UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LAUDELINO GOMES FERREIRA

FUNÇÕES GERADORAS: PROBLEMAS E APLICAÇÕES

MOSSORÓ – RN

2018

LAUDELINO GOMES FERREIRA

FUNÇÕES GERADORAS: PROBLEMAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiário - UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia-UFERSA

MOSSORÓ – RN

2018

F383f Ferreira, Laudelino Gomes.
Funções Geradoras: Problemas e Aplicações / Laudelino Gomes Ferreira. - 2018.
74 f. : il.

Orientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2018.

1. Funções geradoras. 2. Séries numéricas. 3. Recorrências. I. Garcia, Antonio Ronaldo Gomes, orient. II. Título.

LAUDELINO GOMES FERREIRA

FUNÇÕES GERADORAS: PROBLEMAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiário - UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 07 de Dezembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia-UFERSA (Orientador)
Presidente

Prof. Dr. Antônio Gomes Nunes - UFERSA
Membro interno

Ronaldo César Duarte

Prof. Dr. Ronaldo César Duarte- UERN
Membro externo ao programa

MOSSORÓ-RN

2018

Ao meu filho, Lucas Justo de Freitas Bisneto, e a minha esposa, Elaine Patricia de Freitas Silva pela compreensão nos momentos mais estressantes.

Agradecimentos

A minha mãe, Maria Segunda da Conceição de Brito (em memória) que me ensinou a importância da educação.

Ao meu pai, João Gomes de Brito (em memória) que me ajudou nas primeiras aulas de matemática.

A minha esposa Elaine Patricia pelo amor, companheirismo e incentivo.

Aos meus filhos Laudelino Gomes Ferreira Filho (em memória) e Lucas Justo de Freitas Bisneto.

Aos meus irmãos Laudecir, Lancleide e Iolanda

Ao professor Antonio Ronaldo Gomes Garcia, que aceitou me orientar.

Aos amigos Elias, Frank e Djair que dedicaram seus finais de semanas em estudar para exame nacional de acesso ao PROFMAT.

Ao amigo João Alexandre Júnior que sempre me incentivou a estudar matemática.

Aos professores, Antônio Gomes Nunes e Ronaldo César por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

Ao professor Jeovanizelio Firmino Gomes pelo profissionalismo e dedicação a profissão.

A todos os meus colegas de turma que durante todo o tempo de curso estiveram juntos comigo nessa caminhada e, em especial, o grupo de estudos de Mossoró: Evanilson, João e Mansinho.

Ao colega do curso de graduação e do PROFMAT Maximiliano Dias de Sousa (em memória) que sempre nos contagiou com sua felicidade inabalável.

Resumo

Neste trabalho, após apresentarmos uma breve exposição ao estudo das sequências e séries foi feita uma introdução às funções geradoras ordinárias. Uma função geradora $G(x)$ é uma série de potência associada a um problema de combinatória. Nosso objetivo principal foi aplicar às funções geradoras para resolver problemas de combinatória com restrições em que a ordem dos objetos não seja relevante.

Palavras-chave: Funções geradoras, Séries numéricas, Recorrências.

Abstract

In this work, after introducing a brief exposition to the study of the sequences and series, an introduction was made to the ordinary generating functions. A generating function $G(x)$ is a power series associated with a combinatorial problem. Our main aim was to apply the generating functions to solve some combinatorial problems with constraints in which the order of the objects is not relevant.

Keywords: Generating functions, Numerical series, Recorrence.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Neste trabalho faremos uma introdução ao estudo das funções geradoras. Esta técnica surgiu no século $XVII$ nos trabalhos de Abraham De Moivre. Os matemáticos Leonhard Euler, Laplace e N. Bernoulli usaram para resolver problemas na teoria de partições, estudo de probabilidade e permutações caóticas respectivamente.

O Princípio Fundamental da Contagem é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas de análise combinatória, mas, torna-se praticamente impossível aplicá-lo a problemas com restrições . Por isso, o principal objetivo desta dissertação é apresentar soluções via funções geradoras ordinárias. Mais especificamente, nos concentramos nos problemas de contagem do número de elementos de um conjunto nos quais a ordem não importe e que a repetição seja permitida.

No Capítulo 1, apresenta-se uma breve introdução às sequências e séries. Os tópicos abordados são muito importantes no desenvolvimento do capítulo , pois uma função geradora é uma série de potência cujos coeficientes estão associados a um problema de combinatória.

No Capítulo 2, defini-se função geradora ordinária e apresenta-se os principais resultados para a determinação dos coeficientes. Temos também, a solução de recorrência via funções geratrizes.

No Capítulo 3, estão as aplicações das funções geradoras na resolução de problemas de contagem e na resolução de recorrências.

Completando o trabalho, adicionamos três apêndices. O Apêndice A traz os métodos básico de contagem e binômio de Newton. No Apêndice B, faz-se uma introdução a teoria das recorrência lineares de primeira e segunda ordem. Finalmente, no Apêndice C trata-se do teorema dos intervalos encaixados.

Capítulo 1

Sequências e Séries

Neste capítulo apresentamos os resultados essenciais sobre sequências e séries, o mínimo, para estudar as funções geratrizes. Para escrever este capítulo consultou-se os seguintes livros [8, 10] e [15].

1.1 Noções de Sequências

Neste trabalho, denota-se a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ por $(a_n)_n$ com $n \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Definições

Definição 1.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real $x(n)$. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ será representado por x_n e denominado $n-$ésimo termo da sequência.

Definição 1.2. Uma sequência $(a_n)_n$ chama-se crescente, se para qualquer número natural n vale a desigualdade

$$a_{n+1} > a_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.1. Mostraremos que a sequência $(a_n)_n$ com termo geral $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$, é uma sequência crescente.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $4n + 2 > 2n + 3$. Equivalentemente

$$\frac{2}{2n+3} > \frac{1}{2n+1}$$

e portanto

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+3} > \frac{2^n}{2n+1} = a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.3. Uma sequência $(a_n)_n$ chama-se decrescente, se para qualquer número natural n vale a desigualdade

$$a_{n+1} < a_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.2. Mostraremos que sequência $(a_n)_n$ com termo geral $a_n = \dfrac{1}{n}$ é uma sequência decrescente.

Note que $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+10)} < 0$. Desta forma $a_{n+1} < a_n$.

Definição 1.4. Uma sequência $(a_n)_n$ chama-se não-decrescente, se para qualquer número natural n vale a desigualdade

$$a_{n+1} \geq a_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.5. Uma sequência $(a_n)_n$ chama-se não-crescente, se para qualquer número natural n vale a desigualdade

$$a_{n+1} \leq a_n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

As sequências definidas em 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5 são geralmente chamadas de sequências monótonas.

Definição 1.6. Seja $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, a sequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ chama-se subsequência da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.2 Limites de Sequências

Definição 1.7. O número real a será dito limite da sequência $(x_n)_n$ de números reais se, para cada $\varepsilon > 0$, for possível encontrar um natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Simbolicamente:

$$\lim x_n = a \text{ se e somnete se, dado } \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in\ \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Teorema 1.1 (Unicidade do limite)**.** *Seja $(x_n)_n$ uma sequência convergente. Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$*, então $a = b$.*

Demonstração. Seja x_n uma sequência convergente. Suponhamos, por contradição, que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, com $a \neq b$. Suponha, sem perda de generalidade, que

$a > b$. Sendo assim, podemos tomar $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$. Neste caso existiriam N_1 e N_2 em $\mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall\ n \geq N_1 \tag{1.1}$$

$$|x_n - b| < \varepsilon, \forall\ n \geq N_2 \tag{1.2}$$

Assim, se $n > \max\{N_1, N_2\}$, de (1.1), temos

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ou seja, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Mas por hipótese $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$, logo,

$$a - \big(\frac{a-b}{2}\big) < x_n < a + \big(\frac{a-b}{2}\big) \Rightarrow \frac{a+b}{2} < x_n < \frac{3a-b}{2}.$$

Portanto, $x_n \in \Big(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{3a-b}{2}\Big)$. E de forma análoga, desenvolvendo (1.2), temos $x_n \in \Big(\dfrac{3b-a}{2}, \dfrac{a+b}{2}\Big)$, ou seja, $x_n \in \Big(\dfrac{3b-a}{2}, \dfrac{a+b}{2}\Big) \cap \Big(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{3a-b}{2}\Big) = \emptyset$, absurdo. Portanto, o limite de $(x_n)_n$ é único. $\square$

Teorema 1.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente para L. Considerando $\varepsilon = 1$ temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < 1$, para todo $n \geq N$. Note que,

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L|$$

então, para todo $n \geq N$ temos $|a_n| < 1 + |L|$. Tomando

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |L|\},$$

obtemos $|a_n| \leq M, \forall\ n \in \mathbb{N}$, demonstrando que $(a_n)_n$ é limitada. $\square$

1.1.3 Operações com Limites de Sequências

Teorema 1.3. *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sequências convergentes, com limites a e b, respectivamente. Então, $(a_n+b_n)_n, (a_nb_n)_n$ e $(ka_n)_n$, onde k é uma constante qualquer, são sequências convergentes e*

(i) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$;

(ii) $\lim(ka_n) = k \lim a_n = ka$;

(iii) $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n) = ab$;

(iv) se, além das hipóteses acima, $b \neq 0$*, então existe o limite de* $\dfrac{a_n}{b_n}$*, e este limite é igual a* $\dfrac{a}{b}$.

Demonstração. (i) Seja $\varepsilon > 0$ e suponhamos que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Assim, existem n_1 e n_2 pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } n \geq n_2.$$

Escolhendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, usando a desigualdade triangular,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$, por definição $(a_n + b_n)_n$ converge e $\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n$.

(ii) Considere $k \in \mathbb{R}$ e $\lim a_n = a$. Seja $\epsilon > 0$. Pela Definição 1.7, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|k| + 1}.$$

Portanto,

$$|ka_n - ka| = |k||a_n - a| < \frac{|k|\epsilon}{|k| + 1} < \epsilon$$

sempre que $n \geq n_0$. Por definição, $\lim ka_n = ka = k \lim a_n$.

(iii) Suponhamos que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Primeiro, façamos uma estimativa de $|a_n b_n - ab|$.Temos que

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $(b_n)_n$ é convergente, temos pelo Teorema 1.2, que existe um $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim , dado $\varepsilon > 0$, desde que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ existem n_1 e n_2 números naturais tais que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \text{ se } n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}, \text{ se } n \geq n_2.$$

Seja $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então

$$|a_n b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + |a|\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portando, segue o resultado.
(iv) Suponha que $\lim b_n = b$ com $b > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > \frac{b}{2}$ para todo $n > n_0$. Para $n > n_0$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{bb_n} < \frac{2}{b^2}|b_n - b|.$$

Dado $\epsilon > 0$ conseguimos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1$ implica em $|b_n - b| < \dfrac{\epsilon \cdot b^2}{2}$. Assim, para $n > \max\{n_0, n_1\}$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \epsilon.$$

Em resumo provamos que, neste caso, $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Analogamente ao que foi demonstrado, se $\lim b_n = b$ com $b < 0$, teremos $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Pelo item (iii),

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Portanto, segue o resultado. □

1.1.4 Teorema do Bolzano-Weierstrass e Sequências de Cauchy

Teorema 1.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma sequência limitada. Assim, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \leq x_n \leq b, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$$

Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em dois intervalos iguais, e suponhamos que um deles, digamos $[a_1, b_1]$ contenha infinitos termos da sequência. A seguir dividimos novamente o intervalo $[a_1, b_1]$ em dois intervalos iguais, e suponhamos que um deles, digamos $[a_2, b_2]$ contenha infinitos termos da sequência. Continuando com este processo, vamos obter uma sequência de intervalos encaixantes

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

Assim, temos que $|b_n - a_n| = \dfrac{|b-a|}{2^n}$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$. Do Teorema C.3, temos $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$, ou seja, existe $c \in [a_n, b_n], \forall\, n \in \mathbb{N}$. Para cada sequência crescente $(x_{k_n})_n$ existe uma subsequência $(x_{n_n})_n$ com $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$, pois em cada intervalo $[a_n, b_n]$ temos infinitos termos da sequência. Portanto, como $|x_{k_n} - c| \leq |b_n - a_n| \to 0$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$. □

Definição 1.8. A sequência numérica $(x_n)_n$ é dita de Cauchy se satisfaz a seguinte condição: dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m > n_0.$$

Teorema 1.5 (Critério de Cauchy)**.** *Uma sequência é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_n$ seja uma sequência convergente para $a \in \mathbb{R}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } n > n_0$$

Assim, se $m, n > n_0$, temos que

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que implica que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_n$ seja uma sequência de Cauchy. Mostraremos que ela é convergente. Primeiro, mostraremos que $(x_n)_n$ é limitada. Assim, para $\varepsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < 1, \text{ se } m, n \geq n_1$$

e, assim, $|x_n - x_{n_1}| < 1$, se $n \geq n_1$. Note que,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|, \text{ se } n \geq n_1.$$

Isso significa que o conjunto $\{x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots\}$ é limitado. Tomando

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n-1}|\},$$

concluímos que $|x_n| \leq \max\{M, 1 + |x_{n_1}|\}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto a sequência é limitada. Pelo Teorema 1.4, a sequência $(x_n)_n$ possui uma subsequência $(x_{n_j})_j$ que converge para

$a \in \mathbb{R}$. Mostraremos que a própria sequência também converge para a. Para todo termo x_{n_j} da sequência, temos

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_j} + x_{n_j} - a| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - a|. \tag{1.3}$$

Dado $\varepsilon > 0$. Assim, como $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } m, n \geq n_2$$

e como (x_{n_j}) converge para a, então existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ se } n_j \geq n_3$$

Tomando $n_{j_0} \geq \max\{n_2, n_3\}$ e usando (1.3) com $n_j = n_{j_0}$, temos que

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_{j_0}}| + |x_{n_{j_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ se } n \geq n_0$$

Portanto, segue que $(x_n)_n$ converge para a. $\square$

1.2 Noções sobre Séries de Potência

1.2.1 Definições e Exemplos

Definição 1.9. Uma série infinita, ou simplesmente série, é um par de sequências $(a_n)_n$ e $(s_n)_n$ cujos termos estão ligados pelas relações

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

cada s_n é chamado de n-ésima soma parcial da série e a_n é seu termo geral da série.

Definição 1.10. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se a sequência das somas parciais $(s_n)_n$ convergir para s diremos que a série converge e escrevemos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Caso a sequência das somas parciais não convirja, diremos que a série diverge.

Definição 1.11. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$, uma sequência numérica dada, e seja x_0 um número real dado. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

denomina-se série de potência, com coeficientes a_n, centrada em x_0.

1.2.2 Convergência das Séries de Potências

O Teorema 1.6 a seguir nos fornece uma condição necessária para que uma série convirja.

Teorema 1.6. *Se uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, considerando

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Existe $S = \lim s_n$. Da mesma forma, $S = \lim s_{n-1}$. Como $a_n = s_n - s_{n-1}$, segue que $\lim a_n = 0$. □

Note que a recíproca do Teorema 1.6 não é verdadeira. Pois, por exemplo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (série harmônica) é divergente, veja a demonstração em [14] , mesmo tendo $\lim a_n = 0$.

Da mesma forma que operamos com números reais (operações algébricas em $\mathbb{R}$), operamos com séries convergentes. O Teorema 1.7 a seguir nos permite relacionar séries convergentes como se fossem somas finitas.

Teorema 1.7. *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries convergentes, e k um número real qualquer. Então são válidas*

(i) a série $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Demonstração. (i) Por hipótese, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Assim, seja s_n a soma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou seja,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

e existe $\lim s_n = S$.

Seja t_n a soma parcial da série $\sum ka_n$, onde k um número real qualquer. Assim, temos que

$$t_n = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \cdots + ka_n = ks_n$$

e por isso, temos

$$\lim t_n = \lim ks_n = k \lim s_n \Rightarrow \lim t_n = kS.$$

Portanto, segue o resultado.
(ii) De forma análoga ao item (i). □

Teorema 1.8 (Teste de Comparação). *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries de termos não negativos* ($a_n \geq 0$ *e* $b_n \geq 0$)*. Se existe* $c > 0$*, tal que* $a_n \leq c \cdot b_n$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, podemos afirmar que*

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Demonstração. Sejam $(s_n)_n$ e $(t_n)_n$ as sequências das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. $a_j < cb_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, implica que $s_n < ct_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos:
(i) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $(t_n)_n$ é limitada e como $c > 0$ temos que (s_n) é limitada. Por hipótese $a_n \geq 0$, isto garante que $(s_n)_n$ é não-decrescente. Pelo Teorema 4, p. 25 de [8], a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, como $a_n \geq 0$ a sequência $(s_n)_n$ é não decrescente, então pelo Teorema 4, p. 25 de [8], a sequência $(s_n)_n$ não é limitada. Pela desigualdade $s_n \leq ct_n$ e $c > 0$ concluímos que $(t_n)_n$ não é limitada e portanto não pode ser convergente. Segue que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. □

No Teorema 1.8, podemos substituir a hipótese de $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por $a_n \leq cb_n$ para n suficientemente grande. A demonstração do teorema considerando esta nova hipótese é análoga a demonstração feita.

Teorema 1.9 (Teste da Razão). *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma sequência de termos positivos, tal que exista* $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *e que esse limite seja* L*. Então,* *(i) se $L < 1$, então a série converge;*

(ii) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então a série diverge.

Demonstração. (i) Se $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, então dada uma constante c, com $L < c < 1$, existe um número n_0, tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c$, $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Assim, temos que :

$$a_{n_0+1} < ca_{n_0}, a_{n_0+2} < ca_{n_0+1} < c^2 a_{n_0}, a_{n_0+3} < ca_{n_0+2} < c^3 a_{n_0}, \ldots,$$

desse modo, em geral, $a_{n_0+j} < c^j a_{n_0}$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Pelo Teorema 1.8 (comparando com uma série geométrica convergente), a série $\sum a_n$ converge.
(ii) Se $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, então dada uma constante c, com $1 < c < L$, existe um número n_0, tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > c$, $\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Assim, temos que :

$$a_{n_0+1} > ca_{n_0}, a_{n_0+2} > ca_{n_0+1} > c^2 a_{n_0}, a_{n_0+3} > ca_{n_0+2} > c^3 a_{n_0}, \ldots,$$

desse modo, em geral, $a_{n_0+j} > c^j a_{n_0}$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Pelo Teorema 1.8 (comparando com uma série geométrica divergente), a série $\sum a_n$ diverge. □

Teorema 1.10 (Teste da Raiz). *Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série, tal que $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Suponha que* $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$. *Então:*

(i) se $L < 1$, então a série converge;

(ii) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então a série diverge.

Demonstração. (i) Se $\lim \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, então existe uma constante c, real positiva, tal que $\sqrt[n]{a_n} < c < 1$, para todo n suficientemente grande. Logo, $a_n < c^n$, para todo n suficientemente grande. Comparando com a série geométrica $\sum c^j$, que converge porque $c < 1$, pelo Teorema 1.8, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
(ii) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, então existe uma constante c, real positiva, tal que $\sqrt[n]{a_n} > c > 1$, para todo n suficientemente grande. Logo, $a_n > c^n$, para todo n suficientemente grande. Pelo Teorema 1.8, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. □

Capítulo 2

Funções Geradoras

Neste capítulo definiremos as funções geradoras ordinárias e apresentaremos suas principais propriedades na Seção 2.1. E na Seção 2.2 apresentamos soluções de recorrências lineares via funções geradoras. Os resultados deste capítulo são baseados nos livros [6], [11] e [16].

2.1 Funções Geradoras Ordinárias

Nesta seção definiremos as funções geradoras ordinárias. Esta é a principal ferramenta para a resolução de problemas de contagem em que a ordem dos elementos não é relevante, ou seja, problemas de combinações simples e combinações completas.

Definição 2.1. Seja $(a_n)_n$ uma sequência de números reais. A série $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é chamada de função geradora ordinária e os coeficientes da função geradora nos fornece a solução de um problema de contagem.

Exemplo 2.1. Considere n como um número inteiro positivo. Considere $a_r = \binom{n}{r}$, para $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, r$. Qual a função geradora da sequência $a_0, a_1, \ldots, a_r$?

A função geradora ordinária para essa sequência é a seguinte

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

que do Teorema A.4 sabemos que é o desenvolvimento de $(1 + x)^n$. Também é equivalente ao problema de encontrar o número de maneiras de retirarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos. O coeficiente $\binom{n}{0}$ que está associado a x^0 significa que não foi retirado nenhum objeto, o coeficiente $\binom{n}{1}$ que está associado a x significa que foi retirado um objeto e continuando com este raciocínio, o coeficiente $\binom{n}{n}x^n$ está associado a x^n significa que foram retirados n objetos.

Exemplo 2.2. Neste exemplo encontraremos a função geradora ordinária $f(x)$ para sequência de **Lucas** $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 3$.

Os primeiros termos da sequência de **Lucas** são : $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$. Temos, então que a função geradora ordinária para essa sequência é

$$f(x) = x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 18x^6 + \cdots .$$

2.1.1 Determinação dos Coeficientes

Nesta seção, discutiremos as principais formas de calcularmos os coeficientes de uma função geradora. Note que, da Definição 2.1, temos que uma função geradora ordinária é uma função polinomial de grau n. Do cálculo diferencial e integral temos que funções polinomiais são deriváveis e integráveis.

Teorema 2.1. *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das sequências $(a_r)_r$ e $(b_r)_r$, respectivamente, e $A, B \in \mathbb{R}$, temos:*

(i) *$Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)_r$;*

(ii) $f(x) \cdot g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^k$;

(iii) *A função geradora para $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)_r$ é igual $(1 + x + x^2 + \cdots)f(x)$.*

(iv) *A função geradora para $(ra_r)_r$ é igual a $xf'(x)$, onde $f'(x)$ é a derivada de f com relação a x;*

(v) $\displaystyle\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \ n \neq -1.$

Demonstração. Sejam $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ funções geradoras para as sequências (a_r) e (b_r), respectivamente, temos (i)

$$\begin{aligned} Af(x) + Bg(x) &= A(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) + B(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (Aa_k + Bb_k)x^k. \end{aligned}$$

Portanto, $Af(x) + Bg(x)$ é uma função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$.
(ii) Note que

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n. \end{aligned}$$

(iii) Fazendo $b_r = 1$, do item (ii), temos

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k \cdot 1) \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k) \right) x^n \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.
(iv) Sendo $f'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} ra_r x^{r-1}$, segue que

$$xf'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} ra_r x^r$$

Logo, segue o resultado.
(v) É imediato, da integração de funções polinomiais. $\square$

O Teorema 2.2 a seguir, que é uma generalização do Teorema A.4, é muito útil na determinação de coeficientes de funções geradoras.

Teorema 2.2 (Teorema Binomial Generalizado)**.** *Seja u um número real qualquer. Assim, temos*

$$(1+x)^u = \binom{u}{0} + \binom{u}{1}x + \binom{u}{2}x^2 + \cdots + \binom{u}{k}x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

onde

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)(u-2)\dots(u-k+1)}{k!}, & se\ k > 0 \\ 1, & se\ k = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Ver [14]. $\square$

Exemplo 2.3. Usaremos o Teorema 2.2 a sequência cuja função geradora é dada por:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

Note que $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4} = (1-x)^{-4}$. Aplicando o Teorema 2.2, temos

$$(1-x)^{-4} = 1+(-4)\cdot(-x)+\frac{(-4)(-4-1)}{2}(-x)^2+\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3\cdot 2}(-x)^3+\cdots,$$

ou seja,

$$(1-x)^{-4} = 1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+84x^6+120x^7+\cdots.$$

Portanto, $g(x)$ é a função geradora da sequência $(a_r) = (1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, \ldots)$.

Teorema 2.3. *(i) Seja a_r o coeficiente de x^r na função geradora ordinária*

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n,$$

então $a_r = \binom{r+n-1}{r}$;

(ii) $(1-x^m)^n = 1-\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}-\cdots+(-1)^n x^{nm}$

(iii) $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1+x+x^2+\cdots)^n$.

Demonstração. (i) Suponha que $|x|<1$. Então, temos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, ou seja,

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Agora, no Teorema 2.2 substituindo x por $-x$ e u por $-n$, temos

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-1)^r x^r, \tag{2.1}$$

onde

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-r+1)}{r!} \\
&= (-1)^r \frac{(n)(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!} \\
&= (-1)^r \frac{(n+r-1)\ldots(n+1)n(n-1)!}{r!(n-1)!} \\
&= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.1), temos

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

Portando, $a_r = \binom{n+r-1}{r}$.
(ii) No desenvolvimento ,

$$(1+t)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \binom{n}{3}t^3 + \cdots + \binom{n}{n}t^n$$

Faça $t = (-x^m)$,

$$\begin{aligned}
(1-x^m)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(-x^m) + \binom{n}{2}(-x^m)^2 + \binom{n}{3}(-x^m)^3 + \cdots + \binom{n}{n}(-x^m)^n \\
(1-x^m)^n &= 1 - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} - \binom{n}{3}x^{3m} + \cdots + (-1)^n x^{mn}
\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado.
(iii) Note que $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1} = (1 - x^m)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$. Elevando, ambos os membros, a n temos,

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$

Portanto, segue o resultado. □

Exemplo 2.4. Encontraremos o coeficiente de x^{27} em $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6$.

Note que

$$(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6 = [x^3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)]^6,$$

ou seja, $(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^6 = x^{18} \cdot (1 + x + x^2 + \ldots)^6$. Considerando $|x| < 1$, temos que $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$. Assim,

$$(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^6 = x^{18} \cdot (1-x)^{-6}.$$

Como queremos o coeficiente de x^{27}, temos que o fator $(1-x)^{-6}$ deve contribuir com x^9. Nesse exemplo, não é viável aplicarmos o Teorema 2.2, pois são necessários muitos cálculos para encontrarmos o coeficiente de x^9. Usando o Teorema 2.3-(i), teremos o coeficiente de forma mais rápida. Assim, temos

$$\begin{aligned} a_r &= \binom{r+n-1}{r} \\ &= \binom{9+6-1}{9} \\ &= \binom{14}{9} \Rightarrow a_9 = 2002. \end{aligned}$$

Logo, o coeficiente de x^{27} é 2002.

2.2 Resolução de Relações de Recorrência Usando Funções Geradoras

Nesta seção apresentarmos um algoritmo que nos possibilitará resolvermos relações de recorrências usando funções geradoras ordinárias. Para mais detalhes consultem [16].

Sejam $(a_n)_n$ e $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a sequência que gera os coeficientes e a função geratriz, respectivamente. A resolução por funções geradoras é feita em quatro passos. Seguem os passos:

1. Escreva uma única equação que expresse a_n em termos de outros elementos da sequência. Esta equação deve ser válida para todos os inteiros n;

2. Multiplique ambos os lados da equação por x^n. Somando-se todas as equações e fazendo as manipulações necessárias para obtemos alguma outra expressão envolvendo $G(x)$;

3. Resolva a equação resultante, obtendo uma forma fechada para $G(x)$.

4. Expanda $G(x)$ em uma série de potências e leia os coeficientes de x^n; esta é uma forma fechada para a_n.

Exemplo 2.5. Resolveremos, usando funções geradoras, a seguinte recorrência

$$F_{n+1} = 2F_n + 1,\ F_1 = 2,\ n > 1. \tag{2.2}$$

Seja $G(x) = F_1 + F_2x + F_3x^2 + \cdots + F_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} F_k x^{k-1}$ uma função geratriz para a recorrência (2.2), e suponha $|x| < 1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow F_2x &= 2F_1x + x \\ n = 2 \Rightarrow F_3x^2 &= 2F_2x^2 + x^2 \\ n = 3 \Rightarrow F_4x^3 &= 2F_3x^3 + x^3 \\ &\vdots \\ F_{n+1}x^n &= 2F_nx^n + x^n \end{aligned}$$

Somando ordenadamente as equações, temos

$$F_2x + F_3x^2 + \cdots = 2(F_1x + F_2x^2 + \cdots) + x(1 + x + x^2 + \cdots),$$

ou seja, após todas as manipulações algébricas e simplificações

$$G(x) = \frac{2}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)(1-2x)}. \tag{2.3}$$

A decomposição em frações parciais para a segunda parcela é a seguinte,

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Substituindo em (2.3), temos

$$G(x) = \frac{3}{1-2x} - \frac{1}{1-x}. \tag{2.4}$$

Agora, usando as formas expandidas determinaremos os coeficientes. Note que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, ou seja, o n-ésimo coeficiente é 1. E que $\frac{1}{1-2x} = 1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$, ou seja, o n-ésimo coeficiente é 2^n. Substituindo os coeficientes em (2.4), temos

$$F_{n+1} = 3 \cdot 2^n - 1 \Rightarrow F_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

Portanto, a solução é $F_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ com $F_1 = 2$.

Capítulo 3

Aplicações das Funções Geradoras Ordinárias

Neste capítulo apresentamos a resolução de alguns problemas de contagem que possuem alguma restrição em seu enunciado. Na Seção 3.1 estão os problemas resolvidos com aplicação direta das funções geratrizes. E na Seção 3.2 temos os problemas de recorrências resolvidos via funções geradoras.

3.1 Resolução de Problemas de Combinatória via Funções Geradoras Ordinárias

Os problemas desta seção podem ser encontrados em [2] e [3].

Problema 3.1. (a) Qual a função generalizada para $(a_k)_k$, em que a_k é o número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = k$ quando x_1, x_2 e x_3 forem números inteiros com $x_1 \geq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 3$ e $2 \leq x_3 \leq 5$?

(b) Utilize sua resposta do item (a) para encontrar a_6.

Seja $f_1(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ a função geradora que a associa a monômio x^2 a $x_1 = 2$, x^3 a $x_1 = 3$ e x^n a a_n. Para a condição $0 \leq x_2 \leq 3$ temos $f_2(x) = 1+x+x^2+x^3$, e para condição $2 \leq x_3 \leq 5$ seja $f_3(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ a função geradora. Logo, pelo Princípio A.2, temos

$$\begin{aligned}
f_1(x)f_2(x)f_3(x) &= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3) \cdot (x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\
&= x^2(1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3) \cdot x^2(1 + x + x^2 + x^3) \\
&= x^4(1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3)^2.
\end{aligned}$$

Logo, $G(x) = \dfrac{x^4(1+x+x^2+x^3)^2}{1-x}$ é uma função geradora para o problema.

Para o item (b) note que $1+x+x^2+x^3 = \dfrac{1-x^4}{1-x}$. Reescrevendo $G(x)$, temos

$$G(x) = (x^4 - 2x^8 + x^{12}) \cdot (1-x)^{-3}.$$

Observe que $(1-x)^{-3}$ contribui com x^2. Assim, basta determinarmos o coeficiente de x^2. Temos,

$$a_6 = \binom{3+2-1}{2} = 6 \Rightarrow a_6 = 6.$$

Problema 3.2. Encontrar o número de maneiras de se obter um total de 15 pontos ao se jogar, simultaneamente, quatro dados diferentes.

Seja $f(x) = x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ a função geradora para os possíveis resultados do lançamento de um dado. A possibilidade de dar 1 no lançamento de um dado está associado a x, como dar 2 está associado a x^2. Pelo Princípio A.2, temos

$$\begin{aligned}
G(x) &= (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 \\
&= [x(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)]^4 \\
&= x^4 \cdot (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 \\
&= x^4 \cdot \frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4} \\
&= x^4 \cdot (1-x^6)^4 \cdot (1-x)^{-4} \\
&= x^4 \cdot (1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}) \cdot (1-x)^{-4},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$G(x) = (x^4 - 4x^{10} + 6x^{16} - 4x^{22} + x^{28}) \cdot (1-x)^{-4}. \tag{3.1}$$

Em (3.1) o fator $(1-x)^{-4}$ contribui com x^5 e x^{11}. Assim, aplicando o Teorema 2.3-(i), temos

- $a_5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$;
- $a_{11} = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = 364$.

Portanto, há $1 \cdot 364 - 4 \cdot 56 = 140$ maneiras de se obter um total de 15 pontos ao se lançar quatro dados.

Problema 3.3. Um florista pretende compor um jarro de tulipas sujeito a certas restrições:

(i) tulipas amarelas em número não superior a 3;

(ii) tulipas vermelhas em número par;

(iii) no máximo uma tulipa preta;

(iv) tulipas brancas em número arbitrário,

(v) tulipas azuis em número múltiplo de 4.

Determinar de quantas maneiras pode o arranjo ser feito com n tulipas?

Seja T_n a sequência que conta os números das diversas variedades de tulipas, sendo n o número de tulipas por jarro. Assim, para $n = 1$, ou seja, quando o jarro tem apenas um tulipa temos as seguintes possibilidades: ou uma tulipa amarela ou uma preta ou branca. Logo, há $T_1 = 3$ maneiras de arrumar um jarro com uma tulipa. Para $n = 2$, quando o jarro tiver duas tulipas temos as seguintes possibilidades:

- 2 tulipas amarelas;
- 2 tulipas vermelhas;
- 2 tulipas brancas;
- 1 tulipa preta e 1 amarela;
- 1 tulipa preta e 1 branca;
- 1 tulipa amarela e 1 branca.

Logo, para compor uma jarro com duas tulipas há 6 possibilidades. Note que listar as possibilidades quando n aumenta é uma tarefa bastante complicada, devido as restrições impostas. Usaremos as funções geradoras ordinárias para encontrarmos um equação fechada para este problema.

Sejam $A(x), V(x), P(x), B(x)$ e $A_z(x)$ funções geradoras para o número de tulipas amarelas, vermelhas , pretas, brancas e azuis, respectivamente, temos

$$\begin{cases} A(x) = & 1 + x + x^2 + x^3 \\ V(x) = & 1 + x^2 + x^4 + \cdots \\ P(x) = & 1 + x \\ B(x) = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ A_z(x) = & 1 + x^4 + x^8 + \cdots . \end{cases}$$

Note que, supondo $|x| < 1$, as funções podem ser reescritas da seguinte forma,

$$\begin{cases} A(x) = & 1 + x + x^2 + x^3 = \dfrac{1 - x^4}{1 - x} \\ V(x) = & 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x^2} \\ P(x) = & 1 + x \\ B(x) = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x} \\ A_z(x) = & 1 + x^4 + x^8 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x^4}. \end{cases}$$

Assim, pelo Princípio A.2, temos

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1 - x^4}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot (1 + x) \cdot \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^4} \\ G(x) &= \frac{1}{(1 - x)^3}, \end{aligned}$$

onde $G(x) = A(x)V(x)P(x)B(x)A_z(x)$, isto é,

$$G(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}. \tag{3.2}$$

Agora, precisamos determinar o coeficiente de (3.2). Do Teorema 2.3-(i) temos que $G(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^3} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3 + r - 1}{r} x^r$, ou seja, $a_r = \binom{2+r}{r} \Rightarrow a_r = \dfrac{(r + 1)(r + 2)}{2}$.

Portanto, há

$$T_n = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

maneiras diferentes de arranjar um jarro com n tulipas.

Problema 3.4. De quantas formas diferentes se pode selar uma encomenda com o valor total de n euros sabendo que se tem à disposição selos de 1 euro e selos de 2 euros? Depois de obter a expressão para o caso geral, indique o valor para o caso particular de 8 euros.

Seja S_n o número de formas de se selar uma encomenda com n euros. Com 1 pode-se selar apenas uma encomenda, logo $S_1 = 1$. Com 2 euros podemos selar uma encomenda de 2 euros, e 2 encomendas de um euro, ou seja, $S_2 = 2$.

Com 3 euros podemos selar:

(i) 3 encomendas de 1 euro (uma forma);

(ii) 1 encomenda de 1 euro e 1 encomenda de 2 euros (uma forma).

Logo, $S_3 = 2$.

Usaremos a técnica das funções geradoras para determinarmos uma fórmula para esse problema. Assim, sejam $E_1(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ e $E_2(x) = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots$ as funções geradores para os selos de 1 e 2 euros, respectivamente. Assim, pelo Princípio A.2, temos

$$E_1(x) \cdot E_2(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \tag{3.3}$$

Suponha que $|x| < 1$, assim

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

e $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}$, substituindo em (3.3), temos

$$\begin{aligned} E_1(x) \cdot E_2(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)(1+x)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$E_1(x) \cdot E_2(x) = \frac{1}{(1+x)(1-x)^2}. \tag{3.4}$$

Escrevendo as frações parciais para (3.4), temos

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{(1-x)^2}$$

resolvendo, encontramos $A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}$ e $C = \frac{1}{2}$, assim

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Substituindo em (3.4), temos

$$E_1(x) \cdot E_2(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}. \tag{3.5}$$

Note que $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$, isso significa que o coeficiente de x^n é $(-1)^n$. E para o termo $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, ou seja, o coeficiente é 1. Para o termo $(1-x)^{-2}$ aplicaremos o Teorema 2.3-(i), assim $a_k = \binom{k+2-1}{k} = \binom{k+1}{k} \Rightarrow a_k = k+1$. Note que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

e o coeficiente de x_n é $(n+1)$. Substituindo todos os coeficientes em (3.5), temos

$$\begin{aligned}
E_1(x)\cdot E_2(x) &= \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(n+1)\right]x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n + 1 + 2(n+1)}{4}\right]x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n + 2n + 3}{4}\right]x^n
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão

$$S_n = \frac{(-1)^n + 2n + 3}{4}$$

nos dá a quantidade de formas diferentes que se pode selar uma encomenda com n euros. Em particular para 8 euros, temos $S_8 = \dfrac{(-1)^8 + 2\cdot 8 + 3}{4} = 5$ maneiras.

Problema 3.5. Numa competição, cada um dos quatro juízes deve atribuir notas de 1 a 6 para cada participante. Para ser finalista, um participante deve ter no mínimo 22 pontos. Encontrar o número de maneiras que os juízes têm para atribuir notas de modo que um participante seja finalista.

Sejam $j_1(x), j_2(x), j_3(x)$ e $j_4(x)$ a funções geradoras para as notas que juízes devem atribuir. Cada função geradora é da forma $j_1(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Seja $G(x)$ a função que modela o problema. Pelo Princípio A.2, temos

$$
\begin{aligned}
G(x) &= j_1(x) \cdot j_2(x) \cdot j_3(x) \cdot j_4(x) \\
&= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 \\
&= \left[x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right]^4 \\
&= x^4 \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 \\
&= x^4 \cdot \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$G(x) = x^4 \cdot (1 - x^6)^4 \cdot (1 - x)^{-4}. \tag{3.6}$$

Note que $(1 - x^6)^4 = x^{24} - 4x^{18} + 6x^{12} - 4x^6 + 1$, substituindo em (3.6) , temos

$$G(x) = (x^{28} - 4x^{22} + 6x^{16} - 4x^{10} + x^4) \cdot (1 - x)^{-4}. \tag{3.7}$$

Com quatro juízes atribuindo notas de 1 a 6, temos que um participante poderá ter no máximo 24, e como para ser finalista deve ter no mínimo 22 pontos temos três casos para analisar: o número de maneiras que os juízes tem para atribuir notas de modo que o participante tenha $22, 23$ e 24 pontos.

1º **Caso:** O número de maneiras de um candidato obter 22 pontos

Neste caso, o fator $(1-x)^{-4}$ contribui com os seguintes termos x^6, x^{12} e x^{18}. Agora, precisamos determinar os coeficientes para estes termos, para isso usaremos o Teorema 2.3-(i). Temos

- $a_6 = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84;$
- $a_{12} = \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = 455;$
- $a_{18} = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18} = 1330.$

Logo, há $-4+6\cdot 84-4\cdot 455+1330 = 10$ maneiras para o candidato obter 22 pontos.

2º **Caso:** O número de maneiras de um candidato obter 23 pontos

Para os participantes que fizeram 23 o fator $(1 - x)^{-4}$ contribui com os temos x, x^7, x^{13} e x^{19}. Assim, os coeficientes são,

- $a_1 = \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1} = 4;$
- $a_7 = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120;$

- $a_{13} = \binom{4+13-1}{13} = \binom{16}{13} = 560$;
- $a_{19} = \binom{4+19-1}{19} = \binom{22}{19} = 1540$.

Logo, $-4 \cdot 4 + 6 \cdot 120 - 4 \cdot 560 + 1540 = 4$ maneiras para o candidato obter 23 pontos.

3º **Caso:** O número de maneiras de um candidato obter 24 pontos

O fator $(1-x)^{-4}$ contribui com x^2, x^8, x^{14} e x^{20}. Assim,

- $a_2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$;
- $a_8 = \binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8} = 165$;
- $a_{14} = \binom{4+14-1}{14} = \binom{17}{14} = 680$;
- $a_{20} = \binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = 1771$.

Logo, há $-4 \cdot 10 + 6 \cdot 165 - 4 \cdot 680 + 1771 = 1$ maneira para o candidato obter 24 pontos.

Portanto, há $10 + 4 + 1 = 15$ maneiras dos quatro juízes distribuírem as notas.

3.2 Resolvendo Recorrências Lineares via Funções Geradoras

3.2.1 Fortaleza x Ceará

O Problema 3.6 a seguir foi proposto pela professora Valdenize Lopes do Nascimento como atividade complementar para disciplina MA33-Introdução à Álgebra Linear. Apresentaremos duas soluções para a recorrência (3.8), a primeira usando o Teorema B.1 , e a segunda via funções geradoras.

Problema 3.6 (Fortaleza x Ceará). Certo bairro da cidade de **Fortaleza** tem um total de 10.000 torcedores. Atualmente, 4.000 deles torcem pelo **Fortaleza** e 6.000 torcem pelo **Ceará**. A cada ano, 10% dos torcedores do **Fortaleza** passam a torcer pelo **Ceará** e 20% dos torcedores do **Ceará** passam a torcer pelo **Fortaleza**. Supondo que a quantidade de torcedores neste bairro permaneça constante, encontre a quantidade de torcedores do **Ceará** e do **Fortaleza** daqui a:

(a) 1 ano;

(b) 2 anos;

(c) n anos;

(d) n anos, com n infinitamente grande.

Figura 3.1: Fortaleza x Ceará

Foto: Divulgação/Cearasc.com

Solução via Recorrências Lineares

Sejam F_n, C_n as quantidades de torcedores do **Fortaleza** e **Ceará**, respectivamente.

(a) As quantidades iniciais de torcedores do **Fortaleza** e **Ceará** são, respectivamente, $F_0 = 4.000$ e $C_0 = 6.000$. Assim, daqui a um ano teremos,

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,1 \cdot 4.000 + 0,8 \cdot 6.000 = 5.200 \\ F_1 &= 0,2 \cdot 6.000 + 0,9 \cdot 4.000 = 4.800 \end{aligned}$$

Portanto, após um ano o **Ceará** terá 5.200 torcedores e o **Fortaleza** 4.800.

(b) Após um ano temos $F_1 = 4.800$ e $C_1 = 5.200$. Após 2 anos, temos

$$\begin{aligned} C_2 &= 0,1 \cdot 4.800 + 0,8 \cdot 5.200 = 4.640 \\ F_2 &= 0,2 \cdot 5.200 + 0,9 \cdot 4.800 = 5.360 \end{aligned}$$

Portanto, após dois anos o **Ceará** terá 4.640 torcedores e o **Fortaleza** 5.360.

(c) Dos itens (a) e (b) podemos conjecturar que a quantidade de torcedores do **Fortaleza** e do **Ceará** é dada pelo seguinte sistema de recorrências lineares,

$$\begin{cases} C_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot F_n + \frac{4}{5} \cdot C_n \\ F_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot C_n + \frac{9}{10} \cdot F_n \end{cases}$$

com $F_0 = 4.000$ e $C_0 = 6.000$. Note que a quantidade de torcedores é constante, ou seja, $C_n + F_n = 10.000$, isolando C_n e substituindo na segunda recorrência temos,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{5} \cdot (10.000 - F_n) + \frac{9}{10} \cdot F_n \\ &= 2.000 - \frac{1}{5}F_n + \frac{9}{10} \cdot F_n. \end{aligned}$$

Que resulta em,

$$F_{n+1} = \frac{7}{10}F_n + 2.000. \tag{3.8}$$

A recorrência (3.8) é de primeira ordem não homogênea. Podemos transformá-la em homogênea através da seguinte substituição $F_n = A_n \cdot X_n$, onde A_n é uma solução particular da recorrência homogênea.

$$F_{n+1} = \frac{7}{10}F_n. \tag{3.9}$$

Precisamos escrever os primeiros termos para descobrimos um padrão. Assim,temos

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{7}{10} \cdot F_0 \\ F_2 &= \frac{7}{10} \cdot F_1 \\ F_3 &= \frac{7}{10} \cdot F_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ F_n &= \frac{7}{10}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando, membro a membro, temos

$$F_n = F_0 \cdot \Big(\underbrace{\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \cdots \cdot \frac{7}{10}}_{n \text{ fatores}}\Big) \Rightarrow F_n = F_0 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

Faça $F_0 = 1$, na última equação, e teremos uma solução da homogênea. Usaremos a seguinte transformação $F_n = A_n \cdot X_n$, onde $A_n = 1 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^n$. Daí,

$$F_n = \left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot X_n \tag{3.10}$$

e

$$F_{n+1} = \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1} \cdot X_{n+1} \tag{3.11}$$

Agora, substituindo (3.10) e (3.11) em (3.8) , temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1} \cdot X_{n+1} &= \frac{7}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot X_n + 2.000 \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^{n+1} \cdot X_n + 2.000, \end{aligned}$$

ou seja, $X_{n+1} = X_n + 2.000 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^{n+1}$. Logo, ficamos com a seguinte recorrência $X_{n+1} = X_n + 2.000 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^{n+1}$, que é de fácil solução. Basta escrever os primeiros termos e encontrar o padrão,

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 + 2.000 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^1; \\ X_2 &= X_1 + 2.000 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^2; \\ X_3 &= X_2 + 2.000 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^3; \\ &\vdots \\ X_n &= X_{n-1} + 2.000 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^n. \end{aligned}$$

Somando, membro a membro, temos

$$X_n = X_0 + 2.000 \cdot \Big[\underbrace{\left(\frac{10}{7}\right)^1 + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{10}{7}\right)^n}_{n \text{ parcelas}}\Big] \tag{3.12}$$

Em (3.12) precisamos de X_0 e calcular a soma. A soma é uma soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{10}{7}$ e razão $q = \frac{10}{7}$. Daí,

$$\left(\frac{10}{7}\right)^1 + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{10}{7}\right)^n = \frac{7}{3}\left[\left(\frac{10}{7}\right)^{n+1} - \frac{10}{7}\right]$$

e para encontramos o X_0 basta fazer $n = 0$ em (3.10) e teremos $X_0 = 4.000$.

Substituindo,

$$\begin{aligned}
X_n &= 4.000 + 2.000 \cdot \frac{7}{3}\Big[\Big(\frac{10}{7}\Big)^{n+1} - \frac{10}{7}\Big] \\
&= 2.000 \cdot \Big\{2 + \frac{7}{3}\Big[\Big(\frac{10}{7}\Big)^{n+1} - \frac{10}{7}\Big]\Big\} \\
&= 2.000 \cdot \Big[2 + \frac{7}{3}\Big(\frac{10}{7}\Big)^{n+1} - \frac{10}{3}\Big] \\
&= 2.000 \cdot \Big[\frac{7}{3}\Big(\frac{10}{7}\Big)^{n+1} - \frac{4}{3}\Big]
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a última equação em (3.10), temos

$$\begin{aligned}
F_n &= \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n} \cdot 2.000 \cdot \Big[\frac{7}{3}\Big(\frac{10}{7}\Big)^{n+1} - \frac{4}{3}\Big] \\
&= 2.000 \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n} \cdot \Big[\frac{7}{3}\Big(\frac{10}{7}\Big)^{n} \cdot \Big(\frac{10}{7}\Big)^{1} - \frac{4}{3}\Big] \\
&= 2.000 \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n} \cdot \Big[\frac{7}{3}\Big(\frac{7}{10}\Big)^{-n} \cdot \Big(\frac{10}{7}\Big)^{1} - \frac{4}{3}\Big] \\
&= 2.000 \cdot \Big[\frac{7}{3} \cdot \frac{10}{7} - \frac{4}{3} \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big] \\
&= 2.000 \cdot \Big[\frac{10}{3} - \frac{4}{3} \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big] \\
&= \frac{4.000}{3} \cdot \Big[5 - 2 \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big].
\end{aligned}$$

Logo, a quantidade de torcedores do **Fortaleza** após n anos é dado por

$$F_n = \frac{4.000}{3} \cdot \Big[5 - 2 \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big], \text{ com } F_0 = 4.000.$$

Falta determinarmos C_n, para isso usaremos $C_n + F_n = 10.000$. Então,

$$\begin{aligned}
C_n &= 10.000 - \Big\{\frac{4.000}{3} \cdot \Big[5 - 2 \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big]\Big\} \\
&= 10.000 - \Big[\frac{20.000}{3} - \frac{8.000}{3} \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big] \\
&= 10.000 - \frac{20.000}{3} + \frac{8.000}{3} \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n} \\
&= \frac{10.000}{3} + \frac{8.000}{3} \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^{n} \\
&= \frac{2.000}{3}\Big[5 + 4\Big(\frac{7}{10}\Big)^{n}\Big].
\end{aligned}$$

Portanto, a quantidade de torcedores do **Ceará** após n anos é dado por

$$C_n = \frac{2.000}{3}\left[5 + 4\Big(\frac{7}{10}\Big)^n\right], \text{ com } C_0 = 6.000.$$

(d) Precisamos determinar o que acontece com F_n e C_n quando $n \to \infty$. Assim, temos que

$$\lim F_n = \lim \frac{4.000}{3} \cdot \left[5 - 2 \cdot \Big(\frac{7}{10}\Big)^n\right]$$

Note que quando $n \to \infty$ temos que $\left(\frac{7}{10}\right)^n$ tende a zero, ou seja, $\lim F_n = \dfrac{20.000}{3}$. Agora, calculemos $\lim C_n$,

$$\lim C_n = \lim \frac{2.000}{3}\left[5 + 4\Big(\frac{7}{10}\Big)^n\right] \Rightarrow \lim C_n = \frac{10.000}{3}$$

Portando, a quantidade de torcedores do **Ceará** e do **Fortaleza** quando n é infinitamente grade são $\dfrac{10.000}{3}$ e $\dfrac{20.000}{3}$, respectivamente.

Solução via Funções Geradoras

Nesta seção, usaremos a teoria das funções geradoras para determinarmos uma fórmula fechada para o número de torcedores do **Fortaleza** (recorrência (3.8)).

Seja $G(x) = F_1 + F_2x + F_3x^2 + \cdots + F_nx^{n-1}$ a função geratriz para a relação de recorrência 3.8. Assim, temos

$$\begin{aligned}
n = 1 \Rightarrow F_2x &= \frac{7}{10}F_1x + 2000x\\
n = 2 \Rightarrow F_3x^2 &= \frac{7}{10}F_2x^2 + 2000x^2\\
n = 3 \Rightarrow F_4x^3 &= \frac{7}{10}F_3x^3 + 2000x^3\\
&\vdots\\
F_{n+1}x^n &= \frac{7}{10}F_nx^n + 2000x^n
\end{aligned}$$

Somando, ordenadamente, temos

$$\begin{aligned}
F_2x + F_3x^2 + \cdots + F_{n+1}x^n &= \frac{7}{10}\left(F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots\right) +\\
&\quad 2000(x + x^2 + x^3 + \cdots).
\end{aligned}$$

Após todas as manipulações algébricas ficamos com a seguinte função,

$$G(x) = \frac{10F_1}{10-7x} + 20000\frac{x}{(1-x)(10-7x)} \tag{3.13}$$

Precisamos determinar as frações parciais de (3.13),

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)(10-7x)} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{10-7x} \\ x &= A(10-7x) + B(1-x), \end{aligned}$$

ou seja, para $x = 1$ temos $1 = A(10-7) \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, e para $x = \frac{10}{7} \Rightarrow B = -\frac{10}{3}$. Logo,

$$\frac{x}{(1-x)(10-7x)} = \frac{1/3}{1-x} + \frac{-10/3}{10-7x}$$

Agora, substituindo em (3.13), temos que

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{10F_1}{10(1-7x/10)} + 20000 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10(1-7x/10)}\right] \\ &= \frac{F_1}{(1-7x/10)} + \frac{20000}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{20000}{3} \cdot \frac{1}{(1-7x/10)}. \end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{1-7x/10} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(10/7)^n} x^n$ e $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ou seja, os coeficientes são $\left(\frac{7}{10}\right)^n$ e 1. Como $F_1 = 4800$, temos

$$F_{n+1} = 4800\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{20000}{3} - \frac{20000}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

Portanto, fazendo todas as simplificações possíveis temos a fórmula fechada que é dada por

$$F_{n+1} = \frac{800}{3}\left(25 - \frac{7^{n+1}}{10^n}\right) \tag{3.14}$$

3.2.2 Jogo dos Anéis Chineses

Em [4] (dissertação do PROFMAT) o professor Freitas pesquisou sobre o jogo dos anéis chineses (veja Figura 3.2). Neste trabalho é conjecturado, apresentado e demonstrada uma solução por indução matemática que dependia da paridade de n. No Problema 3.7 temos o resultado desta pesquisa, e apresentamos uma fórmula fechada para a recorrência (3.15), ou seja, uma expressão que dependa epenas de n (quantidade de anéis).

Figura 3.2: Jogo dos anéis chineses

Fonte : [4]

Problema 3.7. Seja Q_n a quantidade total de movimentos a serem realizados com n anéis de um artefato (Jogo dos Anéis Chineses) da retirada de uma haste. Então,

$$Q_n = Q_{n-1} + 2Q_{n-2} + 1 = \begin{cases} 2Q_{n-1}, \text{ se } \ n \text{ é par}, n \geq 2 \\ 2Q_{n-1} + 1, \text{ se } \ n \text{ é ímpar}, n \geq 3 \end{cases} \tag{3.15}$$

para todo $n \geq 2$, em particular se $n = 0$ e $n = 1$, tem-se que $Q_0 = 0$ e $Q_1 = 1$.

Seja $G(x) = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + \cdots + Q_nx^n + \cdots$ uma função geradora para a recorrência (3.15). Temos que

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow Q_2x^2 &= Q_1x^2 + 2Q_0x^2 + x^2; \\ n = 3 \Rightarrow Q_3x^3 &= Q_2x^3 + 2Q_1x^3 + x^3; \\ n = 4 \Rightarrow Q_4x^4 &= Q_3x^4 + 2Q_2x^4 + x^4; \\ &\vdots \\ Q_nx^n &= Q_{n-1}x^n + 2Q_{n-2}x^n + x^n. \end{aligned}$$

Agora, somando ordenadamente, temos

$$\begin{aligned} Q_2x^2 + \cdots + Q_nx^n &= (Q_1x^2 + \cdots + Q_{n-1}x^n) + 2(Q_0x^2 + \cdots + Q_{n-2}x^n) + \\ & \quad (x^2 + x^3 + \cdots + x^n). \end{aligned}$$

Após fazermos todas as manipulações algébricas e como $Q_0 = 0, Q_1 = 1$ e supondo que $|x| < 1$, temos $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, isto é,

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x-2x^2)}.$$

A forma fatorada do polinômio é $1 - x - 2x^2 = (-2x+1)(x+1)$, ou seja,

$$G(x) = \frac{x}{(-2x+1)(x+1)} + \frac{x^2}{(1-x)(-2x+1)(x+1)}. \tag{3.16}$$

Agora, precisamos determinar as frações parciais.

$$\frac{x}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{A}{-2x+1} + \frac{B}{x+1} \tag{3.17}$$

ou seja, $x = A(x+1) + B(-2x+1)$. Assim, para $B = -\dfrac{1}{3}$, e $A = \dfrac{1}{3}$. Substituindo em (3.17), temos

$$\frac{x}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-2x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \tag{3.18}$$

Para a segunda fração, após a decomposição em frações parciais, temos

$$\frac{x^2}{(1-x)(-2x+1)(x+1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-2x+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} \tag{3.19}$$

substituindo (3.18) e (3.19) em (3.16), temos

$$G(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-2x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-2x+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1},$$

ou seja,

$$G(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \tag{3.20}$$

O coeficiente para o termo

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

é 2^n.Os demais coeficientes já foram calculados na resolução do Prolema 3.4, que são $(-1)^n$ e 1. Logo, substituindo em (3.20), temos

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{6}\cdot(-1)^n - \frac{1}{2}\cdot 1 \\ &= \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{1}{6}\cdot(-1)^n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada para determinarmos a quantidade de movimentos a serem realizados com n anéis é a seguinte

$$Q_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n - 3}{6}.$$

3.2.3 O Problema do Queijo de Steiner

O Problema 3.8 a seguir foi resolvido, via recorrências lineares, em [5]. Nesta seção apresentamos uma solução alternativa usando a técnica das funções geradoras ordinárias.

Problema 3.8. Seja P_n o número de regiões determinadas no espaço tridimensional por n planos (equivalente, o maior número de partes em que um queijo pode ser dividido por n cortes planos). Então,

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} + \dfrac{(n-1)n}{2} + 1 \\ P_0 = 1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Seja $G(x) = P_0 + P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_nx^n + \cdots$ a função geradora da recorrência (3.21) . Temos

$$\begin{aligned} P_1x &= P_0x + 0\cdot x + x; \\ P_2x^2 &= P_1x^2 + x^2 + x^2; \\ P_3x^3 &= P_2x^3 + 3x^3 + x^3; \\ P_4x^4 &= P_3x^3 + 6x^4 + x^4; \\ P_5x^5 &= P_4x^5 + 10x^5 + x^5; \\ P_6x^6 &= P_5x^6 + 15x^6 + x^6; \\ &\vdots \\ P_nx^n &= P_{n-1}x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^n + x^n. \end{aligned}$$

Somando, membro a membros as igualdades, vem

$$\begin{aligned}
P_1x + P_2x^2 + \cdots &= x(P_0 + P_1x + \cdots) + x^2(1 + 3x + 6x^2 + \cdots) + x(1 + x + x^2 + \cdots) \\
G(x) - P_0 &= xG(x) + x^2(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \\
&\quad \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{2}x^n) + \frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

Note que $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \cdots + \dfrac{n(n-1)}{2}x^n + \cdots = \dfrac{1}{(1-x)^3}$. Logo,

$$G(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{3.22}$$

Expandindo (3.22) em frações parciais ficamos,

$$G(x) = 2\frac{1}{(1-x)^2} - 2\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^4}. \tag{3.23}$$

Para calcular os coeficientes usaremos o Teorema 2.3-(i). Logo,

- $\displaystyle \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2+r-1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{1+r}{r} x^r \Rightarrow a_n = (n+1);$
- $\displaystyle \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r-1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2+r}{r} x^r \Rightarrow a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$
- $\displaystyle \frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{4+r-1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r \Rightarrow a_n = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}.$

Substituindo estes valores em (3.23) e fazendo as simplificações necessárias, temos que

$$P_n = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

é o número de regiões.

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho foi possível apresentar a importância das funções geradoras na resolução de problemas de análise combinatória com restrições. E como aplicação a resolução de recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

A análise combinatória é a área da matemática que possui uma grande diversidade de problemas. Nesta dissertação nos dedicamos em estudar os problemas contagem que a ordem dos objetos não importava, ou seja, as combinações completas (ou combinações com repetição).

Em relação ao uso das funções geradoras na resolução recorrências lineares, a técnica mostrou-se bastante eficiente na resolução de recorrências lineares não homogêneas de primeiro ordem. Pois, reduz significativamente os cálculo em relação a aplicação do Teorema B.1.

Como trabalhos a serem desenvolvidos a partir deste, podemos destacar: a preparação de um minicurso sobre as funções geradoras ordinárias e o uso das funções geradoras (funções geradoras exponenciais) na resolução de problemas de contagem onde a ordem dos objetos deve ser considerada.

Referências Bibliográficas

[1] BACHX, Arago de C., POPPE, Luiz MB , TAVARES, Raymundo ,*Prelúdio à análise combinatória*, Companhia Editora Nacional,São Paulo, SP, 1975.

[2] Carvalho, Paulo César Pinto , Morgado, Augusto de O ,*Matemática Discreta*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, 2015.

[3] Costa, José Félix, Gouveia, Paula , *Matemática Discreta: A Caixa de Ferramentas*, IST Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal 2015.

[4] Freitas, Acácio Lima de,*Laboratório de Ensino da Matemática: Uma proposta para licenciatura em matemática de jogos de recorrência. Dissertação*, UFERSA, 2015.

[5] Gomes , Diego Ferreira,*Equações de Diferenças e Alguns Modelos. Dissertação*, UFPI, 2014.

[6] Gross, Jonathan L ,*Combinatorial methods with computer applications*, Chapman and Hall/CRC, 2016.

[7] Lando, Sergei K, *Lectures on generating functions*, American Mathematical Soc.,2003.

[8] Lima, Elon Lages, *Análise Real*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, 2004.

[9] Lima, Paulo Cupertino de, *Fundamentos de Análise I*, CAED-UFMG, Belo Horizonte , MG, 2013.

[10] Maciel, Aldo Bezerra, Lima, Osmundo Alves, *Introdução à Análise Real*,EDUEP, Campina Grande, PB, 2005.

[11] Morgado, Augusto César de Oliveira, Carvalho, João B. Pitombeira, Carvalho Paulo C. Pinto,Fernandez, Pedro, *Análise combi-*

natória e probabilidade, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[12] SANTOS, José Plínio Oliveira , MELLO, Margarida P , MURARUI, Idani Teresinha Colzolari, *Introdução à Análise Combinatória*, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro/RJ, 2007.

[13] Silva, Carlos Alexandre Gomes da , Campos,Viviane Simiolli Medeiros, *Introdução à Análise Combinatória*, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro,RJ, 2014.

[14] Stewart, James, *Cálculo: volume II*,CENGAGE Learning, São Paulo,SP, 2014.

[15] Villanueva, Dadid A. Zavaleta, *Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo*, Editora Livraria da Física, São Paulo,SP, 2014.

[16] Wilf, Herbert S, *generatingfunctionolog*,AK Peters/CRC Press, 2005.

Apêndice A

Métodos Básicos de Contagem e Binômio de Newton

Neste capítulo, apresentamos os métodos básicos de contagem. Utilizamos como referências os seguintes livros [1], [6], [7], [11], [12] e [13].

A.1 Princípio Fundamental da Contagem

Nesta seção enunciamos o Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo. Este princípio é a base para a resolução de problemas de contagem que possuam no máximo duas restrições.

Princípio A.1 (Princípio Fundamental da Contagem)**.** Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$.

Princípio A.2 (Extensão do Princípio Multiplicativo)**.** Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i =, 1, 2, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes.

A.2 Permutações sem Elementos Repetidos

Definição A.1. Dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, chamamos de permutação simples dos n elementos de $A (n \in \mathbb{N})$, a qualquer conjunto ordenado com esses n elementos.

Indica-se P_n, o número de permutações com n elementos.

A.2.1 Cálculo do Número de Permutações (P_n)

Seja A um conjunto com n elementos $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Vamos distribuir os n elementos na n-uplas da figura abaixo

$$\left(\underset{p_1}{\rule{1cm}{1pt}}\ ,\ \underset{p_2}{\rule{1cm}{1pt}}\ ,\ \underset{p_3}{\rule{1cm}{1pt}}\ , \ldots ,\ \underset{p_n}{\rule{1cm}{1pt}}\right)$$

Figura A.1: n-uplas

Observe que temos n objetos para colocar na posição p_1, colocado-se um dos objetos na primeira posição restam $n-1$ objetos para serem colocados na $n-1$ posições restantes. Assim, temos $n-1$ possibilidades de ocupar a posição $n-1$. Continuando com esse raciocínio teremos apenas um objeto para colocar em p_n. Logo, por A.2, temos

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Logo, o número de permutações simples é dado pela expressão $P_n = n!$.

Exemplo A.1. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

Sejam A, B, C, D, E, F e G as sete pessoas . Suponha que as pessoas A e B não possam ficar juntas. Resolveremos esta questão de forma indireta, ou seja, contaremos de quantas formas as sete pessoas podem sentar numa fila e depois contaremos em quantas destas filas A e B ficam juntas. A diferença entre estes números nos dará o número de filas em A e B não sentam juntas. Assim, há $P_7 = 7! = 5040$ maneiras de pôr 7 pessoas numa fila. Nas filas em que A e B ficam juntas temos 2 possibilidades ou AB ou BA. Note que contaremos as pessoas A e B como um único bloco; pelo princípio A.1 há $2 \cdot P_6 = 1440$ modos destas pessoas ficarem juntas. Portanto, há $5040 - 1440 = 3600$ modos de duas pessoas não sentarem juntas.

A.3 Arranjos e Combinações

Nesta seção estudaremos os arranjos simples as combinações simples.

A.3.1 Arranjos

Definição A.2. Consideremos n objetos e p um inteiro positivo tal que $0 < p \leq n$. Um arranjo simples de classe p dos n objetos dados é uma seleção de p objetos distintos dentre estes que diferem entre si pela ordem de colocação ou pela natureza de cada um, isto é, o que importa é quem participa ou o lugar que ocupa. Denotaremos por A_n^p o número de arranjos simples de classe p de n objetos.

Proposição A.1. Se $n \geq 1$, então o número total de arranjos simples de classe p de n objetos $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é dado por

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{A.1}$$

Demonstração. Seja A_n^p o número de arranjos de n elementos, tomados p a p. Em geral, se devemos selecionar, em alguma ordem, p objetos de um conjunto de n objetos($n \geq p$) distintos, temos n maneiras de preencher a primeira posição, seguido de $n-1$ maneiras de preencher a segunda posição, seguido de $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, e assim por diante. Na $p-$ésima posição, teremos $n-p+1$ possibilidades de preenchimento. Assim, pelo Princípio A.2, temos

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-p+1).$$

Observe que

$$n \cdot (n-1) \ldots (n-p+1) = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

ou seja,

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto, a fórmula (A.1) fica demonstrada □

A.3.2 Combinações

Definição A.3. Combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $p \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Denotaremos por C_n^p ou por $\binom{n}{p}$(lê-se: combinação de n tomados p a p).

Proposição A.2. Seja $n \geq 1$. O número total de combinações simples de classe p de n objetos $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é dado por

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}. \tag{A.2}$$

Demonstração. Seja $\binom{n}{p}$ o número de combinações simples de n elementos, tomados p a p. Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com n elementos. Cada combinação de p elementos é uma escolha de p elementos, sem importar a ordem. Cada arranjo de p elementos é uma escolha de p elementos, mas com uma ordem. Portanto, podemos relacionar o número de combinações de n elementos tomados p a p com o número de arranjos de n objetos tomados p a p da seguinte maneira: cada combinação corresponde a $p!$ arranjos. Isto é, temos $p!$ arranjos para cada combinação de p elementos. Portanto,

$$\binom{n}{p} \cdot p! = A_n^p \Rightarrow \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

substituindo (A.1), temos

$$\binom{n}{p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

o que prova (A.2). □

A.4 Combinações com Elementos Repetidos

Nesta seção apresentamos as combinações completas(ou com repetição). Dados n objetos e escolhendo p objetos, $n \geq p$, estamos interessados em saber em quantas combinações os p objetos a serem escolhidos podem ser repetidos. A maior parte do exposto nesta seção pode ser encontrado em [1]. Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$, as respectivas quantidades de objetos $a_1, a_2, \ldots, a_p$. O problema de determinar o número de combinações completas é equivalente ao de determinar o números de soluções inteiras não-negativas da equação (A.3) a seguir.

A.4.1 Soluções Inteiras Positivas

Definição A.4. Seja a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = n, \;\; n, p \in \mathbb{N}. \tag{A.3}$$

Chama-se solução inteira dessa equação a toda p-upla de números inteiros $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ tal que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n. \tag{A.4}$$

Para estudarmos o problema do cálculo do número de soluções inteiras positivas analisaremos a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \tag{A.5}$$

Agora, escreva em fila 10 pontos , de quantos modos podemos separar estes pontos em 3 grupos, de forma que em cada grupo tenhamos pelo menos um ponto. Usaremos barras verticais para separar os pontos.

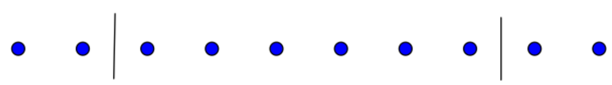

Figura A.2: Solução inteiro positiva $(2, 6, 2)$

Na figura temos uma representação para a solução $(2, 6, 2)$. Observe que cada solução inteira positiva da equação corresponde a um modo de se colocar as 2 barras em 2 dos 9 espaços. Observe a próxima figura,

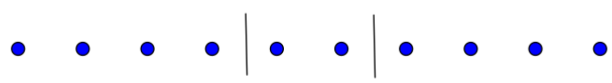

Figura A.3: Solução inteiro positiva $(4, 2, 4)$

Esta figura corresponde a representação da solução $(4, 2, 4)$. Logo, percebe-se que o número de soluções inteiras positivas da equação (A.5) é igual ao número de modos de se escolher 2 dos 9 espaços, para se colocar as 2 barras verticais. Assim, há $\binom{9}{2}$ modos de se fazer isso, ou seja, a equação (A.5) possui 36 soluções inteiras positivas .

Observe que se há $n = 10$ pontos, então existem $10 - 1 = 9$ espaços, e se temos dividir em 3 grupos temos $3 - 1 = 2$ barras verticais para isso.

Podemos generalizar este raciocínio para a equação A.3. Portanto, o número de soluções inteiras positivas da equação (A.3) é dado por $\binom{n-1}{p-1}$.

A.4.2 Soluções Inteiras Não-negativas

Nesta seção vamos desenvolver um método para determinarmos o número de soluções inteiras não negativas da equação (A.5).

Primeiro, vamos listar algumas soluções inteiras não-negativas da equação (A.5) em uma mesma coluna, e somar uma unidade a cada inteiro dessas soluções. Assim, obtemos soluções inteiras positivas de uma nova equação. Vejamos,

$$\begin{aligned} (10,0,0) &\iff (11,1,1) \\ (1,7,2) &\iff (2,8,3) \\ (0,2,8) &\iff (1,3,9) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, ficamos com $y_i = x_i + 1, i = 1,2,3$, que substituindo na equação (A.5) nos dar a seguinte equação

$$y_1 + y_2 + y_3 = 13 \tag{A.6}$$

Observe que desse modo, a cada solução inteira não negativa da equação (A.5) corresponde uma única solução inteira positiva da equação (A.6) e vice-versa. Logo, o número de soluções inteiras positivas é dado por $\binom{13-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$, ou seja, a equação (A.5) possui 66 soluções inteiras não negativas.

No caso geral, temos que somando 1 a cada uma das p variáveis, ficamos com

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &\geq 0 \\ x_2 + 1 &\geq 0 \\ x_3 + 1 &\geq 0 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_p + 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo $y_i = x_i + 1 \Rightarrow x_i = y_i - 1,\ i = 1, 2 \ldots, p$ e substituindo em (A.3), temos

$$\begin{aligned}(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) + \ldots + (y_p - 1) &= n \\ y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_p + \underbrace{(-1 - 1 - 1 - \ldots - 1)}_{p \text{ parcelas}} &= n \\ y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_p - p &= n.\end{aligned}$$

Assim , ficamos com a seguinte equação

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_p = n + p. \tag{A.7}$$

Como $y_i = x_i + 1,\ i = 1, 2 \ldots, p$ temos que cada $y_i \geq 1$, ou seja, a equação (A.7) só possui soluções inteiras e positivas. Portanto, o número de soluções inteiras não negativas da equação A.3 é igual ao número de soluções inteiras e positivas da equação (A.7) e isto pode ser calculado pela seguinte expressão $\binom{n+p-1}{p-1}$. Portanto, o número de combinações completas de n objetos é dado por $\binom{n+p-1}{p-1}$.

Exemplo A.2. Uma loja vende bombons de 5 sabores: chocolate branco, chocolate preto, coco, morango e nozes. Eles são vendidos em caixas com 12 unidades.

(a) Supondo que seja possível o cliente escolher o sabor de cada uma das 12 unidades, quantas são as escolhas possíveis para uma caixa?

(b) Se um cliente quiser colocar na caixa pelo menos um bombom de cada sabor, quantas são as escolhas possíveis?

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as quantidades de bombons de chocolate branco, chocolate preto, coco, morango e nozes , respectivamente. Assim,

(a) Temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$, onde $n = 12$ e $p = 5$. Perceba que para compor uma caixa com 12 unidades podemos escolher 6 bombons de coco, 6 de nozes e nenhum dos demais bombons, ou seja, a quantidade de escolhas possíveis para uma caixa é igual a quantidade de soluções inteiras não-negativas da equação. Assim, $\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{12+5-1}{5-1} = \binom{16}{4} = 1820$. Logo, há 1820 maneiras de se escolher 5 tipos de bombons para compor uma caixa com 12 unidades.

(b) Com a restrição de colocar na caixa pelo menos um bombom de cada sabor temos: $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1$ e $x_5 \geq 1$. Fazendo a mudança de variável $x_i = y_i + 1, i = 1, \ldots, 5$ ficamos com $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$,onde

$n = 7$ e $p = 5$. Assim,temos $\binom{n-1}{p-1} = C_{7-1}^{5-1} = \binom{6}{4} = 15$ soluções inteiras e positivas. Logo, há 15 maneiras de se colocar pelo menos um bombom de cada sabor numa caixa de 12 unidades.

A.5 Binômio de Newton

Damos o nome de Binômio de Newton as potências de binômios da forma

$$(x + a)^n$$

onde x e a são números reais quaisquer e n é um número natural.

Observe o desenvolvimento de $(x + a)^n$, quando $n = 0, 1, 2, 3$ e 4:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Perceba que os coeficientes são exatamente os números binomiais do triângulo aritmético de Pascal. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \binom{0}{0} \\
(a+b)^1 &= \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 \\
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 \\
\cdots & \cdots \cdots
\end{aligned}$$

continuando com este raciocínio, temos que a fórmula de Newton para o desenvolvimento de $(a + b)^n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n. \tag{A.8}$$

Observação A.1. Note que:

(i) Os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ são os elementos da linha de ordem n do triângulo de Pascal;

(ii) Os expoentes de x decrescem de n até 0 e os de a crescem de 0 até n. Note que, em cada termo, a soma dos expoentes de x e de a é sempre igual a n;

(iii) O desenvolvimento de $(x+a)^n$ tem $n+1$ termos;

(iv) Potência da diferença $(x-a)^n$ basta fazer $(x-a)^n = [x+(-a)]^n$.

A Proposição A.3 será importante para a demonstração do Teorema A.4. Segue a proposição.

Proposição A.3 (Relação de Stifel)**.** Se $n, p \in \mathbb{N}$, então

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \tag{A.9}$$

Demonstração. Se $n = p$ temos $1 = 0+1$. Suponhamos então $n > p$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!}\\
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p)(n-p-1)!p!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)p!}\\
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p-1)!p!}\left(\frac{1}{(n-p)} + \frac{1}{(p+1)}\right)\\
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p-1)!p!}\left(\frac{n-p+p+1}{(n-p)(p+1)}\right)\\
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!(n+1)}{(n-p)(n-p-1)!(p+1)p!}\\
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!}
\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado □

Teorema A.4 (Binômio de Newton)**.** *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *vale*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n \tag{A.10}$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}a^{1-1}b \Rightarrow (a+b)^1 = a+b$$

Portando, a proposição é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos que a proposição seja verdeira para algum $n = k, k \geq 1$. Assim, temos que

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k. \quad \text{(A.11)}$$

Precisamos mostrar que a proposição também é válida para $n = k + 1$. Note que

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = (a+b)^k \cdot a + (a+b)^k \cdot b$$

aplicando A.11(hipótese de indução) na última expressão, temos que

$$\begin{aligned}
&(a+b)^k a + (a+b)^k b = \\
&\quad a\left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right) + \\
&\quad b\left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right).
\end{aligned}$$

aplicando a propriedade distributiva,

$$\begin{aligned}
&(a+b)^k a + (a+b)^k b = \\
&\quad \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k + \\
&\quad \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}.
\end{aligned}$$

associando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned}
&(a+b)^k a + (a+b)^k b = \\
&\quad \binom{k}{0}a^{k+1} + \left(\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right)a^k b + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right)a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}b^{k+1}.
\end{aligned}$$

usando a Proposição A.3, temos

$$\begin{aligned}
&(a+b)^k a + (a+b)^k b = \\
&\quad \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Note que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e que $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, ou seja,

$$(a+b)^k a + (a+b)^k b = \\ \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}.$$

Portanto , a proposição é verdadeira para $n = k+1$, e pelo principio de indução é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

A.5.1 Termo Geral do Desenvolvimento $(x+a)^n$

Chamando de T_1 o primeiro termo do desenvolvimento, de T_2 o segundo termo e assim por diante até T_{n+1}, temos

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^n b^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1}_{T_2} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p} a^{n-p} b^p}_{T_{p+1}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{T_{n+1}}.$$

Desse modo, chamaremos de termo geral do desenvolvimento de $(x+a)^n$ ao termo:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

termo de ordem $p+1$.

Apêndice B

Noções de Recorrências Lineares

Neste apêndice apresentaremos as principais definições sobre as relações de recorrência com coeficientes constantes. Para mais detalhes consultem [2], [4].

B.1 Definições e Exemplos

Nesta seção definiremos recorrências lineares

Definição B.1. Uma relação de recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes é uma relação de recorrência da forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + g(n), \;\; c_k \neq 0. \tag{B.1}$$

Observação B.1. (i) Se $g(n) = 0$, dizemos que a recorrência é homogênea;

(ii) Uma relação de recorrência homogênea linear de ordem k com coeficientes constantes junto com k condições especiais,

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}$$

define de maneira única uma sucessão $a_0, a_1 \ldots$.

Exemplo B.1. A relação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} \cdot a_{n-2}$$

não é uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes. Este tipo de relações de recorrências não são lineares, pois temos o produto $a_{n-1} \cdot a_{n-2}$.

Exemplo B.2. A relação de recorrência

$$a_n - a_{n-1} = 2n$$

não é uma relação de recorrência homogênea por que a expressão do lado direito da equação não é zero.

Exemplo B.3. A relação de recorrência

$$a_n = 3n \cdot a_{n-1}$$

não é uma relação de recorrência com coeficientes constantes porque $3n$ não é constante. Trata-se de uma relação de recorrência homogênea linear com coeficientes não constantes.

Definição B.2. Resolver uma relação de recorrência ou equação de recorrência, significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo em função de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada solução da recorrência.

Exemplo B.4. A relação de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

que define a sequência de **Fibonacci**, com as condições iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ tem a seguinte fórmula fechada,

$$x_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ou seja, se precisarmos de um termo k qualquer basta fazer n igual a k e saberemos o valor de x_k.

B.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção estudaremos as recorrência lineares de primeira ordem. Uma relação de recorrência é dita de primeira ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, os seja, quando a_n está e função de a_{n-1}.

B.2.1 Resolução de Recorrências Lineares Homogêneas de Primeira Ordem

Resolver uma recorrência linear de primeira ordem homogênea é tarefa simples, basta escrever os primeiros termos e encontrar um padrão. Após alguns cálculos podemos encontrar a fórmula fechada.

No exemplo B.5, apesar da relação de recorrência não ser homogênea, a resolução segue a descrição acima.

Exemplo B.5 (CESCEA)**.** A sequência $(y_n)_{n\geq 1}$ é tal que $y_n - y_{n-1} = 2n$, para todo $n \geq 2$. Sabendo-se que $y_1 = -1$, determinemos y_{21}.

Primeiro, escreveremos os primeiros temos da sequência,

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= 4 \\ y_3 - y_2 &= 6 \\ y_4 - y_3 &= 8 \\ &\vdots \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= 2(n-1) \\ y_n - y_{n-1} &= 2n \end{aligned}$$

Somando, ordenadamente, as $n-1$ equações, tem-se

$$y_n - y_1 = \underbrace{4 + 6 + 8 + \ldots + 2(n-1) + 2n}_{(n-1) \text{ parcelas}}. \tag{B.2}$$

Note que o lado direito de (B.2) é a soma dos termos da sequência $(a_n) = (4, 6, 8, \ldots, 2n)$, que é uma progressão aritmética de $a_1 = 4$ e razão igual a 2 e que tem $n-1$ temos. Assim, a soma será

$$\underbrace{4 + 6 + \ldots + 2n}_{(n-1) \text{ parcelas}} = \frac{(4+2n)(n-1)}{2} = (n+2)(n-1)$$

ou seja, $\underbrace{4 + 6 + \ldots + 2n}_{(n-1) \text{ parcelas}} = n^2 + n - 2$, substituindo em (B.2), temos

$$
\begin{aligned}
y_n - y_1 &= n^2 + n - 2 \text{ e como } y_1 = -1 \\
y_n - (-1) &= n^2 + n - 2.
\end{aligned}
$$

Logo, a fórmula fechada da sequência é $y_n = n^2 + n - 3$. Assim, temos $y_{21} = 21^2 + 21 - 3 \Rightarrow y_{21} = 459$.

B.3 Resolução de Recorrências Lineares não Homogêneas de Primeira Ordem

Nesta seção nos dedicaremos a resolver recorrências lineares de primeira ordem não homogênea. O Teorema B.1 a seguir nos dará uma algoritmo para resolver tais relações de recorrências.

Teorema B.1. *Se a_n é uma solução não nula da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, com $g(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então a substituição $x_n = a_n \cdot y_n$ transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \tag{B.3}$$

em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}. \tag{B.4}$$

Demonstração. Por hipótese temos que a_n é uma solução particular da recorrência homogênea $x_{n+1} = g(n)x_n$. Assim, da substituição $x_n = a_n \cdot y_n \Rightarrow x_{n+1} = a_{n+1} \cdot y_{n+1}$. Substituindo as duas últimas relações em (B.3), temos

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= g(n)x_n + h(n) \\
a_{n+1} \cdot y_{n+1} &= g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n)
\end{aligned}
$$

Dá hipótese temos $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_{n+1} \cdot y_{n+1} &= g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n) \\ g(n) \cdot a_n \cdot y_{n+1} &= g(n) \cdot a_n \cdot y_n + h(n) \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

No Exemplo B.6 a seguir apresentamos uma aplicação do Teorema B.1 e o que foi descrito na Seção B.2.1.

Exemplo B.6. Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem iniciou tem probabilidade $0,6$ de ganhá-la e probabilidade $0,4$ de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual a probabilidade de Sheila ganhar a $n-$ésima partida ?

Seja x_n a probabilidade de Helena ganhar a $n-$ésima partida. Assim, $1 - x_n$ é a probabilidade dela perder. Assim, temos $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4 \cdot (1 - x_n)$, ou seja,

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{2}{5} \tag{B.5}$$

A equação (B.5) é uma recorrência de primeira ordem não linear. Assim, primeiro determinemos a solução homogênea,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{5}x_1 \\ x_3 &= \frac{1}{5}x_2 \\ x_4 &= \frac{1}{5}x_3 \\ \vdots & \ \vdots \ \vdots \\ x_n &= \frac{1}{5}x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando, ordenadamente, temos

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5}}_{n-1 \text{ fatores}} \right)$$

ou seja, $x_n = x_1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, tomando $x_1 = \frac{1}{5}$, temos

$$x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \tag{B.6}$$

A seguinte substituição transformará (B.5) em uma recorrência linear homogênea,

$$x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot y_n \tag{B.7}$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \cdot y_{n+1} \tag{B.8}$$

Agora, substituindo (B.7) e (B.8) em (B.5), temos

$$y_{n+1} = y_n + 2 \cdot 5^n \tag{B.9}$$

Assim, de (B.9), temos

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + 2 \cdot 5^1 \\
y_3 &= y_2 + 2 \cdot 5^2 \\
y_4 &= y_3 + 2 \cdot 5^3 \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1}
\end{aligned}$$

Somando, ordenadamente, temos

$$\begin{aligned}
y_n &= y_1 + 2 \cdot \underbrace{(5^1 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1})}_{n-1 \text{ parcelas}} \\
y_n &= y_1 + 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1}\right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = y_1 + \frac{5^n - 5}{2} \tag{B.10}$$

Como estamos determinando a probabilidade de Sheila vencer, e ela não começou jogando, temos $x_1 = \frac{4}{10}$, substituindo em (B.7), temos $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} \cdot y_1 \Rightarrow y_1 = 2$. Assim, substituindo $y_1 = 2$ em (B.10), temos $y_n = \frac{5^n - 1}{2}$. Portanto , substituindo o último resultado em (B.7), temos que $x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \frac{5^n - 1}{2}$ é a fórmula fechada que nos dar a probabilidade de Sheila vencer a $n-$ésima partida.

B.4 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

B.4.1 Recorrências lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Teorema B.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2,com $r_1 \neq r_2$, então $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.*

Demonstração. Se $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, então $a_{n+1} = c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1}$ e $a_{n+2} = c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2}$. Assim, substituindo na recorrência, temos

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2} + p\left(c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1}\right) + q\left(c_1 r_1^n + c_2 r_2^n\right) \\ &= c_1 r_1^2 r_1^n + c_2 r_2^2 r_2^n + pc_1 r_1 r_1^n + pc_2 r_2 r_2^n + qc_1 r_1^n + qc_2 r_2^n \\ &= c_1 r_1^n \left(r_1^2 + pr_1 + q\right) + c_2 r_2^n \left(r_2^2 + pr_2 + q\right) \\ &= c_1 r_1^n \cdot 0 + c_2 r_2^n \cdot 0 \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. □

Teorema B.3. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.*

Demonstração. Se $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$, então $a_{n+1} = c_1 r^{n+1} + c_2 (n+1) r^{n+1}$ e $a_{n+2} = c_1 r^{n+2} + c_2 (n+2) r^{n+2}$. Assim, substituindo na recorrência, temos

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= c_1 r^{n+2} + c_2 (n+2) r^{n+2} + p\left(c_1 r^{n+1} + c_2 (n+1) r^{n+1}\right) + \\ &\quad q\left(c_1 r^n + c_2 n r^n\right) \\ &= c_1 r^n (r^2 + pr + q) + c_2 n r^n (r^2 + pr + q) + c_2 r^n (2r^2 + pr) \end{aligned}$$

como a equação $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes iguais temos que $r = -\frac{p}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= c_1 r^n(r^2 + pr + q) + c_2 nr^n(r^2 + pr + q) + c_2 r^n(2r^2 + pr) \\ &= c_1 r^n \cdot 0 + c_2 nr^n \cdot 0 + c_2 r^n \cdot 0 \end{aligned}$$

Logo, segue o resultado. □

B.5 Recorrências Lineares de Segunda Ordem não Homogêneas

O próximo resultado nos diz como resolver algumas recorrências não homogêneas.

Teorema B.4. *Se a_n é uma solução da equação*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n) \tag{B.11}$$

então a substituição

$$x_n = a_n + y_n \tag{B.12}$$

transforma a equação em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0 \tag{B.13}$$

Demonstração. Ver [2]. □

Exemplo B.7. Considere as sequências não vazias formadas com os dígitos $0, 1, 2$ e tais que nunca apareçam dois 0's consecutivos. Dê a fórmula de recorrência para o número das sequências de comprimento n?

Primeiro vamos escrever os dois primeiros termos. Se a sequência possui apenas um termo temos 3 possibilidades, daí $x_1 = 3$. Para as sequências de dois termos, temos

Do diagrama, temos dois termos que começam por zero, três que começam por 1 e, três que começam por 3, daí $x_2 = 8$, ou seja, exitem 8 sequências de dois termos que não possuem dois zeros consecutivos.

0	2p
1	3p
2	3p

Figura B.1: Sequências de dois termos

Seja x_n o número de sequências de n termos que não possuem dois zeros consecutivos. Dividiremos a solução em três casos:

1º **Caso:** Sequências de n termos que começam por 0

$$\underline{\;\;0\;\;}\;\;\underline{\;\;2p\;\;}\;\;\underline{\;\;\;\;\;\;}\cdots\underline{\;\;\;\;\;\;}$$

Figura B.2: Sequências de n termos começadas por 0

Nas sequências que começam por zero devemos ter cuidado com o segundo termo, pois não podemos ter dois zeros consecutivos. Assim, temos duas possibilidades para a segunda posição, ou 1 ou 2. Daí, do princípio fundamental da contagem, temos $2 \cdot x_{n-2}$ sequências que começam por zero e não possuem dois zeros consecutivos.

2º **Caso:** Sequências de n termos que começam por 1

$$\underline{\;\;1\;\;}\;\;\underline{\;\;\;\;\;\;}\;\;\underline{\;\;\;\;\;\;}\cdots\underline{\;\;\;\;\;\;}$$

Figura B.3: Sequências de n termos começadas por 1

Do diagrama, temos x_{n-1} sequências que começam por um e não possuem dois zeros consecutivos.

3º **Caso:** Sequências de n termos que começam por 2

Do diagrama, temos x_{n-1} sequências que começam por dois e não possuem dois zeros consecutivos.

2

_____ _____ _____ ... _____

Figura B.4: Sequências de n termos começadas por 2

Portanto, temos $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2}$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, que é uma recorrência de segunda ordem homogênea de equação característica $r^2 - 2r - 2 = 0$. Logo, $x_n = c_1(1-\sqrt{3})^n + c_2(1+\sqrt{3})^n$; com $x_1 = 2$ e $x_2 = 8$.

Apêndice C

Teorema dos Intervalos Encaixados

Apresentamos neste apêndice o Teorema dos Intervalos Encaixados. Primeiro enunciaremos dois resultados sobre o ínfimo e o supremo de conjuntos. Todo este apêndice baseia-se em [9].

C.1 Teorema dos Intervalos Encaixados

Teorema C.1. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente, então* $\inf A$ *existe.*

Demonstração. Se A for formado apenas por números positivos, a conclusão segue diretamente do Postulado de Dedekind e não temos nada a fazer. Suponha que A possua elementos não positivos. Como A é limitado inferiormente, por definição, existe um número real $l < 0$, tal que $a > l$, para todo $a \in A$. Seja

$$B = A - l \equiv \{a - l : a \in A\},$$

então os elementos de B são positivos. Logo, B é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, cujos elementos são positivos, pelo Postulado de Dedekind, ele possui um ínfimo. Seja $L = \inf B$, afirmamos que $\inf A = L + l$. Para todo $a \in A$, $a - l \in B$, portanto $a - l \geq L$, pois L é uma cota inferior para B, ou seja, □

Teorema C.2. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Então,*

$$\sup A = -\inf(-A)$$

onde $-A = \{-x : x \in A\}$.

Demonstração. Como A é limitado superiormente, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq k$, para todo $a \in A$. Assim, $-a \geq -k$, para todo $a \in A$, portanto $-A$ é limitado inferiormente por $-k$ e pelo Teorema C.1, temos que existe $l \in \mathbb{R}$, tal que $l = \inf(-A)$. Como $l = \inf(-A)$, então l é uma cota inferior para $-A$, logo $-a \geq l$, para todo $a \in A$, ou seja, $a \leq -l$ para todo $a \in A$ e concluímos que $-l$ é uma cota superior para A.

Agora, suponha que l' seja uma cota superior para A, então para todo $a \in A$, temos $a \leq l'$, portanto $-a \geq -l'$ e concluímos que $-l'$ é uma cota inferior para $-A$. Como l é a maior das cotas inferiores de $-A$, segue que $-l' \leq l$, ou seja, $l' \geq -l$. Logo, $-l$ é a menor das cotas superiores de $-A$. Portanto, $\sup A = -l = \inf(-A)$. □

Teorema C.3 (Teorema dos Intervalos Encaixados)**.** *Dado a sequência decrescente* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ *de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$, *então*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

ou seja, existe pelo menos um real c*, tal que* $c \in I_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Note que dizer que existe um número L, tal que $L \in I_n$, para todo n, significa que $a_n \leq L \leq b_n$, para todo n. Das inclusões $I_n \supset I_{n+1}$, temos

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Como $a_n \leq b_1$, para todo n segue que o conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

é limitado superiormente e, pelo Teorema C.2, existe $\sup A$, o qual denotaremos por L. Sendo L uma cota superior para A, temos $a_n \leq L$, para todo n. Além disso, como cada b_n é uma cota superior para A e L a menor das cotas superiores para A, temos $L \leq b_n$, para todo n. Portanto, $a_n \leq L \leq b_n$, para todo n. □