



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



O Teorema de Contagem de Burnside e Aplicações

Lívia Torres Valladares

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Dezembro de 2018

O Teorema de Contagem de Burnside e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Lívia Torres Valladares e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 4 de fevereiro de 2019.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Edgar Nascimento
Prof^a. Dr^a. Thaís Silva Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

V176t Valladares, Livia Torres.
O Teorema de Contagem de Burnside e Aplicações / Livia
Torres Valladares. -- 2018
xiii, 64 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de
Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Problemas de Contagem. 2. Simetrias. 3. Permutações. 4.
Órbitas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Profmat
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 - E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "O teorema de Contagem de Burnside e Aplicações"

Autor: Livia Torres Valladares

defendida e aprovada em 14/12/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor *Aldi Nestor de Souza*
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutora *Thais S. do Nascimento*
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor *Edgar Nascimento*
Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

CUIABÁ, 14/12/2018.

A meus avós, Irene e Sebastião.

Agradecimentos

A Deus por me permitir viver e aprender, sonhar e sorrir, chorar e levantar, amar e ser amada! Na Sua bondade infinita, permita-me ter mais fé, esperança e amor.

A meus avós e a meu tio Marcus, por terem me criado zelosamente, incentivando-me no estudo e por sempre mostrarem o quanto me amam.

A meus pais, por me darem a vida e por me amarem.

A meu esposo, Ludio Edson, pelo apoio e colaboração durante o mestrado, em especial nesta fase da dissertação.

Ao meu orientador, Prof. Aldi Nestor, pelas aulas do mestrado e pela gentileza de me orientar. Sua paixão pela docência transmite para os seus alunos a empolgação necessária para continuarmos aprendendo e procurando ensinar cada vez melhor.

Aos colegas do IFMT, José Marcelo Pontes, pela solicitude em emprestar-me os livros; ao William Santos Rodrigues, pelas valiosas dicas sobre o Latex e construção de figuras e ao Alessandro Costa de Jesus, pelas dicas com o Latex. A eles e a outros colegas sou grata pela amizade.

Ao professor Geraldo Lúcio Diniz, pela solicitude e gentileza.

A todos os professores do PROFMAT UFMT, por nos dedicarem seu tempo e conhecimento durante o curso.

A todos os colegas do PROFMAT UFMT, pelo companheirismo e pela amizade.

À CAPES e à SBM, por este programa de mestrado que tem levado qualificação a milhares de professores de matemática em todo o Brasil.

*Há uma única ciência, a Matemática,
a qual ninguém se pode jactar de
conhecer porque suas conquistas são,
por natureza, infinitas; dela toda gente
fala, sobretudo os que mais a ignoram.*

Malba Tahan.

Resumo

Nesta dissertação utilizamos o Teorema de Contagem de Burnside (TCB) para determinar a quantidade de colorações distintas existentes na pintura de objetos, levando-se em conta suas simetrias. O TCB é um resultado da teoria de grupos que fornece o número de órbitas de uma ação de um grupo em um conjunto. Portanto, esse teorema se constitui em uma ferramenta útil na análise combinatória a fim calcular, por exemplo, o número de maneiras de se pintar as faces de um cubo, dispondo-se de m cores distintas, sendo que, neste caso, duas pinturas são consideradas idênticas se uma pode ser obtida da outra por uma rotação do cubo.

Palavras chave: Problemas de Contagem, Simetrias, Permutações, Órbitas.

Abstract

In this master's thesis, we used Burnside's Counting Theorem (BCT) to determine the number of distinct colorings in the painting of objects, considering their symmetries. BCT is a result of group theory by which it is possible to obtain the number of orbits for the action of a group on a set. Therefore, this theorem is a useful tool in combinatorial analysis to calculate, for example, the number of ways that's possible to paint the faces of a cube, having m distinct colors, in which case, two paintings are considered identical if one can be obtained from the other by a rotation of the cube.

Keywords: Counting Problems, Symmetries, Permutations, Orbits.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Lista de tabelas	xiii
Introdução	1
1 Pré-Requisitos	3
1.1 Relações de Equivalência	3
1.2 Grupos	6
1.3 Subgrupos	8
1.4 Classes Laterais	11
2 Grupos de Permutações, de Simetrias e Diedrais	14
2.1 Grupos de Permutações	14
2.1.1 Permutação de um conjunto	14
2.1.2 Grupos das permutações de um conjunto	17
2.2 Grupos de Simetrias	19
2.2.1 Simetrias do Retângulo	19
2.2.2 Simetrias do Triângulo Equilátero	20
2.2.3 Simetrias do Quadrado	21
2.2.4 Simetrias do Tetraedro Regular	22
2.2.5 Simetrias do Cubo	23

2.3	Grupos Diedrais	25
3	Ação de Grupos e o Teorema de Contagem de Burnside	32
3.1	Colorações e ação de grupos	32
3.2	Órbitas	37
3.2.1	Relações de equivalência por ação de grupos	37
3.3	Estabilizadores	39
3.4	Teorema de Contagem de Burnside	44
4	Aplicações do Teorema de Contagem de Burnside	48
4.1	Problema da pintura das faces do cubo	48
4.2	Problema das moléculas orgânicas	50
4.3	Problema dos guardanapos	51
4.4	Problemas de tabuleiros	53
4.5	Problema do colar	57
4.6	Problemas envolvendo hexágono	60
	Considerações finais	63
	Referências Bibliográficas	64

Lista de Figuras

2.1	Simetrias do retângulo.	20
2.2	Simetrias do triângulo equilátero.	21
2.3	Simetrias do quadrado.	22
2.4	Eixos de simetria do tetraedro regular.	23
2.5	Eixos de simetria do cubo.	23
2.6	Ilustração de polígono regular com 5 lados e com 6 lados.	25
2.7	Reflexão em um polígono regular com n lados.	27
3.1	Ilustração do quadrado dividido pelas diagonais.	32
3.2	Colorações dos triângulos em um quadrado.	33
3.3	Representação dos triângulos determinados pelas diagonais do quadrado.	34
3.4	Ilustração de α na coloração f_8	35
3.5	Ilustração de α^3 na coloração f_{12}	35
3.6	Ilustração de α na coloração f_8	36
3.7	Ilustração de α^3 na coloração f_9	36
3.8	Ilustração da órbita de $x = f_2$	39
3.9	Ilustração da órbita de $x = f_{10}$	39
3.10	Ilustração de α^2 na coloração f_{10}	39
3.11	Conjunto dos pontos fixos de $\alpha^2 \in D_4$	44
3.12	Representação das simetrias do quadrado dividido pelas diagonais.	46
4.1	Ilustração da molécula	50
4.2	Ilustração tetraédrica da molécula orgânica.	50
4.3	Ilustração da mesa com os seis guardanapos numerados.	52
4.4	Ilustração do tabuleiro $1 \times n$ com casas numeradas.	53
4.5	Tabuleiro 3×3 com as casas numeradas.	55

4.6	Exemplos de tabuleiros não obtidos um do outro por rotação.	55
4.7	Simetrias de reflexão do pentágono regular.	58
4.8	Ilustração dos colares com 5 pedras nas cores azul, verde e vermelho. . . .	59
4.9	Ilustração do hexágono regular com os vértices numerados.	60
4.10	Ilustração das diferentes moléculas obtidas.	62

Lista de Tabelas

3.1	Estabilizadores e órbitas das colorações do quadrado dividido pelas diagonais.	41
3.2	Valores de $ Fix_g $ para cada $g \in D_4$.	46
4.1	Valores de $ Fix_g $ para cada $g \in D_4$.	56
4.2	Valores de $ Fix_g $ para cada $g \in D_5$.	59
4.3	Valores de $ Fix_g $ para cada $g \in D_6$.	61

Introdução

“A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu.”

(Jean Le Rond d’Alembert)

Este trabalho se propõe a resolver alguns problemas que fazem uso do Teorema de Contagem de Burnside (TCB), cujo resultado permite calcular o número de órbitas de uma ação de grupos sobre um conjunto X . O matemático inglês William Burnside (1852-1927) fez importantes contribuições à Teoria de Grupos Finitos e, em 1897, publicou o primeiro livro em inglês a tratar sobre teoria de grupos. O *Teorema de Contagem de Burnside*, também conhecido como *Lema de Burnside*, *Lema de Cauchy-Frobenius* ou *Teorema da Contagem de Órbitas*, é um resultado da teoria de grupos e tem como aplicação a contagem de colorações de objetos ao levar em consideração suas simetrias. Na primeira edição de seu livro, Burnside atribuiu o teorema a Frobenius, que o havia provado em 1887 (antes de Frobenius, aparentemente esse teorema já era conhecido por Cauchy). Mas a segunda edição do seu livro, cuja divulgação foi mais expressiva, não continha a atribuição a Frobenius, fazendo com que se atribuísse o teorema a Burnside.

A aplicação do TCB na análise combinatória permite, por exemplo, determinar (i) o número de maneiras de pintar as faces de um cubo dispondo de m cores, se duas pinturas são consideradas iguais quando uma puder ser obtida da outra por uma rotação; (ii) a quantidade de formas distintas de se pintar os vértices de um hexágono regular dispondo de m cores, se duas pinturas são consideradas iguais quando uma puder ser obtida da outra por alguma simetria.

Com o objetivo de desenvolver os conceitos necessários à compreensão das aplicações apresentadas, o texto foi estruturado em quatro capítulos, sendo que no capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos: relações de equivalência, grupos, subgrupos e classes laterais; no capítulo 2 estudamos grupos de permutações, grupos de simetrias e grupos diedrais;

no capítulo 3 abordamos tópicos mais próximos das aplicações: ação de grupos, órbitas, estabilizadores, pontos fixos e o Teorema de Contagem de Burnside (TCB); no capítulo 4 resolvemos alguns problemas de contagem aplicando o TCB.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos necessários ao desenvolvimento deste trabalho. As seções abordam noções de relações de equivalência, grupos, subgrupos e classes laterais.

1.1 Relações de Equivalência

Definição 1.1 *Dados dois conjuntos quaisquer A e B , não vazios, chama-se **relação binária** de A em B todo subconjunto R de $A \times B$ (Domingues e Iezzi, 2003).*

Quando $A = B$ e R é uma relação de A em B , dizemos que R é uma relação em A ou, ainda, R é uma relação sobre A .

Definição 1.2 *Uma relação binária \sim em um conjunto X é considerada uma **relação de equivalência** se as seguintes propriedades forem válidas para todos os elementos a , b e c em X .*

- i. Reflexiva: $a \sim a$;*
- ii. Simétrica: Se $a \sim b$, então $b \sim a$;*
- iii. Transitiva: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.*

Quando dois elementos $a, b \in X$ e a se relaciona com b por uma relação de equivalência, dizemos que a e b são equivalentes.

Exemplo 1 *Seja A o conjunto de todas as retas de um plano. A relação de paralelismo entre duas retas é uma relação de equivalência. Com efeito,*

- Toda reta $r \in A$ é paralela a si mesma. (Propriedade Reflexiva)
- Se r e s são duas retas de A e se $r \parallel s$, então $s \parallel r$. (Propriedade simétrica)
- Se r , s e t são retas de A e se $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então $r \parallel t$. (Propriedade transitiva)

Definição 1.3 Seja \sim uma relação de equivalência sobre um conjunto A . Dado $a \in A$, chama-se **classe de equivalência** determinada por a , o subconjunto $[a]$ de A que contém os elementos x que se relacionam com a . Em símbolos:

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

Proposição 1.1 Seja \sim uma relação de equivalência sobre um conjunto A . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $a \sim b$;
- (ii) $[a] = [b]$;
- (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii): Suponha que $a \sim b$ e que $c \in [a]$, ou seja, $a \sim c$. Da hipótese, $a \sim b$, e da simetria da relação de equivalência \sim , conclui-se que $b \sim a$. E pelo fato de $b \sim a$ e $a \sim c$, segue pela propriedade transitiva que $b \sim c$, resultando que $c \in [b]$. Portanto, todo elemento c de $[a]$ é também elemento de $[b]$, ou seja, $[a] \subseteq [b]$. Analogamente se prova que $[b] \subseteq [a]$, o que conduz à conclusão de que $a \sim b$ implica $[a] = [b]$.

(ii) \Rightarrow (iii): Suponha que $[a] = [b]$. Segue-se que $[a] \cap [b] = [a]$. Como $a \in [a]$, temos que $[a]$ é não vazio, resultando que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

(iii) \Rightarrow (i): Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Portanto, existe $c \in [a] \cap [b]$, isto é, $c \in [a]$ e $c \in [b]$, ou ainda, $a \sim c$ e $b \sim c$. Por simetria, temos que $c \sim b$. Como $a \sim c$ e $c \sim b$, resulta da transitividade que $a \sim b$. ■

Até agora temos usado a notação \sim para nos referirmos a uma relação de equivalência. Essa notação não é única e na definição a seguir representaremos uma relação de equivalência por R .

Definição 1.4 *Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A . Definimos o **conjunto-quociente** de A por R , denotado por A/R , como o conjunto de todas as classes de equivalência segundo a relação R , isto é,*

$$A/R = \{[x], \forall x \in A\}$$

Exemplo 2 *Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 6\}$ e sobre ele a relação de equivalência R de congruência módulo 4, isto é,*

$$R = \{(0, 0), (0, 4), (1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 6), (3, 3), (4, 0), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 6)\}$$

Para determinar o conjunto-quociente A/R vamos descrever cada uma das classes de equivalência de R :

$$[0] = \{0, 4\} = [4]$$

$$[1] = \{1, 5\} = [5]$$

$$[2] = \{2, 6\} = [6]$$

$$[3] = \{3\}$$

Portanto, $A/R = \{[0], [1], [2], [3]\}$.

Definição 1.5 *Uma partição de um conjunto A é uma família de conjuntos não vazios A_1, A_2, \dots, A_n tais que*

$$(i) \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

$$(ii) A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j$$

Proposição 1.2 *Seja \sim uma relação de equivalência em um conjunto A . Então as classes de equivalência definidas por \sim formam uma partição de A .*

Demonstração:

Todo elemento de A pertence a uma classe de equivalência e não há nessas classes nenhum elemento que não pertença a A . Portanto, a união das classes de equivalência resulta em A , ou seja, $\cup_{i=1}^n A_i = A$. Por fim, do item (iii) da Proposição 1.1, segue que quaisquer duas classes de equivalência são disjuntas, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$. ■

1.2 Grupos

Definição 1.6 Uma operação binária $*$ em um conjunto não vazio G é entendida como uma função

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

Portanto, uma operação binária em G associa a cada par de elementos de G , um único elemento de G .

Definição 1.7 Chama-se **grupo** um conjunto não vazio G munido de uma operação binária $*$ que possui as seguintes propriedades:

- (i) *Existência de elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $\forall a \in G \Rightarrow a * e = e * a = a$;*
- (ii) *Existência de Inversos: $\forall a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$;*
- (iii) *Associativa: $\forall a, b, c \in G$, temos $a * (b * c) = (a * b) * c$.*

Costuma-se usar a notação $(G, *)$ para indicar um grupo G munido de uma operação $*$ (Alencar Fo., 1985).

Definição 1.8 Se em um grupo $(G, *)$ a operação $*$ é comutativa, isto é,

$$(iv) \ a * b = b * a, \forall a, b \in G$$

diz-se que $(G, *)$ é um **grupo comutativo** ou **grupo abeliano** (homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829)).

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades inerentes a todo grupo (Garcia e Lequain, 2013).

Proposição 1.3 Seja $(G, *)$ um grupo:

- (a) *Unicidade do elemento neutro*
Existe um único elemento neutro em G .
- (b) *Unicidade do inverso de um elemento*
Para cada elemento $a \in G$ existe um único inverso de a em G .

(c) *O inverso do inverso*

Se $a \in G$ e $a^{-1} \in G$ é o inverso de a , então o inverso de a^{-1} é a , isto é, $(a^{-1})^{-1} = a$.

(d) *Inverso de um composto de dois elementos*

Se $a, b \in G$ e $a^{-1}, b^{-1} \in G$ são, respectivamente, os inversos de a e b , então o inverso de $a * b$ é $b^{-1} * a^{-1}$, isto é, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(e) *Lei do cancelamento à direita e à esquerda*

Sempre que $a, b, c \in G$ e $b * a = c * a$ ou $a * b = a * c$, segue-se que $b = c$.

Demonstração:

(a) Suponhamos que e e e_1 sejam elementos neutros de $(G, *)$. Como e é elemento neutro e $e_1 \in G$, temos $e_1 * e = e_1$. Mas e_1 também é elemento neutro e $e \in G$, o que leva a $e = e_1 * e$. Dessas duas igualdades, obtém-se, $e = e_1 * e = e_1$, ou seja, $e = e_1$.

(b) Suponhamos que a^{-1} e b^{-1} sejam elementos de $(G, *)$ e ambos inversos de $a \in G$. Como a^{-1} é inverso de a , temos $a^{-1} * a = e$. Além disso, como b^{-1} também é inverso de a , temos $a * b^{-1} = e$. Portanto, $a^{-1} = a^{-1} * e = a^{-1} * (a * b^{-1}) = (a^{-1} * a) * b^{-1} = e * b^{-1} = b^{-1}$, ou seja, $a^{-1} = b^{-1}$.

(c) Como a^{-1} é o inverso de a , temos $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$, donde tiramos que a é o inverso de a^{-1} , ou seja, $a = (a^{-1})^{-1}$.

(d) Para mostrar que $b^{-1} * a^{-1}$ é o inverso de $a * b$, devemos mostrar que

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$$

e

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$$

Com efeito,

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e$$

e

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

Portanto, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(e) Sejam a e b elementos quaisquer de G , tais que $b * a = c * a$ e seja a^{-1} o inverso de a . Então, operando à direita, por a^{-1} , segue que $(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$. Da associatividade, temos $b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$. Assim, $b * e = c * e$, logo, $b = c$, como desejávamos. Analogamente, operando a^{-1} à esquerda obtém-se que $a * b = a * c$ implica $b = c$. ■

Definição 1.9 A ordem de um grupo $(G, *)$ é o número de elementos do conjunto G , indicada por $|G|$ ou por $\#(G)$. Quando G é um grupo infinito escrevemos $|G| = \infty$ e no caso de G ser finito escrevemos $|G| < \infty$.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de grupos (Herstein, 1970).

Exemplo 3 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são grupos abelianos aditivos. De fato, pois a adição é uma operação sobre cada um dos conjuntos, nos quais existem a associatividade, a comutatividade, um elemento neutro (zero), e todo elemento do conjunto tem um inverso, também pertencente ao conjunto.

Exemplo 4 De modo análogo ao exemplo anterior, temos que (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) são grupos abelianos multiplicativos, pois nesses conjuntos valem a associatividade e a comutatividade, o número 1 é o elemento neutro e existe um inverso para cada elemento do conjunto, também pertencente ao conjunto.

Exemplo 5 (\mathbb{Z}^*, \cdot) não é grupo, visto que apenas os elementos 1 e -1 possuem inversos no conjunto.

Exemplo 6 $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo abeliano finito de ordem n , onde $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ é o conjunto das classes de restos módulo n . Deveras, uma vez que $\bar{0}$ é o elemento neutro do grupo e para cada $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ existe um inverso $(\overline{n-k}) \in \mathbb{Z}_n$. A associatividade e a comutatividade são conseqüências das mesmas propriedades válidas em \mathbb{Z} .

1.3 Subgrupos

Alguns subconjuntos de um grupo se comportam como um grupo, pois satisfazem a todos os axiomas de grupo. A esses subconjuntos, dotados da operação considerada no grupo, chamamos de subgrupo. Tendo em vista que a associatividade é válida para todos os elementos do grupo, então ela vale para qualquer subconjunto do grupo. Desse modo, pode-se definir subgrupo da seguinte forma:

Definição 1.10 *Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Dizemos que H é um subgrupo de G se:*

- (i) *H é fechado em relação à operação $*$, isto é, $\forall a, b \in H$ tem-se $a * b \in H$;*
- (ii) *H contém o elemento neutro e de G ;*
- (iii) *H contém inversos, isto é, $\forall a \in H$ temos $a^{-1} \in H$.*

Para indicar que H é subgrupo de G , escrevemos $H \leq G$.

Se H é um subgrupo de G , segue que o elemento neutro de H é o mesmo elemento neutro de G . Ademais, o inverso de um elemento qualquer de H será o mesmo em G . Ambas as afirmações serão provadas a seguir.

Proposição 1.4 *O elemento neutro e de um grupo $(G, *)$ também é elemento neutro de todos os seus subgrupos.*

Demonstração:

Seja $(H, *)$ um subgrupo qualquer de $(G, *)$ e sejam $e \in G$ e $e_H \in H$, respectivamente, os elementos neutros de $(G, *)$ e $(H, *)$. Como $e_H \in G$, temos:

$$e_H * e = e_H \tag{I}$$

Por outro lado, como e_H é o elemento neutro de $(H, *)$, temos:

$$e_H * e_H = e_H \tag{II}$$

Pela lei do cancelamento, temos, de (I) e (II), que:

$$e_H * e = e_H * e_H \Rightarrow e = e_H$$

■

Corolário 1.1 *O inverso de qualquer elemento $a \in H$ no subgrupo $(H, *)$ coincide com o inverso de $a \in G$ no grupo $(G, *)$.*

Demonstração: Seja e o elemento neutro de $(G, *)$ e, portanto, de $(H, *)$. Denotando por a_G^{-1} e a_H^{-1} os inversos respectivos de a em $(G, *)$ e $(H, *)$, temos:

$$a * a_G^{-1} = e = a * a_H^{-1} \Rightarrow a_G^{-1} = a_H^{-1} \quad \blacksquare$$

A proposição a seguir caracteriza um subgrupo por meio de uma forma alternativa à Definição 1.10, além de ser mais concisa.

Proposição 1.5 *Seja H um subconjunto não vazio de um grupo G . São equivalentes:*

(i) $H \leq G$;

(ii) $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$, em que b^{-1} é o inverso de b .

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii): Sejam $a, b \in H$. Como H é subgrupo de G e $b \in H$, existe $b^{-1} \in H$. Assim, $a, b^{-1} \in H$ implica $a * b^{-1} \in H$, pois H é fechado em relação à operação $*$.

(ii) \Rightarrow (i): Reciprocamente, suponha que H é um subconjunto não vazio de G tal que $a * b^{-1} \in H$ para quaisquer $a, b \in H$.

Como $H \neq \emptyset$, existe $a \in H$ e, portanto, $\forall a, b = a \in H$ temos que $a * a^{-1} = e \in H$, ou seja, o elemento neutro pertence a H .

Dado $b \in H$, temos que $e, b \in H$. Por (ii), segue que $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$, ou seja, cada elemento de H possui um inverso em H .

Dados $a, b \in H$, temos que $a, b^{-1} \in H$. Por (ii), segue que $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$, ou seja, H é fechado para a operação de G . Por fim, como a propriedade associativa em H é herdada de G , não precisamos demonstrá-la. Logo, concluímos que $H \leq G$. \blacksquare

Exemplo 7 *Todo grupo $(G, *)$ possui no mínimo dois subgrupos: $(\{e\}, *)$ e $(G, *)$. Tais subgrupos são ditos **subgrupos triviais** ou **impróprios**. Se existem outros subgrupos de G , estes são chamados **subgrupos próprios**.*

Exemplo 8 *É imediato que*

- $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$;
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$;
- $(\{\pm 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

Exemplo 9 *Para cada inteiro m , o conjunto $m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. Com efeito, $\forall a, b \in m\mathbb{Z}$, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $a = mx$ e $b = my$. Assim, $a - b = mx - my = m(x - y) \in m\mathbb{Z}$. Pela proposição 1.5 vem que $(m\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.*

Exemplo 10 O grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$, onde $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ contém dois subgrupos próprios: $H_1 = (\{\bar{0}, \bar{3}\}, +)$ e $H_2 = (\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, +)$.

1.4 Classes Laterais

Definição 1.11 Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Para cada $g \in G$, definimos a classe lateral gH como sendo o conjunto:

$$gH = \{g * h \mid h \in H\}$$

Daqui em diante usaremos a notação gh para indicar $g * h$.

Note que o conjunto gH é formado apenas por elementos de G , então toda classe lateral gH é um subconjunto de G .

Lema 1.1 Se $a, b \in G$ e H é um subgrupo de G , então

$$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que $aH = bH$. Como o elemento neutro $e \in H \leq G$, temos

$$ae = a \in (aH) \Rightarrow a \in (bH)$$

Logo, existe $h \in H$ tal que $a = bh$, o que equivale a $b^{-1}a = h$. E como $h \in H$, então $b^{-1}a \in H$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha que $(b^{-1}a) \in H$. Então existe $h \in H$, tal que $b^{-1}a = h$, ou seja, $a = bh$. Para provar que $aH \subseteq bH$, consideremos $x \in aH$, isto é, $x = ah_1$, para algum $h_1 \in H$. Temos que $x = ah_1 = (bh)h_1 = b(hh_1) = bh_2$ com $h_2 \in H$, pois $H \leq G$.

Assim, $x \in bH$ e, portanto, $aH \subseteq bH$.

Para provar que $bH \subseteq aH$, considere o fato de que $H \leq G$ implica que $h^{-1} \in H$, donde segue que $a = bh \Rightarrow ah^{-1} = b(hh^{-1}) \Rightarrow ah^{-1} = be \Rightarrow ah^{-1} = b$, ou melhor, $b = ah^{-1}$.

Então, para $y \in bH$, existe $h_3 \in H$ tal que $y = bh_3 = (ah^{-1})h_3 = a(h^{-1}h_3) = ah_4$ com $h_4 \in H$, pois $H \leq G$. Assim, $y \in aH$ e, portanto $bH \subseteq aH$.

Como $aH \subseteq bH$ e $bH \subseteq aH$, então $aH = bH$. ■

Lema 1.2 *Se H é um subgrupo de G então quaisquer classes laterais de H ou são idênticas, ou são disjuntas. Em símbolos:*

$$\forall a, b \in G, \text{ temos exclusivamente que } aH = bH \text{ ou } aH \cap bH = \emptyset.$$

Demonstração:

Suponha que $aH \cap bH \neq \emptyset$ e seja $x \in aH \cap bH$. Então existem $h_1, h_2 \in H$ tais que $x = ah_1 = bh_2$. Donde $ah_1 = bh_2 \Rightarrow b^{-1}(ah_1)h_1^{-1} = b^{-1}(bh_2)h_1^{-1} \Rightarrow b^{-1}a(h_1h_1^{-1}) = (b^{-1}b)h_2h_1^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = h_2h_1^{-1}$. Mas $h_2h_1^{-1} \in H$, pois $H \leq G$, implicando que $b^{-1}a \in H$ e, pelo Lema 1.1, temos $aH = bH$. ■

Definição 1.12 *Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G . Chamamos de índice de H em G o número de diferentes classes laterais de H em G , o qual denotamos por $[G : H]$. Em símbolos,*

$$[G : H] = \#\{aH \mid a \in G\}$$

Proposição 1.6 (Teorema de Lagrange) *Se H é um subgrupo de um grupo finito G , então $|G| = |H| \cdot [G : H]$. Em particular, a ordem de H divide a ordem de G .*

Demonstração:

Seja e o elemento neutro de G . Como H é subgrupo de G , então $e \in H$, de modo que $\forall a \in G$, temos $a = ae \in aH$, ou seja, cada elemento de G está em alguma classe lateral de H em G . Mostramos agora que cada classe lateral de H em G possui ordem igual à ordem de H . Como H é subgrupo de um grupo finito G , então H também é finito. Considere $H = \{h_1, \dots, h_m\}$ com os h_j todos distintos, isto é, H possui m elementos. Afirmamos que para todo $a \in G$, aH possui m elementos distintos, ou seja, a mesma cardinalidade de H . Com efeito, se tivéssemos $ah_j = ah_k$ com $j \neq k$, poderíamos cancelar a à esquerda e obter $h_j = h_k$. Mas isso contrariaria a hipótese de que $h_j \neq h_k$. Assim, concluímos que para qualquer classe lateral aH temos $|aH| = |H|$. Ademais, do Lema 1.2, temos que as diferentes classes laterais de H em G particionam G em $[G : H]$ conjuntos de cardinalidade $|H|$, ou seja, $|G| = |H| \cdot [G : H]$. Finalmente, como H e G são grupos finitos, então $|G|$, $|H|$ e $[G : H]$ são números inteiros positivos, implicando que a ordem de H divide a ordem de G . ■

Exemplo 11 Consideremos o grupo aditivo $(\mathbb{Z}_6, +)$ das classes residuais módulo 6 e seu subgrupo $(H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, +)$. Pelo Teorema de Lagrange, temos:

$$[\mathbb{Z}_6 : H] = \frac{|\mathbb{Z}_6|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$$

De fato, as classes laterais distintas de $(H, +)$ em $(\mathbb{Z}_6, +)$ são:

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \quad e \quad \bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$$

pois as demais classes laterais coincidem com uma dessas duas. Portanto, $[\mathbb{Z}_6 : H] = \#\{\bar{0} + H, \bar{1} + H\} = 2$.

Exemplo 12 Seja $(G, *)$ um grupo de ordem 12. Como $12 = 2^2 \cdot 3$, as únicas possíveis ordens para subgrupos de $(G, *)$ são 1, 2, 3, 4, 6, 12, divisores positivos de 12. Assim, este grupo não possui, por exemplo, subgrupo de ordem 5.

Capítulo 2

Grupos de Permutações, de Simetrias e Diedrais

2.1 Grupos de Permutações

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados acerca das permutações dos elementos de um conjunto e mostramos que o conjunto das permutações com a operação de composição constitui um grupo.

2.1.1 Permutação de um conjunto

Informalmente, uma permutação de um conjunto não vazio é um rearranjo de seus elementos. Para exemplificar, considere $X = \{1, 2, 3\}$ o conjunto de três livros dispostos lado a lado numa prateleira de uma estante. Suponha que esses livros estão etiquetados em certa ordem, por exemplo, $(2, 1, 3)$. Da análise combinatória, sabemos que existem seis possíveis permutações para os elementos de X , a saber: $(1, 2, 3)$; $(1, 3, 2)$; $(2, 1, 3)$; $(2, 3, 1)$; $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$.

Observemos que, cada uma dessas permutações determina uma função bijetiva de X em X . Por exemplo, a sequência $(2, 3, 1)$, determina a função bijetiva $f : X \rightarrow X$, cuja regra é $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 1$, pois o primeiro elemento da sequência é 2, o segundo é 3, e o terceiro é 1. De outro ponto de vista, reparemos que cada função bijetiva de X em X define uma permutação dos elementos 1, 2 e 3. A seguir, expomos formalmente, esse conceito.

Definição 2.1 Dado um conjunto não vazio X , uma função bijetiva $f : X \rightarrow X$ é denominada uma permutação do conjunto X .

Note que se X tem um número finito de elementos, então toda função injetiva ou sobrejetiva $f : X \rightarrow X$ será bijetiva e, conseqüentemente, uma permutação de X .

Utilizaremos a notação $S(X)$ para nos referirmos ao conjunto de todas as permutações de um conjunto não vazio X , ou seja, ao conjunto de todas as bijeções de X em X . Em símbolos:

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X; f \text{ é bijetiva}\}$$

Se o conjunto X é finito, tal que $|X| = n$, ou seja, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, então existem $n!$ permutações dos elementos de X , isto é, $|S(X)| = n!$.

Como nosso interesse está no estudo de permutações de $X = \{1, 2, \dots, n\}$, usaremos a notação S_n para designar o conjunto das permutações $S(X)$. Seja $\alpha \in S_n$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a notação $\alpha(j)$ dá o valor da função bijetiva α no ponto j . Portanto, uma maneira de representar a permutação α , exibindo o seu domínio e contradomínio, é dada pela seguinte notação matricial:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

Por exemplo, em $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$ observamos que os números 2 e 5 se mantêm fixos.

Uma notação particularmente importante neste trabalho é a **notação cíclica**, através da qual a permutação fica explícita e representada mais sucintamente. Antes, porém, visando favorecer a compreensão, exprimimos $\alpha \in S_7$ por diagramas de setas:

$$\begin{array}{c} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \\ 5 \rightarrow 5 \end{array}$$

Exibindo α na notação cíclica temos $(13)(2)(476)(5)$. Note que a notação cíclica estabelece, por exemplo, que $\alpha(\alpha(\alpha(4))) = \alpha(\alpha(7)) = \alpha(6) = 4$, ou seja, ao aplicar certo

número de vezes a composição na função α de um elemento j obtém-se o próprio j . A proposição a seguir estabelece esse resultado.

Proposição 2.1 *Se $\alpha \in S_n$, então para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $l_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que*

$$\alpha^{l_j}(j) = \underbrace{(\alpha \circ (\alpha \circ (\dots \circ \alpha(j) \dots)))}_{l_j \text{ aplicações}} = j$$

Demonstração:

Suponha que não exista l_j tal que $\alpha^{l_j}(j) = j$, ou que $l_j \geq n + 1$, então após a n -ésima iteração teríamos que $\alpha^{l_j}(j) \notin \{1, 2, \dots, n\}$, o que é impossível, uma vez que α é uma bijeção definida em $\{1, 2, \dots, n\}$. Portanto, temos um ciclo de α , determinado por $(j, \alpha(j), \alpha^2(j), \dots, \alpha^{l_j-1}(j))$, de comprimento l_j . No caso de $(j, \alpha(j), \alpha^2(j), \dots, \alpha^{l_j-1}(j))$ não conter todos os elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, escolhamos qualquer elemento k que não tenha aparecido no ciclo anterior e continuamos a criar um novo ciclo, como antes. Ou seja, encontraremos l_k de tal modo que $(k, \alpha(k), \alpha^2(k), \dots, \alpha^{l_k-1}(k))$ seja um ciclo de comprimento l_k . Seguindo este mesmo processo até que todos os membros de $\{1, 2, \dots, n\}$ sejam utilizados, obteremos uma representação da permutação α por meio de ciclos disjuntos. ■

Denominamos um ciclo de comprimento k simplesmente de k -ciclo; se $k = 1$ dizemos que o 1-ciclo é um ponto fixo e se $k = 2$ dizemos que o 2-ciclo é uma transposição.

Exemplo 13 A permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser representada na notação de ciclos disjuntos por $(12)(3)(45)$. Cada um dos ciclos (12) e (45) é uma transposição e o ciclo (3) é um ponto fixo da permutação.

Exemplo 14 A permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ escrita na notação de ciclos disjuntos é: $(132)(47)(5896)$, em que (132) é um 3-ciclo, (47) é uma transposição e (5896) é um 4-ciclo.

O ciclo (132) também pode ser representado como (321) ou (213) . Além disso, poderíamos permutar os blocos de ciclos da permutação $(132)(47)(5896)$ de 3! maneiras diferentes, sem alterar seu significado. De modo geral, a menos de permutações dos ciclos

e de permutações cíclicas dos elementos internos de cada ciclo, a representação por ciclos disjuntos é única.

Por praticidade, omitiremos o símbolo \circ da composição de permutações. Assim, $\alpha \circ \beta$ será denotada por $\alpha\beta$, onde entendemos que primeiro aplicamos β e depois α .

Exemplo 15 *Considere as seguintes permutações de S_4 :*

$$\alpha = (132)(4) \text{ e } \beta = (1)(2)(34).$$

A permutação composta $\alpha\beta$ é:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(1) &= \alpha(\beta(1)) = \alpha(1) = 3, \\(\alpha\beta)(3) &= \alpha(\beta(3)) = \alpha(4) = 4, \\(\alpha\beta)(4) &= \alpha(\beta(4)) = \alpha(3) = 2, \\(\alpha\beta)(2) &= \alpha(\beta(2)) = \alpha(2) = 1,\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha\beta$ leva 1 em 3, 3 em 4, 4 em 2 e 2 em 1. Ou seja, $\alpha\beta = (1342)$. Analogamente, obtém-se $\beta\alpha = (1432)$.

Observe que a operação de composição de permutações nem sempre é comutativa, pois $\alpha\beta = (1342)$ e $\beta\alpha = (1432)$.

2.1.2 Grupos das permutações de um conjunto

O lema e a proposição seguintes estabelecem que o conjunto $S(X)$ de todas as permutações dos elementos de um conjunto não vazio X , com a operação de composição, é um grupo.

Lema 2.1 *O conjunto $S(X)$ é fechado por composição de permutações, isto é,*

$$\alpha, \beta \in S(X) \Rightarrow \alpha\beta \in S(X)$$

Demonstração:

Sejam $\alpha, \beta \in S(X)$. Devemos provar que $\alpha\beta \in S(X)$.

- $\alpha\beta$ é injetiva.

Sejam $x_1, x_2 \in X$, tais que $\alpha\beta(x_1) = \alpha\beta(x_2)$. Então $\alpha(\beta(x_1)) = \alpha(\beta(x_2))$.

Como α é injetiva, temos $\beta(x_1) = \beta(x_2)$ e, do fato de β ser injetiva, temos $x_1 = x_2$.
 Donde, $\alpha\beta(x_1) = \alpha\beta(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, o que prova que $\alpha\beta$ é injetiva.

- $\alpha\beta$ é sobrejetiva

Seja z um elemento qualquer de X . Como α é sobrejetiva, existe um elemento y de X tal que $\alpha(y) = z$.

Como β também é sobrejetiva, existe um elemento x de X tal que $\beta(x) = y$.

Assim, existe um elemento x de X tal que $\alpha\beta(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(y) = z$. Isso prova que $\alpha\beta$ é sobrejetiva

Portanto, $\alpha\beta$ é bijetiva, donde segue que $\alpha\beta \in S(X)$, ou seja, o conjunto $S(X)$ é fechado por composição de permutações. ■

Proposição 2.2 *Se X é um conjunto não vazio, então $(S(X), \circ)$ é um grupo com a operação de composição de funções.*

Demonstração:

- Elemento Neutro.

A permutação identidade e , definida por $e(x) = x$, para todo $x \in X$, é bijetiva e funciona como o elemento neutro de $S(X)$, isto é,

$$\forall \alpha \in S(X), \text{ temos } \alpha e = e = e \alpha$$

- Inversos

Como toda função bijetiva $\alpha : X \rightarrow X$ possui inversa $\alpha^{-1} : X \rightarrow X$, que também é bijetiva, segue que $\alpha^{-1} \in S(X)$, de modo que $\alpha\alpha^{-1} = e = \alpha^{-1}\alpha$.

- Associatividade

Tendo em vista que a composição de funções é associativa, então para todo $\alpha, \beta, \gamma \in S(X)$, temos $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Portanto, o conjunto das permutações $S(X)$ com a operação de composição de funções é um grupo. ■

Todo grupo formado pelo conjunto das permutações $S(X)$, com a operação de composição de funções, é denominado **grupo de permutações**. Em particular, se $X =$

$\{1, 2, \dots, n\}$ temos que $S(X)$, já definido como S_n , é chamado **grupo simétrico de grau n**.

É possível provar que se X tem mais que dois elementos, então todo grupo $S(X)$ é não abeliano. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [1], p. 145.

2.2 Grupos de Simetrias

Nesta seção definimos simetria, apresentamos as simetrias de algumas figuras planas e espaciais e mostramos que o conjunto das simetrias de uma figura, com a operação de composição, é um grupo.

Definição 2.2 *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $g : F \rightarrow F$ diz-se uma isometria se preservar distância, isto é, se $d(A, B)$ indica a distância entre os pontos $A, B \in F$, então $d(A, B) = d(g(A), g(B))$.*

Definição 2.3 *Dada um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, uma simetria de F é uma aplicação $f : F \rightarrow F$ com as seguintes propriedades:*

- (i) *f é uma isometria;*
- (ii) *f é sobrejetiva.*

Portanto, uma simetria é uma aplicação que leva um conjunto nele mesmo e que preserva distâncias.

A seguir ilustraremos as simetrias do retângulo, do triângulo equilátero e do quadrado, associando números a seus vértices, o que possibilita a relação entre grupos de simetrias e grupos de permutações. Porém, poderíamos também associar números a lados, diagonais, etc. Indicaremos ainda, sucintamente, as simetrias do tetraedro regular e do cubo. Após esses exemplos, provaremos que o conjunto de todas as simetrias de uma figura, com a operação de composição de funções, forma um grupo.

2.2.1 Simetrias do Retângulo

O retângulo possui 4 simetrias:

- (i) A identidade, que mantém fixos todos os vértices, que é equivalente a uma rotação de 0° ;

- (ii) Uma rotação anti-horária de 180° , em torno do seu centro;
- (iii) Duas reflexões em torno das retas que passam pelo centro do retângulo e que são paralelas aos lados.

A figura abaixo apresenta as simetrias e as permutações correspondentes dos vértices do retângulo.

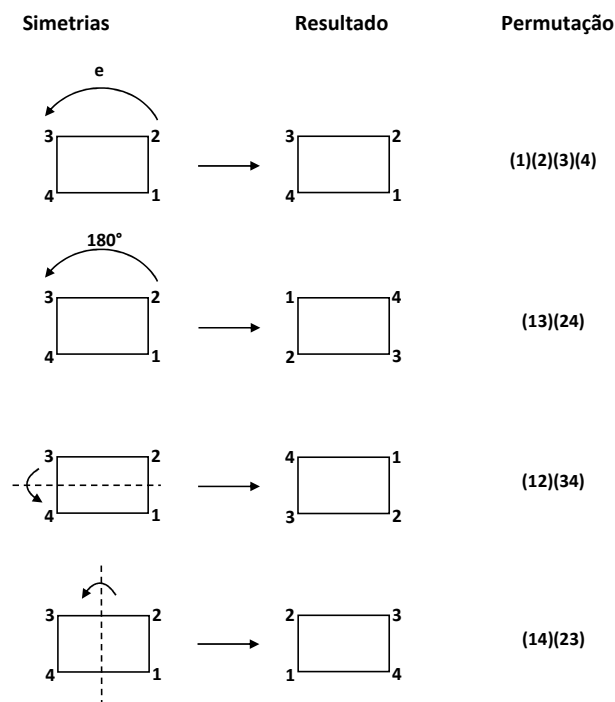


Figura 2.1: Simetrias do retângulo.

2.2.2 Simetrias do Triângulo Equilátero

O triângulo equilátero possui 6 simetrias:

- (i) A identidade;
- (ii) Duas rotações anti-horárias de 120° e 240° em torno do baricentro;
- (iii) Três reflexões através das medianas.

A figura a seguir apresenta as simetrias e as permutações correspondentes dos vértices do triângulo equilátero.

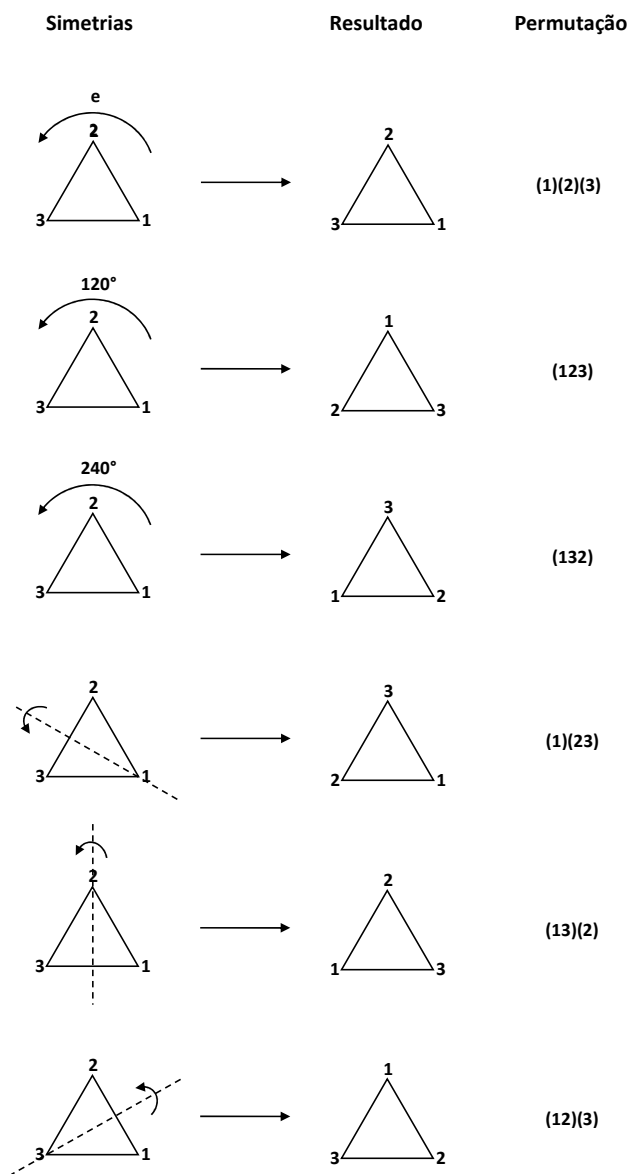


Figura 2.2: Simetrias do triângulo equilátero.

2.2.3 Simetrias do Quadrado

O quadrado possui 8 simetrias:

- (i) A identidade;
- (ii) Três rotações anti-horárias de 90° , 180° e 270° , em torno de seu centro;
- (iii) Duas reflexões através das mediatrizes;
- (iv) Duas reflexões através das diagonais.

A figura seguinte apresenta as simetrias e as permutações correspondentes dos vértices do quadrado.

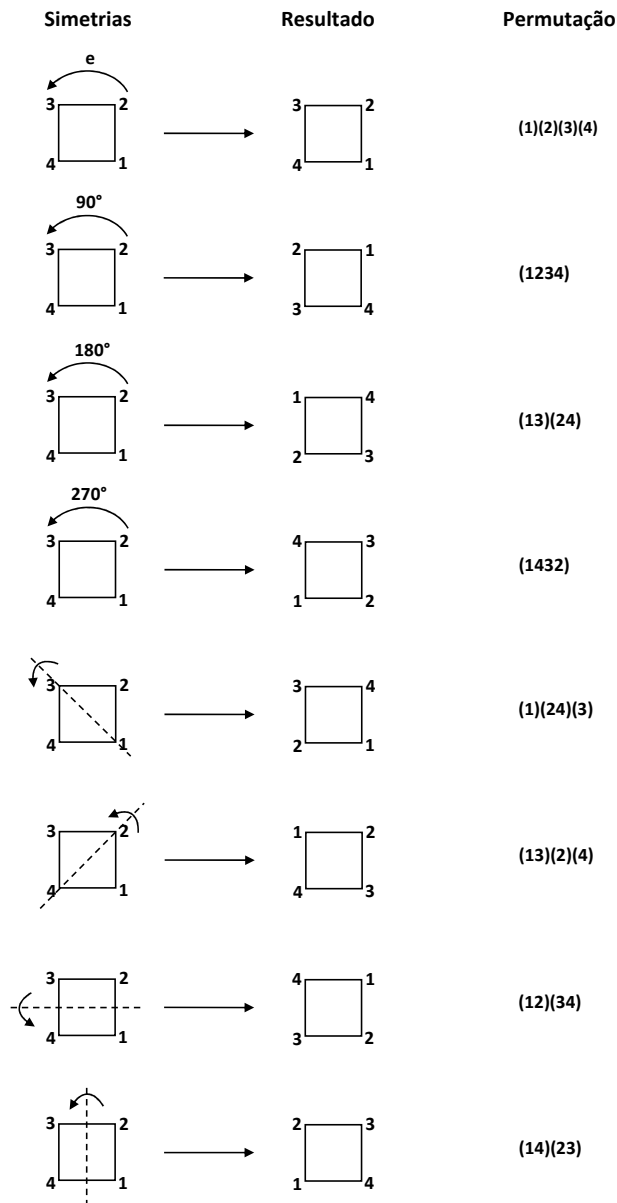


Figura 2.3: Simetrias do quadrado.

2.2.4 Simetrias do Tetraedro Regular

As quatro faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros. Existem 2 tipos diferentes de eixos de rotação para um tetraedro regular:

- (a) Um eixo que passa por cada um de seus vértices e o centro da face oposta;

(b) Um eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas.

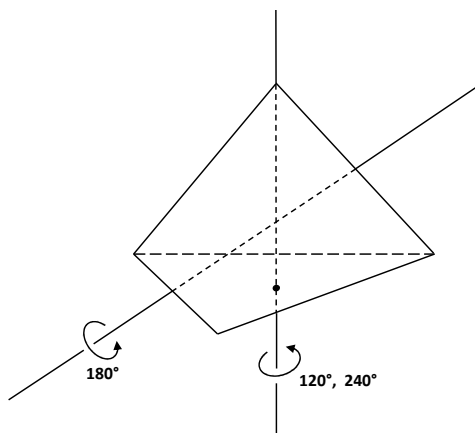


Figura 2.4: Eixos de simetria do tetraedro regular.

Assim, há 12 simetrias rotacionais de um tetraedro regular:

- (i) A identidade;
- (ii) 4 rotações de um ângulo de 120° pelo eixo indicado em (a);
- (iii) 4 rotações de um ângulo de 240° pelo eixo indicado em (a);
- (iv) 3 rotações de um ângulo de 180° pelo eixo indicado em (b).

2.2.5 Simetrias do Cubo

No cubo existem três tipos diferentes de eixos de rotação e o número das simetrias obtidas por essas rotações é dado pela contagem das rotações que existem em cada um desses tipos.

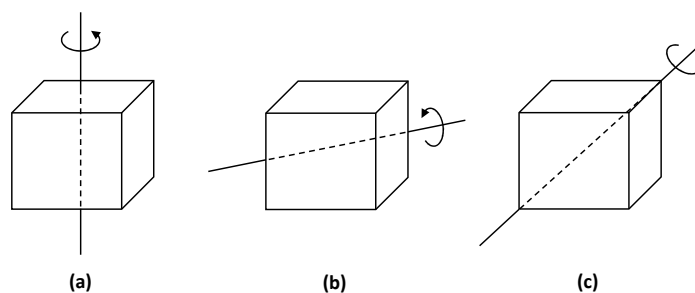


Figura 2.5: Eixos de simetria do cubo.

- (a) Rotação em torno de um eixo que passa pelos centros de faces opostas;
- (b) Rotação em torno de um eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas;
- (c) Rotação em torno de um eixo que passa pelos vértices opostos.

A seguir detalhamos as 24 simetrias do cubo obtidas por rotação:

- A identidade e ;
- 3 rotações de um ângulo de 90° pelo eixo indicado em (a);
- 3 rotações de um ângulo de 180° pelo eixo indicado em (a);
- 3 rotações de um ângulo de 270° pelo eixo indicado em (a);
- 6 rotações de um ângulo de 180° pelo eixo indicado em (b);
- 4 rotações de um ângulo de 120° pelo eixo indicado em (c);
- 4 rotações de um ângulo de 240° pelo eixo indicado em (c).

Proposição 2.3 *O conjunto de todas as simetrias de um conjunto F , com a operação de composição de simetrias, é um grupo.*

Demonstração:

Seja G o conjunto de todas as simetrias de um conjunto F . Queremos mostrar que o conjunto G , munido da operação de composição de simetrias, satisfaz os axiomas de grupo. Para isso, sejam f e g duas simetrias de G e $d(A, B)$ a distância entre os pontos A e B de F . Temos que $f \circ g$ é uma isometria, visto que

$$\begin{aligned} d(f(g(A)), d(f(g(B))) &= d(g(A), g(B)), & \text{pois } f \text{ é uma isometria.} \\ &= d(A, B), & \text{pois } g \text{ é uma isometria.} \end{aligned}$$

Ademais, do fato de f e g serem simetrias, segue que são sobrejetivas e, como $(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$, então $f \circ g$ é sobrejetiva. Portanto, $f \circ g$ é uma simetria e, conseqüentemente, $f \circ g \in G$, ou seja, o conjunto G é fechado por composição de simetrias.

- (i) A aplicação $id_F : F \rightarrow F$ é uma simetria, e portanto G possui um elemento identidade.
- (ii) Toda simetria (isometria) f é injetiva. De fato, se $A, B \in F$ e $f(A) = f(B)$, então $d(f(A), f(B)) = 0$, implicando que $d(A, B) = 0$ (pois f é uma isometria) e, assim, $A = B$. Do fato de toda simetria ser sobrejetiva, então f é bijetiva e, por conseguinte, f possui inversa f^{-1} .
Tome agora dois pontos $C, D \in F$. Como f é sobrejetiva, então $d(f^{-1}(C), f^{-1}(D)) = d(f(f^{-1}(C)), f(f^{-1}(D))) = d(C, D)$. Assim, f^{-1} é uma simetria e, portanto pertence a G .
- (iii) Como a composição de funções é associativa, então segue que a composição de simetrias é também associativa.

■

2.3 Grupos Diedrais

Considere um polígono regular P de n lados, cujos vértices enumeramos consecutivamente por $1, 2, 3, \dots, n$. Por conveniência, suponha que P tem o centro na origem do plano cartesiano e vértice 1 no eixo x , no sentido positivo, conforme os casos $n = 5$ e $n = 6$, os quais ilustramos abaixo.

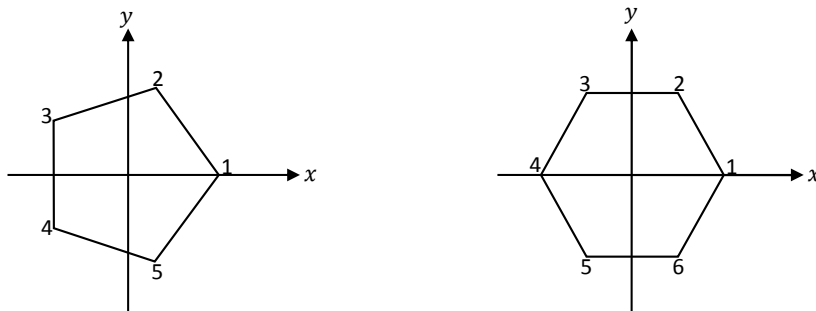


Figura 2.6: Ilustração de polígono regular com 5 lados e com 6 lados.

Observe que podemos rotacionar P em torno de seu centro de n maneiras diferentes até que P retorne a sua posição inicial. Doravante, sempre que nos referirmos a uma rotação de um polígono, ela será feita em torno de seu centro de gravidade e no

sentido anti-horário. Então, em torno do centro de P , existem n rotações de ângulos de $k \cdot (360^\circ)/n$, com $k = 0, 1, \dots, n-1$, que transformam o polígono nele mesmo. Repare que essas rotações podem ser identificadas com elementos distintos de S_n .

Indicando por e a rotação de 0° e por a a rotação de $(360^\circ)/n$, temos os seguintes elementos de S_n :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \quad e \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, usando a notação multiplicativa para representar a composição de rotações e a convenção $a^0 = e$, podemos ver que as potências de a produzem todas as rotações. De fato,

a^2 é a rotação de ângulo $2 \cdot (360^\circ)/n$,

a^3 é a rotação de ângulo $3 \cdot (360^\circ)/n$,

\vdots

a^{n-1} é a rotação de ângulo $(n-1) \cdot (360^\circ)/n$.

Note que $a^n = a^0 = e$ é a rotação de ângulo 0° (polígono em sua posição inicial) e que $a^{n+1} = a$, $a^{n+2} = a^2$, $a^{n+3} = a^3$, \dots , $a^{n+n} = e$, $a^{n+(n+1)} = a$, \dots nos indica que a rotação é cíclica. Formalizaremos esse conceito a seguir:

Definição 2.4 *Um grupo $(G, *)$ denomina-se grupo cíclico se existe algum elemento $a \in G$ tal que*

$$G = \langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

*O elemento $a \in G$ é um gerador do grupo cíclico $(G, *)$. Desse modo, qualquer elemento de $x \in G$ pode ser expresso na forma $x = a^m$, para algum inteiro m .*

Representando o conjunto das rotações de um polígono regular de n lados pelo conjunto $C_n = \{e = a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, pode-se mostrar que C_n , munido da operação de composição de funções, é um grupo cíclico. A esse grupo chamamos de **grupo das rotações de ordem n** .

No entanto, podemos observar que o conjunto C_n das rotações de P , no plano, não esgota todos os movimentos que aplicam P sobre si mesmo, já que uma reflexão (rotação espacial) conveniente de P também tem o mesmo efeito. Assim, a fim de descrever todas as simetrias de P , precisamos considerar também as reflexões. Seja $b \in S_n$ a reflexão

em relação ao eixo x . Como mostramos na figura seguinte, b inverte a orientação de P : vértices que foram numerados no sentido anti-horário a partir do vértice 1, são agora numerados no sentido horário.

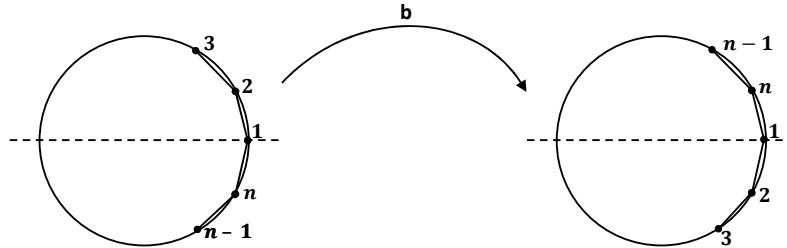


Figura 2.7: Reflexão em um polígono regular com n lados.

Representando a reflexão b na notação de duas linhas, temos

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

o que mostra que b não é uma rotação, pois nenhuma rotação mantém fixos apenas alguns pontos. Observe ainda que duas reflexões fazem o polígono P retornar a sua posição original. Portanto, $b^2 = e$. Acrescentando ao grupo das rotações C_n a reflexão b e também todas as composições $a^i b$, com $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, pode-se provar que o conjunto das simetrias de P é

$$D_n = \{e = a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b = a^0 b, ab, a^2 b, \dots, a^{n-1} b\} \subseteq S_n$$

onde

- (i) a^i , com $0 \leq i < n$, indica uma rotação no sentido anti-horário de $(360^\circ)/n$, que preserva a orientação dos vértices e move o vértice 1 para a posição originalmente ocupada pelo vértice $i + 1$.
- (ii) $a^i b$, com $0 \leq i < n$, indica uma reflexão em relação ao eixo considerado, que inverte a orientação dos vértices, seguida pela rotação no sentido anti-horário, que move o vértice 1 para a posição originalmente ocupada pelo vértice $i + 1$.

Logo, podemos escrever $D_n = C_n \cup T_n$, em que $T_n = \{b, ab, a^2 b, \dots, a^{n-1} b\}$ é o conjunto das reflexões.

Repare que as rotações a^i e a^j , com $0 \leq i \neq j < n$, movem o vértice 1 para posições distintas, e veja que, $a^i = a^j b$ é impossível, uma vez que a^i preserva a orientação dos vértices, enquanto que $a^j b$ a inverte. Assim, os $2n$ elementos listados em D_n são todos distintos e representam uma simetria do polígono P , isto é, um movimento que o leva sobre si mesmo. Uma prova de que D_n tem $2n$ elementos distintos é dada na demonstração da Proposição 2.4.

Observe que o conjunto D_n é constituído por n rotações, múltiplas de $360^\circ/n$, e n reflexões. Acerca das reflexões convém ressaltar que se n é par, então há $\frac{n}{2}$ reflexões pelas diagonais e $\frac{n}{2}$ reflexões pelas mediatrizes; e se n é ímpar, então existem n reflexões pelas mediatrizes (que passam pelos vértices).

A prova de que D_n é um grupo, com a operação de composição existente em S_n , é feita a seguir conforme exposto em [7], p. 106.

Com o objetivo de garantir o fechamento, devemos provar que a função

$$\begin{aligned} \circ : D_n \times D_n &\rightarrow D_n \\ (a^i b^u, a^j b^v) &\mapsto a^i b^u a^j b^v \end{aligned}$$

é uma operação em D_n , isto é, $a^i b^u a^j b^v \in D_n$.

Antes, porém, vamos enunciar um lema que será útil nas operações em D_n .

Lema 2.2 *Em D_n vale a igualdade $ba^r = a^{n-r}b$, $\forall r \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.*

Demonstração:

A prova será feita utilizando o Princípio de Indução sobre r .

Caso base: Para $r = 1$, temos:

$$\begin{aligned} ba &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para calcular $a^{n-1}b$ observe que $a^{n-1} = a^n a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$. Portanto, $a^{n-1} = a^{-1}$ corresponde à rotação de $\frac{360^\circ}{n}$ no sentido horário. Tendo em vista que

$$a^{n-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

então $ba = a^{n-1}b$.

Hipótese de indução: Suponha que $ba^k = a^{n-k}b$, para $k > 1$.

Tese: $ba^{k+1} = a^{n-(k+1)}b$.

De fato,

$$\begin{aligned} ba^{k+1} &= (ba^k)a \\ &= (a^{n-k}b)a && \text{(hipótese de indução)} \\ &= a^{n-k}(ba) \\ &= a^{n-k}(a^{n-1}b) && \text{(caso } r = 1) \\ &= (a^{n-k}a^{n-1})b \\ &= (a^n a^{n-(k+1)})b \\ &= ea^{n-(k+1)}b \\ &= a^{n-(k+1)}b \end{aligned}$$

Portanto, em D_n vale a igualdade $ba^r = a^{n-r}b$, $\forall r \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. ■

Lema 2.3 *A composição é uma operação em D_n .*

Demonstração

Devemos provar que se $a^i b^u, a^j b^v \in D_n$, então $a^i b^u a^j b^v \in D_n$, para $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ e $u, v \in \{0, 1\}$.

- 1° Caso: $u = 0$

$$a^i b^u a^j b^v = a^i e a^j b^v = a^{i+j} b^v \in D_n$$

pois $a^{i+j} \in \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

- 2° Caso: $u = 1$

$$a^i b^u a^j b^v = a^i (ba^j) b^v = a^i (a^{n-j} b) b^v = (a^i a^{n-j}) (bb^v) = a^{n+i-j} b^{v+1} \in D_n$$

pois $b^2 = e$ e, portanto, qualquer potência de b pode ser reduzida a e ou b . ■

Proposição 2.4 *$(D_n, *)$ é um grupo não abeliano com $2n$ elementos.*

Demonstração:

- Identidade

e (rotação trivial) é o elemento neutro em D_n .

- Inversos

Para provar que $a^i b^u \in D_n$ possui inverso em D_n , consideremos os dois casos a seguir:

(i) $u = 0$

Neste caso, $a^i b^u = a^i$, e seu inverso é $a^{n-i} \in D_n$.

(ii) $u=1$

Neste caso, $a^i b^u = a^i b$, cujo inverso é o próprio $a^i b \in D_n$, pois $a^i b a^i b = a^i (b a^i) b = a^i (a^{n-i} b) b = (a^i a^{n-i})(b b) = a^n b^2 = e e = e$

- Associatividade

Como $D_n \subseteq S_n$, a associatividade em D_n é uma consequência da associatividade em S_n .

- D_n é não abeliano

Basta notar que, pelo Lema 2.2, $ba = a^{n-1}b \neq ab$

- D_n tem $2n$ elementos

Para provar que a ordem de D_n é $2n$, basta mostrar que os elementos do conjunto $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$ são distintos dois a dois. Para tanto, sejam $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ e $u, v \in \{0, 1\}$ tais que $a^i b^u = a^j b^v$. Verifiquemos que $i = j$ e $u = v$:

Multiplicando à esquerda por $(a^j)^{-1}$ e à direita por $(b^u)^{-1}$ segue que

$a^i b^u = a^j b^v \Rightarrow (a^j)^{-1} a^i = b^v (b^u)^{-1} = b^{-u+v} \in \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, pois $(a^j)^{-1} a^i$ é uma rotação.

Se $u \neq v$, então $b^{-u+v} = b \notin \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, o que é um absurdo.

Logo, $u = v$ e a igualdade $a^i b^u = a^j b^v$ leva a $a^i = a^j$, e daí $i = j$.

Portanto, D_n tem $2n$ elementos.

Assim, concluímos que (D_n, \circ) é um grupo não abeliano de ordem $2n$. ■

Definição 2.5 O grupo (D_n, \circ) é chamado **grupo diedral** de ordem $2n$, ou grupo das simetrias de um polígono regular de n lados (Gallian, 2006; Hungerford, 1990; Janesch, 2008).

Exemplo 16 $D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ é o grupo das simetrias do triângulo equilátero de vértices 1, 2 e 3, onde $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$ é a rotação de 120° e $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23)$ é uma reflexão, conforme ilustrado na subseção 2.2.2.

Capítulo 3

Ação de Grupos e o Teorema de Contagem de Burnside

Neste capítulo tratamos mais especificamente dos conceitos destinados à aplicação final deste trabalho. Para isso, definimos e apresentamos os principais resultados relativos ao estudo de colorações e ação de grupos, órbitas, estabilizadores, conjuntos de pontos fixos e, por fim, o importante Teorema de Contagem de Burnside (Tavares, 2018; Santos e Bovo, 2004).

3.1 Colorações e ação de grupos

Nesta seção apresentaremos o conceito de coloração e de ação de um grupo em um conjunto. As definições e resultados inerentes a esses conceitos serão importantes na construção das ferramentas utilizadas para solucionar os problemas que pretendemos estudar.

Como problema introdutório, considere um quadrado dividido por suas diagonais em quatro triângulos isósceles retângulos, os quais queremos pintar com uma das duas cores: azul e verde.

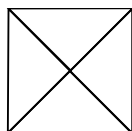


Figura 3.1: Ilustração do quadrado dividido pelas diagonais.

Como são quatro triângulos e cada um pode ser pintado de duas maneiras dife-

rentes (azul ou verde), então existem $2^4 = 16$ maneiras diferentes de colorir o quadrado, conforme mostra a Figura 3.2:

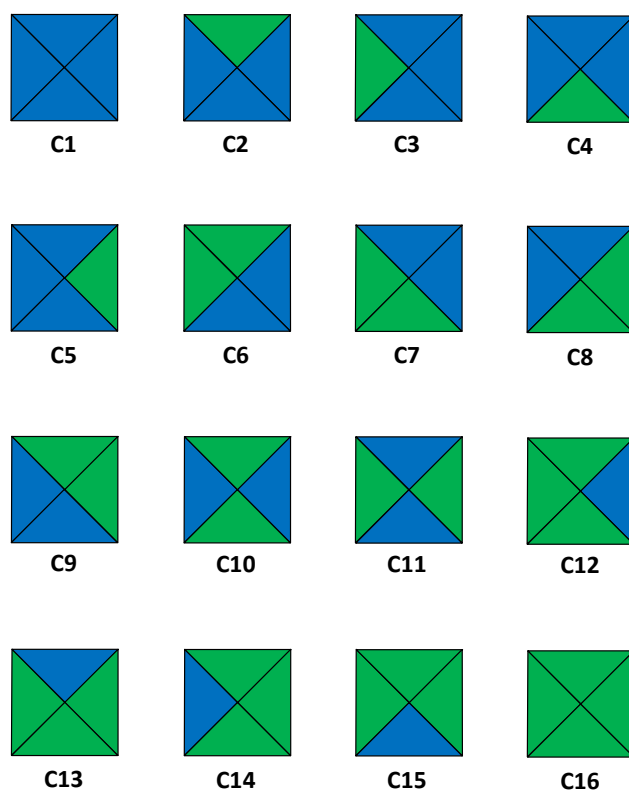


Figura 3.2: Colorações dos triângulos em um quadrado.

Entretanto, se duas colorações se distinguem apenas por uma simetria do quadrado (rotação ou reflexão), dizemos que essas colorações são equivalentes e que pertencem a um mesmo padrão. No caso ilustrado, vemos que C2 e C3, por exemplo, são colorações equivalentes, pois uma pode ser obtida da outra através de uma rotação de 90° , ou ainda, por uma reflexão através de uma das diagonais do quadrado. Desse modo, existem seis padrões distintos, os quais estão indicados nas colunas do quadro a seguir:

C1	C2, C3, C4, C5	C6, C7, C8, C9	C10, C11	C12, C13, C14, C15	C16
----	----------------	----------------	----------	--------------------	-----

Mais à frente relacionaremos às colorações equivalentes uma relação de equivalência, cujas classes de equivalência serão os padrões distintos de colorações. Agora daremos um tratamento mais formal a alguns conceitos, visando estabelecer as bases necessárias para termos condições de contar o número de padrões distintos em uma quantidade razoável de figuras, como, por exemplo, vértices ou lados de um polígono regular,

contas de um colar, casas de um tabuleiro $n \times n$, setores congruentes de um círculo, faces de um poliedro regular, etc.

Começamos dando à coloração de uma figura o conceito de função. Retomando o problema das pinturas, nas cores azul e verde, do quadrado dividido pelas diagonais, podemos considerar o conjunto das cores $C = \{azul, verde\}$ e o conjunto $D = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ dos triângulos, conforme a figura a seguir:

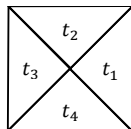


Figura 3.3: Representação dos triângulos determinados pelas diagonais do quadrado.

Assim, cada uma das 16 colorações é uma função $f_i : D \rightarrow C$, com $i \in \{1, 2, \dots, 16\}$. Por exemplo, em C11, temos $f_{11}(t_1) = verde = f_{11}(t_3)$ e $f_{11}(t_2) = azul = f_{11}(t_4)$. Formalmente, temos:

Definição 3.1 *Sejam C e D dois conjuntos não vazios e $X = F(D, C)$ o conjunto das funções com domínio D e contradomínio C . Chamamos de coloração cada uma das funções $f \in X$, ou ainda, $f : D \rightarrow C$.*

No caso de C e D serem finitos com $|C| = m$ e $|D| = n$, existem m^n colorações. De fato, pois, se $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ e $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, então d_1 tem, por f , m possíveis imagens distintas. O mesmo ocorre com cada um dos n elementos de D . Portanto, existem

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n \text{ fatores}} = m^n$$

possíveis imagens para uma função $f : D \rightarrow C$. Como cada imagem determina uma coloração (função), então há m^n colorações distintas, ou seja, $|X| = m^n$.

Assim, para melhor identificação, utilizamos a notação $f_i : D \rightarrow C$, com $i \in \{1, 2, \dots, m^n\}$, para indicar a aplicação que pinta os objetos de uma figura de modo a resultar na coloração Ci . Por exemplo, no caso do quadrado dividido pelas diagonais, cujos triângulos são pintados com as cores azul e verde, temos que f_{11} indica a aplicação f do conjunto D dos triângulos no conjunto C das cores que resulta na coloração C11.

A definição a seguir relaciona elementos de um grupo a elementos de um conjunto.

Definição 3.2 Seja G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma **ação de G em X** é uma função

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(A1) Para todo $x \in X$, $e_G \cdot x = x$, onde e_G é a identidade (ou elemento neutro) de G ;

(A2) Para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, temos $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Exemplo 17 Seja $G = D_4 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, d_1, d_2, m_1, m_2\}$ o grupo diedral das simetrias do quadrado, onde e representa a identidade (que mantém inalterada a figura); os elementos α , α^2 e α^3 indicam, respectivamente, as rotações de 90° , 180° e 270° ; d_1 e d_2 as reflexões pelas diagonais; e m_1 e m_2 as reflexões pelas mediatrizes. Seja ainda X o conjunto das colorações do quadrado dividido em triângulos pelas diagonais, pintados nas cores azul e verde. Então dizemos que G atua no conjunto X das colorações para significar que cada elemento g do grupo transforma uma coloração f_i numa outra coloração $g \cdot f_i$. Desse modo, temos, por exemplo:

$$\alpha \cdot f_8 = f_9$$

Ou seja, a ação de $g = \alpha$ na coloração f_8 resulta na coloração $\alpha f_8 = f_9$:

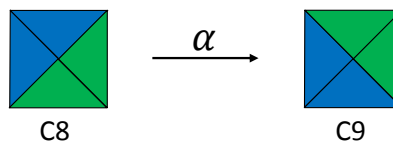


Figura 3.4: Ilustração de α na coloração f_8 .

Analogamente, a ação de $g = \alpha^3$ em f_{12} resulta em f_{15} :

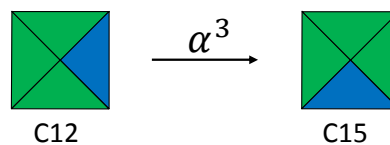


Figura 3.5: Ilustração de α^3 na coloração f_{12} .

Lema 3.1 *Seja G um grupo que age no conjunto X . Então para todo $g \in G$, $x, y \in X$, temos*

$$g \cdot x = y \Leftrightarrow g^{-1} \cdot y = x$$

Demonstração:

(\Leftarrow) Sejam $g \in G$, $x, y \in X$ e suponha que $g \cdot x = y$. Aplicando g^{-1} à esquerda da hipótese $y = g \cdot x$ temos $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x)$. Mas da definição de ação de grupos, em A2, temos $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x$, ou seja, $g^{-1} \cdot y = (g^{-1}g) \cdot x$. Como g é elemento de um grupo, segue que $(g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x$, ou ainda, $g^{-1} \cdot y = x$.

(\Rightarrow) Sejam $g \in G$, $x, y \in X$ e suponha que $g^{-1} \cdot y = x$. Então, da hipótese, $g \cdot x = g \cdot (g^{-1} \cdot y)$, mas novamente por A2, temos $g \cdot x = (gg^{-1}) \cdot y$, ou seja, $g \cdot x = e \cdot y$, implicando que $g \cdot x = y$. ■

Exemplo 18 *No grupo diedral $D_4 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, d_1, d_2, m_1, m_2\}$ das simetrias do quadrado, para obtermos a coloração f_8 a partir de f_9 devemos aplicar, por exemplo, α^3 (rotação de 270°), que é a inversa de α (rotação de 90°). Na notação do Lema 3.1 temos $g = \alpha$, $g^{-1} = \alpha^3$, $x = f_8$ e $y = f_9$. Assim,*

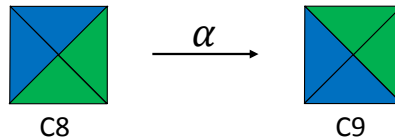


Figura 3.6: Ilustração de α na coloração f_8 .

se, e somente se,

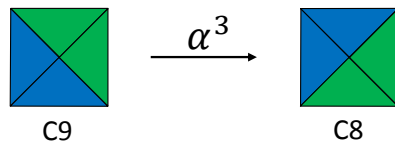


Figura 3.7: Ilustração de α^3 na coloração f_9 .

Proposição 3.1 *Sejam C e D conjuntos não vazios distintos, $X = F(D, C)$ o conjunto das colorações de D em C e $S(D)$ o grupo das permutações dos elementos de D . Considere G um subgrupo de $S(D)$, então uma ação de G no conjunto das colorações X tal que*

$$\alpha \cdot f = f \circ \alpha^{-1}, \quad \forall \alpha \in G, \forall f \in X$$

define uma ação de grupo.

Demonstração:

O elemento neutro e de G é a aplicação identidade $e : D \rightarrow D$. Desse modo, $\forall f \in X$, temos

$$e \cdot f = f \circ e^{-1} = f \circ e = f$$

cumprindo-se a condição (A1) da definição de ação de grupo.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in G$ e $f \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha_2(\alpha_1 \cdot f) &= \alpha_2 \cdot (f \circ \alpha_1^{-1}) \\ &= (f \circ \alpha_1^{-1}) \circ \alpha_2^{-1} \\ &= f \circ (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2^{-1}) \\ &= f \circ (\alpha_2 \circ \alpha_1)^{-1} \\ &= (\alpha_2 \circ \alpha_1) \cdot f \end{aligned}$$

verificando-se a condição (A2) da definição de ação de grupo, o que conclui a demonstração. ■

3.2 Órbitas

3.2.1 Relações de equivalência por ação de grupos

Definição 3.3 *Seja G um grupo agindo em um conjunto X . Definimos uma relação \sim_G em X da seguinte forma:*

Para todo $x, y \in X$,

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G \quad \text{tal que } g \cdot x = y$$

Ou seja, um elemento $x \in X$ está relacionado com um elemento $y \in X$, se e somente se, existe um elemento g em G que transforma x em y .

Lema 3.2 *A relação \sim_G no conjunto X é uma relação de equivalência.*

Demonstração:

Verificaremos as três propriedades que definem uma relação de equivalência. Sejam $x, y, z \in X$.

(i) Reflexiva:

Seja e a identidade de G . Então $e \cdot x = x, \forall x \in X$. Logo, $x \sim_G x$.

(ii) Simétrica:

Suponha que $x \sim_G y$. Então existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Pelo Lema 3.1, $g^{-1}y = x$, com $g^{-1} \in G$. Logo, $y \sim_G x$.

(iii) Transitiva:

Suponha que $x \sim_G y$ e $y \sim_G z$. Então existem $g, h \in G$ tais que $g \cdot x = y$ e $h \cdot y = z$. Como G é grupo, temos $hg \in G$ e usando a condição (A2) da Definição 3.2, obtemos $(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = z$. Logo, $x \sim_G z$.

Portanto, a relação \sim_G em X é uma relação de equivalência. ■

Definição 3.4 *As classes de equivalência da relação \sim_G são chamadas de **órbitas da ação do grupo**. Denotamos por O_x a órbita à qual o elemento x pertence. Assim,*

$$O_x = O_y \Leftrightarrow x \sim_G y$$

e como $x \sim_G y \Leftrightarrow y = g \cdot x$ para algum $g \in G$, segue que

$$O_x = \{g \cdot x : g \in G\} = Gx \subseteq X$$

Como as classes de equivalências são as órbitas dos elementos de X , então, pela Proposição 1.2, órbitas distintas definem uma partição de X . Note que as órbitas de G são os padrões de colorações a que nos referimos na seção anterior, pois se X é o conjunto das colorações, então para cada $x \in X$ temos que em O_x encontram-se as colorações equivalentes pela ação de um grupo de simetrias G .

Denotaremos por X/G o conjunto formado por todas as órbitas distintas (ou padrões distintos) dos elementos de X . Desse modo $|X/G| = \#(X/G)$ designa o número de elementos de X/G .

Exemplo 19 *Sejam $G = D_4$ o grupo das simetrias do quadrado e X o conjunto das colorações do quadrado dividido pelas diagonais, cujos triângulos são pintados nas cores azul e verde. Então,*

(i) Se $x = f_2$, temos

$$\text{Órbita de } \left(\begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} \right) = G \left(\begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|} \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \color{green}{\square} \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|} \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \color{green}{\square} \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} \right\}$$

Figura 3.8: Ilustração da órbita de $x = f_2$.

(ii) Se $x = f_{10}$, temos

$$\text{Órbita de } \left(\begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} \right) = G \left(\begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \color{green}{\square} \\ \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|} \hline \color{blue}{\square} \\ \hline \color{green}{\square} \\ \hline \end{array} \right\}$$

Figura 3.9: Ilustração da órbita de $x = f_{10}$.

No exemplo acima exibimos apenas duas órbitas de X , mas sabemos que órbitas distintas equivalem a padrões distintos, e na seção 3.1 vimos que existem 6 padrões distintos, então podemos dizer que o número de órbitas distintas de X pela ação de G é $|X/G| = 6$. Portanto, se quisermos determinar o número de padrões distintos basta calcularmos quantas órbitas distintas existem.

3.3 Estabilizadores

Para introduzir o conceito de estabilizador, notemos que uma rotação de 180° na coloração f_{10} resulta no próprio f_{10} :

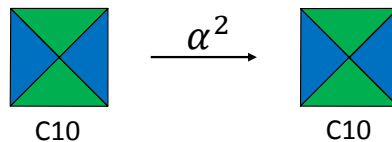


Figura 3.10: Ilustração de α^2 na coloração f_{10} .

Portanto, além da identidade e_G de um grupo G agindo em X , existem outros elementos de G que fixam elementos de X .

Definição 3.5 Considere a ação de um grupo G sobre um conjunto X . Dado $x \in X$, o estabilizador de x , denotado por S_x , é o conjunto dos elementos de G que na ação de grupo fixam x . Em símbolos:

$$S_x = \{g \in G; g \cdot x = x\} \subseteq G$$

O resultado a seguir mostra que se $x \in X$, então o estabilizador S_x é um subgrupo de G .

Lema 3.3 *Se G é um grupo agindo em um conjunto X , então para todo $x \in X$, temos que S_x é um subgrupo de G .*

Demonstração:

Verificaremos as condições de subgrupo para S_x .

(i) Fechamento:

Dados $g, h \in S_x$, temos $g \cdot x = x$ e $h \cdot x = x$. Pelo axioma (A2) obtemos

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x.$$

e assim $gh \in S_x$, o que mostra que S_x é fechado.

(ii) Identidade:

Pelo axioma (A1), $e_G \cdot x = x$. Logo, S_x contém a identidade de G .

(iii) Inverso:

Se $g \in S_x$, então $g \cdot x = x$. Pelo Lema 3.1, $g^{-1} \cdot x = x$. Isto significa que $g^{-1} \in S_x$.

Portanto, S_x é um subgrupo de G . ■

Na tabela 3.1 apresentamos os estabilizadores e as órbitas das colorações dos quadrado dividido pelas diagonais.

Tabela 3.1: Estabilizadores e órbitas das colorações do quadrado dividido pelas diagonais.

Elemento de X	Estabilizador	Órbita
$C1$	$\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, d_1, d_2, m_1, m_2\}$	$\{C1\}$
$C2$	$\{e, m_2\}$	$\{C2, C3, C4, C5\}$
$C3$	$\{e, m_1\}$	
$C4$	$\{e, m_2\}$	
$C5$	$\{e, m_1\}$	
$C6$	$\{e, d_1\}$	$\{C6, C7, C8, C9\}$
$C7$	$\{e, d_2\}$	
$C8$	$\{e, d_1\}$	
$C9$	$\{e, d_2\}$	
$C10$	$\{e, \alpha^2, m_1, m_2\}$	$\{C10, C11\}$
$C11$	$\{e, \alpha^2, m_1, m_2\}$	
$C12$	$\{e, m_1\}$	$\{C12, C13, C14, C15\}$
$C13$	$\{e, m_2\}$	
$C14$	$\{e, m_1\}$	
$C15$	$\{e, m_2\}$	
$C16$	$\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, d_1, d_2, m_1, m_2\}$	$\{C16\}$

Observando a tabela 3.1, é possível notar que quanto maior a quantidade de estabilizadores, menor a órbita, e vice-versa. Além disso, em cada linha tem-se

$$|O_x| \cdot |S_x| = 8 = |G|$$

A proposição que se segue estabelece esse resultado, mostrando que isso não é uma mera coincidência.

Proposição 3.2 (Teorema Órbita-Estabilizador) *Seja G um grupo finito que age em um conjunto X . Então, para cada elemento $x \in X$,*

$$|O_x| \cdot |S_x| = |G|$$

Demonstração:

Pelo Lema 3.3, temos que S_x é um subgrupo de G , implicando, pelo Teorema de Lagrange, que

$$[G : S_x] \cdot |S_x| = |G|$$

Portanto, precisamos mostrar que

$$|O_x| = [G : S_x]. \tag{3.1}$$

Como os elementos de O_x são da forma $g \cdot x$ e as classes laterais de S_x são da forma gS_x , podemos demonstrar a equação 3.1 estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os elementos de O_x e as classes laterais de S_x , de modo que $\forall g_1, g_2 \in G$,

$$g_1 S_x = g_2 S_x \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$$

Portanto, consideremos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{G}{S_x} &\rightarrow O_x \\ gS_x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Sejam $g_1, g_2 \in G$,

(i) Ψ está bem definida:

$$\begin{aligned} g_1 S_x = g_2 S_x &\Rightarrow g_2^{-1} g_1 \in S_x, && \text{pelo Lema 1.1} \\ &\Rightarrow (g_2^{-1} g_1) \cdot x = x, && \text{pela definição de } S_x \\ &\Rightarrow g_2^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) = x, && \text{por (A2)} \\ &\Rightarrow g_1 \cdot x = g_2 \cdot x, && \text{pelo Lema 3.1} \\ &\Rightarrow \Psi(g_1 S_x) = \Psi(g_2 S_x), && \text{pela definição } \Psi \end{aligned}$$

(ii) Ψ é injetora:

$$\begin{aligned} \Psi(g_1 S_x) = \Psi(g_2 S_x) &\Rightarrow g_1 \cdot x = g_2 \cdot x, && \text{pela definição de } \Psi \\ &\Rightarrow g_2^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) = x, && \text{pelo Lema 3.1} \\ &\Rightarrow (g_2^{-1} g_1) \cdot x = x, && \text{por (A2)} \\ &\Rightarrow g_2^{-1} g_1 \in S_x, && \text{pela definição de } S_x \\ &\Rightarrow g_1 S_x = g_2 S_x, && \text{pelo Lema 1.1} \end{aligned}$$

(iii) Ψ é sobrejetora:

$$\forall y \in O_x, \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x = \Psi(gS_x).$$

Portanto, a função Ψ é bijetiva, o que nos leva a concluir que a órbita de x e o conjunto quociente $\frac{G}{S_x}$ têm a mesma cardinalidade, isto é, $[G : S_x] = \left| \frac{G}{S_x} \right| = \frac{|G|}{|S_x|}$. Em outras palavras, temos que $|O_x| = \frac{|G|}{|S_x|}$, ou equivalentemente, $|O_x| \cdot |S_x| = |G|$. ■

Corolário 3.1 *Seja G um grupo finito que age em um conjunto finito X . Então o número de elementos de X em cada órbita é um divisor da ordem de G .*

Demonstração:

A demonstração decorre imediatamente da equação multiplicativa do Teorema Órbita-Estabilizador. ■

Corolário 3.2 *Seja G um grupo finito que age em um conjunto finito X . Sejam $x_1, x_2 \in X$, dois elementos na mesma órbita, então $|S_{x_1}| = |S_{x_2}|$.*

Demonstração:

Como $x_1, x_2 \in X$ pertencem à mesma órbita, então $|O_{x_1}| = |O_{x_2}|$ e pelo Teorema Órbita-Estabilizador segue que

$$|O_{x_1}| |S_{x_1}| = |G| = |O_{x_2}| |S_{x_2}| \Rightarrow |S_{x_1}| = |S_{x_2}|$$

■

Proposição 3.3 *Seja G um grupo finito agindo em um conjunto finito X . Então o número de órbitas distintas é*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x|$$

Demonstração:

Suponha que existam k órbitas distintas, isto é, $|X/G| = \{O_{x_1}, \dots, O_{x_k}\}$. Então, a aplicação do Teorema Órbita-Estabilizador à O_{x_i} , com $i \in \{1, \dots, k\}$, nos dá

$$\begin{aligned} \sum_{x \in O_{x_i}} |S_x| &= \sum_{x \in O_{x_i}} \frac{|G|}{|O_x|} \\ &= |G| \sum_{x \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_x|} \\ &= |G| \sum_{x \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_{x_i}|}, \quad \text{pois } O_x = O_{x_i}, \forall x \in O_{x_i} \\ &= \frac{|G|}{|O_{x_i}|} \sum_{x \in O_{x_i}} 1 \\ &= \frac{|G|}{|O_{x_i}|} |O_{x_i}| \end{aligned}$$

$$= |G|$$

Assim, somando para todas as órbitas obtemos,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} |S_x| &= \sum_{i=1}^k \sum_{x \in O_{x_i}} |S_x| \\ &= \sum_{i=1}^k |G| \\ &= |X/G| |G| \end{aligned}$$

Logo,

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x| \quad \blacksquare$$

Entretanto, a fórmula acima é pouco eficiente na resolução de problemas cuja cardinalidade de X seja grande, pois o cálculo do número total de estabilizadores requer a listagem de todos os elementos de X , o que se tornaria impraticável.

O Teorema Contagem de Burnside, que veremos a seguir, resolve essa dificuldade à medida que percorre os elementos G , descartando a necessidade da soma em X .

3.4 Teorema de Contagem de Burnside

Definição 3.6 *Seja G um grupo finito agindo em X . Dado um elemento $g \in G$, definimos o conjunto dos pontos fixos de g , denotado por Fix_g , como*

$$Fix_g = \{x \in X; g \cdot x = x\} \subseteq X$$

Desse modo, Fix_g é o conjunto formado por todos os elementos de X que se mantêm invariantes após a ação de $g \in G$.

Por exemplo, no caso do quadrado dividido em triângulos pelas diagonais, pintados com as cores azul e verde, temos que:

$$Fix_{\alpha^2} = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{[Green Square]} & \text{[Blue Square]} & \text{[Green Square]} & \text{[Blue Square]} \end{array} \right\}$$

Figura 3.11: Conjunto dos pontos fixos de $\alpha^2 \in D_4$.

Lema 3.4 *Se G é um grupo finito agindo em X , então*

$$\sum_{g \in G} | \text{Fix}_g | = \sum_{x \in X} | S_x |$$

Demonstração:

Considere o conjunto $A = \{(x, g) \in X \times G : g \cdot x = x\}$.

A contagem dos elementos de A pode ser feita das duas formas seguintes:

- Fixando a primeira coordenada e variando a segunda.

Neste caso, para cada $x \in X$ fixo, o número de elementos $g \in G$ que fixam x é a cardinalidade do conjunto $S_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$, ou seja,

$$| A | = \sum_{x \in X} | S_x |$$

- Fixando a segunda coordenada e variando a primeira.

Neste caso, para cada $g \in G$ fixo, o número de elementos $x \in X$ que mantidos fixos por g é a cardinalidade do conjunto $\text{Fix}_g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$, ou seja,

$$| A | = \sum_{g \in G} | \text{Fix}_g |$$

Portanto, $\sum_{g \in G} | \text{Fix}_g | = \sum_{x \in X} | S_x |$.

■

Proposição 3.4 (Teorema de Contagem de Burnside - TCB) *Seja G um grupo agindo em um conjunto X , ambos finitos, então o número de órbitas distintas $| X/G |$ é dada por*

$$| X/G | = \frac{1}{| G |} \sum_{g \in G} \text{Fix}(g)$$

Demonstração: O resultado segue de forma imediata ao considerar a Proposição 3.3 e Lema 3.4. ■

Aplicação no problema do quadrado dividido pelas diagonais

Retornemos ao problema de calcular o número de órbitas distintas do quadrado dividido em triângulos pelas diagonais, pintados nas cores azul e verde. Mas agora usando o conceito de pontos fixos para aplicar o TCB.

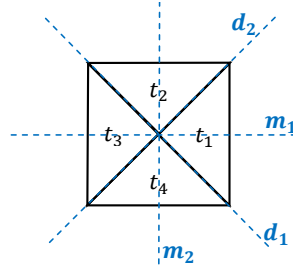


Figura 3.12: Representação das simetrias do quadrado dividido pelas diagonais.

Para facilitar nossa escrita, os triângulos da figura acima, t_1, t_2, t_3 e t_4 , serão agora denominados 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Assim sendo, temos o conjunto de cores $C = \{azul, verde\}$ e o conjunto dos triângulos $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Se X é o conjunto das colorações $f : D \rightarrow C$, então $|X| = 2^4 = 16$. Neste problema, consideramos duas pinturas idênticas quando uma puder ser obtida da outra por alguma simetria do quadrado. Portanto, o grupo G que irá atuar sobre X é o grupo diedral $D_4 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, d_1, d_2, m_1, m_2\}$. Um elemento $g \in G$ fixa uma coloração de X quando os triângulos representados em um mesmo ciclo de g apresentam a mesma cor. A quantidade de colorações fixadas em X para cada simetria do quadrado é apresentada na tabela a seguir:

Tabela 3.2: Valores de $|Fix_g|$ para cada $g \in D_4$.

Elemento g	Decomposição em ciclos	$ Fix_g $
e	(1)(2)(3)(4)	2^4
α	(1234)	2^1
α^2	(13)(24)	2^2
α^3	(1432)	2^1
d_1	(14)(23)	2^2
d_2	(12)(34)	2^2
m_1	(1)(24)(3)	2^3
m_2	(13)(2)(4)	2^3

Para exemplificar como é obtida a quantidade de colorações fixadas em X por um elemento de D_4 , considere a rotação de 180° representada por $\alpha^2 = (13)(24)$, que leva os

triângulos 1 a 3, 2 a 4 e vice-versa. Assim, qualquer atribuição de cor que fique invariante por α^2 tem que ser tal que os triângulos 1 e 3 devem ter a mesma cor e os triângulos 2 e 4 também devem ter a mesma cor, mas não necessariamente a mesma de 1 e 3. Logo, o número de cores invariantes por α^2 é $| \text{Fix}_{\alpha^2} | = 2^2 = 4$, onde o 2 da base se refere ao número de cores (apenas duas neste caso, azul e verde) e o expoente 2 ao número de ciclos de α^2 .

Portanto, pelo Teorema de Contagem de Burnside, o número de formas distintas de se pintar os triângulos do quadrado dividido pelas diagonais, usando apenas duas cores (azul e verde), é igual a:

$$| X/G | = \frac{1}{8} (2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1) = \frac{1}{8} (16 + 16 + 12 + 4) = \frac{48}{8} = 6.$$

O que era de se esperar, pois já havíamos obtido esse valor anteriormente por observação.

Capítulo 4

Aplicações do Teorema de Contagem de Burnside

Neste capítulo apresentamos alguns problemas de contagem que podem ser resolvidos à luz do Teorema de Contagem de Burnside, bem como da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores.

4.1 Problema da pintura das faces do cubo

Problema 1 *De quantas maneiras distintas podemos pintar as faces de um cubo, se temos m cores disponíveis e cada face do cubo pode receber uma única cor? Calcule o número de pinturas utilizando as cores cinza, marrom e verde (Santos e Bovo, 2004).*

Solução

Neste problema, a quantidade de colorações existentes em X é dado por m^6 , pois um cubo possui 6 faces. Pinturas que podem ser obtidas através de uma simetria de rotação do cubo devem ser consideradas iguais. Como visto na subseção 2.2.5, o cubo possui 24 simetrias, obtidas por rotações. Um elemento $g \in G$ fixa uma coloração de X quando as faces representadas em um mesmo ciclo de g apresentam a mesma cor. Vejamos agora a quantidade de colorações fixadas em X , para cada simetria do cubo:

- a identidade e , que é composta de seis ciclos de comprimento 1, fixa todos os elementos de X . Portanto, $|Fix_e| = m^6$

- as três simetrias de rotação de 90° pelo eixo indicado em (a), sendo cada uma composta por um ciclo de comprimento 4 e dois ciclos de comprimento 1 (quatro faces de mesma cor e as outras duas faces de cores arbitrárias). A contribuição destas 3 rotações é de $3m^3$.
- as três simetrias de rotação de 180° pelo eixo indicado em (a), sendo cada uma composta por dois ciclos de comprimento 2 e dois ciclos de comprimento 1 (dois pares de faces opostas da mesma cor e as outras duas faces de cores arbitrárias). A contribuição destas três rotações é de $3m^4$.
- as três simetrias de rotação de 270° pelo eixo indicado em (a), sendo cada uma equivalente a uma rotação de -90° pelo mesmo eixo. Por simetria, elas possuem a mesma contribuição, isto é, $3m^3$.
- as seis simetrias de rotação de 180° pelo eixo indicado em (b), sendo cada uma composta por três ciclos de comprimento 2 (as duas faces adjacentes a uma aresta possuem cores iguais e as duas faces adjacentes à aresta oposta à considerada anteriormente devem também ser de cores iguais, mas não necessariamente da mesma cor das duas primeiras, e as outras duas faces opostas do cubo também devem ter a mesma cor, mas não necessariamente a mesma dos dois pares de faces referidas anteriormente). A contribuição destas seis rotações é de $6m^3$.
- as quatro simetrias de rotação de 120° pelo eixo indicado em (c), sendo cada uma composta por dois ciclos de comprimento 3 (três faces incidentes em um dos vértices do eixo de rotação são da mesma cor e as outras três faces incidentes no outro vértice do eixo de rotação são também de mesma cor). A contribuição destas quatro rotações é de $4m^2$.
- as quatro simetrias de rotação de 240° pelo eixo indicado em (c), sendo cada uma equivalente a uma rotação de -120° pelo mesmo eixo. Por simetria elas possuem a mesma contribuição, isto é, $4m^2$.

Portanto, pelo Teorema de Contagem de Burnside, o número de maneiras distintas de pintarmos as faces do cubo dispondo de m cores é

$$|X/G| = \frac{1}{24} (m^6 + 3m^3 + 3m^4 + 3m^3 + 6m^3 + 4m^2 + 4m^2) = \frac{1}{24} (m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2)$$

Em particular, para sabermos o número de pinturas existentes dispondo apenas das cores cinza, marrom e verde, substituímos $m = 3$ na última expressão, o que nos dá $|X/G| = 57$ pinturas distintas.

4.2 Problema das moléculas orgânicas

Problema 2 *Quantas moléculas orgânicas diferentes da forma (ver figura 4.1)*

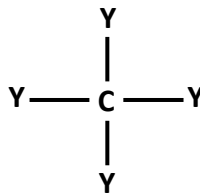


Figura 4.1: Ilustração da molécula

existem, sendo que C representa um átomo de carbono e cada Y representa um dos quatro componentes: hidrogênio ($-H$), metil ($-CH_3$), etil ($-C_2H_5$) ou cloro ($-Cl$)? Dica: Cada molécula dessa forma pode ser modelada por um tetraedro regular, com o carbono no centro da pirâmide e os componentes Y nos vértices (Santos e Bovo, 2004).

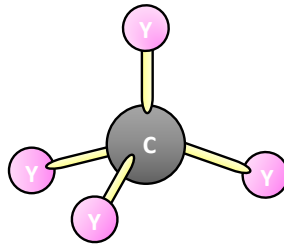


Figura 4.2: Ilustração tetraédrica da molécula orgânica.

Solução

Podemos associar cada componente Y a uma cor, de modo que, considerando os quatro vértices do tetraedro regular, há $4^4 = 256$ colorações diferentes no conjunto X. Vimos na subseção 2.2.4 que um tetraedro regular possui 12 simetrias, obtidas por rotações. Logo o grupo G que irá atuar sobre X será:

$$G = \{(1)(2)(3)(4), (1)(234), (1)(243), (2)(134), (2)(143), (3)(124), \\ (3)(142), (4)(123), (4)(132), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Vejam agora a quantidade de colorações fixadas em X , para cada simetria do tetraedro regular:

- a identidade, que é composta de quatro ciclos de comprimento 1, fixa todas as 256 colorações de X .
- as quatro simetrias de rotação de 120° pelo eixo indicado em (a), sendo cada uma composta por um ciclo de comprimento 1 e um ciclo de comprimento 3 (três vértices de mesma cor e o vértice por onde passa o eixo de rotação de cor arbitrária). Assim, temos $4 \cdot (4 \cdot 4) = 64$ colorações fixadas.
- as quatro simetrias de rotação de 240° pelo eixo indicado em (a), sendo cada uma equivalente a uma rotação de -120° pelo mesmo eixo. Por simetria elas possuem a mesma contribuição, isto é, 64 colorações fixadas.
- as três simetrias de rotação de 180° pelo eixo indicado em (b), sendo cada uma composta por dois ciclos de comprimento 2 (o componente dos dois vértices de uma das arestas e o componente dos outros dois vértices, que são as extremidades da outra aresta). Assim, temos $3 \cdot (4 \cdot 4) = 48$ colorações fixadas.

Portanto, pelo Teorema de Contagem de Burnside, o número de moléculas orgânicas distintas respeitando as condições do problema é igual a

$$|X/G| = \frac{1}{12} (256 + 48 + 128) = \frac{1}{12} (432) = 36$$

4.3 Problema dos guardanapos

Problema 3 *Uma mesa retangular com seis lugares acomoda seis pessoas, duas ao longo de cada lado mais longo e uma de cada lado mais curto. Um guardanapo colorido, com uma de m cores dadas, é colocado para cada pessoa. Encontre o número de padrões distintos entre todas as atribuições possíveis de cores (Nagpaul e Jain, 2005).*

Solução

Vamos numerar os guardanapos conforme figura a seguir:

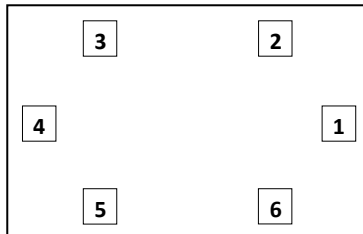


Figura 4.3: Ilustração da mesa com os seis guardanapos numerados.

Seja X o conjunto de colorações dos seis guardanapos. Então, neste caso, o número total de colorações presentes em X é m^6 . Entendemos por uma igualdade entre duas atribuições de cores dos seis guardanapos se uma puder ser obtida da outra por alguma simetria (rotação ou reflexão) do retângulo mostrado acima.

Sabemos da subseção 2.2.1 que um retângulo possui 4 simetrias: a identidade, uma rotação de 180° e duas reflexões em torno das retas que contêm o centro do retângulo e são paralelas aos lados. Assim, o grupo G que irá agir sobre X será

$$G = \{(1)(2)(3)(4)(5)(6), (14)(25)(36), (1)(4)(26)(35), (14)(23)(56)\}$$

Podemos também escrever G na forma $G = \{e, a, b, ab\}$, onde e indica a identidade, a indica uma rotação de 180° e b indica uma reflexão. Observe que:

- A rotação trivial $e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ é a identidade de G . Como e mantém todos os seis guardanapos em sua posição original, então podemos atribuir cores arbitrárias a cada um deles. Assim, o número de colorações invariantes por e é $| \text{Fix}_{(1)(2)(3)(4)(5)(6)} | = m^6$.
- A rotação de 180° representada pela permutação $a = (14)(25)(36)$ leva os guardanapos 1 a 4, 2 a 5, 3 a 6 e vice-versa. Desse modo, qualquer atribuição de cor que fique invariante por a , obriga os guardanapos dentro de um mesmo ciclo da permutação a a terem a mesma cor, isto é, os guardanapos 1 e 4 devem ter a mesma cor, 2 e 5 devem ter a mesma cor, e 3 e 6 devem ter a mesma cor. Assim sendo, podemos atribuir arbitrariamente uma das m cores aos guardanapos 1, 2 e 3. Portanto, o número de colorações invariantes por a é $| \text{Fix}_{(14)(25)(36)} | = m^3$.

- A reflexão $b = (1)(4)(26)(35)$ na horizontal mantém os guardanapos 1 e 4 fixos, leva 2 a 6, 3 a 5, e vice-versa. Logo, uma atribuição de cor é invariante sob a reflexão b se os guardanapos 2 e 6 tiverem a mesma cor, e 3 e 5 também tiverem cores iguais. Dessa forma, pela simetria b é possível atribuir cores arbitrárias aos guardanapos 1, 4, 2 e 3. Portanto, o número de colorações invariantes por b é $| \text{Fix}_{(1)(4)(26)(35)} | = m^4$.
- A reflexão $ab = (14)(23)(56)$ na vertical leva os guardanapos 1 a 4, 2 a 3, 5 a 6 e vice-versa. Se uma atribuição de cor for invariante sob a reflexão ab , então os guardanapos 1 e 4 devem ter a mesma cor, 2 e 3 devem ter a mesma cor, e 5 e 6 devem ter a mesma cor. Assim, podemos atribuir cores arbitrárias aos guardanapos 1, 2 e 5. Portanto, o número de colorações invariantes por ab é $| \text{Fix}_{(14)(23)(56)} | = m^3$.

Destarte, pelo Teorema de Contagem de Burnside temos então que o número de padrões distintos de guardanapos atendendo as condições do problema é:

$$| X/G | = \frac{1}{4} (m^6 + m^4 + 2m^3)$$

Em particular, no caso de 2 cores, basta substituir $m = 2$ no polinômio acima para obter $| X/G | = 24$.

4.4 Problemas de tabuleiros

Problema 4 *De quantas maneiras distintas é possível pintar as casas de um tabuleiro $1 \times n$, sendo que cada casa pode ter uma de m cores? (Nagpaul e Jain, 2005)*

Solução

Considere a figura abaixo, representando um tabuleiro $1 \times n$, cujas casas estão numeradas ordenadamente de 1 a n :

1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
---	---	---	-----	-------	-------	-----

Figura 4.4: Ilustração do tabuleiro $1 \times n$ com casas numeradas.

Seja X o conjunto de colorações das n casas do tabuleiro $1 \times n$. Considerando as m cores possíveis, o número total de colorações presentes em X é m^n . O grupo de

simetrias de um retângulo é $G = \{e, a, b, ab\}$. Porém, neste problema em particular, nota-se que a reflexão em torno da reta horizontal, e que divide o tabuleiro ao meio, não altera as colorações. Portanto, o grupo que nos interessa se reduz a $G = \{e, a\}$ em que a indica uma rotação de ângulo de 180° ou, equivalentemente, uma reflexão em torno da reta vertical que passa pelo centro do tabuleiro. Deste modo, há igualdade entre duas colorações se uma puder ser obtida da outra por uma rotação do retângulo.

Como a identidade e fixa todas as colorações das n casas do tabuleiro em questão, então $|Fix_e| = m^n$.

Para que uma atribuição de cor seja invariante sob a rotação a , então as casas 1 e n devem ter a mesma cor, as casas 2 e $n - 1$ devem ter a mesma cor, e quaisquer duas casas equidistantes dos extremos do tabuleiro devem ter cores iguais, ou seja, as casas i e $n + 1 - i$ devem ter a mesma cor. Desse modo,

- Se n é par, podemos atribuir qualquer uma das m cores às casas $1, \dots, n/2$, resultando $|Fix_a| = (m)^{\frac{n}{2}}$.
- Se n for ímpar, podemos atribuir qualquer uma das m cores às casas $1, \dots, (n+1)/2$, sendo que a casa central ocupa a posição $(n+1)/2$. Assim, $|Fix_a| = (m)^{\frac{n+1}{2}}$.

Portanto, pelo Teorema de Contagem de Burnside, o número de padrões distintos é:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} (|Fix_e| + |Fix_a|)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} (m^n + m^{\frac{n}{2}}), & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{2} (m^n + m^{\frac{n+1}{2}}), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Por exemplo:

$$\text{Se } m = 3 \text{ e } n = 6 \text{ (} n \text{ par), então } |X/G| = \frac{1}{2} (3^6 + 3^3) = 378.$$

$$\text{Se } m = 3 \text{ e } n = 7 \text{ (} n \text{ ímpar), então } |X/G| = \frac{1}{2} (3^7 + 3^4) = 1134.$$

Problema 5 *Maria deseja pintar de amarelo ou roxo as nove casas de um tabuleiro 3×3 . Se as pinturas da frente e do fundo do tabuleiro se sobrepõem e devem ser idênticas, e se é permitido usar a mesma cor para pintar casas vizinhas, determine o número de possibilidades distintas de pinturas.*

Solução

Vamos numerar as casas do tabuleiro conforme a figura abaixo:

5	4	3
6	9	2
7	8	1

Figura 4.5: Tabuleiro 3×3 com as casas numeradas.

Temos um total de $2^9 = 512$ colorações diferentes em X , pois existem duas possibilidades de cor para cada casa do tabuleiro. Por estarmos considerando tabuleiros 3×3 , observe que há tabuleiros que não podem ser obtidos uns dos outros apenas por rotações, como é ilustrado, por exemplo, na figura a seguir.

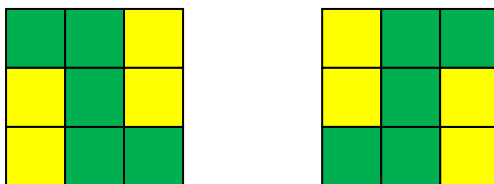


Figura 4.6: Exemplos de tabuleiros não obtidos um do outro por rotação.

Em conformidade com o nosso problema, podemos considerar, neste caso, as reflexões (rotações espaciais) do tabuleiro, já que, as pinturas da frente e do fundo do tabuleiro se sobrepõem e são idênticas. Nesse sentido, dizemos que dois tabuleiros 3×3 são iguais, se um pode ser obtido do outro por uma rotação ou por uma reflexão. Note que nas nossas observações sobre padrões de colorações equivalentes as simetrias do quadrado é que estão sendo consideradas na diferenciação. Consequentemente, o grupo G que irá atuar sobre X é o grupo diedral $D_4 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, m_1, m_2, d_1, d_2\}$, onde e , α , α^2 e α^3 indicam as rotações, m_1 e m_2 indicam as reflexões através das mediatrizes e d_1 e d_2 indicam as reflexões através das diagonais.

A quantidade de colorações fixadas em X para cada simetria do quadrado (que neste caso corresponde à simetria do tabuleiro 3×3) é apresentada na tabela a seguir:

Tabela 4.1: Valores de $|Fix_g|$ para cada $g \in D_4$.

Elemento g	Decomposição em ciclos	$ Fix_g $
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	2^9
α	(1357)(2468)(9)	2^3
α^2	(15)(26)(37)(48)(9)	2^5
α^3	(1753)(2864)(9)	2^3
m_1	(13)(48)(57)(2)(9)(6)	2^6
m_2	(17)(26)(35)(4)(9)(8)	2^6
d_1	(28)(37)(46)(1)(9)(5)	2^6
d_2	(15)(24)(68)(3)(9)(7)	2^6

Portanto, pelo Teorema de Contagem de Burnside, o número de formas distintas de se pintar o tabuleiro 3×3 , nas condições expostas, é igual a:

$$|X/G| = \frac{1}{8} (2^9 + 2 \cdot 2^3 + 2^5 + 4 \cdot 2^6) = \frac{1}{8} (512 + 16 + 32 + 256) = \frac{816}{8} = 102.$$

Problema 6 *Joãozinho tem de pintar de amarelo ou roxo as casas de um tabuleiro $n \times n$, em que n é um número par. De posse da informação de que o fundo do tabuleiro a ser pintado por ele é todo preto e que casas vizinhas podem ser pintadas da mesma cor, de quantas maneiras distintas é possível fazer as pinturas?*

Solução

Neste problema, o conjunto X das colorações possui m^{n^2} elementos, pois há m possibilidades de cores para cada uma das n^2 casas do tabuleiro $n \times n$. Para definirmos o grupo G de simetrias basta observar que duas pinturas do tabuleiro são consideradas idênticas, se uma puder ser obtida da outra por meio de uma rotação. Note que não existe reflexão neste caso, dado que o fundo do tabuleiro de Joãozinho é totalmente preto. Em razão disso, o grupo G que irá atuar sobre X é o grupo cíclico $C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$, onde e indica a identidade e a indica uma rotação de 90° .

Portanto, as quatro rotações que deixam o tabuleiro em questão invariante são as seguintes:

- A identidade e , que fixa as colorações das n^2 casas do tabuleiro, ou seja, fixa m^{n^2} tabuleiros;

- A rotação de 90° , que fixa $m^{n^2/4}$ tabuleiros;
- A rotação de 180° , que fixa $m^{n^2/2}$ tabuleiros;
- A rotação de 270° , que fixa $m^{n^2/4}$ tabuleiros.

Pelo Teorema de Contagem de Burnside, temos que o número de maneiras distintas de se pintar o tabuleiro nas condições estabelecidas é:

$$|X/G| = \frac{1}{4} \left(m^{n^2} + 2m^{n^2/4} + m^{n^2/2} \right)$$

Repare que substituindo $m = 2$ e $n = 4$ no polinômio acima, temos:

$$|X/G| = \frac{1}{4} (2^4 + 2 \cdot 2 + 2^2) = \frac{1}{4} (16 + 2 + 4 + 2) = \frac{24}{4} = 6$$

e o problema equivale ao das pinturas, nas cores azul e verde, do quadrado dividido pelas diagonais, visto no capítulo anterior.

4.5 Problema do colar

Problema 7 *Um rico xei que quer presentear sua filha, no aniversário, com um colar contendo 5 pedras preciosas e 50 pérolas nas seguintes condições:*

- (i) *pode ser usado mais um tipo de pedra no colar;*
- (ii) *as pedras devem ser do mesmo tamanho, homogêneas na cor e com forma geométrica elipsoidal;*
- (iii) *duas pedras de mesmo tipo devem ser indistinguíveis;*
- (iv) *todas as pérolas devem ser idênticas na forma e na cor;*
- (v) *as pérolas devem ser distribuídas igualmente entre as pedras preciosas, ou seja, deve sempre haver dez pérolas entre duas pedras.*

O xei que deixou a cargo do joalheiro a decisão de variar ou não os tipos de pedras no colar, bem como a escolha do número de cada pedra, caso este opte por mais de um tipo. Sabendo

que o artesão possui safira azul royal, esmeralda (verde) e rubi (vermelho), cada uma em quantidade suficiente para atender ao pedido, determine de quantas formas distintas pode ser confeccionado esse colar, se não há variação no cordão.

Solução

Em qualquer colar confeccionado pelo artesão existem três opções de cores para cada uma das cinco pedras preciosas, que são do mesmo tamanho e formato, e estão equiespaçadas por dez pérolas idênticas. Então, são as cores e as posições das cinco pedras preciosas no colar que colaboram na diferenciação de um colar e outro. À vista disso, neste problema, podemos considerar cada pedra preciosa como ocupando cada um dos vértices de um pentágono regular. E assim, há $3^5 = 243$ colorações diferentes no conjunto X , visto que temos três possibilidades de cores para cada uma das cinco pedras preciosas. Além disso, dois colares são considerados equivalentes se um deles for rotacionado ou invertido (virado, refletido) e resultar no outro.

O pentágono regular possui 10 simetrias:

- As rotações $e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ de $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$ e 288° , em torno de seu centro e no sentido anti-horário;
- As reflexões m_1, m_2, m_3, m_4 e m_5 através das mediatrizes.

Na figura seguinte estão indicadas apenas as reflexões de um pentágono regular.

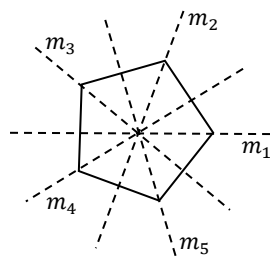


Figura 4.7: Simetrias de reflexão do pentágono regular.

Portanto, o grupo G que irá agir sobre X é o grupo diedral

$$D_5 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$$

A quantidade de colorações fixadas em X para cada simetria do pentágono regular é exibida na tabela a seguir:

Tabela 4.2: Valores de $|Fix_g|$ para cada $g \in D_5$.

Elemento g	Decomposição em ciclos	$ Fix_g $
e	(1)(2)(3)(4)(5)	3^5
α	(12345)	3
α^2	(13524)	3
α^3	(14253)	3
α^4	(15432)	3
m_1	(1)(25)(34)	3^3
m_2	(2)(13)(45)	3^3
m_3	(3)(15)(24)	3^3
m_4	(4)(12)(35)	3^3
m_5	(5)(14)(23)	3^3

Aplicando o Teorema de Contagem de Burnside, vemos que o número de formas distintas de se fabricar o colar, considerando as condições estabelecidas, é:

$$|X/G| = \frac{1}{10} (3^5 + 5 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3) = \frac{1}{10} (243 + 135 + 12) = \frac{390}{10} = 39$$

Veja a seguir ilustração de todos os 39 colares:

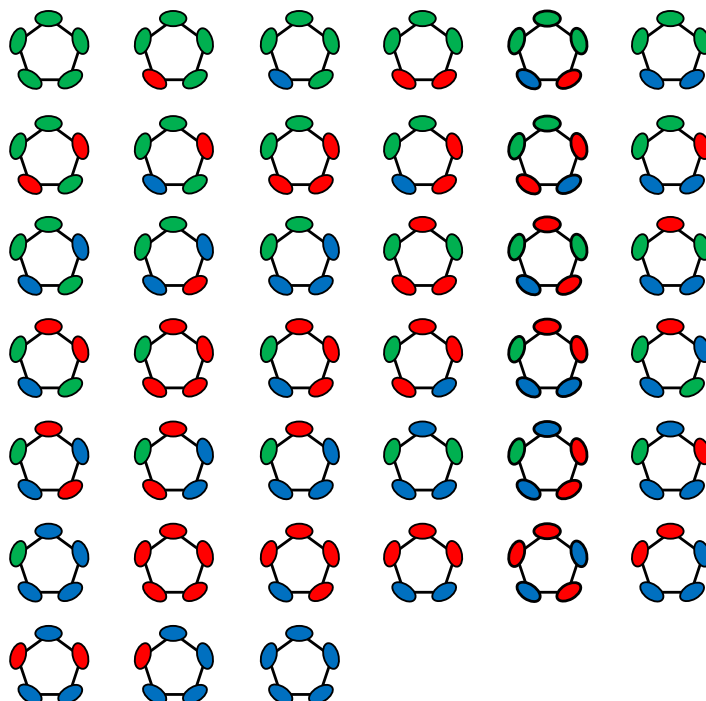


Figura 4.8: Ilustração dos colares com 5 pedras nas cores azul, verde e vermelho.

4.6 Problemas envolvendo hexágono

Problema 8 *De quantos modos diferentes é possível pintar os vértices de um hexágono regular, sabendo que cada vértice deve receber uma única cor dentre m cores disponíveis?*

Solução

Como um hexágono regular possui 6 vértices e existem m possibilidades de cores para cada um, então o número total de colorações presentes em X neste caso é dado por m^6 . As simetrias que deixam o hexágono regular invariante são as seguintes:

- As rotações $e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$ de $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ e 300° , em torno do seu centro e no sentido anti-horário;
- As reflexões m_1, m_2 e m_3 através das mediatrizes;
- As reflexões d_1, d_2 e d_3 através das diagonais.

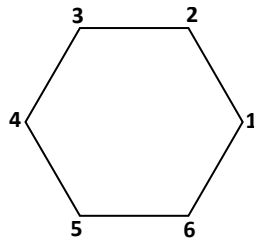


Figura 4.9: Ilustração do hexágono regular com os vértices numerados.

Duas pinturas do hexágono regular são idênticas se uma puder ser obtida da outra por meio de uma rotação ou reflexão. Portanto, o grupo G que irá atuar sobre X é o grupo diedral $D_6 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, m_1, m_2, m_3, d_1, d_2, d_3\}$.

A quantidade de colorações fixadas em X para cada simetria do hexágono regular é apresentada na tabela a seguir.

Tabela 4.3: Valores de $|Fix_g|$ para cada $g \in D_6$.

Elemento g	Decomposição em ciclos	$ Fix_g $
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	m^6
α	(123456)	m
α^2	(135)(246)	m^2
α^3	(14)(25)(36)	m^3
α^4	(153)(264)	m^2
α^5	(165432)	m
d_1	(1)(4)(26)(35)	m^4
d_2	(3)(6)(24)(15)	m^4
d_3	(2)(5)(13)(46)	m^4
m_1	(12)(36)(45)	m^3
m_2	(16)(25)(34)	m^3
m_3	(14)(23)(56)	m^3

Daí, pelo Teorema de Contagem de Burnside, temos:

$$|X/G| = \frac{1}{12} (m^6 + 3m^4 + 4m^3 + 2m^2 + 2m)$$

Problema 9 *Sabendo que o anel de carbono é composto de 6 átomos de carbono, qual é o número de moléculas diferentes obtidas ligando-se a cada carbono um átomo de hidrogênio ou o grupo metil ($-CH_3$)? Para exemplificar, considere a ligação de um átomo de hidrogênio a cada átomo de carbono, cujo resultado é uma molécula de benzeno.*

Solução

Resolver este problema é equivalente a determinar o número de pinturas dos vértices do hexágono regular dispondo-se de duas cores. Desse modo, a solução é alcançada fazendo $m = 2$ na expressão obtida no problema anterior, o que nos dá

$$|X/G| = \frac{1}{12} (2^6 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = \frac{1}{12} (64 + 48 + 32 + 8 + 4) = \frac{156}{12} = 13$$

Portanto, a partir do anel de carbono podem ser obtidas 13 moléculas quimicamente diferentes, ligando-se a cada carbono um átomo de hidrogênio ou o grupo metil. Veja as 13 possibilidades na figura a seguir:

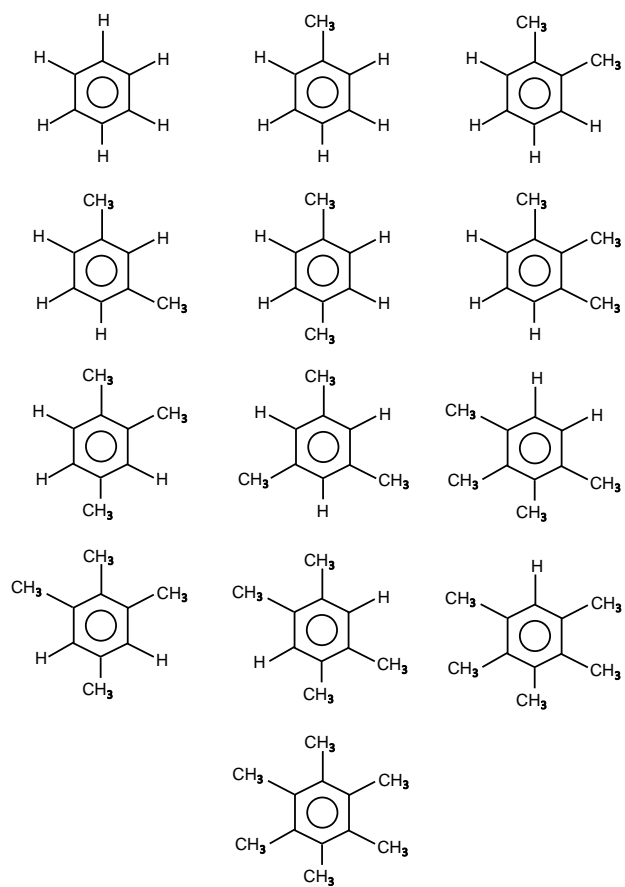


Figura 4.10: Ilustração das diferentes moléculas obtidas.

Considerações finais

O estudo de métodos de contagem constitui-se em intrigante área na Matemática, pois as técnicas variam bastante conforme o tipo de problema de que se está tratando.

O presente trabalho utiliza-se de recursos da teoria de grupos para construir os alicerces sobre os quais é possível contar o número de padrões de colorações de alguns objetos. Nesse aspecto, foram definidos alguns conceitos como órbitas, estabilizadores e pontos fixos, essenciais na construção do Teorema de Contagem de Burnside (TCB).

Acerca de expectativas para estudos futuros, está a elaboração de um material didático, voltado para alunos do Ensino Médio, capaz de apresentar os conceitos essenciais deste trabalho de forma acessível, proporcionando a aplicação do TCB.

Embora o TCB seja uma importante ferramenta para a contagem de padrões, apresenta-se como sucessor natural a este trabalho o estudo do Teorema Enumerativo de Pólya, capaz de exibir informações acerca do número de colorações de cada tipo de padrão.

Referências Bibliográficas

- Alencar Fo., E. (1985). *Teoria dos Grupos*. Edgard Blücher, S. Paulo.
- Domingues, H. H. e Iezzi, G. (2003). *Álgebra Moderna*. Atual, S. Paulo, 4a. edição.
- Gallian, J. A. (2006). *Contemporary Abstract Algebra*. Houghton Mifflin, Boston, 6th edição.
- Garcia, A. e Lequain, Y. (2013). *Elementos de Álgebra*. IMPA, R. Janeiro, 6a. edição.
- Herstein, I. N. (1970). *Tópicos de Álgebra*. Edusp - Polígono, S. Paulo.
- Hungerford, T. W. (1990). *Abstract Algebra - An Introduction*. Saunders College Publishing, Philadelphia, 2th edição.
- Janesch, O. R. (2008). Álgebra II. <http://mtm.grad.ufsc.br/files/2014/04/%C3%81lgebra-II.pdf> Acesso em: 10/07/2018.
- Nagpaul, S. R. e Jain, S. K. (2005). Topics in Applied Abstract Algebra. In Paul J. Sally, J., editor, *Advanced Mathematics*. Thomson, Belmont.
- Santos, J. P. O. e Bovo, E. (2004). O Teorema de Burnside e Aplicações. In *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, Salvador/BA. SBM. UFBA – Instituto de Matemática, 25 a 29 de outubro.
- Tavares, J. N. (2018). Teorema Enumerativo de Polya. <https://cmup.fc.up.pt/cmup/matpolya/index.html> Acesso em: 20/08/2018.