Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Márcia Eliane Furtado de Oliveira

Concepções de professores de matemática sobre números reais e seu ensino

Rio de Janeiro

2018

Márcia Eliane Furtado de Oliveira

Concepções de professores de Matemática sobre números reais e seu ensino

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

.

Orientador: Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquincalha

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/A

O48	Oliveira, Márcia Eliane Furtado de. Concepções de professores de matemática sobre números reais e seu ensino / Márcia Eliane Furtado de Oliveira. - 2018. 75f. : il. Orientador: Agnaldo da Conceição Esquincalha Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística. 1.Números reais - Teses. 2.Professores - Formação - Teses. 3.Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Esquincalha, Agnaldo da Conceição. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título. CDU 517.13

Rosalina Barros ***CRB-7 / 4204*** - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

________________________ Assinatura

________________________ Data

Marcia Eliane Furtado de Oliveira

Concepções de professores de matemática sobre números reais e seu ensino

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 11 de outubro de 2018.

Banca examinadora:

____
Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquincalha (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

____
Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

____
Prof.ª Dra. Gisela Maria da Fonseca Pinto
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
2018

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu marido Aurélio, aos meus filhos Renan, Julia e Vitor, amores da minha vida, que de muitas formas me incentivaram e ajudaram para que fosse possível a conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e força para a realização deste trabalho.

Agradeço também às seguintes pessoas e instituições que proporcionaram o suporte necessário para que esta dissertação fosse realizada:

A Aurélio, meu marido, pela compreensão em todos os momentos, e igualmente às razões de minha vida: Renan, Julia e Vitor.

Ao meu orientador, professor Dr. Agnaldo pelos preciosos ensinamentos, dedicação e compreensão frente aos problemas ocorridos no percurso. E por ser o melhor orientador que alguém pode ter.

À minha amiga Gracinha pela força e palavras que sempre me motivaram.

Aos professores Abel, Agnaldo, Clícia, Fábio, Priscila e Rosa pelos conhecimentos que nos transferiram durante o Curso.

Aos colegas de turma pelo companheirismo e trocas de conhecimentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela concessão de bolsa de estudos, graças à qual realizamos o Curso.

Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino.

Paulo Freire

RESUMO

OLIVEIRA, Marcia Eliane Furtado de. **Concepções de professores de Matemática sobre números reais e seu ensino**. 2018. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Rio de Janeiro, 2018.

Esta dissertação apresenta uma pesquisa exploratória sobre concepções de professores de Matemática sobre números reais e o seu ensino. Na revisão de literatura é discutido, à luz de diferentes autores, o conceito de concepção de professor de professor de Matemática, seguida de uma apresentação histórica sobre a construção dos números reais, com destaque para os irracionais e a questão da incomensurabilidade. Em seguida, são discutidos um conjunto de textos sobre o ensino de números reais sob diferentes perspectivas e contextos. As resenhas das coleções de livros didáticos sobre números reais apresentadas no Guia do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2018 também são destacadas, com o objetivo de retratar como textos didáticos têm discutido este tema do ponto de vista dos pareceristas do PNLD. A pesquisa exploratória se deu com professores da Educação Básica e Superior, também atuantes na Educação Básica, e objetivou discutir em um curso de extensão oferecido em um ambiente virtual de aprendizagem, suas concepções e práticas sobre números racionais e irracionais, como meio para a formalização das ideias fundamentais sobre números reais. Os dados revelam que a necessidade de (re)visitar, (re)pensar e (re)construir os conceitos relacionados aos números reais é urgente, uma vez que muitas imprecisões conceituais foram percebidas, apontando ainda para uma necessidade de readequação de objetivos e abordagens das disciplinas de Análise Real na Licenciatura em Matemática, compreendendo seu papel na formação matemática para o ensino na Educação Básica.

Palavras-chave: Números reais. Concepções de professores de matemática. Formação continuada de professores de matemática em ambientes virtuais.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Marcia Eliane Furtado de. Conceptions of mathematics teachers about real numbers and their teaching. 2018. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Rio de Janeiro, 2018.

This dissertation presents an exploratory research about conceptions of Mathematics teachers about real numbers and their teaching. In the literature review, the concept of professor of mathematics teacher is discussed, in the light of different authors, followed by a historical presentation on the construction of real numbers, especially the irrational ones and the question of incommensurability. Next, a set of texts on the teaching of real numbers under different perspectives and contexts is discussed. The reviews of the textbook collections on real numbers presented in the National Textbook Program (PNLD) 2018 are also highlighted, with the aim of portraying how textbooks have discussed this theme from the point of view of the PNLD reviewers. The exploratory research was carried out with teachers of Basic and Higher Education, also active in Basic Education, and aimed to discuss in an extension course offered in a virtual learning environment, their conceptions and practices on rational and irrational numbers, as a mean for the formalization of fundamental ideas about real numbers. The data reveal that the need to (re)visit, (re)think and (re)construct concepts related to real numbers is urgent, since many conceptual inaccuracies have been perceived, pointing to a need for re-adaptation of objectives and approaches of the subjects of Real Analysis in the Pre service teachers training in Mathematics, understanding its role in the mathematical formation for the teaching in Basic Education.

Keywords: Real numbers. Conceptions of Mathematics teachers. Continuing education of Mathematics teachers in virtual environments.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os números reais se caracterizam como um conceito chave em Matemática, no qual se fundamentam uma série de outros conceitos de caráter aritmético, algébrico e geométrico, além de outros. Todo o estudo de funções reais, na Educação Básica e na Educação Superior parte do pressuposto de que os estudantes conhecem com profundidade os números reais e suas propriedades.

No entanto, a literatura de pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem de números reais revela que este é um ponto nevrálgico do corpo de conhecimentos matemáticos explorados de maneira aparentemente não satisfatória – ou não eficiente? – tanto na escola quanto na universidade, em cursos de formação de professores de Matemática. Pesquisas apontam para obstáculos de diversas ordens, tais como conceituais, didáticos e epistemológicos. Na literatura são encontradas indicações para uma compreensão mínima necessária dos números reais, apontando para uma necessidade de estudar as concepções de professores de Matemática a respeito desses números, assim como de buscar meios de fomentar estratégias que provoquem mudanças de concepções, de modo a estabelecer percursos de aprendizagem efetiva.

Nesta perspectiva, esta pesquisa tem como objetivos apresentar uma revisão de literatura sobre concepções de professores de Matemática a respeito dos números reais e seu ensino, por meio de um levantamento bibliográfico e, também de uma pesquisa exploratória, realizada como parte de um cursos de extensão, na modalidade a distância, gerando dados a partir de discussões em fóruns virtuais, entre professores de Matemática, sobre o tema em questão.

O lócus da pesquisa, então, se deu a partir das análises das intervenções de 40 professores cursistas em fóruns de discussão de duas das três etapas do curso de extensão intitulado “Análise Real e Sala de Aula: buscando interlocuções”, destinadas ao estudo dos números reais a partir da leitura de trechos de Caraça (1951) e de análise das respostas de alunos do Ensino Fundamental à problemas propostos por Kindel (1998).

Um dos focos principais está nas discussões sobre passagem dos números racionais para os reais, sinalizando a apresentação, em geral brevíssima e superficialíssima, dos números irracionais, sem os devidos cuidados e atenção necessários nos livros didáticos. Também assim, percebe-se a partir da análise de dados da pesquisa, é apresentada aos alunos pela maioria dos professores. Por que a preocupação com um "detalhe" na apresentação dos conjuntos numéricos? Acredita-se que esse elo quebrado, esse "salto" dado entre os números racionais e os números irracionais, é a chave para grandes problemas no entendimento de vários assuntos abordados na matemática, parece faltar ao professor e aos autores de livros didático um conhecimento matemático no horizonte. Esse mal entendimento pode ocasionar prejuízos no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Evidentemente o assunto não termina aqui, mas constitui-se num bom momento para refletir práticas e conceitos tais como incomensurabilidade, continuidade, infinidade, densidade, conceitos esses tratados de forma velada, como se fossem de domínio público, pois poucas palavras a respeito são mencionadas nas práticas dos sujeitos da pesquisa ou na maioria dos livros didáticos aprovados pelo PNLD2018.

No capítulo 1 o enfoque é para as concepções que professores e alunos têm dos números reais, concepções essas que se caracterizam como chave para entender como se constrói o conhecimento sobre "números reais", dos pontos de vista do ensino, da aprendizagem, matemático e histórico, caracterizando-se como uma revisão de literatura.

O capítulo 2 detalha o percurso metodológico da pesquisa, detalhando o público, o curso em que se deu a pesquisa, os sujeitos e os instrumentos utilizados para coleta dos dados. O capítulo 3 discorre sobre alguns dados coletados nos fóruns de discussão sobre números reais e seu ensino, e é seguido pelas considerações finais. Os dois apêndices deixam para o leitor o conjunto completo das respostas dos sujeitos da pesquisa aos questionamentos do fórum de discussão da etapa 2 do curso de extensão, lócus da pesquisa.

1 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem por objetivo uma revisão bibliográfica a partir de artigos e dissertações que abordam os temas números reais e concepções de professores de Matemática, destacando percalços no ensino ou na aprendizagem desse conteúdo. Apresentam-se concepções de conhecimento matemático considerando que a prática do professor de matemática sofre influência da forma como ele concebe o conhecimento matemático.

1.1. Concepções de professores de Matemática

Para entender o que são concepções é preciso analisar o que descrevem pesquisadores como Nacarato, Mengali e Passos (2009), que evidenciam como é difícil definir "concepção", por ser um conceito polissêmico. Estudiosos que investigaram essa temática atribuem a esse termo diferentes características e conotações: alguns autores fazem a distinção entre concepções e crenças, outros usam esses dois termos como sinônimos, ou ainda, incluem as concepções e as crenças no sistema de conhecimentos dos professores.

Para Ponte (1992), as concepções são de natureza essencialmente cognitivas. São essências do pensamento, isto é, a capacidade de entender ou criar ideias. Elas atuam como um filtro que separa os pensamentos dispensáveis, os que não agregam valor na construção do raciocínio, dos indispensáveis, os que estruturam o sentido que damos às coisas, no âmbito da compreensão de problemas por exemplos. Elas também podem atuar como um bloqueador para novas realidades limitando a capacidade de atuação e compreensão. Ademais, o autor aborda que as concepções se formam num processo simultaneamente individual (experiência própria) e social (interação com a ideia de outros indivíduos). Desta forma, as concepções são formadas por experiências sociais dominantes.

Machado e Menezes (2008) relatam que a concepção de um objeto é um ponto de vista sobre o mesmo caracterizado por situações que servem como ponto de partida (tais como, representações mentais, invariantes etc). Já para Barbosa (2001, p.11), concepções "[...] funcionam como lentes pelas quais os sujeitos dão significado às suas experiências".

Ponte (1992) diz que cabe aos professores de Matemática a tarefa de organizar as experiências de aprendizagem dos alunos. Ressalta-se que cabe aos professores influenciar os alunos sobre as concepções a serem adquiridas a respeito da matemática. Adicionalmente, assuntos como dinâmica e mudança de pensamentos são pertinentes à abordagem da formação das concepções matemáticas.

As concepções podem ser vistas como pano de fundo organizador dos conceitos. Elas constituem como que “miniteorias”, ou seja, quadros conceituais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas. As concepções condicionam a forma de abordagem das tarefas, muitas vezes orientando para abordagens que estão longe de ser as mais adequadas.

Segundo Thompson (1992), concepção é uma estrutura mental mais geral, que abrange conceitos, significados, proposições, regras, imagens mentais, preferências e gostos. Para a autora, as concepções podem ser defendidas em diversos níveis de convicção, independem de sua validade e não são consensuais, ou seja, pessoas diferentes pensam de forma diferente. Ela defende que o conhecimento está associado à certeza e à veracidade, sendo diferente de percepção. Ainda para essa autora, o conhecimento é um “[...] consentimento geral sobre procedimentos para avaliar e julgar suas validades e deve ter critérios envolvendo princípios de evidência” (p.130).

Por outro lado, as concepções são geralmente “baseadas em justificativas por razões que não têm critérios e, portanto, são caracterizadas por falta de concordância pela qual elas devem ser avaliadas e julgadas” (THOMPSON, 1992, p.130). Nesse contexto, o conjunto das concepções de um indivíduo forma um sistema que não é estático, imutável, mas dinâmico, podendo sofrer mudanças e reestruturações decorrentes de suas experiências.

Nesse trabalho um dos objetivos é trazer contribuições que dizem respeito às concepções dos professores e as relações destas com suas práticas. Essa pesquisa mostra ainda que de forma preliminar é possível compreender que existe essa relação e de que forma concepções e práticas se influenciam mutuamente.

De acordo com Cury (1999), o interesse pelo estudo das concepções e crenças dos professores de matemática deve ter se originado no início do século XX, com as preocupações dos psicólogos sociais que procuravam entender a influência das crenças sobre o comportamento das pessoas. O interesse pelas concepções e crenças dos professores de matemática a respeito da Matemática, a influência de suas concepções sobre as práticas e sobre o desempenho dos alunos em matemática parece ter sido aceita pela maioria dos que pesquisam o processo ensino e aprendizagem. Cury (1999) afirma que alguns apontam uma influência direta das concepções sobre as práticas, outros consideram a existência de outros fatores sobre o trabalho docente.

A questão gira em torno de como essas concepções podem ajudar o professor em sua prática. É claro que o professor precisa estar em permanente desenvolvimento profissional e perceber a hora de muda-las, concepções e práticas, para que esse processo de aprendizagem se torne mais efetivo para o estudante. Os cursos de formação podem promover um ambiente propício para auxiliar professores a confrontarem e refletirem sobre suas próprias práticas. Não é fácil mudar de concepção, como apontado por Ponte (1992), a mudança pode acontecer, por exemplo, quando houver uma inquietação. Acredita-se que essas mudanças são necessárias e por meio de interações elas aconteçam de forma efetiva.

Durante muito tempo se discutiu a necessidade de pensar na educação matemática de forma mais ativa envolvendo o estudante no processo de fazer matemática, ao invés de o professor só lhe explicar o conteúdo (THOMPSON,1992). Por também acreditar nisso é que se fazem necessárias trocas de experiências entre professores e suas práticas sempre apoiadas em textos e direcionadas em programas de formação continuada. Há constante necessidade de atualização e consciência de que um professor nunca está pronto, mas em processo de construção e evolução.

Segundo D’Ambrósio (1993) algumas características são necessárias em um professor de matemática para o século XXI, a saber:

- Visão do que vem a ser matemática;
- Visão do que constitui a atividade matemática;
- Visão do que constitui a aprendizagem matemática;
- Visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem matemática.

A mudança de concepções e de práticas constitui um processo difícil e penoso ao qual os professores oferecem uma resistência de forma natural e saudável (PONTE, 1992). Nesse sentido, o autor evidencia que “é difícil mudar as pessoas, especialmente quando elas não estão empenhadas em efetuar tal mudança” (p. 565). Para ele, as mudanças no sistema de concepções só ocorrem quando há abalos muito fortes que geram grandes desequilíbrios. O autor diz ainda que isso só pode acontecer no quadro de vivências pessoais intensas, como por exemplo, na participação em um programa de formação motivador ou em uma experiência com uma forte dinâmica de grupo, uma mudança de escola, de região, de país, de profissão (PONTE, 1992).

Percebe-se que só ocorre uma mudança nas concepções quando há uma ruptura na rotina, algo que abale, desestruture, para que uma nova acomodação ocorra e nela haja espaço para rever velhos conceitos e reestruturá-los de forma mais concisa.

Sabendo que as concepções influenciam na prática de ensino do professor, um curso de formação pode promover um ambiente propício para auxiliar os professores a confrontarem e refletir sobre as suas próprias concepções. Chacón (2003) deixa evidente a importância de confrontar as próprias concepções. A mudança de concepção é difícil de ocorrer, e como afirmado por Ponte (1992), pode acontecer, por exemplo, na participação em um programa de formação ou atualização motivador. Dessa forma, sempre haverá espaço para discussão e possíveis mudanças.

Embora as concepções dos docentes possam influenciar sua prática pedagógica, há vários graus de consistência nessa relação. De acordo com Ponte (1992), as concepções influenciam a prática, na medida em que apontam os caminhos e as decisões a serem tomadas. Por outro lado, a prática proporciona a geração de concepções que sejam compatíveis com elas e que sirvam para enquadrá-las conceitualmente. Nesse sentido, as concepções e a prática se complementam em um movimento de ida e vinda, de forma a umas adequarem-se às outras. As concepções influenciam as práticas, no sentido de apontar caminhos e embasar as decisões. E as práticas geram concepções que sejam compatíveis com elas e que as possam fundamentar conceitualmente.

Para Ponte (1992), o cálculo é muito importante e não se pode menosprezá-lo, no entanto, relacionar a matemática a cálculos seria reduzi-la a um dos aspectos mais pobres e de menor valor, pois, com as calculadoras e os computadores, não são requeridas capacidades especiais de raciocínio para essa tarefa. A matemática é formal, rigorosa, e não permite espaço para o erro, a incerteza, a dúvida, em uma concepção mais tradicional. No entanto, “[...] a prática da matemática, como produto humano, está sujeita às imperfeições naturais da nossa espécie. Nela há margem para se desenvolverem diversos estilos ou se tomarem diferentes opções” (PONTE, 1992, p. 16). A matemática está desligada da realidade e, quanto mais abstrata e pura, melhor seria a matemática escolar. Assim, não se considera o processo histórico em que ela se desenvolve; nem se questiona se ela é compreensível aos estudantes ou se seu ensino corresponde ou não à sua relevância social. Em matemática a criatividade e o novo somente são possíveis para os gênios. Contudo, para Ponte (1992, p. 16), “[...] é possível valorizar as investigações e descobertas das pessoas normais”.

Essa perspectiva de ensino de matemática tradicional em que os professores explicam o conteúdo, resolvem alguns exemplos na lousa, propõem que os alunos façam uma enorme lista de exercícios e depois reproduzam exatamente essa mesma forma na avaliação, é que normalmente consiste em uma prova escrita. Esses quatros momentos – mostrar o conceito, mostrar seu funcionamento, treinar e avaliar – fazem parte dessa pedagogia, que é caracterizada pela aprendizagem do saber fazer e, por não implicar pensamento, acontece simplesmente pela manipulação das regras da operacionalidade do conceito, do treinamento no mecanismo algorítmico. Tal concepção enfatiza o saber fazer operacional, em detrimento do saber pensar conceitual, implicando a contra aprendizagem matemática, na sua substituição por uma ação de condicionamento (LIMA, 1998). A seguir, serão discutidos o ensino e a aprendizagem de números reais e, em particular, o que revela a literatura de pesquisa sobre as concepções de professores de matemática a respeito desse tema.

1.2. Números reais: ensino, aprendizagem e concepções de professores

Fortemente ligadas às concepções estão as atitudes, as expectativas e o entendimento que cada um tem do que constitui o seu papel numa dada situação. O objetivo aqui é analisar como se dão as concepções sobre o estudo dos números reais e quais as principais dificuldades enfrentadas por professores e alunos na construção desse conhecimento, segundo alguns teóricos.

De acordo com estudos históricos a essência da formação do conjunto dos números reais, os irracionais, encontra-se na incomensurabilidade; como diz Caraça (1951), em "a crítica ao problema da medida". O autor afirma que essa descoberta levou à crise da Escola Pitagórica. Os pitagóricos, como eram chamados os estudiosos da Escola Pitagórica, não levaram adiante o estudo dos incomensuráveis, pois caso o fizessem, teriam que negar suas próprias bases filosóficas. Mas isso ocorreu no século VI a.C. e somente no século XIX d.C. foi dada uma definição para o conjunto dos números reais, fundamentando a continuidade ou completude desse conjunto. Durante esse longo período, estudiosos desenvolveram conceitos e ideias que influenciaram na definição dos números reais. Embora o salto do campo numérico dos racionais para o campo dos reais seja o conceito de continuidade ou completude, há outros conceitos envolvidos.

Ainda hoje o salto dos números racionais para os reais é dado sem se falar em continuidade ou densidade segundo a maioria dos livros didáticos. Isso é confirmado por Penteado (2004), quando afirma que no ensino desse conjunto numérico é deixada uma lacuna quanto a esse conceito tão importante.

Para Penteado (2004) um entrave no entendimento dos números reais se dá pela falha deixada nessa construção. Em sua dissertação, ela ressalta que nada é sequer mencionado no ensino básico sobre densidade dos números reais o que pode ser a causa das dificuldades no entendimento de limites e continuidade de funções, decorrentes da falta de compreensão dos números reais. Além dessas, outras dificuldades para um pleno domínio dos números reais podem ser elencadas a partir do trabalho da pesquisadora:

1) as concepções erradas de que duas grandezas são sempre comensuráveis;

2) que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais;
3) a não distinção da cardinalidade dos naturais e a dos reais;
4) a afirmação de que existem mais números naturais que ímpares;
5) a identificação entre as representações 3,1415 e π e também entre 2,7182 e e;
6) a classificação de 3,1415 como sendo a de um número irracional;
7) a identificação entre uma representação fracionária com número racional independentemente da natureza do numerador e do denominador;
8) a não identificação das representações 0,999... e 1 como sendo de um mesmo número;
9) a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação com raízes de números que não quadrados perfeitos;
10) a confusão entre número e sua aproximação atribuindo o mesmo significado;
11) a noção de sucessor para os números reais;
12) o desconhecimento da existência de infinitos números;
13) a interpretação de que um número racional é exato ou inteiro;
14) a de que um número irracional é aquele que possui uma representação decimal ilimitada ou um número que não é exato;
15) que não é inteiro ou que é negativo;
16) e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

São palavras de Penteado (2004):

> [...] que concepções são explicitadas por professores do Ensino Médio a respeito de densidade do conjunto dos números reais, tanto a densidade dos números racionais no conjunto dos números reais? E, como eles reagem frente a questões que discutem o conceito de densidade enfocando diferentes registros de representação? (p. 9)

Ao tentar responder a essas questões fica clara a necessidade de ser trabalhada mais de um tipo de representação distinta dos números reais e articulação entre essas representações, tornando mais favorável a construção desse conhecimento. Um exemplo é o ensino da densidade, já no Ensino Médio, que, segundo a autora, deve ser abordado por dois procedimentos distintos: o primeiro sendo à localização do ponto na reta real e, o segundo, sua representação decimal, fazendo uso da média aritmética e um procedimento inspirado no processo de diagonalização de Cantor. Espera-se que atividades como essas proporcionem reflexões sobre densidade e uma melhor compreensão sobre o conjunto dos números reais.

A pesquisa de Penteado (2004) vai ao encontro da realizada por Dias (2002). Ambos ressaltam as mesmas dificuldades quando o assunto abordado é número real. Dias (2002), com o seu trabalho sobre "Correlação da Lógica e do Histórico no Ensino dos Números Reais", destaca que os professores entrevistados por ele, ao refletirem sobre questões envolvendo propriedades dos números reais, apresentaram dificuldades em relação à ordem, à densidade, ao infinito, às definições de número racional e de número irracional e ao próprio conceito de número e suas representações. Convém observar que noções de ordem, densidade, continuidade fazem parte de um elenco de conceitos que deveriam ser discutidos quando se pretende ensinar esse conjunto numérico.

Há concepções que refletem a não distinção entre densidade e continuidade (Dias, 2002) e, talvez por esse motivo, a densidade seja, para alguns, concebida somente para o conjunto dos números reais. A concepção do conjunto dos números reais acaba por ser formada como um "amontado de numerais". O significado dos números, a formação dos conjuntos e suas propriedades não são discutidos de forma a proporcionar uma compreensão de sua existência.

Conclui Kindel (1998) que possivelmente uma das mais sérias consequências da prática pedagógica vigente seja o alto índice de reprovação nas séries iniciais do Ensino Médio. Uma das dificuldades que aparece logo no primeiro ano é o estudo de funções definidas sobre os reais e o próprio conjunto dos números reais.

O grande obstáculo ao ensino dos números ocorre na introdução dos números irracionais (KINDEL, 1998). Resume-se pela maior parte dos professores e livros didáticos a exemplos como $\sqrt{2}$, π ou φ. Desta maneira números irracionais limitam os alunos a elaborarem os conceitos de números reais, pois não os levam à construção de concepções e nem valorizam as diferentes representações para um mesmo número.

Para a autora, há uma distância entre a estrutura cognitiva e o modo como a matemática para os estudantes de Ensino Médio está organizada, desde os conceitos até sua formalização. Convencionalmente é apresentada da forma que se baseia no processo de axiomatização aritmética. Karl Weierstrass foi um dos principais representantes dessa escola, cuja preocupação era a construção da aritmética como um sistema orgânico com fundamento lógico. Já no período do Movimento Matemática Moderna, o modelo é a chave da apresentação de um conteúdo, em detrimento da sua compreensão.

Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) questionam como seria possível passar dos números racionais para o conjunto dos números reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os números irracionais são uma parte do sistema e, sem eles, o conceito de número real é incompleto. Se os números irracionais forem negligenciados, todo o sistema desaba. É o que parece acontecer atualmente nas escolas e livros didáticos. Os livros deveriam abordar diferentes áreas do conhecimento: o de número, o de medida e o de espaço. Kindel (1998) afirma que abordar esse assunto complexo e elaborado sem levar em conta a construção histórica dos números seria perder a oportunidade de identificar e compreender a construção numérica como uma atividade humana dinâmica e em desenvolvimento.

Ripoll (2004) realiza observações importantes sobre a definição dos irracionais e levanta apontamentos que merecem atenção. Segundo a autora, as caracterizações de número irracional mais encontradas nos livros didáticos para a Escola Básica são as seguintes, divididas em grupos de semelhança:

- “Um número é irracional se não puder ser escrito na forma com e b não-nulo”.
- “Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não periódica”,
- “Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade”.

Presume-se aí o conhecimento da existência de outros números, além dos já explorados até o momento, além da capacidade de um manejo com esses números de modo que lhes permita saber decidir se eles podem ou não ser escritos como uma fração. Ainda que se trabalhe sob com a hipótese de que o aluno saiba da existência de outros números, Ripoll (2014) destaca outro problema: Números imaginários não podem ser escritos na forma de fração, e nem por isso são irracionais.

Perceber que a necessidade e o sentido dos irracionais é desconhecido pela maioria dos alunos nos sugere que esse é o grande ponto das dificuldades de compreensão de vários fatores ligados a estruturas dos reais. Penteado (2004) salienta que o conhecimento vago sobre os números irracionais leva a uma generalização abusiva dos números racionais para os reais, o que acaba por constituir uma ideia de “reta racional”, indicando necessidade de reformulação no ensino dos irracionais, uma vez que essas concepções são encontradas em alunos e em professores da educação básica.

Alguma consequência sobre a construção errônea dos números reais pode repercutir no entendimento de disciplinas dos cursos de licenciatura como é o caso de Análise Real, como salientam Soares, Ferreira e Moreira (1999). Os autores, ao analisarem respostas de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática para algumas perguntas sobre os números reais, perceberam que ao longo da vida escolar o aluno construiu “imagens conceituais” corretas ou não sobre esse conjunto.

Soares, Ferreira e Moreira (1999) afirmam que para o seu entendimento no curso um dos pontos cruciais é detectar essas imagens com vistas a superar possíveis obstáculos no aprendizado formal apresentado pelo professor de Análise Real. Acreditam que o aluno agrega ao conhecimento novo um já existente e “possivelmente distorcido”, gerando uma espécie de mosaico com seus conhecimentos e, então, podem surgir algumas falhas. Os autores fizeram um questionamento a estudantes do 5º período de um curso de Licenciatura em Matemática para analisar seus conhecimentos sobre os números reais. Destacam-se a seguir algumas dessas perguntas:

Ao analisar questões do tipo:

1) Marque a alternativa correta:
   - 0,999... < 1
   - 0,999... tende a 1

- 0,999... = 1

2) A) O conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; 0 < x < 1\}$ tem um menor elemento?

B) O conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 1\}$ tem um maior elemento?

Essa pesquisa foi realizada para tentar inferir quais obstáculos os alunos de Licenciatura enfrentam para aprenderem conceitos relacionados aos números reais, assim como suas concepções a respeito. Os autores destacam que algumas respostas recorrentes do tipo “primeiro número racional depois do 0”, “o último número racional antes do 1” ou expressões semelhantes podem revelar um tipo de recorrência, provavelmente inconsciente, ao conjunto dos números naturais, evidenciando uma falha no processo de construção dos outros conjuntos numéricos.

Por fim, os autores destacam que ao notar que uma parcela considerável dos licenciandos investigados não reconhece quando um determinado subconjunto limitado possui elemento máximo ou mínimo, e essa “imagem” de, ou de como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento máximo ou mínimo, pode criar um obstáculo no entendimento da irracionalidade e da própria continuidade.

Rezende (1994), ao analisar alguns aspectos do processo ensino e aprendizagem da operação de limite, revela alguns equívocos nas atitudes de algum curso de Licenciatura em Matemática com relação ao conceito de número real. Sua pesquisa de campo é composta de um questionário, onde destacam-se duas questões que envolvem diretamente o conceito de número real, como apresentado a seguir.

1) Classifique os números reais abaixo em: racional fracionário (RF), racional inteiro (RI) e irracional (I).
   ( ) 0,1010010001...
   ( ) 0,15781757817578175...
   ( ) 0,999...
   ( ) 0,12345678910111213...

O objetivo principal desta questão, segundo o autor, foi determinar a priori com que conceito de número irracional os alunos estavam trabalhando. Outro ponto que Rezende (1994) observou com tal questão foi a forma como a tal "regra que transforma dízimas periódicas em frações" se apresentava nas atitudes dos alunos.

2) Defina número real, número racional e número irracional enumerando as propriedades que conhece sobre cada um dos conjuntos citados acima.

Com esta questão, Rezende (1994) pretendia determinar com precisão os conceitos de número real difundidos pelos alunos. Analisar principalmente a forma pela qual se apresentava a topologia da reta real em suas atitudes. Com relação a esta última questão, Rezende (1994) observou que todos responderam, de forma equivalente, que:

• Número racional é aquele que pode ser escrito na forma de razão de números inteiros, $\frac{a}{b}$, com b ≠ 0.

• Número irracional é aquele que não é racional; ou seja, aquele que não pode ser escrito na forma de razão.

Fica claro para o autor, a partir dessas duas definições dadas consensualmente pelos alunos, as atitudes observadas em relação à primeira questão. O número 0,1010010001..., por exemplo, foi classificado pela maioria do grupo de alunos como irracional. No entanto, fica uma pergunta no ar: que critério o aluno utilizou para classificá-lo em irracional? Como é possível justificar esta classificação pelas definições dadas anteriormente?

O pesquisador desenvolveu, a partir desse questionamento, uma discussão entre os alunos que culminou, conforme nos revela em sua pesquisa, com outra definição de número irracional:

Número irracional é aquele que não pode ser escrito como dízima periódica ou como uma decimal exata.

Antes, porém, de chegar a essa “outra definição” de número irracional, Rezende (1994) afirma que parte significativa dos alunos considerava os números “confusos”, ou “difíceis de entender a sua estrutura”, como números irracionais. Um fato curioso pôde ser observado com relação ao número 0,999.... Este número foi classificado majoritariamente como racional fracionário. O mesmo aconteceu com o número 0,15781757817578175.... No entanto, os licenciandos não conseguiram determinar a razão de números inteiros que representava esse número. Rezende (1994) afirma que procuraram lembrar-se da regra que transforma uma dízima periódica em uma fração, mas sem sucesso. Depois de algumas tentativas e com a orientação e sugestão do professor para que procurassem resolver esta questão de forma análoga ao primeiro raciocínio utilizado para mostrar que 0,999... = 1.

Sabe-se que o problema de classificar o número 0,12345678910111213... é o mesmo de classificar 0,1010010001... Em ambos os casos, o número não apresenta um período, mas possui uma “estrutura lógica”. Este item foi colocado no questionário, conforme nos revela o autor da pesquisa, com o objetivo de reavaliar esta posição em relação ao número irracional (isto é, número irracional como um número “confuso”). O resultado obtido na pesquisa foi bem dividido: uma parte do grupo classificou-o em irracional e a outra não sabia como classificá-lo. Diante desses resultados o autor concluiu os seguintes fatos:

1) que a descoberta da tal “regra” que transforma dízimas periódicas em frações reforçou a representação decimal de um número racional como uma decimal exata ou uma dízima periódica, o que fez com que eles eliminassem a possibilidade de 0,1234567891011... ser racional;
2) que a classificação deste número como irracional foi feita por eliminação, isto é: como o número não é uma dízima periódica e nem uma decimal exata, então este número deve ser irracional;

3) os que não aceitam a conclusão deste raciocínio por eliminação e, por conseguinte, ficam em dúvida na hora de classificar o número dado, desejam encontrar também uma representação decimal para os números irracionais de modo que se possa caracterizá-los por critérios bem definidos, e não "simplesmente" por uma negação lógica, isto é, como um número que não é racional.

Dessa forma, os licenciandos admitem a possibilidade de existirem números decimais que não são racionais, mas que também podem não ser irracionais. Ao que parece, os números irracionais continuam "nebulosos" para os alunos que participaram da pesquisa. Isto posto, surgem algumas questões naturais: Como justificar as atitudes ingênuas de alunos (futuros professores de matemática) em relação à noção de número real (irracional), mesmo na fase final de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática? Cabe ressaltar que parte desses alunos já tinha cursado as disciplinas de Cálculo e/ou estavam cursando uma disciplina de Análise Real. Onde estariam então as razões para essas atitudes?

Em outro momento, no desenvolvimento de sua tese de doutorado sobre o ensino de Cálculo, Rezende (2003) fala-nos acerca de uma ignorância da dualidade discreto/contínuo no ensino básico de Matemática:

> No processo pedagógico, a dualidade discreto/contínuo é completamente ignorada desde os níveis mais elementares do ensino de Matemática. A consequência mais imediata é o hiato estabelecido entre a aritmética e a geometria, com o sacrifício da primeira. O prejuízo da aritmética de que fala o autor pode ser sentido naquela que é a sua noção fundamental: o número. Excetuando os números naturais, que são construídos a partir do problema histórico da contagem, os demais (inteiros, racionais e irracionais) estão associados à "construção da reta numérica". Os números reais são dessa forma uma "medida" na reta numérica, e as suas representações decimais ou são finitas ou são "aproximadas": $\pi = 3{,}14$; $\sqrt{2} = 3{,}14$ etc. Assim, os números irracionais continuam no processo pedagógico, tal como outrora, "nebulosos", "surdos", números que "não dizem nada" e que não possuem uma posição definida na reta numérica – "estão sempre andando na reta". (REZENDE, 2003, p.346-347)

O autor afirma ainda que o cenário pedagógico que se apresenta em torno do número irracional não é diferente daquele desenvolvido pelos matemáticos do Renascimento.

> Os matemáticos europeus dessa época, apesar de terem descoberto – com o auxílio de um sistema de numeração posicional herdado das civilizações hindu-árabes – que os números irracionais eram identificáveis a números decimais “sem fim”, cujos algarismos após a vírgula nunca se reproduzem na mesma ordem, não conseguiram identificá-los na reta numérica. Por isso, tais números foram denominados “nebulosos” ou “surdos” pelos próprios matemáticos. (REZENDE, 2003, p. 347)

Fazendo um paralelo entre esses dois momentos históricos, Rezende (2003) procura compreender o caráter “nebuloso” do número irracional no processo pedagógico.

> Em verdade, a privação a que se submetem nossos estudantes é muito maior: escondem deles inclusive os problemas motivadores e as dificuldades intrínsecas à construção do significado do número irracional. É assim, por exemplo, quando, no ensino fundamental, ensina-se, por meio de uma regra prática, que a dízima periódica 0,333... é a representação decimal da fração $\frac{1}{3}$; ou quando, no ensino médio, ensina-se que a soma infinita de uma progressão geométrica (a_n) de razão q (0 < | q| < 1) é dada pela fórmula algébrica $\frac{a_1}{1-q}$. Assim, a dízima periódica, uma denominação aritmética para as séries geométricas, é camuflada e “resolvida” aritmeticamente. E, com esta camuflagem, as séries são relegadas a um segundo plano no ensino básico de matemática. Desse modo, torna-se inevitável no campo pedagógico a quebra entre a representação decimal de um número irracional (discreto) e a sua representação geométrica (contínua). Nesse sentido, seria interessante que se realizassem algumas antecipações do binômio séries/limites no ensino básico para que houvesse uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais. Não se pretende com isso antecipar a construção formal dos números reais para o ensino básico. O que se quer é oferecer ao estudante um cenário real das dificuldades da significação deste conceito, ao passo que, com esta apresentação, alguns elementos essenciais do “pensamento diferencial” – como a noção intuitiva de limite e as séries – já pudessem ser iniciados. Além disso, o aluno poderia vislumbrar, com essa antecipação, outros processos de aproximações possíveis para alguns números irracionais notáveis. Assim, em vez de identificar π simplesmente com valor racional 3,14, o aluno poderia desenvolver outros procedimentos de aproximação, percebendo, através destes, as dificuldades intrínsecas, a problemática do número irracional. No entanto, esta interface entre a representação decimal de um número irracional e a sua representação geométrica não é realizada em momento algum do ensino de matemática. Ao contrário, pode-se dizer que no processo didático coexistem “duas” definições de número irracional. (REZENDE, 2003, p. 349)

Igliori e Silva (2001) investigaram 36 alunos iniciantes do curso de ciências da computação e 14 alunos finalistas do curso de licenciatura em matemática em relação a suas concepções sobre os números reais. Um fato salientado pelos autores e que merece destaque é em relação ao desempenho dos alunos concluintes em relação aos iniciantes, porém muitas concepções erradas resistem após um curso introdutório de Análise Real, tratado de forma tradicional. As concepções associadas à irracionalidade: a representação de decimal ilimitada; a não exatidão, e associação de aproximação de números.

Os autores destacam que a maioria dos conteúdos de matemática necessita da compreensão dos números reais e muitas pesquisas apresentadas revelam a grande dificuldade em seu entendimento. Se por um lado, esses resultados mostram lacunas presentes nos saberes de alunos e professores, por outro motiva a continuidade de pesquisas como esta. Por essa razão, a próxima seção se destina a um breve tratado histórico sobre o tema.

1.3 Uma história dos números reais

No caso específico dos processos de ensinar e aprender Matemática, faz-se necessário considerar a sua dimensão histórica em interdependência com os aspectos lógicos do conhecimento. Desse modo, o encaminhamento teórico-metodológico do ensino de matemática deve respeitar o aspecto epistemológico-histórico do conhecimento matemático que contempla, de forma articulada, o lado histórico do conceito, bem como a sua essência, o epistemológico. Portanto, trabalhar com a unidade histórica-epistemológica no ensino de Matemática constitui um modo de desenvolver os conhecimentos matemáticos considerando o seu processo de produção, ou seja, eles são entendidos como produto da atividade humana diante das necessidades objetivas enfrentadas pelos homens (DIAS, 2002).

Conforme Moretti (2007), são as necessidades humanas que mobilizam os homens na produção de instrumentos. Foi a necessidade de controlar as quantidades que os fez criarem o sistema de numeração. Compreender a essência das necessidades que moveram a humanidade na busca de soluções que possibilitaram a construção social dos conceitos é parte do movimento de compreensão do próprio conceito. Assim, o aspecto histórico associa-se ao aspecto epistemológico no processo de conhecimento de um determinado objeto de estudo e é só nessa unidade dialética que o conhecimento desse objeto é possível.

Partindo dessa concepção, defende-se que as atividades de ensino devem revelar o processo de produção do conceito, considerando seu aspecto epistemológico-histórico. No caso do ensino de matemática, o trabalho nesta perspectiva possibilitará ao professor e ao estudante compreenderem essa ciência como uma produção humana.

Em particular para o ensino de matemática, é fundamental que a história do conceito permeie a organização das ações do professor de modo que esse possa propor aos seus estudantes problemas desencadeadores que tragam em si a essência do conceito. Isso implica que a história da matemática que envolve o problema desencadeador não é a história real, mas sim aquela que está impregnada no conceito ao se considerar que esse conceito objetiva uma necessidade humana colocada historicamente (MORETTI, 2007).

Roque (2012) acredita que quando os alunos pedem para que a matemática se torne mais "concreta", eles podem não querer dizer, somente, que desejam ver este conhecimento aplicado às necessidades práticas. Talvez eles demandem compreender seus conceitos em relação com algo que lhes dê sentido. Este pode ser o papel mais importante da história da matemática para o ensino.

Ainda segundo a autora, a maior parte dos livros de história da matemática publicado em língua portuguesa reproduzem a lenda de que a descoberta dos números irracionais causou uma crise nos fundamentos da matemática praticada na Grécia. Alguns afirmam que essa crise só teria sido resolvida com a definição rigorosa dos números reais, proposta por Cantor e Dedekind no século XIX (ou seja, mais de vinte séculos depois). A autora afirma que esse mito apontou direções importantes no modo como a história da geometria grega foi estruturada e segue:

> Hoje dizemos que duas grandezas A e B são comensuráveis se a razão entre elas pode ser expressa por um número racional, pois isso significa que existe uma terceira grandeza C que cabe em A e B um número inteiro de vezes. Caso contrário, se a razão entre as grandezas não puder ser expressa por um número racional, dizemos que são incomensuráveis. O problema, no entanto, não era proposto desse modo na época e não envolvia números racionais. Um de nossos principais objetivos, aqui, é desconstruir os mitos envolvidos na chamada "crise dos incomensuráveis". Essa tese tem origem em obras já ultrapassadas que constituem um exemplo paradigmático de um modo de fazer história da matemática – hoje contestado – baseado em pressupostos modernos sobre a natureza dessa disciplina. As narrativas sobre o suposto escândalo provocado pela descoberta dos incomensuráveis citam também os paradoxos de Zenão, por isso descreveremos brevemente seus enunciados, mostrando que estes tinham um fim filosófico e não matemático. (ROQUE, 2012, p. 76)

Apesar de Roque (2012) questionar a validade da tese historiográfica a respeito da crise dos incomensuráveis, a própria autora afirma que não se pode negar que a descoberta de que duas grandezas podem não possuir uma medida comum teve consequências importantes.

> Uma delas ajuda a explicar o caráter formal e abstrato da geometria – tal como exposta nos Elementos de Euclides –, pois o fato de que duas grandezas possam ser incomensuráveis desafia o testemunho dos sentidos, o que talvez tenha motivado um novo modo de fazer geometria. Ao final, a partir de um diálogo de Platão, o Mênon, tentaremos entender como a possibilidade de existirem incomensuráveis se relaciona à necessidade de se trabalhar sobre um espaço abstrato em geometria. O principal problema posto pela possibilidade de haver segmentos incomensuráveis é a contradição da ideia intuitiva de que dois deles sempre possuem uma unidade de medida comum. Ou seja, ainda que cada segmento admita ser dividido em partes muito pequenas, o fato de dois segmentos não serem comensuráveis significa que não é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos. Essa descoberta contradiz o senso comum, como indica Aristóteles: “Sobre a incomensurabilidade do diâmetro em relação à circunferência, nos parece admirável que uma coisa não seja mensurável por meio de outra que é divisível em partes muito pequenas. (ROQUE, 2012, p. 76-77)

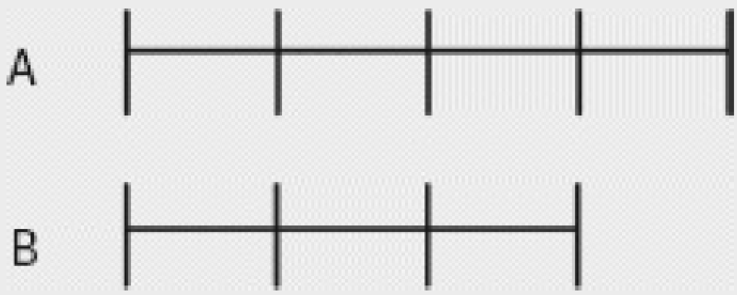
A autora segue com um quadro em que trata dos procedimentos de medida e da incomensurabilidade, reproduzido na Figura 1 a seguir.

Figura 1 - Procedimentos de medida e a incomensurabilidade

PROCEDIMENTOS DE MEDIDA E A INCOMENSURABILIDADE

A medida é um procedimento que permite reduzir grandezas a números. Dado um segmento, podemos medir seu comprimento. Dada uma superfície bidimensional no plano, podemos obter a medida de sua área. Para medir, o primeiro passo é escolher uma unidade de medida. Duas medidas da mesma natureza devem possuir uma unidade de medida comum. Cada grandeza é identificada, assim, ao número inteiro de unidades de medida que a compõem. A medida torna possível, portanto, a correspondência entre qualquer grandeza e um número inteiro, ou uma relação entre inteiros.

Como "medir" significa, essencialmente, "comparar", precisamos, na maioria das vezes, subdividir uma das grandezas para obter uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas. Suponhamos que queiramos comparar os segmentos A e B. Como B não cabe um número inteiro de vezes em A, podemos dividir B em 3 e tomar a unidade como sendo um terço de B. Como essa unidade cabe 4 vezes em A, a comparação de A com B nos fornece a razão 4:3. É desse tipo de comparação que surgem as medidas expressas por relações entre números inteiros, que chamamos, hoje, de "racionais" (justamente por serem associados a uma razão).



Mas será que é sempre possível expressar a relação entre grandezas por uma razão entre inteiros? Tal problema é equivalente à seguinte questão: dados dois segmentos A e B, é sempre possível subdividir um deles, por exemplo B, em um número finito de partes, de modo que uma dessas partes caiba um número inteiro de vezes em A? Intuitivamente, se pensamos em grandezas físicas, é lícito supor que sim. Ou seja, se as partes de B puderem ser tornadas muito pequenas, parece ser sempre possível encontrar um segmento que caiba em A um número inteiro de vezes, ainda que este seja um número muito grande. A descoberta das grandezas incomensuráveis mostra que isso não é verdade; logo, nossos sentidos nos enganam quando admitem essa possibilidade.

Fonte: Roque, 2012, p.78.

Embora a história mostre que levaram muitos anos até que fizesse sentido a noção de medidas incomensuráveis para a construção de números reais, os que se conhecem hoje, ainda há uma dificuldade e, mesmo alguns conceitos que estão fora dos livros didáticos, ou neles estão de forma simplista, mas que são essenciais para a compreensão de fato, não são devidamente justificados; por isso passam uma ideia errada para o estudante: sem entender o que são e para que servem os números irracionais a compreensão dos números reais ficará inconsistente.

A próxima seção traz uma breve análise de livros didáticos sobre a apresentação dos números reais.

1.4 Os números reais no Guia do Livro Didático do PNLD2018

Encerrando a revisão de literatura, esta seção tem por objetivo destacar o que dizem as resenhas das coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNDL) 2018 sobre números reais. O livro didático é um instrumento que vincula o ensino e a aprendizagem, por vezes único meio de pesquisa e apoio ao professor e ao aluno. Por esse e outros motivos é que a escolha desse material deve ser feita de forma.

As coleções destacadas são obras que foram aprovadas pelo Ministério da Educação no âmbito do PNLD 2018. Essa aprovação se dá por meio de uma avaliação que reúne docentes de diversas instituições do país, especialistas em ensino e aprendizagem de matemática. Ao final, esses profissionais elaboram resenhas que descrevem e avaliam as obras, com o objetivo de subsidiar os professores do ensino médio na escolha dos livros que irão adotar nas escolas públicas onde ensinam. O documento que reúne essa análise de especialistas é chamado Guia do Livro Didático. A seguir, o que dizem as resenhas dos livros do PNLD2018 sobre o tema em estudo.

Coleção: Matemática: ciência e aplicações
Autores: David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo
Editora: Editora Saraira, Ano: 2016
Trecho da Resenha:

> *Os conteúdos deste campo, os números, em sua maioria, são trabalhados com base na resolução de problemas, o que favorece o desenvolvimento e a compreensão dos conceitos e procedimentos. O estudo dos conjuntos numéricos é sintético e, de modo geral, claro. A argumentação construída apoia-se na ampliação progressiva dos conjuntos numéricos, exigida para que seja possível efetuar operações. No trabalho com números irracionais, são considerados outros números diferentes de* $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ *e* π*, com a apresentação*

> *do número áureo (número de ouro) e de números construídos por padrões que indicam produzir uma representação decimal infinita e não periódica. É igualmente acertado o uso da calculadora, na exploração do cálculo de aproximações racionais de números irracionais.*

Livro: Matemática – Paiva

Autores: Manoel Paiva

Editora: Moderna, Ano: 2015

Trecho da Resenha:

> *No campo dos números, recorre-se, adequadamente, a diferentes tipos de representações para a abordagem e demonstração de propriedades, em especial no estudo de conjuntos. Acertadamente, o estudo dos irracionais inicia-se com a determinação do comprimento da diagonal do quadrado de lado unitário. Contudo, não se esclarece que tal medida não se refere ao mundo físico, apenas à teoria matemática.*

Livro: Matemática - contexto & aplicações

Autores: Luiz Roberto Dante

Editora: Ática, Ano: 2016

Trecho da Resenha:

> *No volume 1, há um tratamento adequado das representações e simbologias relativas aos conjuntos. O estudo dos conjuntos numéricos é feito por sistematizações, mas quase sempre baseadas em definições e em poucos exemplos. O estudo do número irracional se inicia, no volume 1, por meio da exploração intuitiva de alguns exemplos e referências históricas. Demonstra-se, apropriadamente, a irracionalidade do número $\sqrt{2}$.*

Livro: Matemática para compreender o mundo

Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz

Editora: Saraiva, Ano: 2016

Trecho da Resenha: não há referência sobre a construção dos reais.

Livro: Matemática: interação e tecnologia

Autores: Rodrigo Balestri

Editora: Leya, Ano: 2016

Trecho da Resenha:

> *No campo, os conjuntos numéricos são focalizados com apoio na história da Matemática, tanto no que diz respeito ao seu surgimento quanto à sua ampliação. Observa-se inadequação na representação dos conjuntos numéricos, por diagrama de Venn*.

Livro: Conexões com a matemática

Autores: Fabio Martins de Leonardo

Editora: Moderna, Ano: 2016

Trecho da Resenha:

> *Os conjuntos numéricos são abordados de modo sucinto, em especial no que concerne às necessidades, funcionalidades e características de cada um. Assim, são exploradas, acertadamente, tanto as diferentes representações dos números racionais, como a noção de subconjuntos dos números reais por meio de intervalos. Recorre-se à história da Matemática na obtenção de* $\sqrt{2}$ *e a uma demonstração apropriada de sua irracionalidade, para iniciar o estudo dos números irracionais.*

Livro: #Contato Matemática

Autores: Jacqueline Garcia e Joamir Souza

Editora: FTD, Ano: 2016

Trecho da Resenha:

> *Alguns conceitos recebem muita atenção, em prejuízo de outros. É o caso de operações e simbologia de conjuntos, cuja abordagem é privilegiada, enquanto os conjuntos numéricos são reapresentados no livro do 1º ano, porém de maneira aligeirada. Em geral, há poucas discussões mais aprofundadas sobre números irracionais.*

Livro: Quadrante - Matemática

Autores: Diego Prestes e Eduardo Chavante

Editora: SM, Ano: 2016

Trecho da Resenha:

> *A abordagem dos tópicos relativos à teoria dos conjuntos e aos conjuntos numéricos é adequada. No entanto, mesmo não sendo recomendado um tratamento formal de tais conceitos nesse estágio de escolaridade, em alguns momentos observa-se excesso de informalidade, o que pode comprometer a aprendizagem.*

Um dos objetivos que o livro didático tem é a apresentação do conjunto dos números irracionais para alunos do primeiro ano do ensino médio de forma satisfatória. Seguindo geralmente uma sequência e após ser apresentado os racionais são introduzidos os irracionais, abrindo espaço para uma formalização adequada do conjunto dos números reais. Como seria possível passar dos racionais para os reais sem falar dos irracionais? Sem os irracionais o conceito de números reais ficaria incompleto.

A passagem dos números racionais para os irracionais passa por um conceito muito importante: o da completude dos reais. Mesmo que de forma velada todo o livro didático deveria tocar no assunto, o que, a partir das resenhas, não parece ser o caso. Por outro lado, nos cursos de Análise Real a apresentação dos números reais se dá via axiomas, em que consta que $\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano, ordenado e completo. Ao professor cabe relacionar esses conceitos da Análise Real para sua realidade em sala de aula, idealmente isso deveria ser feito também pelos professores de Análise Real, na Licenciatura em Matemática, aprimorando e ampliando o entendimento dos licenciandos sobre aqueles objetos matemáticos que farão parte de suas práticas como futuros professores na Educação Básica.

2 CAMINHOS DA PESQUISA

Nesse capítulo será descrito o percurso da pesquisa exploratória, realizada em paralelo à revisão de literatura já apresentada. Aqui, são elencados o contexto da pesquisa, seus sujeitos e os instrumentos para coleta de dados.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, realizada em 2017, ao longo de quatro semanas, que objetivou inferir sobre as concepções de professores de Matemática sobre números reais e seu ensino, em um curso de extensão oferecido gratuitamente a distância, por meio de um ambiente virtual de aprendizagem. As inscrições para o curso foram a distância e contaram com mais de 300 inscritos, no entanto, apenas 40 foram selecionados, respeitando o número de vagas do Edital da Diretoria de Extensão da Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Rio de Janeiro, promotora do curso.

O curso, intitulado “Analise Real e Sala de Aula: buscando interlocuções” contou com a participação de 40 professores de diversas regiões do país, todos atuantes na Educação Básica e alguns, também, na Educação Superior, em cursos de Licenciatura em Matemática. O objetivo primordial do curso de extensão foi discutir questões sobre alguns tópicos no ensino de números e funções reais e como a Análise Real contribui para esses temas no contexto da Educação Básica. Artigos foram disponibilizados e algumas tarefas foram propostas a fim de fomentar a reflexão coletiva do grupo de professores em formação continuada e também do mediador, o orientador deste trabalho de conclusão de curso. O que está de acordo com o exposto no Capítulo 2, no qual discute-se que as concepções se constroem ou se modificam com as inquietações pessoais e interações sociais.

A escolha da pesquisa qualitativa como abordagem de investigação foi feita com o objetivo de entender os frequentes insucessos no ensino dos números reais no ensino médio e pensar de maneira coletiva, a partir da literatura de pesquisa, maneiras para melhorar este quadro.

Dentre os objetivos do curso, esteve também o de revisitar conceitos da Análise Real e associá-los com os conteúdos do ensino médio. A disciplina Análise Real traz ao licenciando uma fundamentação necessária a uma visão aprofundada do conhecimento matemático que se estuda na Educação Básica sobre números e funções reais. Este conhecimento é necessário para que o professor possa perceber problemas epistemológicos importantes nas abordagens usuais dadas a conceitos como números racionais e irracionais, sequências, funções, continuidade, entre outros. Permite ao futuro professor discutir de modo mais amplo o conhecimento que irá lecionar. Atuaria também na fundamentação da ênfase (maior ou menor) a ser dada ao ensino de certos tópicos.

Em particular, algumas discussões sobre o conteúdo números reais, entraram em pauta e receberam grande destaque no curso, com intuito de fazer um questionamento ou até mesmo provocar uma inquietação nos cursistas, de modo que surgissem naturalmente questões como: Como os professores abordam esse tema em sala de aula? E quais os “nós” que precisam ser desfeitos? Quais as propostas de mudanças? E quais as falhas que ocorrem no ensino desse conteúdo? E por fim como o estudante aprende essa parte importante da matemática? O quadro 1 a seguir apresenta a estrutura do curso de extensão.

Quadro 1 - Estrutura do Curso “Análise Matemática: ensaios em sala de aula”

Nº.	Título da Etapa	Texto de apresentação das etapas
1	Por que Análise Matemática na Licenciatura?	Nessa etapa discutiremos sobre os possíveis porquês de se estudar Análise na Licenciatura em Matemática, a partir da leitura do texto base.
2	O problema da comensurabilidade e a expansão decimal dos reais	Algumas inquietações para nortearem as leituras… tente responde-las mentalmente, organize as ideias e as esboce em um arquivo de texto. Em seguida, leia os artigos disponibilizados e tente responde-las novamente. Suas concepções mudaram? 1) Dados dois segmentos de reta, sempre existirá uma unidade, expressa por um número racional, que possibilite escrever um como múltiplo do outro? Como você entende isso? Como explicaria para um aluno? 2) Como é feita a expansão decimal de um número real? A expansão é sempre possível? Se dá da mesma forma para os racionais e os irracionais ou muda algo? Se muda, o que? Como você entende isso? Como explicaria para um aluno?
3	A densidade dos racionais sobre os reais	Continuaremos explorando o conjunto dos números reais, sua construção e algumas de suas propriedades. Não se espantem se retomarmos algumas questões, o objetivo é refinar nosso entendimento e buscar articulações mais profundas entre o que se estuda em Análise e o que se estuda na escola, além, claro, de nos provocar do ponto de vista didático-pedagógico.
4	Números Reais, Sequências e Séries Numéricas	Aqui encerraremos as discussões sobre os números reais com dois fóruns simultâneos: no primeiro, analisaremos as respostas de alunos dos Ensinos Fundamental, Médio e da Licenciatura em Matemática a um questionário sobre números reais, preparado originalmente para ser respondido por alunos do último ano do Ensino Fundamental. Já no segundo fórum, trataremos sobre os conceitos de sequências e séries numéricas por meio do GeoGebra.
5	Os conceitos de limite e continuidade	Aqui pensaremos um pouco sobre as ideias associadas aos conceitos de limite e continuidade, fazendo uso de algumas atividades desenvolvidas com o GeoGebra.
6	O problema das retas tangentes a uma curva, taxas de variação e o conceito de derivada.	As ideias associadas ao conceito de derivada, exploradas por meio de diferentes tipos de atividades, são o mote dessa etapa.
7	A área de uma região plana e o conceito de integral.	Aqui trataremos de alguns problemas que talvez permitam explorar a gênese do conceito de integral no Ensino Médio.
8	Mais uma vez: por que Análise Matemática na Licenciatura?	Ao longo dessas semanas tivemos a oportunidade de discutir sobre diferentes conceitos envolvendo números reais e limite, derivada e integral de funções reais a uma variável real. Utilizamos diferentes abordagens, como a de tentar conceituar a partir de ideias mais elementares, muitas vezes intuitivas, fizemos uso de calculadora e de *Mathlets* desenvolvidos no GeoGebra, elaboramos problemas, sequências didáticas e tentamos revisitar alguns conceitos importantes da Análise e que podem se articular com conceitos sobre números e funções reais como estudados na escola. Nosso objetivo não foi o de um curso de Análise, mas, como propõe o título, realizar alguns ensaios possíveis para sala de aula. No fórum dessa última etapa, convido vocês a responderem novamente: por que Análise na Licenciatura? Fiquem à vontade para usar exemplos do curso que justifiquem ou não suas respostas, de forma positiva ou negativa, inclusive.

Fonte: Esquincalha, Bairral, 2017, p. 4.

Neste trabalho o interesse está na análise da participação dos professores nas etapas dois e três do curso. Os textos utilizados e as propostas de discussão são explicitados a seguir. Algumas das respostas serão apresentadas no Capítulo 3.

Etapa 2: O problema da comensurabilidade e a expansão decimal dos reais

Na Etapa 2 exploraremos dois temas muito importantes para a construção do conhecimento profundo sobre os números reais. Historicamente, percebemos que esses assuntos são poucos discutidos na Licenciatura e nas salas de aula da educação básica.

Algumas inquietações para nortearem as leituras... tente responde-las mentalmente, organize as ideias e esboce um rascunho em um editor de texto. Guarde esse arquivo! Em seguida, leia os textos disponibilizados e tente responde-las de novo, no mesmo arquivo. Você precisou rever algum conceito?

- ***Texto base: Crítica do problema da medida (Caraça, 1951)***
- ***Texto base: A representação decimal dos reais (Garcia, sem data)***

- ***Fórum Temático 2***

  1) Como você costuma construir os conjuntos dos números racionais e irracionais em sala de aula?
  2) O que você entende por infinidade, ordenação, densidade e continuidade?

Etapa 3: A densidade dos racionais sobre os reais

Na Etapa 3 continuaremos explorando o conjunto dos números reais, sua construção e algumas de suas propriedades. Não se espante se retomarmos algumas questões, o objetivo é refinar nosso entendimento e buscar articulações mais profundas entre o que se estuda em Análise e o que se estuda na escola, além, claro, de nos provocarmos do ponto de vista didático-pedagógico.

- ***Fórum Temático 3***

  A partir das questões apresentadas a seguir, discutidas por alunos de ensino fundamental, e apresentadas por Kindel (1998), faça o que se pede abaixo.

  Junto com seus colegas, faça uma análise desses comentários. Procure evidenciar: qual é o objetivo do problema? Que conteúdos matemáticos estão por trás do problema? Como se dá a organização do pensamento dos alunos? A que conclusões chegam ao longo da discussão? Estão corretas? Existem imprecisões em alguma linha? Quais? Como você faria para reconduzi-los a um "melhor caminho"?

***Problema 1**: Divida um número por nove. Use a calculadora para efetuar a divisão e observe o resultado que aparece no visor. Anote no seu caderno as frações, no caso nonos, e o resultado. O que pode dizer?*

Comentários dos alunos do Ensino Fundamental:

L1. Todo número dividido por nove dá zero vírgula número, número, número.

L2. Todo número quando for menor que nove e for dividido por nove dá 0.nºnºnº... e quando o número for múltiplo de nove vai dar inteiro.

L3. Para valores maiores do que nove "Muda tudo! Exemplo, 12/9 é diferente de 0,1212... A gente pensava que dava a mesma coisa. Só que dá 1,333..

L4. Só vai até 8: 0,888...; 1,888...

L5. Não existe 0,999..., 1,999..., 2,999...

L6. Deve ser porque 9/9 é igual a 1 e aí não aparece 0,999...

L7. Claro! 9 é múltiplo de 9! Um dos alunos do grupo interveio e perguntou que número daria 0,121212...

L8. Não existe nenhum número dividido por nove que dá 0,121212...

L9. Para dar zero vírgula alguma coisa, é preciso que o numerador seja menor do que o denominador.

Um aluno que parecia estar alheio a esta discussão disse

L10. Não pode fazer conta com vírgula porque não é fração.

L11. Toda fração é uma divisão do numerador pelo denominador

L12. Posso dividir o inteiro pelo denominador e pega-se a quantidade referente ao numerador.

L13. Quando a divisão for com um número com vírgula , isso não é fração.

L14. E aí! O que pretendem fazer agora?

L15. 90.

L16. Profª: Por quê?

L17. Porque é perto de 100 e tem dois algarismos também.

L18. Profª: Numerador deve ser maior ou menor do que 90?

Problema 2: *Divida diferentes números por nove. Na aula passada, estabeleceu-se regra para os numeradores menores do que nove. Mas o que acontece quando os numeradores estão entre 10 e 100, entre 100 e 1000? Ou seja, a atividade de hoje é para observar os nonos que estão entre 10/9 e 100/9, entre 100/9 e 1000/9, outras.*

Comentários dos alunos do Ensino Fundamental:

L1. Eu não entendi aquilo ali.

L2. Não.

L3. É para dividir por 9 entre 10 e 100 e depois entre 100 e 1000 e ver o que acontece.

L4. Não é só entre 100 e 1000, não. Depois vai 1000 e 1001.

L5. É, mas a princípio é isso.

L6. Mas ali embaixo tem o etc.

L7. Tem o etc, mas a princípio só até 100. É isso.

L8. Dez dividido por nove...

L9. Dá 0,999...

L10. Não dá!

L11. Não dá 0,9 não?!

L12. Você botou um divide? Você botou 9 dividido por 10.
L13. Não.
L14. Não, mas a gente tem que ir um atrás do outro assim para começar a ter uma regra já.
L15. É, tem que ir seguido, 10, 11, 12...
L16. Olha, gente! Eu estava pensando que podia ser assim: o nº que se repete fica assim; o nº mais quatro. Por ex. 14 dividido por 9 vai dar 1+4= [ ] 14 dá 5 então [muda de assunto e fala de outras coisas]
L17. Depois peguei o 25 e deu 8, 25 + 2+ 1= 28
L18: 28 não deu, então fica 8 + 10, 11 deu 2
L19. Deu 3 e e e e ..Dá 2. [risos]
L20. Então poderia ser assim: o nº em vez de somar, subtrai.[...]
L21. Eu já descobri mais ou menos.
L22. Fala!
L23. Quando é entre 10 e 20 dá sempre o último nº mais um. Se você for ver é tudo mais um. Depois no outro deve ser mais dois, porque não tem nove, nove, nove. Ou mais 2 ou mais 3.
L24. Claro! Óbviuuu.! Presta atenção!
L25. Fala. Porque quando é menor que dez dá um número exato, daquele nº, entendeu? Passa para cá é mais dois.
L26. [fala pausadamente] 30 vai ser mais três. 40 vai ser mais quatro. 50 vai ser mais cinco. 60 é mais 6. 100 vai ser mais 10!
L27. 19 + 1=20.
L28. Quanto vai dar? 21?
L29. Dá 2,1 Porque esse não dá.
L30. Por isso é que tô falando que é mais dois. Não é mais um é mais dois. Quando for no 30 vamos ver se não vai ser mais 3! 30/9 é mais 3, 3,333...
L31. Já sei então como explicar essa regra.
L32. E olha aqui.
L33. Esse nº mais o último múltiplo, mais o resultado do último múltiplo. Quer ver passou do 18 então esse é mais dois.
L34. Como é que é isso?
L35. Você vai ver que é.
L36. Presta atenção. Não to entendendo! O certo é somar mais um, quando o primeiro for um.; mais dois quando o segundo for dois. A regra é essa Não tem outra opção. Quando o primeiro número for um, o nº é 2. O nº é esse. Olha aqui. Esse aqui vai ser 12.
L37. E o 19 dá quanto? 19 dá.
L38. 21, dois vírgula um.,.29 também,39 também, tá entendendo? Acho que é isso. Presta atenção! Deixa, deixa, deixa. Você tá entendendo! Acho que é isso. Deixa, deixa, deixxx....
L39. Ao resultado da última conta, daquele múltiplo.
L40. Esse é múltiplo não é? Porque 9 dividido por 9 e´ um, depois vai dar dois, depois do dois até o próximo múltiplo vai somar dois. Depois do dois entre esse múltiplo e esse múltiplo vai ter que somar dois depois vai dar três.
L41. Claaaaro!

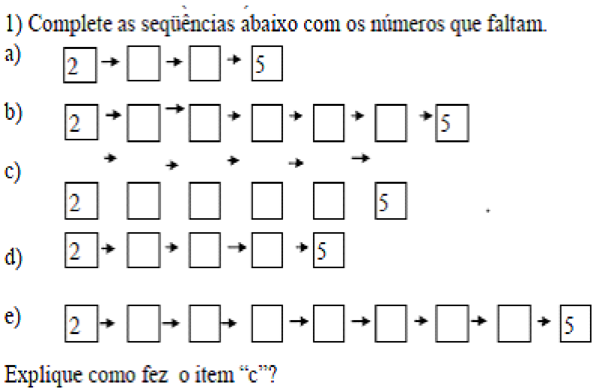
L42. Então. Foi isso que eu falei.
L43. Não tá certo?!
L44. Então resolve um aí sem fazer a conta .
L45. Fala.
L46. É é é 53.
L47. Sem fazer a conta !
L48. Vai ficar mais cinco.
L49. x.. Bota x vírgula [pausa] vai ter que botar um natural. Tem que saber o que bota no final.
L50. No caso: x
L51. Profª: Pego x. x dividido por 9. O que você faz?
L52. Qual foi a última divisão? O último múltiplo, qual foi?
L53.Profª: Ahhh!!! Você pega o último múltiplo de nove e vê qual é o resultado.

***Problema 3**: João e Maria perderam-se na floresta. Na estrada havia toras de madeira nos dois lados durante todo o percurso. Uma bruxa, que também andava pela floresta, quando os encontrou, deu-lhes uma tarefa como desafio. Se a tarefa fosse cumprida, estariam salvos, caso contrário morreriam. Cada uma das crianças deveria seguir por um dos lados da estrada. Para Maria ela disse:*
Maria, você pegará a primeira tora e a colocará no saco.
A segunda você cortará em dois e colocará um pedaço no saco.
A terceira você cortará em três e colocará um pedaço no saco.
A quarta você cortará em quatro e colocará um pedaço no saco. E assim por diante.
a) Quanto Maria colocará no saco? Justifique.
b) Represente a situação graficamente.
Ao João a bruxa deu a seguinte tarefa:
A primeira tora você colocará no saco.
A segunda você cortará em dois e colocará um pedaço no saco.
A terceira você cortará em quatro e colocará um pedaço no saco.
A quarta você cortará em oito e colocará um pedaço no saco. E assim por diante.
a) Quais os pedaços que João colocará no saco?
b) Quanto ele colocará no saco? Justifique.
c) Represente graficamente.
1) Ao compararmos o que cada um colocou no saco, o que se pode observar?
2) Quem carregará mais peso?
3) Quem chegará na casa da bruxa? Por quê?

Comentários dos alunos do Ensino Fundamental:
L1. [alunos do grupo 1] Professora! Este problema não tem solução, faltam dados.
L2. É!
L3. Está incompleto. Como vou saber quanto carregar, se não diz quanto pesa cada tora?

L4. Nem diz quantas toras tem na estrada! Ou pelo menos quanto mede a estrada.
L5. Profª: Calma. Vejamos: porque está incompleto?
L6. Faltam dados. Como é que vou saber quanto que Maria carrega, se não sei quanto mede cada tora?
L7. É! Eu preciso saber seu tamanho para poder calcular!
L8. Profª: Para esclarecer, vamos supor que as toras sejam iguais e a estrada tem o mesmo número de toras de cada lado.
L9. Tudo bem! Mesmo faltando informações eu sei que:
L10. Primeiro Maria coloca uma tora, depois a metade, depois a terça parte e [interrupção do grupo]
L11. Um quarto, um quinto, e assim vai.
L12. É. Só que é esquisito porque não vai dar para saber quanto ela carrega exatamente. A bruxa é mágica e deu para eles uma serra mágica e aí sempre é possível cortar sem fazer força.
L13. Ué! Se a floresta é encantada nada disto importa. O que importa é o que cada um vai carregar. Como carrega e quanto de peso tem não importa.
L14. Olha só, professora! A gente sabe que a Maria carrega: um, um meio, um terço, um quarto, um quinto e etc e que o João carrega um, um meio, um quarto, um oitavo e etc.
L15. João dispara!!
L16. Não! A Maria carrega muito mais, porque seus pedaços são maiores.
L17. Fizemos o seguinte: Na primeira tora Maria carrega o mesmo que o João. Depois Maria e João carregam meia. Na terceira tora Maria carrega um terço e João carrega a quarta parte. Então Maria carrega mais. Depois na quarta a Maria carrega o que o João carregou antes e João só carrega a metade do que carregou antes, então Maria carrega muito mais do que o João. E assim vai...Então Maria vai carregar muito, muito mais do que João.
L18. [alunos do grupo 2] A gente fez parecido, só que a gente fez assim: Vimos primeiro o que Maria carrega e depois o que o João e depois comparamos. Maria carrega uma depois meia, um terço, um quarto e isso vai dar mais do que dois. O João vai carregar uma, meia e um quarto, isso vai dar menos do que dois. Depois a gente tem que pegar um monte para ver o que acontece. Mas o que a gente sabe é que quanto mais põe mais a Maria vai ter que carregar e o João não.
L19. [alunos do grupo 3] A gente também fez assim, só que a gente viu primeiro tudo que a Maria podia carregar e vimos que é infinito. E que João nunca chega no dois porque é muito pequenininho o que vai sendo acrescentado, por isso nunca chega no dois

***Problema 4**:*


1) Complete as seqüências abaixo com os números que faltam.

a) 2 → □ → □ → 5

b) 2 → □ → □ → □ → □ → □ → 5

c) 2 □ □ □ □ 5

d) 2 → □ → □ → □ → 5

e) 2 → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → 5

Explique como fez o item "c"?

Comentários dos alunos do Ensino Fundamental:

L1. 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5.

L2. Profª: Por que você pensou no meio?

L3. Porque tem mais espaço do que na outra.

L4. Então eu posso somar 1/4.

L5. Então soma um, soma meio, soma um terço, soma a quarta parte...

L6. Não, né!

L7. Somar assim não pode, tem que ser sempre a mesma coisa.

L8. Não, porque tem que ser na ordem.

L9. O que você está chamando de ordem?! Você está falando de ordem como sendo o que?

L10. Como tendo a mesma diferença.

L11. É.

L12. Por que pensou zero ponto seis?

L13. Porque...

L14. Porque a gente já fez zero ponto oito, zero ponto sete [tempo para contas]

L15. 3; 3,6; 4,2.

L16. 2,6; 3,2; 3,8; 4,4 e 5.

L17. Ainda não consegui descobrir a regra.

L18. Tem que ser na ordem sempre para todos eles?

L19. É né. Senão não fica legal!

L20. Se tivesse que pensar numa regra para cada um destes exercícios, que regra você escreveria para o primeiro?

L21. Soma um.

L22. Como é que justificaria?

L23. Ué dividi o três pelo número de caixinhas. [3 dividido por 2]

L24. Aí não dá!

L25. Então...

L26. Não é pelo número de caixinhas. [ficam perplexas, pensando numa saída, só conseguem emitir interjeições de surpresa]

L27. Não pode pensar pelo número de setinha? Ou então vou continuar no chute. [fala resignada].

> *L28. Na hora em que a gente fez de oito, faltou um quadradinho. Na de três também. [confusão, seguida de pausa]*
> *L29. A gente não pode colocar dois aqui embaixo não?*
> *L30. Profª: Como é que ficou a história de descobrir uma regra, para qualquer caso?*
> *L31. Sei lá! Não dá!*
> *L32. Dá sim! Mas, agente ainda não sabe, aí voltamos para o chute.*
> *L33. Eu sei que existe uma regra que vale para todos. Todos têm diferença três.*
> *L34. Mas o número de caixinhas muda.*
> *L35. Divide pelo número de caixinhas.*
> *L36. Não vai dar, porque a gente não usou meio e sim 0,6.*
> *L37. E no primeiro a gente somou um e três dividido por dois dá um e meio.*
> *L38. Então dividir pelo número de caixinhas que tem para preencher não dá.*
> *L39. Então vamos tentar pelo número de setinhas.*
> *L40. Profª: Vamos ver se funciona? [pausa, enquanto fazem as contas na calculadora para completar a sequência]*
> *L41. Deu.*
> *L42. Iuuuu!*
> *L43. Ah! Que conta grande! Então a regra é três dividido pelo número de setinhas.*

No próximo capítulo serão analisadas as respostas dadas pelos participantes do curso às proposições aqui elencadas. Estas perguntas reforçam no professor a necessidade de estudar, relembrar ou pesquisar assuntos que, talvez, nem use em sala de aula na educação básico, mas como visto, são importantes para que se fundamente, se estruture e conheça melhor os números reais.

4 OS DADOS DA PESQUISA

Nesse capítulo serão comentadas algumas das respostas dos cursistas às provocações apresentadas ao fim do Capítulo 3, fundamentadas matematicamente em Caraça (1951) e na literatura sobre ensino de números reais apresentadas no Capítulo 2. Por uma questão ética, os autores das falas não estão identificados.

<u>Etapa 2</u>

Quadro 2 - Algumas respostas à questão 1 do Fórum Temático 2

Como você costuma construir os conjuntos dos números racionais e irracionais em sala de aula?	
(1) *Costumo sempre* ***iniciar*** *a construção desses conceitos* ***pela reta real****, mostrando que* ***entre os números inteiros existem lacunas que são preenchidas pelos números racionais****, e a partir daqui vamos localizando cada número racional na reta numérica. Depois, que* ***existem lacunas na reta real que não são preenchidas pelos números racionais****, mas por outra representação, denominados irracionais.*	(2) *A diferenciação entre racionais e irracionais é feita no 8º e 9º anos. Costumo explicar que os* ***racionais são números que podem ser escritos na forma a/b, com b diferente de zero****. São números que* ***podem ser representados de várias maneiras****. Já os* ***irracionais possuem apenas uma representação****, já que são decimais infinitos e não periódicos. Um bom caminho é o trabalho com a representação na reta numérica.*
(3) *Para a* ***demonstração dos números racionais****, poderíamos falar* ***sobre saldo positivo e negativo de uma conta bancária****. Ou ainda na* ***divisão de um bolo ou de uma pizza****. Para a* ***demonstração dos números irracionais****, poderia falar sobre o* ***surgimento de Pi e do número áureo de Euler****. Teria muitas estórias para desenvolver, sobre essa área, apesar teria que resumir, pois ficaria enorme. Além dos* ***números famosos "pi" e "e" as raízes de números naturais não exatas*** *são ótimos exemplos para ilustrar os irracionais!*	(4) *Trabalho de* ***forma tradicional****, desenvolvendo exemplos do* ***livro didático*** *e fazendo representação dos* ***conjuntos numéricos através de círculos****. Também* ***utilizo da calculadora*** *para entrar no assunto dos* ***irracionais****. Utilizo a* ***história da matemática e calculando a hipotenusa de um triângulo tendo a unidade como medida dos catetos*** *(9º ano) e no 8º ano mostro utilizando o desenho geométrico e a reta numérica que foi ensinada no 7º ano.*
(5) ***Números irracionais não podem ser expressos como o quociente de dois inteiros****. É importante mencionar que* ***muitas raízes quadradas, raízes cúbicas, etc. se enquadram na categoria de números irracionais****. Mas* ***nem todas as raízes são números irracionais****. Números irracionais* ***podem ser expressos como "não terminados", decimais que não se repetem****.*	(6) *O conjunto dos irracionais é um pouco mais trabalhoso.* ***Falo da diagonal de um quadrado de lado medindo 1****. Consequentemente, e pelo teorema de Pitágoras temos que essa diagonal mede raiz de 2. E daí,* ***provo que raiz de 2 não é racional de modo similar à do Caraça no texto****. Assim,* ***consigo mostrar que os números racionais não são suficientes no quesito medir****. A seguir* ***mostro, através de aproximações, que raiz de 2 possui uma representação decimal****.*

Fonte: A autora, 2018.

Por meio das falas dos professores no fórum de discussão, no ambiente virtual de aprendizagem, em resposta à questão 1, pode-se observar uma série de imprecisões tanto do ponto de vista conceitual, quanto do ponto de vista didático. Ball, Thames e Phelps (2008) discutem a ideia de conhecimento matemático para o ensino, que fundamenta tanto os aspectos matemáticos quanto aqueles necessários ao seu ensino. Por exemplo, em (1), sugere-se a utilização da reta real para a construção dos conjuntos numéricos, quando a reta não é um modelo geométrico compatível com números inteiros. Ainda neste contexto, em (3) defende-se a utilização de saldo bancário para explorar números racionais. Mais uma vez, tem-se um modelo matemático incompatível com o conceito que se pretende explorar.

Já em (2), admite-se a representação de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, por exemplo, como um número racional, já que não são fornecidas informações sobre a qual conjunto devem pertencer os números *a* e *b*. As células (5) e (6) parecem sugerir opções adequadas para a construção dos racionais e dos irracionais em sala de aula, inclusive com ideias e linguajar pertinentes à Educação Básica, ainda que em (5) apareça a ideia imprecisa de “número não terminado”.

Já em (4), a fala atem-se, muito provavelmente, ao que é mais usual no ensino de Matemática na Educação Básica, o uso do livro didático – de modo tradicional – o que não é necessariamente ruim ou problemático, como um condutor das ações do professor, determinando o que e como deve ser ensinado em sala de aula. Brasil (2017) apresenta, nas resenhas, uma aparente superficialidade na exploração do conjunto dos números reais, o que torna preocupante o uso do livro didático como determinante ao estudo e à prática do professor.

O Apêndice 1 traz todas as respostas dos professores, as quais são discutidas, de maneira geral, nos parágrafos a seguir.

Nota-se que poucos professores falam sobre incomensurabilidade, densidade ou continuidade e se limitam a dar alguns exemplos dos números irracionais e sua localização na reta real, tentando dar assim alguma consistência para o conjunto dos números irracionais. Criam desse modo uma impressão de se tratar de um conjunto pequeno e de pouca importância. Em geral não se destaca a verdadeira necessidade de aprendizagem desses números, sua história e sua relevância para a matemática, o que pode implicar em falhas em seu processo de construção conceitual, já que se trata de um entendimento sutil e base para outros conteúdos.

A representação decimal também é mencionada por muitos professores para diferenciar um número racional de um irracional, mas não mencionam os segmentos incomensuráveis em suas aulas. Acredita-se que um pouco da história matemática poderia ser introduzido para preencher essa lacuna ou até mesmo despertar interesse para tal conteúdo, mostrando a matemática como uma construção humana, como sugerem Roque (2012) e Moretti (2007).

Os textos disponibilizados aos cursistas geraram inquietações tanto que um professor se propôs a introduzir tal conceito (incomensurabilidade) em sua próxima aula. Embora alguns professores mostrem que para medir, em algum momento, precisam dos números não racionais e que esses números são os irracionais, além do que sem eles a reta teria “buracos” sem as ideias de infinidade, ordenação densidade e continuidade, esse entendimento parece vago. Essa forma pode até ser satisfatória, mas aberta a questionamentos. Tais como: Que instrumento é usado para medir o incomensurável? Na prática esses números existem? Ou sempre usaremos aproximações?

Nos relatos dos professores fica evidente que a maioria prefere construir o conjunto dos Números Reais a partir do conjunto dos Números Naturais, explicando detalhadamente cada etapa dessa construção e com as devidas ampliações constroem-se o conjunto dos números reais. Mas essa ideia de ampliação matemática e historicamente correta e viável?

O que diz Caraça (1951) a respeito sobre o conjunto dos números Reais em seu texto? Ele começa com um problema de medidas de segmentos. E faz alguns questionamentos que levam o leitor a pensar nos números irracionais de maneira natural. Depois supõe que todo segmento é comensurável, isto é, existe uma unidade, e sugere que essa unidade é o número n/m e daí faz uma prova por absurdo na diagonal de um quadrado e chega à conclusão que raiz de 2 é um número racional. Absurdo! Percebe-se, neste caso particular, que nos relatos dos professores há uma convergência de suas práticas e o texto.

Quadro 3 - Algumas respostas à questão 2 do Fórum Temático 2

O que você entende por infinidade, ordenação, densidade e continuidade?	
(1) ***Infinidade algo incomensurável**, que não tenha fim. Conjunto dos naturais, racionais, irracionais e reais são exemplos de conjunto infinito.*	(2) *Por **infinidade**, um **conjunto que contenha pelo menos os naturais**.*
(3) *Infinidade: **escrever um número sem fim**. A reticência colocada após a última vírgula vai significar que ainda faltam números. Exemplo de Infinidade: 1,2,3,4,5,...*	(4) *Infinidade: Característica de um **conjunto que não pode ser posto em correspondência biunívoca com um conjunto do tipo {1,2,...,n}**, com n natural. Exemplo: os racionais são infinitos.”*
(5) *Ordenação: conjunto ordenado é quando dado dois elementos, **podemos estabelecer a relação de ordem menor que**.*	(6) *Densidade: Propriedade de um **conjunto ordenado** no qual **dados dois elementos é sempre possível encontrar um terceiro que esteja entre os dois dados**, ou seja, que seja maior que um deles e menor que o outro. Exemplo: o conjunto dos racionais é denso*
(7) *Sobre a justificativa para o conjunto dos irracionais ser denso, pensei no seguinte (mas não sei se está exatamente correto):* *Tome dois números irracionais x e y, com x < y. Então, y - x < 0. Tome um número natural a, de modo que a. (y-x) >1. Daí, y - x > 1/a e, consequentemente, x +1/a < y.* *Mas, x < x + 1/a, pois a > 0 (logo 1/a > 0).* *Assim, x < x + 1/a < y. Como x é irracional e 1/a é racional, temos que (x + 1/a) é irracional.* *Portanto, entre dois irracionais sempre teremos um irracional. Acho que isso explica a densidade dos irracionais. Certo?*	(8) *Continuidade, numa interpretação particular, diria que seria a característica da reta dos números reais não possuir um "buraco" sequer. Em particular, **a existência entre os racionais e irracionais garante a continuidade da reta**; além disto ambos destes conjuntos são densos, apesar de não conhecer uma justificativa para o fato dos irracionais o serem.*
(9) *Densidade: **não tem "buraco”**.*	(10) *Continuidade: seria a ideia de **cobrir todos os pontos da reta, sem buracos.***

Fonte: a autora, 2018.

Para além dos destaques do Quadro 2, representativos das repostas dos professores, faremos uma análise geral a partir de todas as respostas á questão 2, que figuram no Apêndice 2.

A noção de infinidade foi em sua maioria associada com o infinito, algo sem fim, em acordo com Caraça (1951), embora alguns tenham tentado elaborar mais suas respostas. No entanto, algumas concepções equivocadas apareceram entre as respostas. A afirmação (2) é um exemplo disso, umas que se sabe que o conjunto dos números irracionais é infinito e não contém o conjunto dos naturais. Também usaram exemplos como um número com infinitas casas decimais ou conjunto que se usa no final as reticências para indicar a infinidade.

Ao verificar as respostas dadas para a ordenação nota-se que há quase um consenso, que poderia ser generalizado, de modo matematicamente correto como "possibilidade de estabelecer relação de ordem entre dois números quaisquer, de modo que um seja menor do que o outro".

Examinando agora as respostas sobre densidade, verifica-se que a maioria dos professores entende o que significa um conjunto ser denso. Para eles trata-se da propriedade do conjunto, onde dados quaisquer dois elementos, é possível encontrar uma infinidade de outros elementos deste mesmo conjunto entre esses dois números dados, por mais próximos que estejam.

Segundo Caraça (1951), a densidade se define por saber que entre dois pontos quaisquer de um conjunto e da reta real, existe uma infinidade de pontos, isto por mais próximos que estejam um do outro. Acredita-se que houve uma confusão entre densidade e continuidade em alguns casos vistos acima (9) e (10).

Analisando o último item dessa seção e talvez o mais sutil, a continuidade, nota-se que a maioria dos professores respondeu ser uma característica da reta, isto é, não possuir "buracos". Outros relacionaram a continuidade com a ideia de reta, algo sem interrupção. De acordo com Caraça (1951), a reta é a imagem da continuidade. A reta ultrapassa, em riqueza interior de estrutura, esse simples variar gradualmente, sem saltos, sem, como habitualmente se diz, soluções de continuidade.

Além de contribuir com suas ideias (ou concepções?) a respeito dos conceitos questionados, os participantes do curso compartilharam suas práticas ou intenções de práticas, assim como algumas mudanças de concepção a partir das leituras realizadas no curso e das reflexões com os colegas no fórum de discussão. O Quadro 4 destaca algumas delas.

Quadro 4 - Sugestões e mudanças de concepções sobre práticas

O texto trouxe algo de novo, principalmente quando observei que os meus conceitos em relação à densidade e continuidade poderiam estar equivocados. No texto, ficou bem clara essa diferença. Outra situação, pensava que o conjunto dos racionais era contínuo, mas lendo texto percebi que não é verdade. Para tal, é necessário um conjunto maior. Os dois textos tentam mostrar que é preciso entender questões desse tipo. Segue o link do Geogebra: https://www.geogebra.org/apps. Utilizaria com a reta numérica, visto que esse aplicativo permite uma movimentação.	*Já que estamos dialogando sobre números irracionais, lembrei-me de uma atividade que poderá ser feita na sala de aula na construção de um número irracional muito conhecido: o número de ouro. Link: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html. Para construir esse número tão emergente na natureza, gosto de fazer algumas construções geométricas como mostra o link acima. Faço o retângulo áureo e o triângulo áureo. Lembrando que essa atividade converge com o texto de Caraça, com a construção dos irracionais por meio da geometria.*
Parece-me uma excelente forma de apresentar o conteúdo, recorrer ao seu desenvolvimento histórico, pois permite ao aluno viajar no tempo e perceber os desafios e necessidades da época na construção dos conceitos na matemática.	*Em https://www.geogebra.org/m/FgznNwYa é possível assinalar na reta real números irracionais. Ele pode ser explorado em sala, em especial para exemplificar a continuidade dos reais. Isto também pode ser feito no papel com régua e compasso, certamente os alunos adorariam!*
O conceito que eu exploraria com os meus alunos através do Geogebra seria o de continuidade. Através desse Software seria possível mostrar aos alunos se uma determinada função está ou não definida para um determinado valor de x em uma certa vizinhança. Vejamos no link www.geogebra.org/m/FZjBYTa6.	*Um aplicativo que eu acho muito interessante para auxiliar na abordagem desses assuntos é "A Expansão Decimal de um Número", disponível em: http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-br.html. O aplicativo é dividido em três partes. As partes 1 e 3 funcionam como um jogo: os alunos são desafiados a acertar os números que compõem a expansão decimal de um número pela observação de sua posição na reta numérica, e vice-e-versa. A parte 2 funciona como uma calculadora que calcula os 2000 primeiros dígitos da expansão decimal de um número racional, observando inclusive como são as dízimas periódicas no caso em que acontecem.*
Usando o aplicativo disponível no link https://www.geogebra.org/material/show/id/127608 podemos visualizar a distribuição dos números racionais na reta numérica. O objetivo desta construção é ajudar um aluno a perceber a propriedade de densidade dos números racionais no conjunto dos números reais	*A leitura do Caraça me mostrou uma nova forma de enxergar esses conceitos, relacionando a insuficiência dos racionais com as propriedades da reta. Os racionais e irracionais são conjuntos disjuntos que completam a reta real e cujas representações decimais têm propriedades que são a negação uma da outra, assim como suas definições.*

Fonte: a autora, 2018.

Seguindo nas observações de algumas respostas verifica-se a importância do investimento em cursos de atualização do professor. E o quanto é delicada essa construção dos números racionais e irracionais já que na maioria das vezes é feita sem o devido cuidado, deixando superficial o seu entendimento. O que acarreta um grande prejuízo no aprendizado de vários conteúdos matemáticos, pois estes têm nos números reais sua base. Mas também se observa que os professores buscam o aprimoramento de suas práticas nesses cursos.

A leitura de textos selecionados e discutidos nos fóruns trouxe inquietações, mudanças de concepções e um crescimento profissional, destacam-se dois comentários no Quadro 5. Os relatos destacados reforçam a importância da formação e da reflexão coletiva, na compreensão de que é também no coletivo que se desenvolve a identidade profissional e o sentido coletivo de profissionalidade docente, em particular, em Matemática.

Quadro 5 - Indicativos de aprendizagem e crescimento profissional

Após a leitura do texto, percebi que o viés do autor Caraça é mais geométrico. A construção dos conceitos de racionais e irracionais começam com estruturas geométricas (retas, pontos etc.) e depois fazem algumas notações algébricas baseados na geometria. Enquanto isso, o outro texto possui a construção e explicação dos racionais e irracionais no ramo da aritmética e estrutura algébrica. Gostei das duas abordagens e, no meu ponto de vista, não possui uma melhor ou pior, na verdade elas se completam. É interessante para nós e os alunos poderem conhecer e enxergar "os diferentes ângulos" de como esses conjuntos são definidos.	*Eu entendo que o segundo texto complementa o primeiro, sendo que o primeiro nos mostra algumas falhas na formação do professor de Matemática e o segundo, nos mostra que o processo de construção dos números reais representa mais do que a compreensão de um método. Concebe o alicerce para a construção de conhecimento do professor de Matemática.*
	Realmente, o texto do Caraça trata desses conceitos de maneira mais didática, acredito. Isso me ajudou a entender melhor cada conceito, bem como em repensar a maneira de como ensinar.

Fonte: a autora, 2018

Etapa 3

No fórum de discussão desta etapa os professores cursistas não fizeram exatamente o foi pedido no enunciado, ou seja, não se ativeram a comentar as respostas dos alunos, segundo Kindel (1998). Na verdade, foram apresentados oito problemas, dos quais os professores participantes deveriam escolher três para comentar. Alguns participantes foram além do solicitado, trazendo reflexões sobre as práticas que costumam utilizar para explorar os conceitos relacionados aos problemas, mas a maior parte deles não participou da atividade, possivelmente para evitar a exposição de antes dos pares. Os relatos destacados a seguir são toda a participação que ocorreu nesta etapa.

Problema 1: Divida um número por nove. Use a calculadora para efetuar a divisão e observe o resultado que aparece no visor. Anote no seu caderno as frações, no caso nonos, e o resultado. O que pode dizer?

> *Quando ensino aos alunos como determinar a fração geratriz de uma dízima periódica através de um método algébrico, costumo apresentar ao aluno o problema concernente à fração geratriz relativa ao número 0,99999... Eles ficam, em sua maioria, desconcertados [sic], estupefatos e sorridentes. Como assim: 1 é igual a 0,9999...? Já vi uma aula assistida pelo Elon [Lages Lima] onde esse problema provocou certa celeuma entre este memorável mestre e o professor em ação - nós ganhamos. Interessante é, após a experiência envolver todos os grupos e alunos, dispor para turma formatação em termos de série, o que seria uma forma de lhes explicar o fenômeno quanto aos números menores que 9.*

> *Sempre encontro, e acredito que posso dizer que "encontramos" dificuldades ao tentar construir com o aluno esse conceito de fração e número decimal. É uma dificuldade que perdura todo o ensino fundamental e vai continuar no ensino médio. Muitas são as razões e acredito que essa discussão não cabe aqui. Tento trabalhar a princípio esses conceitos de fração, no sexto ano com material dourado, recortes, baralhos com frações e decimais e outros recursos. O problema é no ensino médio aí a coisa fica feia. Tentar reconstruir um conceito mau [sic] construído ou deformado é muito difícil. Muitas das ideias que eles trazem do ensino fundamental são estranhas a linha L1 do primeiro problema é uma prova disso, outra dificuldade é quando eles teimam em dividir o denominador pelo numerador e achar que é o mesmo resultado de fazer a divisão do numerador pelo denominador. Um exemplo disso: alguns acreditam que 3/9 = 9/3. Dividir o 9 por 3 na cabeça de muitos tem o mesmo resultado de dividir o 3 por 9, e eu já observei muitos efetuando essa divisão na calculadora, ou seja, no caderno está 3/9, mas na calculadora ele coloca 9/3. Gostei dos comentários dos alunos no problema 1, existe, a meu ver uma busca, construtiva, de se encontrar maneiras para resolver outros problemas a partir de regrinhas, a princípio criadas, ou construídas por eles, diante de observações.*

> *Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 9. No caso das frações próprias na divisibilidade por 9, quando essa divisão é inexata a parte periódica é o próprio dividendo, que denota os restos dessa divisão, sendo que o maior resto possível nessa divisão é 8. Nas frações impróprias a parte inteira é formada pelo quociente entre número inteiro que é divisível por 9 e a parte periódica pela soma dos valores absolutos dos algarismos desse número.*

Os três professores que comentaram a questão se posicionaram de formas distintas: o primeiro se ateve à ideia de que 0,999... é igual a 1, explorando o seu próprio conhecimento em relação à questão, mas fugindo da discussão proposta, não discutindo efetivamente o conteúdo e nem as respostas dos alunos, apresentadas em Kindel (1998). Já o segundo comentário se atém ao conhecimento pedagógico do conteúdo, fazendo pontuações gerais e destacando erros frequentes dos alunos em problemas deste tipo. Já o terceiro comentário evidencia seu domínio de conteúdo, não discutindo as respostas dos alunos, mas discutindo conceitualmente o problema.

Problema 2: Divida diferentes números por nove. Na aula passada, estabeleceu-se regra para os numeradores menores do que nove. Mas o que acontece quando os numeradores estão entre 10 e 100, entre 100 e 1000? Ou seja, a atividade de hoje é para observar os nonos que estão entre 10/9 e 100/9, entre 100/9 e 1000/9, outras.

A situação problema foi instaurada, mas não entendi o objetivo. Será que estou certo ao afirmar que o propósito é motivar o aluno na procura de padrões no conjunto dos racionais?

Propor ao aluno o uso de números mistos para complementar o padrão de verificação das frações com denominador nove pode ser incrementado com a ideia da formulação de regras ou padrões de sequências afim de entronizar mentalmente o procedimento de obtenção das dízimas periódicas associadas à sua fração geratriz. Além de explorar um conhecimento proveniente dos primeiros anos da educação básica amplia a aplicação do ferramental introduzido desde tenra idade.
Estruturar esta questão pode ser estabelecido com a ferramenta de tabelas, aproveitando o enunciado para de modo empírico obter algumas verificações. Porém um passo muitas vezes esquecido é a generalização e pensamento matemático em uma perspectiva dedutiva deve fomentar o professor a analisar os padrões criados e conduzir os discentes a um pensamento pautado nos restos da divisibilidade por nove. Fazendo a ligação entre resto e algarismo do período da dizima o aluno pode transpor a aparente mágica da repetição por uma estrutura de construção que aprofunde e o faça compreender melhor a divisibilidade.
Em suma propor a atividade em grupos investigativos e desafiá-los a estabelecer uma lei de formação gera uma atividade que pode ser aplicada em diversos instantes da construção matemática do Ensino Médio. No 1º ano pode ser elencada com Conjuntos Numéricos. No 2º ano dentro do contexto das progressões geométricas no passo reverso, ou seja, partindo da dízima gerar a fração geratriz. No 3º ano como preâmbulo para divisão do corpo polinomial que se utiliza do processo de divisão de forma mais complexa e abstrata.

Gostei demais desse problema. Não só pelos resultados obtidos, mas pela oportunidade que ele dá de se trabalhar esse conteúdo, principalmente por que os alunos tentam dentro de suas capacidades construir mecanismos para facilitar o cálculo de divisões por 9 e assim facilitar o cálculo quando essa divisão tem como denominador números com quantidade muito grande de algarismos.

> *Neste caso o padrão segue e mesmo das frações impróprias, entre 10 e 100, a parte inteira é o quociente entre dividendo por 9 e a parte decimal ou periódica e a soma dos valores absolutos desse número. Entre 100 e 100, segue que a parte inteira e o quociente entre o número e 9, seguido de um algarismo da parte periódica mais a parte periódica que é a soma dos valores absolutos do número. O padrão se segue para valores entre 100 e 1000, neste caso a parte inteira vem acompanhada de dois algarismos da parte periódica.*

Em relação ao Problema 2, os comentários dos professores são genéricos e mais uma vez não discutem as soluções propostas pelos alunos, possivelmente por não se sentirem seguros para matematizar diante dos pares, ainda que virtualmente, preferindo fazer comentários gerais sobre a questão, como nos dois últimos. Apenas no primeiro comentário o cursista expõe sua possível falta de compreensão a respeito do objetivo do problema. Por outro lado, a professora que fez o segundo comentário faz uma análise crítica da questão, elencando pontos de atenção no trabalho deste problema com alunos da Educação Básica.

> **Problema 3**: João e Maria perderam-se na floresta. Na estrada havia toras de madeira nos dois lados durante todo o percurso. Uma bruxa, que também andava pela floresta, quando os encontrou, deu-lhes uma tarefa como desafio. Se a tarefa fosse cumprida, estariam salvos, caso contrário morreriam. Cada uma das crianças deveria seguir por um dos lados da estrada. Para Maria ela disse:
> Maria, você pegará a primeira tora e a colocará no saco.
> A segunda você cortará em dois e colocará um pedaço no saco.
> A terceira você cortará em três e colocará um pedaço no saco.
> A quarta você cortará em quatro e colocará um pedaço no saco. E assim por diante.
> a) Quanto Maria colocará no saco? Justifique.
> b) Represente a situação graficamente.
> Ao João a bruxa deu a seguinte tarefa:
> A primeira tora você colocará no saco.
> A segunda você cortará em dois e colocará um pedaço no saco.
> A terceira você cortará em quatro e colocará um pedaço no saco.
> A quarta você cortará em oito e colocará um pedaço no saco. E assim por diante.
> a) Quais os pedaços que João colocará no saco?

b) Quanto ele colocará no saco? Justifique.

c) Represente graficamente.

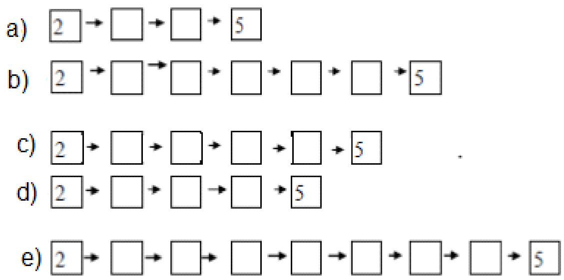
1) Ao compararmos o que cada um colocou no saco, o que pode observar?

2) Quem carregará mais peso?

3) Quem chegará na casa da bruxa? Por quê?

Apesar de se tratar de um problema intuitivo e matematicamente simples, os professores se omitiram diante da discussão de seus objetivos e, também, da análise das respostas dos alunos do Ensino Fundamental.

Problema 4: Complete as sequências abaixo com os números que faltam.



Explique como fez o item “c”?

> *Proposta de interpolação numérica explorando a densidade dos racionais é conveniente de aplicação ao aluno de forma sequencial criando assim o conceito de possibilidade de interpolação de um número racional entre outros dois. Carece de um exemplo que norteie o aluno na confecção da sequência e de outro que conduza o mesmo a ampliar casas decimais com a utilização de aumento de uma casa decimal, fato este obtido com o uso de números decimais com sequencias repetidas longas.*

> *Uma possível extensão para o Conjunto dos Reais seria o uso de uma reta numérica e consequente ampliação do conjunto dos racionais para o conjunto dos irracionais. Sugere-se construir uma tabela e associá-la a uma reta com interpolações em grupos a fim e exprimir diferentes resultados entre os integrantes do mesmo.*

> *Nesta atividade o preenchimento das lacunas pode ser explorado em sala de aula como a interpolação de meios aritméticos entre dois números dados de modo que essa sequência numérica forme uma progressão aritmética (PA). “Para realizar essa tarefa faz se necessário o uso da formula do termo geral de uma PG. Interpolar significa “colocar entre”. Interpolar meios aritméticos entre dois números dados é acrescentar números entre estes que são conhecidos, de forma que a sequência numérica formada seja uma P.A. Para realizar a interpolação aritmética é necessário o uso da fórmula do termo geral da PA.* $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ *, onde o cálculo desses números será a razão dessa PA.*

> *Nas sequências termos as seguintes interpolações:*
> *a) 2 – 3, 4 – 5 ; razão:1*
> *b) 2 – 2,5 – 3,0 – 3,5 - 4,0 – 4,5 – 5 ; razão: 0,5*
> *c) 2 – 2,6 – 3,2 – 3,8 – 4,4 – 5 ; razão: 0,6*
> *d) 2 – 2,75 – 3,5 – 4,25 – 5 ; razão: 0,75*
> *e) 2 – 2,375 – 2,75 – 3,125 – 3,5 – 3,875 – 4,25 – 4,625 – 5; razão: 0,375.*

Este foi o problema em que os professores pareceram mais à vontade para discutir, possivelmente porque o conceito de densidade já lhes fosse claro, ou tenha se tornado claro após a leitura recomendada de Caraça (1951). Diferentes possibilidades foram discutidas, ainda que pouca segurança tenha sido demonstrada quando se diz em “ampliação dos racionais para os irracionais” por meio do problema apresentado. O último comentário, em particular, faz uma proposição utilizando progressões aritméticas, que não são exploradas no ensino fundamental, mas cujo trabalho seria perfeitamente possível de modo intuitivo. Por fim, cabe destacar que, mais uma vez, os cursistas se furtaram a comentar as respostas dos alunos do ensino fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de conclusão de curso buscou conhecer concepções de professores de matemática sobre números reais e seu ensino. Foi realizada uma revisão de literatura que explorou o conceito de concepção de professores, na perspectiva de diversos autores, buscando discutir a relação entre as concepções e as práticas do professor de Matemática. Foram também discutidas questões sobre o ensino dos números reais, numa tentativa de realizar, ainda que modo breve e sintético, um panorama sobre as discussões a respeito deste tema tão importante, uma vez que sobre os números reais se fundamentam importantes conceitos matemáticos.

Uma história dos números reais foi também discutida, “uma” e não “a” pois admite-se aqui, em acordo com Roque (2012) que existem várias questões historiográficas questionadas por especialistas, e que faltam fontes fidedignas para afirmar exatamente como se deu tal processo histórico-epistemológico, fundamentando-nos nas pesquisas da referida autora para recontar uma história sobre os números reais.

Compreendendo o importante papel do livro didático na cultura profissional do professor, em particular de Matemática, apresentamos trechos das resenhas, sobre números reais, das coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – Edição 2018, e que figuram o respectivo Guia do Livro Didático. Com a consciência de que as resenhas são elementos sintéticos norteadores para a escolha das coleções pelos professores de Matemática, principalmente das redes públicas, é possível perceber que o tratamento dos números reais é superficial, deixando de discutir questões conceituais importantes para uma compreensão efetiva deste conjunto numérico.

A pesquisa exploratória foi realizada com um grupo de 40 professores atuantes na Educação Básica, matriculados em um curso de extensão oferecido em um ambiente virtual de aprendizagem, com o objetivo de promover a busca por interlocuções entre Análise Real e as práticas docentes no ensino de números reais na Educação Básica. O contexto da pesquisa se deu nas etapas dois e três do curso, realizadas ao longo de quatro semanas, com foco em estudos e discussões sobre números reais e seu ensino na Educação Básica.

A partir da análise dos dados, pode-se afirmar que as discussões em fóruns abrem novas perspectivas de como planejar uma boa aula de rever seus conceitos percebendo quais concepções o professor participante traz consigo e que precisam ser mudadas, além de quais tópicos são de fato relevantes e o que não pode faltar nas atividades propostas aos alunos sabendo que elas precisam proporcionar curiosidades, pesquisas e descobertas. Além disso, mostrar que a matemática é uma atividade humana, portanto dotada de história.

Percebeu-se que a formação matemática, dos sujeitos da pesquisa, para o ensino de números reais na Educação Básica configura-se como um ponto de atenção, principalmente quando se discutiu sobre como o grupo de professores costuma introduzir as noções de números racionais e números reais em sala de aula, assim como seus entendimentos sobre os conceitos relacionados a esses conjuntos. Uma série de imprecisões matemática e de cunho pedagógico foram apresentadas.

As noções de infinidade, ordenação, densidade e continuidade são vistas na graduação, mais precisamente num curso de Análise Real de uma maneira formal, axiomática, o que deveria dar base e estrutura para que o professor tenha domínio do conjunto dos números reais. Apesar de acreditar-se que falte a promoção, por parte do formador de licenciandos, de uma ligação mais direta entre a Análise e as práticas docentes na educação básica. Esse elo é fundamental para o futuro professor fazer uma construção sólida dos números reais com seus alunos.

Algumas respostas reforçam a necessidade de cursos de atualização que preparem ou inquietem o professor para o aprendizado ou mesmo a mudança de concepções sobre o ensino dos números reais. Nota-se que os professores estão preocupados com a qualidade de suas aulas e buscam se aprimorar para que seu conhecimento se torne mais consistente e matematicamente correto. Isso nos aponta para a necessidade de se pensar em mais e novos cursos de formação continuada para buscar uma aproximação do conhecimento matemático formal, estudado na Licenciatura, daquele praticado em sala de aula, configurando-se como um possível desdobramento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: whatmakes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro-SP, v. 14, n. 15, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. FNDE. Guia do Livro Didático – PNLD2018. 2017. disponível em: www.fnde.gov.br/pnld-2018. Acesso em: 12 de fevereiro de 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CHACÓN, I. M. G. **Matemática Emocional**: los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea, 2000.

CHACÓN, I. M. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Trad.: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CURY, H. N. Concepções e Crenças dos Professores de Matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. **Bolema**, Rio Claro - SP, v.12, n.13, 1999.

D'AMBROSIO, B. S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o grande desafio. **Pro-Posições**, Campinas, v.4, n.1 [10], p. 35-41, mar. 1993.

DIAS, M. S. **Correlação da Lógica e do Histórico no Ensino dos Números Reais**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, 2002.

ESQUINCALHA, A. C.; BAIRRAL, M. A. **Análise Matemática e sala de aula - um curso online para professores da educação básica**. Disponível em: http://www.academia.edu/33510793/An%C3%A1lise_Matem%C3%A1tica_e_Sala_de_Aula_-_um_curso_online_para_professores_da_Educa%C3%A7%C3%A3o_B%C3%A1sica. Acesso em: 20 mar 2018.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, Boston: Kluwer AcademicPublishers, p. 29-44

IGLIORI, S., B. C. SILVA, B. A. Concepções dos alunos sobre números reais. In: **A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Org. LACHINI, J., LAUDARES, J. B. Editora FURMAC, Belo Horizonte, 2001.

KINDEL, D. S. **Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio de Janeiro: USU, 1998.

LIMA, L. C. Da Mecânica do Pensamento ao Pensamento Emancipado da Mecânica. **Programa Integrar**, Caderno do Professor, Trabalho e Tecnologia, CUT/SP, 1998.

MACHADO, C. T. O.; MENEZES, J. E. Concepções de professores que ensinam matemática sobre números racionais, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5a série do Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista**, n. 25, ano 13, p.5-21, 2008.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em atividade de ensino:** uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. 2007. 206f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 2007.

NACARATO, A, M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos Iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PENTEADO, C. B. **Concepção do professor do Ensino Médio relativa à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, 2004.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processes de formação. In: PONTE, J.P. (Ed). **Educação matemática**: Temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, 2003.

REZENDE, W. M. **Uma Análise Histórica - Epistêmica da Operação de Limite**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Educação Matemática, USU, 1994.

RIPOLL, C. C. A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio. In: **Anais...** II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, 2004.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica desfazendo mitos e lendas, 2012.

SOARES, E. F., FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C. Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Revista Zetetikè**, Campinas, v. 7, nº 12, p. 95 – 117, jul./dez. 1999.

THOMPSON, A. G. Teacher’s beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In GROWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. National Council of Teachers of Mathematics. New York: MacMillan, 1992, p. 127-146.

APÊNDICE A - Respostas à questão 1 do fórum temático 2

"...na tentativa de resolver equações cuja solução não era natural, para definir os inteiros, não era inteira para definir os racionais e assim por diante..."

"Apresento aos alunos que os números racionais são os números que podem ser representados através de frações ou números decimais finitos ou infinitos periódicos. Já os números irracionais são números que não podem ser representados por meio de frações, e que possuem representação decimal infinita e não-periódica."

"Números Racionais: São aqueles que podem ser escritos em forma fracionária, sempre tento demonstrar exemplificando com frações. Já os irracionais: são aqueles que não podem ser inscritos em forma fracionária, faço o mesmo, demonstro com frações e dou exemplos de onde encontrá-los no cotidiano."

"A diferenciação entre racionais e irracionais é feita no 8º e 9º anos. Costumo explicar que os racionais são números que podem ser escritos na forma a/b, com b diferente de zero. São números que podem ser representados de várias maneiras. Já os irracionais possuem apenas uma representação, já que são decimais infinitos e não periódicos. Um bom caminho é o trabalho com a representação na reta numérica."

"O conjunto dos números racionais são todos os números que podem ser representados na forma a/b e os números irracionais são assim, que não podem ser representados na forma de fração."

"Primeiro, fazer uma breve revisão dos conjuntos e diagramas, em seguida, números racionais, apresento rações e mostro-os que esse conjunto pode ser escrito em forma de fração. Já nos números irracionais apresento as raízes inexatas e os decimais não-exatos e não-periódicos e também o número pi). Logo, os alunos irão entender que o conjunto dos reais que é a união dos números racionais e irracionais."

"De forma tradicional. Uso exemplos e definições. Também utilizo da calculadora para entrar no assunto dos irracionais."

"O que fiz foi falar sobre a história do nascimento dos números, trabalhei conjunto por conjunto, até chegar ao todo, no caso, o conjunto dos números Reais. Os Racionais e os Irracionais foram trabalhados da mesma forma, um de cada vez e logo depois associei a todo o resto."

"Trabalho de forma tradicional, desenvolvendo exemplos do livro didático e fazendo representação dos conjuntos numéricos através de círculos."

"Geralmente, em minhas aulas costumo construir o conjunto dos números racionais a partir da definição do próprio número racional em si. A partir de então, defino o conjunto dos números racionais como sendo o conjunto formado por todos os números que podem ser escritos na forma de uma fração. Para a construção do conjunto dos números irracionais, parto do mesmo princípio que utilizo na construção dos números racionais, utilizando também um diagrama para mostrar que o conjunto dos irracionais não faz parte dos racionais, mas que mesmo assim é possível expandi-lo como se fosse uma soma de parcelas de números racionais com uma potência de 1/10.”

“....eu construiria os números racionais utilizando as divisões mais simples, do tipo: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 etc. Eu inseria uma situação problema e a partir disso, existia a necessidade de dividir uma parte inteira. Para o conjunto dos irracionais, eu gostava de tentar achar uma raiz quadrada de um número primo qualquer, tipo o 2, 3 ou 5. Os alunos nunca iam encontrar um certo padrão após a vírgula. Ou seja, eu meio que fazia um desafio para eles encontrarem esse padrão, para depois escrever em forma de fração.”

“Relembrou pontos esquecidos. Com destaque para o processo de continuidade. Quanto à infinidade, trabalharia com os reais e racionais, utilizando o mesmo procedimento mencionado pelo Renan. Apenas abrindo a questão para a utilização, ou não, dos inteiros, e não os naturais, para esse processo. Quanto à ordenação, para os racionais, pegaria as frações 1/8, 1/4 e 1/2 e, no caso dos irracionais, utilizaria as raízes de 2, 3 e 5. Quanto à densidade dos racionais, utilizaria a reta em ambos os casos. No caso da continuidade, para racionais, pegaria o número 2 e dividiria a reta e no caso dos irracionais utilizaria uma calculadora, a reta e o valor da raiz de 2. Nesse último caso, pegaria valores como 1, 41; 1,4141; 1,4142 e tentaria posicioná-los em relação a valores aproximados da raiz de 2.”

“Para a demonstração dos números racionais, poderíamos falar sobre saldo positivo e negativo de uma conta bancária. Ou ainda na divisão de um bolo ou de uma pizza. Para a demonstração dos números irracionais, poderia falar sobre o surgimento do número Pi e do número áureo de Euler). Teria muitas estórias para desenvolver, sobre essa área, apesar teria que resumir, pois ficaria enorme.”

“Além dos números famosos "pi" e "e" as raízes de números naturais não exatas são ótimos exemplos para ilustrar os irracionais!”

“Número racional é um número que pode ser expresso na forma de uma fração, mas com um denominador diferente de zero. Em outras palavras, número racional pode ser expresso como o quociente de dois inteiros (com um denominador diferente de zero). Todos os decimais repetindo caem na categoria dos números racionais. Números irracionais são opostos dos números racionais, uma vez que não podem ser expressos sob a forma de uma fração com um denominador diferente de zero. Em outras palavras, números irracionais podem ser expressos como o quociente de dois inteiros. É importante mencionar que muitas raízes quadradas, raízes cúbicas, etc. se enquadram na categoria de números irracionais. Mas nem todas as raízes são números irracionais. Números irracionais podem ser expressos como não terminados, decimais que não se repetem. O professor precisa compreender a forma da contribuição dialética em que Caraça apresenta no texto e assim terá uma valiosa oportunidade em suas mãos para ser multiplicada para seus alunos.”

“Link: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html. Para construir esse número tão emergente na natureza, gosto de fazer algumas construções geométricas como mostra o link acima. Faço o retângulo áureo e o triângulo áureo. Lembrando que essa atividade converge com o texto de Caraça, com a construção dos irracionais por meio da geometria."

"Apresento aos alunos que os números racionais são os números que podem ser representados através de frações ou números decimais finitos ou infinitos periódicos. Já os números irracionais são números que não podem ser representados por meio de frações, e que possuem representação decimal infinita e não-periódica. Os dois textos se aproximam quando utilização a negação para explicar o que são números irracionais - que são os números que não são racionais - e classificam o conjunto dos números reais como a união desses dois conjuntos (racionais e irracionais)."

"Costumo representar os conjuntos por diagramas e dar exemplos dos mesmos a partir do nosso dia-a-dia. A reta numérica também é muito explorada em sala de aula."

"Costumo sempre iniciar a construção desses conceitos pela reta real, mostrando que entre os números inteiros existem lacunas que são preenchidas pelos números racionais, e a partir daqui vamos localizando cada número racional na reta numérica. Depois, que existem lacunas na reta real que não são preenchidas pelos números racionais, mas por outra representação, denominados irracionais. E aproveito para trabalhar a localização dos números racionais. Além disso, mostrar que todo inteiro é racional porque podemos escrevê-los em forma de fração. Exemplo: 8/4 = 2."

"Costumo partir com os números racionais mostrando que são números que podem ser escritos na forma de fração, onde o denominador tem que ser diferente de zero, pois não existe divisão por zero acompanhando sempre com o auxílio da reta numérica. Já o número irracional utiliza a história da matemática e calculando a hipotenusa de um triângulo tendo a unidade como medida dos catetos (9º ano) e no 8º ano mostro utilizando o desenho geométrico e a reta numérica que foi ensinada no 7º ano. Não costumo utilizar diretamente conceitos de análise, tento adaptá-los a nossa realidade."

"Primeiramente procuro demonstrar que os números racionais são representados na forma de fração p/q, ou seja, são resultados de uma divisão, cujo denominador é diferente de zero. Já os irracionais, como decimais infinitos e não periódicos que não podem ser escritos na forma fracionária p/q."

"Costumo construir o conjunto dos racionais construindo o conjunto dos naturais, a seguir os inteiros e depois os racionais. Os alunos já conhecem as frações, suas representações decimais, então falo apenas que este conjunto comporta todos os números que possam ser escritos na forma de fração a/b com a e b inteiros e b diferente de zero. Falo que números racionais são números inteiros, ou são decimais exatos (possuem representação decimal finita) ou são dízimas periódicas. (Dependendo do tempo posso provar-lhes usando a divisão entre numerador e denominador e mostrando que em algum momento o resto será zero ou começará a se repetir. Dou exemplos e pronto.) O conjunto dos irracionais é um pouco mais trabalhoso. Falo da diagonal de um quadrado de lado medindo 1. Consequentemente, e pelo teorema de Pitágoras temos que essa diagonal mede raiz de 2. E daí, provo que raiz de 2 não é racional de modo similar à do Caraça no texto. Assim, consigo mostrar que os números racionais não são suficientes no quesito medir. A seguir mostro, através de aproximações, que raiz de 2 possui uma representação decimal. Não chega a ser uma demonstração, mas convence os alunos. Como os alunos já sabem que números racionais possuem representação decimal finita ou infinita periódica e vice-versa, concluímos que a representação decimal de raiz de 2, e de qualquer outro irracional, deve ser infinita e não periódica. E dou exemplos."

"Primeiramente faço uma revisão dos números naturais, inteiros e racionais. Em seguida após ter sido abordada a definição dos conjuntos dos Números Reais, início a aula com uma breve revisão dos conjuntos numéricos questionando a eles sobre os elementos que formam o conjunto dos Naturais. Apresento em seguida as letras que representa esse conjunto e seus subconjunto, depois apresento a eles em linguagem matemática ex.{0,1,2,3,...}. Para que haja um melhor entendimento peço a eles que façam uma contagem dos coleguinhas da turma para que eles façam uma relação com os elementos (alunos) e o conjunto (classe) e na sequência trabalho com os números inteiros, acrescentando aos naturais os inteiros através de uma reta numérica e dando um exemplo prático de temperaturas e cálculos financeiros. Finalizando a revisão dos conjuntos abordo as frações como racionais e os decimais."

"Geralmente trabalho com a reta numérica. A partir do conjunto dos inteiros, procuro fazer com os alunos encontrem números entre dois números inteiros, mostrando que os mesmos representam uma parte de um todo e podem ser exatos ou não. Porém quando não são exatos, levanto a questão de que eles têm que ser periódicos. Quanto aos números irracionais, geralmente trabalho com as raízes não exatas, usando a calculadora mesmo, para poderem observar a diferença quando dividimos uma fração ou quando calculamos uma raiz não exata."

"Ainda em relação à construção dos conjuntos dos números racionais e irracionais em sala de aula:
Normalmente partimos do conjunto N, deixando "claro" que é um conjunto "menor", que representa em nosso dia-a-dia as questões de contagem: número de alunos, dia da semana, idade, datas...
Em seguida, vem o conjunto Z, que surge para dar conta de quantidades negativas, como por exemplo: temperatura, saldo de gols, saldo bancário.
Os alunos percebem então que o conjunto N é um subconjunto do conjunto Z.
Prosseguindo, como representar frações, decimais, peso fracionado, divisões não exatas? Surge então o conjunto dos racionais Q. O conjunto Q então é o maior, pois engloba todos os anteriores.
Mas e as dízimas não periódicas, as raízes não exatas? Como não podem ser convertidas em fração não são racionais, logo ficam num conjunto à parte: os irracionais I. A união dos conjuntos anteriores dá origem ao conjunto dos números reais: R."

"No início da minha carreira docente, fazia a construção dos racionais a partir das razões entre inteiros. Trabalhava sua representação decimal mostrando que são finitas ou infinitas e periódicas. Em seguida, definia os números irracionais como aqueles que têm representação decimal infinita e não periódica e dava alguns exemplos.

Entretanto, após refletir sobre esses conceitos e seu desenvolvimento histórico, cheguei à conclusão de que apresentar os irracionais (e consequentemente os reais) desta forma vai de encontro com a forma que essas ideias foram desenvolvidas historicamente e isso pode fazer com que os alunos percebam esses números como mais uma ideia matemática sem sentido, que não surgiu naturalmente e que não tem o ‘porquê ‘ de sua existência.
Não tive outras oportunidades de apresentar esses conceitos de forma diferente no ensino básico, mas quando falo desses temas na graduação, tento apresentar os números reais como instrumento numérico de medidas para os segmentos de reta (e outras grandezas também), mostrando a existência de segmentos de reta cuja medida não pode ser dada pela razão entre inteiros. Hoje penso que esta é a forma ideal de apresentar esses conceitos.”

“Primeiramente, faço uma revisão do conjunto dos números naturais, dando exemplos do cotidiano e que possui a necessidade de existência de outros números (racionais). Tento trabalhar sempre buscando o cotidiano do corpo discente, por exemplo: a utilização de dinheiro, a divisão produtos comestíveis (sempre muito bobinho), daí surge ideia desses números racionais, tanto na forma decimal quanto fracionária. E sempre os lembrando que todo número natural pode ser escrito da forma fracionária.
Após esse momento lúdico, passo para a definição, que todo número racional é representado na forma fracionária ou decimal, a partir desse momento abre-se um leque para a introdução a decimais exatos, dízimas periódicas e para abranger ainda mais, introduzo os decimais não exatos e não periódicos (irracionais). Falando um pouco a respeito dos irracionais, demostro com raízes quadradas exatas e faço uma aproximação com as raízes de 2, 3, ... ”

“Para construção dos racionais normalmente recorro a reta numérico e a média aritmética. Dados dois pontos quaisquer A e B inteiros da reta, vou calculando a média entre eles, e marcando esse ponto e reinicio esse processo entre esse novo ponto e o menor inteiro entre A e B, o que permite que os alunos percebam características importantes, a partir desse estudo fica fácil introduzir os irracionais, os alunos percebem que só os racionais não são capazes de preencher toda a reta.
A noção dos irracionais apresento com uma sacolinha com números de zero a nove, faço sorteio de números com reposição e escrevo no quadro o número formado, repetido o experimento a percepção que não há fração que represente o número "infinito" aleatório formado nos da a base para apresentar os irracionais.”

“Há bastante tempo que não trabalho com turmas onde se tem uma construção inicial do conceito, mas me recordo que partia da definição, dos racionais, e o que não cabia nessa definição, irracionais. Não tratava da incomensurabilidade como no texto base 1, mesmo porque até esse texto, não saberia encaixar esse conceito, e vou tentar pensar numa forma de encaixar a partir de agora. Penso que esse conteúdo é dado no sétimo ano, talvez sexto...”

“Números reais e continuidade, tema presente nos sistemas de ensino fundamental, médio e superior, ainda não é uma questão resolvida no ensino, apesar da existência de alguns trabalhos em Educação Matemática que tratam desse importante conteúdo da Matemática. Quase todas as pesquisas existentes sobre esse assunto levantam problemas em relação ao ensino e a aprendizagem de números reais em todos os níveis de ensino. Convém observar que noções de ordem, densidade, continuidade fazem parte de um elenco de conceitos que deveriam ser discutidos quando se pretende ensinar esse conjunto numérico. Cabe também destacar que Richard Dedekind um dos formadores da teoria dos Números Reais, necessitou usar esses conceitos na sua construção."

"Costumava construir os racionais apresentando frações e decimais finitos e infinitos periódicos com ordenação e localização na reta. Já o irracional introduzia com a situação do triângulo retângulo de lados 1, 1 e x para que calculem a medida do lado x, daí apresentava os números irracionais."

"Acho que uma boa opção, também, para construção de números seria desenho com régua e compasso. Além de estudar medidas e propriedades geométricas, é possível fazer verificações que não as somente numéricas. Isto ainda é uma forma concreta de aplicação da teoria, que pode ainda ser utilizada relacionando-a com problemas reais e situações reais."

APÊNDICE B - Respostas à questão 2 do fórum temático 2

“Infinidade algo incomensurável, que não tenha fim. Conjunto dos naturais, racionais, irracionais e reais são exemplos de conjunto infinito.”

“Infinidade: Um conjunto de números sem fim que já abrangem o conjunto dos números naturais, que é infinito. Costumo também dar como exemplo o conjunto dos múltiplos.”

“Infinidade: Que não tem fim, sequência infinita; Ex: a sequência numérica dos reais, (- 2, -1, 0, 1, 2, 3 ...)”

“Infinidade é o que não tem fim.”

“Por infinidade, um conjunto que contenha pelo menos os naturais (com base no texto).”

“Infinidade: conjunto contínuo com ordenação de precedência entre os elementos deste.

“Infinidade - quantidade que pode ser aumentada o quanto se queira. Segundo Caraça, um conjunto é infinito se ele abrange o conjunto dos números naturais, que é infinito.”

“Infinidade: escrever um número sem fim. A reticência colocada após a última vírgula vai significar que ainda faltam números. Exemplo de Infinidade: 1,2,3,4,5,...”

“Infinidade - Um conjunto que é infinito, não tem fim. Conjuntos numéricos exemplifica a infinidade.”

“Infinidade: relacionada ao fato de os conjuntos numéricos serem infinitos.”

“Infinidade - Acho que podemos dizer que um conjunto possui uma infinidade de elementos se sempre que tomarmos um elemento qualquer x desse conjunto tivermos um elemento y, também desse conjunto, tal que y > x. Ou, se tomarmos um elemento qualquer x desse conjunto tivermos sempre um elemento y, também desse conjunto, tal que y < x.”

“Infinidade é algo infinito.”

“Infinidade: escrever um número sem fim.”

“Infinidade: é quando conseguimos sempre encontrar um número diferente do anterior, mas nunca o maior deles.”

“Infinidade: Característica de um conjunto que não pode ser posto em correspondência biunívoca com um conjunto do tipo {1,2,...,n}, com n natural. Exemplo: os racionais são infinitos.”

“Infinidade é algo que não pode ser quantificado, exemplo o conjunto dos números naturais.”

“Um conjunto que contenha pelo menos os naturais.”

“Ordenação é um critério que analisa a posição entre dois números na reta.”

“Ordenação: crescente e decrescente (sequência talvez).”

“A ideia de ordenação está intimamente ligada a comparação, se $x>y$ então $x-y>0$, um exemplo a reta numerada do conjunto dos números naturais.”

“Ordenação: Vai analisar a posição dos números. Exemplificando: dado um número, se ele for representado por um ponto numa reta, se ele estiver à esquerda de outro, ele será menor que o segundo. Exemplo dado o conjunto formado pelos números 1 e 2, como $1<2$, esse conjunto é ordenado.”

“Ordenação - Ordem de localização, se posicionam ordenadamente. Os números na reta real exemplificam a ordenação.”

“Ordenação: Que se estabelece uma ordem, um critério de ordenação; Ex: 1,2,3,4... ordem crescente ou 10,9,8,7... ordem decrescente.”

“Ordenação: é a posição que são colocados os números.”

“Ordenação: conjunto ordenado é quando dado dois elementos, podemos estabelecer a relação de ordem menor que.”

“Ordenação: Relação entre elementos de um conjunto que é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Exemplo: o conjunto dos racionais é ordenado.”

“Ordenação – É quando podemos dizer que para quaisquer dois elementos x e y de um conjunto temos que $x < y$. Ou, em termos de reta numérica, x está à esquerda de y.”

“Ordenação: em todos os conjuntos há uma sequência lógica dos elementos em ordem crescente ou decrescente.”

“Ordenação - colocar em ordem atribuindo os sentidos positivo e negativo. Segundo caraça, ordenação é um critério que pode ser estabelecido na reta para verificar que posição um dado ponto ocupa sobre ela dado um outro ponto como referencial (se está à esquerda ou à direita deste ponto). Por exemplo, sejam r, s pertencentes aos racionais. Então r está a esquerda de s se, $r < s$.”

“Ordenação: Ordenação é quando comparamos dois elementos e verificamos qual é menor que o outro.”

“Ordenação: escrever em ordem crescente ou decrescente. Exemplo de Ordenação: -0,3, 1, 2/7.”

“Ordenação: é quando se tem uma classificação daquilo que se tem representado. Exemplo: Identificar os resultados finais de uma maratona nas olimpíadas do Rio de Janeiro.”

“Ordenação: Números colocados em forma ordenada em uma reta. Exemplo: a reta numérica.”

“Ordenação: em todos os conjuntos há uma sequência lógica dos elementos em ordem crescente ou decrescente.”

“Ordenação: menor elemento de um conjunto, quando existe é único.”

“Ordenação: geralmente relaciono com a questão de ordem maior ou menor, ou seja, encontrar o maior ou menor número em relação a outro. Quem vem primeiro.”

“A densidade é a característica de um conjunto possuir elementos entre dois de seus elementos (no texto são mencionados infinitos elementos, mas na verdade sempre imaginei que poderia ser pelo menos um).”

“Densidade: Propriedade de um conjunto ordenado no qual dados dos elementos é sempre possível encontrar um terceiro que esteja entre os dois dados, ou seja, que seja maior que um deles e menor que o outro. Exemplo: o conjunto dos racionais é denso.”

“Densidade: É a propriedade que entre dois pontos em uma reta existe sempre um múltiplo entre eles. Quando dados dois pontos de um mesmo conjunto, existem infinitos elementos do mesmo conjunto que estão entre estes dois pontos. O conjunto dos racionais, irracionais e dos reais, são conjuntos densos.”

“Densidade é a propriedade que entre dois pontos existe sempre um número múltiplo entre eles.”

“Densidade: Pode ser a quantidade infinita de itens dentro de um intervalo finito.”

“Densidade - um dado conjunto é denso se entre dois elementos pertencentes existem outros infinitos elementos. Por exemplo, o conjunto dos números racionais.”

“Densidade: É quando podemos encontrar infinitos pontos entre dois pontos dados.”

“Densidade: aplica-se nos conjuntos onde entre dois de seus elementos, há uma infinidade de outros pontos (elementos).”

“Ainda em relação à densidade, pelo que entendi, um conjunto é denso quando há uma infinidade de elementos entre dois de seus elementos. Mas não seriam elementos de mesma "natureza"? Por exemplo, o conjunto N não é denso, pois entre 2 e 3 não há outros naturais.”

“Densidade: Que é compacto, espesso. Diz da infinidade de elementos existente entre dois elementos do mesmo conjunto; Ex: A representação e localização dos números racionais e irracionais na reta numérica.”

“Densidade: dados dois elementos quaisquer de um conjunto, podemos encontrar infinitos elementos do conjunto entre eles.”

“Densidade: não tem "buraco”.”

“Densidade: é a existência de infinitos números em um intervalo.”

“Densidade está relacionado ao fato de que dados números distintos A e B, de um dado conjunto numérico, sempre há um elemento desse mesmo conjunto entre A e B, um exemplo o conjunto dos números racionais.”

“Sobre a justificativa para o conjunto dos irracionais ser denso, pensei no seguinte (mas não sei se está exatamente correto):
Tome dois números irracionais x e y, com $x < y$.
Então, $y - x < 0$.
Tome um número natural a, de modo que $a. (y-x) >1$.
Daí $y - x > 1/a$ e, consequentemente, $x +1/a < y$.
Mas, $x < x + 1/a$, pois $a > 0$ (logo $1/a > 0$).
Assim, $x < x + 1/a < y$.
Como x é irracional e 1/a é racional, temos que $(x + 1/a)$ é irracional.
Portanto, entre dois irracionais sempre teremos um irracional. Acho que isso explica a densidade dos irracionais.
Certo?”

“Achei esta atividade do professor Ion Moutinho da UFFhttps://www.geogebra.org/m/nruYwQAd
Esta atividade ajuda o aluno a entender como se dá a distribuição dos racionais na reta real. Ou seja, ajuda a enxergar a densidade do conjunto dos racionais.”

“É a relação entre massa e volume. Exemplo de densidade: -0,2, 5, 1/3”

“É a quantidade de algo existente em um curto espaço delimitado.”

“Entendo por densidade a infinidade entre dois elementos de um conjunto infinito.”

“Pode ser a quantidade infinita de itens dentro de um intervalo finito.”

“Densidade não tem “buracos”.”

“Densidade: Pode ser a quantidade infinita de itens dentro de um intervalo finito.”
“Densidade: Todo conjunto que, entre dois de qualquer dos seus elementos, exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um conjunto denso. Exemplo: Os números racionais.”

“Densidade: É quando podemos encontrar infinitos pontos entre dois pontos dados.”

“Densidade - Algo compacto e concentrado. Infinidade de números entre dois números inteiros, extremos. Os racionais localizados entre dois números inteiros exemplificam a densidade, logo o conjunto dos reais é denso.”

“Continuidade: É quando existe uma sequência entre os números. Exemplo: Também vejo a reta numérica como um exemplo de continuidade.”

“Continuidade, numa interpretação particular, diria que seria a característica da reta dos números reais não possuir um "buraco" sequer. Em particular, a existência entre os racionais e irracionais garante a continuidade da reta; além disto ambos destes conjuntos são densos, apesar de não conhecer uma justificativa para o fato dos irracionais o serem.”

“Continuidade: É quando um conjunto é completo e tem a mesma estrutura da reta.”

“Continuidade - um objeto é contínuo se não há nele rupturas, lacunas, buracos. Segundo Caraça, o maior exemplo de continuidade é a linha reta.”

“Continuidade – Nesse caso seria a ideia de cobrir todos os pontos da reta.”

“Continuidade: não tem buracos e nem quebras.”

“Continuidade: é quando temos uma quantidade de pontos infinitos formando assim uma reta.”

“Continuidade é o que não tem limite.”

“Continuidade - Algo contínuo, que tem uma sequência. A reta real apresenta uma continuidade de números no sentido negativo e positivo, que exemplifica a continuidade. Os dois textos mostram maneiras diferentes sobre a construção dos conceitos sobre racionais e irracionais, mas muito próximas, ou seja, elas se complementam. Remete-nos ao entendimento da construção do Conjunto dos números reais, sinalizando o que são medidas imensuráveis e mensuráveis, e que estão intrinsecamente ligadas aos números racionais e irracionais.”

“Continuidade: é o que se dá sequência sem interrupções.”

“Continuidade: existe continuidade em um conjunto quando, a cada elemento desse conjunto, todos os elementos possam, um a um, dividi-lo em dois conjuntos. O conjunto dos números reais é um exemplo de conjunto com continuidade. Naturais, racionais, irracionais não cumprem totalmente essa exigência...”

“Continuidade é quando seu limite é infinito.”

“Continuidade: Aquilo que é contínuo, ininterrupto; Ex: o posicionamento dos números racionais e irracionais na reta dos reais.”

“Continuidade: Ausência de saltos e buracos. Um conjunto que goze da propriedade da completude não possui falhas nem saltos, como uma reta.”

“Continuidade: Propriedade da reta definida por Dedekind através do seguinte Postulado: Toda partição da reta em dois subconjuntos em que todo ponto de um deles está à esquerda de todo ponto do outro, admite um elemento de separação. Exemplo: o conjunto dos reais é contínuo.”

“Continuidade indica que não há entre dois valores quaisquer uma curva qualquer "buraco", ou seja, a curva é totalmente preenchida por números, um exemplo a função definida nos reais f(x)=x é contínua.”

“É quando temos uma quantidade de pontos infinitos formando uma reta.”

“Prosseguimento de um determinado contexto, nesse caso se tratando de conjuntos numéricos seria algo que ainda não chegou ao término.”

“Lembra a imagem de uma linha reta, e de uma definição que permite sempre encontrar o próximo elemento da sequência.”

“Continuidade: algo que não chegou. A leitura do texto de Caraça foi importante, pois me fez repensar sobre as características do conjunto. Exemplo de Continuidade: -0,2; -0,1; 0; 0,5; 1
Esses conceitos vêm complementar um texto ao outro.”

“Continuidade: é quando temos uma quantidade de pontos infinitos formando assim uma reta.”

“Continuidade: e algo que não tem interrupção. Exemplo de Continuidade: ....-2, -3,-1,0,1,2...”

“Continuidade: não existem obstáculos entre um ponto e o outro, nenhum problema.”

“Continuidade: O conjunto é dito contínuo se não apresenta “espaços vazios”.”