nacional de Educação para Todos era a ineficiência dos programas, que era comprometida pelo processo de aquisição, o que impedia que o livro estivesse disponível na escola no início do ano escolar. A regularização de um fluxo contínuo, estabelecido durante o governo de Itamar Franco, permitiu que em 1995 se pudesse alcançar a ampliação da aquisição e a garantia da compra e entrega do livro didático para todos os alunos do Ensino Fundamental da rede pública.

O ano de 1996 apresenta outra mudança importante e extremamente relevante para PNLD, foi o ano de publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional[2], que dentre outras coisas passou a considerar o oferecimento do Ensino Infantil e o Ensino Médio, além do Ensino Fundamental, obrigação do Estado, todavia, pelo menos para aquele momento a mudança mais relevante foi o lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que aconteceu um ano mais tarde, que reorganizaram o currículo da educação básica no Brasil e regulavam o conteúdo que seria discutido em cada série, os PCN influenciaram diretamente as obras apresentadas ao PNLD, visto que todas elas precisaram se adequar a essa reforma.

Com a extinção da FAE em 1997, a execução do PNLD passou a ser competência do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), uma autarquia ligada ao MEC, até hoje esta autarquia coordena o PNLD.

No ano de 2003, é finalmente criado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), uma extensão do PNLD, que pode ser vista como uma adequação à extensão da Educação Básica no Brasil que passou a incluir o Ensino Médio como obrigação do Estado.

Os alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) passaram a ser contemplados por programas específicos a partir de 2007. Inicialmente pelo PNLA (Programa Nacional do Livro para Alfabetização de Jovens e Adultos) e em 2009 é criado um programa que incorporou os outros da mesma modalidade o PNLD EJA (Programa Nacional do Livro para a Educação de Jovens e Adultos).

O Decreto nº 7.084/2010 contempla todas as alterações em relação aos vários programas que ampliaram o PNLD e também ao Ensino Fundamental de nove anos, esse decreto foi revogado pelo Decreto nº 9.009 de 18 de julho de 2017.

O quadro 4 mostra como funciona o programa atualmente:

[2] A Lei 9.394/96 Lei de Diretrizes e Bases (LDB), ampliou a Educação Básica no Brasil, passando a considerar a Educação infantil (0 a 6 anos), Ensino Fundamental (7 a 14 anos) e o Ensino Médio (15 a 17 anos) obrigação do Estado. Mais tarde a Lei 11.274 de 2006 (Lei de Diretrizes e Bases) amplia o ensino fundamental de 8 para 9 anos, sendo que a partir desta lei o Ensino Infantil passou a ser destinado para crianças de 0 a 5 anos e o Ensino Fundamental passou a ter ingresso a partir dos 6 anos, sendo divido em 5 séries iniciais e 4 séries finais totalizando os 9 anos.

Quadro 4: Funcionamento do PNLD

Etapa	Descrição
Adesão	As escolas federais e os sistemas de ensino estaduais, municipais e do Distrito Federal que desejem participar dos programas de material didático deverão manifestar este interesse mediante adesão formal, observados os prazos, normas, obrigações e procedimentos estabelecidos pelo Ministério da Educação. O termo de adesão deve ser encaminhado uma única vez.
Editais	Os editais que estabelecem as regras para a inscrição do livro didático são publicados no Diário Oficial da União e disponibilizados no portal do FNDE na internet.
Inscrição das editoras	Os editais determinam o prazo e os regulamentos para a habilitação e a inscrição das obras pelas empresas detentoras de direitos autorais.
Triagem/Avaliação	Para constatar se as obras inscritas se enquadram nas exigências técnicas e físicas do edital, é realizada uma triagem pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. A SEB escolhe os especialistas para analisar as obras, conforme critérios divulgados no edital. Esses especialistas elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos.
Guia do livro	O FNDE disponibiliza o guia de livros didáticos em seu portal na internet e envia o mesmo material impresso às escolas cadastradas no censo escolar. O guia orientará a escolha dos livros a serem adotados pelas escolas.
Escolha	Os livros didáticos passam por um processo de escolha, com base no guia de livros didáticos. Diretores e professores analisam e escolhem as obras que serão utilizadas pelos alunos em sua escola.
Pedido	A formalização da escolha dos livros didáticos é feita via internet. De posse de senha previamente enviada pelo FNDE às escolas, professores fazem a escolha on-line, em aplicativo específico para este fim, disponível na página do FNDE.
Aquisição	Após a compilação dos dados referentes aos pedidos realizados pela internet, o FNDE inicia o processo de negociação com as editoras. A aquisição é realizada por inexigibilidade de licitação, prevista na Lei 8.666/93, tendo em vista que as escolhas dos livros são efetivadas pelas escolas e que são editoras específicas que detêm o direito de produção de cada livro.
Produção	Concluída a negociação, o FNDE firma o contrato e informa as quantidades de livros a serem produzidos e as localidades de entrega para as editoras. Assim, inicia-se o processo de produção, que tem supervisão dos técnicos do FNDE.
Análise de qualidade física	O Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) acompanha também o processo de produção, sendo responsável pela coleta de amostras e pela análise das características físicas dos livros, de acordo com especificações da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), normas ISO e manuais de procedimentos de ensaio pré-elaborados.
Distribuição	A distribuição dos livros é feita por meio de um contrato entre o FNDE e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), que leva os livros diretamente da editora para as escolas. Essa etapa do PNLD conta com o acompanhamento de técnicos do FNDE e das secretarias estaduais de educação.
Recebimento	Os livros chegam às escolas entre outubro do ano anterior ao atendimento e o início do ano letivo. Nas zonas rurais, as obras são entregues nas sedes das prefeituras ou das secretarias municipais de educação, que devem efetivar a entrega dos livros.

Fonte: FNDE[3] (2018)

[3] Obtido em http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/funcionamento **acesso em 23/03/2018.**

Os guias são lançados anualmente, todavia, os seguimentos se alternam da seguinte forma: Um ano é lançado o guia do livro para o Ensino Fundamental séries iniciais, no seguinte para o Ensino Fundamental anos finais e no terceiro ano para o Ensino Médio. Sendo assim cada seguimento recebe o guia do livro didático a cada três anos e as escolhas são feitas como descrito no quadro.

O PNLD, portanto, a cada ano, atende prioritariamente um destes seguimentos. Mas o PNLD voltou a adquirir *livros consumíveis* para algumas séries e disciplinas específicas. Sendo assim, ainda que tenhamos um volume maior de livros adquiridos para aquele seguimento prioritário, alguma quantidade de livros sempre é adquirida para reposições para os outros segmentos. Os *livros reutilizáveis* são repostos a cada três anos.

Apresentamos nos quadros 5 e 6 abaixo algumas informações sobre o ciclo de distribuição de 2017 para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e a Educação de Jovens e Adultos:

Quadro 5: Dados estatísticos sobre o PNLD 2017 (Ensino Fundamental e Médio)

Ano do PNLD	Atendimento	Escolas Beneficiadas	Alunos Beneficiados	Exemplares	Valores (R$) Aquisição
PNLD 2017	Ensino Fundamental: 1º ao 5º ano	96.632	12.347.961	39.524.100	319.236.959,79
	Ensino Fundamental: 6º ao 9º ano	49.702	10.238.539	79.216.538	639.501.256,49
	Subtotal: Ensino Fundamental	**111.668**	**22.586.500**	**118.740.638**	**958.738.216,28**
	Ensino Médio: 1ª a 3ª Série	20.228	6.830.011	33.611.125	337.172.553,45
	Total do PNLD 2017	**117.690**	**29.416.511**	**152.351.763**	**1.295.910.769,73**

Fonte: FNDE[4] (2018)

[4]Obtido em http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos **acesso em 23/03/2018.**

Quadro 6: Dados estatísticos sobre o PNLD 2017 (EJA)

Ano do PNLD	Atendimento	Escolas Beneficiadas	Alunos Beneficiados	Exemplares	Valores (R$) Aquisição
PNLD EJA 2017 Educação de Jovens e Adultos	Ensino Fundamental: 1º ao 5º ano	18.659	652.133	1.162.758	13.704.305,24
	Ensino Fundamental: 6º ao 9º ano	16.440	1.279.495	2.763.257	36.985.416,85
	Subtotal: Ensino Fundamental	**26.296**	**1.931.628**	**3.926.015**	**50.689.722,09**
	Ensino Médio: 1ª a 3ª Série	6.045	786.898	1.066.371	19.902.032,46
	Total do PNLD EJA 2017	**29.431**	**2.718.526**	**4.992.386**	**70.591.754,55**

Fonte: FNDE (2018)[5]

Os valores que foram expostos acima para o ciclo de 2017 extrapolam a casa de R$ 1,3 bilhão, o que firma o governo brasileiro como o maior comprador de livros do Brasil e o que tornou a venda de livros didáticos a mais rentável no mercado editorial nacional.

2.4 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) começou a ser elaborada no ano de 2014. Trata-se de um documento de caráter normativo que servirá como referência obrigatória para a elaboração dos currículos da educação básica no Brasil, incluindo, portanto, o Ensino Infantil, Fundamental e Médio. No texto da própria BNCC ela é definida como “conjunto orgânico e progressivo de aprendizagem essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BNCC, 2018, p. 9). Toda essa normatização será destinada aos ensinos público e privado.

A criação da base é, como o próprio documento declara, o cumprimento do que está previsto na LDB, Lei Número 9.394/96, inicialmente como consequência desta lei foram elaborados e discutidos entre os anos de 1997 e 2000os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), são diretrizes para o planejamento e buscavam uniformizar e redirecionar o conteúdo escolar, mas a BNCC vai além, trata-se de uma referência

[5]Obtido em http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos **acesso em 23/03/2018.**

obrigatória, ainda que esta preserve em seu texto a autonomia das escolas na elaboração de seus projetos político-pedagógicos.

Além da LDB, a elaboração da base também foi assumida como parte do Plano Nacional de Educação com vigência de 10 anos que foi aprovado em 2014, por meio da Lei 13.005.

A última versão da BNCC para os Ensinos Infantil e Fundamental foi apresentada no primeiro semestre de 2017 e já foi homologada tendo, portanto, força de lei. Todavia, a última versão da BNCC para o Ensino Médio foi entregue pelo ministério da educação no primeiro semestre de 2018, mais precisamente no mês de abril. A Base do Ensino Médio ainda carece de aprovação do Conselho Nacional de Educação, que vai organizar audiências públicas para debater o documento. Caso este texto seja aprovado cada um dos estados, municípios e sistemas de ensino e etc., terão dois anos para a adaptação, incluindo material didático – ponto que particularmente nos interessa – e formação de professores.

Quando falamos da BNCC do Ensino Médio, se faz necessária uma ressalva, não é possível discutir esse assunto, ainda que de forma resumida como faremos aqui, sem levar em conta a chamada “reforma do ensino médio”. Visto que a base, em sua última versão, trás consigo a absorção da “reforma do Ensino Médio” que foi apresentada inicialmente como medida provisória em 2016, mas tornou-se lei em 2017 (Lei 13.415). Essa lei altera o texto da LDB (Lei 9.394/96), sobre essa alteração listamos a seguir pontos que em nosso entendimento merecem destaque:

- A carga horária do Ensino Médio passa de 800 horas para 1000 horas anuais (prazo de cinco anos para implantação), sendo essa carga ampliada de forma progressiva para 1400 horas anuais.
- A BNCC definirá direitos e objetivos de aprendizagem no Ensino Médio.
- O ensino de língua portuguesa e matemática será obrigatório nos três anos do ensino médio (com ressalva para as comunidades indígenas que podem incluir a Língua Materna).
- A BNCC do ensino médio incluirá obrigatoriamente estudos e práticas de educação física, arte, sociologia e filosofia. (O texto abre margem para interpretarmos que essas disciplinas não precisam ser necessariamente ofertadas ao longo de todo o ensino médio).

- O ensino da língua inglesa passa a ser obrigatório e outras línguas podem ser ofertadas sendo que preferencialmente a língua espanhola.
- O currículo do Ensino Médio será composto pela BNCC e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e possibilidade dos sistemas de ensino. Sendo esses itinerários compostos por: Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, ciências da natureza e suas tecnologias, ciências humanas e sociais aplicadas e formação técnica e profissional.
- A carga horária destinada ao cumprimento da BNCC não poderá ser superior a 1800 horas (sendo assim o tempo restante seria, portanto, destinado ao itinerário escolhido pelo estudante).
- Profissionais com “notório saber” reconhecido pelos sistemas de ensino, podem ser admitidos no magistério para ministrar conteúdos de áreas afins a sua formação ou experiência profissional.

Inicialmente, ressaltamos o fato que a lei 13.415/17, reconhece a BNCC como aquela que definirá os “direitos e objetivos” de aprendizagem. Sendo, portanto, o documento norteador das mudanças que vão ocorrer no Ensino Médio. Como frisamos anteriormente isso inclui também os materiais didáticos e a orientação dos cursos de formação de professores.

Outro fator relevante para este é o fato que a reforma mantém o ensino de matemática (e língua portuguesa) como obrigatório nos três anos do ensino médio. Todavia, muitas disciplinas ofertadas no Ensino Médio atual seriam a princípio suprimidas, fazendo parte dos itinerários que podem ser escolhidos pelos estudantes, mas agrupadas em áreas do conhecimento.

A carga horária destinada às disciplinas obrigatórias previstas na BNCC será de no máximo 1800h, o que representaria 60% do tempo total destinado ao ensino médio. Sendo assim a base fixa apenas esse percentual do que se deve discutir. O restante, 40%, portanto, sendo destinado aos itinerários formativos que o estudante em tese teria direito a escolha, que devem de acordo com o documento tratar e respeitar as diversidades locais. Todavia, quando levamos em conta que mais da metade dos municípios brasileiros tem apenas uma escola, é difícil acreditar que de fato os estudantes tenham todo o leque de escolhas previstas pela lei.

Outrossim, em proposta apresentada em 2018 no Conselho Nacional de Educação, esses 40% referentes aos itinerários escolhidos pelo aluno, poderiam ser ensinados a distância, sendo que em cursos de Educação de Jovens e Adultos esse percentual poderia chegar a 100%. Sobre a seguinte proposta o então presidente (Cesar Callegari) da comissão responsável pela etapa de discussões públicas e consolidações de sugestões de alterações no texto da BNCC, em carta que anuncia sua demissão, salienta "recursos a distância devem servir como complemento, jamais em substituição de professores e da escola como local de vivência presencial"[6].

A admissão de profissionais de 'notório saber pedagógico' para atuarem na formação técnica do currículo é outro ponto trazido pela lei que gera muito debate, visto que se pode ao certo definir o que é este 'notório saber pedagógico' para Dantas (2016) "isto pode promover toda sorte de improvisos pedagógicos" (DANTAS, 2017 p.108).

Freitas (2014) afirma que a agenda educacional no Brasil está atualmente em disputa, que coloca frente a frente os educadores profissionais e os reformadores empresariais da educação. Sendo, portanto, a educação uma área estratégica muito importante aos olhos do capital para que nas mãos apenas dos educadores.

> É esta contradição entre ter que qualificar um pouco mais e ao mesmo tempo manter o controle ideológico da escola, diferenciando desempenhos, mas garantindo acesso ao conhecimento básico para a formação do trabalhador hoje esperado na porta das empresas, que move os reformadores a disputarem a agenda da educação, responsabilizando a escola pela falta de equidade no acesso ao conhecimento básico, ou seja, responsabilizando a escola por não garantir o domínio de uma base nacional e comum a todos (FREITAS, 2014, p. 1089).

Fica claro que na opinião de Freitas (2014) a "reforma do Ensino Médio" e a BNCC, viriam para atender a desejos de uma "noosfera"[7] empresarial que almeja controlar a organização do trabalho pedagógico, o que inclui conteúdos e métodos, adequando assim a BNCC ao que os testes em larga escala valorizam e a possibilidades do apostilamento

---

[6] Disponível em https://avaliacaoeducacional.files.wordpress.com/2018/06/carta-aos-conselheiros-do-cne.pdf**acesso em 12/09/2018.**

[7]Termo empregado por Yves Chevallard, no estudo da chamada transposição didática, para caracterizar o conjunto das fontes de interferências no processo seletivo dos conteúdos constituintes dos programas escolares. A "noosfera" é um dos fatores que interferem no que será chamado por este autor de *saber escolar*, que é o saber que de fato é discutido em sala de aula.

dos conteúdos da educação básica. Ficando de lado importantes dimensões da formação humana e reforçando uma matriz meramente conteudista.

Analisando somente o que propõe a parte referente a matemática na BNCC, no ensino fundamental a área do conhecimento de matemática e suas tecnologias organiza as habilidades segundo unidades de conhecimento da própria área que são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

O texto da BNCC para o Ensino fundamental trás oito competências específicas relacionadas a área de matemática, que são: reconhecimento da matemática como ciência humana, fruto de necessidades e preocupações de diferentes culturas; desenvolver raciocínio lógico e espírito investigativo; compreender relações entre conceitos e procedimento de diferentes áreas da matemática; fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos nas práticas sociais e culturais; utilizar processos e ferramentas matemáticas; enfrentar situações-problema em múltiplos contextos; desenvolvimento de projetos que abordem questões de urgência social; e interagir com seus pares de forma cooperativa.

Já a última proposta da BNCC para o Ensino Médio – insistindo que esta ainda não foi homologada, trás em seu texto cinco diferentes competências para específicas para as quais apresenta uma lista de habilidades relacionadas a cada uma delas. O quadro 7 detalha essa lista:

Quadro 7: Lista de competências relacionadas a área de Matemática e suas tecnologias na BNCC do Ensino Médio

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 523)

Interpretar, investigar, modelar, articular são verbos muito presentes nessa lista de competências e também a conexão intensa com o cotidiano, mundo do trabalho, diversidade de contextos, apresentação de soluções, desenvolvimento de raciocínio matemático entre outras que são apresentada e são até certo ponto semelhantes ao que apresentou o quadro do ensino fundamental.

Mas queremos analisar com mais cuidado a competência número 4, que fala sobre “compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos”, inclusive listando os registros algébricos, geométrico, estatístico e computacional. O que reforça aquilo que a Teoria dos Registro de Representação Semiótica defende, a importância de articular com os registros de representação semiótica.

> As habilidades vinculadas a essa competência tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático, tendo em vista que elas têm um

> papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliar a capacidade de pensar matematicamente. (BRASIL, 2018, p. 530)

No trecho acima fato que nos chama ainda mais atenção é inclusão do termo “conversão” que será amplamente explorado nesse trabalho é ponto decisivo para a Teoria apresentada por Duval (2003). Revelando que aqueles que redigiram esse trecho da BNCC beberam desta fonte. Como ainda revela o seguinte trecho:

> Para tanto, esta Base assume que para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos deve-se incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação. Assim, os estudantes precisam estar preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação. (BRASIL, 2018, p. 530)

Ainda que tenhamos seríssimas ressalvas com relação a vários pontos que são apresentados pela BNCC, sobretudo no que tange a reforma do Ensino Médio, reconhecemos neste trecho um fator que, dentro da perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é muito positivo.

Quando o livro didático está em pauta, um outro fator nos faz olhar mais atentamente para a BNCC, por ser uma referência obrigatória, certamente a Base vai influenciar diretamente a elaboração dos materiais didáticos que vão circular em todas as escolas brasileiras, sendo assim o mercado editorial acompanha atentamente as discussões e debates realizados para fazer as devidas adequações aos materiais didáticos. É possível inclusive que já tenha influenciado os livros deste ciclo do PNLD, visto que outras versões da base já haviam sido lançadas em anos anteriores.

3 –METODOLOGIA DE PESQUISA

Realizamos aqui uma pesquisa bibliográfica, com objetivo de analisar um livro já publicado. Toda análise que apresentamos mais adiante está baseada no texto de um dos capítulos deste livro. Faremos como já havíamos esclarecido, uma analise dos exercícios propostos neste capítulo. Os critérios da análise são esclarecidos a seguir.

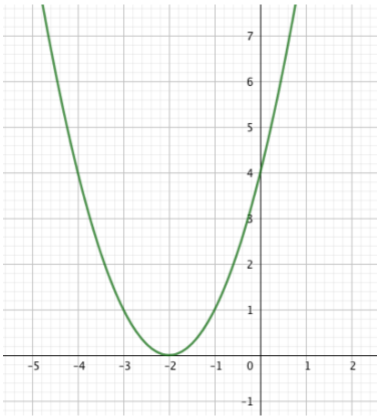
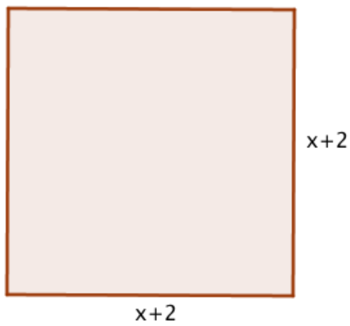
3.1Os tipos de representação de funções

O conceito de função é sem dúvida um dos mais importantes no estudo da matemática no ensino básico. Sem perder de vista que, quando existe uma relação entre dois conjuntos, que faz cada elemento do primeiro conjunto corresponder a um único elemento no segundo, essa relação será denominada função. Este primeiro conjunto será chamado de domínio da função e o segundo conjunto é o contradomínio da função. Apresentamos mais adiante uma discussão sobre o objeto matemático função quadrática.

Quase que inevitavelmente os alunos, por que não professores, quando falamos em função, logo pensam na lei de formação, todavia, a lei de formação é apenas um dos tipos de representação deste objeto e retomando o que diz Duval (2003) “um objeto matemático jamais deve ser confundido com sua representação”. Desta forma, apresentamos abaixo algumas formas de representação de uma função. Tomaremos como referência uma função cujo domínio e contradomínio é conjunto dos números reais. A representação algébrica desta função é dada por: $\boldsymbol{y = x^2 + 4x + 4}$. O quadro 8 mostra algumas possibilidades de representação da mesma:

Quadro 8: Os tipos de representação do objeto matemático função quadrática

Tipo de Representação Semiótica	Forma de visualização do objeto matemático
Registro Algébrico	$\boldsymbol{y = x^2 + 4x + 4}$ ou $\boldsymbol{y = (x + 2)^2}$

<table>
<tr><td>Registro Gráfico</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Registro de Língua Natural</td><td>Pensei em dois números reais sendo que um destes números é igual ao quadrado da soma do outro número e dois.</td></tr>
<tr><td>Registro de Tabela</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Registro de Figura</td><td>A área do quadrado abaixo:

</td></tr>
</table>

Fonte: O autor.

Existem diversas possibilidades de representação deste objeto matemático. Nossa análise quer verificar em que medida o livro didático analisado explora todas essas formas de representação, analisando em especial, como os processos de transformação mobilizam esses tipos de representação.

3.2 Como serão analisados os livros didáticos

Devido a importância que o livro didático tem em sala de aula, discutida no capítulo anterior, vamos analisar as atividades de um livro didático referentes ao capítulo dedicado às Funções Quadráticas, adotando como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2003).

Como já apresentamos no capítulo anterior, existem dois tipos de transformações relacionadas aos registros de representação semiótica, os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são exercícios cuja solução permanece dentro de um mesmo registro de representação, por outro lado, as conversões acontecem nas soluções que requerem uma mudança de registro de representação, mas mantendo a referência ao mesmo objeto.

Dessa forma, vamos classificar os exercícios em dois tipos principais: Tratamento ou conversão. A seguir vamos detalhar como propomos a seguir:

A – Exercícios de tratamento serão analisados e colocados em outras subcategorias como, por exemplo:

1. Tratamento dentro do registro gráfico.
2. Tratamento dentro do registro algébrico.
3. Tratamento dentro do registro de tabela.

B – Exercícios de conversão serão analisados e colocados em outras subcategorias, considerando o sentido em que se dá a conversão. Alguns exemplos são elencados abaixo:

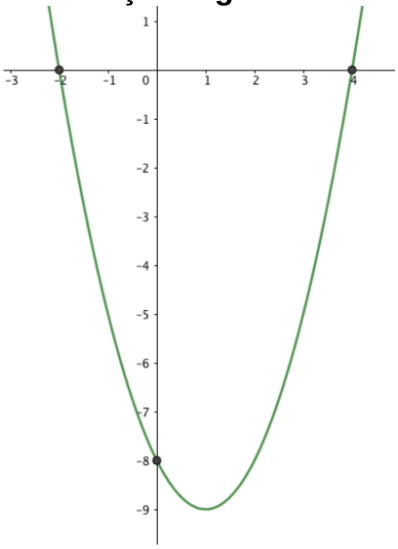
1. Conversão do registro algébrico para o registro gráfico.
2. Conversão do registro gráfico para o registro algébrico.
3. Conversão do registro da Língua Natural para o registro algébrico.
4. Conversão do registro algébrico para a Língua Natural.
5. Conversão do registro algébrico para o registro de tabelas.
6. Conversão do registro de tabelas para o registro algébrico.
7. Conversão do registro de tabela para o registro gráfico.
8. Conversão do registro gráfico para o registro de tabela.

Naturalmente alguns itens envolvem tratamento e conversão em um mesmo enunciado. Mas não serão empecilho para a análise, neste caso, criaremos um novo campo para apresentar esses itens. Não detalharemos todas as resoluções dos exercícios, todavia, destacaremos algumas que são pedagogicamente mais relevantes.

A título de exemplo vamos considerar o seguinte enunciado:

Sendo $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{a \neq 0}$, o gráfico abaixo representa uma função, cuja representação algébrica é dada $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$. Determine os coeficientes $\boldsymbol{a, b}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{c}$.

Figura 1: Esboço do gráfico da função f



Fonte: O autor.

Considere agora uma resolução deste problema:

Resolução:

1. Considerando os pontos de intersecção com os eixos obtemos:

$(\mathbf{0}, \mathbf{-8}) \in ao\ gráfico\ de\ \boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{a}.\mathbf{0}^2 + \boldsymbol{b}.\mathbf{0} + \boldsymbol{c} = \mathbf{-8}$

$(\mathbf{-2}, \mathbf{0}) \in ao\ gráfico\ de\ \boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{a}.(\mathbf{-2})^2 + \boldsymbol{b}.(\mathbf{-2}) + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$

$(\mathbf{4}, \mathbf{0}) \in ao\ gráfico\ de\ \boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{a}.\mathbf{4}^2 + \boldsymbol{b}.\mathbf{4} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$

2. Desta forma obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \boldsymbol{c} = \mathbf{-8}\ (\boldsymbol{I}) \\ \mathbf{4}\boldsymbol{a} - \mathbf{2}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}\ (\boldsymbol{II}) \\ \mathbf{16}\boldsymbol{a} + \mathbf{4}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}\ (\boldsymbol{III}) \end{cases}$$

3. Substituindo (I) em (II) e (I) em (III), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{4a - 2b = 8} \\ \mathbf{16a + 4b = 8} \end{cases}$$

4. Manipulando algebricamente o sistema acima chegaremos aos valores de $\boldsymbol{a = 1,\ b = -2}$ **e** $\boldsymbol{c = -8.}$

5. Sendo assim a lei de formação da função f é dada por:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 8}$$

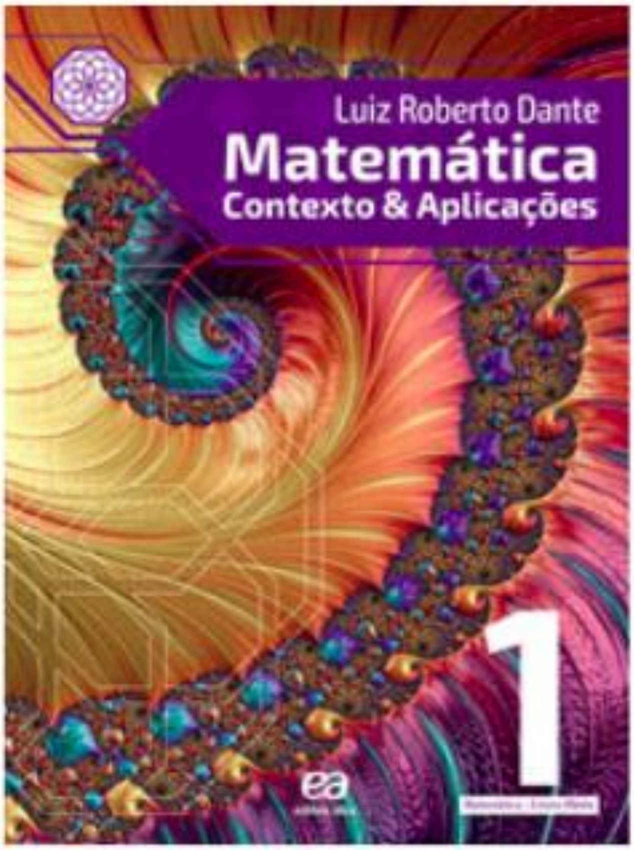
Ao analisarmos o problema percebe-se que temos um enunciado que considera a representação gráfica de uma função e para solucionar o problema o tipo de transformação exigida é uma **conversão** de registros de representação. Mais precisamente vemos a **conversão do registro gráfico para o registro algébrico**. Naturalmente a resolução exige vários processos de tratamentos. Para manipular esse problema o aluno precisa ter o domínio de dois tipos de representação deste objeto matemático, o que, dentro da perspectiva da TRRS, torna este um “bom” problema.

Mas em nossa análise outros fatores são importantes. Se o autor explorar somente esse tipo de problema o aluno fica impedido de explorar outros aspectos e de se aprofundar adequadamente no objeto matemático em questão, como, por exemplo, o sentido inverso desta conversão. Por isso, vamos tabular os resultados para estabelecer comparações e verificar se há predominância de um tipo de problema em detrimento de outros.

3.3 A escolha do livro didático

O livro didático que analisamos nessa pesquisa é o livro “Matemática - Contextos & Aplicações” de Luiz Roberto Dante da editora Ática. Livro que foi um dos sete indicados no catálogo do PNLDEM de 2018.

Figura 2: Capa do livro Contexto & Aplicações



Fonte: FNDE (2018)

O critério usado para a escolha é fato de que esta coleção foi a mais indicada no catálogo do PNLD de 2015. Sendo distribuídos no total cerca de 2,5 milhões[8] de livros desta coleção. Este número é muito superior a segunda coleção mais escolhida para aquele ano em um total de 1,4 milhão, aproximadamente.

[8] Dados obtidos em http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos**acesso em 12 de fevereiro de 2018**.

4 – A FUNÇÃO QUADRÁTICA

4.1 A função quadrática na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio

A última proposta para a BNCC (2018) do ensino médio – que aguarda homologação – apresenta quatro habilidades que estão diretamente ligadas ao conteúdo de funções quadráticas. Essas habilidades estão elencadas no quadro 9:

Quadro 9: Habilidades relacionadas a função quadrática na última versão da BNCC

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.
(EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

Fonte: BNCC (2018, p.534)

Já na primeira habilidade (EM13MAT502) vemos o incentivo não explícito ao trabalho com transformações, sobretudo o de conversões. Note que a habilidade em questão requer que o aluno, partindo de dados representados em tabelas, possa por meio de conjecturas generalizar e chegar a lei de formação de uma função.

A habilidade (EM13MAT402) já trata a conversão de forma explícita, sobretudo partindo das representações algébricas para as representações gráficas da função quadrática. Outro fator importante com relação a essa habilidade é a possibilidade de conversão usando não somente o caminho tradicional, mas também com a sugestão de se utilizar softwares de geometria dinâmica.

A habilidade (EM13MAT503) já aponta outra potencialidade sobre o objeto matemático função quadrática que é a possibilidade de conexão com outras áreas do conhecimento, sobretudo com a Física, além da própria matemática financeira.

Quanto a última habilidade (EM13MAT302), trata da resolução de problemas, mas também da possiblidade de elaborar problemas. Dentro do contexto que estamos analisando nesta pesquisa, pode ser uma rica oportunidade de o aluno articular com registros de representação semiótica.

4.2 Análise do objeto matemático

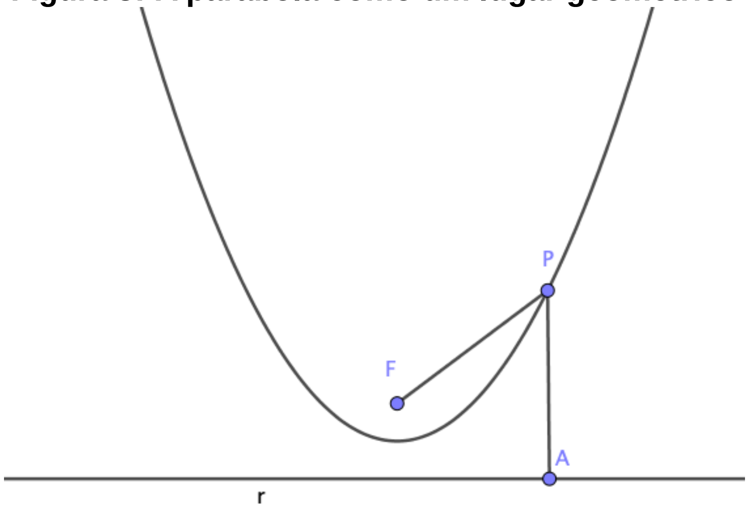
Uma definição apresentada por Lima (2014): Uma função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$será considerada uma função quadrática (ou função polinomial do segundo grau) quando cada valor de $x \in \mathbb{R}$ está associado ao valor $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, nos quais a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.
De maneira mais simples podemos dizer uma função quadrática na variável x, é sempre do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$ sendo que $a, b, c \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$.

<u>Gráfico da função quadrática (A função quadrática como um lugar geométrico)</u>

Não é comum apresentar ainda na primeira série do Ensino Médio demonstrações relativas a este fato. Principalmente porque a distância entre pontos no plano é geralmente explorada no terceiro ano do Ensino Médio. Todavia, demonstraremos a seguir que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola, partindo da definição de parábola.

Definição: Parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta e um ponto dado. Chamaremos a reta r de reta diretriz e o ponto F dado é o foco da parábola.

Figura 3: A parábola como um lugar geométrico



Fonte: O autor.

Demonstração: Vamos escrever uma "fórmula" que descreva esse lugar geométrico e depois mostrar que essa "fórmula" é a representação algébrica de uma função quadrática.

Vamos considerar a reta r paralela ao eixo das abscissas (reta horizontal) dada por $y = k_1$, com $k_1 \in \mathbb{R}$ e um ponto $F = (h, k_2)$ tal que F não pertença a r, isto é, $k_1 \neq k_2$.

Então, um ponto $P = (x, y)$ pertence a parábola se $d(P, r) = d(P, F)$. Assim temos que:

A distância de P a reta r é $d(P, r) = |y - k_1|$.

A distância de P ao foco F é $d(P, F) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k_2)^2}$.

Assim, temos que:

$|y - k_1| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k_2)^2} \Longrightarrow$ (Elevando ambos os membros ao quadrado)

$|y - k_1|^2 = \left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k_2)^2}\right)^2 \Longrightarrow$ (Desenvolvendo os quadrados)

$y^2 - 2k_1y + k_1^2 = x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2k_2y + k_2^2 \Longrightarrow$ (Reorganizando os termos)

$2k_2y - 2k_1y = x^2 - 2hx + h^2 + k_2^2 - k_1^2 \Longrightarrow$ (Evidenciando y no primeiro membro)

$(2k_2 - 2k_1)y = x^2 - 2hx + h^2 + k_2^2 - k_1^2 \Longrightarrow$ (Isolando y)

$$y = \frac{1}{2k_2 - 2k_1}x^2 - \frac{2h}{2k_2 - 2k_1}x + \frac{h^2 + k_2^2 - k_1^2}{2k_2 - 2k_1}$$

Note que, como $k_2 \neq k_1 \Longrightarrow 2k_2 - 2k_1 \neq 0$. Sendo assim, se fizermos $a = \frac{1}{2k_2 - 2k_1}$, $b = -\frac{2h}{2k_2 - 2k_1}$ e $c = \frac{h^2+k_2^2-k_1^2}{2k_2-2k_1}$ temos que a representação acima é de uma função do tipo $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Forma canônica da função quadrática

Uma análise mais aprofundada do que ocorre com o gráfico da função quadrática pode ser feita por meio de sua *forma canônica*. Apesar dos livros didáticos atuais sempre apresentarem algum campo, ainda que resumido, com relação a forma canônica, temos a impressão que os professores ainda exploram muito pouco esse tipo de representação. Lima (2014) apresenta uma maneira de obter a forma canônica partindo de$f(x) = ax^2 + bx + c$, com$a \neq 0$, como apresentamos a seguir:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$
$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Se fizermos $\Delta = b^2 - 4ac$ assim teremos que a forma canônica da função quadrática será dada por:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

As raízes (ou zeros) da função quadrática

Temos aqui um tema que é amplamente desenvolvido e explorado nos livros didáticos. Demonstrar de que forma são as raízes de uma função quadrática torna-se uma tarefa muito simples quando trabalhamos com a forma canônica da função quadrática.

Uma definição: As raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$são os valores de $x \in \mathbb{R}$ de forma que $f(x) = 0$. Podemos dizer que as raízes são, portanto, as soluções da seguinte equação: $ax^2 + bx + c = 0$.

Lima (2014) diz que, quando escrevemos a forma canônica da função quadrática, a obtenção de uma fórmula que descreve as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma consequência imediata. Como segue:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Desta forma a existência de raízes reais para a função quadrática ficará condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser um número real. Assim podemos afirmar que:

Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais, pois:

$$\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$$

<u>Concavidade da parábola, pontos de máximo e mínimo da função quadrática</u>

O estudo dos pontos de máximo e mínimo das funções quadráticas é um tema amplamente desenvolvido em livros didáticos porque permite a exploração de diversas situações-problema que fazem referência a situações cotidianas. Ao fazer o estudo destes pontos observamos o que ocorre com a concavidade da parábola quando o coeficiente a da função quadrática é um número real maior ou menor do que zero.

Apresentamos abaixo o estudo desses pontos e da concavidade da parábola também como uma consequência da forma canônica da função quadrática.

Uma definição: um valor $y_M \in Im(f)$ é o ***valor máximo*** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para quais quer $y \in Im(f)$. Chamaremos de ***ponto de máximo*** da função o valor $x_M \in D(f)$ de forma que $f(x_M) = y_M$.

Uma definição: um valor $y_m \in Im(f)$ é o ***valor mínimo*** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \leq y$ para quais quer $y \in Im(f)$. Chamaremos de ***ponto de mínimo*** da função o valor $x_m \in D(f)$ de forma que $f(x_m) = y_m$.

Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ temos que:

Caso 1: Se $a < 0$, a concavidade da parábola será voltada para baixo e assim a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admitirá um **valor máximo**. De fato, pois:

Vamos considerar a forma canônica da função, assim temos (*):

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Como $a < 0$, o valor de *y* será o maior possível quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$. Nesta diferença temos que:

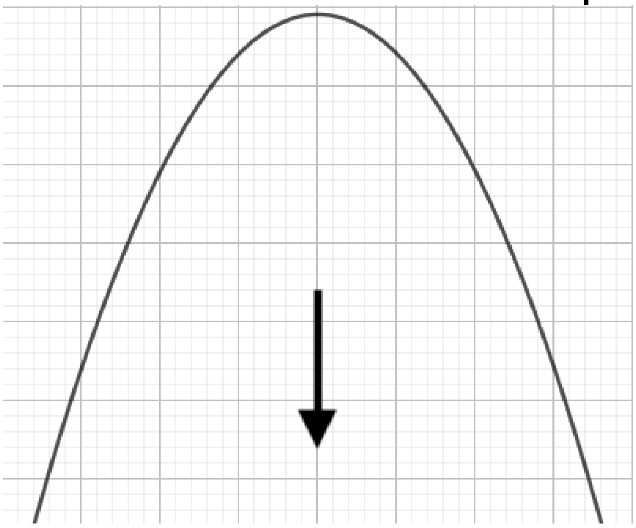
- $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é um valor constante visto que não depende de *x*, só depende de *a, b, c.*
- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo *x* real.

Considerando o que foi apresentado acima, a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Substituindo em (*) temos:

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a^2}$$

Ora, se $y = -\frac{\Delta}{4a^2}$ é o maior valor possível, o gráfico da função descrita no caso terá formato semelhante ao apresentado na figura 4:

Figura 4: Parábola com concavidade voltada para baixo



Fonte: O autor.

Caso 2: Se $a > 0$, a concavidade da parábola será voltada para cima e assim a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admitirá um **valor mínimo**. De fato, pois:

Vamos considerar a forma canônica da função, assim temos (*):

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

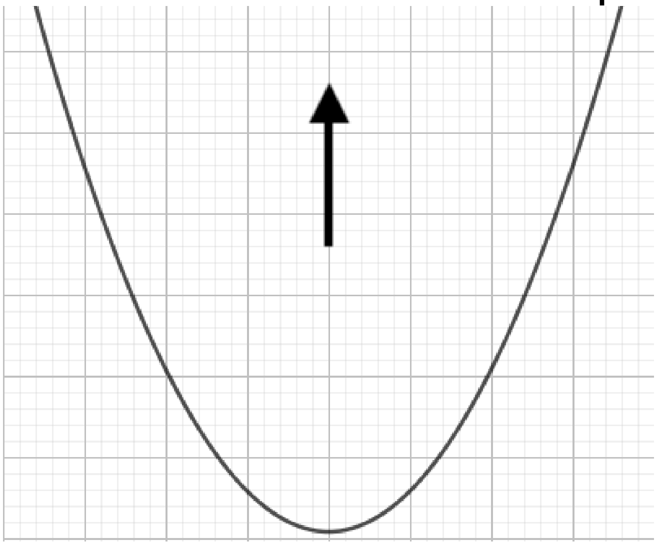
Como $a > 0$, o valor de *y* será o menor possível quanto menor for o valor da diferença $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$.

De forma análoga, a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Substituindo em (*) temos:

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a^2}$$

Ora, se $y = -\frac{\Delta}{4a^2}$ é o menor valor possível, o gráfico da função descrita no caso terá formato semelhante ao apresentado na figura 5:

Figura 5: Parábola com concavidade voltada para cima



Fonte: O autor.

Sendo assim o vértice da parábola será sempre dado pelo seguinte ponto:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

<u>Imagem da função quadrática</u>

Mais uma vez a forma canônica é um excelente ponto de partida, agora vamos utilizá-la para fazer o estudo da imagem de uma função quadrática, como demonstraremos a seguir:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Longrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Observamos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{R}$, desta forma vamos dividir a análise em dois casos:

Caso 1: Quando $a > 0$:

Neste caso $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, e, desta forma:

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Caso 2: Quando $a < 0$:

Neste caso $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, e, desta forma:

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Podemos, desta forma, concluir que quando:

- $a > 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R}: y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$
- $a < 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R}: y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$

<u>Eixo de simetria</u>

O gráfico de uma função quadrática admite sempre um eixo de simetria perpendicular ao eixo das abscissas e que passa pelo vértice da parábola. Como os pontos que pertencem ao eixo de simetria obedecem a seguinte equação: $x = -\frac{b}{2a}$.Para mostrar a existência de um eixo de simetria $x = -\frac{b}{2a}$ vamos mostrar que se: $A\left(-\frac{b}{2a} - r\,, y\right)$ com $r \in \mathbb{R}$, pertence ao gráfico da função então: $B\left(-\frac{b}{2a} + r\,, y\right)$, também pertence ao gráfico da função.

Tomando a função quadrática em sua forma canônica:

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Considerando que: $A\left(-\frac{b}{2a} - r\,, y\right)$ pertence ao gráfico dessa função, obtemos:

$$y = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[r^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right)$$

Ficando demonstrado assim que $B\left(-\frac{b}{2a}+r\,,y\right)$ também pertence ao gráfico da função.

Estudo do sinal da função quadrática

Para estudar o sinal de uma função quadrática vamos considerar três casos. Todos eles estão relacionados ao valor do discriminante Δ.

1º Caso: Quando $\Delta < 0$.

Primeiramente vamos considerar o seguinte: Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$.

Considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma canônica e depois multiplicando ambos os membros pelo coeficiente a.

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow a.f(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

Note que: a^2 sempre é positivo; $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ nunca é negativo e $\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)$ é positivo nessa circunstância, ou seja, $a.f(x) > 0, \forall\, x\ \in \mathbb{R}$.

Isto implica que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem sempre o mesmo sinal que o coeficiente a para todo $x\ \in \mathbb{R}$. Desta forma.

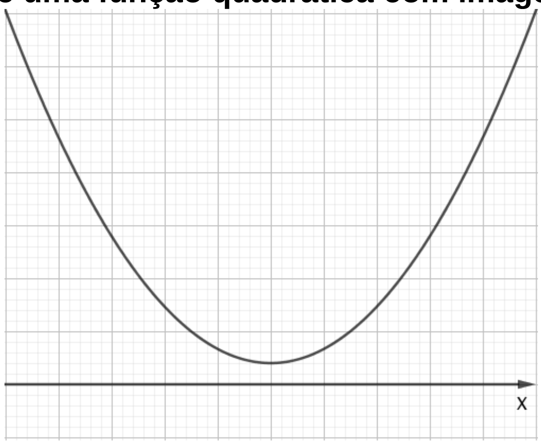
Se,

I. $a > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall\, x\ \in \mathbb{R}$
II. $a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall\, x\ \in \mathbb{R}$

Graficamente temos:

Situação I

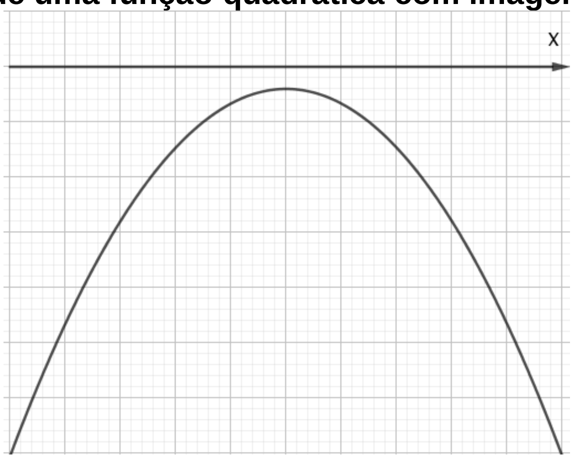
Figura 6: Gráfico de uma função quadrática com imagem sempre positiva



Fonte: O autor.

Situação II

Figura 7: Gráfico de uma função quadrática com imagem sempre negativa



Fonte: O autor.

2º Caso: Quando $\Delta = 0$.

Considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma canônica e depois multiplicando ambos os membros pelo coeficiente a e substituindo Δ por 0, temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow a.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{0}{4a^2}\right] \Rightarrow a.f(x) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Note que: a^2 sempre é positivo e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ nunca é negativo, ou seja, $a.f(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Neste caso concluímos que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem sempre o mesmo sinal que o coeficiente a para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_v\}$, sendo $x_v = -\frac{b}{2a}$ visto que neste ponto $f(x) = 0$. Desta forma:

Se,

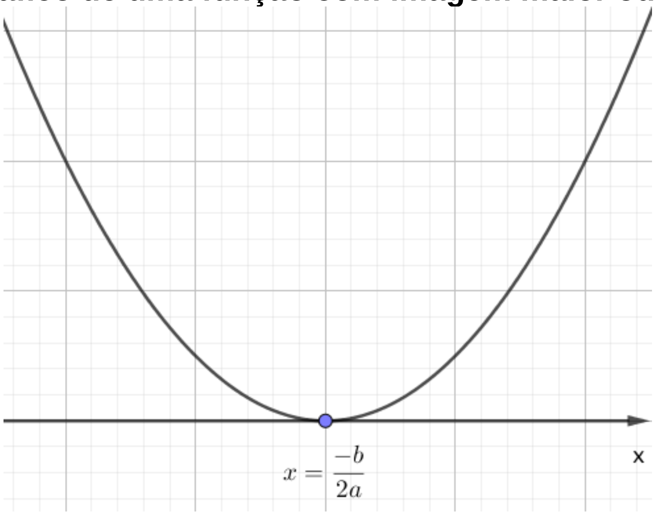
I. $a > 0 \Longrightarrow f(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

II. $a < 0 \Longrightarrow f(x) \leq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

Graficamente temos:

Situação I

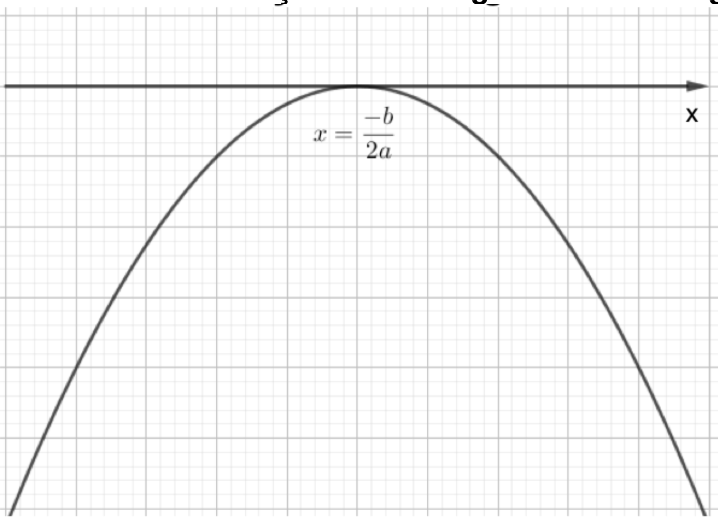
Figura 8: Gráfico de uma função com imagem maior ou igual a zero



Fonte: O autor

Situação II

Figura 9: Gráfico de uma função com imagem menor ou igual a zero



Fonte: O autor.

3º Caso: Quando $\Delta > 0$:

Considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma canônica e depois multiplicando ambos os membros pelo coeficiente a.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow a.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \Rightarrow a.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

Desta forma, temos que:

$$a.f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Que são justamente as raízes da equação de segundo grau, vamos descrevê-las da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podemos descrever $a.f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a^2.(x - x_1).(x - x_2)$.

Assim, o sinal de $a.f(x)$ depende do sinal dos fatores $(x - x_1) \; e \; (x - x_2)$. Vamos, sem perda de generalidade, admitir que: $x_1 < x_2$. E assim constatamos que:

1. Se $x < x_1 < x_2 \Rightarrow (x - x_1) < 0$ e $(x - x_2) < 0$. E claramente, $a^2 > 0$. Temos que: $a.f(x) = a^2.(x - x_1).(x - x_2) > 0$, pois, $(+).(-).(-) = (+)$.
2. Se $x_1 < x < x_2 \Rightarrow (x - x_1) > 0$ e $(x - x_2) < 0$. E claramente, $a^2 > 0$. Temos que: $a.f(x) = a^2.(x - x_1).(x - x_2) < 0$, pois, $(+).(+).(-) = (-)$.
3. Se $x > x_2 > x_1 \Rightarrow (x - x_1) > 0$ e $(x - x_2) > 0$. E claramente, $a^2 > 0$. Temos que: $a.f(x) = a^2.(x - x_1).(x - x_2) > 0$, pois, $(+).(+).(+) = (+)$.

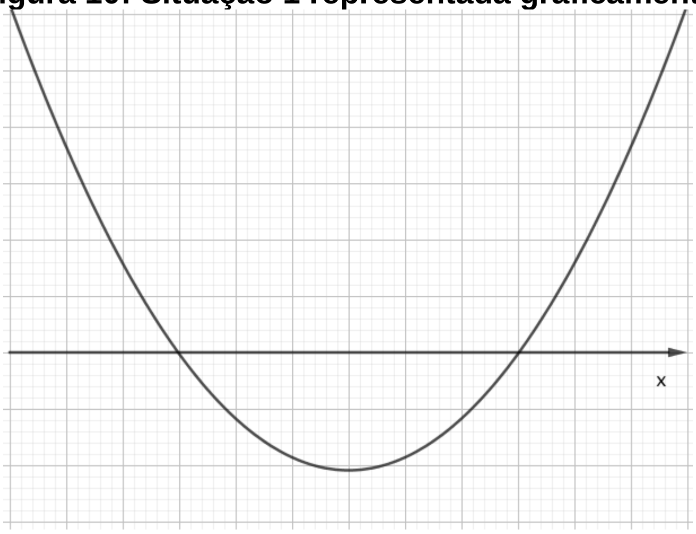
Concluímos assim que:

- O sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x, quando $x < x_1$ ou $x > x_2$.
- O sinal de $f(x)$ é o sinal de $-a$ para todo x, quando $x_1 < x < x_2$.

Graficamente temos duas situações:

Situação I. Quando $a > 0$. Temos:

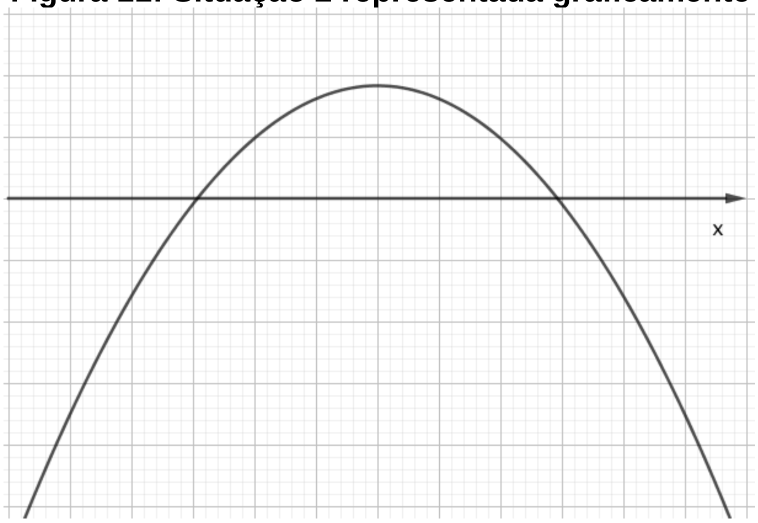
Figura 10: Situação 1 representada graficamente



Fonte: O autor.

Situação II. Quando $a < 0$. Temos:

Figura 11: Situação 2 representada graficamente



Fonte: O autor.

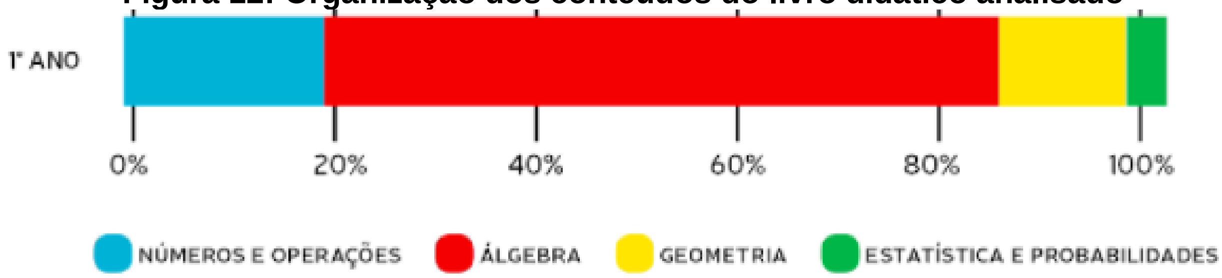
5 – ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

5.1 Panorama geral da obra

O volume 1 da coleção que analisamos divide-se em 8 capítulos, com um total de 267 páginas. Dos 8 capítulos, 5 são dedicados ao trabalho com funções, desde o conceito de função, passando por função afim, modular, quadrática, exponencial e logarítmica. Todavia, analisaremos apenas um capítulo, aquele dedicado a função quadrática (capítulo 4).

O guia do PNLD mostra como é feita a divisão dos conteúdos da obra, no caso da obra analisada a divisão proposta é a seguinte:

Figura 12: Organização dos conteúdos do livro didático analisado



Fonte: Guia PNLD (2018)[9]

O capítulo analisado aborda os seguintes conteúdos, que dão títulos a subseções: Definição de função quadrática; situações em que aparece a função quadrática; valor ou imagem da função quadrática em um ponto; zeros da função quadrática; gráfico da função quadrática; determinação algébrica das interseções da parábola com os eixos; vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática; estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau; conexão entre função quadrática e a Física; e por fim conexão entre função quadrática e progressão aritmética.

Neste mesmo capítulo o autor propõe uma seção denominada “outros contextos” que se discute a curva catenária e sua relação/diferença com a parábola e ainda uma outra seção denominada “um pouco mais” na qual explora a determinação dos zeros da função usando o procedimento de completamento de quadrados e a forma canônica da função quadrática.

---

[9]Obtido emhttp://www.fnde.gov.br/pnld-2018/#**acesso em 15/06/2018.**

Como dissemos anteriormente, o nosso olhar será voltado para os exercícios que são propostos pelo autor. Nesta obra os exercícios são divididos em duas seções, uma denominada apenas “exercícios” e uma segunda denominada “exercícios resolvidos”. Outras três seções de exercícios isoladas são apresentadas no final do capítulo são “exercícios adicionais”, “pensando no ENEM” e “vestibulares de norte a sul”.

O quadro 10 apresenta como são divididos todos os exercícios do capítulo que iremos analisar:

Quadro 10: Distribuição dos exercícios do capítulo 4

Seção	Exercícios	Exercícios Resolvidos
Definição de função quadrática	4	Nenhum
Situações em que aparecem a função quadrática	Nenhum	Nenhum
Valor ou imagem da função quadrática	10	1
Zeros da função quadrática	13	10
Gráfico da função quadrática	12	1
Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos	7	Nenhum
Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática	13	4
Estudo do sinal da função quadrática e inequações do 2º grau	11	6
Conexão entre função quadrática e física	3	3
Conexão entre função quadrática e progressão aritmética	4	Nenhum
Um pouco mais	6	1
Pensando no ENEN	3	Nenhum
Vestibulares de norte a sul	10	Nenhum
TOTAL DE EXERCÍCIOS	96	26

Fonte: O autor.

5.2 Análise dos exercícios propostos na obra

Na primeira seção **“definição de função quadrática”**, dos quatro exercícios propostos, um é de conversão com enunciado em linguagem materna e resposta em linguagem algébrica e os outros três são todos exclusivamente de tratamento dentro do registro algébrico.

Vamos destacar desta seção dois enunciados:

Figura 13: Questões 1 e 2 do capítulo analisado

1. Escreva no caderno um exemplo de função quadrática, indicando os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c*.

2. Quais das seguintes funções são quadráticas?

a) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$

b) $f(x) = 2x + 1$ d) $f(x) = 3x(x - 1)$

Fonte: Dante (2016, p.102)

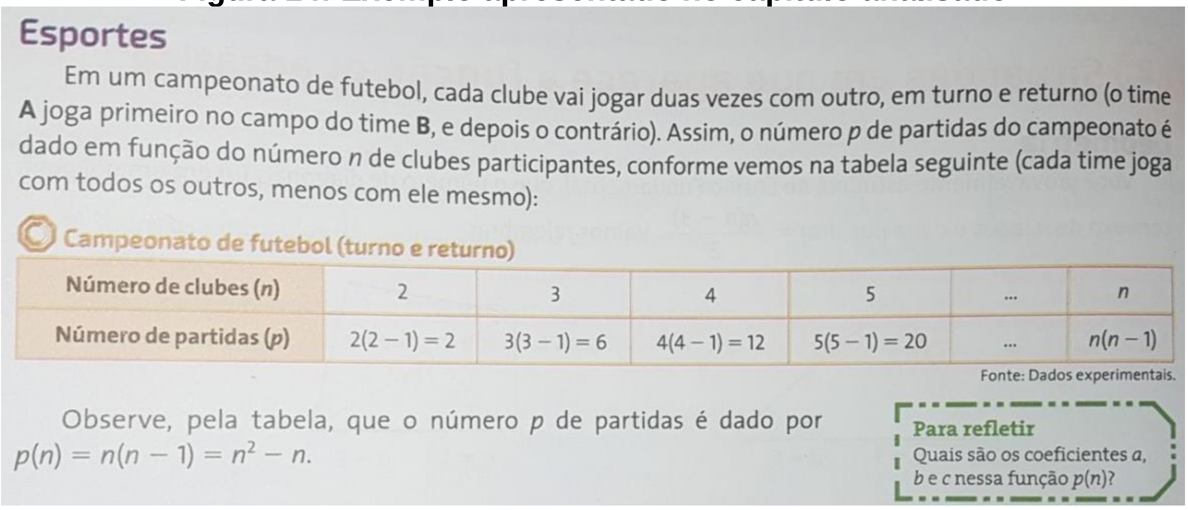
Na questão 1 acima, o enunciado foge do lugar comum pois, existe uma infinidade de soluções para esta questão e tal fato geralmente não ocorre nos problemas de matemática voltados para a Educação Básica. Entretanto, dentro da perspectiva que está em análise vemos o enunciado partir do registro de Língua Natural e exigir uma resposta com a utilização do registro de linguagem algébrica, desta forma na resolução o processo de transformação observado é uma conversão de registros de representação no sentido proposto por Duval (2003).

Uma solução para o item 2 - *c*: $f(x) = x.(x-1)(x-2) = (x^2 - x)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Neste ponto pode-se observar que a função não é quadrática, visto que ela não é da forma: $f(x) = ax^2 + bx + c, com\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$.

No processo de resolução deste item o aluno parte do registro algébrico e o item é respondido ainda dentro do mesmo tipo de registro de representação. Ainda que nos itens *a* e *b* a simples observação leva a solução desejada, os itens *c* e *d* exigem um tratamento mais amplo, como visto acima.

Na segunda seção **“situações em que aparece a função quadrática”**, o autor explora três contextos de aplicação para a função quadrática: na geometria, no cálculo do número de diagonais de um polígono convexo, nos fenômenos físicos, em que apresenta a lei da queda dos corpos de Galileu e por fim, nos esportes, em que o autor explora um problema de contagem. O autor não propõe nesta seção nenhum exercício. Todavia, nos exemplos que apresenta, explora processos de conversão de registros de representação como na situação que apresentamos a seguir, onde ocorrem dois processos de conversão.

Figura 14: Exemplo apresentado no capítulo analisado



Esportes

Em um campeonato de futebol, cada clube vai jogar duas vezes com outro, em turno e returno (o time **A** joga primeiro no campo do time **B**, e depois o contrário). Assim, o número p de partidas do campeonato é dado em função do número n de clubes participantes, conforme vemos na tabela seguinte (cada time joga com todos os outros, menos com ele mesmo):

Campeonato de futebol (turno e returno)

Número de clubes (n)	2	3	4	5	...	n
Número de partidas (p)	$2(2-1)=2$	$3(3-1)=6$	$4(4-1)=12$	$5(5-1)=20$	...	$n(n-1)$

Fonte: Dados experimentais.

Observe, pela tabela, que o número p de partidas é dado por $p(n) = n(n-1) = n^2 - n$.

Para refletir
Quais são os coeficientes a, b e c nessa função $p(n)$?

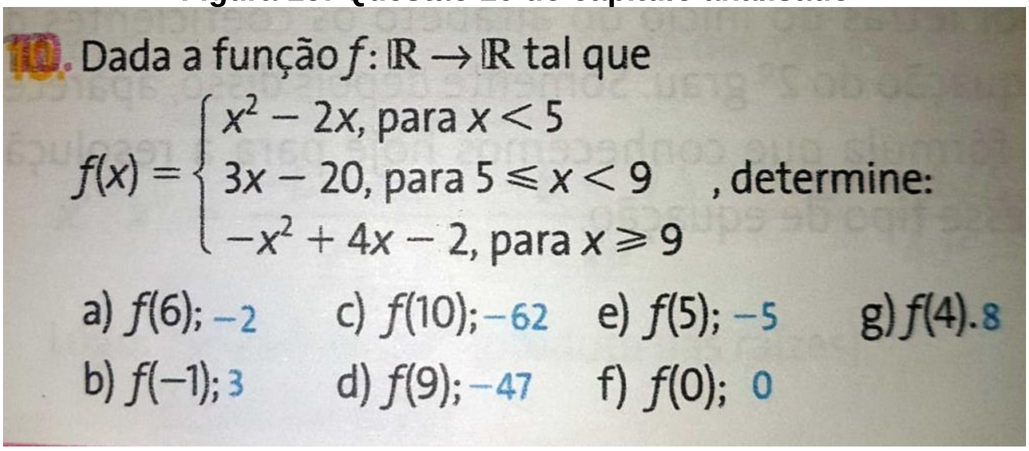
Fonte: Dante (2016, p.104)

Ainda que não esteja colocada como uma pergunta, o autor apresenta uma situação usando o registro de língua natural, a situação passa por um processo de conversão para o registro de tabela e passa ainda por um último processo de conversão, representado na própria tabela, para o registro algébrico. Note que quadro “para refletir” o aluno precisa proceder um tratamento dentro do registro algébrico para responder o que se pede. Pensando no aprendizado em matemática, esse seria um item extremamente relevante, visto que envolve dois processos conversão de registros de representação, com a ressalva que tudo isso, com exceção do quadro “para refletir”, foi resolvido pelo próprio autor.

A terceira seção **“Valor ou imagem da função quadrática em um ponto”** apresenta onze exercícios no total, sendo que um destes é um exercício resolvido. Nessa seção, oito exercícios – incluindo o exercício resolvido – envolvem o processo de tratamento dentro do próprio registro de linguagem algébrica. Nestes itens temos a predominância de situações cuja solução consiste simplesmente substituir$x$ ou $f(x)$ por um valor pré-determinado e, posteriormente, solucionar uma equação. Os outros três exercícios envolvem um processo de conversão em sua resolução, sendo que dois deles exige a conversão do registro de figura para o registro algébrico e um deles exige a conversão do registro de língua natural para o registro algébrico e neste último um posterior tratamento.

Destacamos abaixo dois enunciados desta seção:

Figura 15: Questão 10 do capítulo analisado



10. Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ para } x < 5 \\ 3x - 20, \text{ para } 5 \leq x < 9 \\ -x^2 + 4x - 2, \text{ para } x \geq 9 \end{cases}, \text{ determine:}$$

a) $f(6)$; -2 c) $f(10)$; -62 e) $f(5)$; -5 g) $f(4)$. 8

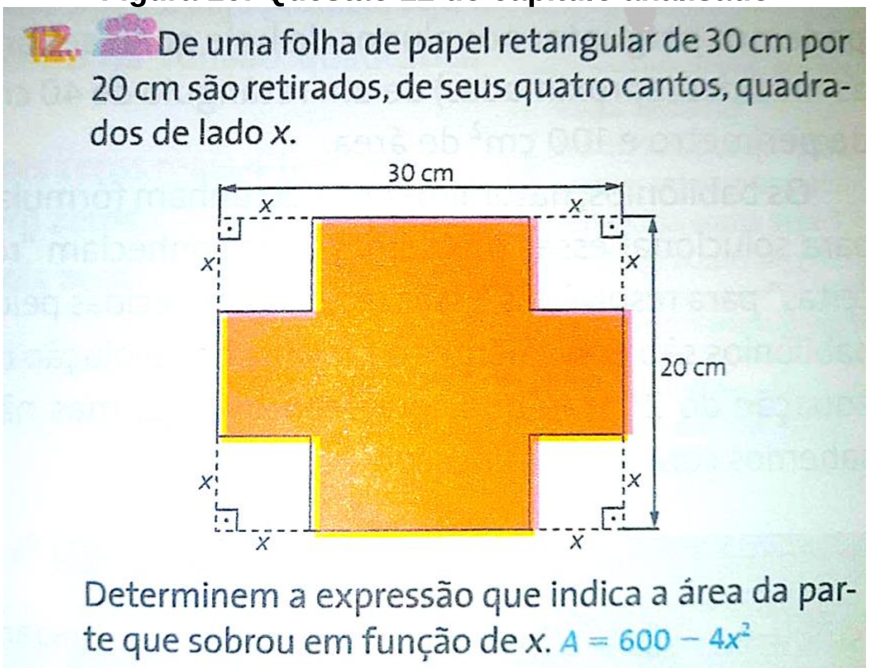
b) $f(-1)$; 3 d) $f(9)$; -47 f) $f(0)$; 0

Fonte: Dante (2016, p.105)

Uma solução para o item 10 – d: Para determinar o $f(9)$ temos que inicialmente verificar que a lei de formação quando o domínio da função é $x = 9$ é dado por $f(x) = -x^2 + 4x - 2$. Desta forma basta agora substituir adequadamente: $f(9) = -(9)^2 + 4.(9) - 2 \Rightarrow f(9) = -47$.

Apesar deste problema ser um entre vários desta seção cuja solução consiste na substituição da variável x por um valor específico, como se trata de uma função com mais de uma lei de formação, antes de fazer a substituição, o estudante deve inicialmente analisar o domínio da função, o que torna a tarefa um pouco mais complexa. Classificamos esse problema como um problema de tratamento, mais especificamente, tratamento dentro do registro algébrico. Reconhecemos que problemas deste tipo são também importantes dentro do processo de aprendizagem deste objeto matemático, desde que, não haja um excesso na proposição deste tipo de problema.

Figura 16: Questão 12 do capítulo analisado



12. De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado x.

Determinem a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x. $A = 600 - 4x^2$

Fonte: Dante (2016, p.105)

Uma solução para o item 12: Começamos com o cálculo da área da folha antes de serem removidos os pedaços em cada canto. $A = 30.20 = 600cm^2$. Em cada canto foi retirado um pedaço de formato quadrangular com lado $x\ cm$. Desta forma, a área de cada pedaço é dada por x^2cm^2. Todavia, como quatro pedaços foram retirados a área será dada por $A = 600 - 4x^2$.

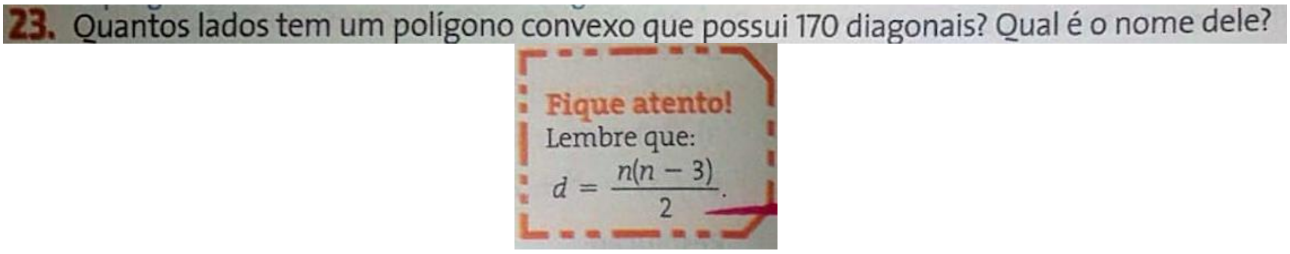
Entendemos que o processo envolvido nessa questão é o de conversão, para solucionar a questão foi realizada a conversão do registro de figura para o registro algébrico. Vale salientar que o problema poderia ser resolvido sem a presença da figura, somente com o enunciado em língua natural, o aluno poderia, claro que com um grau de complexidade maior, chegar a configuração da situação por meio de uma figura. Ou seja, o problema poderia envolver dois processos de conversão, mas, por escolha do autor, o primeiro processo de conversão já foi apresentado, o aluno parte, portanto, da figura o que simplifica de forma evidente a resolução do problema. Ainda assim, dentro da perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é um problema extremamente relevante.

A quarta seção, cujo título é **"zeros da função quadrática"**, tem um total de 23 exercícios, são dez exercícios resolvidos e treze exercícios propostos pelo autor. Para determinar os zeros da função o autor apresenta alguns métodos: O uso da "fórmula de Bhaskara", a resolução pelo método da soma e produto das raízes, fatoração e isolar, quando possível, a incógnita. Os problemas que ele apresenta são todos de aplicação destes métodos.

Todos os exercícios resolvidos são exercícios de tratamento dentro do registro algébrico, mas em um dos itens o autor justifica suas soluções de forma geométrica, ele faz, portanto, uma conversão do registro algébrico para o registro de figura apenas como um processo de justificativa, ainda que o enunciado não a peça. Dos treze itens sugeridos para resolução, são dez itens que envolvem o procedimento de tratamento dentro do registro algébrico e ainda outros três itens que envolvem o procedimento de conversão do registro de língua natural para o registro algébrico e posterior tratamento.

Vamos analisar alguns enunciados desta seção:

Figura 17: Questão 23 do capítulo analisado

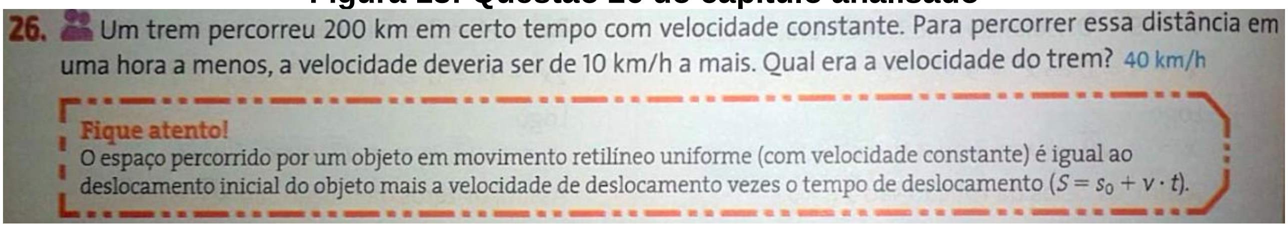


23. Quantos lados tem um polígono convexo que possui 170 diagonais? Qual é o nome dele?

Fique atento!
Lembre que:
$d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Fonte: Dante (2016, p.112)

Figura 18: Questão 26 do capítulo analisado



26. Um trem percorreu 200 km em certo tempo com velocidade constante. Para percorrer essa distância em uma hora a menos, a velocidade deveria ser de 10 km/h a mais. Qual era a velocidade do trem? 40 km/h

Fique atento!
O espaço percorrido por um objeto em movimento retilíneo uniforme (com velocidade constante) é igual ao deslocamento inicial do objeto mais a velocidade de deslocamento vezes o tempo de deslocamento ($S = s_0 + v \cdot t$).

Fonte: Dante (2016, p.112)

Ambos os problemas acima poderiam inicialmente serem entendidos como problemas que partem do registro língua natural para o registro algébrico/numérico, sendo assim problemas que envolveriam um processo de conversão. Todavia, em ambas as situações o autor apresenta um quadro “fique atento” no qual apresenta para o aluno um ponto de partida totalmente algébrico. Após a apresentação deste quadro, cabe ao aluno apenas e tão somente, escolher adequadamente as variáveis para fazer as substituições e resolver o problema. Ainda assim, consideramos ambos os enunciados excelentes contextos para o que se pretende ensinar nesta unidade, todavia, em nosso entendimento, o quadro “fique atento” de certa forma elimina a possibilidade de investigação, pesquisa e construção que os exercícios oferecem. Considerando tudo isto, concluímos que ambos os problemas acima são problemas que envolvem um processo de tratamento dentro do registro algébrico.

Um outro problema desta seção:

Figura 19: Questão 25 do capítulo analisado

25. Renata tem 18 anos e Lígia, 15. Daqui a quantos anos o produto de suas idades será igual a 378? Daqui a 3 anos.

Fonte: Dante (2016, p.112)

Uma solução para o item 25: Como Renata tem 18 anos, daqui a x anos, ela terá $(18+x)$anos. Sendo x uma quantidade desconhecida. De forma análoga, como Lígia tem 15 anos, daqui a x anos ela terá $(15+x)$ anos. Queremos um x de forma que o produto da idade de ambas quando passarem x anos seja 378. Desta forma queremos x tal que:$(18+x).(15+x)=378 \Rightarrow\ x^2+33x+270=378 \Rightarrow x^2+33x-108=0.$ Para solucionar essa equação usaremos o método da soma e produto das raízes (um dos métodos sugeridos pelo autor): soma das raízes= $\frac{-b}{a}=\frac{-33}{1}=-33$ e o produto das raízes $=\frac{c}{a}=\frac{-108}{1}=\ -108$. Desta forma,$x'=3\ e\ x''=-36$(resultado que não convém para essa situação). Logo, daqui a 3 anos o produto das idades de Lígia e Renata será igual a 378.

O problema acima tem enunciado apresentado em totalmente em língua natural, apesar de alguns dados numéricos, para solucionar a estudante precisa "traduzir" o que se apresenta para a linguagem algébrica. Desta forma na solução acima apresentada, o aluno faz uma conversão do registro de língua natural para a linguagem algébrica. Chama atenção o fato que, após feita essa conversão, o aluno precisa escolher aquela que para ele será a melhor forma de fazer o tratamento desta questão para chegar a solução final.

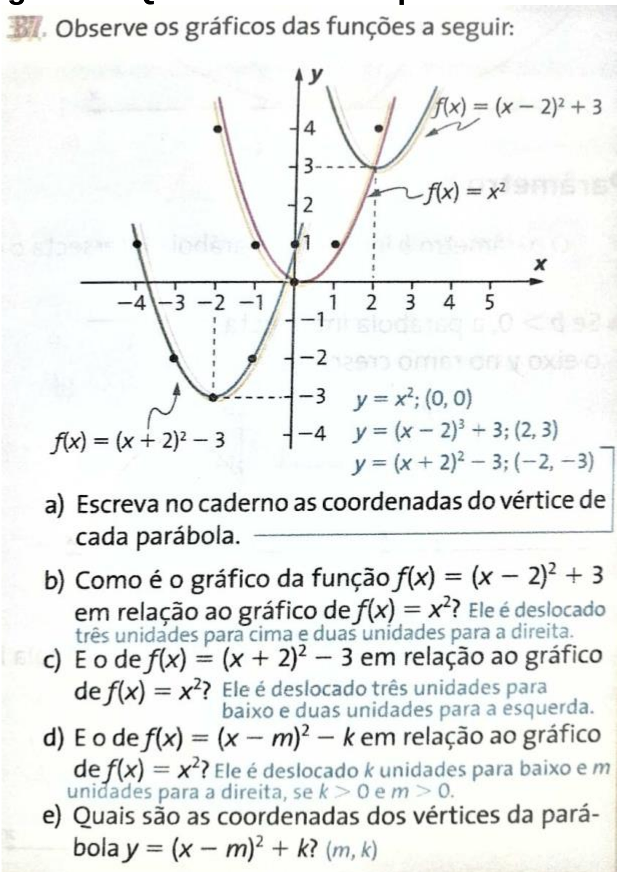
Na quinta seção, cujo tema é **"gráfico da função quadrática"**, o autor começa afirmando que este gráfico é sempre uma parábola, apresentando inclusive os elementos da parábola, mas não faz nesse momento uma demonstração formal, ele mostra isso com diversos exemplos. Nesse capítulo o autor separa um bom espaço para a apresentação da forma canônica da função quadrática, mostrando inclusive a relação direta que esta representação tem com a representação gráfica da função, mais tarde o autor volta a destacar esse assunto numa seção extra. Fato que consideramos muito relevante, tendo em vista que consideramos, como havíamos falado no capítulo anterior, a exploração da forma canônica um caminho para diversas demonstrações a respeito da função quadrática.

Na apresentação deste tema o autor faz todo um percurso: Inicialmente ele analisa o gráfico da função $f(x) = x^2$ em seguida acrescenta somente o coeficiente a, ou seja, faz a análise do gráfico $f(x) = ax^2$, em seguida faz a análise do gráfico da função $f(x) = ax^2 + k$, depois faz do gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$, a seguir o autor analisa $f(x) = a(x - m)^2 + k$ que seria equivalente a forma canônica da função sendo m a abscissa do vértice e k a ordenada do vértice da função. Só então finalmente o autor apresenta o gráfico da função na forma geral: $f(x) = ax^2 + bx + c$, fazendo a análise de como cada coeficiente impacta o gráfico da função.

Esta seção apresenta treze exercícios, um resolvido e doze propostos pelo autor. O exercício resolvido é um exercício de tratamento dentro do registro gráfico. Com relação aos exercícios propostos, nenhuma seção até então teve tão variado repertório de exercícios que envolvessem a conversão de registros de representação quanto esta, são três exercícios de conversão do registro algébrico para o registro gráfico e posterior tratamento, dois exercícios de conversão do registro algébrico para o registro gráfico, dois exercícios de tratamento dentro do registro algébrico, dois exercícios de tratamento dentro do registro gráfico e três exercícios de conversão do registro gráfico para o registro algébrico**.** Em particular chamou-nos atenção o fato de que enunciados do tipo “esboce os gráficos das funções a seguir” apareceram muito pouco neste capítulo, é extremamente positivo e o sentido no qual as conversões ocorrem, não é somente do registro algébrico para o registro gráfico, temos também o sentido oposto explorado em alguns exercícios.

Vamos analisar dois enunciados desta seção:

Figura20: Questão 37 do capítulo analisado


37. Observe os gráficos das funções a seguir:

a) Escreva no caderno as coordenadas do vértice de cada parábola.

b) Como é o gráfico da função $f(x) = (x-2)^2 + 3$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Ele é deslocado três unidades para cima e duas unidades para a direita.

c) E o de $f(x) = (x+2)^2 - 3$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Ele é deslocado três unidades para baixo e duas unidades para a esquerda.

d) E o de $f(x) = (x-m)^2 - k$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Ele é deslocado k unidades para baixo e m unidades para a direita, se $k > 0$ e $m > 0$.

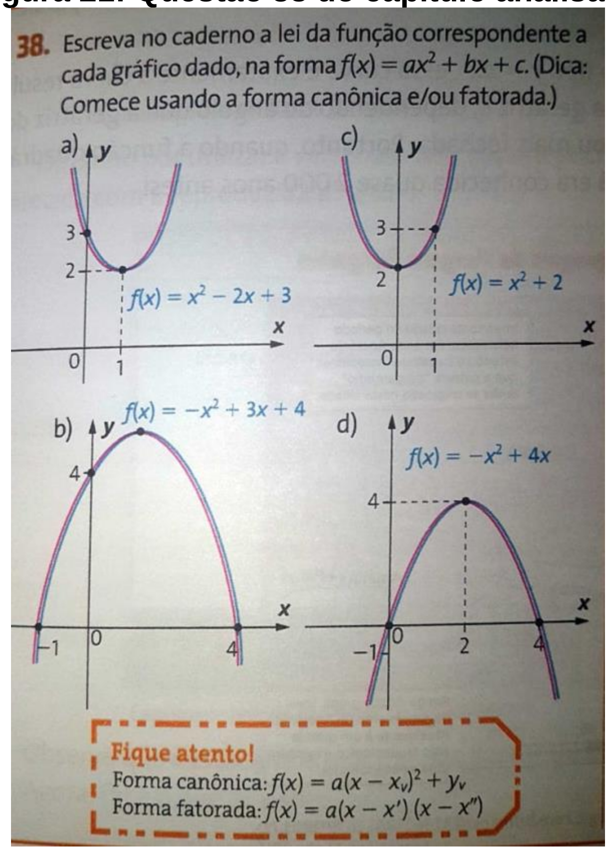
e) Quais são as coordenadas dos vértices da parábola $y = (x-m)^2 + k$? (m, k)

Fonte: Dante (2016, p.117)

Uma solução para o item 37: A) Basta observar as coordenadas de cada um dos vértices, sendo assim da função $f(x) = x^2$ as coordenadas são $(0{,}0)$, da função $f(x) = (x+2)^2 - 3$ as coordenadas são $(-2, -3)$ e finalmente da função $f(x) = (x-2)^2 + 3$ as coordenadas são $(2{,}3)$. B) comparando os gráficos de $f(x) = (x-2)^2 + 3$ e $f(x) = x^2$, o primeiro gráfico foi deslocado duas unidades para direita e três unidades para cima em relação ao segundo. C) comparando os gráficos de $f(x) = (x+2)^2 - 3$ e $f(x) = x^2$, o primeiro gráfico foi deslocado duas unidades para esquerda e três unidades para baixo em relação ao segundo. D) comparando os gráficos de $f(x) = (x-m)^2 - k$ e $f(x) = x^2$, o primeiro gráfico foi deslocado m unidades para direita e k unidades para baixo em relação ao segundo se $m > 0$ e $k > 0$. Essa resposta pode ser obtida pela análise dos itens anteriores, se $m \; e \; k$ são números positivos, teremos situações análogas aos itens b e c para concluir o que se pede. E) Também observando o item a, podemos de forma análoga concluir que o vértice da função $f(x) = (x-m)^2 + k$ é dado pelo ponto (m, k).

A análise da questão acima foi realmente desafiadora, o enunciado foi apresentado partindo do registro gráfico das funções e todas as soluções foram apresentadas recorrendo aos registros de língua natural e algébrico. Inicialmente classificamos o exercício como um exercício de tratamento dentro do registro gráfico**,** visto que inicialmente quase todos os itens podem ser concluídos a partir do próprio gráfico. Mas, uma análise mais cuidadosa nos leva a concluir que o principal procedimento envolvido nos itens deste problema é a conversão do registro gráfico para o registro algébrico (item A) e para o registro de língua natural (itens B e C) e posterior tratamento (itens D e E), note que o aluno precisa de fato recorrer a outro tipo de registro para explicar o que ele vê no gráfico nas questões A, B e C. Na questão A a representação de um ponto graficamente e depois algebricamente por meio das coordenadas, nos itens B e C o aluno precisa recorrer à língua natural para explicar o que se vê no gráfico e os itens D e Entendemos como uma generalização dos itens iniciais são, portanto, itens de tratamento.

Figura 21: Questão 38 do capítulo analisado



Fonte: Dante (2016, p.119)

Uma solução para o item 38 – a: Usaremos para responder esse item a primeira dica dada pelo autor no quadro "fique atento". Como o vértice da parábola está no ponto $(1,2)$, a função que tem vértice neste ponto será dada por: $f(x) = a(x-1)^2 + 2 \Rightarrow f(x) = ax^2 - 2ax + a + 2$. Usaremos agora o fato de que o ponto $(0,3) \in ao\ gráfico\ de\ f$, ou seja,

$f(0) = 3$. Assim, $a.0^2 + 2a.0 + a + 2 = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$. Desta forma a função será dada por $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Uma solução para o item 38 – c: Usaremos agora a segunda dica dada pelo autor no quadro "fique atento". As raízes da função f que estamos procurando têm coordenadas $(-1,0)\ e\ (4,0),$ assim a função será dada por: $f(x) = a(x + 1)(x - 4) \Rightarrow f(x) = ax^2 - 3ax - 4a$. Usaremos agora o fato de que o ponto $(0,4) \in ao\ gráfico\ de\ f$, ou seja, $f(0) = 4$. Assim, $f(x) = a.0^2 - 3a.0 - 4a = 4 \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1$. Desta forma a função será dada por $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

Nesta questão 39, vemos um item extremamente relevante quando pensamos a transformação de registros de representação. Para solucionar a questão parte-se da representação gráfica para a representação algébrica da função, ou seja, não é difícil observar que o processo de transformação envolvido aqui é o de conversão, mais precisamente conversão do registro gráfico para o registro algébrico**.**

Todavia, chama-nos mais uma vez atenção o quadro "fique atento", a princípio poderíamos pensar que este quadro trás um novo ponto de partida totalmente algébrico, contudo, o aluno mesmo usando este quadro, terá que "traduzir" para a linguagem algébrica informações contidas exclusivamente no gráfico da função. Ainda assim, o quadro "fique atento", conduz o aluno a um tipo de resposta predeterminado, pensamos que, após analisar o quadro, muito dificilmente um aluno recorreria a uma solução com o uso, por exemplo, de um sistema de equações. Dessa forma podemos afirmar que o quadro impede que o aluno mobilize diferentes tipos de representação do objeto matemático.

A sexta seção do capítulo de funções quadráticas é intitulada **"Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos"**. Nesta seção o autor não apresenta nenhum exercício resolvido, mas propõe sete itens para resolução. Destes, um deles é um exercício de conversão do registro algébrico para o registro gráfico, outros cinco itens são de tratamento dentro do registro algébrico e um item de tratamento dentro do registro gráfico. Separamos dessa seção dois enunciados para analisar com um pouco mais de atenção:

Figura 22: Questão 41 do capítulo analisado

41. Verifique quais dos seguintes pontos pertencem à parábola que representa graficamente a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$:

x a) $A(2, 0)$

x b) $B(4, 2)$

c) $C(-1, 10)$

Fonte: Dente (2016, p.125)

Uma solução para o item 41: Para verificar se os pontos A, B *ou* Cpertencem a parábola que representa graficamente a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, vamos determinar o valor do $f(2), f(4)$ *e* $f(-1)$ e assim verificar se os valores conferem. Assim temos:

I. $f(2) = 2^2 - 5.(2) + 6 \Rightarrow f(2) = 0$, logo, $A(2,0)$ pertence a parábola.

II. $f(4) = 4^2 - 5.(4) + 6 \Rightarrow f(4) = 2$, logo, $B(4,2)$ pertence a parábola.

III. $f(-1) = (-1)^2 - 5.(-1) + 6 \Rightarrow f(-1) = 12$, logo, $C(-1,10)$não pertence a parábola.

Note que no problema acima temos um enunciado que parte da representação algébrica da função e para chegar ao resultado, foi em todos os casos aplicado um tratamento dentro registro algébrico. Todavia, esse mesmo problema poderia ser resolvido por meio uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico e posterior tratamento, salientando que se o aluno o fizer usando um meio eletrônico, como por exemplo, o Geogebra[10], seria imediato notar se os pontos em questão pertencem ou não a parábola se, entretanto, a conversão for feita manualmente, ao traçar a parábola o aluno pode não fazê-lo de forma exatamente minuciosa o que prejudicaria a verificação do problema sendo, portanto, a verificação algébrica mais "segura" nesse caso.

Figura 23: Questão 46 do capítulo analisado

46. O gráfico abaixo representa uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Então, podemos afirmar que:

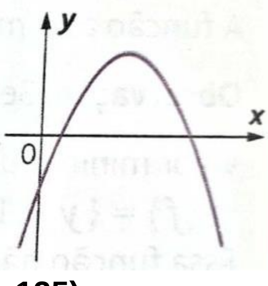
a) $a > 0, b^2 = 4ac, c > 0$ e $b < 0$.

x b) $a < 0, b^2 > 4ac, c < 0$ e $b > 0$.

c) $a < 0, b^2 < 4ac, c < 0$ e $b > 0$.

d) $a < 0, b^2 > 4ac, c > 0$ e $b > 0$.

e) $a < 0, b^2 < 4ac, c < 0$ e $b < 0$.



Fonte: Dante (2016, p.125)

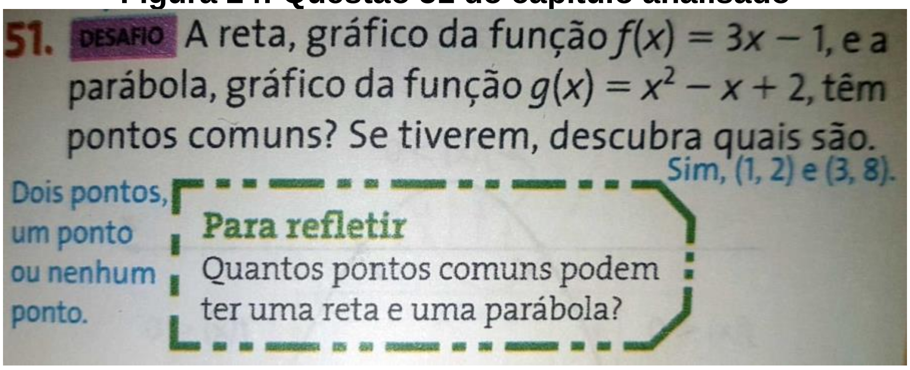
[10]Software de geometria dinâmica gratuito

Uma solução para o item 46: Inicialmente, não é difícil notar que a parábola tem concavidade para baixo, então $a < 0$. A segunda constatação é de que o gráfico intersecta duas vezes o eixo x, portanto, a função admite duas raízes distintas e desta forma$\Delta > 0$, logo, $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$. A terceira constatação é que o gráfico intersecta o eixo y na parte negativa, logo, $c < 0$. Por último, como a abscissa do vértice da parábola é positiva, isto implica diretamente que $b > 0$, isto deve-se ao fato que $x_v = \frac{-b}{2a}$, como a é um número negativo, o resultado acima, portanto, fica verificado.

É imediato notar que se trata de um problema de múltipla escolha, problemas deste tipo não tinham aparecido nenhuma vez até então nesta unidade. O problema parte da representação gráfica de uma função e todas as respostas são obtidas a partir do próprio gráfico. Portanto, o processo de transformação envolvido nesse problema é o de tratamento dentro do registro gráfico. Apesar de defendermos neste trabalho a importância dos processos de conversão, entendemos que itens como este que analisamos são muito relevantes para a compreensão e domínio do objeto matemático em questão.

A sétima seção tem como título **"Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática"**, o autor apresenta quatro exercícios resolvidos e treze itens propostos para resolução. Todos os itens resolvidos são exercícios de tratamento dentro do registro algébrico, já os itens propostos são divididos da seguinte forma: nove itens são de tratamento dentro do registro algébrico, três envolvem conversão do registro algébrico para o registro gráfico e posterior tratamento e dois são itens de conversão do registro de língua natural para o registro algébrico. Todavia, um item que foi apresentado como item de tratamento pode ser solucionado também por meio de conversão do registro algébrico para o registro gráfico e posterior tratamento. Vamos analisar dois enunciados desta seção:

Figura 24: Questão 51 do capítulo analisado



51. DESAFIO A reta, gráfico da função $f(x) = 3x - 1$, e a parábola, gráfico da função $g(x) = x^2 - x + 2$, têm pontos comuns? Se tiverem, descubra quais são.

Sim, (1, 2) e (3, 8).

Para refletir

Quantos pontos comuns podem ter uma reta e uma parábola?

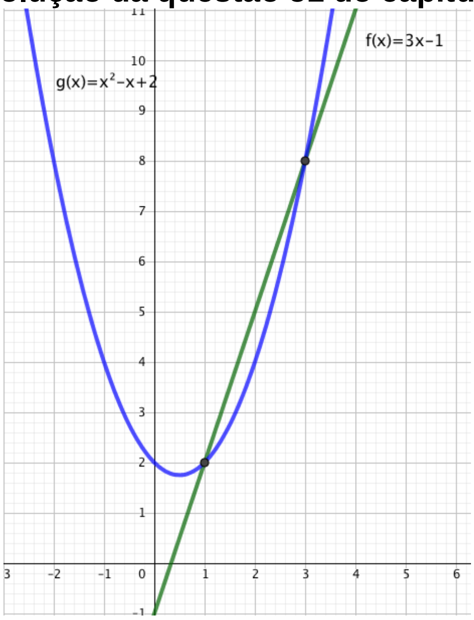
Dois pontos, um ponto ou nenhum ponto.

Fonte: Dante (2016, p.129)

Uma solução para o item 51: Queremos determinar quando $f(x) = g(x)$, assim queremos $x^2 - x + 2 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Sendo assim, $x_1 = 3\ e\ x_2 = 1$. Sendo assim bastaria calcular $f(1) = 2$ e $f(3) = 8$, cujos valores são os mesmos que $g(1) = 2$ e $g(3) = 8$. Desta forma, $(1,2)$ e $(3,8)$ são os pontos em comum entre a reta e a parábola.

Outra solução para o item 51: Vamos representar em um mesmo plano os gráficos das funções $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2 - x + 2$ como segue:

Figura 25: Solução da questão 51 do capítulo analisado

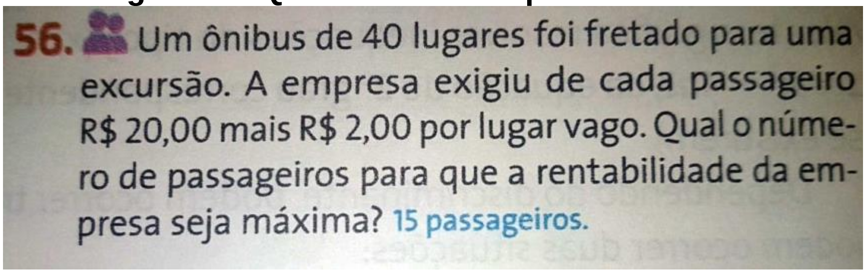


Fonte: O autor.

Desta forma temos que $(1,2)$ e $(3,8)$ são os pontos procurados.

Como vimos, o problema acima parte da representação algébrica de duas funções e para solucionar o problema dois caminhos se apresentam. O processo de transformação pode ser somente um tratamento dentro do registro algébrico ou mesmo o de conversão da linguagem algébrica para o registro gráfico e posterior tratamento. Esse tipo de exercícios dentro da perspectiva que discutimos nesse trabalho é extremamente relevante, visto que permite ao professor explorar diversos aspectos da resolução de um exercício e da importância de transitar entre vários tipos de registros de representação de um mesmo objeto.

Figura 26: Questão 56 do capítulo analisado



56. Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R$ 20,00 mais R$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? 15 passageiros.

Fonte: Dante (2016, p.129)

Uma solução para o item 56: Seja$x$o número de lugares vagos no ônibus. Desta forma o número de pessoas que vão ao passeio será dado por $(40 - x)$ e o preço a ser pago pelo passeio será de $(20 + 2x)$. Assim, o preço $p(x)$ será dado por $p(x) = (40 - x)(20 + 2x)$. Desenvolvendo podemos representar a função por $p(x) = -2x^2 + 60x + 800$. Queremos inicialmente determinar qual o valor de x para que o valor de p seja máximo, desta forma estamos buscando a abscissa do vértice da parábola desta função, a abscissa do vértice será dada por $x_v = \frac{-30}{-2} = 15$. Como o número de pessoas que vão ao passeio é dado por $40 - x = 40 - 15 = 25$, esse é o número de passageiros para que a rentabilidade seja a maior possível.

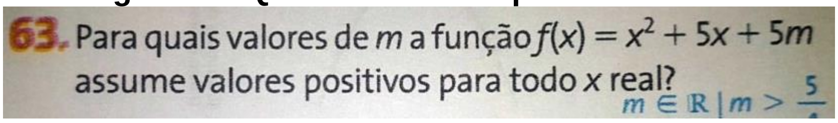
O problema acima tem enunciado que parte totalmente do registro de língua natural ainda que apresente dados numéricos para resolução processo de transformação envolvido é o de conversão para o registro algébrico e um posterior tratamento, o estudante precisa por meio de manipulações chegar ao estabelecimento de uma função que sendo tratada o conduzirá a resolução do problema. Insistimos na relevância que esse tipo de problema tem para a aprendizagem.

A oitava seção tem como título **“Estudo do sinal da função quadrática e inequações de 2º grau”**. Para apresentar o estudo do sinal o autor, semelhante ao que fizemos no capítulo anterior apresenta basicamente três casos, que são quando o discriminante Δ é menor, igual ou maior do que zero, toda a parte de inequações é basicamente apresentada por meio de exercícios resolvidos. Esta seção apresenta ao todo seis exercícios resolvidos e onze situações propostas.

Todos os exercícios resolvidos todos seguem o seguinte caminho de transformação: Conversão da linguagem algébrica para o registro gráfico e um posterior tratamento, o que nos chama atenção é o fato de que converter em todos os casos é uma escolha do autor usando o que ele chama de “dispositivo prático”, com aquilo que foi apresentado por ele no início da unidade poderíamos aplicar um tratamento dentro do registro algébrico em todos os casos, mas a conversão para o registro gráfico facilita muito a visualização da solução. Isso nos faz retomar o que diz Duval (2003): “A conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes ou para obter um segundo registro que serve como suporte” (DUVAL, 2003, p.16).

Dos onze enunciados propostos pelo autor, sete são itens cujos procedimentos de solução envolvem conversão do registro algébrico para o registro gráfico e posterior tratamento e quatro trabalham o tratamento dentro do registro algébrico. Vamos analisar dois enunciados dessa seção.

Figura 27: Questão 63 do capítulo analisado



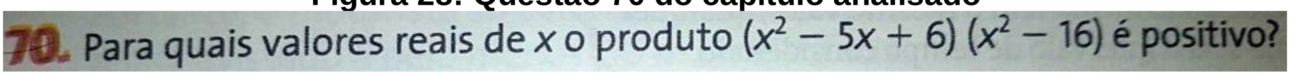
63. Para quais valores de m a função $f(x) = x^2 + 5x + 5m$ assume valores positivos para todo x real? $m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{5}{4}$

Fonte: Dante (2016, p.132)

Uma solução para o item 63: Para que a função $f(x) = x^2 + 5x + 5m$ que é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c,$ seja positiva para todo x real, o discriminante Δ deve ser sempre menor do que zero dado que a concavidade é voltada para cima e desta forma a função não intersectaria o eixo das abscissas em nenhum ponto. Não é difícil notar que $a = 1, b = 5\ e\ c = 5m$ sendo assim queremos $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 5^2 - 4.1.5m < 0 \Rightarrow 25 - 20m < 0 \Rightarrow -20m < -25 \Rightarrow 4m > 5 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$. Assim concluímos que x será sempre positivo toda vez que $m > \frac{5}{4}$.

Temos aqui um clássico item cujo enunciado oferece um ponto de partida algébrico e durante todo o trajeto, ainda que façamos justificativas usando língua natural, aplicamos tratamentos que não extrapolam esse tipo de linguagem, desta forma o processo de resolução envolvido neste caso é o tratamento dentro do registro algébrico.

Figura 28: Questão 70 do capítulo analisado

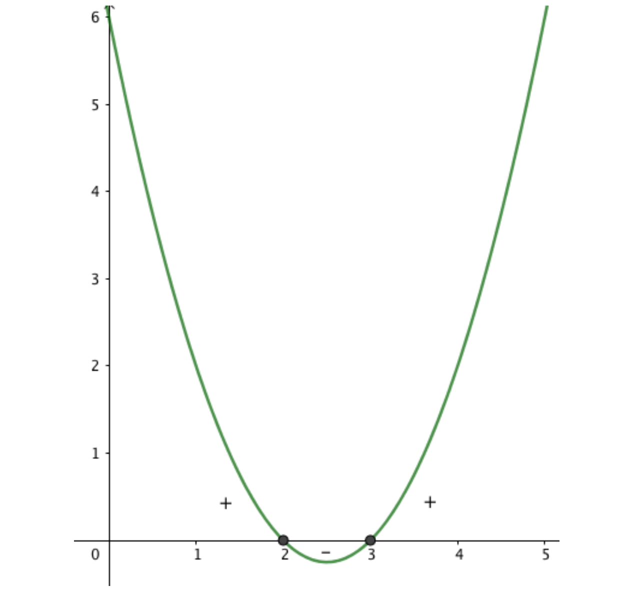
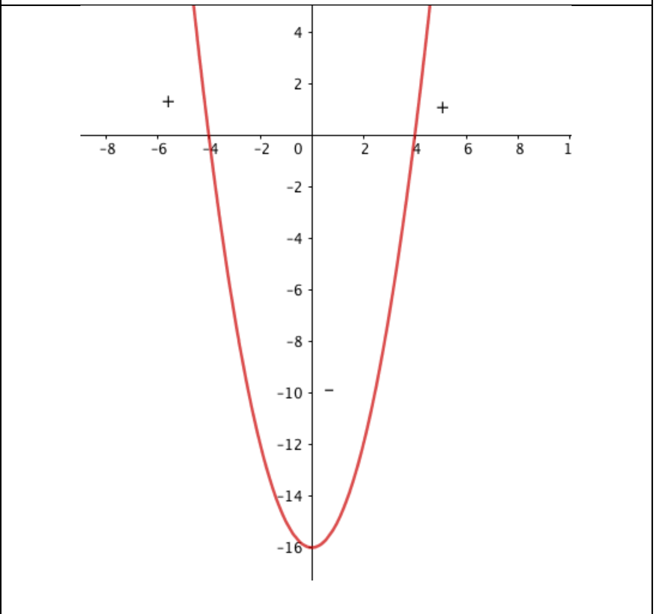


70. Para quais valores reais de x o produto $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16)$ é positivo?

Fonte: Dante (2016, p.133)

Uma solução para o item 70: Queremos saber para quais valores de $x$temos $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16) > 0,$ façamos $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x^2 - 16$, desta forma $f(x).g(x) > 0$ sempre que $f(x)\ e\ g(x)$ forem ambas positivas ou ambas negativas. Vamos a seguir analisar a representação gráfica de ambas as funções. Assim temos:

Quadro 11: Comparação entre as funções f e g do item 70 do livro analisado

$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$g(x) = x^2 - 16$
	

Fonte: O autor.

Assim não é difícil notar que:

I. $f(x) > 0$, quando $x < 2 \text{ ou } x > 3$. E $f(x) < 0$, quando $2 < x < 3$.

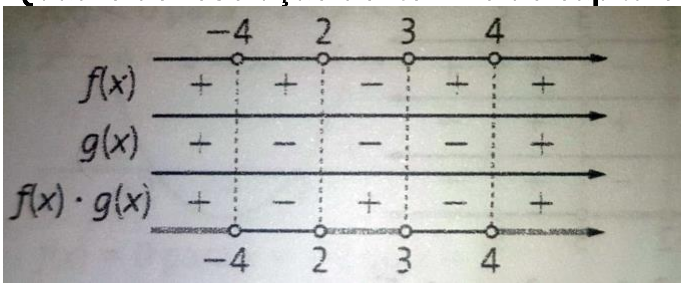
II. $g(x) > 0$, quando $x < -4 \text{ ou } x > 4$. E $g(x) < 0$ quando $-4 < x < 4$.

Desta forma nos resta analisar em quais intervalos as funções são ambas positivas ou ambas negativas. Uma análise cuidadosa nos leva a seguinte conclusão: $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -4 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4\}$.

Pensamos que, o problema acima, apresenta um grau elevado de complexidade para um aluno de ensino médio, pois são muitos passos envolvidos para a resolução. Inicialmente para responder, fizemos a conversão do registro algébrico para o registro gráfico e a seguir um tratamento dentro do registro algébrico. Note que, todo esse processo envolve escolhas, a tendência é de que um aluno resolva seguindo esses mesmos passos porque todos os exercícios resolvidos dessa unidade apresentam esse processo de resolução.

Todavia, no caminho sugerido pelo autor para a solução desse problema há, em nosso entendimento, um outro processo de conversão, a conversão das informações do gráfico para um outro tipo de representação gráfica que leva em conta somente o sinal da função em alguns intervalos críticos, muito semelhante a uma tabela. Essa conversão é de certa forma bem familiar para os estudantes e professores de 1ª série do ensino médio, como apresentamos a seguir:

Figura 29: Quadro de resolução do item 70 do capítulo analisado



Fonte: Dante (2016)

Note que nesse tipo de representação temos marcado nas retas numéricas as raízes das duas funções analisadas e são colocados os sinais de cada função naquele intervalo específico e logo após o sinal do produto entre elas, tornando, em nossa visão, é muito mais fácil a visualização do intervalo que representa o conjunto solução deste problema.

A nona seção tem como tema **"Conexão entre função quadrática e Física"**. A presença de uma seção com essa temática confirma uma vocação que o objeto matemático função quadrática tem, que é a possibilidade de se relacionar com outras áreas do conhecimento, sobretudo a área de ciências da natureza. Nesta seção são três exercícios resolvidos e três enunciados propostos, os três exercícios resolvidos são todos de conversão do registro de língua natural para o registro algébrico, todavia, em dois casos o autor apresenta uma segunda maneira de solucionar os problemas, mas desta vez usando uma conversão do registro de língua natural para o registro gráfico e uma segunda conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Os três itens propostos são todos de conversão do registro de língua natural para o registro algébrico, mas semelhantemente aos itens resolvidos, todos esses itens podem também serem solucionados usando o mesmo procedimento adotado em dois dos itens resolvidos. Vamos analisar um desses itens conversão do registro de língua natural para o registro gráfico e uma segunda conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Apresentaremos abaixo essas duas formas de solução:

Figura 30: Questão 73 do capítulo analisado

73. Partindo do repouso, um avião percorre a pista de decolagem com aceleração constante e atinge a velocidade de 360 km/h (100 m/s) em 20 s. Calcule:

a) o valor da aceleração desse avião (m/s^2); $a = 5\ m/s^2$

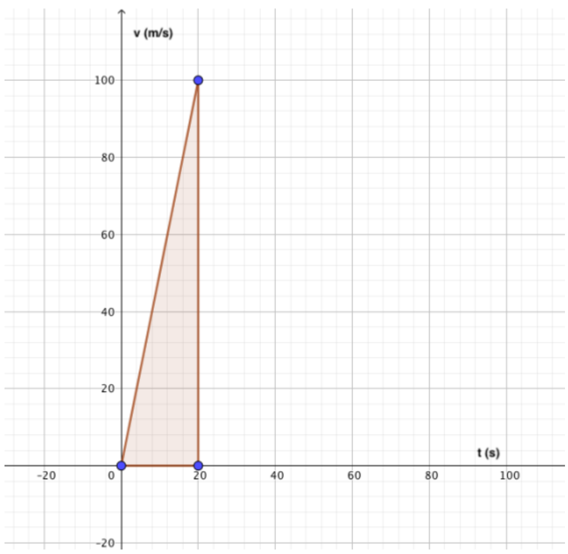
b) o comprimento mínimo da pista de decolagem para que o avião consiga decolar.

Fonte: Dante (2016, p.136)

Uma solução para o item 73 – b: Do item **a** temos que $V = v_o + at \Longrightarrow 100 = 0 + a.20 \Longrightarrow a = \frac{100}{20} = 5\ m/s^2$. Com relação ao item **b** temos que, $S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow S - S_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow \Delta S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, usando os dados fornecidos pelo enunciado e também pelo item **a**, temos: $\Delta S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0.20 + \frac{5.20^2}{2} = 0 + 1000 = 1000\ m = 1km$ que é, portanto, o comprimento mínimo da pista para a decolagem do avião.

Outra solução para o item 73 – b: Podemos também apresentar graficamente a solução para esse item$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{v}{20} \Rightarrow v = 100\ m/s$, essa, portanto é a velocidade após vinte segundos. Assim graficamente temos:

Figura 31: Resolução do item 73 – b do capítulo analisado



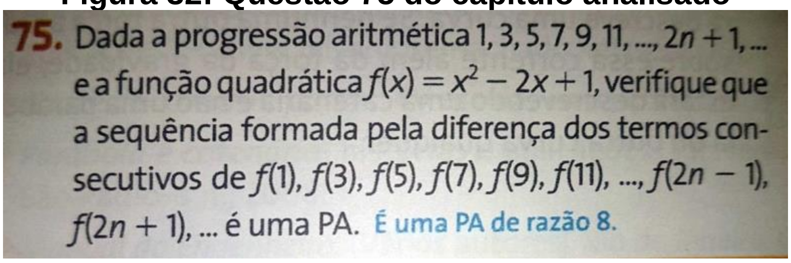
Fonte: O autor.

Desta forma, a área do polígono é equivalente ao deslocamento do avião na pista, como se trata de um trapézio temos: $A = \Delta S = \frac{b.h}{2} = \frac{20.100}{2} = 1000$. A área do polígono acima será equivalente ao tamanho da pista que é, portanto, $1000\,m = 1\,km$.

Como havíamos dito anteriormente para o item que solucionamos acima a primeira solução exigiu a conversão do registro de língua natural para registro algébrico com posterior tratamento e a segunda exige dois processos de conversão, inicialmente do registro de língua natural para o registro gráfico e a seguir do registro gráfico paro o registro algébrico. O aluno precisa, portanto, transitar entre os diversos tipos de registro de representação, o que torna esse item tão relevante.

Na décima seção, que tem como título **"conexão entre função quadrática e progressão aritmética"**, o autor não apresenta nenhum exercício resolvido e propõe para resolução quatro exercícios, todos são itens de tratamento dentro do registro algébrico. Curiosamente no livro didático analisado o autor apresenta o conteúdo de progressão aritmética depois do conteúdo de funções (inclusive a função quadrática), o que nos leva a duas possíveis interpretações: o professor pode por meio desses itens introduzir de forma perene esse assunto, ou mesmo, o professor pode mais tarde revisitar com os alunos esse capítulo para fazer essa relação entre os dois objetos matemáticos, ressalvando que nada impede que o professor apresente o conteúdo de progressão aritmética antes do conteúdo de funções quadrática. Selecionamos um dos enunciados dessa seção:

Figura 32: Questão 75 do capítulo analisado



75. Dada a progressão aritmética 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., $2n + 1$, ... e a função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + 1$, verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$, $f(11)$, ..., $f(2n - 1)$, $f(2n + 1)$, ... é uma PA. É uma PA de razão 8.

Fonte: Dante (2016, p.137)

Uma solução para o item 75: Manipulando adequadamente vamos determinar, portanto, $f(1) = 0,\ f(3) = 4,\ f(5) = 16,\ f(7) = 36,\ f(9) = 64,\ f(11) = 100,\ \ldots, f(2n-1) = 4n^2 - 8n + 4,\ f(2n+1) = 4n^2$. Temos a seguinte sequência: $0, 4, 16, 36, 64, 100, \ldots, 4n^2 - 8n +$

$4, 4n^2$. A sequência formada pelas diferenças dos termos consecutivos é dada por: $4, 12, 20, 28, 36, \ldots, 8n-4, \ldots$ que é obviamente uma PA de razão 8.

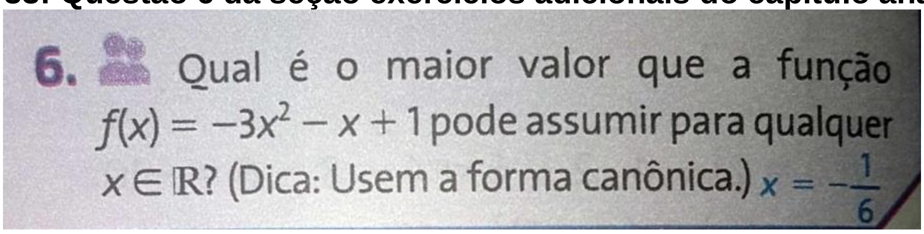
Como vimos, é um problema cujo ponto de partida é algébrico e a condução até a solução é toda feita sem extrapolar o uso deste tipo de registro de representação. Desta forma concluímos que o processo de transformação envolvido é o tratamento dentro do registro algébrico.

Após a décima seção da unidade de funções quadrática o autor ainda apresenta três seções extras, "um pouco mais" onde são exigidos alguns exercícios adicionais, "pensando no ENEM" e "vestibulares de norte a sul". A primeira é uma seção complementar aos temas que foram apresentados anteriormente e a duas últimas seções exclusivamente de exercícios.

A seção denominada **"um pouco mais"** apresenta dois temas, a resolução de uma equação do segundo grau usando o método de completar quadrados e a exploração da função quadrática em sua forma canônica. Muito importante o fato de o autor dedicar um espaço extra para tratar desses dois temas que são, pensando no objeto matemático função quadrática, tão relevantes. Nesta seção o autor propõe um exercício resolvido e seis exercícios propostos, tanto o exercício resolvido quantos os propostos são todos exercícios de tratamento dentro do registro algébrico.

Vamos analisar um dos enunciados dessa seção:

Figura 33: Questão 6 da seção exercícios adicionais do capítulo analisado


6. Qual é o maior valor que a função $f(x) = -3x^2 - x + 1$ pode assumir para qualquer $x \in \mathbb{R}$? (Dica: Usem a forma canônica.) $x = -\frac{1}{6}$

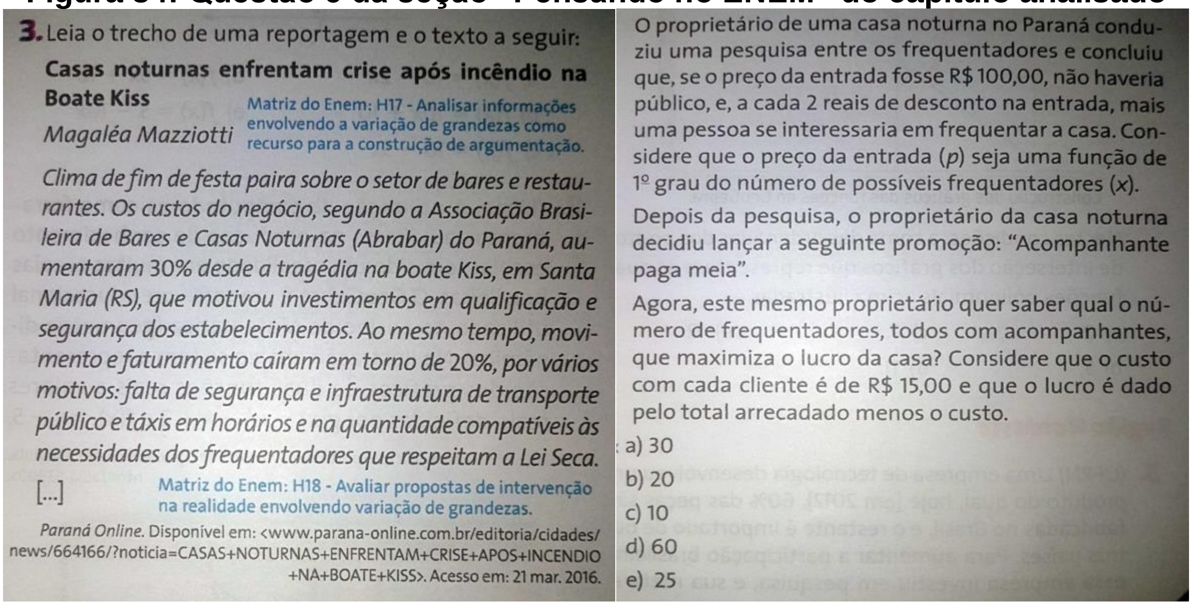
Fonte: Dante (2016, p.142)

Uma solução para o item 6: Usando a dica deixada pelo autor, queremos escrever a função $f(x) = -3x^2 - x + 1$ na forma canônica que é genericamente $f(x) = a(x-m)^2 + k$, onde m é a abscissa do vértice da parábola e k é a ordenada do vértice da parábola. Sendo assim, $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.(-3)} = -\frac{1}{6}$ e desta forma $k = f(m) = f\left(-\frac{1}{6}\right)$ e assim, $k = f\left(-\frac{1}{6}\right) = -3.\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 = -3.\left(\frac{1}{36}\right) + \frac{1}{6} + 1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{13}{12}$.

Temos acima mais uma questão cuja solução, até seguindo os moldes que foram discutidos, permanece totalmente dentro do registro algébrico, mais precisamente o processo de transformação envolvido é o tratamento dentro do registro algébrico. Sobre este item, mais especificamente, a solução foi apresentada seguindo a dica oferecida pelo autor, note que, a forma canônica revela diretamente qual é o valor da abscissa e qual é o valor da ordenada do vértice. Claro que este é um meio muito interessante e talvez o mais rápido de encontrar a solução para o problema, todavia, a dica direciona diretamente o estudante para esse caminho sem permitir que ele possa explorar outras formas de solução para o problema, como por exemplo, a representação gráfica desta função.

A seção apresentada logo na sequência, como dissemos anteriormente, é uma seção exclusiva de problemas, o título da seção é **"Pensando no Enem"**. O que flagrantemente nos chama atenção é tipo de enunciado, todos eles, comparados aos problemas que foram propostos até aqui, são muito maiores, exploram em geral a interpretação de textos, sendo que em dois dos três itens, além do enunciado na forma textual também é apresentada uma tabela. Esses enunciados apresentam talvez, uma tendência dos tipos de itens que são priorizados no Exame Nacional do Ensino Médio. Os três exercícios envolvem processos de conversão, sendo que em dois deles, o registro de partida é a tabela e o de chegada é o registro algébrico e no terceiro item o registro de partida é a língua natural e o de chegada é também o registro algébrico. Vamos analisar mais detalhadamente um dos itens desta seção:

Figura 34: Questão 3 da seção "Pensando no ENEM" do capítulo analisado



3. Leia o trecho de uma reportagem e o texto a seguir:

Casas noturnas enfrentam crise após incêndio na Boate Kiss

Magaléa Mazziotti

Matriz do Enem: H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

Clima de fim de festa paira sobre o setor de bares e restaurantes. Os custos do negócio, segundo a Associação Brasileira de Bares e Casas Noturnas (Abrabar) do Paraná, aumentaram 30% desde a tragédia na boate Kiss, em Santa Maria (RS), que motivou investimentos em qualificação e segurança dos estabelecimentos. Ao mesmo tempo, movimento e faturamento caíram em torno de 20%, por vários motivos: falta de segurança e infraestrutura de transporte público e táxis em horários e na quantidade compatíveis às necessidades dos frequentadores que respeitam a Lei Seca.

[...]

Matriz do Enem: H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Paraná Online. Disponível em: <www.parana-online.com.br/editoria/cidades/news/664166/?noticia=CASAS+NOTURNAS+ENFRENTAM+CRISE+APOS+INCENDIO+NA+BOATE+KISS>. Acesso em: 21 mar. 2016.

O proprietário de uma casa noturna no Paraná conduziu uma pesquisa entre os frequentadores e concluiu que, se o preço da entrada fosse R$ 100,00, não haveria público, e, a cada 2 reais de desconto na entrada, mais uma pessoa se interessaria em frequentar a casa. Considere que o preço da entrada (p) seja uma função de 1º grau do número de possíveis frequentadores (x).

Depois da pesquisa, o proprietário da casa noturna decidiu lançar a seguinte promoção: "Acompanhante paga meia".

Agora, este mesmo proprietário quer saber qual o número de frequentadores, todos com acompanhantes, que maximiza o lucro da casa? Considere que o custo com cada cliente é de R$ 15,00 e que o lucro é dado pelo total arrecadado menos o custo.

a) 30
b) 20
c) 10
d) 60
e) 25

Fonte: Dante (2016, p.143)

Uma solução para o item 3: Sendo x o número de frequentadores e p o preço a ser pago pelo ingresso, temos que este preço será dado pela seguinte relação $p = 100 - 2x$.

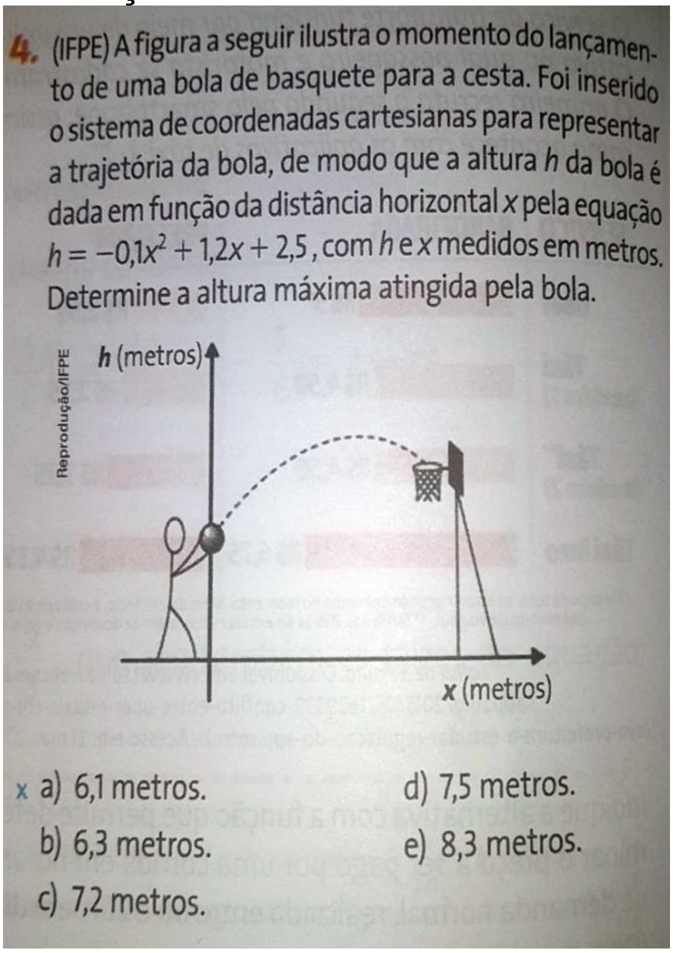
Chamaremos agora de $R(x)$ a receita que o dono do estabelecimento terá, note que esta receita será dada por, considerando que cada pessoa levará consigo um acompanhante, $R(x) = x.p + x.\frac{p}{2}$, que usando o que estabelecemos anteriormente, $R(x) = x.(100 - 2x) + x.\frac{100-2x}{2} \Rightarrow R(x) = 100x - 2x^2 + 50x - x^2 \Rightarrow R(x) = -3x^2 + 150x$. Sendo $C(x)$ o custo que o estabelecimento tem com o total de frequentadores e considerando que cada frequentador custa $R\$\ 15{,}00$ e que cada frequentador levará consigo um acompanhante, a função $C(x) = 15x.2 = 30x$. O lucro para o proprietário do estabelecimento será dado por $R(x) - C(x) = -3x^2 + 150x - 30x = -3x^2 + 120x$, não é difícil notar que esta função tem um ponto de máximo, queremos determinar o número de frequentadores para que o lucro seja máximo, desta forma, queremos determinar a abscissa do vértice da parábola que representa o gráfico desta função. Assim temos $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2.(-3)} = \frac{120}{6} = 20$. Desta forma se 20 pessoas frequentarem o estabelecimento o lucro será máximo.

Nota-se que o enunciado do problema apresenta uma notícia que serve apenas de preâmbulo para o problema que será apresentado depois, talvez como uma tentativa de aproximar o conteúdo matemático de situações cotidianas. Sendo assim, o problema proposto aparece de fato após a notícia, note que apesar dos dados numéricos o enunciado é desenvolvido em linguagem natural e o processo de transformação envolvido na resolução do problema é uma conversão para a linguagem algébrica, em que ocorre posteriormente um tratamento. Temos, portanto, uma conversão do registro de língua natural para o registro algébrico.

A última seção desta unidade é uma seção denominada **“Vestibulares de norte a sul”**, que semelhante a seção anterior é exclusivamente de problemas, o autor apresenta um total de dez questões que foram cobradas em vestibulares de várias instituições de diferentes estados do Brasil. Como na seção anterior, quando traçamos um paralelo entre os enunciados desta seção com os problemas que foram apresentados ao longo da unidade, chegamos a mesma conclusão anterior, são problemas com enunciados geralmente maiores e também com questões de múltipla e escolha.

Dos dez itens que são apresentados temos quatro itens cujo processo de transformação é o tratamento dentro do registro algébrico, um dos itens é de conversão do registro gráfico para o registro algébrico e os outros cinco são de conversão do registro da língua natural para o registro algébrico. Um fator que nos chama atenção nesses enunciados são casos em que o enunciado trás o gráfico apenas como um suporte para o enunciado em língua natural, mas que não são decisivos para resolução, como no item que analisaremos a seguir:

Figura 35: Questão 4 da seção “Vestibulares de norte a sul” do capítulo analisado


4. (IFPE) A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta. Foi inserido o sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a altura h da bola é dada em função da distância horizontal x pela equação $h = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$, com h e x medidos em metros. Determine a altura máxima atingida pela bola.

x a) 6,1 metros.
b) 6,3 metros.
c) 7,2 metros.
d) 7,5 metros.
e) 8,3 metros.

Fonte: Dante (2016, p.144)

Uma solução para o item 4: Considerando a função que descreve a trajetória da parábola que é dada por $h = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$, temos que x é distância horizontal percorrida pela bola e h é altura máxima atingida pela bola. Queremos determinar a ordenada do vértice da parábola. Todavia, vamos inicialmente determinar a abscissa do vértice, que é dada por $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}2}{2.(-0{,}1)} = \frac{1{,}2}{0{,}2} = 6$, sendo assim, vamos agora determinar $h_v = h(x_v) = h(6) = -0{,}1.\,6^2 + 1{,}2.6 + 2{,}5 = 6{,}1$. Desta forma, como todas as medidas são dadas em metros, a altura máxima atingida pela bola é $6{,}1$ metros.

Na análise do problema acima vemos um enunciado que inicialmente pode ser interpretado como em língua natural, todavia, ao oferecer a lei de formação da função temos um ponto de partida totalmente algébrico, desta forma interpretamos que a solução do problema envolve um processo de tratamento dentro do registro algébrico. Ainda assim algo que poderia colocar essa análise em cheque é a apresentação do gráfico no enunciado desta questão, todavia, entendemos que o gráfico não é decisivo para a resolução deste problema, visto que nenhum dado numérico ou algébrico pode ser obtido a partir dele. Um aluno poderia no máximo verificar que a coordenada do vértice que ele procura é a ordenada e não a abscissa, o que pode ser feito obviamente a partir da própria lei de formação da função.

5.3 Panorama das transformações observadas nos exercícios propostos no capítulo analisado

Apresentamos a seguir um quadro que sintetiza todas as transformações que foram observadas ao longo da análise da unidade de funções quadráticas do livro analisado.

Quadro 12: Panorama das transformações observadas nos exercícios propostos no capítulo 4

Processo de transformação envolvido	Exercícios Propostos	Exercícios Resolvidos	Total
Tratamento dentro do registro algébrico[11]	52	16	68
Tratamento dentro do registro gráfico	3	1	4
Conversão do registro algébrico para o registro gráfico[12]	16	6	22
Conversão do registro gráfico para o registro algébrico	4	Nenhum	4
Conversão do registro de língua natural para registro algébrico[13]	17	3	20
Conversão do registro de figura para o registro algébrico	2	Nenhum	2
Conversão do registro de tabela para o registro algébrico	2	Nenhum	2

Fonte: O autor.

[11]Em seis destes exercícios a conversão do registro algébrico para o registro gráfico foram, em nossa análise, uma outra opção para solução de alguns itens.

[12]Em quase todas as conversões feitas nesse sentido, para solucionar o problema foi feito depois do processo de conversão, um tratamento.

[13]Em cinco destes itens, após o processo de conversão foram feitos procedimentos de tratamento. Outros cinco itens poderiam ser resolvidos usando dois processos de conversão, inicialmente do registro de língua natural para o registro gráfico e depois do registro gráfico para o registro algébrico.

Grosso modo observamos inicialmente que do total de questões que são propostas na obra, sendo exercícios resolvidos ou propostos, temos um total de 72 exercícios, que representa aproximadamente 59% das questões, envolvem o processo de transformação classificado como exercícios de tratamento. Os outros 50 exercícios, que representa aproximadamente 41% das questões, envolvem o processo de transformação classificado como exercícios de conversão.

Dos exercícios que são classificados como exercícios de tratamento, temos uma predominância daqueles cujos tratamentos são feitos dentro do registro algébrico, fato que não nos surpreende, visto que geralmente esse tipo de transformação é geralmente usado em procedimentos de justificação (DUVAL, 2003). Uma quantidade muito inferior de itens é de tratamento feito dentro do registro gráfico.

Ao longo de toda a unidade, conforme o quadro 12, foram observados cinco tipos diferentes de conversão, sendo que, quase metade dessas conversões são feitas partindo do registro algébrico para o registro gráfico, que em geral são aquelas esperadas quando o assunto é função quadrática, conforme descrevemos anteriormente, enunciados do tipo “esboce o gráfico das funções a seguir”. Todavia, vimos na análise deste capítulo do livro o sentido inverso desta conversão, ou seja, tendo como ponto de partida o registro gráfico e como chegada o registro algébrico, tal fato é um fator positivo, todavia, apenas quatro exercícios exploraram esse sentido de conversão, o que muito discrepante quando observamos o sentido inverso. Desta forma consideramos que o livro claramente privilegia apenas um dos sentidos dessa conversão.

Outro tipo de conversão que foi bastante explorada na obra é conversão partindo do registro de língua natural e chegando ao registro algébrico. Esse tipo de conversão foi muitas vezes explorado, senão principalmente, para fazer a conexão da função quadrática com problema da física, mas também para apresentar problemas que são de certa forma “cotidianos”. O que de certa forma nos surpreende é fato deste tipo de conversão ser explorada quase que a mesma quantidade de vezes que a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, que como dissemos anteriormente, é geralmente predominante.

Dois outros tipos de conversão que são explorados nesta unidade do livro analisado são: conversão do registro de figura para o registro algébrico e conversão do registro de tabela para o registro algébrico. A primeira delas, nas duas vezes que apareceram, foram recursos para solucionar problemas de área, em nosso entendimento, haveria espaço para explorar esse tipo de conversão mais vezes. A segunda, também foi em nossa visão pouquíssimas vezes explorada, todavia, geralmente se recorre a essa conversão de forma intermediária, quando, por exemplo, se quer partir da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica, esse é um caminho que se pode explorar, ainda que que em nossa visão a forma canônica da função quadrática é um caminho ainda melhor para esse fim.

6 – CONSIDERAÇÕES

Quando iniciamos esta pesquisa, levantamos duas questões com a intenção de que elas pudessem nortear e delimitar o que buscávamos. Essas perguntas foram: “Os exercícios propostos no capítulo de funções quadráticas de um livro didático do Ensino Médio propõem a mobilização dos diferentes registros de representação semiótica?” e “Se sim, em qual sentido se dão as mobilizações propostas?”.

Ao chegamos nesse ponto, entendemos que não há condições de responder de forma taxativa essas questões, ao analisarmos um capítulo do livro que foi o mais escolhido do catálogo do PNLD 2015, temos somente alguns indicadores e resultados que não podem ser de maneira nenhuma generalizados, mais ainda assim relevantes para a reflexão da nossa prática enquanto professores.

Segundo Duval (2003), o aprendizado em matemática está relacionado a capacidade do aluno em transitar entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático. De acordo com o mesmo autor, um paradoxo está no fato de que só se pode ter acesso a um objeto matemático recorrendo a uma representação deste, o que pode fazer o aluno confundir o objeto com a sua representação. Desta forma Duval (2003) defende que o estudante de matemática seja exposto a situações que envolvam processos de transformação de um registro de representação em outro, esse processo dentro de sua teoria é chamado de conversão e pode fazê-lo, desta forma, distinguir o objeto e a sua representação.

Considerando a função quadrática, há uma enorme possibilidade de representações deste objeto matemático, desde a tão recorrente lei de formação, passando por representação gráfica, representação em formato de tabela e em situações descritas em língua natural. Sendo, desta forma, muito grande a possibilidade de propor situações que envolvam a conversão de um registro de representação em outro. Como apresentamos, a necessidade de transitar entre registros de representação também é reforçada em documentos oficiais mais recentes como a BNCC.

No capítulo que analisamos do livro didático 59% dos exercícios analisados são exercícios de tratamento (72 itens) e 41% são exercícios de conversão (50 itens). Neste capítulo, para cada três questões que envolvem tratamento, temos duas que envolvem conversão, aproximadamente.

Considerando apenas os exercícios cuja solução envolve o procedimento de tratamento, a grande maioria é feita dentro do registro algébrico, sendo essa a transformação mais privilegiada em toda a unidade, mesmo que sejam pedagogicamente relevantes, em nosso entendimento haveria um espaço para a proposição de um repertório mais variado de situações.

Em relação às conversões, ao analisarmos os exercícios, foram cinco tipos diferentes de conversão observados, a saber: conversão do registro algébrico para o registro gráfico, conversão do registro gráfico para o registro algébrico, conversão do registro de língua natural para registro algébrico, conversão do registro de figura para o registro algébrico e conversão do registro de tabela para o registro algébrico.

Considerando todas as conversões, 44% partem do registro algébrico para o registro gráfico, fato é que esse número é muito maior que as conversões que foram propostas no sentido inverso, apenas 8% das situações. Ainda que seja positiva a proposição de situações no sentido inverso, inegavelmente, ainda é muito grande a diferença entre o sentido “tradicional” e o sentido inverso. Esse tradicional caminho já foi apontado em pesquisas anteriores conforme apresentado por Maia (2007) e Maggio, Soares e Nehring (2011).

Outros 40% dos exercícios que promovem a conversão de registros, são conversões que parte do registro de língua natural para o registro algébrico. Sendo que deste a grande maioria são itens que buscavam apresentar situações-problema contextualizadas, incluindo alguns problemas de Física. Não observamos nenhuma situação proposta no sentido inverso a este.

Outros dois tipos de conversão que aparecem de forma mais tímida são as conversões que partem do registro de figura para o registro algébrico e do registro de tabela para registro algébrico, sendo que são propostas duas situações de cada. Ainda que em um número reduzido, explora sobre tudo no que diz respeito ao registro de figura, uma potencialidade do trabalho com funções geralmente pouco exigida nos livros.

Voltando às questões de pesquisas, entendemos que o capítulo que analisamos do livro didático, propõe situações que permitem ao aluno mobilizar diferentes registros de representação semiótica de funções quadráticas, ainda que a proposição de situações envolvendo tratamentos seja maior que a de conversões, pensamos que seria ideal equilibrar ambos.

Com relação ao sentido que se dão as mobilizações propostas pelos exercícios do livro didático, a despeito do que comentamos anteriormente, entendemos como positiva a exploração de outros tipos de conversões que fogem apenas do clássico “esboce o gráfico da função dada por...”, pudemos notar a presença de outros tipos de conversões que fogem do caminho “tradicional”, o que certamente é fator muito positivo, todavia, a maioria das conversões que foram observadas parte do registro algébrico para o registro gráfico. Em nosso entendimento, caberia nesse ponto também um equilíbrio melhor das situações propostas.

Uma importante ressalva deve ser considerada, em algumas situações propostas, seja pela apresentação de um quadro ou mesmo de uma dica contida no enunciado, o autor tira do aluno a oportunidade de fazer a mobilização de diferentes registros, conduzindo o aluno por um caminho pré-determinado.

No limite, entendemos que cabe ao professor selecionar de maneira adequada quais exercícios vai propor, visto que geralmente o docente escolhe, dentre todos os itens que são sugeridos, aqueles que no seu entendimento são mais relevantes para cada momento. Sendo assim tem o professor a oportunidade de equilibrar melhor os itens de tratamento e conversão, sendo que, na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a prioridade maior deve ser dada ao trabalho com a conversão de registro de representação.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.** Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 04 abr. 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base – Ensino Médio.** Brasília, MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2018.

BRASIL. **Plano Decenal de Educação para Todos.** MEC. Brasília. 1993.

BRASIL. **Proposta Educação para todos: caminho para a mudança.** Marco Maciel. Brasília. 1985.

CASSIANO, Célia Cristina de Figueiredo Cassiano. **O mercado do livro didático no Brasil do século XXI – A entrada do capital espanhol na educação nacional.** 1ª Edição. Livraria da Unesp, São Paulo, 2013.

CASTRO, Jorge Abrahão de. **O processo do gasto público do Programa do Livro Didático.** Texto para discussão nº 406. IPEA, Brasília, 1996.

CHOPIN, Alain. **História dos livros didáticos e das edições didáticas: sobre o estado da arte.** Educação e pesquisa – Revista da faculdade de educação da USP. v.30, n.3, Set – dez. 2004. p. 549 – 566. São Paulo, 2004.

DANTAS, Jéferson Silveira. **O Ensino Médio em disputa e as implicações da BNCC para a área das ciências humanas.** Universidade e sociedade (Brasília), v.61, p.106-115, Brasília, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contextos e Aplicações: Ensino Médio.** 3ª Edição. Editora Ática. São Paulo, 2016.

DUVAL, Raymond. **Aprendizagem em matemática: Registro de representação semiótica.** In: Silvia Dias Alcântara Machado (ORG.). Editora Papirus. São Paulo, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira – 1ª Edição. Livraria da Física. São Paulo, 1995.

FREITAS, Luiz Carlos de. **Os reformadores empresariais da educação e a disputa pelo controle do processo pedagógico na escola.** Educação & Sociedade (Impresso), v. 35, p. 1085 – 1114, 2014.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino – aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

HÖFLING, Eloisa de Matos. **Notas para discussão quanto à implementação de programas de governo: Em foco o Programa Nacional do Livro Didático.** Educação & Sociedade (Impresso) Nº 70. Ano XXI. p. 159 – 170. Campinas, 2000.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções reais.** Coleção PROFMAT. SBM. Rio de Janeiro, 2014.

MAGGIO, Deise Pedroso; SOARES, Maria Arlita Silveira; NEHRING, Cátia Maria. **Registros de Representação Semiótica da Função Afim: Análise de livros didáticos de matemática do ensino médio.** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 5, p. 38-47, Florianópolis, 2011.

MAIA, Diana. **Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MAIA, Jurama. **Uma análise da linguagem utilizada em livros didáticos de matemática do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.

MORETTI, Méricles T.; THIElL, Afrânio A.**O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica.** Práxis Educativa (UEPG. Online), v. 7, p. 379-396, 2012.

OGLIARI, Lucas Nunes. **O conteúdo de funções na escola: Rastros dos movimentos de reforma nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental.** Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.