



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA -
PROFMAT**

AUGUSTO ELIAS LIMA

São João del Rei

2018

Augusto Elias Lima

**PÊNDULO SIMPLES:
DA TEORIA À ATIVIDADE INVESTIGATIVA COM O USO
DO *SOFTWARE* GEOGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João Del Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves

São João del Rei

2018

Lima, Augusto Elias

Pêndulo Simples: Da teoria à atividade investigativa com o uso do *software* Geogebra/
Augusto Elias Lima - Campus Santo Antônio: [s.n.], 2018. 112 f.:fig., tab.

Orientador: Dr. Ronaldo Ribeiro Alves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei, Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Pêndulo Simples. 3. Oscilações. 4. Atividade
Investigativa.

TERMO DE APROVAÇÃO

Augusto Elias Lima

PÊNDULO SIMPLES:
DA TEORIA À ATIVIDADE INVESTIGATIVA COM O USO DO
SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação a ser APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves (**Orientador**)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof^a. Dra. Viviane Pardini Valério (*Avaliador local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof^a. Dra. Andreza Cristina Beezão Moreira (*Avaliador externo*)
UFLA - Universidade Federal de Lavras

São João del-Rei, 14 de dezembro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, pelo amparo, companhia, proteção e guia durante todo o tempo dedicado à concretização dessa etapa de estudos em minha vida.

Aos meus pais, Neuza e José, pela referência de vida, pelo apoio incondicional em todas circunstâncias e pelo incentivo na continuidade dos meus estudos.

Aos meus irmãos, Gustavo e Niueyny, por estarem sempre ao meu lado e compartilhar desse sonho.

À minha família, amigos e colegas de trabalho por todas palavras e ações de motivação.

A todos os meus professores pela inspiração dada em toda minha trajetória escolar e universitária.

Aos meus alunos pela torcida na concretização dessa etapa. Que eu seja um exemplo para vocês.

Ao meu orientador, Dr. Ronaldo Ribeiro Alves, pela disposição de sempre no auxílio ao direcionamento do trabalho, bem como nas revisões necessárias a fazer.

À Dra. Andreza Cristina Beezão Moreira pelos incentivos e conselhos dados na avaliação do trabalho. Agraço sua leitura e revisão cuidadosa da dissertação.

À Dra. Viviane Pardini Valério pela acolhida durante a preparação e apresentação da defesa. Também agradeço pelas colocações e orientações dadas.

Aos professores e funcionários do PROFMAT - UFSJ pelos ensinamentos que levarei comigo e passarei com o mesmo zelo em que foram trazidos até a mim.

A meus colegas de mestrado, pela amizade, auxílio nas tarefas, alegria e união durante esses anos do curso. Em especial, agradeço à Francielle, por me transportar com responsabilidade na maioria dos encontros presenciais do curso.

À direção da Escola Estadual Imaculada Conceição pela prestatividade na adequação de horários, compreendendo o tempo de dedicação preciso para a realização do mestrado.

Enfim, a todos que diretamente ou indiretamente participaram e me incentivaram, o meu mais sincero: muito obrigado!

RESUMO

O presente trabalho possui por finalidade contextualizar o estudo das funções trigonométricas através da abordagem de movimentos periódicos, especificamente, do pêndulo simples. Há uma proposta de aula investigativa que usa como suporte para seu desenvolvimento o *software* Geogebra. Com o uso do *software* podemos explorar características do comportamento gráfico das funções trigonométricas usando a variação de parâmetros de forma dinâmica e prática. Para garantir ao docente um suporte teórico para o desenvolvimento da prática proposta e de outras similares, o trabalho traz uma revisão de conteúdos fundamentais de domínio do professor para o direcionamento adequado da atividade. Esses conceitos são as Equações Diferenciais Ordinárias e oscilações, seja quando essas estão em Movimento Harmônico Simples (MHS) ou em movimento com amortecimento. Com esse trabalho existe o desejo de estimular outras práticas contextualizadas na abordagem das funções trigonométricas, diminuindo o alto nível de abstração e desinteresse nesse conteúdo, fato observado pelo autor em sala de aula e que se tornou a motivação para o desenvolvimento do presente trabalho.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Pêndulo Simples, Oscilações, Atividade Investigativa.

ABSTRACT

This work intends to provide a context to the study of trigonometric functions by addressing periodic movements, namely, the simple pendulum. We propose an investigative lesson supported by the Geogebra software. By using this software, we may explore the features of the graphic behavior of trigonometric functions using the variation of parameters in a practical and dynamic manner. In order to provide the teacher with a theoretical support for the development of the practice we propose and other similar practices, the paper brings a review of basic content to be mastered by the teacher for the proper facilitation of the activity. These concepts are Ordinary Differential Equations and oscillations, whether when they are in a simple harmonic motion (SHM) or in a damped motion. Through this paper, we wish to encourage other contextualized practices when teaching trigonometric functions, reducing the high level of abstraction and lack of interest for such subject, which were both observed by the author during his teaching experience and became the motivating factor for the development of this work.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Simple Pendulum, Oscillations, Investigative Activity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação gráfica da solução de uma E.D.O.....	32
Figura 2: Representação gráfica da solução da equação $y' = y^2$	37
Figura 3: Representação gráfica da solução da equação $y^2 + x^2 \cdot y' = 0$	39
Figura 4: Balanço.....	69
Figura 5: Relógio de carrilhão.....	70
Figura 6: Pêndulo simples.....	70
Figura 7: Representação das forças atuantes no pêndulo simples.....	71
Figura 8: Diagrama de corpo livre das forças no pêndulo simples.....	71
Figura 9: Diagrama de corpo livre com forças descompostas no pêndulo simples.....	72
Figura 10: Semelhança de triângulos.....	72
Figura 11: Representação da oposição de sentido da força restauradora e o deslocamento.....	73
Figura 12: Representação da amplitude de um movimento curvilíneo.....	74
Figura 13: Vetores aceleração e velocidade em uma curva.....	75
Figura 14: Posição do corpo no plano cartesiano.....	78
Figura 15: Posição do corpo com os componentes decompostos.....	79
Figura 16: Representação gráfica da variação na posição do corpo.....	80
Figura 17: Frequência angular do pêndulo.....	81
Figura 18: Forças atuantes em um paraquedista.....	84
Figura 19: Comparação do coeficiente de arrasto entre modelos de automóveis.....	85
Figura 20: Representação das forças na oscilação amortecida do pêndulo.....	86
Figura 21: Posição em relação ao tempo de uma oscilação com amortecimento subcrítico.....	88
Figura 22: Posição em relação ao tempo de uma oscilação com amortecimento crítico.....	90
Figura 23: Posição em relação ao tempo de uma oscilação com amortecimento supercrítico.....	91
Figura 24: Representação gráfica de um nó estável.....	93
Figura 25: Representação gráfica de um nó instável.....	93
Figura 26: Representação gráfica de um ponto de sela.....	94
Figura 27: Representação gráfica de soluções complexas puras.....	94
Figura 28: Representação gráfica de um espiral estável e instável.....	95
Figura 29: Representação gráfica de um nó estável degenerado.....	96
Figura 30: Proposta de construção do pêndulo com transferidor, esfera e barbante.....	99
Figura 31: Posição inicial do barbante.....	100
Figura 32: Página inicial do <i>software</i> Geogebra.....	101
Figura 33: Página do <i>software</i> Geogebra com os controles deslizantes C , ω , θ criados.....	102
Figura 34: Gráfico da posição de um pêndulo simples para $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0, 2$	103
Figura 35: Gráfico da velocidade de um pêndulo simples para $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0, 2$	104
Figura 36: Paralelo entre as figuras 34 e 35.....	104
Figura 37: Gráfico da posição de um pêndulo simples para $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0, 2$	105

Figura 38: Gráfico da velocidade de um pêndulo simples para $L = 1, L = 2, L = 3, C = 1$ e $\theta = 0, 2$	106
Figura 39: Gráfico da posição para a aceleração da gravidade $g = 10 m/s^2$ e $g = 1,6 m/s^2$	106
Figura 40: Modelo para a oscilação com amortecimento.....	107
Figura 41: Posição do pêndulo no movimento amortecido para $a = -0,2, a = -0,5, a = -1$ e $C = 5, \omega = 1, \theta = 0, 2$	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Momentos de uma investigação.....	97
Tabela 2: Avaliação da atividade investigativa.....	109

SUMÁRIO

1 Introdução.....	11
2 Equações Diferenciais.....	12
2.1 Contexto Histórico.....	12
2.2 Definição e Classificação das Equações Diferenciais.....	13
2.3 Solução de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem.....	15
2.4 Resolução de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem.....	16
2.5 Resolução de Equações Diferenciais Separáveis.....	19
2.6 Métodos de Substituição.....	21
2.7 Teorema de Existência e Unicidade de Solução.....	32
2.8 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n	40
2.9 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem.....	63
3 Movimentos Oscilatórios.....	69
3.1 Movimento Harmônico Simples.....	69
3.2 Movimento Oscilatório Amortecido.....	82
4 Atividade Investigativa sobre o movimento do pêndulo com uso do <i>software</i> Geogebra.....	97
4.1 Orientações para o desenvolvimento da atividade investigativa sobre o pêndulo	98
4.2 Desenvolvimento da atividade investigativa sobre o pêndulo.....	101
4.3 Avaliação da atividade investigativa sobre o pêndulo.....	108
5 Conclusão.....	110
6 Referências.....	112

1 Introdução

O pêndulo é um dos sistemas mais simples de serem estudados e observados quando analisamos exemplificações de movimentos periódicos. Ele consiste praticamente de uma massa presa a um fio. A descrição algébrica desses movimentos envolvem, em sua maioria, as funções trigonométricas, um dos assuntos tratados no Ensino Médio conforme constante nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM).

Segundo orientações do (PCNEM), a Matemática deve articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias entre as várias áreas de conhecimento. Todavia, por experiências do autor lecionando aulas para o Ensino Médio e por contato com outros professores do mesmo nível de ensino, observa-se prevalecer, ainda, a abordagem das funções trigonométricas desvinculada às suas aplicações, limitada a analisar as propriedades dessas funções sem um contexto que justifique esse estudo. Essa prática gera grande abstração e desinteresse por parte do aluno ao estudar o conteúdo.

Na busca de uma nova alternativa de abordagem desse assunto, houve o desenvolvimento do presente trabalho. O objetivo é propor aos professores do Ensino Médio suporte teórico e um plano de aula que engloba as funções trigonométricas vinculada a análise do movimento do pêndulo.

Quanto ao suporte teórico, as equações que regem a descrição do movimento do pêndulo quanto a posição, velocidade e aceleração exigem a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem, logo esse é o assunto da segunda seção. Como se trata de proposta interdisciplinar entre as disciplinas de Matemática e Física, houve a necessidade de oferecer ao docente também referenciais conceituais quanto ao movimento periódico, como consta na terceira seção.

Na última seção, há a proposta de aula investigativa para alunos do Ensino Médio sobre o estudo do movimento do pêndulo, seja quando ele está em Movimento Harmônico Simples (MHS) ou quando consideramos a resistência do ar. Na aula, propomos para o discente a construção, a experimentação, a testagem e a justificativa dos resultados. Para o suporte dessa atividade utilizamos o *software* Geogebra, sendo ele gratuito e de fácil manuseio dos alunos.

Com esse trabalho há um desejo de despertar em outros professores a elaboração de atividades semelhantes ou de complementação à proposta, priorizando o ensino da Matemática com contexto e o estímulo à aprendizagem prazerosa e significativa.¹

¹O autor optou por escrever o texto na 1ª pessoa do plural por considerar que o trabalho foi realizado conjuntamente com o seu orientador.

2 Equações Diferenciais

2.1 Contexto Histórico

O estudo sobre equações diferenciais teve início no século XVII, a partir do interesse por soluções de problemas de Mecânica e Geometria. Dentre os estudiosos da época, Isaac Newton (1643 - 1727), Gottfried Leibniz (1646 - 1716) e Jakob Bernoulli (1654 - 1705), encontraram soluções para equações diferenciais simples de primeira e segunda ordem.

Conforme Simões (2014), Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Ele também expandiu um método para resolver a equação $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ para o caso de $f(x, y)$ ser um polinômio em x e y , através do uso de séries infinitas.

Enquanto Newton estudava as variáveis x e y variando com o tempo, Leibniz as considerava variando em sequências de valores infinitamente próximos. Ele introduziu a notação dy e dx como sendo a diferença entre os valores sucessivos obtidos dessas sequências e foi o primeiro matemático a publicar seus estudos sobre equações diferenciais, no ano de 1684. Leibniz ainda criou a notação de derivada $\frac{dy}{dx}$ e o sinal da integral. Em 1691, descobriu o método de separação de variáveis e estabeleceu uma forma de redução de equações homogêneas em equações separáveis e no ano de 1694, determinou o procedimento para resoluções de equações lineares de primeira ordem (NOBRÉGA, 2016).

Já Jakob Bernoulli, resolveu a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ e uma curva de equação transcendente a qual era subentendida a partir do modo como a curva era construída e que satisfaz a equação diferencial $y'' = \frac{w}{H} \cdot \sqrt{(1 + (y')^2)}$ (NOBRÉGA, 2016).

O século XVIII foi um período de grande crescimento do Cálculo, trazendo contribuições também para o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais, foram divulgados muitos métodos de resolução com base em funções elementares.

O trabalho de Leonhard Euler (1707 - 1783), considerado o maior matemático do século XVIII, foi de grande importância para essa área. Entre 1734 e 1739, ele identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas e desenvolveu o método de variação de parâmetros. Em 1743, demonstrou a teoria de fatores integrantes e encontrou a solução geral de equações lineares homogêneas de coeficientes constantes. Euler usou série de potências para solucionar equações diferenciais e ainda estabeleceu aproximações numéricas para “soluções” aproximadas de determinadas equações.

Segundo Boyer (2009, p.313):

Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muitos dos problemas específicos que aparecem em livros texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo.

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) também fez contribuições para a área mostrando que a solução geral de uma equação linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. O matemático também teve trabalhos importantes em equações diferenciais parciais e no cálculo de variações (SIMÕES, 2014).

Paralelamente, é importante salientar o trabalho de Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827). Seu método “A transformada de Laplace” permite solucionar uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica.

Como consequência dos trabalhos desses matemáticos, no final do século XVIII já existiam muitos métodos para solucionar equações diferenciais ordinárias já existiam. No século XIX, destacamos os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857). De acordo com Simões (2014), Gauss percebeu que a teoria das funções de uma variável complexa era fundamental para obter os resultados necessários em equações diferenciais aplicadas. Cauchy criou a metodologia da equação característica relevante na análise e solução de equações diferenciais parciais.

No término do século XIX e início do século XX, a preocupação central já era quanto à existência e à unicidade de soluções de equações diferenciais. No ano de 1876, Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) desenvolveu o teorema de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem. Em meados do século XX, com o aumento das capacidades de cálculo com recurso computacional, tornou-se possível resolver numericamente uma grande classe de equações diferenciais.

A aplicabilidade das equações diferenciais em diferentes áreas como Matemática, Física, Biologia, Medicina, Economia, entre outras, fez com que, atualmente, tenhamos muitos trabalhos publicados relacionados a essa temática e um grande avanço na área. O estudo das equações diferenciais trouxe e traz ao homem um melhor entendimento da realidade ao seu redor, auxiliando-o na solução de muitos problemas ainda atuais.

2.2 Definição e Classificação das Equações Diferenciais

Chamamos de equação diferencial a equação que possui derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes (ZILL, 2016, p.2).

Podemos classificar as equações diferenciais quanto ao tipo, ordem e linearidade.

2.2.1 Classificação pelo Tipo

Se uma equação diferencial possui derivadas ordinárias com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Na equação diferencial ordinária abaixo, a derivada da função y está dependendo somente da variável t .

$$\frac{dy}{dt} = 5t + 3$$

De modo geral, podemos escrever uma equação diferencial ordinária da seguinte maneira:

$$a_n(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x) \cdot y + g(x) = 0. \quad (1)$$

Os coeficientes $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ podem depender ou não de t , sendo chamados de variáveis e constantes, respectivamente.

Se uma equação diferencial possui derivadas com relação a duas ou mais variáveis independentes, ela é chamada de equação diferencial parcial (EDP). Por exemplo, na equação diferencial parcial abaixo, a derivada da função y está dependendo das variáveis x e t .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

2.2.2 Classificação pela Ordem

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da equação. A equação diferencial ordinária abaixo é de segunda ordem ou de ordem dois, posto que a ordem da mais alta derivada é dois.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$$

2.2.3 Classificação Linear ou Não-Linear

Uma equação é dita linear quando pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_0(x) \cdot y = g(x). \quad (2)$$

Conforme Zill e Cullen (2001), as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- ◇ A potência da variável dependente y é 1;
- ◇ Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

A equação diferencial abaixo, a exemplo, é linear.

$$x^3 \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} - 5x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \cdot \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

Caso a equação diferencial não satisfaça às duas propriedades acima, ela é denominada não-linear. A igualdade adiante não é linear, uma vez que a segunda propriedade não foi cumprida.

$$xy \cdot \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

2.2.4 Classificação Homogênea ou Não-Homogênea

Se o segundo membro de uma equação diferencial é identicamente nulo, ela é chamada de homogênea; caso contrário, ela é denominada não-homogênea.

2.3 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

A solução de uma equação diferencial num intervalo I é uma função que resulta em uma identidade quando substituída na equação diferencial.

Algebricamente, dada a equação diferencial ordinária de ordem n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{dy}{dx} + y + g(x) = 0, \quad (3)$$

sua solução é uma função $y = f(x)$ que possui ao menos n derivadas e que satisfaça a equação, ou seja :

$$\frac{d^n f^{(n)}(x)}{dx^n} + \frac{d^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{df(x)}{dx} + f(x) + g(x) = 0. \quad (4)$$

Exemplo 2.3.1

Para a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$, verificaremos que $y = 2t$ é solução no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Substituindo a solução na equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{t} = 2.$$

Assim, teremos para todo número real com $t \neq 0$:

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = 2 - \frac{2t}{t} = 0.$$

Exemplo 2.3.2.

Analisaremos se $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ é solução da equação $y'' + 2y' + y = 0$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Derivando $y(x)$:

$$y'(x) = -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}.$$

$$y''(x) = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}.$$

Substituindo os valores das derivadas na equação diferencial, obtemos:

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + (2e^{-x} + xe^{-x}) = 0.$$

Logo, $y(x)$ é solução.

Conforme Zill e Cullen (2001), nem toda equação diferencial possui solução e, geralmente, quando possuem, são infinitas dependendo dos parâmetros arbitrários. Quando escrevemos uma solução independente dos parâmetros arbitrários ela é chamada de solução particular. Caso ela dependa de parâmetros, a família de soluções possíveis é denominada de solução geral. Na seção a seguir, citaremos um método para averiguar a existência e unicidade da solução de determinada equação diferencial.

2.4 Resolução de uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

Começaremos analisando a resolução das equações diferenciais mais simples, que são as de primeira ordem. Consideraremos, primeiramente, que todos os coeficientes da equação são constantes

Dada uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes:

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dx} + a_0 \cdot y + g(x) = 0, \quad (5)$$

a equação diferencial ordinária de primeira ordem será aquela cuja maior derivada é de ordem um, portanto, uma equação da forma:

$$a_1 \cdot \frac{dy}{dx} + a_0 \cdot y + g(x) = 0. \quad (6)$$

Dividindo a equação acima por a_1 , chamando a divisão $\frac{a_0}{a_1}$ de $p(x)$ e a função $-\frac{g(x)}{a_1} = f(x)$ segue que:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x).$$

Caso $p(x) = 0$, então teremos $\frac{dy}{dx} = f(x)$ e, para solucionarmos essa equação, usamos a ideia de integral de uma função como sua anti-derivada. Logo, para resolvermos a equação $\frac{dy}{dx} = f(x)$, integramos ambos lados:

$$\int \frac{dy}{dx} = \int f(x) dx \rightarrow \int y'(x) = \int f(x) dx \rightarrow y(x) = F(x) + C,$$

em que $F(x)$ é a primitiva da função $f(x)$.

Caso $p(x) \neq 0$ e $f(x) = 0$ a equação será $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0$, homogênea, posto que $f(x) = 0$. Dividindo toda a equação por y e isolando $p(x)$, obtemos: $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -p(x)$. Integrando ambos os lados da equação:

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = - \int p(x) dx \rightarrow \ln |y| = - \int p(x) dx + C \rightarrow e^{\ln |y|} = e^{- \int p(x) dx + C} \rightarrow |y| = \pm e^C \cdot e^{- \int p(x) dx}.$$

Chamando $\pm e^C = A$, chegamos a:

$$y(x) = A \cdot e^{- \int p(x) dx}.$$

Exemplo 2.4.1

A solução da equação $y' + \cos t \cdot y = 0$ é $y(t) = A \cdot e^{-\text{sent}t}$, pois $p(x) = \cos t$ e $\int \cos t dt = -\text{sent}t$.

Caso $p(x) \neq 0$ e $f(x) \neq 0$, a equação será $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x)$, ou seja, $y' + p(x) \cdot y = f(x)$. Multiplicando toda a equação por uma função $u(x)$, temos:

$$y' \cdot u(x) + p(x) \cdot u(x) \cdot y = f(x) \cdot u(x). \quad (7)$$

Para que a primeira parte da igualdade possa ser escrita melhor como produto de derivadas $(y \cdot u(x))' = y' \cdot u(x) + y(x) \cdot u'(x)$ devemos ter $u'(x) = p(x) \cdot u(x)$ o que implica que $u'(x) - p(x) \cdot u(x) = 0$. Temos, assim, uma equação diferencial de primeira ordem com $f(x) = 0$, cuja solução é $u(x) = A \cdot e^{\int p(x) dx}$; essa função é denominada fator integrante.

$$y'(x) \cdot u(x) + y(x) \cdot u'(x) = f(x) \cdot u(x)$$

Integrando os dois lados da igualdade:

$$\int (y \cdot u(x))' dx = \int f(x) \cdot u(x) dx + C \rightarrow y \cdot u(x) = \int f(x) \cdot u(x) dx + C \rightarrow$$

$$y(x) = \frac{C}{u(x)} + \frac{1}{u(x)} \int f(x) \cdot u(x) dx.$$

Como $u(x) = A \cdot e^{- \int p(x) dx}$ teremos:

$$y(x) = c \cdot e^{- \int p(x) dx} + e^{- \int p(x) dx} \cdot \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx. \quad (8)$$

A equação acima é a solução geral no caso de $p(x) \neq 0$ e $f(x) \neq 0$.

Exemplo 2.4.2

Para resolvermos a equação diferencial de primeira ordem $y' + 2t \cdot y = t$, encontraremos a função $u(t)$ tal que $u(t) = e^{\int 2t \cdot dt} = e^{t^2}$, função chamada de fator integrante. Multiplicando a equação por $u(t) = e^{t^2}$, obtemos:

$$y' \cdot e^{t^2} + 2t \cdot e^{t^2} \cdot y = t \cdot e^{t^2}.$$

A primeira igualdade da equação é igual a: $(y \cdot e^{t^2})' = y' \cdot e^{t^2} + 2t \cdot e^{t^2} \cdot y$. Integrando ambos lados da expressão, temos:

$$\int (y \cdot e^{t^2})' dt = \int t \cdot e^{t^2} dt.$$

Tomando $u = t^2 \rightarrow du = 2t \cdot dt \rightarrow t \cdot dt = \frac{du}{2}$ e, substituindo, segue que:

$$\begin{aligned} y \cdot e^{t^2} &= \int e^u \frac{du}{2} = \frac{e^u}{2} + C = C + \frac{e^{t^2}}{2} \rightarrow \\ y \cdot e^{t^2} &= C + \frac{e^{t^2}}{2} \rightarrow y(t) = C \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

que é a solução geral da equação $y' + 2t \cdot y = t$.

Exemplo 2.4.3

Resolveremos a equação diferencial de 1ª ordem:

$$x \cdot y'(x) - 3 \cdot y(x) = x^4 \cdot \cos x$$

com dado inicial de $y(2\pi) = 0$ e $x > 0$. Para escrevermos essa equação na forma $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x)$, o coeficiente de $y'(x)$ deve ser igual a 1, logo, dividimos toda a equação por x :

$$y'(x) - \frac{3}{x} \cdot y(x) = x^3 \cos x.$$

O fator integrante será $u(x) = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln |x|} = e^{\ln x^{-3}} = x^{-3}$.

Agora, multiplicamos toda equação pelo fator integrante:

$$y'(x) \cdot x^{-3} - \frac{3}{x} \cdot y(x) \cdot x^{-3} = \cos x.$$

O lado esquerdo da expressão acima, pela derivada do produto, será igual à derivada do fator integrante multiplicado pela função $y(x)$. Reescrevendo a igualdade:

$$\begin{aligned}(x^{-3} \cdot y(x))' &= \cos x \rightarrow \int (x^{-3} \cdot y(x))' dx = \int \cos x dx \rightarrow \\ x^{-3} \cdot y(x) &= \operatorname{sen} x + C \rightarrow y(x) = \operatorname{sen} x \cdot x^3 + C \cdot x^3.\end{aligned}$$

Essa é a solução geral da equação. Mas como, $y(2\pi) = 0$, substituindo:

$$y(2\pi) = \operatorname{sen}(2\pi) \cdot (2\pi)^3 + C \cdot (2\pi)^3 \rightarrow 0 = 0 + C \cdot (2\pi)^3 \rightarrow C = 0.$$

Portanto, a solução particular para esse dado inicial ou a solução para este problema de valor inicial (PVI) é $y(x) = x^3 \cdot \operatorname{sen} x$.

2.5 Resolução de Equações Diferenciais Separáveis

Esse tipo de equação pode ser linear ou não linear. Definimos uma equação separável como aquela escrita do seguinte modo:

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}, \quad (9)$$

em que g é uma função que só depende de x e h uma função que só depende de y . Também podemos escrevê-la como abaixo:

$$h(y) \cdot y'(x) = g(x).$$

Integrando, em x , ambos os lados da identidade acima, obtemos:

$$\int y'(x) \cdot h(y) dx = \int g(x) dx. \quad (10)$$

Se encontrarmos a primitiva H da função h , então, podemos afirmar que a primitiva de toda a expressão na integral à esquerda é $y'(x) \cdot h(y)$, posto que:

$$\frac{d}{dx} \cdot H(y(x)) = H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x).$$

Isto é exatamente o integrando do lado esquerdo de (10), logo:

$$H(y(x)) = \int g(x) dx.$$

Chamando $\int g(x) dx = G(x)$, reescrevemos como:

$$H(y(x)) = G(x) + C.$$

Observemos que o método de resolução das equações separáveis consiste em separar as funções que dependem de x e y , colocando-as em lados diferentes da igualdade e, posteriormente, integrando ambos os lados. Abaixo, segue um exemplo desse método de resolução.

Exemplo 2.5.1

Resolvamos a equação diferencial $y'(x) = 2 \cdot x \cdot \sqrt{y-1}$, sabendo que $y \geq 1$. Podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$y'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{y-1}} = 2 \cdot x.$$

Integrando ambos os lados, temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y-1}} dy = \int 2 \cdot x dx.$$

Chamando de $u = y-1$, temos $du = dy$. Substituindo no primeiro lado da igualdade acima, chegamos a:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^{1/2}} du &= \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot u^{1/2} = 2 \cdot \sqrt{y-1} \rightarrow \\ 2 \cdot \sqrt{y-1} &= x^2 + C. \end{aligned}$$

A última expressão é a solução implícita da equação diferencial.

Exemplo 2.5.2

Agora resolvamos uma equação diferencial não linear por esse método. Considere a equação diferencial $x^2 \cdot y'(x) = 1 - x^2 + y^2 - x^2 \cdot y^2$, não é linear, devido ao maior expoente da variável dependente y ser diferente de 1. Podemos dizer que essa equação é igual a:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot y'(x) &= 1 - x^2 + y^2 \cdot (1 - x^2) \rightarrow \\ x^2 \cdot y'(x) &= (1 - x^2) \cdot (1 + y^2) \rightarrow \\ \frac{y'(x)}{1 + y^2} &= \frac{1 - x^2}{x^2} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{1+y^2} dx &= \int \frac{1-x^2}{x^2} dx \rightarrow \\ \int \frac{\frac{dy}{dx} \cdot dx}{1+y^2} &= \int \frac{1-x^2}{x^2} dx \rightarrow \\ \int \frac{1}{1+y^2} dy &= \int \frac{1}{x^2} - 1 dx \\ \arctan y &= -x^{-1} - x + C. \end{aligned}$$

Essa é a solução implícita da equação diferencial $x^2 \cdot y'(x) = 1 - x^2 + y^2 - x^2 \cdot y^2$.

2.6 Métodos de Substituição

Há várias técnicas de substituição que são utilizadas para resolver uma equação diferencial. Os dois métodos descritos nesta seção possuem como objetivo transformar determinado tipo de equação diferencial em uma separável.

2.6.1 Equação do tipo $y' = F(ax + by + c)$

Considere a:

$$y' = F(ax + by + c), \quad (11)$$

em que os valores a , b e c são constantes e a equação diferencial é escrita como combinação linear de x e y . Fazendo a substituição $v(x) = ax + b \cdot y(x) + c$, teremos:

$$v'(x) = a + b \cdot y'(x) \rightarrow y'(x) = \frac{v'(x) - a}{b} \rightarrow F(v) = \frac{v' - a}{b}.$$

Eliminamos, assim, a variável y , logo a equação está somente em função de v . A mesma pode ser expressa da forma:

$$\begin{aligned} v' - a &= b \cdot F(v) \rightarrow v' = b \cdot F(v) + a \rightarrow \frac{dv}{dx} = b \cdot F(v) + a \rightarrow \\ \frac{dv}{(b \cdot F(v) + a) dx} &= 1. \end{aligned}$$

Observe que essa substituição transformou a equação (11) em separável e, integrando os dois lados na última igualdade, obtemos:

$$\int \frac{1}{b \cdot F(v) + a} dv = \int dx.$$

Exemplo 2.6.1

Tomemos como exemplo a seguinte equação diferencial $y' = (x + y + 3)^2$. Verificamos que ela não é linear, pois contém o termo y^2 quando desenvolvemos o produto do lado direito. Realizando a substituição $v = x + y + 3$, a derivada é $v' = 1 + y'$, logo, $y' = v' - 1$. Colocando na equação inicial, $v' - 1 = v^2 \rightarrow v' = v^2 + 1$, ou seja, $\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$. A equação se tornou separável e, integrando seus lados, temos:

$$\int \frac{1}{v^2 + 1} \cdot dv = \int dx \rightarrow \arctan v = x + C \rightarrow \arctan(x + y + 3) = x + C,$$

que é a solução implícita da equação.

2.6.2 Equação do tipo $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

Dada a equação

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (12)$$

procedemos com a substituição $v(x) = \frac{y(x)}{x} \rightarrow x \cdot v(x) = y(x)$. Derivando ambos os lados da expressão, segue que:

$$v(x) + x \cdot v'(x) = y'(x) \rightarrow v(x) + x \cdot v'(x) = F(v) \rightarrow x \cdot \frac{dv}{dx} = F(v) - v(x).$$

Portanto, a equação passou a ser separável e, integrando seus dois lados, obtemos:

$$\int \frac{dv}{f(v) - v(x)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Exemplo 2.6.2

Para exemplificar, usemos esse método para resolver a equação:

$$2xy \cdot \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2.$$

Dividindo-a por $2xy$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}.$$

Observe que temos os quocientes $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$. Chamando $\frac{y}{x} = v$ teremos $\frac{x}{y} = \frac{1}{v}$ e $x \cdot v = y$. Derivando essa última igualdade, encontramos $v + x \cdot v' = y'$. Na equação $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}\right)$ chegaremos a:

$$v + x \cdot v' = \frac{2}{v} + \frac{3v}{2} \rightarrow x \cdot v' = \frac{2}{v} + \frac{3v}{2} - v = \frac{4 + v^2}{2v} \rightarrow \frac{v' \cdot 2v}{4 + v^2} = \frac{1}{x} \rightarrow$$

$$\int \frac{2v}{4 + v^2} dv = \int \frac{dx}{x}.$$

A integração do lado esquerdo da equação pode ser realizada através da substituição $u = 4 + v^2$ e $du = 2v \cdot dv$. Logo, como:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln(4 + v^2) = \ln\left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

Portanto:

$$\ln\left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + C \rightarrow \ln\left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln x = C.$$

Podemos simplificar a expressão usando a propriedade da diferença de logaritmos:

$$\ln\left(\frac{4}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right) = C \rightarrow e^{\ln\left(\frac{4}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)} = e^C \rightarrow \frac{4}{x} + \frac{y^2}{x^3} = e^C \rightarrow y = x \cdot \sqrt{e^C \cdot x - 4}.$$

2.6.3 Equação de Bernoulli

Jacques Bernoulli (1654 - 1705) foi um matemático suíço, pioneiro no desenvolvimento do cálculo infinitesimal além do que foi feito por Newton e Leibniz. Ele publicou a primeira integração de uma equação diferencial. Bernoulli nasceu em uma família de matemáticos, ao total doze. Nenhuma família na história da humanidade produziu tantos matemáticos quanto a família Bernoulli, os quais contribuíram no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

A equação de Bernoulli é uma equação não linear que segue a forma geral:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n. \quad (13)$$

Para solucioná-la, primeiramente multiplicamos toda equação pelo inverso do seu termo não linear (y^{-n}):

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y \cdot y^{-n} = f(x) \cdot y^n \cdot y^{-n}.$$

A substituição a ser executada é $y \cdot y^{-n} = y^{1-n} = v$. Esse artifício transformará a equação não linear em linear.

Derivando pela Regra da Cadeia: $v' = (1 - n) \cdot y^{-n} \cdot y' \rightarrow \frac{v'}{1 - n} = y^{-n} \cdot y'$.

Pondo esse resultado na equação ($y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y \cdot y^{-n} = f(x) \cdot y^n \cdot y^{-n}$), segue que:

$$\frac{v'}{1 - n} + p(x) \cdot v = f(x).$$

Multiplicando-a por $(1 - n)$:

$$v' + (1 - n) \cdot p(x) \cdot v = (1 - n) \cdot f(x).$$

Essa equação é linear de primeira ordem, cujo método de resolução já estudamos na seção 2.4.

Exemplo 2.6.3

Como exemplo, retornaremos à situação anterior: $2xy \cdot y' = 4x^2 + 3y^2 \rightarrow y' = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}$. Alternativamente, podemos escrever essa expressão na forma:

$$y' - \frac{3}{2x} \cdot y = 2x \cdot y^{-1}.$$

Essa é uma equação de Bernoulli, visto que segue a forma geral da equação (13). Para resolvê-la, iremos multiplicar a identidade pelo inverso do termo não linear (y^{-1}), isto é, y :

$$y \cdot y' - \frac{3}{2x} \cdot y^2 = 2x.$$

Pondo $v = y^2$ e tomando a derivada $v' = 2y \cdot y'$, obtemos $\frac{v'}{2} = y \cdot y'$.

Realizando a substituição na expressão $\left(y \cdot y' - \frac{3}{2x} \cdot y^2 = 2x\right)$, encontramos:

$$\frac{v'}{2} - \frac{3}{2x} \cdot v = 2x.$$

Multiplicando a igualdade por 2:

$$v' - \frac{3}{x} \cdot v = 4x.$$

Agora, a equação é linear, cujo modo de resolução foi apresentado na seção 2.4.

$$u(x) = e^{\int \left(\frac{-3}{x}\right) dx} = e^{-3 \cdot \ln|x|} = x^{-3} \rightarrow$$

$$x^{-3} \cdot v' - x^{-3} \cdot \frac{3}{x} \cdot v = 4x \cdot x^{-3}.$$

Pela regra do produto de derivação, o lado esquerdo da equação é $(x^{-3} \cdot v)'$.

$$\int (x^{-3} \cdot v)' dx = \int 4x^{-2} dx \rightarrow$$

$$x^{-3} \cdot v = -4x^{-1} + C \rightarrow v = -4x^2 + C \cdot x^3 \rightarrow y^2 = -4x^2 + Cx^3 \rightarrow y = \sqrt{-4x^2 + C \cdot x^3}.$$

2.6.4 Equação de Riccati

Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754) foi um matemático e físico italiano com trabalhos na área de Hidráulica. Seus projetos foram úteis para a cidade de Veneza na construção de diques ao longo dos canais. Em Equações Diferenciais, Riccati contribuiu para o aperfeiçoamento de métodos de redução da ordem e de separação de variáveis.

A equação de Riccati é uma equação não linear

$$y' + p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^2 = f(x), \quad (14)$$

solucionada por meio do método de substituição. A escolha de uma solução está diretamente relacionada a uma equação de Bernoulli. Suponhamos que y_1 e y_2 são soluções para a equação de Riccati e, substituindo na equação (14), chegamos a:

$$y_1' + p(x) \cdot y_1 + q(x) \cdot y_1^2 = f(x)$$

e

$$y_2' + p(x) \cdot y_2 + q(x) \cdot y_2^2 = f(x).$$

Considere a seguinte equação de Bernoulli $z' + (p(x) + 2y_2 \cdot q(x)) \cdot z - q(x) \cdot z^2 = 0$. A diferença entre y_2 e y_1 será solução da mesma, porque se $z = y_2 - y_1$, ao substituirmos seus valores na equação de Bernoulli:

$$y_2' - y_1' + (p(x) + 2y_2 \cdot q(x))(y_2 - y_1) - q(y_2 - y_1)^2 = 0 \rightarrow$$

$$y_2' + p(x) \cdot y_2 - q(x) \cdot y_2^2 - y_1' - p(x) \cdot y_1 - q(x) \cdot y_1^2 + 2y_2^2 \cdot q(x) - 2y_2 \cdot y_1 \cdot q(x) + 2q(x) \cdot y_2 \cdot y_1 = 0 \rightarrow$$

$$y_2' + p(x) \cdot y_2 + q(x) \cdot y_2^2 - (y_1' + p(x) \cdot y_1 + q(x) \cdot y_1^2) = 0.$$

Os três primeiros e os três últimos termos do lado esquerdo da última equação formam expressões iguais a $f(x)$, logo escrevemos

$$f(x) - f(x) = 0,$$

provamos que $z = y_2 - y_1$ é solução para equação de Bernoulli $z' + (p(x) + 2y_2 \cdot q(x)) \cdot z - q(x) \cdot z^2 = 0$, supondo duas soluções para a de Ricatti. O resultado obtido garante uma relação entre as duas soluções propostas para a equação de Ricatti. Na equação de Bernoulli, a substituição conveniente para solucioná-la é tomar $v = z^{-1}$, ou seja, $z = \frac{1}{v}$. Portanto, se soubermos uma solução para a equação de Ricatti, por exemplo y_1 , a outra solução satisfaz a igualdade $y_2 = z + y_1$ e, implica que, $y_2 = \frac{1}{v} + y_1$.

Exemplo 2.6.4

Considere a equação ($y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$) e a solução $y_1 = x$. A substituição a ser feita é $y_2 = \frac{1}{v} + x$ e, então, $y_2' = -\frac{1}{v^2} \cdot v' + 1$.

$$\begin{aligned} -\frac{v'}{v^2} + 1 &= 1 + x^2 - 2x \left(\frac{1}{v} + x \right) + \left(\frac{1}{v} + x \right)^2 \rightarrow \\ -\frac{v'}{v^2} + 1 &= 1 + x^2 - \frac{2x}{v} - 2x^2 + \frac{1}{v^2} + x^2 + \frac{2x}{v}. \end{aligned}$$

Fazendo as simplificações possíveis:

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{v^2} \rightarrow v' = -1 \rightarrow v = -x + C.$$

Encontramos o valor de y_2 :

$$y_2 = \frac{1}{v} + x = \frac{1}{-x + C} + x.$$

2.6.5 Equação Exata

Dada uma solução implícita de uma equação diferencial $F(x, y) = C$ ao derivarmos retornaremos a equação dada. Fazendo a derivada parcial desta solução em relação a x e y , teremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

como a derivada parcial da função F em relação a x e a y são funções, podemos chamá-las de $M(x, y)$ e $N(x, y)$, respectivamente. Supondo que essas funções possuem derivadas parciais contínuas, obtemos:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0. \quad (15)$$

Se existir solução para essa equação, então, ela é chamada de exata. Sendo exata, teremos que as derivadas parciais da função $M(x, y)$ em relação a y , M_y e a derivada parcial

$N(x, y)$ em relação a x , N_x , serão iguais. Portanto, se $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$ admite solução segue que $M_y = N_x$. Essa condição será necessária, ou seja, se $M_y = N_x$, haverá solução para a equação. Para encontrá-la lembremos que $M(x, y)$ é uma função que corresponde a derivada parcial da função F em relação a x , para descobrirmos F convém integrarmos $M(x, y)$ em relação a x . Escrevemos $F(x, y) = \int M(x, y) dx = \int M(x, y) dx + C$, no qual $C = g(y)$ é uma função g que só depende de y , devido a variável y ser tratada como constante. Logo:

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y).$$

Como obtemos uma expressão para F , ao fazer a derivada de F em relação a y encontraremos $N(x, y)$, visto que $N(x, y)$ é a função que está definida como a derivada parcial de F em relação a y .

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y)$$

Em método, para solucionarmos a equação $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, integramos $M(x, y)$ em relação a x ou integramos $N(x, y)$ em relação a y , obtendo $F(x, y)$. Em seguida, derivamos $F(x, y)$ em relação a x ou F em relação a y de acordo com a escolha feita na integração. Encontramos uma expressão para $g'(x)$ ou $g'(y)$ e, posteriormente, para $g(x)$ ou $g(y)$.

Exemplo 2.6.5

Resolvamos a seguinte equação $(\cos x + \ln y) dx + \left(\frac{x}{y} + e^y\right) dy = 0$. Chamamos de $M(x, y) = \cos x + \ln y$ e $N(x, y) = \frac{x}{y} + e^y$. Verificaremos se existe solução para a equação, ou seja, a derivada parcial em relação a y de $M(x, y)$ deve ser igual a derivada parcial de x em relação a $N(x, y)$.

$$M_y = \frac{1}{y}$$

e

$$N_x = \frac{1}{y}.$$

Assim, existe solução e ela é exata. Para encontrarmos a solução $F(x, y)$ fazemos a integral de $M(x, y)$ em relação a x , temos:

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx = \int \cos x + \ln |y| dx = \sin x + x \cdot \ln |y| + g(y).$$

Fazendo a derivada da função $F(x, y)$ em relação a y , encontramos:

$$F_x = \frac{x}{y} + g'(y) = N(x, y) = \frac{x}{y} + e^y \rightarrow g'(y) = e^y \rightarrow g(y) = e^y + C.$$

Concluimos que:

$$\sin x + x \cdot \ln |y| + e^y + C = 0 \rightarrow \sin x + x \cdot \ln |y| + e^y = C.$$

Esta é a solução geral da equação exata. Ao derivá-la em relação a x e, posteriormente, em relação a y , retornaremos a equação inicial dada. Observe:

$$F_x = \cos x + \ln |y| = M(x, y)$$

e

$$F_y = \frac{x}{y} + e^y = N(x, y) \rightarrow$$

$$(\cos x + \ln y) dx + \left(\frac{x}{y} + e^y \right) dy = 0.$$

Contudo, voltamos a equação inicial dada como esperávamos.

2.6.6 Fatores Integrantes

Dada uma equação não exata, definimos fator integrante a função que ao multiplicarmos torna-a exata, sendo possível integrá-la, justificando o nome de fator integrante.

Assim, dada uma equação não exata, $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ com $M_y \neq N_x$, se $u(x, y)$ é o fator integrante, então, $u(x, y) \cdot M(x, y) dx + u(x, y) \cdot N(x, y) dy = 0$ é exata, isto é, $[u \cdot M]_y = [u \cdot N]_x$.

Encontrar qual o fator torna uma equação não exata em exata, na maioria dos casos não é imediato, principalmente, se a função que determina esse fator depende das variáveis x e y simultaneamente, por isso, vamos simplificar esse fator integrante e supormos que esse dependa somente da variável y , logo:

$$u(y) \cdot M(x, y) dx + u(y) \cdot N(x, y) dy = 0.$$

Como $u(x, y)$ é o fator integrante, a equação sendo exata vale que:

$$[u(y) \cdot M]_y = [u(y) \cdot N]_x.$$

Fazendo as derivadas parciais em relação a y no lado esquerdo da equação e em relação a x no lado direito, obtemos:

$$\begin{aligned}
u'(y) \cdot M + M_y \cdot u(y) &= N_x \cdot u(y) \rightarrow \\
u'(y) \cdot M &= N_x \cdot u(y) - M_y \cdot u(y) \rightarrow \\
u'(y) \cdot M &= u(y) \cdot (N_x - M_y) \rightarrow \frac{u'(y)}{u(y)} = \frac{N_x - M_y}{M}.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, integrando ambos lados em relação a y :

$$\int \frac{u'(y)}{u(y)} dy = \int \frac{N_x - M_y}{M} dy \rightarrow \ln |u(y)| = \int \frac{N_x - M_y}{M} dy.$$

Como a integração do lado direito da última identidade acima pode depender de x e y , para existir a possibilidade da igualdade ser verdadeira, suponhamos que essa expressão dependa somente de y . A razão $\frac{N_x - M_y}{M}$ deve também depender somente de y . Aplicando a exponencial em ambos os lados da última igualdade:

$$u(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}. \quad (16)$$

Também podemos considerar o fator integrante $u(x, y)$, dependendo só de x , temos:

$$\begin{aligned}
[u(x) \cdot M]_y &= [u(x) \cdot N]_x \rightarrow \\
u(x) \cdot M_y &= u'(x) \cdot N + u(x) \cdot N_x \rightarrow \\
u(x) \cdot (M_y - N_x) &= u'(x) \cdot N \rightarrow \\
\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx &= \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \rightarrow \ln |u(x)| = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx.
\end{aligned}$$

A razão $\frac{M_y - N_x}{N}$ deve depender somente de x com intuito de satisfazer a igualdade, aplicando a exponencial em ambos os lados da última equação:

$$u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}. \quad (17)$$

Exemplo 2.6.6

Iremos solucionar a equação diferencial $(4x^2 + 3 \cos y) dx - (x \cdot \sen y) dy = 0$. Sabemos que $M(x, y) = 4x^2 + 3 \cos y$ e $N(x, y) = -x \cdot \sen y$. Vamos verificar se essa equação é exata, ou seja, $M_y = N_x$.

$$M_y = -3 \sen y$$

$$N_x = -\operatorname{sen} y$$

Logo, a equação não é exata. Para ser possível encontrar um fator integrante que dependa de y ou de x somente é necessário que as razões $\frac{N_x - M_y}{M}$ e $\frac{M_y - N_x}{N}$ dependa de y ou só de x , respectivamente. Analisando cada uma das razões:

$$\begin{aligned}\frac{N_x - M_y}{M} &= \frac{-\operatorname{sen} y + 3 \operatorname{sen} y}{4x^2 + 3 \cos y} = \frac{2 \operatorname{sen} y}{4x^2 + 3 \cos y} \rightarrow \\ \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{-3 \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y}{-x \cdot \operatorname{sen} y} = \frac{2}{x}.\end{aligned}$$

A primeira razão $\frac{N_x - M_y}{M}$ não está dependente somente de y , mas a segunda razão $\frac{M_y - N_x}{N}$ depende só de x . Para encontrar o fator integrante não é preciso que ambas as razões satisfaçam a condição. Devido a segunda razão cumpri-la, garante-se o encontro de um fator integrante dado por:

$$u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \cdot \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Multiplicando a equação diferencial $[(4x^2 + 3 \cos y) dx - (x \cdot \operatorname{sen} y) dy = 0]$ pelo fator integrante:

$$\begin{aligned}x^2 \cdot (4x^2 + 3 \cos y) dx - x^2 \cdot (x \cdot \operatorname{sen} y) dy &= 0 \rightarrow \\ 4x^4 + 3x^2 \cdot \cos y dx - x^3 \cdot \operatorname{sen} y dy &= 0.\end{aligned}$$

De fato, a equação é exata, posto que $M_y = N_x$ como observamos abaixo:

$$M_y = -3x^2 \cdot \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad N_x = -3x^2 \cdot \operatorname{sen} y.$$

A partir daí, utilizamos o método de resolução de uma equação exata apresentado na subseção 2.6.5, considerando a igualdade:

$$(4x^4 + 3x^2 \cdot \cos y) \cdot dx - (x^3 \cdot \operatorname{sen} y) \cdot dy = 0,$$

com $M(x, y) = 4x^4 + 3x^2 \cdot \cos y$ e $N(x, y) = -x^3 \cdot \operatorname{sen} y$. Temos:

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (4x^4 + 3x^2 \cdot \cos y) dx = \frac{4x^5}{5} + x^3 \cdot \cos y + g(y).$$

Derivando $F(x, y)$ em relação a y , encontraremos uma expressão para $N(x, y)$.

$$F_y = -x^3 \cdot \operatorname{sen} y + g'(y) = -x^3 \cdot \operatorname{sen} y \rightarrow g(y) = C.$$

Substituindo na expressão obtida para $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \frac{4x^5}{5} + x^3 \cdot \cos y + C \rightarrow$$

$$C = \frac{4x^5}{5} + x^3 \cdot \cos y.$$

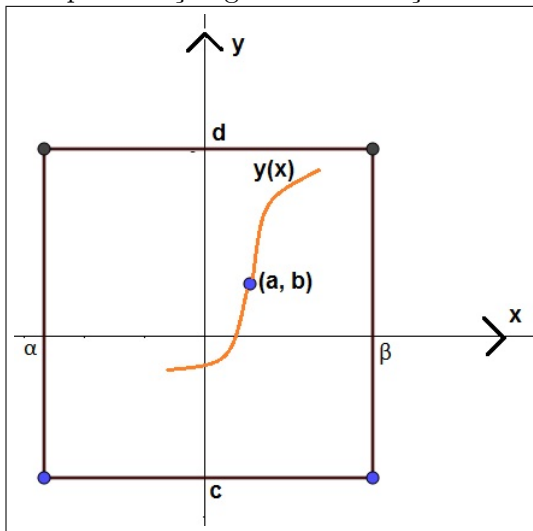
Sendo essa a solução da equação $(4x^2 + 3 \cos y) dx - (x \cdot \operatorname{sen} y) dy = 0$.

2.7 Teorema de Existência e Unicidade de Solução

Estudaremos, primeiramente, esse teorema para equações diferenciais de primeira ordem.

Considere o P.V.I (Problema de Valor Inicial) dado por $y' = f(x, y)$ e $y(a) = b$. Seja um retângulo $R = \{\alpha < x < \beta, c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$ com (a, b) no interior de R , como representado na figura.

Figura 1: Representação gráfica da solução de uma E.D.O.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

1ª Condição: Se $f(x, y)$ é contínua em R , então, existe solução.

Demonstração:

Primeiramente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever o P.V.I, $y' = f(x, y)$ e $y(a) = b$, na forma abaixo:

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(s, y(s)) ds \rightarrow y(x) = b + \int_a^x f(s, y(s)) ds.$$

Observe que ao fazer a derivada da expressão acima recuperamos o P.V.I. Sendo $y(a)$ constante, sua derivada é nula e a derivada de uma integral definida é o integrando calculado em x , logo, $y'(x) = f(x, y(x))$. Também é válido que $y(a) = b$, pois ao substituir a por x obtemos $y(a) = b$ sendo $\int_a^a f(s, y(s)) \cdot ds = 0$. Usando aproximações sucessivas de Picard² no qual a $(n + 1)$ -ésima aproximação é dado por:

$$y_{n+1} = y_0 + \int_a^x f(s, y_n(s)) ds.$$

Chegaremos a sequência de funções, como abaixo:

$$y_0(x) = b;$$

²Charles Émile Picard (1856-1941) foi um matemático francês, colaborou com teorias importantes para o avanço da pesquisa em análise, geometria algébrica e mecânica.

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= b + \int_a^x f(s, y_0) ds; \\
y_2(x) &= b + \int_a^x f(s, y_1) ds; \\
&\vdots \\
y_{n+1} &= b + \int_a^x f(s, y_n(s)) ds.
\end{aligned}$$

Como a função $f(x, y)$ é contínua existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$|f(x, y)| \leq M \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Realizando as diferenças entre os termos da sequência descrita anteriormente, obtemos:

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_a^x f(s, y_0) ds \right|.$$

Como $|\int_a^x f(s, y_0) ds| \leq |\int_a^x |f(s, y_0)| ds|$, escrevemos:

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_a^x f(s, y_0) ds \right| \leq \left| \int_a^x |f(s, y_0)| ds \right| \leq \left| \int_a^x M ds \right| = M \cdot (x - a).$$

Tomando a diferença $|y_2(x) - y_1(x)|$:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_a^x f(s, y_1) ds - \int_a^x f(s, y_0) ds \right| \leq \left| \int_a^x |f(s, y_1) - f(s, y_0)| ds \right|.$$

Mas $|f(s, y_1) - f(s, y_0)| \leq K \cdot |y_1 - y_0|$, logo:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \left| \int_a^x |f(s, y_1) - f(s, y_0)| ds \right| \leq \left| \int_a^x K \cdot |y_1 - y_0| ds \right|.$$

Lembrando que $|y_1(s) - y_0| \leq M \cdot (s - a)$:

$$\begin{aligned}
|y_2(x) - y_1(x)| &\leq \left| \int_a^x K \cdot |y_1 - y_0| ds \right| \leq K \cdot \int_a^x M \cdot (s - a) ds = \\
&= K \cdot M \left[\frac{s^2}{2} - a \cdot s \right]_a^x = K \cdot M \cdot \frac{(x - a)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Calcularemos a diferença $|y_3(x) - y_2(x)|$:

$$|y_3(x) - y_2(x)| = \left| \int_a^x f(s, y_2) ds - \int_a^x f(s, y_1) ds \right| \leq \left| \int_a^x |f(s, y_2) - f(s, y_1)| ds \right|.$$

E $|f(s, y_2) - f(s, y_1)| \leq K \cdot |y_2 - y_1|$, assim:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_a^x |f(s, y_2) - f(s, y_1)| ds \right| \leq \left| \int_a^x K \cdot |y_2 - y_1| ds \right|.$$

Como $|y_2 - y_1| \leq M \cdot K \cdot \frac{(s-a)^2}{2}$:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_a^x K \cdot |y_2 - y_1| ds \right| \leq K \cdot \int_a^x M \cdot K \frac{(s-a)^2}{2} ds = K^2 \cdot M \cdot \frac{(x-a)^3}{6}.$$

Supondo, por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq K^{n-2} \cdot M \frac{|x-a|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Segue:

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \int_a^x |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| \cdot ds \leq K \int_a^x K^{n-2} \cdot M \frac{|s-a|^{n-1}}{(n-1)!} \cdot ds = \\ &= K^{n-1} \cdot M \cdot \frac{|x-a|^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, as diferenças serão:

$$\begin{aligned} |y_m(x) - y_n(x)| &= |y_m(x) - y_{m-1}(x) + y_{m-1}(x) - y_n(x)| \leq |y_m(x) - y_{m-1}(x)| + |y_{m-1}(x) - y_n(x)| \leq \\ &\leq |y_m(x) - y_{m-1}(x)| + |y_{m-1}(x) - y_{m-2}(x)| + \dots + |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \\ &\leq K^{m-1} \cdot M \cdot \frac{|x-a|^m}{m!} + K^{m-2} \cdot M \cdot \frac{|x-a|^{m-1}}{m-1!} + \dots + K^n \cdot M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1!} \leq \\ &\leq \sum_{n=i}^{\infty} M \cdot K^{m-i} \frac{|x-a|^i}{i!}. \end{aligned}$$

A série $\sum_{n=i}^{\infty} M \cdot K^{m-i} \frac{|x-a|^i}{i!}$ converge, pois pelo teste da razão:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{M \cdot K^{m-i-1} \cdot \frac{|x-a|^{i+1}}{i+1!}}{M \cdot K^{m-i} \cdot \frac{|x-a|^i}{i!}} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{M \cdot K^{m-i-1} \cdot |x-a|^{i+1} \cdot i!}{i+1! \cdot M \cdot K^{m-i} \cdot |x-a|^i} = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x-a|}{k \cdot (i+1)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Concluimos pelo teste da razão que a série $\sum_{n=i}^{\infty} M \cdot K^{m-i} \cdot \frac{|x-a|^i}{i!}$ converge.

Contudo, existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq \sum_{n=i}^{\infty} M \cdot K^{m-i} \frac{|x-a|^i}{i!} < \epsilon.$$

Obtemos $|y_m(x) - y_n(x)| < \epsilon$, daí $y(x)$ é contínua e $y(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Como $y_n(x) = y(a) + \int_a^x f(s, y(s)) ds$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} y_n(x) &= y(a) + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^x f(s, y(s)) ds \rightarrow \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^x f(s, y(s)) ds &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^x f(s, \lim_{i \rightarrow \infty} y_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Porém, verifica-se:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(s, y_n(s)) ds - \int_a^x f(s, y(s)) ds \right| &\leq \int_a^x |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \leq \\ &\leq M \cdot \int_a^x |y_n(s) - y(s)| ds \leq M \cdot K \cdot |x-a| \cdot \sum_{n=i}^{\infty} M \cdot K^{m-i} \frac{|x-a|^i}{i!} < \epsilon. \end{aligned}$$

É válido, então, $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^x f(s, y_{n-1}(s)) ds = \int_a^x f(s, \lim_{i \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds$. Portanto;

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(s, \lim_{i \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds = y(a) + \int_a^x f(s, y(s)) ds.$$

Derivando a equação acima em relação a t chegamos em $y(t)$ como solução do problema de valor inicial. ■

2ª **condição:** Se f_y é contínua, então, a solução é única.

Demonstração:

Provaremos a unicidade dessa solução. Vamos supor $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para o problema de valor inicial e tomemos $u(x)$ tal que:

$$u(x) = \int_a^x |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

e $u(a) = 0$. Vêm;

$$y_1(x) = \int_a^x y_1'(s) ds = \int_a^x f(s, y_1(s)) ds \text{ e}$$

$$y_2(x) = \int_a^x y_2'(s) ds = \int_a^x f(s, y_2(s)) ds. \rightarrow$$

$$\begin{aligned} u'(x) = |y_1(x) - y_2(x)| &\leq \int_a^x |y_1'(s) - y_2'(s)| ds \leq \int_a^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \leq \\ &\leq M \cdot \int_a^x |y_1'(s) - y_2'(s)| ds. \end{aligned}$$

Afirmamos a desigualdade, $u'(x) \leq M \cdot u(x)$. Subtraindo $M \cdot u(x)$ a ambos os lados dessa desigualdade chegamos a $u'(x) - M \cdot u(x) \leq 0$. Multiplicando a desigualdade por e^{-Mx} , temos:

$$u'(x) \cdot e^{-Mx} - M \cdot u(x) \cdot e^{-Mx} \leq 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(u(x) \cdot e^{-Mx}) \leq 0,$$

com $u(a) = 0$.

Em vista disso, $u(x) \cdot e^{-Mx} = 0$, conseqüentemente, $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y_1(x) = y_2(x)$. ■

Exemplo 2.7.1

Exemplificando, analisaremos a existência e unicidade do PVI: $y' = y^2$ com $y(1) = 1$. Como $f(x, y) = y^2$ está definida em todo o plano \mathbb{R}^2 , temos $f(x, y)$ contínua em \mathbb{R}^2 e garantimos a existência de solução.

Posteriormente, verificaremos se a derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y é contínua. Como $f_y = 2y$ e essa função é contínua em todo plano, confirmamos a unicidade dessa solução.

Para encontrá-la análise que $y' = y^2$ é uma equação diferencial separável, podemos integrá-la em ambos os lados.

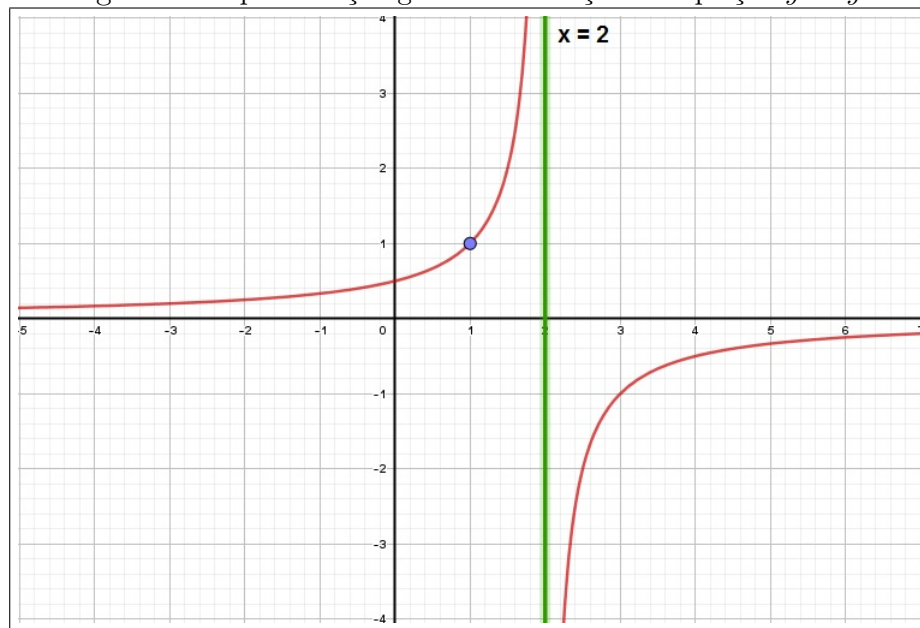
$$\frac{y'}{y^2} = 1 \rightarrow \int \frac{y'}{y^2} dy = \int 1 dx \rightarrow -y^{-1} = x + C \rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{c - x}.$$

Usando a condição inicial $y(1) = 1$, resulta em $c = 2 \rightarrow y(x) = \frac{1}{2 - x}$.

Graficamente, essa solução é representada pela figura abaixo.

Figura 2: Representação gráfica da solução da equação $y' = y^2$



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Como vemos na figura, a solução é uma curva crescente que passa pelo ponto $(1, 1)$, a partir desse fato, chegamos a conclusão que a solução existe, no entanto, não está definida em toda reta \mathbb{R} , mas no intervalo $(-\infty, 2)$. Além disso, as curvas não se cruzam, graficamente mostra a unicidade da solução.

Exemplo: 2.7.2

Considere outro exemplo $y^2 + x^2 \cdot y' = 0$ com valor inicial $y(0) = 0$. Usando o teste de existência e unicidade, sendo $y' = f(x, y) = \frac{-y^2}{x^2}$, afirmamos que a função é contínua, com exceção da reta $x = 0$, pelo teorema de existência há solução. Verificando a derivada parcial de $f(x, y)$, sendo $f_y = \frac{-2y}{x^2}$, asseguramos a unicidade, pois a função é contínua, desde que desconsidere a reta $x = 0$. Quanto a reta $x = 0$, nada é possível de ser afirmado.

Iremos solucionar a equação diferencial. Ela sendo separável, escrevemos:

$$y^2 + x^2 \cdot y' = 0 \rightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \rightarrow$$

$$-\int \frac{y'}{y^2} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \rightarrow y^{-1} = -x^{-1} + C.$$

A solução pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$y = \frac{x}{Cx - 1}.$$

Calculando o valor da constante C com $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{0}{-1} \rightarrow 0 = 0.$$

Como análise, percebemos que independente do valor de C , a curva $\frac{x}{Cx - 1}$ passa pelo ponto $(0, 0)$ e existe infinitas soluções para o ponto considerado.

Interpretando a curva descrita por $y = \frac{x}{Cx - 1}$, veja que devemos ter $y \neq \frac{1}{C}$. Há uma assíntota vertical de limite para cada valor de C com $x = \frac{1}{C}$. Se $x \mapsto \infty$, teremos uma indeterminação:

$$\frac{x}{Cx - 1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}.$$

Chamando $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = Cx - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x, y)}{g'(x, y)} = \frac{1}{C}.$$

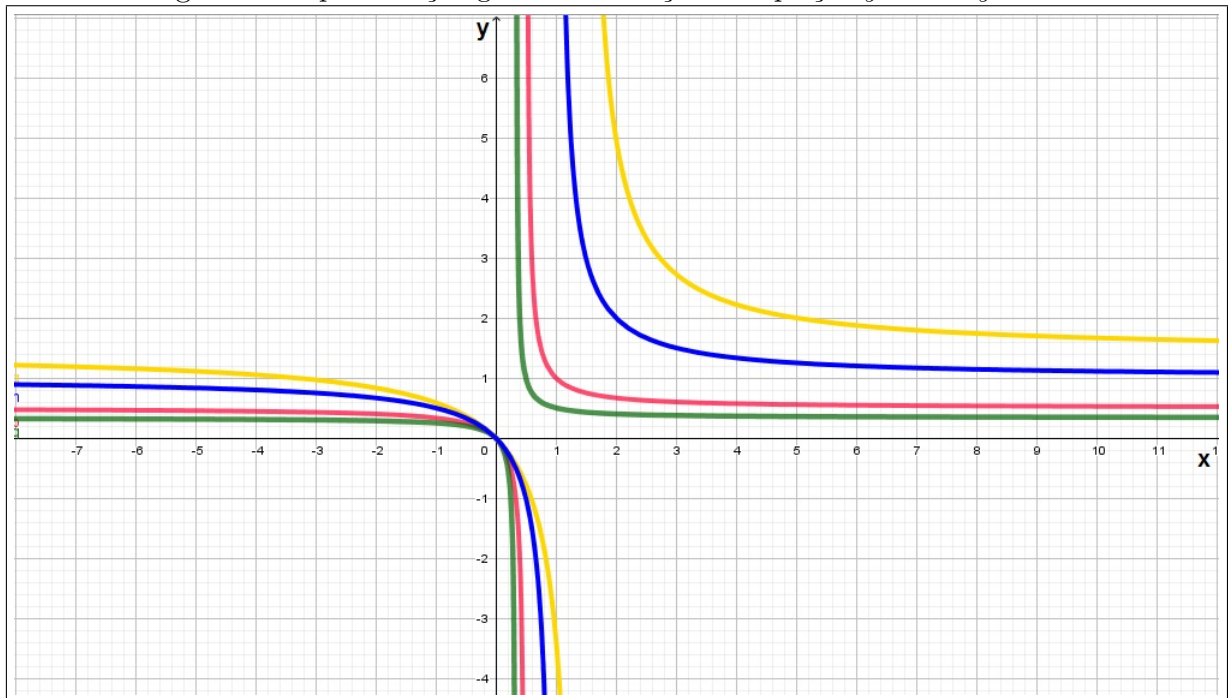
Pela Regra de L' Hopital³ podemos concluir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{Cx - 1} = \frac{1}{C}.$$

Há uma assíntota horizontal limite para cada valor de C , tal que $y = \frac{1}{C}$.

Graficamente:

³Teorema de L' Hopital: Sejam f e g diferenciáveis e $g' \neq 0$, com $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$, se $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Figura 3: Representação gráfica da solução da equação $y^2 + x^2 \cdot y' = 0$.

Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Observe no gráfico que as curvas descritas pela expressão $y = \frac{x}{Cx - 1}$ são sempre decrescentes, visto que a derivada é sempre negativa. No ponto $(0, 0)$, haverá infinitas curvas passando por ele e dentre os pontos sobre o eixo y este é o único ponto que pode ser solução para a função $y = \frac{x}{Cx - 1}$. Ainda, exceto no ponto $(0, 0)$, as curvas não se encontram, geometricamente prova-se a unicidade das soluções. Dizemos que no ponto $(0, 0)$ existe infinitas soluções, sobre o eixo y não existe nenhuma outra solução exceto esse ponto e para os demais pontos do plano \mathbb{R}^2 há solução única.

2.7.1 Teorema de Existência e Unicidade para Equações de Ordem n

Dada uma equação diferencial de ordem n com $P_n(x) = 1$:

$$y^n + P_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + P_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} \dots + P_1(x) \cdot y^1 + P_0(x) \cdot y = f(x). \quad (18)$$

Sendo $P_i(x)$ coeficientes contínuos e $f(x)$ contínua em um intervalo I , então existe uma única solução em I para a equação.

Exemplo 2.7.3

Tomando a equação de segunda ordem $y'' + y = 5x$. Para aplicar o teorema de existência e unicidade, primeiramente, o coeficiente da derivada de maior ordem deve ser igual a 1, o que é satisfeito nesse exemplo. Os coeficientes devem ser contínuos também,

como todos são constantes e iguais a 1 essa condição foi cumprida. Finalmente, $f(x) = 5x$ é contínua em toda reta. Pelo teorema de existência e unicidade, existe e é única a solução para dado valor que pertence a I , nesse caso, toda reta real.

Exemplo 2.7.4

Considere a equação $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 5y = 0$. Como o coeficiente da derivada de maior ordem deve ser igual a 1, dividindo toda equação por x^2 temos como resultado:

$$y'' - \frac{2x}{x^2} \cdot y' + \frac{5y}{x^2} = 0 \rightarrow y'' - \frac{2}{x} \cdot y' + \frac{5y}{x^2} = 0,$$

os coeficientes dessa equação são contínuos, desde que $x \neq 0$. Para pontos sobre o eixo y , nada pode ser afirmado quanto a existência e unicidade de solução, para os demais pontos, ela existe e é única.

2.8 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária de Ordem n

Dada uma equação linear de ordem n :

$$y^n + P_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + P_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} + \dots + P_1(x) \cdot y^1 + P_0(x) = f(x).$$

Para simplificar a escrita, chamamos $y^n + P_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + P_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} + \dots + P_1(x) \cdot y + P_0(x)$ de M . Com a nova notação:

$$M \cdot y = f(x),$$

a equação é não homogênea. A igualdade $M \cdot y = 0$ chamamos de homogênea associada. Seja $y_g(x)$ a solução geral de $M \cdot y = f(x)$. Uma solução particular de $M \cdot y = f(x)$ denominaremos de $y_p(x)$. Então:

$$M \cdot y_g(x) = f(x) \text{ e } M \cdot y_p(x) = f(x).$$

Fazendo a diferença entre as duas equações acima:

$$M \cdot y_g(x) - M \cdot y_p(x) = f(x) - f(x) = 0 \rightarrow M \cdot (y_g(x) - y_p(x)) = 0.$$

A diferença entre $y_g(x) - y_p(x)$ resolve a equação $M \cdot y = 0$. É, contudo, a diferença $y_g(x) - y_p(x)$ solução da homogênea associada, denominaremos ela por y . Assim:

$$y = y_g(x) - y_p(x) \rightarrow y_g(x) = y + y_p(x).$$

Chegamos ao resultado que a solução geral de uma equação de ordem n é dada pela soma entre a solução da homogênea associada e a solução de uma particular.

2.8.1 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária de Ordem n Homogênea

Uma equação diferencial ordinária de ordem n homogênea ($y^n + P_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + P_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} + \dots + P_1(x) \cdot y^1 + P_0(x) \cdot y = 0$) admite n soluções linearmente independentes.

Um fato importante sobre a sua solução é, se $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são soluções, a combinação linear das mesmas é solução $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x)$, porque anula-se a equação ao substituir e derivar $y_1(x), y_2(x)$ até $y_n(x)$.

Isto é explicado pelo fato da derivada da soma é a soma das derivadas, as constantes podem ser isoladas de tal maneira que a combinação linear das soluções iguala a zero a equação.

Por exemplo, para uma equação de ordem dois homogênea, uma solução a ser sugerida é $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$. Se forem dados os valores iniciais $y(a) = b_0$ e $y'(a) = b_1$, teremos:

$$\begin{aligned} y(a) &= c_1 \cdot y_1(a) + c_2 \cdot y_2(a) = b_0. \\ y'(a) &= c_1 \cdot y_1'(a) + c_2 \cdot y_2'(a) = b_1. \end{aligned}$$

Observe que temos acima um sistema, para possuir uma única solução para c_1 e c_2 o determinante deve ser diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

Esse determinante recebe um nome particular Wronskiano, devido ao matemático José Maria Hoene-Wronski (1776-1853)⁴, representamos esse determinante por $W(y_1, y_2)(a)$. Se temos soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente dependentes, o determinante será sempre zero, isto é válido para n soluções.

Para justificar o fato, primeiramente, se temos n soluções linearmente dependentes $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, então consigo encontrar $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tal que a equação $k_1 \cdot y_1(x) + k_2 \cdot y_2(x) + \dots + k_n \cdot y_n(x) = 0$ seja satisfeita, sem $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ serem todos identicamente nulos. Tomando as $n - 1$ derivadas da última equação:

$$\begin{cases} k_1 \cdot y_1(x) + k_2 \cdot y_2(x) + \dots + k_n \cdot y_n(x) = 0. \\ k_1 \cdot y_1'(x) + k_2 \cdot y_2'(x) + \dots + k_n \cdot y_n'(x) = 0. \\ k_1 \cdot y_1''(x) + k_2 \cdot y_2''(x) + \dots + k_n \cdot y_n''(x) = 0. \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = 0. \\ k_1 \cdot y_1^{n-1}(x) + k_2 \cdot y_2^{n-1}(x) + \dots + k_n \cdot y_n^{n-1}(x) = 0. \end{cases}$$

Representando na forma de matriz:

⁴José Maria Hoene-Wronski foi matemático, físico, inventor, advogado e economista. A nível de realizações acadêmicas científicas de Wronski e a amplitude de seus objetivos Wronski foi colocado na primeira fila de europeus metafísicos no início do século XIX.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Uma solução trivial seria k_1, k_2, \dots, k_n , todos identicamente nulos, mas como as soluções são linearmente dependentes estamos em busca de outra solução para k_1, k_2, \dots, k_n . Para cumprir a equação, a matriz com coeficientes abaixo deve ter determinante (Wronskiano) igual a zero, logo temos:

$$W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Para as soluções linearmente independentes o determinante (Wronskiano) será diferente de zero. Isso se explica, porque ao supormos por absurdo, soluções linearmente independentes $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ da equação $y^n + P_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + P_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} + \dots + P_1(x) \cdot y^1 + P_0(x) \cdot y = 0$ e Wronskiano igual a zero, podemos escrever a solução na forma $k_1 \cdot y_1(x) + k_2 \cdot y_2(x) + \dots + k_n \cdot y_n(x) = 0$.

Como supomos Wronskiano igual a zero, vale que:

$$W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \cdots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Então, podemos escrever as equações:

$$\begin{cases} k_1 \cdot y_1(x) + k_2 \cdot y_2(x) + \cdots + k_n \cdot y_n(x) = 0 \\ k_1 \cdot y_1'(x) + k_2 \cdot y_2'(x) + \cdots + k_n \cdot y_n'(x) = 0 \\ k_1 \cdot y_1''(x) + k_2 \cdot y_2''(x) + \cdots + k_n \cdot y_n''(x) = 0 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = 0 \\ k_1 \cdot y_1^{n-1}(x) + k_2 \cdot y_2^{n-1}(x) + \cdots + k_n \cdot y_n^{n-1}(x) = 0. \end{cases}$$

Chamando a primeira equação do sistema acima de $y(x)$, a segunda de $y'(x)$, a terceira de $y''(x)$ e, assim sucessivamente, até a n -ésima equação de $y^{n-1}(x)$. Logo, temos $y(x) = y'(x) = y''(x) = \cdots = y^{n-1}(x) = 0$.

Lembrando que supomos as soluções como linearmente independentes, a combinação linear $k_1 \cdot y_1(x) + k_2 \cdot y_2(x) + \cdots + k_n \cdot y_n(x) = 0$ só pode ser zero, se todos k_1, k_2, \dots, k_n forem iguais a zero. Mas, Wronskiano sendo zero permite infinitos valores k_1, k_2, \dots, k_n que anule a equação. Absurdo!

Agora, abordaremos métodos para solucionarmos uma equação diferencial ordinária de ordem n homogênea.

2.8.2 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária de Ordem n Homogênea com Coeficientes Constantes

Tomemos a equação:

$$y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0, \quad (19)$$

com $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ constantes. Para encontrarmos uma solução $y(x)$ que ao fazer a derivada n vezes e ao somarmos suas derivadas a equação resulta em zero, percebemos a possibilidade de propormos $y(x) = e^{kx}$, posto que, pela regra da cadeia, as derivadas dessa função, $y'(x) = k \cdot e^{kx}$, $y''(x) = k^2 \cdot e^{kx}$, \dots , $y^{n-1}(x) = k^{n-1} \cdot e^{kx}$, $y^n(x) = k^n \cdot e^{kx}$ se diferem pelo expoente de k , somente. É possível colocar e^{kx} em evidência como apresentamos abaixo:

$$\begin{aligned} k^n \cdot e^{kx} + a_{n-1} \cdot k^{n-1} \cdot e^{kx} + \cdots + a_2 \cdot k^2 \cdot e^{kx} + a_1 \cdot k \cdot e^{kx} + a_0 \cdot e^{kx} = 0 \rightarrow \\ e^{kx} \cdot (k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0) = 0, \end{aligned}$$

o produto entre e^{kx} e o somatório entre parênteses é igual a zero. Como $e^{kx} \neq 0$, a expressão $k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0 = 0$. Essa é chamada de equação característica.

A igualdade vai ter n raízes, elas podem ser todas distintas ou serem iguais e possuir determinada multiplicidade. Ainda, podem ser complexas. Falaremos dessas possíveis situações separadamente.

1º CASO: A equação ter n raízes distintas e reais.

Seja $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}, k_n$ as raízes. A solução é da forma:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2 \cdot e^{k_2 x} + c_3 \cdot e^{k_3 x} + \dots + c_n \cdot e^{k_n x}.$$

Exemplo: 2.8.1

Considere a equação $y'' + 2y' - 8y = 0$. A possível solução é $y(x) = e^{kx}$ e $y'(x) = k \cdot e^{kx}$ e $y''(x) = k^2 \cdot e^{kx}$. Então:

$$k^2 \cdot e^{kx} + 2 \cdot (k \cdot e^{kx}) - 8 \cdot (e^{kx}) = 0 \rightarrow e^{kx} \cdot (k^2 + 2k - 8) = 0.$$

As raízes da equação característica são: $k_1 = -4$ e $k_2 = 2$. E as soluções $y_1(x) = e^{-4x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$ são reais distintas, ou seja, linearmente independentes. Portanto, $y(x) = c_1 \cdot e^{-4x} + c_2 \cdot e^{2x}$.

2º CASO: A equação ter n raízes distintas e complexas.

Se a equação admite uma raiz complexa $k_1 = a + bi$ o conjugado também será raiz $k_2 = a - bi$. Podemos escrever $y_1(x) = e^{(a+bi)x}$ e $y_2(x) = e^{(a-bi)x}$. Aplicando propriedades de potências para $y_1(x)$:

$$y_1(x) = e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{bix}.$$

Usando a aproximação pelo polinômio de Taylor (1685 - 1731)⁵ para aproximar o valor da função $f(x) = e^x$ no ponto inicial $x_0 = 0$:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Tomando a função $f(x) = \sin x$ e aproximando-a pelo polinômio de Taylor, obtemos:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Considerando a função $f(x) = \cos x$ e aproximando-a pelo polinômio de Taylor, chegamos a:

⁵Brook Taylor (1685 - 1731) foi um matemático que agregou à Matemática o cálculo das diferenças finitas, a integração por partes e descobriu a fórmula conhecida como a expansão de Taylor. O polinômio de Taylor é definido pela expressão: $f(x) \approx P_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Podemos fazer infinitamente aproximações com polinômios de grau cada vez maiores, fazendo os polinômios aproximarem das funções, no limite consideramos a validade da igualdade.

Depois dessas aproximações, a equação conhecida como fórmula de Euler⁶, nos diz que:

$$\begin{aligned} e^{ibx} &= 1 + ibx + \frac{(ibx)^2}{2!} + \frac{(ibx)^3}{3!} + \frac{(ibx)^4}{4!} + \frac{(ibx)^5}{5!} + \frac{(ibx)^6}{6!} + \dots \rightarrow \\ e^{ibx} &= 1 + ibx - \frac{(bx)^2}{2!} - i \cdot \frac{(bx)^3}{3!} + \frac{(bx)^4}{4!} + i \cdot \frac{(bx)^5}{5!} - \frac{(bx)^6}{6!} + \dots \rightarrow \\ e^{ibx} &= 1 - \frac{(bx)^2}{2!} + \frac{(bx)^4}{4!} - \frac{(bx)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \left(bx - \frac{(bx)^3}{3!} + \frac{(bx)^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \rightarrow \\ e^{ibx} &= \cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx). \end{aligned}$$

Dessa forma, a solução pode ser escrita como:

$$y_1(x) = e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{bix} = e^{ax} \cdot (\cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx)).$$

Analogicamente, o conjugado de $a + bi$ também pode ser expresso em termos da fórmula de Euler:

$$y_2(x) = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-bix} = e^{ax} \cdot (\cos(bx) - i \operatorname{sen}(bx)).$$

Exemplo 2.8.2

Resolvamos a equação $y'' - 4y' + 5y = 0$. Sendo a solução $y(x) = e^{kx}$, substituindo-a na igualdade:

$$k^2 \cdot e^{kx} - 4 \cdot k \cdot e^{kx} + 5 \cdot e^{kx} = 0 \rightarrow e^{kx} \cdot (k^2 - 4k + 5) = 0.$$

As raízes da equação característica $(k^2 - 4k + 5)$ são $2 + i$ ou $2 - i$. A solução geral é:

⁶Leonhard Euler (1707 - 1783) foi o matemático que mais contribuiu em produção científica na história para a Matemática, Física, Engenharia Mecânica, foram, somente em livros e artigos, 866 publicações. Nos mais diversos ramos da Matemática, Euler deixou sua contribuição, integrou o Cálculo Diferencial de Leibniz e o método de Newton em Análise Matemática, refinou a noção de uma função, foi pioneiro no campo da Topologia e fez a Teoria dos Números em uma Ciência, dentre outros feitos.

$$\begin{aligned}
 y(x) &= c_1 \cdot e^{(2+i)x} + c_2 \cdot e^{(2-i)x} \rightarrow \\
 y(x) &= c_1 \cdot e^{2x}(\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)) + c_2 \cdot e^{2x}(\cos(x) - i \operatorname{sen}(x)) \rightarrow \\
 y(x) &= (c_1 + c_2) \cdot e^{2x} \cdot \cos x + (c_1 - c_2) i \cdot e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(x).
 \end{aligned}$$

Chamando $(c_1 + c_2)$ de C_1 e $(c_1 - c_2)i$ de C_2 , reescrevemos a última igualdade como:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos(x) + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(x).$$

Esta é a solução da equação diferencial $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3º CASO: A equação ter n raízes reais repetidas.

Dada uma equação, essa pode admitir raízes reais repetidas. A quantidade de vezes que essa raiz repete-se como solução denominamos de multiplicidade.

Considere a equação diferencial $y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ com equação característica $(k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \dots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0)$ que pode ser escrita na forma $(k + r)^n = 0$. Sabemos que $y(x) = e^{kr}$ é solução para a equação, mas sabemos que ela permite n raízes. Com objetivo de descobrir as demais, iremos multiplicar a solução já conhecida por uma função desconhecida $u(x)$. De tal maneira que, $y(x) = u(x) \cdot e^{rx}$. Fazendo as derivadas, encontramos:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= u'(x) \cdot e^{rx} + u(x) \cdot r \cdot e^{rx} = e^{rx}(u'(x) + u(x) \cdot r) \rightarrow \\
 y''(x) &= u''(x) \cdot e^{rx} + r \cdot e^{rx} \cdot u'(x) + u'(x) \cdot r \cdot e^{rx} + u(x) \cdot r^2 \cdot e^{rx} = \\
 &= e^{rx} \cdot (u''(x) + u'(x)(2r \cdot e^{rx}) + u(x) \cdot r^2).
 \end{aligned}$$

Assim, ao realizar a enésima derivada, encontraremos a função e^{rx} multiplicada por uma expressão com termos até a enésima derivada de $u(x)$. Estamos buscando uma função $u(x)$ que torne $y(x)$ solução. Como $e^{rx} \neq 0$, logo o somatório dos termos com as derivadas de $u(x)$ deve ser zero.

A função com enésima derivada zero é do tipo polinomial de grau $n - 1$. Portanto, a solução para uma equação diferencial de ordem n com raízes reais repetidas é o produto entre a exponencial e^{rx} e um polinômio de grau $n - 1$.

2.8.3 Método de Redução de Ordem

Este método de resolução aplica-se para equações diferenciais homogêneas com coeficientes variáveis ou não.

2.8.4 Método de Redução de Ordem para Equações Diferenciais de ordem dois

Dada uma equação diferencial de segunda ordem:

$$y'' + P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0. \quad (20)$$

Conhecida uma solução $y_1(x)$ para encontrarmos a outra multiplicamos a admitida por uma função desconhecida $u(x)$. A segunda solução proposta é:

$$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x).$$

A primeira e segunda derivadas de $y_2(x)$ são:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= u'(x) \cdot y_1(x) + u(x) \cdot y_1'(x) \rightarrow \\ y_2''(x) &= u''(x) \cdot y_1(x) + u'(x) \cdot y_1'(x) + u(x) \cdot y_1''(x) + u'(x) \cdot y_1'(x) = \\ &= u''(x) \cdot y_1(x) + 2u'(x) \cdot y_1'(x) + u(x) \cdot y_1''(x). \end{aligned}$$

Substituindo a suposta solução $y_2(x)$ e suas derivadas na equação (20), temos:

$$\begin{aligned} u''(x) \cdot y_1(x) + 2 \cdot u'(x) \cdot y_1'(x) + u(x) \cdot y_1''(x) + P(x) \cdot (u'(x) \cdot y_1(x)) + \\ + P(x) \cdot (u(x) \cdot y_1'(x)) + Q(x)(u(x) \cdot y_1(x)) = 0. \end{aligned}$$

Fatorando a função $u(x)$, chegamos a:

$$u(x) \cdot [y_1''(x) + P(x) \cdot y_1'(x) + Q(x) \cdot y_1(x)] + u''(x) \cdot y_1(x) + u'(x) \cdot [2 \cdot y_1'(x) + P(x) \cdot y_1(x)] = 0.$$

Como $y_1(x)$ é solução de $y_1''(x) + P(x) \cdot y_1'(x) + Q(x) \cdot y_1(x) = 0$, encontramos:

$$u''(x) \cdot y_1(x) + u'(x) \cdot [2 \cdot y_1'(x) + P(x) \cdot y_1(x)] = 0.$$

Denominando $u'(x) = w(x)$, então $u''(x) = w'(x)$. Reduzimos a equação de segunda ordem para uma equação de primeira ordem, como segue abaixo:

$$w'(x) \cdot y_1(x) + w(x) \cdot [2 \cdot y_1'(x) + P(x) \cdot y_1(x)] = 0.$$

Para resolver essa equação de primeira ordem, observando que ela é separável, dividimos a equação por $y_1(x)$:

$$\begin{aligned}
w'(x) + w(x) \cdot \left[\frac{2 \cdot y_1'(x) + P(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x)} \right] &= 0 \rightarrow \\
\frac{w'(x)}{w(x)} &= - \frac{2 \cdot y_1'(x) + P(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x)} \rightarrow \\
\int \frac{dw}{w(x)} &= - \int \left[\frac{2 \cdot y_1'(x) + P(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x)} \right] dx \rightarrow \\
\ln |w(x)| &= -2 \cdot \ln |y_1(x)| - \int P(x) dx + C \rightarrow \\
w(x) &= e^{-2 \cdot \ln |y_1(x)| - \int P(x) dx + C} \rightarrow \\
w(x) &= C \cdot \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2}.
\end{aligned}$$

Descobrimos uma expressão para $w(x) = u'(x)$, para possuímos $u(x)$ basta integrar a última igualdade acima:

$$u(x) = \int C \cdot \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx + D \quad (21)$$

Exemplo 2.8.3

Seja $x^2 \cdot y'' - x \cdot (x+2) \cdot y' + (x+2) \cdot y = 0$, dado que $y_1(x) = x$ é solução e $x > 0$. A solução proposta $y_2(x) = u(x) \cdot x$, fazendo as derivadas de $y_2(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
y_2'(x) &= u'(x) \cdot x + u(x). \\
y_2''(x) &= u''(x) \cdot x + 2u'(x).
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação ($x^2 \cdot y'' - x \cdot (x+2) \cdot y' + (x+2) \cdot y = 0$):

$$\begin{aligned}
x^2 \cdot [u''(x) \cdot x + 2u'(x)] - x \cdot (x+2) \cdot [u'(x) \cdot x + u(x)] + (x+2) \cdot (u(x) \cdot x) &= 0 \rightarrow \\
u(x) \cdot [-x \cdot (x+2) + x \cdot (x+2)] + u''(x) \cdot x^3 + u'(x) \cdot [2x^2 - x^2(x+2)] &\rightarrow \\
u''(x) \cdot x^3 - u'(x) \cdot x^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Como $x > 0$, podemos dividir toda a equação por x^3 , chegando a:

$$u''(x) - u'(x) = 0.$$

Chamando $u'(x) = w(x)$, logo $u''(x) = w'(x)$, reduzimos a equação de segunda ordem para uma de primeira ordem, como mostramos abaixo:

$$w'(x) - w(x) = 0,$$

a solução será $w(x) = C \cdot e^x$. Para encontrar $u(x)$ integramos $w(x)$, posto que $u'(x) = w(x)$, assim:

$$\int u'(x) dx = \int C \cdot e^x dx \rightarrow u(x) = C \cdot e^x + D.$$

Desse modo, $y_2(x) = u(x) \cdot x = (C \cdot e^x + D) \cdot x = C \cdot x \cdot e^x + D \cdot x$. Como $D \cdot x$ é $y_1(x)$, então a solução é escrita na forma $y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$. Substituindo $y_1(x)$ e $y_2(x)$, expressamos a solução para a equação $x^2 \cdot y'' - x \cdot (x + 2) \cdot y' + (x + 2) \cdot y = 0$ como segue:

$$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x \cdot e^x.$$

2.8.5 Equação de Euler-Cauchy

A equação de Euler-Cauchy é :

$$x^n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x \cdot y' + a_0 \cdot y = 0. \quad (22)$$

Análise que nessa equação o grau da potência de x coincide com o grau da derivada, essa é característica que define a equação de Euler-Cauchy. Como queremos uma solução $y(x)$ com derivadas que ao multiplicarmos e somarmos com potências de x iguale a zero é conveniente supormos uma potência de x como solução x^r . Segue:

$$\begin{aligned} y'(x) &= r \cdot x^{r-1} \rightarrow \\ y''(x) &= r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2} \rightarrow \\ &\vdots \\ y^n(x) &= r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-(n-1)) \cdot x^{r-n}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Euler-Cauchy (22):

$$\begin{aligned} x^n \cdot r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot [r-(n-1)] \cdot x^{r-n} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot [r-(n-2)] \cdot x^{r-(n-1)} + \dots + \\ + a_1 \cdot x \cdot (r \cdot x^{r-1}) + a_0 \cdot x^r = 0. \end{aligned}$$

Ao substituírmos $y(x)$ e suas derivadas em cada termo do somatório aparecerá x^r , no qual podemos colocá-lo em evidência, como apresentamos abaixo:

$$x^r \cdot \{[(r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-n+1))] + a_{n-1} \cdot [r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-n+2)] + \dots + a_1 \cdot (r \cdot x^{r-1}) + a_0\}.$$

A expressão entre chaves denominamos por equação característica de Euler-Cauchy, como $x^r \neq 0$ ela deve ser igual a zero. A equação admite n raízes que podem ser reais, distintas ou repetidas e complexas.

Exemplo 2.8.4

Considere $9x^2 \cdot y'' + 3x \cdot y' - 8y = 0$. A solução proposta é $y(x) = x^r$, substituindo-a com suas derivadas, temos:

$$\begin{aligned} 9x^2 \cdot r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2} + 3x \cdot r \cdot x^{r-1} - 8 \cdot x^r &= 0. \\ x^r \cdot [9r \cdot (r-1) + 3r - 8] = 0 \rightarrow x^r \cdot [9r^2 - 6r - 8] &= 0. \end{aligned}$$

Como $x^r \neq 0$, logo $9r^2 - 6r - 8 = 0$, com raízes $r_1 = \frac{4}{3}$ e $r_2 = -\frac{2}{3}$. Portanto, a solução geral para $(9x^2 \cdot y'' + 3x \cdot y' - 8y = 0)$ é:

$$y(x) = c_1 \cdot x^{\frac{4}{3}} + c_2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}.$$

Exemplo 2.8.5

Um segundo exemplo, $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 5y = 0$. Colocando a candidata a solução $y(x) = x^r$ e suas derivadas na equação diferencial dada, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2} - 3x \cdot r \cdot x^{r-1} + 5 \cdot x^r &= 0. \\ x^r \cdot [r \cdot (r-1) - 3r + 5] = 0 \rightarrow x^r \cdot (r^2 - 4r + 5) &= 0. \end{aligned}$$

Como $x^r \neq 0$, logo $r^2 - 4r + 5 = 0$, com raízes $r_1 = 2 + i$ e $r_2 = 2 - i$. A solução geral é:

$$y(x) = c_1 \cdot x^{2+i} + c_2 \cdot x^{2-i},$$

como $x^{2+i} = x^2 \cdot x^i$, usando a fórmula de Euler ($e^{ix} = \cos x + i \sen x$), temos:

$$x^{2+i} = x^2 \cdot x^i = x^2 \cdot e^{\ln|x^i|} = x^2 \cdot e^{i \cdot \ln|x|} = x^2 \cdot [\cos(\ln|x|) + i \sen(\ln|x|)].$$

De modo análogo, $x^{2-i} = x^2 \cdot (\cos(\ln|x|) - i \sen(\ln|x|))$. Podemos escrever a solução geral na forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot x^2 \cdot [\cos(\ln|x|) + i \sen(\ln|x|)] + c_2 \cdot x^2 \cdot [\cos(\ln|x|) - i \sen(\ln|x|)] \rightarrow \\ y(x) &= c_1 \cdot x^2 \cdot \cos(\ln|x|) + c_1 \cdot x^2 \cdot i \sen(\ln|x|) + c_2 \cdot x^2 \cdot \cos(\ln|x|) - c_2 \cdot x^2 \cdot i \sen(\ln|x|) \rightarrow \end{aligned}$$

$$y(x) = (c_1 + c_2) \cdot [x^2 \cdot \cos(\ln |x|)] + (c_1 - c_2) i \cdot [x^2 \cdot \operatorname{sen}(\ln x)].$$

Chamando $(c_1 + c_2)$ de C_1 e $(c_1 - c_2) i$ de C_2 , escrevemos como solução da equação ($x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 5y = 0$):

$$y(x) = C_1 \cdot [x^2 \cdot \cos(\ln |x|)] + C_2 \cdot [x^2 \cdot \operatorname{sen}(\ln |x|)].$$

2.8.6 Método de Redução da Equação de Euler-Cauchy a uma Equação com Coeficientes Constantes

Nesta seção abordaremos uma forma de transformar uma equação de Euler-Cauchy numa equação com coeficientes constantes, útil em casos de raízes repetidas. Iremos mostrar o método através de um exemplo.

Exemplo 2.8.6

Considere a equação de Euler - Cauchy, $x^3 \cdot y''' + 6x^2 \cdot y'' + 7x \cdot y' + y = 0$, para solucioná-la, supõe $y(x) = x^r$ como solução e substituindo-a juntamente com suas derivadas, obtemos:

$$\begin{aligned} x^3 \cdot r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2) \cdot x^{r-3} + 6x^2 \cdot r \cdot (r - 1) \cdot x^{r-2} + 7x \cdot r \cdot x^{r-1} + x^r &= 0 \rightarrow \\ x^r [r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2) + 6x^2 \cdot r \cdot (r - 1) + 7x \cdot r + 1] &= 0. \end{aligned}$$

A equação característica entre colchetes é igual a zero.

$$\begin{aligned} r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2) + 6x^2 \cdot r \cdot (r - 1) + 7x \cdot r + 1 &= 0 \rightarrow \\ r^3 + 3r^2 + 3r + 1 &= 0 \rightarrow (r + 1)^3 = 0 \rightarrow r = -1. \end{aligned}$$

Concluimos que $r = -1$ é raiz com multiplicidade igual a três e $y(x) = x^{-1}$. A solução geral seria $y(x) = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-1} + c_3 \cdot x^{-1}$. Todavia, uma equação de ordem três possui três raízes linearmente independentes. Por isso, fazemos uma outra substituição em $y(x) = x^{-1}$ pondo $x = e^t$, assim, $\ln |x| = t$, derivando ambos os lados dessa igualdade:

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}.$$

Agora, calcularemos as derivadas de $y(x)$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \\ y''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\
&= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\
&= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\
&= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \rightarrow \\
y'''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] = \\
&= \left[-\frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] = \\
&= \left[-\frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{dt}{dx} - \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \right) \right] = \\
&= \left[-\frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \right) \right] = \\
&= \left[-\frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{x^3} \cdot \left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{x^3} \cdot \left[-2 \cdot \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Ao substituirmos essas derivadas na equação $x^3 \cdot y''' + 6 \cdot x^2 \cdot y'' + 7 \cdot x \cdot y' + y = 0$, o termo x^3 cancelará com $\frac{1}{x^3}$, o termo x^2 cancelará com $\frac{1}{x^2}$ e x com $\frac{1}{x}$, obtendo uma equação de coeficientes constantes.

$$\begin{aligned}
x^3 \cdot \left[\frac{1}{x^3} \cdot \left(-2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} \right) + \left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right] + 6x^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] + 7x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0 \rightarrow \\
\left[\left(-2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} \right) + \left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right] + 6 \cdot \left[\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] + 7 \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0.
\end{aligned}$$

Com o cancelamento de x a equação passou a depender somente de t . Podemos juntar alguns termos na equação acima, resultando nesta expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0 \rightarrow \\
y'''(t) + 3 \cdot y''(t) + 3 \cdot y'(t) + y = 0.
\end{aligned}$$

A equação característica é dada por $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, vêm que $(r+1)^3 = 0$ e $r = -1$ com multiplicidade três. A solução é $y(x) = e^{rt} = e^{-t}$, quando temos raízes repetidas

numa equação de coeficientes constantes, como foi visto na seção 2.8.2, multiplicamos $y(x)$ por um polinômio de um grau menor em relação ao grau da característica, isso implica, $y(t) = (c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2) \cdot e^{-t}$.

Contudo, a equação $(x^3 \cdot y''' + 6x^2 \cdot y'' + 7x \cdot y' + y = 0)$ deve ser solucionada em função de x , sendo $t = \ln |x|$, escrevemos:

$$y(x) = [c_0 + c_1 \cdot \ln |x| + c_2 \cdot (\ln |x|)^2] \cdot e^{-\ln |x|} \longrightarrow y(x) = [c_0 + c_1 \cdot \ln |x| + c_2 \cdot (\ln |x|)^2] \cdot x^{-1}.$$

2.8.7 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária não Homogênea pelo Método de Coeficientes Indeterminados

Esse método baseia-se na suposição de uma solução com base nas características de $f(x)$ dentro da equação:

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x). \quad (23)$$

Exemplo 2.8.7

Resolvamos a equação $y'' - y' - 2y = 3x + 4$. Operando as derivadas da solução devemos encontrar no lado direito da identidade uma função polinomial. É razoável supormos uma solução linear para cumprir essa igualdade. Seja $y(x) = m \cdot x + n$. Temos os coeficientes indeterminados m e n . Para determiná-los derivamos a solução $y(x)$ e substituímos na equação diferencial ($y'' - y' - 2y = 3x + 4$).

$$\begin{aligned} y'(x) &= m \text{ e } y''(x) = 0 \rightarrow \\ 0 - m - 2mx - 2n &= 3x + 4 \rightarrow \\ -2mx &= 3x \rightarrow m = -\frac{3}{2}. \\ -m - 2n &= 4 \rightarrow \frac{3}{2} - 2n = 4 \rightarrow n = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, $y(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$ resolve $y'' - y' - 2y = 3x + 4$.

Exemplo 2.8.8

Na equação $y'' - 4y = 5 \cdot e^{3x}$ é conveniente supormos a solução particular $y(x) = A \cdot e^{3x}$. As derivadas são $y'(x) = 3 \cdot A \cdot e^{3x}$ e $y''(x) = 9 \cdot A \cdot e^{3x}$, substituindo-as, temos:

$$9 \cdot A \cdot e^{3x} - 4 \cdot A \cdot e^{3x} = 5 \cdot e^{3x} \rightarrow 5 \cdot A \cdot e^{3x} = 5 \cdot e^{3x} \rightarrow 5 \cdot A = 5 \rightarrow A = 1.$$

A solução particular para $y'' - 4y = 5 \cdot e^{3x}$ é $y(x) = e^{3x}$.

Quando o lado direito da equação for uma função trigonométrica, é preciso supor uma solução particular no modelo $y(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$.

Exemplo 2.8.9

Dada a equação $y'' + y' + 3y = \cos x$. Calculando as derivadas de $y(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$:

$$y'(x) = -A \cdot \sin x + B \cdot \cos x \rightarrow$$

$$y''(x) = -A \cdot \cos x - B \cdot \sin x.$$

Colocando na equação ($y'' + y' + 3y = \cos x$):

$$-A \cdot \cos x - B \cdot \sin x - A \cdot \sin x + B \cdot \cos x + 3 \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = \cos x \rightarrow$$

$$2 \cdot A \cdot \cos x + 2 \cdot B \cdot \sin x - A \cdot \sin x + B \cdot \cos x = \cos x \rightarrow$$

$$(2 \cdot A + B) \cdot \cos x + (2 \cdot B - A) \cdot \sin x = \cos x \rightarrow$$

$$(2 \cdot A + B) \cdot \cos x = \cos x \rightarrow 2 \cdot A + B = 1 \rightarrow$$

$$(2 \cdot B - A) \cdot \sin x = 0 \rightarrow 2 \cdot B - A = 0.$$

Resolvendo o sistema:
$$\begin{cases} 2 \cdot A + B = 1 \\ 2 \cdot B - A = 0 \end{cases}$$

Encontramos $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{1}{5}$. Logo, $y(x) = \frac{2}{5} \cdot \cos x + \frac{1}{5} \cdot \sin x$ é uma solução particular.

É importante atentarmos ao resolver uma equação não-homogênea para a solução da homogênea associada, se o resultado proposto já for solução dessa não poderá ser também da não-homogênea.

Exemplo 2.8.10

Na equação $y'' - 9 \cdot y = e^{3x}$, a homogênea associada possui solução geral $y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-3x}$. Ao supormos uma particular do tipo $y(x) = A \cdot e^{3x}$, zeramos a equação. Nesse caso, consideramos $y(x) = A \cdot x \cdot e^{3x}$, fazendo as derivadas, chegamos a:

$$y'(x) = A \cdot e^{3x} + 3 \cdot A \cdot x \cdot e^{3x} \rightarrow$$

$$y''(x) = 3 \cdot A \cdot e^{3x} + 3 \cdot A \cdot e^{3x} + 9 \cdot A \cdot x \cdot e^{3x} = 6 \cdot A \cdot e^{3x} + 9 \cdot A \cdot x \cdot e^{3x}.$$

Substituindo na equação ($y'' - 9 \cdot y = e^{3x}$):

$$6 \cdot A \cdot e^{3x} + 9 \cdot A \cdot x \cdot e^{3x} - 9 \cdot (A \cdot x \cdot e^{3x}) = e^{3x} \rightarrow$$

$$6 \cdot A \cdot e^{3x} = e^{3x} \rightarrow A = \frac{1}{6}.$$

O resultado é $y(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot e^{3x}$ para $y'' - 9 \cdot y = e^{3x}$.

De maneira geral, quando esse caso ocorre, multiplicamos a solução particular da não-homogênea por uma potência de x , tal que essa potência seja o menor inteiro não-negativo que evite qualquer repetição em relação a solução da homogênea associada.

Exemplo 2.8.11

Considere a equação diferencial $y^{(3)} + y'' = 3 \cdot e^x + 4x^2$. Antes de sugerir uma solução iremos analisar a da homogênea associada, com o intuito de não haver repetição entre as soluções.

$$y'(3) + y'' = 0 \rightarrow r^3 + r^2 = 0 \rightarrow r^2 \cdot (r + 1) = 0.$$

Pela equação característica, temos $r = 0$ com multiplicidade dois e $r = -1$. Para a raiz com multiplicidade, multiplicamos a solução $y(x) = e^{rx}$ por um polinômio de um grau menor que a multiplicidade, nesse exemplo, de grau um. Para a raiz $r = -1$, escrevemos $y(x) = e^{-x}$. O resultado é:

$$y(x) = (c_1 \cdot x + c_0) \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-x} \rightarrow y(x) = (c_1 \cdot x + c_0) + c_2 \cdot e^{-x}.$$

Para a solução da não-homogênea, observando que o lado direito da equação ($y(3) + y'' = 3 \cdot e^x + 4 \cdot x^2$) possui uma exponencial e um polinômio de grau dois, consideramos a solução $y(x) = A \cdot e^x + (D \cdot x^2 + C \cdot x + B)$. No entanto, devemos assegurar que nessa não acontece repetição (linearmente dependente) em relação a da homogênea associada. Primeiramente, $A \cdot e^x$ não ocorre no seu resultado, porém o mesmo não vale para $D \cdot x^2 + C \cdot x + B$. Se $D = 0$ a solução coincide com a forma $c_1 \cdot x + c_0$, sendo D, C, B, c_1 e c_2 números reais.

A sugestão é multiplicarmos por potências de x , começando por x obtemos $(D \cdot x^2 + C \cdot x + B) \cdot x$, se $D = 0$ e $C = 0$ a solução coincide com a forma $c_1 \cdot x + c_0$. Aumentamos uma unidade na potência de x , $(D \cdot x^2 + C \cdot x + B) \cdot x^2$, esta solução não se verifica na homogênea associada. Então, a proposta de resultado adequado para a não-homogênea é:

$$y(x) = A \cdot e^x + (D \cdot x^2 + C \cdot x + B) \cdot x^2 = A \cdot e^x + D \cdot x^4 + C \cdot x^3 + B \cdot x^2.$$

Fazendo as derivadas de $y(x)$:

$$\begin{aligned}y'(x) &= A \cdot e^x + 4D \cdot x^3 + 3C \cdot x^2 + 2B \cdot x \rightarrow \\y''(x) &= A \cdot e^x + 12D \cdot x^2 + 6C \cdot x + 2B \rightarrow \\y^{(3)}(x) &= A \cdot e^x + 24D \cdot x + 6C.\end{aligned}$$

Colocando na equação $(y^{(3)} + y'' = 3 \cdot e^x + 4x^2)$:

$$\begin{aligned}A \cdot e^x + 24D \cdot x + 6C + A \cdot e^x + 12D \cdot x^2 + 6C \cdot x + 2B &= 3 \cdot e^x + 4x^2 \rightarrow \\2A \cdot e^x + 12D \cdot x^2 + (24D + 6C) \cdot x + 6C + 2B &= 3 \cdot e^x + 4x^2.\end{aligned}$$

Igualando os termos com exponenciais dos dois lados da equação acima, temos:

$$2A \cdot e^x = 3 \cdot e^x \rightarrow 2A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Comparando os termos polinomiais, montamos o sistema:

$$\begin{cases}12D = 4. \\24D + 6C = 0. \\6C + 2B = 0.\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $D = \frac{1}{3}$, $C = -\frac{4}{3}$, $B = 4$. Concluimos que a solução particular da não-homogênea é:

$$y(x) = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2.$$

2.8.8 Método de Variação de Parâmetros

O método de variação de parâmetros é válido para equações diferenciais de coeficientes não constantes.

$$y^n + p_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + p_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} + \cdots + p_2(x) \cdot y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = f(x). \quad (24)$$

No processo necessitamos descobrir qual a solução da homogênea associada (solução complementar).

A partir da solução da homogênea associada $y(x) = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots + c_n \cdot y_n$, realizamos uma variação dos parâmetros c_1, c_2, \cdots, c_n para descobrirmos uma resposta particular (y_p) da não-homogênea, de tal modo que:

$$y_p(x) = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2 + \cdots + u_n(x) \cdot y_n.$$

Se a equação possuir ordem dois, $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = f(x)$. A solução complementar da homogênea associada é $y(x) = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$. Nesse momento, variamos os parâmetros c_1 e c_2 para chegarmos numa solução particular (y_p) da não-homogênea.

$$y_p(x) = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2.$$

Observe que há duas incógnitas $u_1(x)$ e $u_2(x)$ e a equação ($y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = f(x)$) para fazermos a substituição, então há um grau de liberdade, podendo supormos uma condição. Derivando $y_p(x)$:

$$y_p'(x) = u_1'(x) \cdot y_1 + u_1(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2 + u_2(x) \cdot y_2'.$$

Para evitar que demais derivadas das incógnitas $u_1(x)$ e $u_2(x)$ apareçam na próxima derivada, pelo grau de liberdade que a equação a ser substituída oferece, impomos a condição $u_1'(x) \cdot y_1 + u_2'(x) \cdot y_2 = 0 \rightarrow y_p'(x) = u_1(x) \cdot y_1' + u_2(x) \cdot y_2'$ e calculando a derivada segunda:

$$y_p''(x) = u_1(x) \cdot y_1'' + u_1'(x) \cdot y_1' + u_2(x) \cdot y_2'' + u_2'(x) \cdot y_2'.$$

As derivadas de y_1 e y_2 não somam como incógnitas, como y_1 e y_2 são soluções da homogênea associada, elas podem ser determinadas.

Colocando $y_p''(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p(x)$ na equação $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = f(x)$:

$$\begin{aligned} u_1(x) \cdot y_1'' + u_1'(x) \cdot y_1' + u_2(x) \cdot y_2'' + u_2'(x) \cdot y_2' + p_1(x) \cdot [u_1(x) \cdot y_1' + u_2(x) \cdot y_2'] + \\ + p_0(x) \cdot [u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2] = f(x). \end{aligned}$$

Pondo $u_1(x)$ e $u_2(x)$ em evidência:

$$\begin{aligned} u_1(x) \cdot [y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_0(x) \cdot y_1] + u_2(x) \cdot [y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_0(x) \cdot y_2] + \\ + u_1'(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2' = f(x). \end{aligned}$$

Mas y_1 e y_2 são soluções da homogênea associada ($y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0$) e, contudo, $y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_0(x) \cdot y_1 = 0$, $y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_0(x) \cdot y_2 = 0$. Sobramos com $u_1'(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2' = f(x)$.

Juntando com a condição imposta $u_1'(x) \cdot y_1 + u_2'(x) \cdot y_2 = 0$, montamos o sistema:

$$\begin{cases} u_1'(x) \cdot y_1 + u_2'(x) \cdot y_2 = 0. \\ u_1'(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2' = f(x). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema achamos $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$ e integrando $u_1(x)$ e $u_2(x)$, fica estabelecida a solução particular da não-homogênea $y_p(x) = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2$.

Para solucionar o sistema, usamos a regra de Cramer ⁷, no qual:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$$

Exemplo 2.8.12

Seja a equação $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 4y = x^4$. A homogênea associada $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 4y = 0$ é uma igualdade de Euler-Cauchy e usando o processo mostrado para resolver esse tipo de equação encontramos $y(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot \ln x \cdot x^2$.

Efetuamos a variação de parâmetros, sendo $c_1 = u_1(x)$ e $c_2 = u_2(x)$ e, portanto, $y_p = u_1(x) \cdot x^2 + u_2(x) \cdot \ln |x| \cdot x^2$.

Calculando as derivadas de $y_p(x)$:

$$y_p' = u_1'(x) \cdot x^2 + u_1(x) \cdot 2x + u_2'(x) \cdot \ln |x| \cdot x^2 + u_2(x) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 + 2 \ln |x| \cdot x \right).$$

Pelo grau de liberdade, podemos impor uma condição $u_1'(x) \cdot x^2 + u_2'(x) \cdot \ln |x| \cdot x^2 = 0$, logo:

$$y_p'(x) = u_1(x) \cdot 2x + u_2(x) \cdot (x + 2 \ln |x| \cdot x) \rightarrow$$

$$y_p''(x) = u_1'(x) \cdot 2x + 2u_1(x) + u_2'(x) \cdot (x + 2 \ln |x| \cdot x) + u_2(x) \cdot (2 \ln |x| + 3).$$

Substituindo na equação $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 4y = x^4$:

$$x^2 \cdot [u_1'(x) \cdot 2x + 2u_1(x) + u_2'(x) \cdot (x + 2 \ln |x| \cdot x) + u_2(x) \cdot (2 \ln |x| + 3)] -$$

⁷Gabriel Cramer (1704 - 1752) foi professor de Matemática em Geneva (Suíça) e escreveu trabalhos nas áreas de Física, Geometria e História da Matemática. Cramer é conhecido pelo seus trabalhos em Determinantes e Curvas Algébricas.

$$\begin{aligned}
-3x \cdot [u_1(x) \cdot 2x + u_2(x) \cdot (x + 2 \ln |x| \cdot x)] + 4 \cdot (u_1(x) \cdot x^2 + u_2(x) \cdot \ln |x| \cdot x^2) &= x^4 \rightarrow \\
u_1(x) \cdot [2x^2 - 6x^2 + 4x^2] + u_2(x) \cdot [2x^2 \cdot \ln |x| + 3x^2 - 3x^2 - 6x^2 \cdot \ln |x| + 4x^2 \cdot \ln |x|] & \\
+ u_1'(x) \cdot 2x^3 + u_2'(x) \cdot (x^3 + 2 \ln |x| \cdot x^3) &= x^4 \rightarrow \\
u_1'(x) \cdot 2 \cdot x^3 + u_2'(x) \cdot (x^3 + 2 \ln |x| \cdot x^3) &= x^4.
\end{aligned}$$

Dividindo a equação por x^2 ficamos com: $u_1'(x) \cdot 2x + u_2'(x) \cdot (x + 2 \ln |x| \cdot x) = x^2$.

Temos duas igualdades e podemos montar o sistema abaixo:

$$\begin{cases} u_1'(x) \cdot x^2 + u_2'(x) \cdot \ln |x| \cdot x^2 = 0. \\ u_1'(x) \cdot 2 \cdot x + u_2'(x) \cdot (x + 2x \cdot \ln |x|) = x^2. \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer, escrevemos u_1' e u_2' da maneira como segue.

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{x^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \ln |x| \cdot x^2 \\ 1 & x + 2x \cdot \ln |x| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & \ln |x| \cdot x^2 \\ 2x & x + 2x \cdot \ln |x| \end{vmatrix}} = \frac{-x^4 \cdot \ln |x|}{x^3} = -x \cdot \ln |x|.$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{x^2 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & \ln |x| \cdot x^2 \\ 2x & x + 2x \cdot \ln |x| \end{vmatrix}} = \frac{x^4}{x^3} = x.$$

Para encontrar $u_1(x)$ e $u_2(x)$, integramos $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$, encontrando:

$$u_1(x) = \int u_1'(x) dx = - \int x \cdot \ln |x| dx.$$

Usando a integração por partes, chamando $u = \ln |x|$, segue que $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, isto é, $du = \frac{dx}{x}$ e $dv = x \cdot dx$, logo $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
- \int x \cdot \ln |x| dx &= - \left(u \cdot v - \int v du \right) = - \left[\left(\ln |x| \cdot \frac{x^2}{2} \right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} \right] = \\
&= - \left[\left(\ln |x| \cdot \frac{x^2}{2} \right) - \frac{x^2}{4} \right] \rightarrow u_1(x) = - \ln |x| \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}.
\end{aligned}$$

Para $u_2(x)$, calculamos:

$$u_2(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

Assim, a solução particular é:

$$y_p = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2 \rightarrow y_p = \left(-\ln|x| \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right) \cdot x^2 + \left(\frac{x^2}{2} \right) \cdot x^2 \cdot \ln|x| \rightarrow$$

$$y_p = \frac{x^2}{4}.$$

A solução geral é a união da solução da homogênea associada com a particular da não-homogênea, logo:

$$y(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^2 \cdot \ln|x| + \frac{x^2}{4}.$$

Esse método de variação de parâmetros estende-se para equação de ordem n :

$$y^n + p_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + p_{n-2}(x) \cdot y^{n-2} + \dots + p_2(x) \cdot y'' + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = f(x).$$

A solução da homogênea associada (solução complementar) é:

$$y_c = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 \cdot y_3 + \dots + c_n \cdot y_n.$$

Realizando a variação dos parâmetros $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, escrevemos a solução da não-homogênea (solução particular) como abaixo.

$$y_p(x) = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2 + u_3(x) \cdot y_3 + \dots + u_n(x) \cdot y_n.$$

Fazendo as n derivadas:

$$y_p'(x) = u_1'(x) \cdot y_1 + u_2'(x) \cdot y_2 + u_3'(x) \cdot y_3 + \dots + u_n'(x) \cdot y_n +$$

$$+ u_1(x) \cdot y_1' + u_2(x) \cdot y_2' + u_3(x) \cdot y_3' + \dots + u_n(x) \cdot y_n'.$$

Podemos impor a condição $u_1'(x) \cdot y_1 + u_2'(x) \cdot y_2 + u_3'(x) \cdot y_3 + \dots + u_n'(x) \cdot y_n = 0$ pelo $n - 1$ grau de liberdade existente.

$$y_p'(x) = u_1(x) \cdot y_1' + u_2(x) \cdot y_2' + u_3(x) \cdot y_3' + \dots + u_n(x) \cdot y_n'.$$

A derivada segunda de $y_p(x)$ será:

$$y_p''(x) = u_1'(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2' + u_3'(x) \cdot y_3' + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n' + \\ + u_1(x) \cdot y_1'' + u_2(x) \cdot y_2'' + u_3(x) \cdot y_3'' + \cdots + u_n(x) \cdot y_n''.$$

Novamente, colocamos a condição $u_1'(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2' + u_3'(x) \cdot y_3' + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n' = 0$. Assim:

$$y_p''(x) = u_1(x) \cdot y_1'' + u_2(x) \cdot y_2'' + u_3(x) \cdot y_3'' + \cdots + u_n(x) \cdot y_n''.$$

A derivada terceira de $y_p(x)$ é expressa por:

$$y_p^{(3)}(x) = u_1'(x) \cdot y_1'' + u_2'(x) \cdot y_2'' + u_3'(x) \cdot y_3'' + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n'' + \\ + u_1(x) \cdot y_1^{(3)} + u_2(x) \cdot y_2^{(3)} + u_3(x) \cdot y_3^{(3)} + \cdots + u_n(x) \cdot y_n^{(3)}.$$

Propomos a condição $u_1'(x) \cdot y_1'' + u_2'(x) \cdot y_2'' + u_3'(x) \cdot y_3'' + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n'' = 0$, então:

$$y_p^{(3)}(x) = u_1(x) \cdot y_1^{(3)} + u_2(x) \cdot y_2^{(3)} + u_3(x) \cdot y_3^{(3)} + \cdots + u_n(x) \cdot y_n^{(3)}.$$

O processo segue até a enésima derivada, quando teremos determinado $n-1$ condições, somando à aquela $u_1'(x) \cdot y_1^{n-1} + u_2'(x) \cdot y_2^{n-1} + u_3'(x) \cdot y_3^{n-1} + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n^{n-1} = f(x)$, montaremos o sistema:

$$\begin{cases} u_1'(x) \cdot y_1 + u_2'(x) \cdot y_2 + u_3'(x) \cdot y_3 + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n = 0. \\ u_1'(x) \cdot y_1' + u_2'(x) \cdot y_2' + u_3'(x) \cdot y_3' + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n' = 0. \\ u_1'(x) \cdot y_1'' + u_2'(x) \cdot y_2'' + u_3'(x) \cdot y_3'' + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n'' = 0. \\ \vdots \\ u_1'(x) \cdot y_1^{n-1} + u_2'(x) \cdot y_2^{n-1} + u_3'(x) \cdot y_3^{n-1} + \cdots + u_n'(x) \cdot y_n^{n-1} = f(x). \end{cases}$$

Para resolver o sistema e determinar as funções que definem $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, $u_3'(x)$, \dots , $u_n'(x)$, usamos a regra de Cramer, como apresentamos abaixo:

$$\begin{aligned}
 u_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ 0 & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(x) & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ 0 & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}. \\
 \\
 u_2(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & 0 & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & 0 & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & f(x) & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & 0 & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & 0 & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & 1 & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}. \\
 \\
 &\vdots \\
 \\
 u_n'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & 0 \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & 0 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & 0 \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & 0 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}}.
 \end{aligned}$$

Em seguida, integramos cada $u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x), \dots, u_n'(x)$, encontrando expressões para $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x)$. Contudo, determinamos a solução particular e geral da equação diferencial de ordem n .

Na próxima seção falaremos sobre sistemas de equações diferenciais obtidos a partir de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

2.9 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de ordem n pode ser decomposta em n equações diferenciais de primeira ordem formando um sistema de equações. Nesta seção, daremos atenção especial aos sistemas de equações diferenciais obtidos a partir de equação diferencial de segunda ordem, escritos como duas equações diferenciais de primeira ordem.

Seja uma equação diferencial de segunda ordem:

$$P_n(x) \cdot y'' + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_{n-2}(x) \cdot y = f(x).$$

De início, consideramos que esta equação acima seja homogênea e tenha coeficientes constantes. Para transformá-la num sistema de equações lineares, vamos introduzir funções $y_i(x)$, tal que:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x); \\ y_2(x) &= y'(x); \\ y_3(x) &= y''(x). \end{aligned}$$

Queremos encontrar um sistema de equações de primeira ordem, para isso fazemos as derivadas das funções $y_i(x)$ em relação a x , obtendo:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y'(x) = y_2(x) \rightarrow y_1'(x) = y_2(x). \\ y_2'(x) &= y''(x) = y_3(x) \rightarrow y_2'(x) = y_3(x). \end{aligned}$$

Observe que a equação diferencial de segunda ordem foi reduzida a um sistema de duas equações lineares de primeira ordem. Usando o fato $y'(x) = y_2(x)$ e substituindo na equação de segunda ordem homogênea, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x). \\ y_2'(x) = -\frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot y_2(x) - \frac{P_{n-2}}{P_n} \cdot y_1(x). \end{cases}$$

Alterando a nomenclatura das constantes, o sistema pode ser expresso na forma de matriz, como é apresentado abaixo.

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Quando resolvemos equações lineares de primeira ordem homogênea verificamos que a solução é uma exponencial do tipo e^{rx} . A candidata a solução do sistema continuará sendo a exponencial, todavia essa solução deve satisfazer duas equações. Supondo que a candidata a solução deve vir acompanhada de um vetor (V) que possua constantes satisfazendo cada equação quando multiplicado por e^{rx} , escrevemos:

$$V \cdot e^{rx} = y(x) \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Substituindo (26) na expressão para (25):

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx}. \quad (27)$$

O lado esquerdo iremos igualar a zero. Calculando as derivadas chegamos ao sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 0 = p_{11} \cdot v_1 \cdot e^{rx} + p_{12} \cdot v_2 \cdot e^{rx} - r \cdot v_1 \cdot e^{rx} \\ 0 = p_{21} \cdot v_1 \cdot e^{rx} + p_{22} \cdot v_2 \cdot e^{rx} - r \cdot v_2 \cdot e^{rx} \end{cases}$$

A exponencial está em todos os termos do sistema acima, podemos realizar seu cancelamento do sistema.

$$\begin{cases} 0 = p_{11} \cdot v_1 + p_{12} \cdot v_2 - r \cdot v_1 \\ 0 = p_{21} \cdot v_1 + p_{22} \cdot v_2 - r \cdot v_2 \end{cases}$$

Colocando v_1 e v_2 em evidência na primeira e segunda equação, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 0 = (p_{11} - r) \cdot v_1 + p_{12} \cdot v_2 \\ 0 = p_{21} \cdot v_1 + (p_{22} - r) \cdot v_2 \end{cases}$$

Uma solução trivial seria $v_1 = v_2 = 0$, no entanto essa solução inicial não é interessante, porque essa solução não dependeria dos valores dos dados iniciais. Para um sistema possuir uma única solução exigimos que o determinante dos coeficientes seja diferente de zero. Como queremos encontrar mais de uma solução, ou seja, uma solução para $y_1(x)$ e $y_2(x)$, impomos que o determinante dos coeficientes deve ser nulo, então:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou,

$$|P - I \cdot r| = 0. \quad (28)$$

Seja I a matriz identidade de ordem 2. O determinante acima será expresso por um polinômio de grau dois. As duas raízes podem ser reais distintas ou repetidas e complexas. Os valores encontrados para r , as raízes do polinômio, são chamados de autovalores. Para cada autovalor r teremos um autovetor associado (V). Os autovetores são encontrados

quando substituimos os autovalores na expressão $(P - I \cdot r) \cdot V = 0$.

Exemplo 2.9.1

Para exemplificar a aplicação do método de solução de sistemas de equações diferenciais, vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = x + 2y. \\ y'(t) = 2x + y. \end{cases}$$

Escrevendo na forma de matriz e omitindo a dependência das variáveis de t :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Primeiramente, iremos determinar os autovalores, para isso devemos encontrar os valores de r tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-r & 2 \\ 2 & 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos a equação $(1-r)^2 - 4 = 0 \rightarrow r^2 - 2 \cdot r - 3 = 0$. Com raízes igual a -1 e 3, esses são os autovalores. Para cada autovalor há o seu autovetor. Para $r = 3$, temos que encontrar um autovetor que satisfaça a equação: $|(P - I \cdot 3)| \cdot V = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações obtidas foram $-2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = 0$ e $2 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 = 0$. Essas equações são múltiplas, então temos infinitas soluções para esse sistema. Neste caso, podemos escolher os valores para v_1 e v_2 , visto que as soluções a serem escolhidas serão múltiplas uma da outra e na solução do sistema serão absorvidas pelas constantes C_1 e C_2 . Considere $v_1 = 1$ e $v_2 = -1$.

Para $r = -1$ a equação à resolver é $(P + I) \cdot V = 0$. Em forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação obtida é $2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = 0$. Como há duas variáveis numa única igualdade podemos ter infinitas soluções. Pondo $v_1 = 1$ verificamos $v_2 = -1$.

Concluimos que a solução do sistema para $x(t)$ e $y(t)$ é:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^{3t} - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Se os autovalores são complexos, $r = a + ib$, os autovetores encontrados também serão complexos. Dessa maneira, a solução $V \cdot e^{rt}$ é expressa por:

$$\begin{aligned} V \cdot e^{rt} &= (F + Gi) \cdot e^{(a+bi)t} \rightarrow \\ V \cdot e^{rt} &= (F + Gi) \cdot e^{at} \cdot [\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt)]. \end{aligned}$$

Esse produto possui parte real e imaginária como segue:

$$V \cdot e^{rt} = [F \cdot e^{at} \cdot \cos(bt) - G \cdot e^{at} \cdot \operatorname{sen}(bt)] + i [G \cdot e^{at} \cdot \cos(bt) + F \cdot e^{at} \cdot \operatorname{sen}(bt)].$$

Por último, se temos autovalores repetidos esses podem ser completos ou incompletos. Quando a equação $|(P - I \cdot r)| \cdot V = 0$ admite dois autovetores linearmente independentes, dizemos que r é um autovalor completo, caso contrário r é denominado de autovalor incompleto. No caso que estamos abordando, um sistema formado por duas variáveis, corresponde a situação dos autovalores incompletos.

Exemplo 2.9.2

Considere o sistema abaixo de equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} x'(t) = -2x + y. \\ y'(t) = -x - 4y. \end{cases}$$

Usando matrizes escrevemos o sistema na forma abaixo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para achar os autovalores resolvemos a equação $|P - I \cdot r| = 0$, sendo $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, substituindo chegamos a:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-r & 2 \\ 2 & 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos a equação $r^2 + 6r + 9 = 0$, com raiz -3 com multiplicidade 2. Se $r = -3$, iremos encontrar um autovetor que satisfaça a equação: $|(P - I \cdot 3)| \cdot V = 0$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações obtidas foram $v_1 + v_2 = 0$ e $-v_1 - v_2 = 0$. Uma solução para o sistema é $v_1 = 1$ e $v_2 = -1$. Esses são os valores de v_1 e v_2 para o primeiro autovetor que chamaremos de (V_1) . Mas a solução do sistema é expressa por dois autovetores linearmente independentes, é necessário obter um segundo autovetor linearmente independente em relação ao primeiro autovetor e que faz parte da solução da expressão:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

No propósito de simplificar a notação, denotaremos $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ por P a matriz de coeficientes e, por último, de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montamos a equação $X' = P \cdot X$.

Na resolução de equações diferenciais de segunda ordem com raízes repetidas parte da solução proposta era a exponencial (e^{rt}) multiplicada por um polinômio de primeiro grau. Faremos algo semelhante para descobrirmos o segundo autovetor, propomos esse modelo de resposta para a equação anterior $X = (V_1 \cdot t + V_2) \cdot e^{rt}$. Substituindo em $X' = A \cdot X$:

$$V_1 \cdot (e^{rt} + r \cdot t \cdot e^{rt}) + V_2 \cdot r \cdot e^{rt} = P \cdot [(V_1 \cdot t + V_2) \cdot e^{rt}].$$

Comparando os termos que possuem $t \cdot e^{rt}$ e e^{rt} , encontramos:

$$r \cdot V_1 = P \cdot V_1.$$

$$V_1 + r \cdot V_2 = P \cdot V_2.$$

A primeira equação é igual a $(P - r \cdot I) \cdot V_1 = 0$, sendo utilizada para encontrar o primeiro autovetor (V_1). A segunda expressão é equivalente a $(P - r \cdot I) \cdot V_2 = -V_1$. Com essa igualdade determinamos o segundo autovetor. Como r e V_1 já foram calculados, temos que estabelecer V_2 tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

As equações resultantes foram $v_1 + v_2 = 1$ e $-v_1 - v_2 = -1$. Resolva o sistema $v_1 = 1$ e $v_2 = 0$. Portanto, esses são os valores de v_1 e v_2 para o segundo autovetor.

A parte da solução do sistema $X = (V_1 \cdot t + V_2) \cdot e^{rt}$ está determinada, temos:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{-3t}.$$

A solução geral para $x(t)$ e $y(t)$ no sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -2x + y. \\ y'(t) = -x - 4y. \end{cases}$$

é escrita da seguinte maneira:

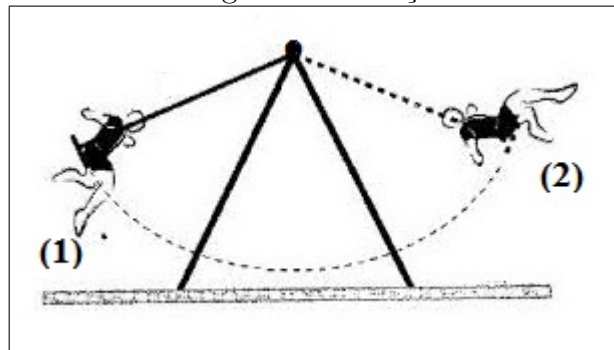
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot (t + 1) \cdot e^{-3t} \\ -c_1 \cdot e^{-3t} - c_2 \cdot t \cdot e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

No próximo capítulo, contextualizaremos o estudo das equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais através da abordagem do movimento de um pêndulo simples.

3 Movimentos Oscilatórios

Os movimentos são popularmente chamados de movimentos de “vai e vem”. No nosso cotidiano eles ocorrem com bastante frequência. Uma criança que brinca em um balanço, como na imagem adiante, executa um movimento oscilatório, as molas de carros e colchões também executam esse movimento.

Figura 4: Balanço.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

A definição no campo da Física para oscilação é o movimento no qual o vetor velocidade altera seu sentido no decorrer do tempo. Por exemplo, na imagem acima quando a criança parte de (1) até (2) seu vetor velocidade possui sentido inverso em relação ao vetor velocidade quando a criança executa o movimento de (2) até (1).

Se o vetor velocidade muda seu sentido em intervalos de tempo regulares teremos um movimento harmônico simples. Caso esse fato não seja verificado, então, alguma força atua no corpo diminuindo ou aumentando o intervalo de tempo em que acontece a alteração do sentido do vetor velocidade. Esse tipo de oscilações são denominadas amortecidas.

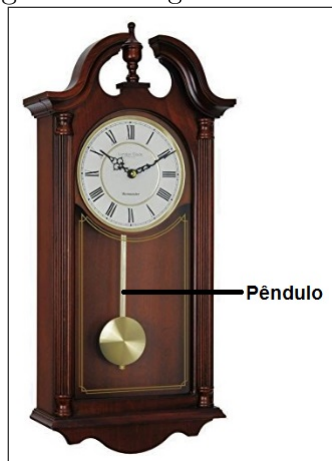
Para o pêndulo, nosso objeto de estudo, pode ocorrer uma oscilação classificada como movimento harmônico simples, desde que o deslocamento angular seja pequeno. Para deslocamentos angulares maiores temos que considerar a atuação de forças externas, caracterizando uma oscilação amortecida.

Inicialmente, falaremos sobre o movimento harmônico simples.

3.1 Movimento Harmônico Simples

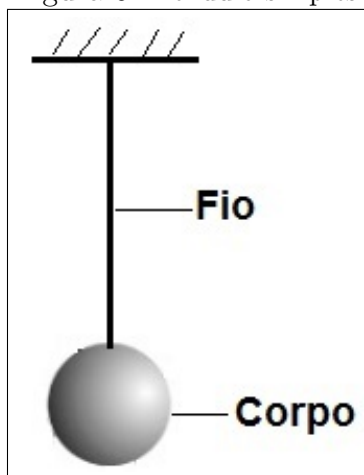
Um movimento harmônico simples é aquele que se repete indefinidamente em intervalos de tempo regulares. As vibrações sonoras produzida pelo tubo de um órgão, a oscilação produzidas pelos pistões do motor de um automóvel ou o balanço do pêndulo de um relógio de carrilhão são exemplos de movimentos periódicos.

Figura 5: Relógio de carrilhão.

Fonte: <<https://www.amazon.co.uk>>

Podemos idealizar o pêndulo do relógio de carrilhão, uma esfera de demolição presa ao cabo de guindaste, ou ainda, uma criança sentada num balanço, como um pêndulo simples. De acordo com Young e Freedman (2008), pêndulo simples é um modelo idealizado composto de um corpo suspenso por um fio inextensível e de massa desprezível, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 6: Pêndulo simples.



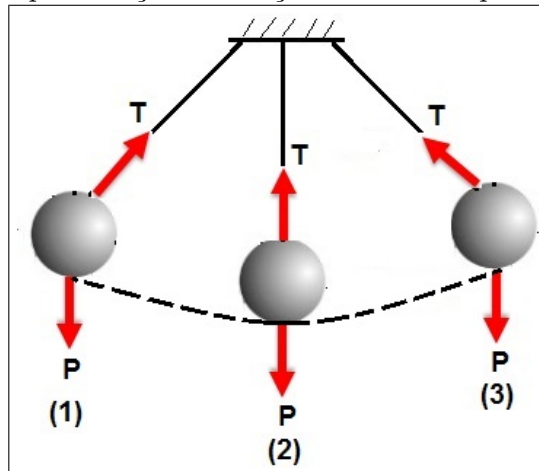
Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Se puxarmos o corpo lateralmente e o soltarmos, ele percorrerá um arco de circunferência de raio igual ao comprimento do fio e oscilará em torno de uma posição de equilíbrio, a posição vertical, mostrada na figura acima.

As forças que atuam sobre o corpo são: a força gravitacional exercida pela Terra sobre o corpo e a força de tração exercida pelo fio sobre o corpo. Representaremos a força gravitacional por (P) , direcionada na vertical para baixo e a força de tração por T , com direção variando de acordo com a posição do fio.

Em diferentes momentos da trajetória, podemos identificar essas forças conforme a imagem adiante.

Figura 7: Representação das forças atuantes no pêndulo simples.

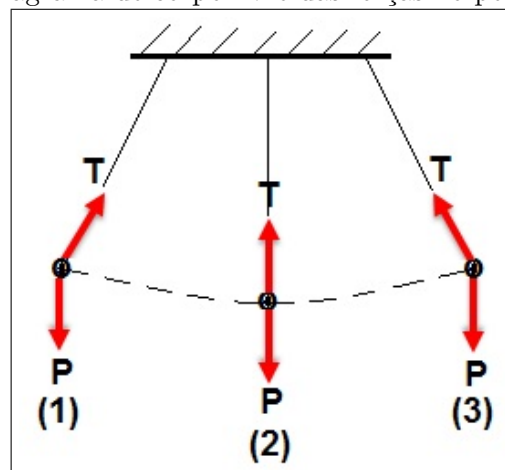


Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Quando o corpo não está na posição de equilíbrio, (posições (1) e (3)), as forças P e T não estão na mesma direção e quando o corpo fica na posição de equilíbrio, posição (2), as forças ficam numa direção única e em sentidos contrários, ou seja, as forças contêm sinais opostos. Além disso, elas possuem mesmo módulo sendo $P = T$ em módulo. A força resultante F_R , soma de todas as forças, é igual a $F_R = P + (-T) = 0$. Com isso, um corpo em estado de equilíbrio não possui nenhuma força atuando sobre ele, desprezando a força de resistência do ar.

Podemos simplificar nossa representação esquemática das forças considerando o corpo como somente um ponto. Chamamos esse tipo de representação de diagrama de corpo livre.

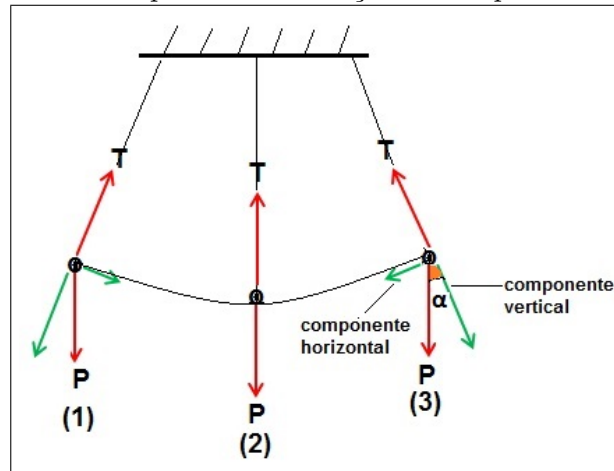
Figura 8: Diagrama de corpo livre das forças no pêndulo simples.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Nas situações (1) e (3), quando as forças P e T não estão na mesma direção, podemos decompor a força gravitacional em dois componentes, um vertical na mesma direção da força T e outro horizontal tangente a trajetória, como ilustramos na seguinte figura.

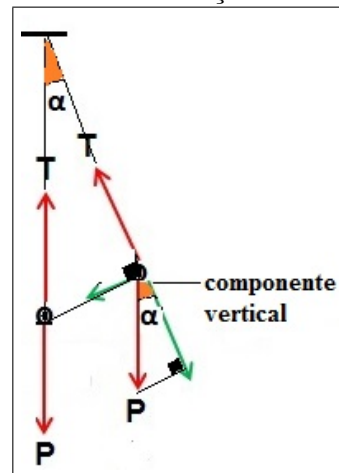
Figura 9: Diagrama de corpo livre com forças decompostas no pêndulo simples.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Seja α o ângulo que o componente vertical faz com a força P . Podemos afirmar, por semelhança de triângulos, que o ângulo entre o componente vertical e a força P corresponde ao deslocamento angular do fio em relação a posição de equilíbrio como mostrado na figura.

Figura 10: Semelhança de triângulos.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Usando as relações trigonométricas, escrevemos as igualdades sendo as componentes horizontal e vertical perpendiculares, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{componente horizontal}}{P} \rightarrow \text{componente horizontal} = P \cdot \text{sen } \alpha.$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{componente vertical}}{P} \rightarrow \text{componente vertical} = P \cdot \text{cos } \alpha.$$

A componente vertical $P \cdot \text{cos } \alpha$ possui mesma direção e módulo que a força de tração, porém possui sentidos contrários, ou seja, sinais opostos. Então, essas forças se cancelam

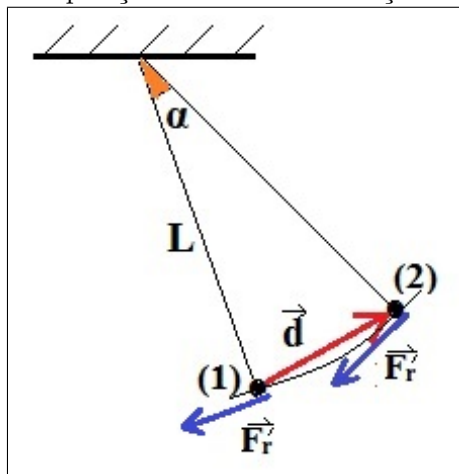
na vertical. A única força atuante nas situações 1 e 3 passa a ser a força horizontal dada por $P \cdot \sin \alpha$.

Como foi dito, ao puxarmos lateralmente o fio e o libertarmos, verificamos que ele oscila em torno da posição de equilíbrio até atingi-la. Como a única força presente, desconsiderando a resistência do ar, é a componente horizontal da força P , dizemos que ela é a responsável por obrigar o sistema a voltar ao equilíbrio toda vez que ele é retirado dessa situação. Denominamos essa força de força restauradora.

Para pequenos deslocamentos angulares do fio, ou seja, α com valor pequeno ($\alpha \geq 0$), vêm que $\sin \alpha$ é, aproximadamente, o valor desse ângulo em radianos. Por exemplo, se $\alpha = 10^\circ$, em radianos, $\alpha = 0,1745329251$ rad e, $\sin 10^\circ = 0,1736481777$. Este fato é justificado pelo $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$, conhecido como Limite Fundamental Trigonométrico. Concluimos que força restauradora é proporcional ao deslocamento angular do fio. Devido a essa proporcionalidade dizemos que essa situação se trata de um movimento harmônico simples. De maneira geral, para o movimento harmônico simples, escrevemos $F = -k \cdot x$, onde F é a força restauradora, k é uma constante e x é o deslocamento. Retomaremos a essa igualdade ao apresentarmos as equações no movimento harmônico simples.

O sinal negativo da equação $F = -k \cdot x$ se justifica pelo fato da força restauradora possuir sentido contrário em relação ao vetor deslocamento do corpo. Como ilustramos na figura abaixo, o vetor deslocamento (\vec{d}) do corpo que deslocou da posição (1) até a (2) está no sentido oposto ao vetor da força restauradora (\vec{F}_r).

Figura 11: Representação da oposição de sentido da força restauradora e o deslocamento.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

No pêndulo, a força restauradora dada por $F = -P \cdot \sin \alpha = -m \cdot g \cdot \sin \alpha$, pode ser assim escrita considerando sua proporcionalidade a α .

$$F = -m \cdot g \cdot \alpha.$$

A constante $k = mg$ e $x = \alpha$.

O ângulo α , expresso em radianos, é dado pelo quociente do arco (x) descrito pelo ângulo α e o raio de aplicação do mesmo, no caso, é o comprimento do fio (L), assim:

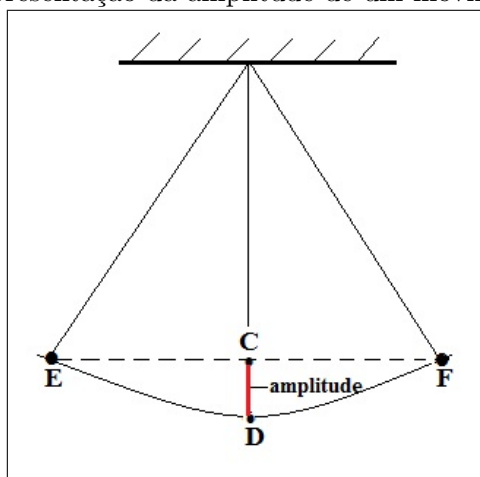
$$F = -m \cdot g \cdot \frac{x}{L}. \quad (29)$$

Na seção a seguir definiremos termos utilizados em movimentos periódicos.

3.1.1 Amplitude, Ciclo, Período, Frequência, Velocidade, Aceleração

A amplitude de um movimento, chamada por A , é o valor máximo do deslocamento linear do objeto. No pêndulo, conforme a figura a seguir, é a projeção ortogonal CD sobre o eixo vertical da posição de equilíbrio do maior arco (\widehat{EF}) descrito pelo corpo. A unidade SI de A é metro.

Figura 12: Representação da amplitude de um movimento curvilíneo.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

O ciclo do movimento de pêndulo é uma oscilação completa, ou seja, na figura acima, a trajetória do objeto de ir do ponto E até F e retornar, novamente, a E .

O período, T , é o tempo correspondente a um ciclo. A unidade SI (sistema unitário) de T é segundo por ciclo.

A frequência, f , é o número de ciclos dados em uma determinada unidade de tempo. A unidade SI de f é hertz ou s^{-1} , que indica a quantidade de ciclos em um segundo.

A frequência angular, ω , é a velocidade angular de um ponto no arco. A unidade SI de ω é o radiano por segundo (rd/s). Podemos ter a velocidade angular instantânea, relacionada a um determinado ponto da trajetória e a velocidade angular média, essa diz sobre a alteração da velocidade em um intervalo.

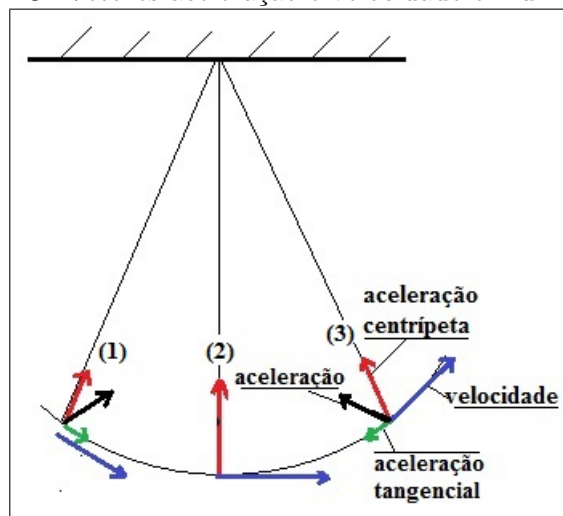
Além da velocidade angular, temos a velocidade linear (v), no movimento circular mede a taxa de variação no comprimento do arco em relação ao tempo. A unidade SI de ω é metro por segundo (m/s). Representamos essa velocidade (v), num determinado ponto, tangente a trajetória do objeto, como segue na figura 13.

Quanto a aceleração, em movimentos curvilíneos, há dois tipos de aceleração, a centrípeta (a_c) e a tangencial (a_t). O vetor aceleração é dado pela soma vetorial dessas duas acelerações.

A aceleração centrípeta está sempre voltada para o centro da curva e perpendicular à velocidade, conforme a figura 13. Ela contribui para a alteração na direção do vetor velocidade.

A aceleração tangencial, como o nome sugere, é sempre tangente a trajetória e é responsável pela variação do módulo da velocidade. Na situação (1), os vetores velocidade e aceleração tangencial estão no mesmo sentido, nesse ponto, portanto, a velocidade é crescente até atingir o ponto (2), caso em que ela atinge seu valor máximo. A partícula ao passar por (2) no sentido anti - horário, como ilustrado no momento (3) da figura 13, diminui sua velocidade, posto que os vetores velocidade e aceleração estão em sentidos inversos.

Figura 13: Vetores aceleração e velocidade em uma curva.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Falaremos, inicialmente, das equações presentes no movimento do pêndulo quando ele é considerado harmônico simples.

3.1.2 Equações no Movimento Harmônico Simples

Como vimos anteriormente, a característica principal do movimento harmônico simples é a proporcionalidade entre a força restauradora (F) e o deslocamento (x), de tal forma que podemos escrever a equação:

$$F = -k \cdot x. \quad (30)$$

Como a força restauradora é a força resultante, ela é expressa por $F = m \cdot a$. Substituindo na equação acima:

$$m \cdot a = -k \cdot x.$$

Mas a aceleração corresponde à derivada segunda da posição do corpo em relação ao tempo, assim:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x.$$

Dividindo toda equação por m , chegamos a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0.$$

Temos uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução $x(t)$ representa a posição do corpo em relação ao tempo.

Devemos encontrar uma função $x(t)$ tal que sua derivada segunda é igual à própria solução $x(t)$ multiplicada por uma constante $-\frac{k}{m}$.

Ao discutirmos a solução de uma equação diferencial de segunda ordem, verificamos que a solução a ser proposta é do tipo exponencial, uma vez que a função se mantém, sendo somente multiplicada por constantes a cada derivada.

Vamos considerar uma possível solução a exponencial $x(t) = e^{cit}$, com $c \in \mathbb{R}$, porque a derivada segunda será a função $x(t)$ multiplicada por uma constante negativa oriunda de i^2 . Portanto, há a possibilidade de zerar a equação diferencial.

Tomando as derivadas:

$$x'(t) = ci e^{cit} \rightarrow x''(t) = -c^2 e^{cit}.$$

Colocando as derivadas na equação $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$:

$$\begin{aligned} -c^2 \cdot e^{cit} + \frac{k}{m} \cdot e^{cit} &= 0 \rightarrow \\ e^{cit} \cdot \left(-c^2 + \frac{k}{m}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Temos a equação característica $-c^2 + \frac{k}{m} = 0$, cujas raízes são $C_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $C_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$. Podemos escrever a solução geral $x(t)$ da seguinte forma:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\frac{k}{m}}it} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}it}.$$

Quando há raízes complexas na solução de uma equação diferencial, já observamos no capítulo anterior na seção 2.8.2 que podemos usar a seguinte transformação:

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx).$$

Desse modo, podemos expressar $x(t)$ como segue:

$$x(t) = C_1 \cdot \left(\cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) + i \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right) + C_2 \cdot \left(\cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) - i \operatorname{sen} \left(-\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right) \rightarrow$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \left(\cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right) + (C_1 - C_2) i \cdot \left(\operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right).$$

Denominando $A = (C_1 + C_2)$ e $B = (C_1 - C_2) \cdot i$, temos:

$$x(t) = A \left(\cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right) + B \left(\operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right). \quad (31)$$

A solução acima pode ser escrita também da forma:

$$x(t) = C \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta \right), \quad (32)$$

sendo $A = C \cdot \cos \theta$ e $B = -C \cdot \operatorname{sen} \theta$ e as constantes A , B , C e θ são determinadas a partir das condições iniciais do problema. Consequentemente, para descrever com exatidão a posição do corpo em movimento harmônico simples precisamos saber informações sobre o início do movimento.

Analisando a equação (32), como a função cosseno está compreendida entre os valores de -1 e 1, podemos afirmar que o deslocamento máximo de uma partícula é dado pelo percurso de C até $-C$, isto é, C é a amplitude do movimento do corpo.

A velocidade é a taxa de variação da posição $x(t)$ de acordo com o tempo, representada pela derivada de $x(t)$ em relação a t . Usando a Regra da Cadeia para derivarmos $x(t) = C \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta \right)$, chegamos a:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot C \cdot \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta \right). \quad (33)$$

Ou, considerando a solução $x(t) = A \left(\cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right) + B \left(\operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right)$, vale:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A \cdot \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot B \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right). \quad (34)$$

A aceleração é a taxa de variação da velocidade $v(t)$ de acordo com o tempo, ou seja, a derivada de $v(t)$ em relação a t . Usando a Regra da Cadeia, novamente, obtemos:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot C \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta\right).$$

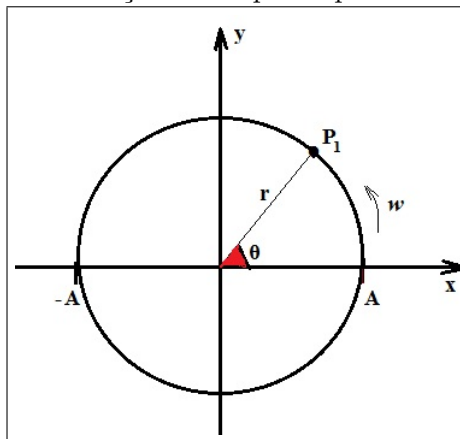
Contudo, $x(t) = C \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta\right)$, logo:

$$a(t) = -\frac{k}{m} \cdot x. \quad (35)$$

A variação da posição de um objeto em um movimento harmônico simples pode ser associada ao movimento de um objeto em um movimento circular uniforme, quando este que descreve uma trajetória circular com velocidade constante.

Para falarmos dessa associação, considere o plano cartesiano de eixos Ox e Oy . De início, seja um corpo de massa (m) em trajetória circular que descreve no plano uma circunferência de raio r . Analisaremos a posição do corpo com o objetivo de descrevermos uma equação para seu posicionamento ao longo do eixo Ox .

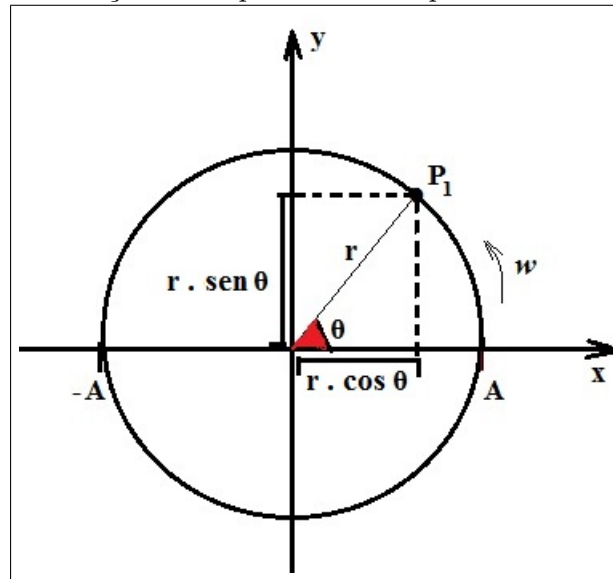
Figura 14: Posição do corpo no plano cartesiano.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

No arco formado do eixo Ox até P_1 , a abscissa P_1 é dada por $r \cdot \cos \theta$ e a ordenada $r \cdot \sin \theta$.

Figura 15: Posição do corpo com os componentes decompostos.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

No decorrer do tempo (t), o ângulo θ varia conforme sua velocidade angular (ω), de modo que θ em um instante (t) é dado por $\theta(t) = \theta_0 + \omega \cdot t$, onde θ_0 é o ângulo inicial descrito no sentido anti-horário pelo fio de comprimento (r).

Podemos escrever a posição do objeto ao longo do eixo Ox conforme a variação de θ :

$$x(t) = r \cdot \cos(\theta_0 + \omega \cdot t). \quad (36)$$

Observe que essa equação para a posição corresponde à equação $x(t) = C \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \theta\right)$ obtida anteriormente, com $C = r$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\theta = \theta_0$. A partir dessa verificação podemos escrever as equações que descrevem a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula em movimento harmônico simples da maneira:

$$x(t) = r \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0). \quad (37)$$

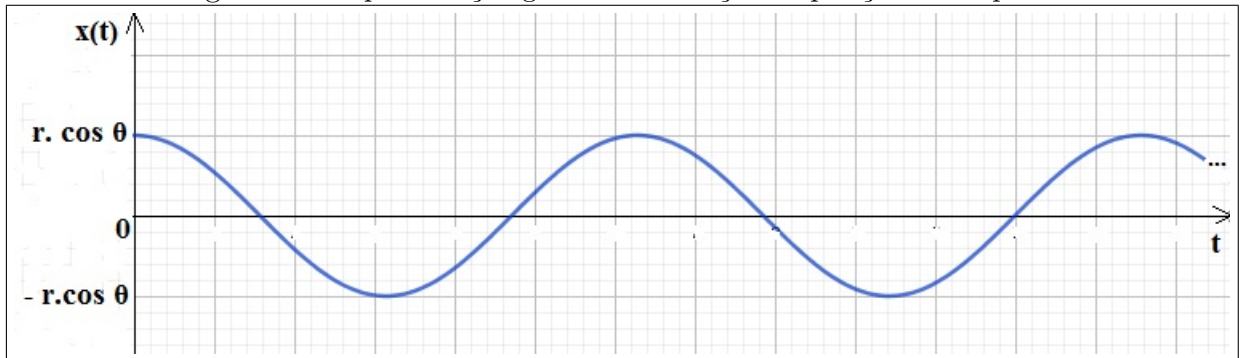
$$v(t) = -\omega \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta_0). \quad (38)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t). \quad (39)$$

A partir das três equações de posição, velocidade e aceleração que dependem de funções trigonométricas, verificamos o valor máximo ou mínimo da posição quando a velocidade é igual a zero. Já para a aceleração, podemos analisar, com base na expressão $a = -\omega^2 \cdot x$, que na posição máxima a aceleração é mínima e vice-versa. Além disso, o sinal negativo indica que ela possui sentido contrário ao deslocamento.

Graficamente, há o seguinte comportamento:

Figura 16: Representação gráfica da variação na posição do corpo.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

No gráfico, o período corresponde a uma “onda” completa, quando o corpo sai de um ponto e retorna à mesma posição depois de um determinado tempo. Na figura também analisamos que o movimento é limitado ($x(t) \leq |r \cdot \cos \omega|$). Esse comportamento mantém-se quando o corpo está em movimento harmônico simples.

No pêndulo, já analisamos que $F_r = -m \cdot g \cdot \frac{x}{L}$ e, como $F_r = m \cdot a$:

$$a = \frac{F_r}{m} = \frac{-m \cdot g \cdot \frac{x}{L}}{m} = -g \cdot \frac{x}{L}.$$

Substituindo esse último resultado em $a = -\omega^2 \cdot x$, obtemos:

$$-g \cdot \frac{x}{L} = -\omega^2 \cdot x \rightarrow \frac{g}{L} = \omega^2 \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (40)$$

Sabemos que período e frequência são grandezas inversamente proporcionais. Se a quantidade de ciclos que um objeto executa em um segundo aumenta, quer dizer, sua frequência (f) aumenta numa proporção, seu tempo para completar um ciclo (o período (T)) diminui em mesma proporção e vice-versa:

$$f = \frac{1}{T}, \quad (41)$$

ou

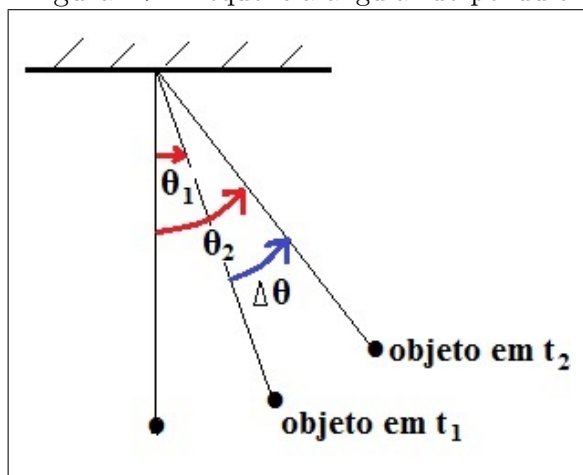
$$T = \frac{1}{f}. \quad (42)$$

A frequência angular (ω), corresponde à velocidade angular do objeto. Como mostrado na figura abaixo, se um objeto faz um ângulo θ_1 com o eixo Ox num instante t_1 no

sentido anti - horário e, posteriormente, um ângulo θ_2 com o eixo Ox num instante t_2 no mesmo sentido, a velocidade angular média é dado pela seguinte razão:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Figura 17: Frequência angular do pêndulo.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

A velocidade angular instantânea, ou seja, a velocidade angular em um determinado instante é o limite de ω quando Δt tende a zero e, portanto, a derivada de θ em relação a t :

$$\omega_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Se o objeto realizar uma volta completa terá descrito um período completo. Como em radianos uma volta é 2π rad, vale:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}. \quad (43)$$

Assim, podemos escrever uma equação entre θ e f :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{f}} \rightarrow \\ \omega &= 2\pi f. \end{aligned} \quad (44)$$

A frequência angular pode ser positiva ou negativa, dependendo do sentido horário ou anti-horário definido, previamente, como positivo.

No pêndulo simples, lembrando que $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ teremos:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (45)$$

O período no pêndulo simples, inverso da frequência, será dado por:

$$f = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (46)$$

Há também a possibilidade de fazer a seguinte interpretação para o pêndulo, com base na dependência de L e g , quanto maior seu comprimento, maior seu período e quando g aumenta, a força restauradora torna-se maior, fazendo aumentar a frequência e diminuir o período.

A frequência angular (ω) e a velocidade angular podem estar relacionadas com a velocidade linear. Lembrando que um radiano corresponde a um ângulo (θ) e é igual a razão do comprimento do arco descrito por esse ângulo (s) e o raio da circunferência (r), temos:

$$\theta = \frac{s}{r} \rightarrow s = r \cdot \theta.$$

Derivando ambos lados desta equação em relação ao tempo, encontramos:

$$\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

sendo $\frac{ds}{dt}$ a taxa de variação do comprimento do arco em relação ao tempo, isto é, sua velocidade linear (v). O lado direito corresponde à taxa de variação do ângulo em relação ao tempo, sua frequência angular (ω). O valor de r é constante, donde segue a igualdade:

$$v = r \cdot \omega. \quad (47)$$

Pela equação acima, percebemos que quanto maior o comprimento do fio do pêndulo, maior será sua velocidade linear.

3.2 Movimento Oscilatório Amortecido

As oscilações amortecidas caracterizam-se pela perda de energia mecânica do corpo durante seu movimento. Essa perda é provocada por forças que chamamos de dissipativas, que promovem colisões com o objeto diminuindo sua energia no decorrer do tempo.

Exemplo dessa força dissipativa é o atrito. Conforme Andrade e Pilling (2018) a força de atrito cinético exercida pelo piso sobre um bloco reduz sua velocidade e transfere a energia cinética do bloco para uma outra forma de energia, chamada de energia térmica

(que está associada ao movimento dos átomos e moléculas). Outros exemplos são a força de resistência do ar e a força de um fluido quando a partícula se movimenta em seu interior.

Quanto maior a velocidade do objeto, maiores são as forças dissipativas e, conseqüentemente, maiores são as colisões, gerando turbulências durante o movimento.

Além da velocidade, características próprias de cada objeto, como sua geometria e sua densidade, também interferem no módulo da força dissipativa, pois, dependendo do seu formato, o número de colisões obtidas pode aumentar ou diminuir.

Assim, ao pensarmos numa expressão para uma força dissipativa, consideramos os fatores velocidade e formato do objeto (geometria). Uma equação simples para descrever uma força dissipativa (\vec{F}_D) é dada por:

$$F_D = -b \cdot v, \quad (48)$$

onde b é a constante relacionada ao formato (geometria) do objeto e v é a sua velocidade. O sinal negativo da força dissipativa explica-se pelo fato dela possuir sentido contrário ao deslocamento do objeto.

Um corpo que inicia um movimento oscilatório amortecido com velocidade (v), após certo tempo entra em equilíbrio com as forças dissipativas, fazendo com que sua velocidade ficar constante. Portanto, no início do movimento há aceleração, mas essa tende a diminuir e a ser nula quando o objeto atinge seu ponto de equilíbrio.

Temos três tipos de amortecimento o subcrítico, o crítico e o supercrítico. No amortecimento subcrítico o objeto chega ao seu ponto de equilíbrio de forma lenta e gradual. No amortecimento crítico acontece um menor número de oscilações, comparado ao anterior, e o sistema atinge rapidamente o seu ponto de equilíbrio; um exemplo são os amortecedores de veículos. No amortecimento supercrítico, o sistema praticamente não oscila e se move vagarosamente, de modo que o objeto necessita de um tempo maior em relação ao amortecimento crítico para chegar ao seu ponto de equilíbrio.

Qual amortecimento será adquirido por um sistema depende dos agentes externos em que o sistema está inserido, pois esses efetuarão forças dissipativas no movimento do objeto. Por exemplo, se mergulharmos um sistema massa-mola em um líquido, poderemos ter um tipo de amortecimento conforme a viscosidade do líquido.

Falaremos, agora, sobre a força de resistência do ar, que é a força dissipativa presente no nosso objeto de estudo, o pêndulo.

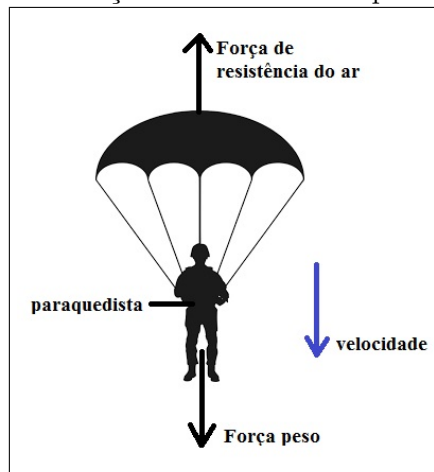
3.2.1 Força de resistência do ar

Quando o movimento de um objeto acontece em meio ao ar ou a outros gases, estes tendem a resistir ao movimento. Dessa forma, a força de resistência do ar possui sentido contrário ao movimento do corpo.

Essa força é fundamental no controle da velocidade de descida de um pára-quedas, por exemplo. Quando o paraquedista salta, de início, ele se comporta como um corpo em queda com velocidade crescente devido à aceleração da gravidade. Após a abertura do pára-quedas, a velocidade começa a diminuir, devido ao aumento da atuação da força de

resistência do ar no sentido oposto da força peso. Este artifício permite uma velocidade adequada de pouso para o paraquedista. Caso essa força de resistência do ar não fosse repentinamente aumentada, a velocidade tenderia a crescer rapidamente e, possivelmente, o paraquedista não sobreviveria ao impacto da queda. Uma ilustração das forças atuantes no paraquedista segue abaixo.

Figura 18: Forças atuantes em um paraquedista.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.






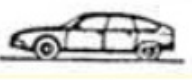


Conforme Copelli et al. (1998), um paraquedista em queda livre atinge no máximo uma velocidade de 200 km/h . Sem o pára-quedas, ele atingiria uma velocidade bem maior, chegando ao valor de 500 km/h ao saltar de uma altura de 1000 metros.

Ao analisarmos essa situação com o pára-quedas, verificamos qual o fator ocasionou o aumento da força de resistência do ar: a extensão da superfície de contato com o ar quando o paraquedista utiliza seu pára-quedas. Essa força, contudo, está relacionada a área de cobertura do corpo em movimento no ar.

O formato do corpo também pode interferir na intensidade de atuação da força de resistência do ar. Essa interferência é medida empiricamente e nos leva a um número adimensional chamado de coeficiente de arrasto, indicado por C_x . No cálculo desse coeficiente, analisa-se a velocidade máxima de deslocamento do corpo no ar e suas dimensões características. Por exemplo, um corpo de formato esférico considera seu diâmetro, sua densidade e sua viscosidade.

Atualmente, os automóveis possuem modelos mais aerodinâmicos, ou seja, modelos que “cortam o ar” e diminuem as colisões com ele, fazendo a força de resistência do ar ser menor. Como resultado o veículo gasta menos combustível para manter certa velocidade. Abaixo temos uma tabela que mostra a queda nos valores do coeficiente de arrasto no decorrer do tempo, com a modernização dos automóveis.

Figura 19: Comparação do coeficiente de arrasto entre modelos de automóveis.

ANO	MODELO BÁSICO	C_x
1910		0,74
1930		0,70
1940		0,67
1945		0,48
1960		0,43
1970		0,41
1975		0,40
1985		0,34
1995		0,29

Fonte: (SOUZA; QUEIROZ, 2004, p. 54)

Como comentamos na seção anterior, a velocidade também influencia no aumento ou declínio da força de resistência do ar. Quanto maior for a velocidade de um ciclista, com maior intensidade o mesmo perceberá essa força.

Um último fator que pode gerar mudanças na resistência do ar é a própria densidade do ar. A variação da densidade do ar está ligada à pressão e à temperatura. Quanto maior a pressão, o ar ficará mais denso e oferecerá maior resistência ao movimento. Já para a temperatura acontece o inverso: o aumento da temperatura ocasiona a diminuição da densidade do ar, oferecendo menor resistência ao deslocamento do corpo.

Considerando todos esses fatores citados anteriormente, ao propor uma expressão para força de resistência do ar escrevemos:

$$F_r = A \cdot \mu \cdot C_x \cdot v, \quad (49)$$

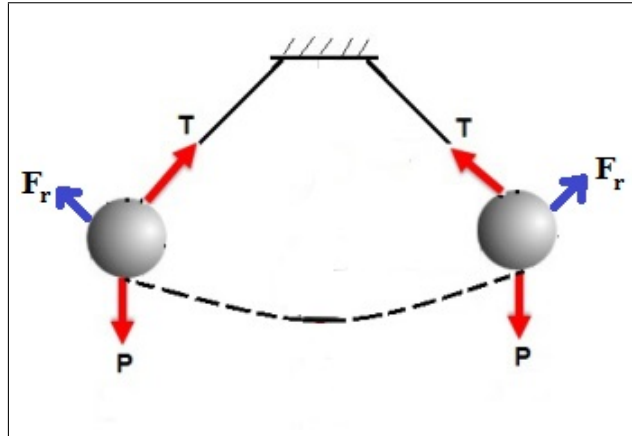
onde A corresponde à área superficial do corpo, μ à densidade do ar, C_x ao coeficiente de arrasto e v à velocidade do corpo.

Na próxima sessão, abordaremos a equação diferencial que descreve as oscilações amortecidas do pêndulo.

3.2.2 Equação Diferencial em Oscilações Amortecidas

Considere um fio de comprimento (L) com uma extremidade presa a uma superfície e na outra extremidade uma esfera de massa (m) em movimento oscilatório. As forças que atuam sobre a esfera são a força de tração (T), a força peso (P) e a força de resistência do ar (F_r), conforme segue na ilustração abaixo.

Figura 20: Representação das forças na oscilação amortecida do pêndulo.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

No movimento harmônico simples não consideramos a força de resistência do ar e verificamos que a força resultante era dada pela equação (29). Já em uma oscilação amortecida, a força resultante será acrescida pela força de resistência do ar. Como essa força é sempre contrária ao sentido do vetor velocidade, a resultante é a diferença entre a força restauradora, cuja equação foi discutida na seção 3.1 e a equação (49). Chegamos a seguinte expressão:

$$F_R = -m \cdot g \cdot \text{sen } x - A \cdot \mu \cdot C_x \cdot v.$$

Como $F_R = m \cdot a$, teremos:

$$m \cdot a = -m \cdot g \cdot \text{sen } x - A \cdot \mu \cdot C_x \cdot v$$

e, dividindo toda a equação por m , segue:

$$a = -g \cdot \text{sen } x - \frac{A \cdot \mu \cdot C_x \cdot v}{m}.$$

Denominando b a expressão

$$b = \frac{A \cdot \mu \cdot C_x}{m}, \quad (50)$$

e sabendo que a velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, resulta em:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \cdot \text{sen } x - b \cdot \frac{dx}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + g \cdot \text{sen } x = 0. \quad (51)$$

Portanto, essa é a equação diferencial que descreve a posição do pêndulo em um determinado instante. Todavia, essa equação diferencial não é linear. O que iremos fazer é uma linearização dessa equação, considerando que $\text{sen } x = \frac{x}{L}$, onde x representa o deslocamento linear do pêndulo de um ponto P_1 até P_2 e L é o comprimento do fio. Assim, a equação passa a ser da forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{g}{L} \cdot x = 0.$$

Denominaremos de k a divisão:

$$k = \frac{g}{L}. \quad (52)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0. \quad (53)$$

Agora, temos uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Teremos que encontrar uma função $x(t)$ tal que sua derivada segunda somada com o quadrado da sua derivada primeira e com a própria função seja possível de ser igual a zero. Suporemos, como no movimento harmônico simples, que essa função seja do tipo $x(t) = e^{cit}$, com $c \in \mathbb{R}$.

Tomando as derivadas de $x(t)$ e substituindo-as na equação (53):

$$-c^2 \cdot e^{cit} + b \cdot i \cdot c \cdot e^{cit} + k \cdot e^{cit} = 0.$$

Colocando e^{cit} em evidência, encontramos:

$$e^{cit} \cdot (-c^2 + b \cdot i \cdot c + k) = 0 \rightarrow e^{cit} \cdot (c^2 - b \cdot i \cdot c - k) = 0.$$

A equação característica possui, como raízes, os valores:

$$c_1 = \frac{b \cdot i + \sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}}{2} \text{ e } c_2 = \frac{b \cdot i - \sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}}{2},$$

de tal forma que a solução geral $x(t)$ para a posição é dada por:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\left(\frac{b \cdot i + \sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}}{2}\right) \cdot i \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(\frac{b \cdot i - \sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}}{2}\right) \cdot i \cdot t} \rightarrow$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot e^{\left(\frac{\sqrt{-b^2+4 \cdot k}}{2}\right) \cdot i \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot e^{\left(\frac{-\sqrt{-b^2+4 \cdot k}}{2}\right) \cdot i \cdot t} \rightarrow$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot e^{\left(\frac{\pm \sqrt{-b^2+4 \cdot k}}{2}\right) \cdot i \cdot t}, \quad (54)$$

sendo C_1 e C_2 constantes determinadas a partir das condições iniciais do problema.

Se $b^2 - 4 \cdot k$ será maior, menor ou igual a zero dependerá da relevância da atuação da força de resistência do ar e da força oriunda do pêndulo. Se a atuação da força de resistência do ar, que está associada à constante b , for significativa ao ponto de $b^2 > 4 \cdot k$, teremos uma oscilação que denominamos de subcrítica.

Na equação (54), o valor expresso por $\sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}$ é um número real e chamaremos esse número de w . Lembrando que $e^{\left(\frac{w \cdot t}{2}\right) i} = \cos\left(\frac{w \cdot t}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{w \cdot t}{2}\right)$, obteremos a seguinte equação:

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pm w \cdot t}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pm w \cdot t}{2}\right) \right) \rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot \left(C_1 \cos\left(\frac{\pm w \cdot t}{2}\right) + C_2 \cdot i \cdot \sin\left(\frac{\pm w \cdot t}{2}\right) \right).$$

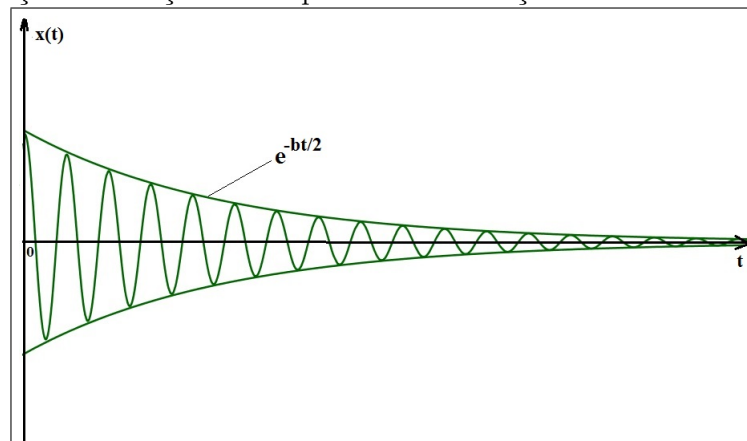
A equação acima pode ser alternativamente escrita através do modelo:

$$x(t) = e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) \right), \quad (55)$$

em que $C_1 = A \cdot \cos \theta$ e $C_2 \cdot i = -A \cdot \sin \theta$.

Um gráfico da posição variando com o tempo é representado na figura abaixo, considerando $b = 0,4$, $A = 1$ e $w = 3$.

Figura 21: Posição em relação ao tempo de uma oscilação com amortecimento subcrítico.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Pelo gráfico, observamos que o objeto executa oscilações com amplitudes cada vez menores no decorrer do tempo até atingir uma posição de equilíbrio, momento no qual o corpo termina seu movimento oscilatório. Essas oscilações são delimitadas pela curva da exponencial $e^{-\frac{bt}{2}}$.

A velocidade $v(t)$ nesse tipo de amortecimento será expressa pela derivada primeira da equação (55):

$$v(t) = \frac{-A \cdot b}{2} \cdot e^{-\frac{bt}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) - A \cdot \pm \frac{w}{2} \cdot e^{-\frac{bt}{2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) \rightarrow$$

$$v(t) = -A \cdot e^{-\frac{bt}{2}} \cdot \left[\frac{b}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) \pm \frac{w}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) \right].$$

A aceleração, por sua vez, é a derivada da expressão acima. Aplicando, novamente, a derivada do produto, temos a equação abaixo:

$$a(t) = A \cdot e^{-\frac{bt}{2}} \cdot \left[\frac{b^2 \pm w^2}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) \pm \frac{w \cdot b}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pm w \cdot t}{2} + \theta\right) \right].$$

Quando $b^2 = 4 \cdot k$, teremos um amortecimento crítico. Nesse caso, a equação diferencial de segunda ordem admite duas raízes repetidas. Ao falarmos dos casos possíveis, na seção 2.8.2, afirmamos que a solução é uma exponencial multiplicada por um polinômio de grau $n - 1$ em relação à ordem da equação diferencial.

Na equação (54), fazendo $b^2 = 4 \cdot k = 0$, ficamos com:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\left(\frac{-b}{2}\right) \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(\frac{-b}{2}\right) \cdot t} \cdot (A \cdot t + B),$$

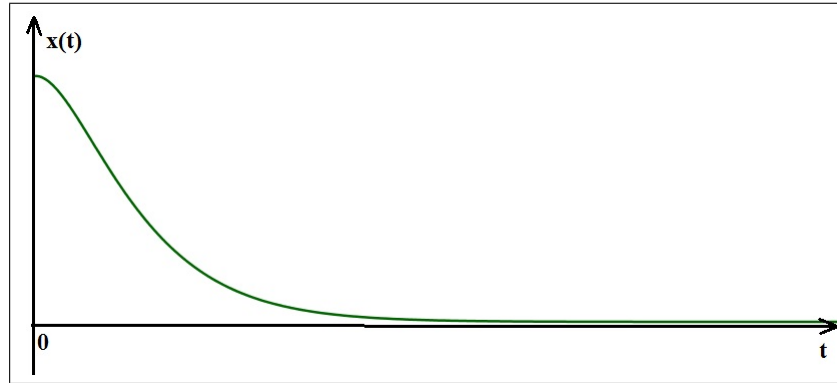
em que as constantes A e B são determinadas a partir das condições iniciais.

Fixando $C_1 + C_2 = C$, chegamos a:

$$x(t) = C \cdot e^{\left(\frac{-b}{2}\right) \cdot t} \cdot (A \cdot t + B). \quad (56)$$

O comportamento gráfico desse tipo de oscilação é ilustrado a seguir. Na figura (22), consideramos $C = 4$, $b = 1,8$, $A = 2$ e $B = 0,9$.

Figura 22: Posição em relação ao tempo de uma oscilação com amortecimento crítico.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

No gráfico verificamos que, no amortecimento crítico, praticamente não há oscilação, pois o objeto rapidamente atinge sua posição de equilíbrio.

A velocidade e a aceleração no amortecimento crítico serão expressas por:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = C \cdot e^{-\frac{b}{2} \cdot t} \cdot \left[A - \frac{b \cdot (A \cdot t + B)}{2} \right]$$

e

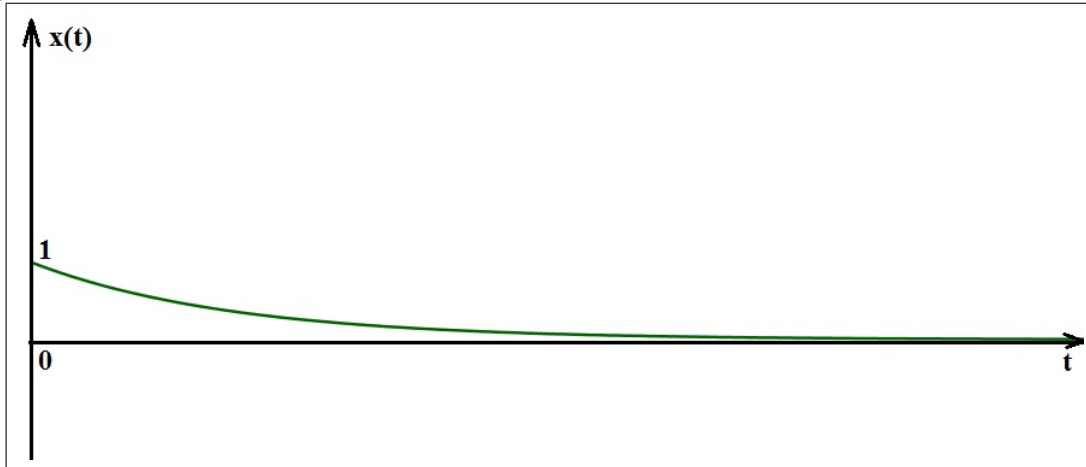
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = C \cdot b \cdot e^{-\frac{b}{2} \cdot t} \cdot \left[-A + \frac{b \cdot (A \cdot t + B)}{4} \right].$$

Finalmente, se $b^2 < 4 \cdot k$, temos uma oscilação supercrítica. Assim:

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2}} \cdot e^{\left(\frac{\pm \sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}}{2} \right) \cdot t}. \quad (57)$$

Como na oscilação com amortecimento crítico, esse movimento atinge seu ponto de equilíbrio praticamente sem oscilar. A diferença é o tempo necessário para atingir tal ponto. Abaixo segue o gráfico obtido quando consideramos $\frac{b}{2} = 0,2$ e $\frac{\sqrt{-b^2 + 4 \cdot k}}{2} = 0,1$.

Figura 23: Posição em relação ao tempo de uma oscilação com amortecimento supercrítico.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Na próxima seção, falaremos sobre a classificação quanto à estabilidade do ponto de equilíbrio em cada caso apresentado anteriormente.

3.2.3 Análise dos Pontos de Equilíbrio

O objetivo nessa seção é fazer um estudo geométrico dos casos de estabilidade possíveis de serem verificados em cada sistema de amortecimento, analisando a classificação do ponto de equilíbrio.

Num sistema amortecido, concluímos que a equação diferencial ordinária de segunda ordem que caracteriza o movimento do pêndulo é dada pela expressão:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0 \rightarrow x'' + b \cdot x' + k \cdot x = 0.$$

Uma equação de segunda ordem pode ser escrita como um sistema de duas equações de primeira ordem. Para isso, fazemos a inserção de uma nova variável y e chamamos $x' = y$. Assim, substituindo essa última igualdade na equação diferencial $x'' + b \cdot x' + k \cdot x = 0$ obtemos:

$$y' + b \cdot y + k \cdot x = 0 \rightarrow y' = -b \cdot y - k \cdot x.$$

Portanto, há duas equações lineares:

$$\begin{cases} x' = y. \\ y' = -b \cdot y - k \cdot x. \end{cases}$$

Para sabermos quais os pontos de equilíbrio, analisaremos qual o conjunto de pontos torna igual a zero ambas as equações lineares acima. A primeira equação diferencial admite um único valor de y , que é o próprio zero. Substituindo esse resultado na segunda equação e igualando-a a zero, temos:

$$0 = -b \cdot 0 - k \cdot x \rightarrow 0 = -k \cdot x,$$

portanto $x = 0$. Um ponto de equilíbrio é, então, o ponto $(0, 0)$. Contudo, há outros desses pontos. Pensando que o deslocamento x foi linearizado a partir da função $\sin x$, também serão soluções os pontos em que $\sin x = 0$, ou seja, os pontos $(n \cdot \pi, 0)$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ formam um conjunto de pontos de equilíbrio para o sistema estudado.

Para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, encontraremos os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes. A equação característica é:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -k & -b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b \cdot \lambda + k = 0,$$

logo os valores para os autovalores são:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot k}}{2}$$

ou

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot k}}{2}.$$

Os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 serão denominados $K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ e $K_2 = \begin{pmatrix} k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$, respectivamente.

A solução será dada por:

$$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t},$$

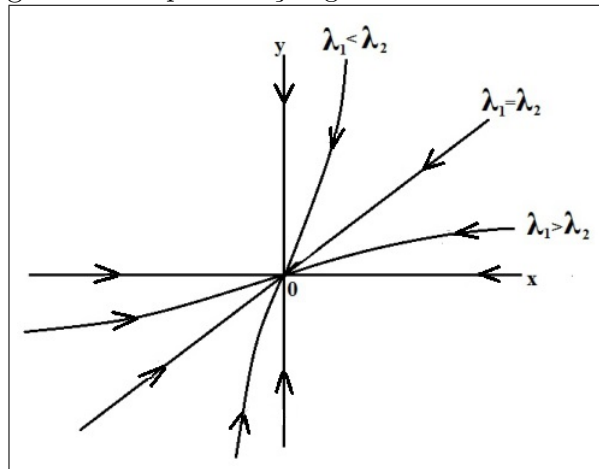
e podemos escrevê-la na forma de matriz, como segue abaixo:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot k_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot k_3 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \\ C_1 \cdot k_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot k_4 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \end{pmatrix}.$$

O valor de $\sqrt{b^2 - 4 \cdot k}$ pode ser positivo, negativo ou nulo, correspondendo ao amortecimento subcrítico, supercrítico e crítico, respectivamente.

Sendo $\sqrt{b^2 - 4 \cdot k} > 0$, teremos duas raízes distintas e, portanto, dois autovalores com valores diferentes. Se ambos autovalores são negativos, se $t \rightarrow \infty$ tanto $x(t) = C_1 \cdot k_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot k_3 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$ quanto $y(t) = C_1 \cdot k_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot k_4 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$ tendem a zero. Um ponto qualquer do plano nas redondezas do ponto de equilíbrio $(0, 0)$, aproxima-se dele tendendo à estabilidade. Nesse caso, o ponto de equilíbrio é denominado como nó estável. A representação geométrica desse caso segue abaixo.

Figura 24: Representação gráfica de um nó estável.

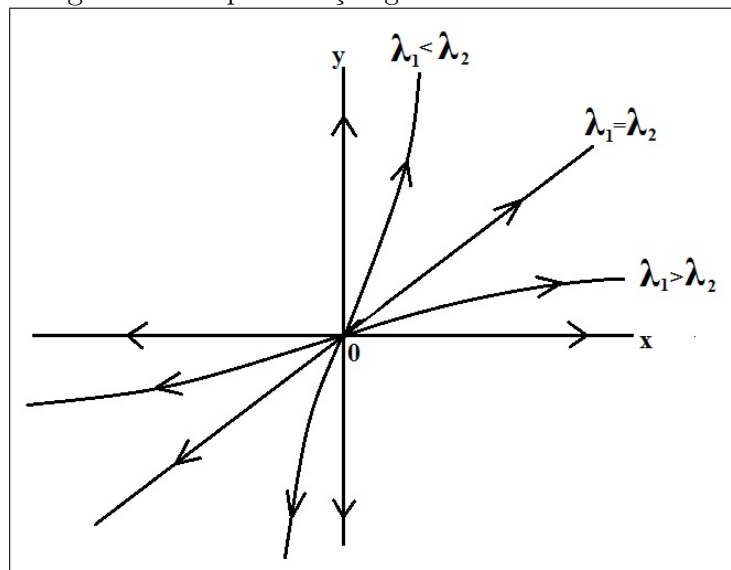


Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Na figura acima, o sentido das setas indicam que os pontos próximos ao ponto $(0, 0)$ tendem a ele. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, as funções $x(t)$ e $y(t)$ crescem igualmente. Se $\lambda_1 > \lambda_2$, a função $x(t)$ cresce mais em relação a função $y(t)$ e o inverso ocorre se $\lambda_1 < \lambda_2$.

Se ambos autovalores são positivos, se $t \rightarrow \infty$ tanto $x(t)$ e $y(t)$ tendem ao infinito. Então, dado um ponto qualquer próximo a um ponto de equilíbrio $(0,0)$, ele não tenderá a aproximar desse ponto, já que desviará dele indo para o infinito. Chamamos esse tipo de comportamento de instabilidade. O ponto de equilíbrio é chamado de nó instável. A representação gráfica dessa situação segue abaixo e podemos visualizar um contexto oposto ao da figura (24).

Figura 25: Representação gráfica de um nó instável.

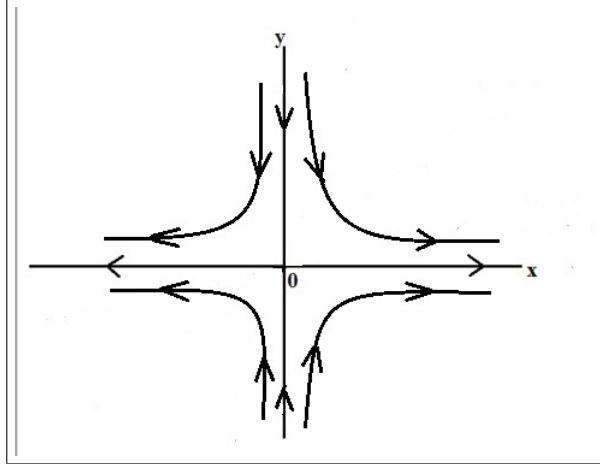


Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Se os autovalores são de sinais opostos, o ponto de equilíbrio é definido como ponto de sela. Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, a função $x(t)$ tenderá ao infinito enquanto a função $y(t)$ tende

ao ponto $(0, 0)$. O inverso acontece se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$. A representação geométrica desse ponto, quando $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, está na figura que segue.

Figura 26: Representação gráfica de um ponto de sela.



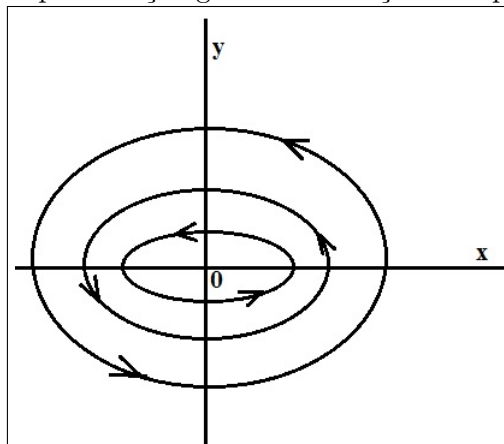
Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Sendo $\sqrt{b^2 - 4 \cdot k} < 0$, teremos duas raízes complexas que podem ser imaginárias puras ou conter parte real e imaginária. Se as raízes são imaginárias puras, usando a aproximação pelo polinômio de Taylor para $e^{\pm i\beta t}$, escrevemos, então, as soluções da forma:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cdot k_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot k_3 \cdot \text{sen}(\beta \cdot t). \\ y(t) = C_1 \cdot k_2 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot k_4 \cdot \text{sen}(\beta \cdot t). \end{cases}$$

Observe que, as soluções $x(t)$ e $y(t)$ estão relacionadas às funções periódicas seno e cosseno com período dado por $\frac{2\pi}{\beta}$. Se k_3 e k_2 são iguais a zero, temos que $x(t)$ e $y(t)$ são expressões para as equações paramétricas de uma elipse com centro no ponto $(0, 0)$. Variando os valores de k_1 , k_2 , k_3 e k_4 , formamos um conjunto de elipses com centro em $(0, 0)$.

Figura 27: Representação gráfica de soluções complexas puras.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Na figura acima, o ponto $(0,0)$ é denominado de centro. As elipses podem ser percorridas tanto no sentido horário como no sentido anti-horário.

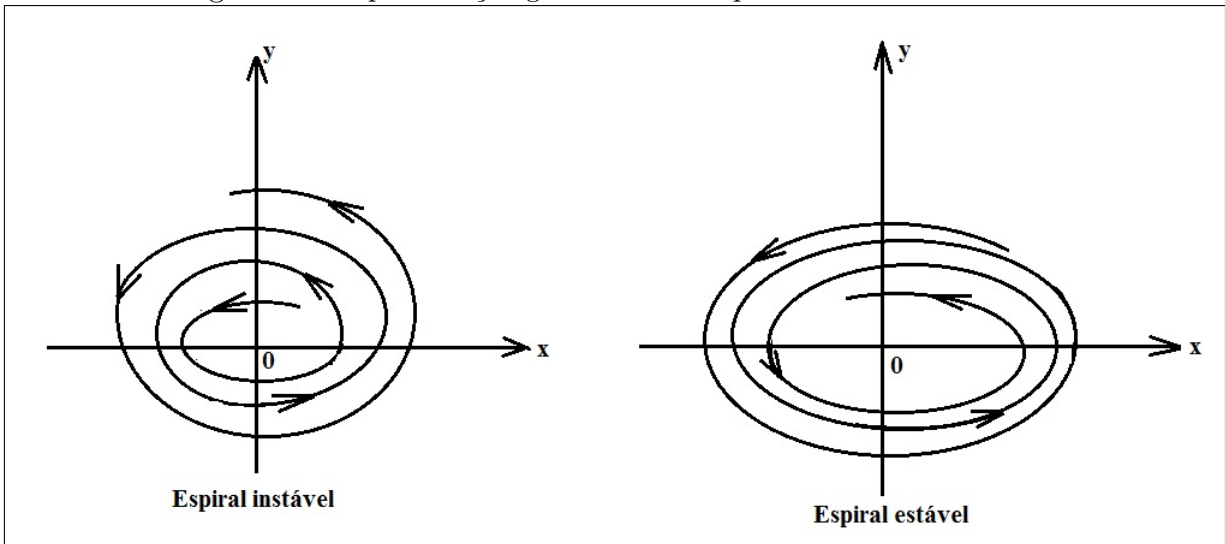
Se as raízes possuem parte real, segue $e^{(\alpha+i\beta)\cdot t}$, as soluções são escritas da seguinte maneira:

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot [C_1 \cdot k_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot k_3 \cdot \text{sen}(\beta \cdot t)].$$

$$y(t) = e^{\alpha t} \cdot [C_1 \cdot k_2 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot k_4 \cdot \text{sen}(\beta \cdot t)].$$

Se $\alpha > 0$, $x(t)$ e $y(t)$ descrevem elipses que tendem a se afastar da origem. Chamamos esse ponto de espiral instável. O oposto acontece quando $\alpha < 0$: as elipses tendem a se aproximar do ponto $(0,0)$, nomeado de ponto de espiral estável. As representações geométricas dessas situações aparecem na figura 28.

Figura 28: Representação gráfica de um espiral estável e instável.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Sendo $\sqrt{b^2 - 4 \cdot k} = 0$, há duas raízes repetidas. As soluções são da forma:

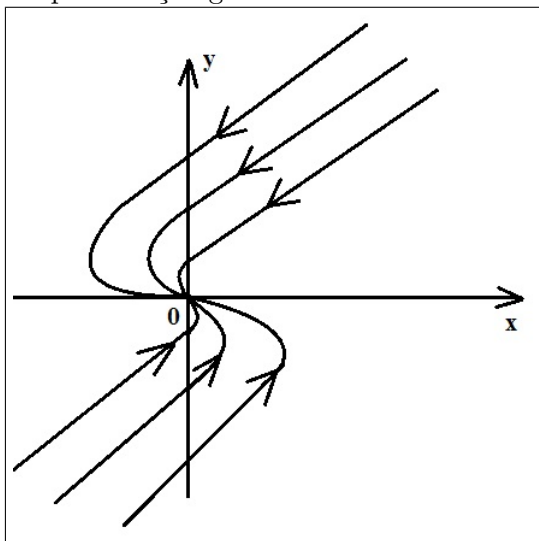
$$x(t) = C_1 \cdot k_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot k_3 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$$

e

$$y(t) = C_1 \cdot k_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot k_4 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}.$$

Se $\lambda_1 < 0$, $t \cdot e^{\lambda_1}$ tenderá a zero quando t tender ao infinito. Nesse caso, a assíntota de $x(t)$ e $y(t)$ tende ao ponto $(0,0)$, quando $t \rightarrow \infty$, conforme as direções dos vetores k_1 e k_2 . Há um nó estável degenerado. Se $\lambda_1 > 0$, ocorre a situação contrária: $x(t)$ e $y(t)$ tendem a se afastar do ponto $(0,0)$ com $t \rightarrow \infty$. Existe, aí, um nó instável degenerado.

Figura 29: Representação gráfica de um nó estável degenerado.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Concluimos que a classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio do pêndulo está relacionada aos valores da expressão $(\sqrt{b^2 - 4 \cdot k})$, sendo que a constante k é igual $\frac{g}{L}$ pela equação (52) e a constante b provém de valores ligados à área superficial do corpo, à densidade do corpo e ao coeficiente de arrasto. Todos esse fatores interferem no movimento do pêndulo e no comportamento que este apresentará em relação aos seus pontos de equilíbrio, seja aproximando-se ou afastando-se deles.

A seguir apresentaremos uma proposta de aula para o Ensino Médio no estudo do movimento do pêndulo através do uso do *software* Geogebra. Consideraremos o caso do movimento harmônico simples do pêndulo e com amortecimento.

4 Atividade investigativa do movimento do pêndulo com uso do *software* Geogebra

Nosso objetivo, nessa seção, é propor aulas investigativas para o Ensino Médio usando o *software* matemático Geogebra no estudo do movimento harmônico simples e amortecido do pêndulo. No contexto educacional, a atividade caracteriza-se também como interdisciplinar, pois usa conceitos de Matemática, como as funções trigonométricas, para entender o movimento de um objeto trabalhado nas aulas de Física, o pêndulo simples.

Segundo Curi (2010), a investigação nas aulas visa o envolvimento profundo do aluno com o conteúdo, deixando que por si próprio descubra e organize suas dúvidas, analise todas as possibilidades de saná-las e julgar quais delas são relevantes para a tarefa. O foco da aula, passa-se do professor para o aluno, no sentido de uma aula mais colaborativa.

O professor tem um papel determinante nas aulas de investigação matemática, mantendo o equilíbrio entre a autonomia necessária dada ao aluno para não comprometer sua autoria na investigação e a garantia de que o trabalho do aluno flua naturalmente e de maneira significativa. (Ponte, 2003).

De acordo com Ponte (2003), numa investigação matemática parte-se de uma questão mais generalizada ou de um conjunto de informações pouco estruturadas para se chegar a uma solução, tendo um ponto de partida para procurar e formular uma questão mais precisa com um melhor detalhamento e sobre ela produzir diversas conjecturas; estas são testadas e, perante contradições, poderão ser descartadas.

A investigação matemática possui quatro momentos principais:

Tabela 1: Momentos de uma investigação.

Momentos de uma investigação	Atividades
Exploração e formulação de questões	Reconhecer e explorar uma situação problemática
Formulação de conjecturas	Organizar dados e formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes e refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura e avaliar o raciocínio.

Fonte: *Investigação sobre investigações Matemáticas em Portugal*, (PONTE, 2003 pág. 7). Publicado na revista *Investigar em Educação*, 2003, Edição SPCE, vol. 2, Gráfica 2000, Lisboa.

A atividade investigativa será desenvolvida através do uso de *software* matemático, o Geogebra. Grande parte das escolas atualmente possui um laboratório de informática em suas instalações, dando oportunidade de utilização por parte do professor, deste recurso no ensino.

Na Matemática, vários *software* oferecem recursos para a abordagem de conteúdos de maneira ágil e funcional, impossível no uso do tradicional quadro e giz. Além do que, esses recursos condizem com a atual realidade do aluno, no uso das tecnologias para acessar informações e adquirir conhecimento.

O *software* Geogebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter como parte de sua dissertação de mestrado em Educação Matemática e Ciência da Computação, nos anos de 2001 e 2002, pela Universidade da Salzburg, Áustria. Este *software* recebeu prêmios internacionais e foi traduzido em vários idiomas, sendo um deles o português. O Geogebra

funciona em diferentes sistemas operacionais, como *Linux*, *Windows*, *Mac OS*. Pode ser feita sua portabilidade, sendo necessária a instalação da máquina virtual *Java*. É um aplicativo gratuito e obtido através do acesso à página <http://www.geogebra.org>, independente do sistema operacional e da necessidade de licenças comerciais.

Algumas características do programa são a geração de gráficos, tabelas e representação algébrica concomitantemente a uma interface amigável, com vários recursos sofisticados e ferramentas de produção de aplicativos interativos em páginas da *web*. De modo geral, o Geogebra busca interligar as facilidades dos *softwares* de geometria dinâmica com os recursos disponíveis nos softwares algébricos, mantendo as principais características de ambos os contextos e proporcionando uma integração dos recursos de geometria, álgebra e cálculo.

4.1 Orientações para o desenvolvimento da atividade investigativa sobre o pêndulo

A atividade possibilita um trabalho conjunto nas disciplinas de Física e Matemática. Na Física, realizamos um estudo gráfico do Movimento Harmônico Simples (MHS) em relação a conceitos como posição, velocidade, aceleração, amplitude, frequência e período. Na Matemática, envolvemos a interpretação gráfica das funções trigonométricas e discutimos as principais características que esse tipo de função possibilita na descrição de movimentos periódicos.

O documento de Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) diz que “a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza” (BRASIL, 2000, p.111). Essa integração da Matemática à outras áreas de conhecimento, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, instrumentaliza e estrutura o pensamento do aluno, capacitando-o a interpretar situações, argumentar, analisar, avaliar e tirar conclusões próprias.

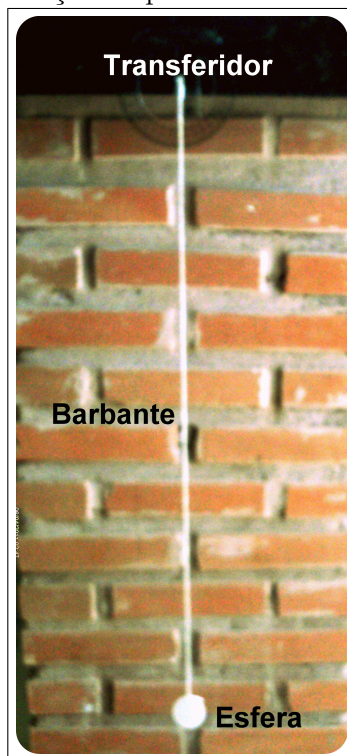
Especificamente em Trigonometria, as Orientações Educacionais Complementares do PCNEM defendem que “deve ser assegurado as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e a construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos” (BRASIL, 2000, p.121 - 122). Com base nessas orientações, a atividade a ser proposta possui como objetivos principais, do ponto de vista matemático: desenvolver a capacidade de interpretação gráfica das funções trigonométricas, como intervalos de crescimento e decrescimento, pontos máximos, mínimos e limites; propor uma análise da funcionalidade dessas funções na descrição de movimentos oscilatórios.

A atividade é voltada para alunos do Ensino Médio e, exige como pré-requisitos, conhecimentos das equações do MHS quanto à posição, à velocidade e à aceleração. Por essa razão, no contexto escolar, é viável que o trabalho seja realizado conjuntamente com o professor de Física.

Conforme a Tabela 1, o primeiro momento da atividade investigativa refere-se a reconhecer e explorar a situação problemática. Nesse sentido, é proposto que os alunos tenham contato direto com o nosso objeto de estudo o pêndulo simples. Para a construção dos pêndulos, os alunos deverão trazer os seguintes materiais: um transferidor (360°), uma

fita adesiva, barbante e uma esfera, por exemplo, bolas de gude ou de metal de diferentes tamanhos e pesos. Primeiramente, a esfera será presa à uma das extremidades do barbante utilizando a fita adesiva. A outra extremidade será fixada ao centro do transferidor. O transferidor é pregado a uma mesa, tomando-se o cuidado do barbante em repouso passar pela marca zero do transferidor. A esfera não deve tocar no chão (caso isso ocorra o comprimento do fio deve ser ajustado). A figura abaixo mostra uma exemplificação do pêndulo a ser confeccionado.

Figura 30: Proposta de construção do pêndulo com transferidor, esfera e barbante.

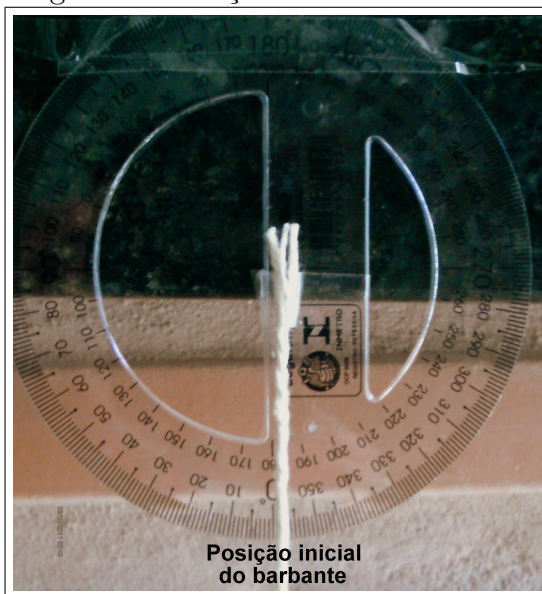


Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

De início, o barbante deverá ser posicionado na posição (10°) e um discente deverá segurar a esfera com a mão. Outro aluno deverá ficar preparado para cronometrar o tempo decorrido de uma oscilação completa⁸. Os resultados de tempo obtidos deverão ser todos registrados, porque serão analisados em um momento próximo. A imagem a seguir mostra a posição inicial do barbante na posição (0°).

⁸O cronômetro pode ser de um dispositivo móvel.

Figura 31: Posição inicial do barbante.



Fonte: Imagem criada pelo próprio autor.

Se, por acaso, houver dificuldade de cronometrar o tempo de uma oscilação completa, uma possibilidade é obter o período de um número maior de oscilações completas e, em seguida, dividir pela quantidade dessas. O procedimento deve ser repetido com outros comprimentos do barbante e outros pesos da esfera. Posteriormente, o barbante deve ser posicionado na posição (60°) e ser medido o tempo necessário para efetuar três oscilações completas. Os dados encontrados devem ser anotados.

Por ser uma atividade investigativa, com os pêndulos construídos, o professor estimula algumas observações importantes de serem concluídas pelos alunos a respeito do movimento do pêndulo. Por exemplo, incentivar a investigação dos alunos da interferência ou não na frequência e período do objeto quando variamos o comprimento do fio ou alteramos o corpo preso a ele. Os discentes podem comparar os movimentos dos diferentes pêndulos construídos para chegar a uma conclusão.

É possível discutir, ainda, qual a posição de equilíbrio e o tempo necessário para um pêndulo chegar a essa posição frente a diferentes massas e comprimentos. Os discentes devem usar um cronômetro para efetuar essa contagem de tempo.

O docente pode instigar a associação do movimento do pêndulo ao ciclo trigonométrico. Sendo o comprimento da corda o raio da circunferência, o centro $(0,0)$ seria representado pelo extremo da corda que não está preso ao objeto. Esse fato justifica a representação do movimento do pêndulo pelas funções trigonométricas.

O professor deve atentar os alunos para a atuação da força de resistência do ar no movimento do pêndulo. Caso essa força não estivesse presente, o pêndulo repetiria o mesmo movimento infinitamente. As equações no movimento MHS são úteis para descrever pequenos deslocamentos angulares do pêndulo.

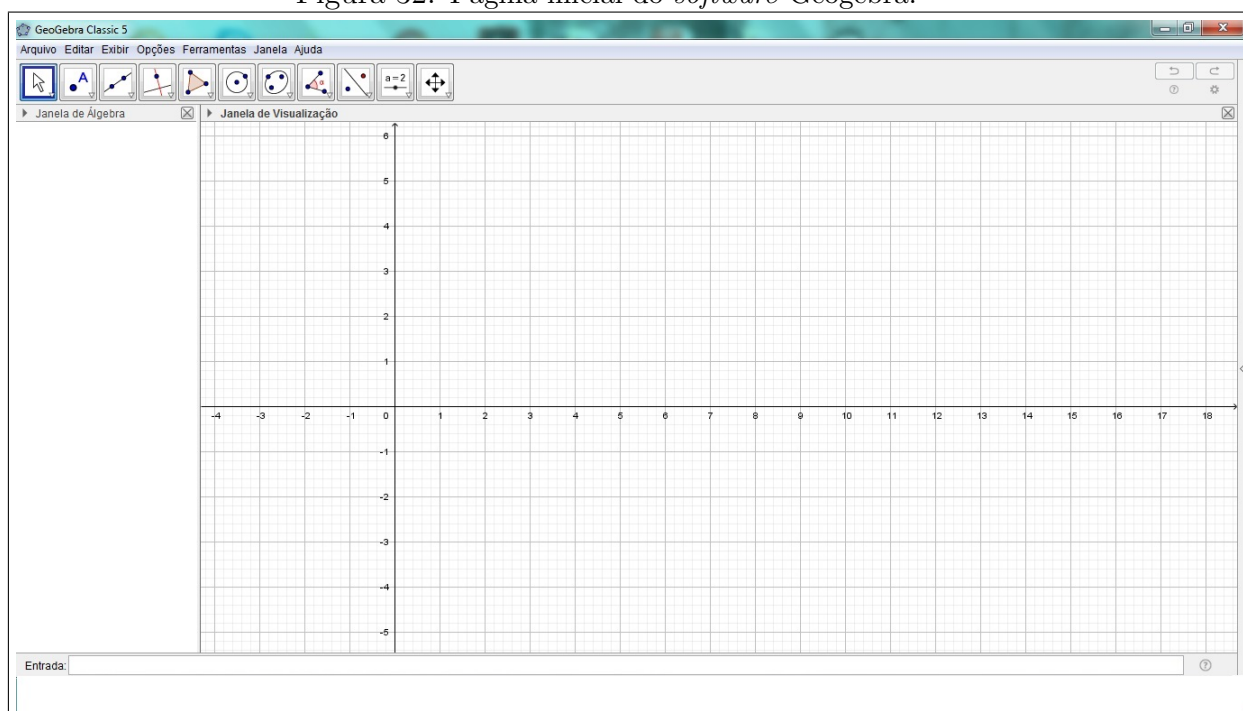
As conclusões obtidas pelos alunos nessa experiência empírica serão confrontadas, posteriormente, com os resultados alcançados ao estudarem o movimento do pêndulo com amortecimento.

As próximas aulas deverão acontecer no laboratório de informática com previsão 6 horas/aulas no total. Na próxima seção, apresentamos o passo a passo do desenvolvimento da atividade.

4.2 Desenvolvimento da atividade investigativa sobre o pêndulo

Ao início da atividade, caso os alunos ainda não tiveram contato com o *software* Geogebra, recomenda-se a apresentação geral do programa. Ele possui a “Janela de Visualização”, onde são gerados os gráficos, a “Janela de Álgebra”, espaço de apresentação das equações e o campo de “Entrada”, local onde são inseridas as equações para a geração dos gráficos. A figura abaixo mostra a página inicial do programa.

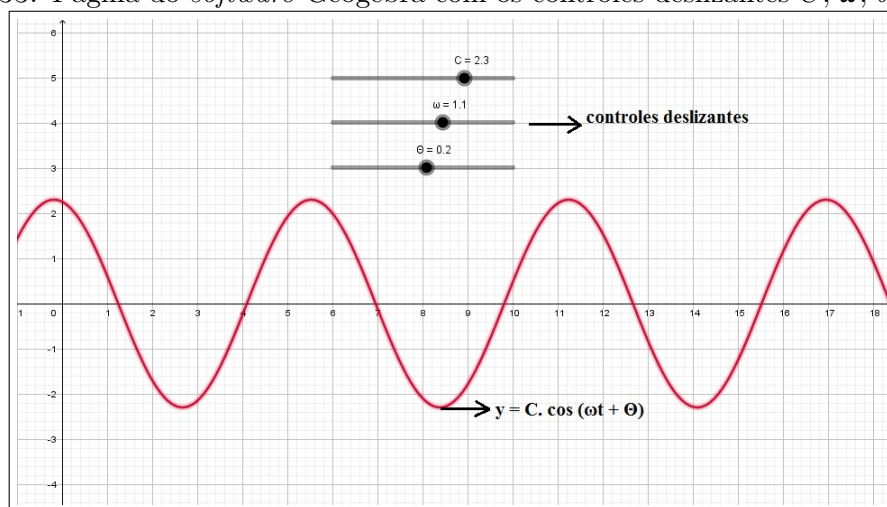
Figura 32: Página inicial do *software* Geogebra.



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

Ao início da atividade, é importante alertar os alunos que para a escrita das equações (37), (38) e (39) que expressam a posição, velocidade e aceleração no MHS, a variável t será trocada pela variável x ao ser escrita no campo de entrada Geogebra. Dessa forma, para a posição será digitada a equação $y = C * \cos(\omega * x + \theta)$, onde ω corresponde à frequência angular, θ ao ângulo inicial e C corresponde à amplitude. Além disso, é importante atentar que as análises a serem realizadas limitam-se aos valores de x positivo, posto que essa variável representa um intervalo de tempo.

Será exigido do usuário a criação da ferramenta “controle deslizante” para as incógnitas C , ω , θ . Essa permite analisar a variação de parâmetros definidos pelo usuário de forma dinâmica e prática. A imagem abaixo apresenta a tela do Geogebra com os controles deslizantes criados.

Figura 33: Página do *software* Geogebra com os controles deslizantes C , ω , θ criados.

Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

Sendo um dos passos da atividade investigativa, nesse momento, iniciaremos a formulação de conjecturas, que podem ser efetuadas pelo aluno ou pelo professor. Abaixo seguem propostas de questionamentos a serem formulados e quais conclusões podem ser obtidas a partir das funcionalidades que o *software* Geogebra oferece.

Primeiro Questionamento: Ao alterarmos a frequência angular do Movimento Harmônico Simples o período, a velocidade e a aceleração sofrem quais tipos de mudanças?

Ao movermos o “controle deslizante” de ω , o aluno analisa que as oscilações aumentam em quantidade a medida que a frequência angular também aumenta. É enriquecedor, nesse momento, o professor discutir com os alunos a representação gráfica de uma oscilação completa. A partir disso, levá-los a concluir que com o aumento da frequência, o pêndulo executa oscilações completas em intervalos de tempo menores, ou seja, seu período diminui. Este fato justifica a relação inversamente proporcional expressa pela equação $T = \frac{1}{f}$. Ainda pode ser analisado se houve a intuição dessa relação, por parte dos alunos, na construção do pêndulo.

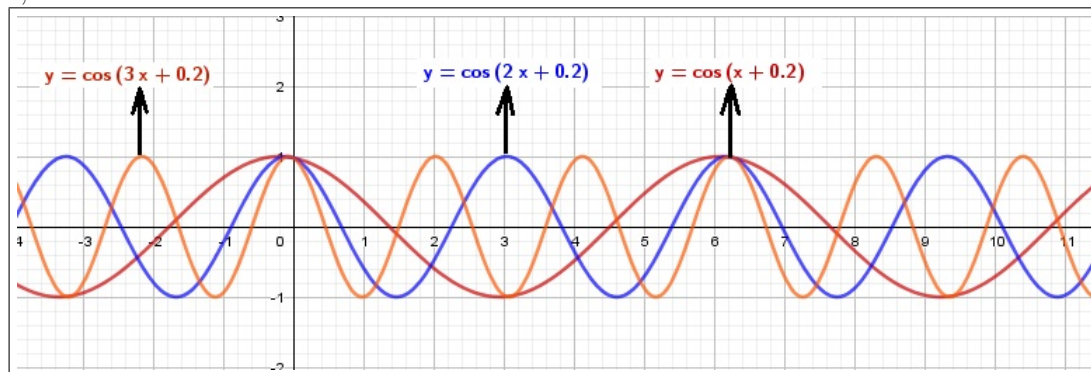
Ao movermos o “controle deslizante” de C , que corresponde à amplitude, é verificado que período e frequência não se alteram. A posição atingida pelo pêndulo, representada no eixo y , sofre alterações (crescimento ou declínio), conforme aumentamos ou diminuimos, respectivamente, a amplitude do movimento.

Ao movermos o “controle deslizante” de θ , o ângulo inicial, vemos que os valores da frequência e o período independem da escolha desse ângulo. Há somente um deslocamento horizontal do gráfico, causando diferença, por exemplo, nos pontos onde o pêndulo inicia seu movimento.

Para complementar a visualização da relação inversamente proporcional entre frequência angular e período, o discente têm a possibilidade de inserir no campo de entrada do programa a função da posição com diferentes valores para a frequência angular. A figura seguinte mostra o gráfico para a posição quando consideramos $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 3$,

$C = 1$ e $\theta = 0,2$.

Figura 34: Gráfico da posição de um pêndulo simples para $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$.



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

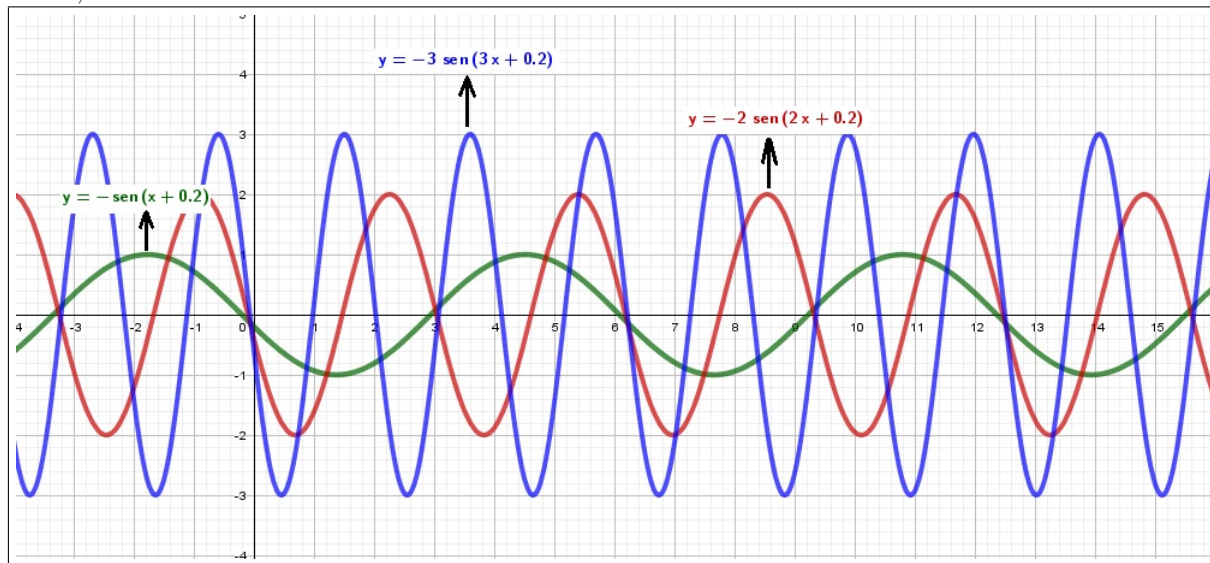
Pelo gráfico, visualizamos que para a maior frequência angular ($\omega = 3$) há o menor período e vice-versa, portanto, estimula o aluno a concluir a relação inversa entre frequência e período. Esse procedimento de teste das conjecturas elaboradas são uma das etapas da atividade investigativa, segundo Ponte (2003).

Podemos, ainda, analisar o gráfico da posição quanto ao significado físico dos picos destes gráficos. O pico no gráfico da equação do movimento do pêndulo representa o instante de tempo em que o pêndulo atinge sua amplitude máxima, permanece em um repouso momentâneo, inverte o sentido da oscilação e retoma o seu movimento. Nesses momentos existem os pontos de equilíbrio. Esses pontos podem ser estáveis ou instáveis. Na amplitude máxima há pontos de equilíbrio instáveis e na amplitude mínima os pontos estáveis.

Do ponto de vista matemático, é importante os alunos citarem quais as características das funções trigonométricas justificam sua adequação na descrição do movimento do pêndulo. Destacamos a periodicidade da função seno e cosseno e o fato de ambas serem limitadas.

Para a velocidade, temos a equação (38), que pode ser digitada no campo de entrada do Geogebra da seguinte forma: $y = -\omega * C * \text{sen}(\omega * x + \theta)$. Ao movermos, novamente, o “controle deslizante” de ω , os alunos podem concluir que o crescimento da frequência angular ocasiona o aumento da velocidade e da quantidade de oscilações. Como nos pontos de amplitude máxima a velocidade é nula, a maior quantidade de oscilações no gráfico da velocidade possibilita conjecturar que o pêndulo passa por mais vezes nos pontos de amplitude máxima. Abaixo, temos a equação da velocidade considerando $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$.

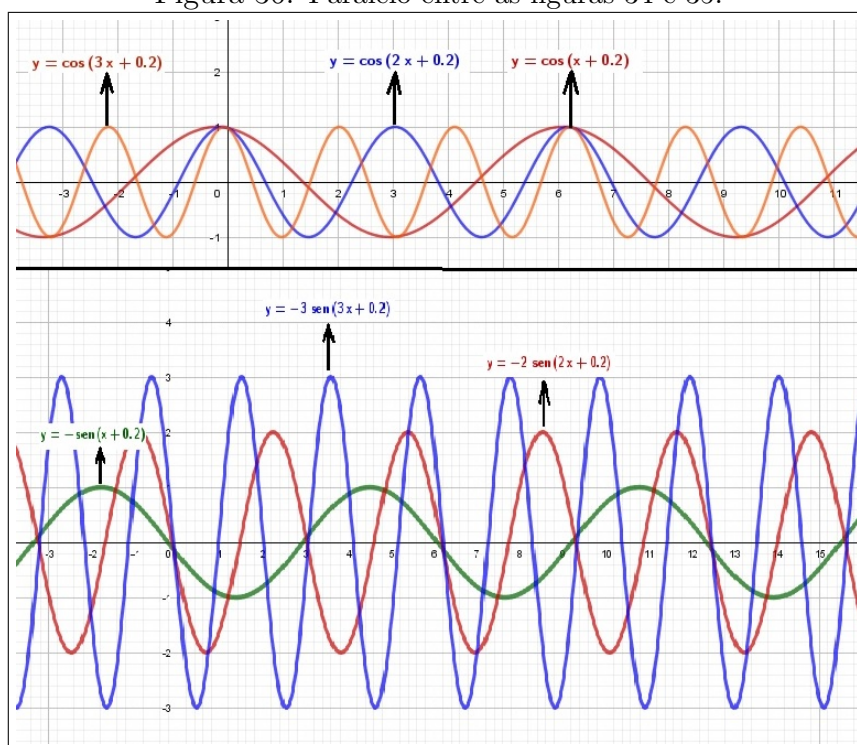
Figura 35: Gráfico da velocidade de um pêndulo simples para $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

Se aumentarmos C (a amplitude do movimento), a velocidade também aumenta. Se aumentarmos o valor de θ (o ângulo inicial), as oscilações deslocam-se lateralmente para a esquerda, indicando que alteramos o momento no qual pêndulo atinge os pontos de amplitude máxima. Nestes pontos verificamos que a velocidade é nula, por exemplo, ao fazermos um paralelo entre as figuras 34 e 35, analisamos que onde $x = 3$ era o ponto máximo para $w = 2$.

Figura 36: Paralelo entre as figuras 34 e 35.



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

Para a aceleração, temos a equação (39), essa pode ser escrita no Geogebra da seguinte maneira: $y = -\omega^2 \cdot x$. Se aumentarmos a frequência angular e, conseqüentemente, a variação da velocidade, a aceleração também cresce.

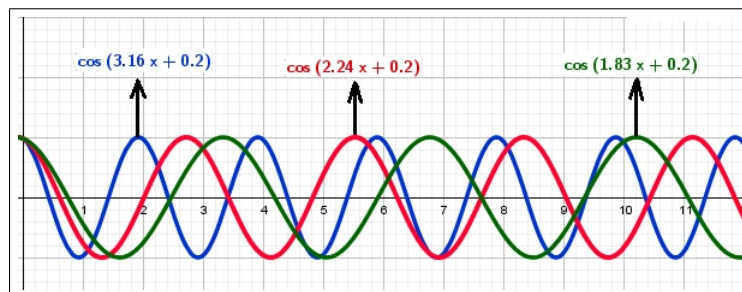
Segundo Questionamento: Ao alterarmos o comprimento do pêndulo, o período, a velocidade e a aceleração sofrem quais tipos de alterações?

Para respondermos a esse questionamento, iremos substituir a equação (40) nas expressões para a posição, a velocidade e a aceleração. No Geogebra, iremos digitar a seguinte equação para a posição: $y = C * \cos \left[\left(\frac{g}{L} \right)^{\frac{1}{2}} * x + \theta \right]$. Podemos considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$. Novamente, criamos “controles deslizantes” para a amplitude (C), para o comprimento (L) e o ângulo inicial (θ).

Ao movimentarmos o “controle deslizante” do comprimento, percebemos que o acréscimo do comprimento resulta em um período maior para efetuar uma oscilação completa. O inverso acontece quando reduzimos o comprimento. Deduzimos a relação proporcional entre comprimento do pêndulo e período.

Na imagem abaixo segue o gráfico da posição para o comprimento de $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$.

Figura 37: Gráfico da posição de um pêndulo simples para $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$.

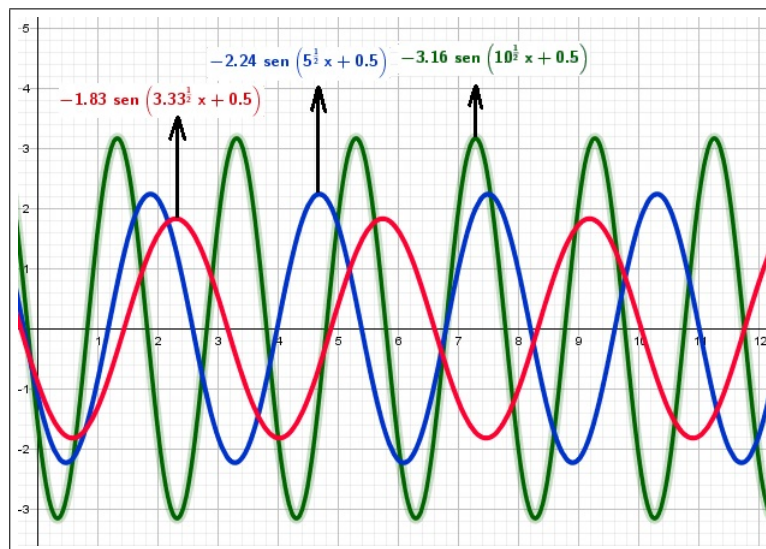


Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

No gráfico, observamos que para $L = 3$ há o maior período e para $L = 1$ existe o menor período.

Quanto à velocidade, digitamos no campo de entrada a seguinte equação: $y = -\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} * C * \sin \left[\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} * x + \theta \right]$. Ao movermos o parâmetro do comprimento, deixando a amplitude constante, podemos afirmar que a velocidade diminui à medida que o comprimento do fio do pêndulo aumenta. Os alunos também constatarem essa afirmação colocando valores para o comprimento como segue abaixo, no qual consideramos $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$.

Figura 38: Gráfico da velocidade de um pêndulo simples para $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, $C = 1$ e $\theta = 0,2$.



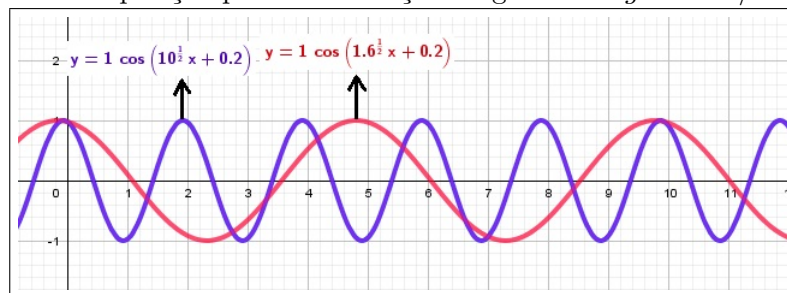
Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

Pelo gráfico acima, em $L = 1$ obtemos a maior amplitude, então, sua velocidade é maior, comparada às velocidades atingidas quando L é igual a 2 ou 3.

Para a aceleração, consideramos a equação: $y = -\frac{g}{L} * x$. Quanto menor o comprimento do fio, maior será sua aceleração e, portanto, são grandezas inversamente proporcionais.

O professor pode levantar algumas hipóteses com os alunos. Admitimos a aceleração da gravidade constante e igual a 10 m/s^2 , todavia essa aceleração apresenta esse valor somente na superfície da Terra. Se, por acaso, consideramos a aceleração da gravidade na Lua de $g = 1,6 \text{ m/s}^2$, o pêndulo teria período maior ou menor em relação ao período apresentado na Terra? O aluno tem a alternativa de traçar os gráficos da posição do pêndulo para um comprimento constante, considerando os dois valores da aceleração da gravidade, como segue ilustrado na figura seguinte, sendo que consideramos o comprimento $L = 1$ e $\omega = 0,2$.

Figura 39: Gráfico da posição para a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $g = 1,6 \text{ m/s}^2$.



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

Pelo gráfico observamos que o período do pêndulo na Lua é maior que período do mesmo na Terra. Os alunos podem conjecturar que, quanto menor for a aceleração da

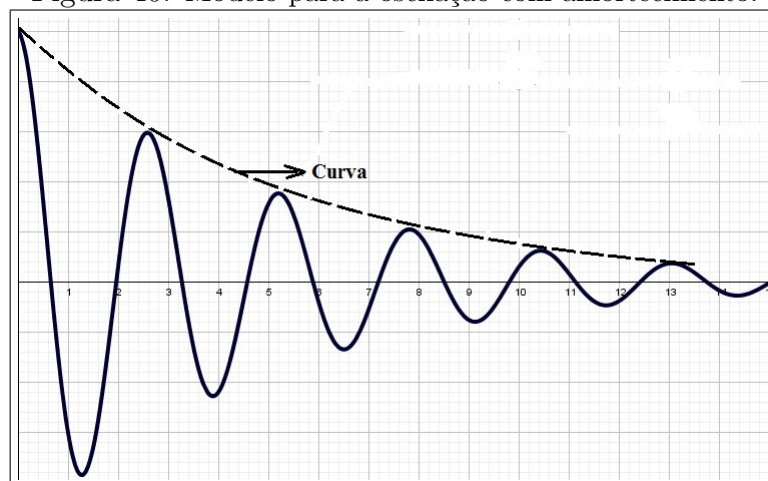
gravidade maior será seu período e vice-versa, há uma relação inversamente proporcional entre essas duas grandezas.

No próximo questionamento, induzimos o aluno à interpretação gráfica da posição do pêndulo considerando a atuação da força de resistência do ar, item que não foi considerado nas análises até o momento.

Terceiro Questionamento: Ao considerarmos a atuação da força de resistência do ar no movimento do pêndulo, o que aconteceria com relação a amplitude?

É razoável os alunos responderem que a amplitude se reduz no decorrer do tempo. Assim, o professor pode definir que trata-se de uma oscilação com amortecimento e, com base no gráfico traçado pelos discentes da posição em relação ao tempo, pode discutir como seria a representação gráfica para esse tipo de oscilação. Um modelo provável a ser proposto pelos alunos segue na imagem abaixo.

Figura 40: Modelo para a oscilação com amortecimento.



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

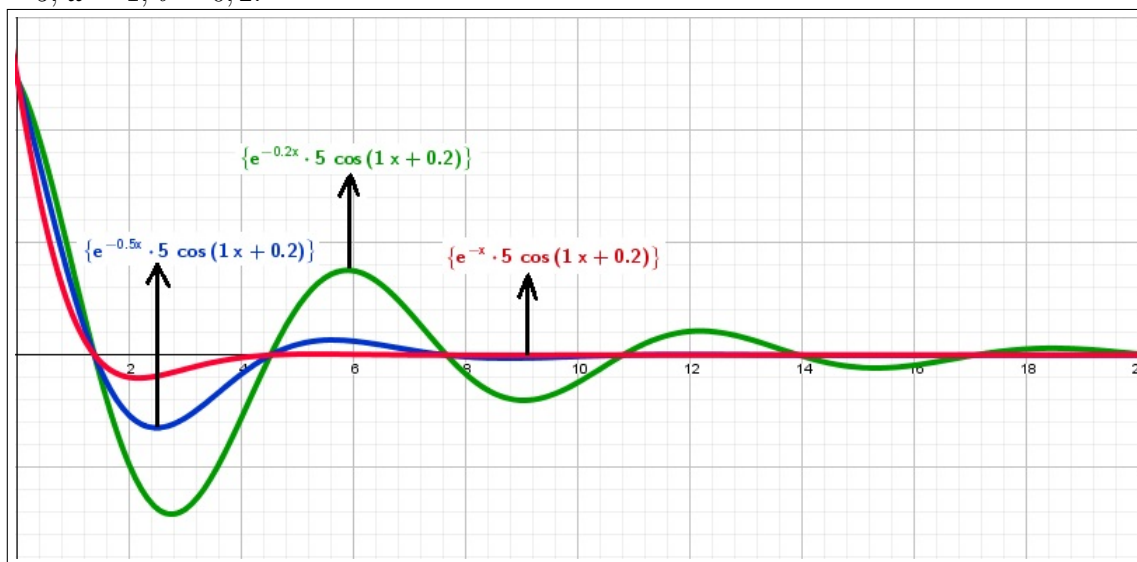
No modelo, vemos que a principal mudança está relacionada à diminuição da amplitude a medida que o tempo transcorre e que essa mudança é delimitada por uma curva. O professor pode discutir com os alunos que a função adequada para gerar a curva seria a exponencial do tipo $e^{a \cdot x}$, com $a < 0$, uma vez que trata-se de uma exponencial decrescente. Portanto, na equação que descreve a posição do objeto no MHS ($y = C \cdot \cos(\omega \cdot x + \theta)$), devemos acrescentar a influência desse novo parâmetro, de modo que, podemos propor a equação ($y = e^{a \cdot x} \cdot [C \cdot \cos(\omega \cdot x + \theta)]$) para a posição *versus* tempo no movimento amortecido do pêndulo.

No campo de entrada do Geogebra, deve ser inserida a equação: $y = e^{\{a * x\}} * [C * \cos(\omega * x + \theta)]$ após serem colocados os “controles deslizantes” para a , C , ω e θ .

Ao movermos o “controle deslizante” de a , observamos que o seu aumento em valores negativos faz a amplitude das oscilações diminuir até o ponto de não haver oscilação e o objeto atingir o ponto de equilíbrio quase imediatamente após iniciar seu movimento. O professor pode caracterizar nessa verificação o amortecimento crítico e dizer que os

valores dados para o parâmetro a correspondem ao valor força de amortecimento atuante sobre o pêndulo. Para demonstrar graficamente esse amortecimento, segue abaixo uma comparação gráfica para os valores de $a = -0,2$, $a = -0,5$ e $a = -1$, mantendo como constantes $C = 5$, $\omega = 1$ e $\theta = 0,2$.

Figura 41: Posição do pêndulo no movimento amortecido para $a = -0,2$, $a = -0,5$, $a = -1$ e $C = 5$, $\omega = 1$, $\theta = 0,2$.



Fonte: Imagem gerada pelo próprio autor.

No gráfico para $a = -0,2$ há um maior número de oscilações que reduzem de amplitude com o tempo. Se $a = -1$, praticamente, não há oscilação, o pêndulo atinge o ponto de equilíbrio rapidamente, exemplificando, graficamente, o amortecimento crítico. Finalmente, quando $a = -0,5$, também quase não há oscilação, mas o objeto gasta um tempo maior em relação ao último amortecimento para alcançar a posição de equilíbrio, caracterizando o amortecimento supercrítico.

Quando alteramos o controle deslizante de ω que corresponde à frequência, constatamos o aumento de oscilações com períodos cada vez menores até o pêndulo atingir a posição de repouso, isto é, um ponto de equilíbrio. Caracterizamos esse ponto como estável devido o sistema tender a permanecer nessa situação. Quando acontece o inverso, denominamos o ponto como instável. É interessante analisar com os alunos em qual momento do movimento do pêndulo há esse ponto.

É importante o docente alertar que esse ponto não é atingido quando o objeto encontra-se em movimento harmônico simples.

4.3 Avaliação da atividade investigativa sobre o pêndulo

A avaliação da atividade pelo professor envolve a análise da construção dos pêndulos, o envolvimento dos alunos na execução, testes e levantamento das conjecturas. Além disso, como complementação da avaliação e finalização da atividade é proposto o preenchimento, por parte dos alunos, da tabela a seguir.

Tabela 2: Avaliação da atividade investigativa.

Conjecturas	Equações	Justificativas
Frequência e período são inversamente proporcionais.	$y = \cos(x + \theta)$, $y = \cos(2 \cdot x + \theta)$, $y = \cos(3 \cdot x + \theta)$.	Ao deslocar o “controle deslizante” de ω verifiquei que há um aumento das oscilações, mas uma diminuição do tempo gasto para o pêndulo efetuar uma oscilação, ou seja, deslocar de um ponto no gráfico e retornar ao próximo com a mesma amplitude.

Fonte: Tabela criada pelo próprio autor.

A primeira coluna da tabela destina-se ao preenchimento das conjecturas observadas pelos alunos, a segunda coluna será preenchida com as equações que foram experimentadas para testar a conjectura e a última coluna reservada para as verificações obtidas pelo programa que justificam certa conjectura. Com a tabela, é possível avaliar o envolvimento dos alunos na atividade, estimular a fixação do conteúdo e argumentação escrita das conjecturas obtidas com as aulas.

5 Conclusão

A motivação para a inserção do autor no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), foi a oportunidade de adquirir e aperfeiçoar seus conhecimentos para aumentar o nível de qualidade de suas aulas no nível básico, especialmente, no Ensino Médio. Os atuais discentes estão cada vez mais questionadores e exigem que o seu professor seja além de um detentor de conteúdos, apresentando a capacidade de justificar o estudo da Matemática frente a situações práticas.

Com esse perfil de aluno, há a necessidade de pensarmos em atividades aplicadas a fenômenos reais que incentivem o estudo do discente pela Matemática, evitando a concepção de abstração e, até mesmo de inutilidade, da Matemática por parte dos alunos. Nesse propósito, desenvolvemos um material que mobiliza conhecimentos de Matemática e Física do Ensino Médio através do estudo do pêndulo. A justificativa da escolha do objeto foi a simplicidade na construção e análise do movimento, tanto pelos alunos, quanto pelos professores que não estejam habituados a essa proposta de aula.

No estudo do movimento do pêndulo, fizemos simplificações para escrevermos modelos de equações diferenciais lineares para sua posição, velocidade e aceleração. Por exemplo, linearizamos as equações diferenciais considerando o seno do deslocamento angular igual a razão entre o deslocamento linear do objeto e seu comprimento. Dentro do nosso objetivo de analisar as principais características do movimento, ponto de equilíbrio e tipos de amortecimento, essas simplificações não afetam nossos resultados, sendo possível pelas equações encontradas fazermos conclusões gerais sobre o movimento do pêndulo. Deixamos como sugestão a outros trabalhos, analisar o comportamento do objeto através do estudo de equações diferenciais não lineares.

Complementamos o trabalho falando brevemente sobre os sistemas de equações diferenciais de primeira ordem oriundos de equação diferencial linear de segunda ordem. Com esse recurso, conseguimos traçar os planos de fase e analisar a classificação dos pontos de equilíbrio, considerando diferentes situações para os valores dos coeficientes da equação diferencial. Esses coeficientes englobam o comprimento do pêndulo, massa, coeficiente de atrito, área de contato com o ar. Portanto, o estado do equilíbrio sofre interferência de vários fatores.

Quanto às contribuições desse trabalho, primeiramente destacamos a revisão teórica feita acerca das equações diferenciais de primeira e segunda ordem e sobre movimentos oscilatórios. Muitos exemplos numéricos foram colocados com o objetivo de facilitar a visualização dos processos de resolução por parte de um professor de Ensino Médio. Outro benefício do trabalho é a aula proposta. Detalhamos os gráficos, questionamentos e resultados que podem ser obtidos no decorrer da aula.

Uma outra vantagem deste trabalho está em permitir sua complementação com o estudo de outros objetos, além do pêndulo. Por exemplo, o balanço, as batidas do coração, o amortecedor de um veículo também executam movimentos periódicos. Cabe ao docente a busca pelo estudo de equações diferenciais e a criatividade na adaptação para o Ensino Médio.

Mesmo que o nível de conhecimento dos alunos do Ensino Médio não permita o entendimento dos processos de obtenção e resolução de uma equação diferencial, o professor pode utilizar de meios tecnológicos para mostrar e convencer o aluno de que determi-

nada equação é condizente para explicar determinado movimento, como fizemos na aula proposta, no caso do pêndulo com amortecimento.

6 Referências

- [1] ANDRADE, Diana; PILLING, Sérgio. **Dinâmica de um sistema de partículas**. Disponível em: < https://www1.univap.br/spilling/F1/10_ConservEnergia.pdf >. Acesso em: 02 de fev. 2018.
- [2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2006, 111 - 136 p.
- [3] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blucher, 1974, pag. 310 - 321.
- [4] COPELLI, Ana Cecília et all. Leituras de Física. Disponível em: < <http://www.if.usp.br/gref/termo/termo4.pdf> >. Acesso em: 05 de fev. 2018.
- [5] CURI, Edna. **Atividades investigativas nas aulas de Matemática**: Uma análise de atitudes de alunos do ensino médio e da prática profissional. UNICSUL, Programa de Pós Graduação em ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, p.1-15, 2010. Disponível em: < <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/08-01.pdf> >. Acesso: 09 de mar. 2013.
- [6] NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações Diferenciais Ordinárias e algumas aplicações**. Disponível em: < <https://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2777/6/.pdf> >. Acesso em: 20 de nov. 2017.
- [7] PONTE, J.P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- [8] SIMÕES, Carla Alexandra Estima. **Equações Diferenciais na Física**. Disponível em: < <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/12270/2.pdf> >. Acesso em: 16 de nov. 2017.
- [9] SOUZA, Luiz Henrique França de; QUEIROZ, Luiz Carlos de. **Considerações sobre a Modelagem Matemática da Aerodinâmica de Veículos Terrestres**. Disponível em: < <http://www.inicepg.univap.br/cd/INIC2004/trabalhos/inic/pdf/IC1-20.pdf> >. Acesso em: 12 de fev. 2018.
- [10] YOUNG, Hugh D; FREEDMAN, Roger A. **Física I: Mecânica**. 12 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008. 448 p.
- [11] UNICAMP Cálculo III. Campinas: UNIVESP, 2012. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=lempeC72Tyg> >. Acesso em: 10 de jan. 2018.

[12] ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Tradução de Antonio Zumpano. 3 ed. v.1. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 450 p.

[13] ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Tradução de Alfredo Alves de Faria. 3 ed. v.2. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 488 p.

[14] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. Tradução de Márcio Koji Umezawa. 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 505 p.

[15] < <https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copyofmateriais> >. Acesso em: 01 de dez. 2017.

[16] < <https://www.amazon.co.uk> >. Acesso em: 05 de dez. 2017.