



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Campus de Presidente Prudente



PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

A desmistificação da Geometria por meio da ludicidade: Geoplano como ferramenta facilitadora para o ensino e aprendizagem

Amanda Matreiro

Presidente Prudente

2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Campus de Presidente Prudente



PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

A desmistificação da Geometria por meio da ludicidade: Geoplano como ferramenta facilitadora para o ensino e aprendizagem

Amanda Matreiro

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente.
Financiadora: CAPES.

Orientador

Prof. Dr. José Carlos Rodrigues

Presidente Prudente

2018

Matreiro, Amanda.

A desmistificação da geometria por meio da ludicidade : geoplano como ferramenta facilitadora para o ensino e aprendizagem / Amanda Matreiro. -- Presidente Prudente, 2018

79 f. : il., tabs.

Orientador: José Carlos Rodrigues

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências e Tecnologia

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria plana - Estudo e ensino. 3. Jogos em educação matemática. 4. Aprendizagem baseada em problemas. 5. Matemática – Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências e Tecnologia. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Amanda Matreiro

A DESMISTIFICAÇÃO DA GEOMETRIA POR MEIO DA LUDICIDADE:
GEOPLANO COMO FERRAMENTA FACILITADORA PARA O ENSINO E
APRENDIZAGEM

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Financiadora: CAPES.

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Carlos Rodrigues
FCT/UNESP - Campus de Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Aylton Pagamisse
FCT/UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Daniel dos Santos Viais Neto
Universidade do Oeste Paulista - UNOESTE

Presidente Prudente, 29 de Junho de 2018

*À Deus e Nossa Senhora Aparecida, por sempre me conceder sabedoria nas escolhas
dos melhores caminhos, coragem para acreditar, força para não desistir e proteção
para me amparar.*

*Aos meus pais e minha irmã, pelo amor que me mostrou a direção correta e me
ensinou a ter fé na vida.*

*À minha família, pelo amor, apoio, confiança e motivação incondicional. Que sempre
me impulsiona em direção às vitórias dos meus desafios.*

A meus professores, que acreditaram na minha capacidade.

Agradecimentos

Agradeço ...

Primeiramente a Deus, pela dádiva da vida e pela possibilidade da concretização desse sonho.

Aos meus pais, que são as bases da minha vida, por tudo que fizeram por mim, pela educação, pelo incentivo, pelas broncas, pelas preocupações. Obrigada por serem pais tão maravilhosos e me apoiarem nessa caminhada.

A minha irmã que é minha outra metade, meu apoio, minha confidente. Obrigada por dividir essa vitória comigo.

A minha avó Nica, minha rainha, por todas as orações nas provas e em todos os momentos que eu precisava de fé e força.

As minhas amigas e companheiras maravilhosas de trabalho, Aline e Tatiana, por compensarem brilhantemente minha ausência, se desdobrarem para suprir minha ausência na escola, permitindo assim que pudesse realizar esse curso.

A todos os meus familiares e amigos, pelo apoio, pela compreensão da minha ausência. Obrigada por fazerem parte dessa conquista.

Aos amigos do PROFMAT pelos apoios mútuos, companheirismo, vitórias compartilhadas e dificuldades superadas.

A minha amiga e companheira de turma Cintia Kohori Rosseto por todo apoio, pelos grupos de estudo e por todas as informações compartilhadas conosco.

Ao meu orientador, professor José Carlos Rodrigues, pelas orientações, pela partilha do conhecimento, pela paciência e pelo exemplo de profissional que representa.

Ao Professor Marco Antonio Piteri e ao professor Suêtonio Meira por todo apoio e orientação. E a todos os professores do curso pelos ensinamentos e exemplo profissional que representam.

A CAPES pelo apoio financeiro que permitiu a concretização desse sonho.

*A verdadeira viagem de descobrimento
não consiste em procurar novas paisagens,
mas em ter novos olhos*
Marcel Proust

Resumo

A matemática é uma ciência essencial desde os primórdios, viajando pelo tempo percebemos sua importância para o desenvolvimento da humanidade em diversos quesitos. Ao investigarmos percebemos o quanto as pessoas possuem aversão a matemática; analisando a maneira que a matemática vem sendo ensinada atualmente, talvez encontremos as respostas do por que a matemática tem sido tão odiada. Percebe-se a grande necessidade de se mudar o método de ensino para que os alunos passem a se interessar e gostar mais da matemática. As atividades lúdicas podem ser a saída que procuramos, pois através delas podemos construir conceitos, ao invés simplesmente de impor eles; podemos concluir fórmulas, ao invés de dizer ao aluno que as decore. Fazer a matemática atual, como foi feita a antiga, não com ensino tradicional, mas com construções a partir do cotidiano das pessoas, atribuindo assim mais sentido e utilidade as fórmulas gigantescas. Diante do exposto, o presente estudo tem por objetivo criar estratégias pedagógicas, que tornem as aulas de matemáticas mais interessantes e significativas, quebrando paradigmas e o tradicionalismo presentes no ensino-aprendizagem da matemática, utilizando material pedagógico lúdico. Assim, a proposta é trabalhar com a visualização mais facilitada utilizando recurso didático pedagógico lúdico e a partir da análise de resultados, concluir a utilidade destas ferramentas no ensino da matemática.

Palavras-chave: Lúdico, Matemática, Geometria.

Abstract

Mathematics is an essential science from the earliest, traveling through time we perceive its importance for the development of humanity in various aspects. When we investigate we realize how much people have an aversion to mathematics; analyzing the way mathematics has been taught today, we may find the answers to why mathematics has been so hated. There is a great need to change the teaching method so that the students become interested and enjoy mathematics more. The play activities can be the exit that we seek, because through them we can construct concepts, instead of simply imposing them; we can conclude formulas, instead of telling the student to decorate them. Do the actual mathematics, as was done the old, not with traditional teaching, but with constructions from the everyday of the people, thus giving more meaning and utility the gigantic formulas. In view of the above, this study aims to create pedagogical strategies that make math classes more interesting and meaningful, breaking paradigms and traditionalism present in the teaching-learning of mathematics, using playful pedagogical material. Thus, the proposal is to work with the visualization more facilitated using didactic pedagogical resource and from the analysis of results, to conclude the usefulness of these tools in the teaching of mathematics.

Keywords: Playful, Mathematics, Geometry.

Lista de Figuras

2.1	O planeta Terra de acordo com os Hindus.	19
2.2	O planeta Terra de acordo com os Egípcios.	19
2.3	Princípios básicos da Geometria Plana.	22
4.1	Torre de Hanói.	34
4.2	Tangram.	35
4.3	Marco Zero.	35
4.4	Modelo de tabuleiro das percentagens.	36
5.1	Tipos de Geoplano.	37
5.2	Representação do Geoplano no quadro.	38
6.1	Área e Perímetro - Geoplano.	40
6.2	Áreas, Ângulos e Diagonais.	41
6.3	Triângulos de mesma base e altura.	43
6.4	Teorema de Pitágoras.	43
6.5	Quadrado da soma de dois números.	44
6.6	Triângulos semelhantes.	44
6.7	Triângulos Semelhantes, Elementos da circunferência e Ângulo Central.	46
6.8	Sequências, Inscrição e Circunscrição.	47
6.9	Função seno.	48
6.10	Função cosseno.	48
6.11	Reta Tangente.	49
6.12	Quadrantes e Representação da Tangente.	49
6.13	Plano cartesiano.	50
6.14	Plano Cartesiano e Reta.	51
7.1	Formas geométricas.	53
7.2	Questão 1 - Resolução.. . . .	54
7.3	Questão 2 - hexagonângulo lado 1.	55
7.4	Questão 2 - hexagonângulo lado 2.	55
7.5	Questão 2 - Solução.	56
7.6	Questão 3 - quadrado.	56
7.7	Questão 3 - Solução.	56

7.8	Formas geométricas.	58
7.9	Utilização do geoplano.. . . .	58
7.10	Resolução dos Alunos.	59
7.11	Resolução dos Alunos.	60
7.12	Utilização do geoplano.. . . .	61
7.13	Resolução dos Alunos.	62
7.14	Resolução dos Alunos.	63
7.15	Utilização do geoplano.. . . .	65
7.16	Resolução dos Alunos.	66
7.17	Resolução dos Alunos.	67
7.18	Execução da atividade.	68
7.19	Execução da atividade.	68
7.20	Execução da atividade.	68
7.21	Execução da atividade.	69
7.22	Execução da atividade.	69
7.23	Execução da atividade.	69

Sumário

1	Introdução	11
2	A Relevância do Estudo da Matemática para o Mundo	14
2.1	Geometria	14
2.1.1	Evolução histórica da Geometria	18
2.1.2	Euclides	21
2.1.3	Pitágoras	22
2.1.4	A geometria na Idade Média	23
2.1.5	A geometria na Idade Moderna e Contemporânea	23
3	O Ensino da Geometria	24
4	O Lúdico na Matemática	29
4.1	Os jogos na matemática e o papel do professor	32
4.2	O lúdico nas aulas de matemática no Ensino Fundamental	33
4.2.1	O lúdico nas aulas de matemática no Ensino Médio	34
4.3	Alguns jogos lúdicos utilizados na sala de aula	34
5	Geoplano - Uma Ferramenta Especial na Geometria	37
6	Alguns Conteúdos contemplados pelo Currículo do Estado de São Paulo e aplicabilidade do geoplano nestes conteúdos	39
6.1	Conteúdos do Ensino Fundamental - Ciclo 2	39
6.1.1	Conteúdos do 6º ano	39
6.1.2	Conteúdos do 7º ano	41
6.1.3	Conteúdos do 8º ano	42
6.1.4	Conteúdos do 9º ano	44
6.2	Conteúdos do Ensino Médio	46
6.2.1	1º Ano do Ensino Médio	46
6.2.2	2º Ano do Ensino Médio	48
6.2.3	3º Ano do Ensino Médio	50

7	Materiais	52
7.1	Questões envolvendo áreas e perímetro retiradas da Olimpíada Brasileira de matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - edição do ano de 2016	53
7.1.1	Questão 1 - Cortando a escada para formar um quadrado	53
7.1.2	Questão 2 - Montando Hexagonângulos	54
7.1.3	Questão 3 - Pontos nos lados do quadrado	56
7.2	Métodos e Resultados	57
7.3	Algumas Fotos Durante a Execução da Atividade:	68
7.4	Conclusões após as atividades:	70
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	Referências	72

1 Introdução

Com o desenvolvimento da humanidade, percebemos a importância das ciências, do estudo, da tecnologia, da integração social e da transversalidade. Notamos que é impossível realizarmos avanços sem a presença das ciências exatas; elas contribuem em grandes proporções para os avanços da sociedade moderna.

Observando as exigências desta sociedade altamente necessitada de profissionais que busquem conhecimento nesses campos da ciência, percebemos que estamos diante de um impasse, pois grande parte das pessoas teme as ciências exatas e as escolas modernas por sua vez, continuam em sua maioria um tanto tradicionalista demais.

Há alguns anos, atuando como professora venho observando a necessidade de mudanças no campo de ensino da matemática; precisamos estar atentos a que tipo de profissionais queremos formar, mediante uma sociedade tão repleta de exigências e com um mercado de trabalho cada vez mais competitivo.

Necessitamos formar profissionais que sejam capazes de interagir com este mercado de trabalho, profissionais indagadores, questionadores, curiosos; mas o inquietante é como primeiramente fazer com que nossos alunos, gostem e entendam matemática de uma forma mais prática e prazerosa.

Por meio destes questionamentos, o caminho a ser trilhado é como melhorar as práticas no campo da didática do ensino da matemática, melhorando o ensino, consequentemente, melhoramos o aprendizado. Tendo em vista a geração de alunos presentes nas escolas, ou seja, alunos que tem a disposição diversos tipos de tecnologias e facilidade para obter fontes de conhecimento em todas as áreas de estudo é gritante a necessidade da inovação das práticas pedagógicas; não que a lousa e o giz tenham de ser extintos, mas é notória a necessidade de práticas que contemplem o público alvo das escolas atuais.

Muitos materiais didáticos não trazem em seu conteúdo exercícios relacionados aos conceitos. Favorecem somente a aplicação de formulas sem reforçar aprendizagem dos conceitos e as capacidades necessárias para assimilar o que é ensinado (BALTAR, 1996).

Pensando numa solução para este impasse, encontramos a ludicidade como ferramenta de grande potencial; mostrar utilidade naquilo que estamos ensinando é de extrema importância. É obvio que não podemos ensinar todos os conteúdos matemá-

ticos com o uso de ferramentas lúdicas, no entanto, essas ferramentas são facilitadoras no processo de ensino-aprendizagem.

A princípio foi realizado estudo sobre a evolução matemática, sobretudo no estudo da geometria, para que fosse possível perceber a importância dessa ciência para evolução da espécie humana.

Apresentamos ao longo deste trabalho, algumas ferramentas lúdicas facilitadoras no processo de ensino aprendizagem, mostramos como o aluno aprende com o lúdico e como o professor pode ser um facilitador em potencial se souber usar ferramentas lúdicas.

Os conceitos geométricos concretos auxiliam na construção do conhecimento, pois o sujeito aprendiz consegue interagir melhor com o meio em que vive, consegue atribuir significados aos conceitos matemáticos e é exatamente isso que tem faltado às aulas de matemática. A matemática é muito vasta e útil para ser rebaixada a mera memorização e reprodução de exercícios. Ela deve ser investigativa, significativa, útil e através das ferramentas lúdicas conseguimos trazer muitas aplicabilidades aos conceitos matemáticos.

Foi enfatizado o geoplano, material constituído geralmente de um pedaço de madeira e pregos, este material é de fácil acesso, manuseio e permite a exploração de uma infinidade de conteúdos em quase todos os anos dos ensinos fundamental e médio, apresenta possibilidade de utilização até em conteúdos de ensino superior.

O geoplano permite a visualização, rápida e fácil, de conteúdos geométricos e algébricos, facilitando a construção e transferência de conceitos matemáticos. Sua aplicabilidade vai desde o ensino fundamental ciclo I, quando ainda está sendo feita o início da exploração da geometria com as crianças até o fim do ensino médio. A utilização deste material é muito vasta em vários campos da matemática, em especial da geometria. Ao longo deste trabalho serão apontadas algumas hipóteses de utilização de alguns materiais e ferramentas, com enfoque principal no geoplano.

O foco desse estudo foi demonstrar a aplicabilidade deste material fazendo uma comparação de como ele pode ser um facilitador na resolução de problemas por permitir a visualização clara do objetivo de cada questão. Para isso serão aplicadas atividades retiradas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), por se tratarem de problemas que envolvem, além dos conteúdos de sala de aula, as situações do dia-a-dia, o raciocínio lógico e a interpretação. Foram aplicadas para alunos do ensino fundamental ciclo II e após a aplicação foi feita a investigação sobre os pontos positivos e negativos do geoplano e a constatação sobre os benefícios da sua utilização no ensino-aprendizagem.

Diante do exposto, o presente estudo teve por objetivo criar estratégias pedagógicas, que tornem as aulas de matemáticas mais interessantes e significativas, quebrando paradigmas e o tradicionalismo presentes no ensino-aprendizagem da matemática, utilizando material pedagógico lúdico. Para tanto, pretende-se analisar em cada ano do

ensino fundamental e médio a aplicabilidade desses materiais, em conteúdos contemplados pelo Currículo do Estado de São Paulo, visando proporcionar ao aluno a verificação de conceitos através de material concreto e fornecer aos professores novos métodos de ensino com a utilização de material lúdico, podendo assim, observar através de atividades investigativas os resultados no ensino-aprendizado do uso de diversas ferramentas e jogos como material lúdico.

2 A Relevância do Estudo da Matemática para o Mundo

A matemática foi construída e aperfeiçoada ao longo do tempo, encontramos indícios de sua utilização no período Paleolítico, pelo homem das cavernas, começando ser grafada através de símbolos na Babilônia por volta de 3000 a.C. É obvio que nos primórdios o uso da matemática era feita de forma concreta e de acordo com as necessidades cotidianas desses povos e aperfeiçoada também por essa razão. Podemos destacar entre outras a contagem de rebanhos, mensuração de pesos, estoque de mercadorias, cálculo de impostos e realização cálculos financeiros (FOSSA, 2008).

Uma civilização que muito contribuiu para o avanço da matemática principalmente na área de geometria plana foram os egípcios, também pela necessidade de medir suas terras. Desenvolveram fórmulas para calcular áreas de quadriláteros e até outras figuras como trapézios (NAGAFUCHI; BATISTA, 2007).

Na Grécia podemos citar grandes contribuições para o desenvolvimento de uma matemática mais dedutiva e axiomática através de grandes e famosos matemáticos como Pitágoras, Euclides e Tales.

Segundo Fossa (2008), a matemática assim como as outras áreas do conhecimento, molda-se para satisfazer as necessidades sociais, culturais, políticas, econômicas de cada momento histórico, acompanhando as transformações de cada um desses aspectos.

É inegável que a matemática sempre esteve presente na cultura de diversas civilizações, em diversas partes do mundo e foi evoluindo simbolicamente durante milhares de anos. Se nos primórdios o homem já possuía necessidades matemáticas, é obvio que no mundo desenvolvido isso aumentou juntamente com a evolução do conhecimento. Ela está presente na vida de qualquer ser humano, desde cálculos mais simples até algoritmos complexos, podemos tomar como exemplos desde o simples fato de mensurar o tempo todos os dias até as altas codificações usadas na área tecnológica.

2.1 Geometria

As civilizações antigas possuíam conhecimentos geométricos e os aplicavam em suas tarefas diárias. Entre essas civilizações, podemos citar a Babilônia, os Hindus, China e

o Egito antigo, sendo a geometria muito utilizada na medição de terrenos e até mesmo na construção das pirâmides egípcias (EVES, 1969).

Para entender o surgimento da geometria, é preciso conhecer a história da matemática. Em tempos primitivos, onde o homem dependia da pesca e da caça para sobreviver, calculava a quantidade e media o tamanho mesmo de forma intuitiva, utilizando a geometria na fabricação de seus instrumentos (CARVALHO, 2005).

Contudo, a geometria só passou a ser considerada uma teoria, após os estudos de Tales de Mileto (624-547a.C.), na Grécia. Os estudos de Tales contribuíram significativamente para as descobertas daqueles chamados de pitagóricos (ENGELS, 1975).

Platão também se interessou pela geometria, por meio de demonstrações dedutivas e não pela forma experimental de verificar um fenômeno. Essas ideias foram desenvolvidas posteriormente pelo seu discípulo Euclides de Alexandria (325-285 a.C.) (ENGELS, 1975).

Eves (1969) relata que de forma intuitiva, mesmo a geometria não tendo sido considerada uma ciência, um indivíduo já conseguia aplicá-la no seu dia a dia e encontrá-la ao seu redor ao observar o contorno da Lua, os polígonos existentes na formação das teias de aranha, entre outras coisas.

Engels (1975) mostra que pelo fato das formas geométricas já existirem na natureza, o homem por meio da observação das mesmas e em seu contato com elas, conseguiu reproduzir tais formas em seus objetos.

Segundo Boyer (1996), a geometria se originou devido à necessidade de demarcar territórios e construir edifícios, considerando a estética que levaria à ordem e conceitos visuais aceitáveis.

Para Ferreira (1999 p. 35), a geometria pode ser definida como a:

[...] ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos” ou ainda “um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço).

O nome geometria origina-se do grego e segundo Santos (2009) Geo significa terra e metria significa medição, portanto, a palavra geometria é classificada como medição de terra. A partir deste conceito, é preciso analisar a sua aplicação para entender a sua real utilização, podendo ser significativa em vários aspectos.

Ao considerar os estudos de Van Hiele, Kaleff (2003 p. 94) afirma que: “a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito”.

Ainda segundo Kaleff (2003), é necessário desenvolver nos alunos a habilidade em visualizar e incentivar a busca por conceitos geométricos.

De acordo com Ferreira (1999), o ato de visualizar pode ser definido como a formação de uma imagem visual, de algo que não está sendo visualizado no momento, visualizando mentalmente a forma em que tal objeto possa vir a se tornar.

A visualização facilitada pelo uso da geometria auxilia na resolução de problemas e a efetuar construções mentais. Decodificar informações visuais, dos mais simples aos mais complexos como, por exemplo, interpretar os dados de um raio-x, indicar um caminho, avaliar plantas e manuais, analisar gráficos, entre outros (LINDQUIST; SHULTE, 1994).

O espaço acaba se tornando referência, para situar um indivíduo no ambiente em que se encontra, analisando e percebendo suas características e objetos que ali contêm, explorando todas as propriedades encontradas. A geometria, por sua vez, analisa os objetos que contêm suas formas geométricas usuais que estão acessíveis (SANTOS, 2009).

É importante fazer com que os indivíduos construam e tomem posse de um olhar geométrico para comparar objetos e processos entre si. Isso se torna possível quando são apresentadas situações que permitam a ocorrência da geometria, na construção dos mesmos (DIENES, 1974).

A geometria estudada na escola é a euclidiana, que pode ser caracterizada como aquela em que “estuda as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto relações internas entre os seus elementos, sem levar em consideração o espaço”(NACARATO; PASSOS, 2003).

A geometria também contribui para outras áreas de conhecimento:

O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 77).

A geometria além de propiciar as habilidades de visualização e construção, ajuda a desenvolver a percepção. O indivíduo passa a desenvolver a capacidade de observar o espaço tridimensional, bem como maneiras de falar sobre ele, por meio da geometria (FURKOTTER; MORELATTI, 2009).

Os indivíduos que possuem noções geométricas tornam-se mais observadores e percebem com mais facilidade as semelhanças e diferenças entre objetos, se atentando para as suas irregularidades. Com isso, também é possível o aluno identificar a noção do espaço e do meio onde ele está inserido (SANTOS, 2009).

Antes mesmo da linguagem, a criança vive suas primeiras experiências por meio da

percepção espacial que possui, é por meio dela que se inicia sua visão do mundo em que o cerca (LORENZATO, 2006a).

A criança, ao ter em seu poder um determinado objeto, avalia a sua forma, a sua aparência, e suas características, após a sua visualização, passa a criar mapas mentais considerando os objetos e seus espaços ausentes (SANTOS, 2009).

A Geometria é considerada uma ciência que analisa o espaço com suas formas e propriedades. É um ramo da matemática que estuda medidas, linhas, pontos, ângulos, superfícies e sólidos. Pode ser dividida em Geometria Plana, que estuda as superfícies planas, sem espessura e em duas dimensões e em Geometria Espacial que estuda as formas sólidas e tridimensionais (SANTOS, 2009).

É possível perceber a presença da geometria em várias áreas e ações do cotidiano. Os objetivos da geometria devem ser passados claramente aos alunos, para que os mesmos possam entender a sua importância e a sua aplicação (SANTOS, 2009).

Espera-se que o ensino destes conteúdos leve o aluno a dimensionar espaços, percebendo relações de tamanho e forma; observar e reconhecer formas geométricas em elementos naturais e criações humanas; identificar formas bi e tridimensionais em situações descritivas orais, construções e representações; identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade (SANTOS, 2009, p. 36).

Ao ter contato com a geometria, o aluno não só possui relação com a matemática, mas como em várias outras áreas de conhecimento. Ao observar uma obra de arte, um desenho, uma escultura ou um artesanato, pode-se ver que a geometria se faz presente. Cabe ao professor, renovar a sua forma de ensinar geometria, utilizando massas de modelar, maquetes, dobraduras, entre outros, sempre destacando a visualização na natureza e naquilo que foi criado pelo homem (SANTOS, 2009).

De acordo com Luckesi (1994), o conhecimento adquirido sobre a geometria na escola deve se tornar importante para os alunos, favorecendo a sua imaginação e criatividade, os levando a se tornarem curiosos sobre o mundo em que vivem. O ensino da geometria não deve ser cheio de fórmulas e regras, onde os conceitos não são verdadeiramente entendidos e totalmente fora da realidade.

O aluno, por meio da geometria, deve se tornar capaz de interpretar o mundo ao seu redor, refletindo sobre a construção e concretização dos objetos. Tais alunos deverão se tornar indivíduos críticos, reflexivos e proativos diante das situações, conhecendo a realidade e contribuindo para modificá-la (SANTOS, 2009).

As formas geométricas estão presentes em todos os lugares. Todos os objetos possuem a sua forma específica, bem como tamanho, peso, material, entre outros. Identificar tais formas facilita o dia a dia de um indivíduo na hora de criar e construir inúmeras coisas. A geometria começou a ser estudada para suprir as necessidades do homem e facilitar a sua vida, com o tempo, tais formas passam a ganhar nomes como retângulo, quadrado, círculo, losango, triângulo, entre outros (SANTOS, 2009).

Sem o estudo da geometria, as pessoas não conseguem desenvolver o seu processo visual, dificultando a resolução de diversas situações ao longo da vida. Com a ausência da geometria, a visão de mundo de uma pessoa não é completa, a capacidade de ser criativo e de interpretar conceitos matemáticos e de outras áreas do conhecimento humano é afetada (SANTOS, 2009).

De acordo com Lorenzato (1995 p. 56):

A Geometria está por toda parte [...], mas é preciso conseguir enxergá-la... Mesmo não querendo, lida-se no cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: Seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente se está envolvido com a Geometria.

O ensino da geometria auxilia na hora de descobrir, experimentar e criar por meio das noções de espaço. A geometria se tornou, portanto, um grande apoio as demais disciplinas. No ramo matemático, problemas aritméticos e algébricos podem ser solucionados pela geometria (LORENZATO, 1995).

Para Passos (2000), as teorias a respeito da origem da geometria, vem sendo modificadas conforme novos pesquisadores realizam novos estudos desde os primórdios da existência humana. Vários fatores influenciam novas descobertas. As primeiras reflexões sobre a geometria pode ter vindo da capacidade que o homem possui de reconhecer as formas físicas das figuras, percebendo suas mais variadas formas e tamanhos.

De acordo com Carvalho (2010), um fator que contribuiu também para a formação da geometria, é o desenvolvimento motor e cognitivo dos seres humanos. Utilizam a geometria para compreender o mundo em que vivem.

Ainda de acordo com Carvalho (2010), as experiências sensoriais levam as pessoas a perceber um mundo tridimensional. A forma com que se deslocam no espaço, a percepção visual e tátil em relação aos objetos físicos, que aos poucos mostram a ideia de que o ambiente em que se vive também é tridimensional, cujas formas abstratas dos objetos tridimensionais são denominadas de sólidos geométricos.

2.1.1 Evolução histórica da Geometria

Segundo Martim (2008), há diversas teorias de civilizações antigas a respeito do formato do planeta Terra. Muitos acreditavam que a Terra era quadrada devido a poucos estudos realizados ou até mesmo devido a crenças religiosas.

Os Hindus acreditavam que elefantes sustentavam a Terra, logo acima de uma grande tartaruga, o deus Vishnu, envolto por uma cobra que para eles, simbolizava a água.

A figura a seguir apresenta um esboço da crença desses povos.



Fonte: Martins, 2008 p. 24.

Figura 2.1: O planeta Terra de acordo com os Hindus.

A seguir apresentamos um esboço de como seria a Terra de acordo com os egípcios, segundo essa civilização a Terra era formada pelo deus Keb, uma deusa considerada o céu e outro deus considerado o ar. Em barcos, o deus Sol navegava dispondo a noite e o dia.



Fonte: Martins, 2008 p. 24.

Figura 2.2: O planeta Terra de acordo com os Egípcios.

Somente após muitos séculos e muitos estudos chegaram a conclusão do formato da

Terra que se conhece atualmente, com a forma arredondada (EVES, 1992).

Devido à sua capacidade de observação, o homem consegue obter formas geométricas, isso se dá a Geometria do Subconsciente:

Esta geometria do subconsciente era empregada pelo homem primitivo para fazer ornamentos decorativos e desenhos, e provavelmente é correto dizer-se que a arte primitiva preparou em grande escala o caminho para o desenvolvimento geométrico posterior (EVES, 1992 p 86).

A geometria possui origens muito antigas. Ela surgiu, de acordo com muitos historiadores, para solucionar problemas e satisfazer certas necessidades da sociedade (ROGENSKI; PEDROSO, 2014).

Observando os relatos dos papiros egípcios, mais precisamente o Papiro Rhind, escrito por volta de 1850-1650 a. C, é possível encontrar cálculos do volume de recipientes cilíndricos, retangulares ou cúbicos, sendo multiplicados a base pela altura. Tanto os egípcios como os babilônios possuíam formulas para cálculo das áreas de figuras como retângulo, triângulo e quadrado (SANTOS, 2011).

No antigo Egito era necessário demarcar as margens do Rio Nilo para dividir as áreas que poderiam ser cultivadas em períodos de grandes inundações. Essas áreas deveriam ser demarcadas para que fossem pagos adequadamente os tributos ao faraó e calcular a quantidade necessária de irrigação. A geometria era aplicada a assuntos do cotidiano das pessoas naquela época (ROCHA et. al., 2014).

O conhecimento matemático surgiu a partir da obrigação de resolver tal problema. Segundo Boyer, no Papiro de Ahmes existem problemas que utilizam o cálculo da medida de área, com o uso de composição e decomposição de figuras. Euclides, geômetra grego, traz em sua obra “Os Elementos” a idéia que se duas figuras planas se coincidem por superposição estas serão iguais (equivalentes). Foram os gregos que transformaram a geometria empírica dos egípcios e babilônicos na geometria demonstrativa (ROCHA et. al., 2014 p. 37).

Nos anos 2000 a.C, a geometria já era utilizada pelos babilônios para marcar territórios. Em 1300 a. C os egípcios também utilizavam a geometria em suas medições e construções. A Grécia utilizava para medir terras, o que deu origem a palavra geo (terra) metria (medida) (ROGENSKI; PEDROSO, 2014).

A geometria permitia utilizar noções de espaço para propor soluções práticas para trabalhos como construir casas, tecer, confecção de vasos, tecidos e cestas, entre outras funções, juntamente com a congruência e a simetria (BOYER, 1996).

Segundo Boyer (1996), os egípcios também utilizavam a geometria para calcular áreas, utilizavam trapézios, retângulos, triângulos, entre outras formas geométricas. Eram utilizadas medidas aritméticas por lados opostos. As soluções encontradas eram aplicadas a todos os problemas semelhantes, geralmente por método de indução.

A geometria naquela época era o resultado de experiências e observações realizadas pelos homens por meio de espaço e formas, mesmo não apresentando base científica ou matemática, somente por meio de experimentos sem lógica (ROGENSKI; PEDROSO, 2014).

De acordo com Boyer (1996), os gregos Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, foram os primeiros a recorrerem ao método indutivo, uma forma de interpretar a geometria.

Com o tempo, as formas geométricas, baseadas em experimentos e de forma intuitiva, já não eram suficientes para resolver inúmeros problemas que surgiam. Com isso, foi gerada a necessidade de levantar um método por meio de raciocínios lógicos matemáticos que oferecesse maior segurança e confiabilidade (BOYER, 1996). Platão também trouxe a sua contribuição para a geometria ao descobrir os poliedros regulares ou poliedros de Platão (BOYER, 1996).

Por volta de 300 a. C., o matemático grego Euclides, trouxe a tona a ordenação e sistematização lógica da geometria na época. Com a sua obra *“os elementos”*, que trata a geometria plana e espacial, contribuiu para os ensinamentos da geometria até os dias de hoje (BOYER, 1996).

A história da geometria também está ligada as práticas de plantio, movimentação dos astros, cálculo de volume e superfícies. Começou a ser estudada por volta do século XX a. C (BRAZ, 2009).

Os egípcios dividiam seus terrenos em retângulos e triângulos. Ao observar mosaicos quadrados e o triângulo após dividi-lo em duas partes, foi possível encontrar também a forma do retângulo (base x altura). Em terrenos irregulares costumavam utilizar o método de triangulação. A forma de calcular a circunferência de um círculo foi descoberta devido a problemas durante as construções que pediam paredes curvas (BRAZ, 2009).

Um escriba egípcio, cujo nome era Ahmes, descobriu a área do círculo, há mais de 2000 a. C. Percebeu que calculando a área do quadrado, utilizando o raio e multiplicado por 3,14, é possível encontrar a área do círculo (BRAZ, 2009).

Na Grécia, nos anos de 500 a.C., foram criadas as primeiras escolas voltadas ao ensino da geometria (BRAZ, 2009).

2.1.2 Euclides

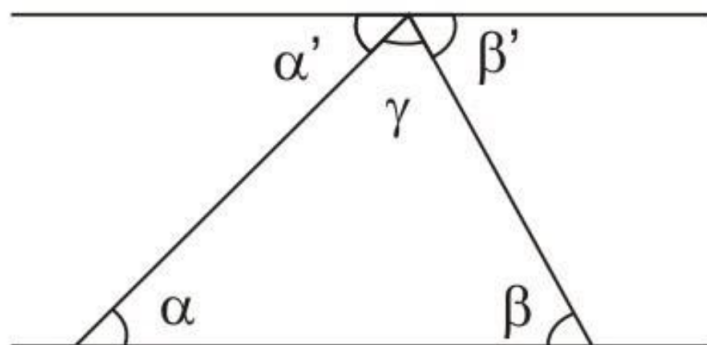
Euclides, nos anos 300 a.C., foi quem trouxe o método dedutivo. Não se sabe muito a respeito da vida de Euclides, nem a respeito de seus estudos, contudo, a sua maneira de pensar é muito parecida com a de Platão. Em Alexandria, em um instituto científico, chamado de Museu, Euclides se tornou educador e expositor. Sua obra, *“Os Elementos”* utilizada como obra introdutória a matemática, costumava destacar elementos lógicos e sucessivos (BRAZ, 2009).

Os tópicos tratados em cada um dos volumes de *Os Elementos* são:
Livro I - Os fundamentos da geometria plana. Livro II - Álgebra

geométrica. Livro III - Teoria da circunferência. Livro IV - Figuras inscritas e circunscritas. Livro V - Teoria das proporções abstratas. Livro VI - Figuras geométricas semelhantes e proporcionais. Livro VII - Fundamentos da teoria dos números. Livro VIII - Continuação de proporção e teoria dos números. Livro IX - Teoria dos números. Livro X - Classificação dos incomensuráveis. Livro XI - Geometria dos sólidos. Livro XII - Medição de figuras Livro XIII - Sólidos regulares (BRAZ, 2009 p. 78).

Euclides, em sua obra, compilou inúmeros conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo do tempo, ajudando a formar o conceito geométrico (BRAZ, 2009).

A Geometria Euclidiana considera em seus estudos o ponto, a reta e o plano. O plano não possui uma definição concreta e a reta é considerada uma sequência de pontos e o plano era composto pelas retas (BRAZ, 2009). A figura a seguir, demonstra alguns princípios básicos da Geometria Plana.



Fonte: Noé, 2016 p. 29.

Figura 2.3: Princípios básicos da Geometria Plana.

Euclides considerava os axiomas, os postulados e teoremas para construir inúmeras formas, considerando seus aspectos e elementos (BRAZ, 2009).

2.1.3 Pitágoras

Pitágoras de Samos seguia os passos de Thales de Mileto e estudava as formas de geométricas e a aritmética. Na escola Pitagórica, da qual fundou, buscava se aprofundar em tudo o que o cercava, sendo números, religião, música, artes, entre outros. Não considerou os números irracionais, o que prejudicou seus ensinamentos (PIASESKI, 2010).

Na geometria espacial focou seus estudos em formas geométricas que pra ele, significava elementos da natureza, sendo eles: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o icosaedro (água), o octaedro (ar), o dodecaedro (elemento que envolve todo o Universo) e na esfera (PIASESKI, 2010).

2.1.4 A geometria na Idade Média

O estudo da geometria espacial, interesse dos filósofos e matemáticos gregos, deixou de ser o centro das atenções por cerca de 1000 anos, período este considerado como Idade das Trevas (PIASESKI, 2010).

O interesse pela geometria só retornou na fase do Renascimento Italiano. Leonardo Fibonacci, por meio da sua obra no ano de 1200 d. C, abordou novamente as teorias de Euclides e o teorema de Pitágoras (PIASESKI, 2010).

2.1.5 A geometria na Idade Moderna e Contemporânea

René Descartes, matemático francês, desenvolveu em 1637, a Geometria Analítica que, utilizando também os conceitos de Álgebra, transforma pontos, circunferências e retas em números, calculando por meio de figuras geométricas (PIASESKI, 2010).

O físico inglês Isaac Newton, em 1669, consegue elaborar um cálculo completo, capaz de calcular a área e o volume de qualquer forma geométrica (PIASESKI, 2010).

O francês Jean Victor Poncelet, em 1822, também contribuiu para o desenvolvimento da Geometria moderna ao analisar uma figura por seus diversos ângulos (PIASESKI, 2010).

Em 1899, o alemão David Hilbert, reescreveu a geometria, acrescentando novos conceitos de tempo e espaço, considerando a teoria da relatividade de Albert Einstein, alguns avanços após esse período foram feitos, mas tais conceitos seguem até os dias de hoje (PIASESKI, 2010).

3 O Ensino da Geometria

Um indivíduo começa a fazer parte de um contexto social após ser repassado a ele, muitas informações que, são vividas a partir da exploração do espaço e dos objetos ao seu redor. O seu desenvolvimento é espacial e busca representar aquilo que vê por meio de formas, linguagem verbal, desenho e imagens, utilizando até mesmo a geometria (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2003).

Para Lorenzato (2006b p. 43) a geometria é estudo do “espaço vivenciado para o espaço pensado. No primeiro, a criança observa, manipula, decompõe, monta, enquanto no segundo ela operacionaliza, constrói um espaço interior fundamentado em raciocínio”. É possível passar algo do concreto para o abstrato utilizando a geometria.

Ao entender que o espaço em que vivem é composto por objetos e que todos esses objetos se movimentam, é possível compreender a visão euclidiana das figuras, considerando que o objeto pode apresentar mais de uma visão dependendo do lugar e da posição em que ele esteja (PIAGET; INHELDER, 1993).

A geometria tem sido trabalhada nas escolas de forma a decorar fórmulas e repetição dos conceitos, de forma insignificante ao aluno. Os professores acabam desprezando o sentido lógico da geometria. Como afirmam Smole e Diniz (2000 p. 106) “a abordagem da geometria na escola infantil não deveria estar restrita a tarefas de nomear figuras, mas fundamentalmente voltada para o desenvolvimento das competências espaciais da criança”.

Ao se falar no ensino da geometria na educação básica, pode-se notar que até a década de 1970, eram utilizadas as teorias euclidianas, se apresentando com formalidade ao sistematizando o conhecimento da matemática, já que não se eram questionadas as formas de ensinar geometria nas escolas (ANDRADE, 2004).

Em 1980, começaram a ser distribuídos materiais capazes de ser manipulados, com uma visão empirista na maneira de passar o conhecimento da geometria, mas somente em 1990, a didática em geometria passou a realmente ter significado na sala de aula e no cotidiano dos alunos de forma investigativa e exploratória, já que busca o apoio de outras disciplinas e áreas de conhecimento (ANDRADE, 2004).

Atualmente, ao ensinar geometria, o professor passa a dialogar mais com o aluno, com a intenção de passar conhecimento e construir pensamentos. Garnica (2002) relata sobre o ensino da matemática na sala de aula:

Uma proposta mais geral, no entanto, é o fortalecimento da concepção de que a matemática profissional - ou matemática acadêmica - é uma dentre as várias matemáticas existentes, uma dentre as várias formas de apreensão do mundo, uma dentre as etnomatemáticas. A partir daí, as classificações das formas de argumentação poderiam ser revistas (...). O estudo das argumentações sobre conteúdos matemáticos pode ser visto sob diferentes perspectivas. Para tanto, torna-se necessário falarmos em diferentes formas de argumentação, ou de modos diferenciados - mas coexistentes nas salas de aula - para o estabelecimento de justificações (...). Dirige-se mais à prática profissional e científica de justificação de conhecimento matemático, devendo ser relativizada e mais estudada quanto a sua forma de utilização em salas de aula (GARNICA, 2002, p. 97).

Sendo necessária em todo mundo, Gomez-Granell (1996), afirma que a matemática, diferente das outras disciplinas, utiliza uma linguagem exata e formal, algébrica e generalizada. A interpretação dos dados expostos no problema é essencial para poder resolvê-lo.

Os alunos podem resolver os problemas partindo de conceitos e métodos próprios, não se preocupando com a formalidade e contextualizando os conteúdos (GOMEZ-GRANELL, 1996).

O ensino da matemática e da geometria nas salas de aula não serve somente para as situações práticas do cotidiano dos estudantes, mas também para os levar a pensar e raciocinar em várias situações (BRASIL, 1997).

A intenção do professor ao ensinar matemática, não é somente passar fórmulas e métodos para que os alunos simplesmente decorem, mas sim fazer com que os mesmos exercitem seus pensamentos e raciocínio (BRASIL, 1997).

Ao realizar provas de geometria na sala de aula, as questões exploratório-investigativas têm sido altamente utilizadas pelos professores devido a sua capacidade de fazer com que os alunos consigam entender e identificar o problema para poder resolvê-los. Tais questões possuem uma problemática aberta a diferentes tipos de interpretação e resoluções (PONTE, 2003).

Por mais que, o processo exploratório-investigativo aplicado ao ensino da geometria, ainda não é suficiente para que o aluno desenvolva uma capacidade sólida de aplicar a geometria nas mais diversas situações. Níveis básicos de conhecimento da geometria permitem a ação de explorar, já os níveis mais avançados permite a ação de investigar (ABRANTES, 1999).

Abrantes (1999, p. 155) expõe ainda a importância do ensino da geometria e sua capacidade investigativa:

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares.

Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver problemas-tipo.

Para Ponte (2003), a geometria também auxilia a relação entre as situações reais e os problemas matemáticos, desenvolvendo vários atributos nos indivíduos como, a visão espacial, capacidade de representação, noções de espaço, estabelecimento de conexões, entre outros.

Também é possível utilizar a geometria para analisar o mundo físico. No mundo físico, há padrões, grandezas, proporções e regularidades que precisam ser entendidos e trabalhados. Contudo, esse lado da geometria acaba sendo ignorado, já que não a geometria não parece ter uma ligação mais profunda com o mundo físico (BURIGO, 2005).

De acordo com Burigo (2005), a dedução e a argumentação são fatores que também recebem a aplicação da geometria para se desenvolverem. Busca-se desenvolver nos alunos a capacidade de dedução, argumentação e possíveis demonstrações.

Mesmo a geometria se fazendo mais comum na vida das pessoas para a resolução de diversos problemas, há inúmeras discussões obre o ensino desse ramo da matemática nas escolas. É possível perceber, há algum tempo, que o ensino da geometria tem sido deficiente, ao começar pela formação dos professores que não dominam o conteúdo com solidez (LORENZATO, 1995).

De acordo com Andrade (2004), a maioria dos professores de matemática possui dificuldade em repassar conteúdos geométricos aos seus alunos, deixando muitas vezes de ensiná-la da forma que deveriam.

Conforme Santos e Belleimain (2007), a geometria é ignorada na maioria das vezes pelas escolas. É possível observar isso nos livros didáticos, onde a geometria se encontra entre os últimos assuntos a ser trabalhado em sala de aula.

Explorar os conceitos geométricos e aplicá-los pode contribuir no desenvolvimento de diversas capacidades como na visualização de espaço, representações, conexões, ilustração, entre outros (SANTOS; BELLEIMAIN, 2007).

Ao se tentar conceituar área, não se deve apostar em conteúdos a serem memorizados e fórmulas decoradas. Essa forma de ensino sistemático e repetitivo não faz com que os alunos adquiram o conhecimento necessário (ANDRADE, 2004).

No Brasil, busca-se atender os seguintes requisitos no ensino da geometria:

- Conhecer as unidades usuais de medida de superfície: metro quadrado (m^2), quilômetro quadrado (km^2) e centímetro quadrado (cm^2), estabelecendo a relação entre m^2 e cm^2 , m^2 e km^2 ;
- Calcular a área do quadrado e do retângulo, por contagem de regiões, verificando quantas vezes uma unidade de medida cabe

numa determinada superfície;

- Identificar relações entre áreas de figuras geométricas por meio da composição e decomposição de figuras;
 - Resolver problemas envolvendo relações entre área e perímetro;
 - Desenvolver a noção de escala como ampliação ou redução das dimensões reais em situações que envolvam representação de medidas de comprimento e superfície (plantas, mapas, guias, itinerários)
- (BRASIL, 2001, p.143).

A área não pode ser simplesmente considerada a medida de uma superfície, ela pode estar relacionada a outras formas de conceitos e aplicações para que o aluno desenvolva uma aprendizagem efetiva. Isso se dá também ao tentar definir o perímetro. Um perímetro não pode ser considerado simplesmente a medida de todos os lados, já que isso não se aplicaria, por exemplo, a uma circunferência (ANDRADE, 2004).

É necessário encontrar recursos metodológicos para ensinar da melhor forma os conceitos de área e perímetro a fim de trazer maior consistência na hora de aplicar esses conceitos nas mais diversas situações (ANDRADE, 2004).

O ensino da geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, os alunos possuem dificuldades em entender o conteúdo que é transmitido pelo professor. As figuras mais conhecidas e trabalhadas com os alunos em sala de aula são: o retângulo, o quadrado, o círculo e o triângulo, geralmente trabalhados por meio de blocos lógicos (PAVANELLO, 2001).

No início, o ensino da geometria é totalmente ignorado pelos alunos. Os professores apresentam figuras achatadas desenhadas em livros, não se preocupando em passar os conceitos da tridimensionalidade, sem apresentar um contato maior com o espaço e objetos reais (PAVANELLO, 2001).

Decorar fórmulas e resolver exercícios parecidos torna o trabalho automático, os alunos acabam não desenvolvendo os reais conceitos e percebendo a importância de se obter aplicar os conhecimentos geométricos no seu dia a dia (PAVANELLO, 2001).

Para Smole (2003), a geometria é trabalhada por meio da noção de espaço e de formas. A autora acredita que o ensino da geometria em sala de aula, pode ir além do que o simples reconhecimento de figuras, contando com o conhecimento que os alunos trazem de suas experiências vividas, já que os mesmos possuem acesso a um campo vasto de informações.

Ainda segundo Smole (2003), um indivíduo explora o meio em que o cerca, agregando as informações adequadas para encontrar formas de representá-lo. A pessoa passa a se orientar percebendo os objetos no espaço. Não retratar a geometria no cotidiano de alguém, é não deixá-la colocar em prática o que foi aprendido em sala de aula.

Há várias formas de trabalhar a geometria em sala de aula. É possível utilizar quebra-cabeças, Tangram, dobraduras blocos de figuras geométricas. Contudo, essas opções não devem ser utilizadas somente para o reconhecimento das formas geométricas, mas sim como uma maneira de construir noções matemáticas mais sólidas, já que explorar os objetos em sua volta é colocar em prática aquilo que se aprende na sala de aula (SMOLE, 2003).

Smole (2003) afirma que o conhecimento geométrico acontece de forma atual. Ela deve ser ensinada o ano todo, considerando que a criança desenvolve progressivamente suas noções de espaço e visão de mundo.

É multiplicando suas experiências sobre os objetos do espaço em que vive que a criança aprenderá a construir uma rede de conhecimentos relativos à localização, à orientação, que lhe permitirá penetrar no domínio da representação dos objetos e, assim, e assim distanciar-se do espaço sensorial e físico. É o aspecto experimental que colocará em relação esses dois espaços: o sensível e o geométrico. De um lado, a experimentação permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos para raciocinar sobre representações mentais (BRASIL, 2001, p. 126).

Para Pavanello (1993), a geometria passou a ser ignorada pelos professores a partir da Lei nº 5692/1971, que liberava as escolas para que escolhessem os seus próprios programas. A maioria dos professores de matemática abandonava a geometria ou a empurrava para o final do ano.

Diante desse pressuposto, é importante destacar que a geometria é essencial para a formação de um indivíduo para desenvolver suas habilidades intelectuais e capacidade visual e de raciocinar, já que a geometria está presente em todos os lugares e objetos (PAVANELLO, 1993).

De acordo com Pavanello (2001), os professores não entendem que a geometria não é um conceito já pronto, passado aos alunos, mas sim algo que deverá ser construído pelos mesmos. Os métodos devem ser discutidos, o senso crítico dos alunos deve ser desenvolvido para que entendam o que estão aprendendo e fazendo, considerando várias formas para solucionar um problema. É necessário relacionar os conceitos geométricos com a realidade dos alunos, buscando argumentos que justifiquem o porquê de cada situação.

4 O Lúdico na Matemática

A expressão “lúdico” se origina na palavra “ludus” que significa jogo. A utilização do lúdico em sala de aula, geralmente está baseada nas ideias de Jean Piaget (CUNHA; SILVA, 2012).

Por ser uma disciplina considerada difícil de entender e desestimulante, a matemática passa a ser desinteressante aos alunos. Contudo, indo contra aquilo que se é pensado sobre a matemática, ela pode ser facilmente entendida desde que sejam aplicados meios para facilitar a sua compreensão. Um desses meios é o lúdico, que se tornou uma maneira valiosa de incentivar o gosto dos alunos pelos conteúdos matemáticos, tão necessários para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da formação de conceitos e da compreensão com o mundo que os rodeia (CUNHA; SILVA, 2012).

Elaborar aulas, cujo método pedagógico seja capaz de incluir atividades lúdicas, trás um maior aproveitamento do conteúdo absorvido pelos alunos que se interessam melhor, já que conseguem aprender brincando, o que se torna algo prazeroso para elas (CUNHA; SILVA, 2012).

O lúdico auxilia o aluno a analisar, entender e propor soluções que podem resolver um determinado problema proposto pelo professor nos exercícios em sala de aula. Encontrando o resultado do problema, a criança obtém conhecimento e consegue desenvolver as habilidades de interpretar e propor métodos para a resolução de problemas. O lúdico não deve ser utilizado sem outro método pedagógico, mas seu uso faz com que o aluno tenha uma interpretação melhor da sua realidade (CUNHA; SILVA, 2012).

O lúdico visa acabar com a prática de decorar os conceitos, as fórmulas e as regras matemáticas que impedem os alunos de desenvolverem a capacidade de assimilar conteúdos e colocá-los em prática de forma mais criativa e dinâmica (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2007).

De acordo com Smole, Diniz e Cândido (2007 p. 11) o lúdico

[...], auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, que estão estreitamente relacionadas ao chamado raciocínio lógico.

O lúdico também auxilia no processo de desenvolvimento da autonomia, ao levar a criança a enfrentar diversas situações que necessitam da matemática no seu dia a dia

(LARA, 2003).

Devido à maioria dos jogos serem coletivos, o lúdico auxilia ainda na construção dos relacionamentos interpessoais e no desenvolvimento de características importantes na interação com outras pessoas, como o respeito, a cooperação, o auxílio, a participação, desenvolvimento comportamental, entre outros (MUNIZ, 2010).

Lara (2003) orienta os professores de que o lúdico não deverá ser considerado um simples passatempo aos alunos, a aula deve ser bem planejada e os objetivos devidamente estabelecidos, cujo foco seja o aprendizado efetivo dos alunos.

Para Lopez (2000, p. 13) para proporcionar a utilização do lúdico em sala de aula:

É preciso que haja, por parte do professor, além de seus objetos com a sistematização dos jogos e brincadeiras, um ambiente favorável criado em sala de aula que venha ser caracterizado pela proposição, pela investigação e pela exploração de diferentes situações-problema por parte dos alunos. Além da interação dos alunos, o agente educacional precisa ser um catalisador de sistematizações do uso do lúdico através de técnicas que estimulem e desafiem o campo de conhecimento de seus educandos.

Por meio dos jogos, a matemática é revelada como um fator que colabora com o desenvolvimento mental e cognitivo do aluno (resolução de problemas, lidar com cálculos e números, propor soluções, entre outros). A matemática é essencial para todo ser capaz de pensar (LOPEZ, 2000).

Para Muniz (2010, p. 16) “[...] o jogo se configura como um mediador de conhecimento, de representações presentes numa cultura matemática de um contexto sociocultural do qual a criança faz parte”. O lúdico auxilia na construção dos conhecimentos cognitivos em relação ao contexto pedagógico.

Utilizar o lúdico em sala de aula incentiva a independência, a capacidade de resolver problemas e proporciona uma aula livre de regras, fórmulas, exercícios padronizados com um sistema mecânico de aprendizagem.

O lúdico em sala de aula pode desenvolver nos alunos algumas habilidades como a capacidade de planejamento, observação, análise, construção de hipóteses, reflexão, argumentação, tomada de decisão, raciocínio lógico, entre outros (LOPEZ, 2000).

Para Lara (2003, p. 21) “[...] as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio, levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com seu cotidiano”. A capacidade motora, cognitiva e operante dos alunos se desenvolvem melhor por meio do lúdico, além das qualidades de comportamento que envolvem o respeito, a cooperação, a participação, senso crítico, entre outros.

Smole, Diniz e Cândido (2007) consideram importante desenvolver a interação entre os alunos em sala de aula por meio do lúdico, já que a matemática tradicional trabalha de forma isolada, não abrindo espaço para uma cooperação entre os estudantes.

Além da necessidade de que o professor tenha um objetivo claro para que o trabalhar com o lúdico não perca o foco do seu real propósito, é importante ainda que um ambiente favorável seja criado em sala de aula com a intenção de facilitar a exploração, a investigação e a resolução de diferentes situações problema.

Para Smole, Diniz e Cândido (2007, p. 14):

[...] a perspectiva metodológica da resolução de problemas baseia-se na proposição e no enfrentamento do que chamaremos de situação-problema (...), devemos considerar que nossa perspectiva trata de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvidor combine seus conhecimentos e decida-se pela maneira de usá-los em busca de solução.

Os alunos precisam se sentir motivado e estimulado para que realmente aproveitem aquilo que foi ensinado e possa desfrutar do aprendizado proporcionado pela matemática (NEGRINI, 2000).

De acordo com Negrini (2000), não se introduz o lúdico nas aulas de matemática sem um objetivo pré-definido, sem saber onde se quer chegar. O professor deverá estabelecer limites para que a aprendizagem no conteúdo seja possível por meio do brincar.

O lúdico facilita o processo de ensino-aprendizagem da matemática, o lúdico faz o aprendizado se tornar mais prático e significativo, considerando que a matemática, muitas vezes é utilizada em outras áreas de conhecimento (SANTOS, 2004).

Para Santos (2004) os jogos e brincadeiras é uma ótima ferramenta para a construção do conhecimento já que levam desafios os alunos e os motivam a buscar resultados satisfatórios. O lúdico ainda proporciona a liberdade para os alunos se expressarem e se desenvolverem.

Em relação ao lúdico, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ministério da Educação e Cultura (MEC), afirmam:

Constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações [...] (BRASIL, 1998, p.46).

Segundo Kishimoto (2001), há certa diferença entre um simples brinquedo ou jogo para um material pedagógico, considerando que o lúdico não pode ser visto como um simples momento para se divertir mas para a construção de um novo saber.

Para Kishimoto (2001, p. 83), “neste sentido, qualquer jogo empregado na escola, desde que respeite a natureza do ato lúdico, apresenta caráter educativo e pode receber também a denominação geral de jogo educativo”.

4.1 Os jogos na matemática e o papel do professor

A utilização de jogos no processo de ensino-aprendizagem da matemática estimulam o raciocínio lógico, bem como proporciona ao aluno o confronto entre firmas distintas de resolver um determinado problema. Isso faz com que o aluno se torne ativo, reagindo diante das situações apresentadas (SANTOS, 2004).

Por meio dos jogos, os alunos conseguem viver uma experiência entre o real e o imaginário, se apropriando de conhecimentos e melhorando a sua capacidade de concentração (SANTOS, 2004).

O aluno que possui dificuldades em assimilar o conteúdo matemático aprendido com a realidade, por meio dos jogos consegue receber o estímulo adequado para se sobressair às suas limitações. Consegue desenvolver habilidades como a socialização, a competição saudável e a criatividade (PILETTI, 1988).

Para Piletti (1988), os jogos também contribuem para que a cooperação seja desenvolvida nos alunos. Por meio da cooperação, a convivência com os outros se torna melhor, já que se busca pensar na coletividade. Os jogos permitem uma avaliação mais plena da capacidade e evolução do aluno, já que o mesmo se esforça pra elaborar um plano e desenvolver estratégias (SANTOS, 2004).

Para Santos (2004), utilizando jogos em sala de aula, é possível fazer com que a resolução de problemas, utilização de fórmulas e realização de cálculos se torne interessante e prazeroso de aprender. Isso porque com os jogos, é necessário que haja soluções reais, práticas e originais.

Conforme Dante (2000), os jogos permitem a resolução dos problemas propostos de forma mais livre, autônoma e sem pressão, sendo um clima favorável para aprimorar as novas descobertas e aquisição de conhecimento.

Segundo Lara (2003), os erros cometidos nos jogos, desafiam aqueles que estão perdendo a buscar novos caminhos e estratégias para conseguir a vitória. Assim, os alunos desenvolvem sua iniciativa e autoconfiança. A persistência também é desenvolvida, já que, na maioria das vezes, serão realizadas várias tentativas para se chegar á resposta correta.

Lorenzato (2010) considera a importância do papel do professor na utilização dos jogos como uma ferramenta de ensino. O professor, antes de exigir o interesse dos alunos, deverá mostrar interesse também. O professor deverá não só conduzir e orientar, mas também interagir com seus alunos, principalmente com aqueles que apresentam um grau de dificuldade maior em relação aos outros.

Diante do exposto Kami e Housman (2002 p. 38) ressaltam:

O papel do professor é crucial para maximizar o valor dos jogos matemáticos. Por exemplo, se o professor corrige papéis em sua própria mesa enquanto as crianças estão jogando, as crianças rapidamente captam a mensagem de que os jogos não são suficientemente importantes para os professores se incomodar com eles.

Durante todo o processo, os professores devem acompanhar o desenvolvimento dos alunos, os orientando em relação às regras, as instruções, as operações e tudo o que se procede em relação a utilização dos jogos no ensino em sala de aula (KAMI; HOUSMAN, 2002).

O professor deverá comentar com os alunos a respeito dos resultados que a turma obtiveram, levantar a opinião dos alunos sobre a atividade, ressaltar os conteúdos matemáticos aprendidos na atividade dada (SOUZA; PATARO, 2009).

Ainda de acordo com Souza e Pataro (2009) para que os jogos tenham bons resultados em sala de aula e para a aprendizagem dos alunos, o professor deverá planejar o conteúdo com antecedência e projetar os conceitos de cada conteúdo matemático que deverá ser estudado. Deverá ser avaliado o potencial do jogo escolhido, os métodos utilizados, as possíveis soluções que poderão ser encontradas, bem como registrar as conclusões mais importantes.

4.2 O lúdico nas aulas de matemática no Ensino Fundamental

Desde os primeiros anos, a matemática é uma disciplina complexa para alguns alunos, devido à dificuldade que alguns têm em aplicar suas fórmulas e encontrar resultados sendo necessário forçar o raciocínio.

Nessa fase do Ensino Fundamental, onde as crianças e adolescentes estão em fase de formação, essa tarefa pode se tornar exaustiva, necessitando de meios para facilitar o seu entendimento (CUNHA; SILVA, 2012).

A maioria dos professores trabalha o conteúdo matemático de forma abstrata e mecanizada, o que se torna algo maçante. Ao aplicar o material lúdico nas aulas, o professor não poderá esquecer que, deverá ter um objetivo que norteará as atividades, já que o lúdico não é só para proporcionar momentos de brincadeiras e descontração, mas sim para ensinar um conteúdo matemático (CUNHA; SILVA, 2012).

O lúdico, quando trabalhado da maneira correta em sala de aula, pode melhorar a produtividade e trazer benefícios que a aula tradicional não proporcionaria. O aluno consegue se interagir melhor com os alunos e seus professores, desenvolver a concentração, a criatividade, o diálogo, o trabalho em equipe, a cooperação, a proatividade, entre outras habilidades, estimulando o interesse por conteúdos algébricos, geométricos e aritméticos no Ensino Fundamental (CUNHA; SILVA, 2012).

O aluno consegue ainda desenvolver seu senso crítico, defender suas opiniões, de forma lógica e concisa, aumentando sua capacidade de resolver problemas, se tornando mais ativo em suas atividades (CUNHA; SILVA, 2012).

O lúdico no Ensino Fundamental vem sendo aplicada para despertar o interesse dos alunos por conteúdos matemáticos, formando um alicerce para que os alunos desen-

volvam as primeiras noções para guardar e utilizar os conhecimentos adquiridos nos próximos anos de estudo (CUNHA; SILVA, 2012).

4.2.1 O lúdico nas aulas de matemática no Ensino Médio

A matemática é essencial na vida de qualquer indivíduo, em qualquer sociedade e cultura. É possível encontrar conceitos matemáticos em todas as situações. O lúdico auxilia os alunos do Ensino Médio que possuem um conhecimento defasado sobre a matemática, sem nenhuma base para receber novos conteúdos devido ao do fraco ensino que lhe foi proporcionado no Ensino Fundamental ou por realmente não gostar da disciplina. O lúdico também ajuda os jovens que se sentem inseguros e incapazes de aprender a matemática.

O aluno do Ensino Médio conseguirá associar o conteúdo matemático e aplicá-lo em sua realidade mais facilmente por meio de jogos que o incentive a gostar de matemática e desenvolvendo na prática o que foi aprendido. Dessa forma, o lúdico se torna um recurso metodológico eficaz para melhorar o processo de aprendizagem dos alunos do Ensino Médio (CUNHA; SILVA, 2012).

O lúdico deixa a aula mais dinâmica e conseqüentemente mais participativa, proporcionando uma melhor absorção daquilo que é estudado em sala de aula, facilitando a compreensão do aluno. Isso fará com que o mesmo desenvolva novos métodos de raciocínio e resolução de problemas (CUNHA; SILVA, 2012).

4.3 Alguns jogos lúdicos utilizados na sala de aula

Há vários jogos que podem ser utilizados em sala de aula. Abaixo, segue alguns deles (CUNHA; SILVA, 2012):

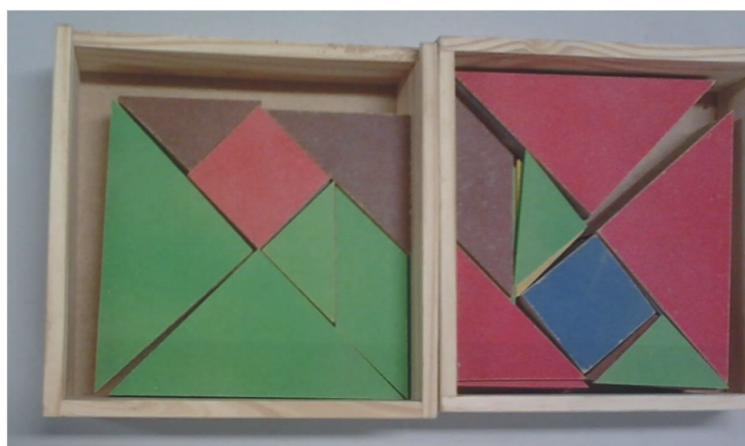
- Torre de Hanói: é um tipo de quebra cabeças com uma base e três pinos. Em um dos pinos encontra-se alguns discos, um sobre o outro, com diâmetros diferentes do maior para o menor. Esse jogo é capaz de proporcionar a aplicação dos conteúdos geométricos relacionados ao cálculo do diâmetro, do raio de circunferências de diversos tamanhos. Na figura a seguir temos um esboço deste jogo.



Fonte: Cunha e Silva, 2012 p. 6.

Figura 4.1: Torre de Hanói.

- Tangram: Quebra-cabeças compostos por várias peças de formas e tamanhos diferentes. Por meio do Tangram, é possível ensinar as formas geométricas, exercitando o raciocínio, a paciência e a noção de espaço dos alunos, bem como a coordenação motora e cognitiva dos mesmos. A seguir temos a demonstração deste quebra- cabeças.



Fonte: Cunha e Silva, 2012 p. 7.

Figura 4.2: Tangram.

- Marco Zero: uma versão do Calcform são trabalhadas as operações básicas da matemática por meio desse jogo. Conta com um tabuleiro e com as formas de círculo, hexágono, pentágono, quadrado e triângulo, observe a figura a seguir:



Fonte: Cunha e Silva, 2012 p. 8.

Figura 4.3: Marco Zero.

O objetivo do jogo é alcançar o zero no meio do tabuleiro. São utilizados quatro dados pelos jogadores cujos números ofertados pelos dados, os ajudará a atingir o objetivo proposto. Mas para chegar no zero presente no centro do tabuleiro, é preciso manipular os valores, realizando diversos cálculos matemáticos para isso. O aluno desenvolve por meio desse jogo a capacidade de adição, subtração, divisão, multiplicação, a potencialização, a radiação, logaritmo, fatoração, entre outros.

- Tabuleiro da porcentagem: O objetivo é calcular o valor das porcentagens de forma lúdica. O material utilizado é composto por 4 tipos de sementes ou grãos, dados que podem ser confeccionados, cola, tesoura, caneta e cartolina. A seguir serão disponibilizados alguns tipos de tabuleiros, bem como as instruções do jogo.

45	10	30	15
156	50	78	3.25
40	25	250	13
78	120	50	320

	80%		
10%	20%	30%	5%
	50%		

Fonte: Alves (2001 p. 65).

Figura 4.4: Modelo de tabuleiro das porcentagens.

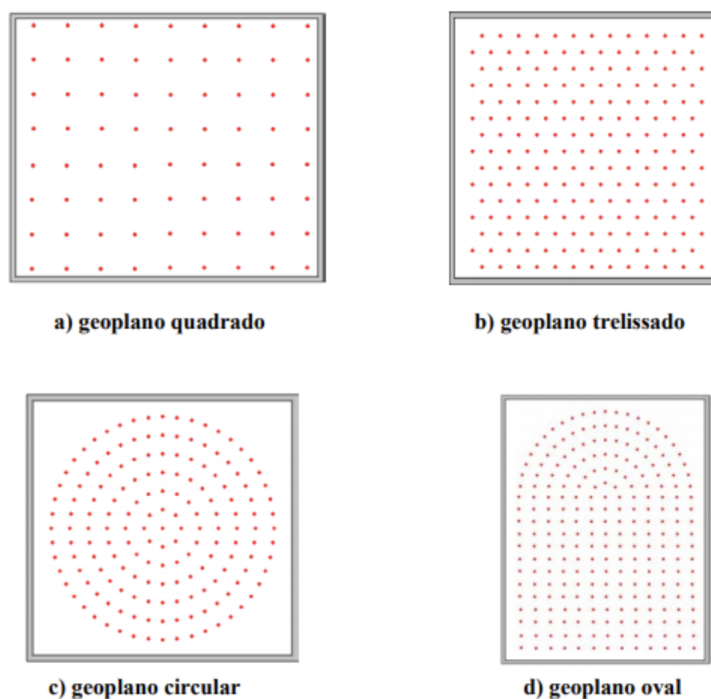
A turma deve ser dividida em equipes de quatro componentes e disponibilizadas aos alunos cartelas diferentes, como as do modelo em anexo.

O jogo conta com dois dados, sendo um deles com valor numérico e o outro com o valor da porcentagem. Os dois dados devem ser lançados e disponibilizados aos alunos o resultado numérico e também o da porcentagem, para que os mesmos possam realizar os cálculos e marcar na cartela, vence aquele que marcar corretamente todos os valores primeiro na cartela.

5 Geoplano - Uma Ferramenta Especial na Geometria

Segundo Silva; Nascimento e Nascimento (2012), o geoplano é um material pedagógico que permite a visualização de conceitos no plano e no espaço, constituído geralmente de uma placa de madeira, onde são cravados pregos de maneira uniforme. São utilizados elásticos de preferência coloridos para fazer as representações matemáticas desejadas em um geoplano. É um material viável, por ter custo baixo, apresentar fácil manuseio e transporte.

Os geoplanos podem ser construídos com outros materiais e os mais utilizados são: geoplano quadrado ou reto, geoplano treliçado, geoplano oval e geoplano circular. A seguir encontram-se ilustrados os tipos de geoplano.



Fonte: Silva; Nascimento e Nascimento (2012, p. 2)

Figura 5.1: Tipos de Geoplano.

Com este material pode-se trabalhar uma infinidade de conteúdos em diversos anos escolares. Trata-se de uma ferramenta tão dinâmica que na ausência destes, a escola pode colocá-lo em prática por meio de representação no quadro ou em uma cartolina, podendo também, serem trabalhados com geoplanos virtuais.



Fonte: Conceição; Gomes e Wrobel (2014)

Figura 5.2: Representação do Geoplano no quadro.

O geoplano pode ser trabalhado representando geometricamente conceitos, permitindo assim melhor visualização. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais.

A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (Brasil, 1998 p. 39)

Percebendo a importância do geométrico para este ciclo de ensino, inserimos o geoplano como ferramenta para o desenvolvimento dos conceitos geométricos tão importantes para os alunos.

6 Alguns Conteúdos contemplados pelo Currículo do Estado de São Paulo e aplicabilidade do geoplano nestes conteúdos

Neste tópico estão relacionados alguns conteúdos que podem ser trabalhados, é óbvio que a possibilidade de trabalho com o geoplano é bem mais ampla. Estes conteúdos são contemplados pelo currículo do Estado de São Paulo e é possível enriquecer o ensino aprendido dos mesmos através da utilização desta ferramenta.

6.1 Conteúdos do Ensino Fundamental - Ciclo 2

O objetivo das atividades é fazer com que os alunos cheguem às definições que serão apresentadas a seguir, de maneira intuitiva, fazendo com que as definições não sejam memorizadas ou simplesmente escritas, jogadas, mas sim que tenham sentido e contexto. Em todos os anos serão realizadas atividades de avaliação do material, para a verificação do sucesso ou não desta ferramenta.

6.1.1 Conteúdos do 6º ano

Serão trabalhados com o uso do geoplano nos seguintes conteúdos:

- Noções de perímetros e área de figuras planas
- Cálculo de área por composição e decomposição

Segundo Dolce (1993) área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que:

- 1º) Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.

$$A \cong B \leftrightarrow (\text{Área de } A = \text{Área de } B)$$

2º) A soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$$(C = A + B) \rightarrow (\text{Área de } C = \text{Área de } A + \text{Área de } B)$$

3º) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor(ou igual) que a área da outra.

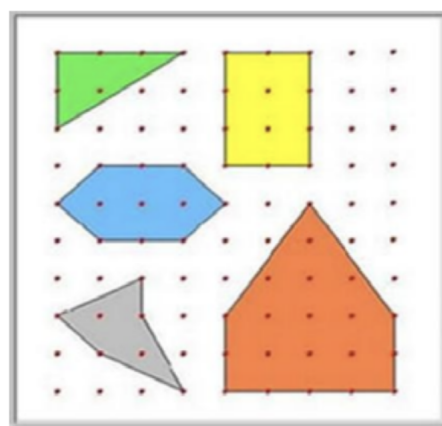
$$B \subset A \rightarrow \text{Área de } B \leq \text{Área de } A$$

A unidade de medida a ser adotada será um espaço entre um prego e o seu subsequente do geoplano.

Serão propostas e analisadas atividades tais com a finalidade de:

- Construir as figuras - quadrado, triângulo, retângulo, círculo, utilizando o geoplano reto ou o geoplanocircular
- Trabalhar conceitos das figuras tais como: nomenclatura, lados, vértices.
- Construir figuras de perímetros e áreas específicas;
- Compor e decompor figuras em quadrados, retângulos e triângulos;
- Transferir as figuras construídas para o papel quadriculado

A seguir encontramos uma representação de como podemos utilizar o geoplano nesse contexto, para que possamos trabalhar áreas e perímetros:



Fonte: Conceição; Gomes e Wrobel (2014, p. 5)

Figura 6.1: Área e Perímetro - Geoplano.

6.1.2 Conteúdos do 7º ano

Serão trabalhados com o uso do geoplano os seguintes conteúdos:

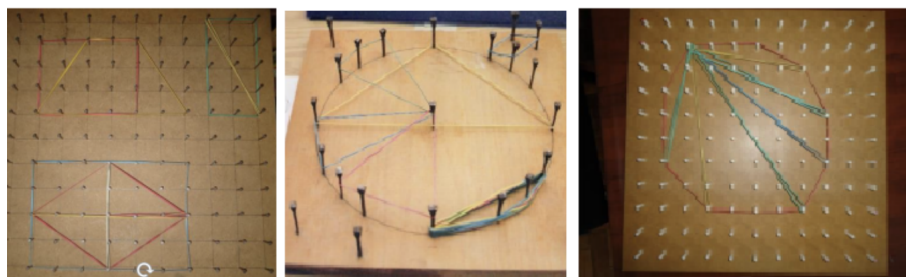
- Ângulos
- Polígonos

Para Dolce (1993) chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares) e chama-se polígono a reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$, dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1 , assim como A_n, A_1 e A_2 .

Serão propostas e analisadas atividades tais com a finalidade de:

- Trabalhar os conceitos geométricos dos ângulos tais como: lados, vértice, medida;
- Construir no geoplano circular, ângulos de medidas específicas e movimentá-los;
- Trabalhar a classificação dos ângulos de acordo com suas medidas;
- Representar polígonos como triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos, hexágonos;
- Construir todas as diagonais possíveis partindo dos vértices, para dedução da fórmula das diagonais de um polígono;
- Deduzir intuitivamente as fórmulas para o cálculo de áreas de algumas figuras planas;

A seguir encontramos uma representação de como podemos utilizar o geoplano nesse contexto:



Fonte: Dias (2013)

Figura 6.2: Áreas, Ângulos e Diagonais.

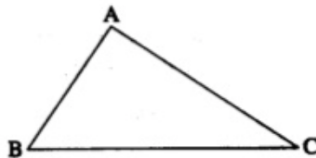
6.1.3 Conteúdos do 8º ano

Serão trabalhados com o uso do geoplano os seguintes conteúdos:

- Triângulos
- Teorema de Pitágoras
- Produtos notáveis e fatoração

De acordo com Dolce (1993) dados três pontos A , B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, chama-se triângulo ABC .

Indicação: triângulo $ABC = \Delta ABC$



$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$$

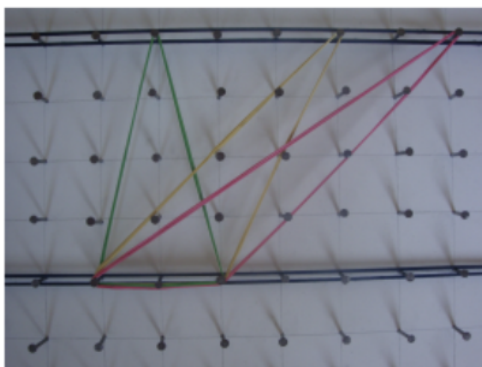
Ainda segundo Dolce (1993) se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então ele é um triângulo retângulo.

Serão propostas e analisadas atividades com a finalidade de:

- Trabalhar nomenclatura, lados vértices, ângulos nos triângulos;
- Classificar de triângulos de acordo com seus vértices e ângulos;
- Identificar propriedades do triângulo isósceles;
- Deduzir a condição de existência de um triângulo construído no geoplano reto com lados representados por elásticos;
- Estudar pontos notáveis do triângulo, com ênfase na altura dos triângulos;
- Calcular a medida desconhecida em um triângulo retângulo através da representação geométrica do teorema de Pitágoras;
- Resolver situações problemas envolvendo a representação geométrica do Teorema de Pitágoras;
- Representar os principais produtos notáveis e deduzir geometricamente as técnicas algébricas envolvidas;

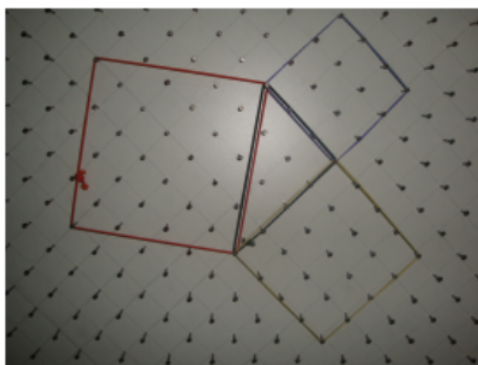
- Investigar a fatoração algébrica, por meio da composição e decomposição de figuras.

A seguir encontramos uma representação de como podemos utilizar o geoplano para comparar áreas de triângulos, aplicar o teorema de Pitágoras e demonstrar geometricamente o quadrado da soma de dois termos:



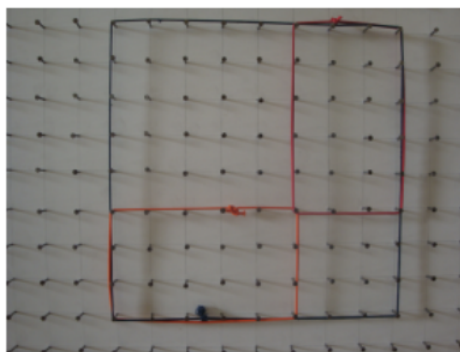
Fonte: Pinheiro (2014, p. 20)

Figura 6.3: Triângulos de mesma base e altura.



Fonte: Pinheiro (2014, p. 23)

Figura 6.4: Teorema de Pitágoras.



Fonte: Pinheiro (2014, p. 24)

Figura 6.5: Quadrado da soma de dois números.

6.1.4 Conteúdos do 9º ano

Serão trabalhados com o uso do geoplano os seguintes conteúdos:

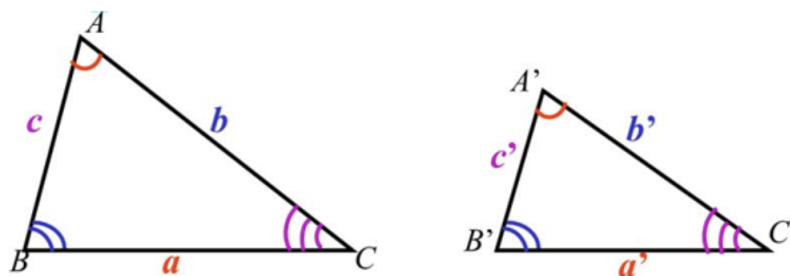
- Semelhança de polígonos
- Circunferência e círculo

Para Dolce (1993), dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Algebricamente temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right)$$

$\sim$: semelhante



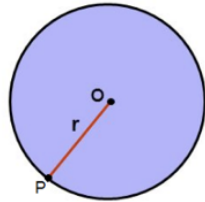
Fonte: Dolce (1993, p.198)

Figura 6.6: Triângulos semelhantes.

Dois lados homólogos (homo= mesmo, logos= lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

Ainda segundo Dolce (1993), circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência.

Dados: um plano α , um ponto O de α e uma distância r ,



$$\lambda(O, r) = \{p \in \alpha \mid d_{PO} = r\}$$

Onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r .

Também de acordo com Dolce (1993), círculo (ou disco) é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é menor ou igual a uma distância (não nula) dada.

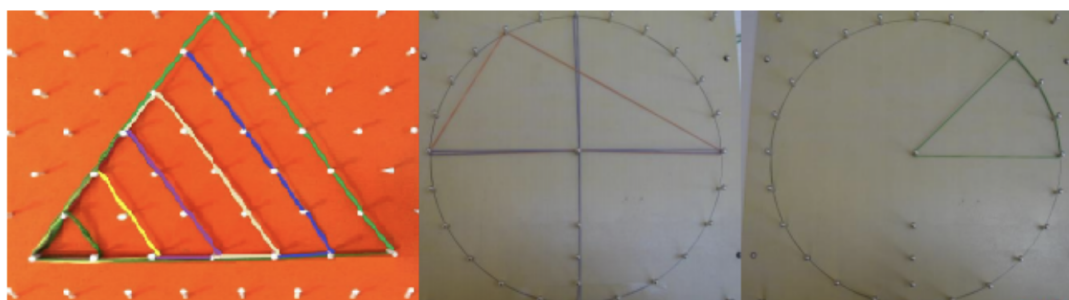
Dados um plano α , um ponto O e α e uma distância r ,

$$r = c(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} \leq r\}$$

Serão Propostas e analisadas atividades com a finalidade de:

- Construir polígonos, de modo que o aluno deduza intuitivamente o que são polígonos semelhantes;
- Explorar perímetros e áreas de figuras planas semelhantes;
- Resolver situações problemas envolvendo representação geométrica de semelhança de polígonos;
- Identificar a diferença entre circunferência e círculo, utilizando o geoplano circular;
- Trabalhar elementos da circunferência tais como: raio, diâmetro, corda, arco com o uso do geoplano circular;
- Calcular o comprimento da circunferência e a área do círculo;
- Resolver situações problemas sobre circunferência e círculo através da representação geométrica.

A seguir encontramos uma representação de como podemos utilizar o geoplano nesse contexto:



Fonte: Pinheiro (2014)

Figura 6.7: Triângulos Semelhantes, Elementos da circunferência e Ângulo Central.

6.2 Conteúdos do Ensino Médio

O aluno neste ciclo de Ensino possui algumas definições formadas, no entanto na maioria das vezes não compreende ainda a aplicabilidade de certas definições e conceitos. É preciso criar significados e aprofundá-los nesta fase escolar. O geoplano é uma ferramenta que possibilita essa compreensão, pois fornece ampla visualização dos conceitos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

[...], não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade (BRASIL, 2002, p.58)

O geoplano possibilita essa construção intuitiva de conceitos através do seu manuseio e exploração. Não é necessário explicitarmos fórmulas, conceitos e técnicas de memorização, com o uso do lúdico o próprio aluno cria esses conceitos, deduz fórmulas e entende a aplicabilidade do que está estudando, é obvio que tudo isso com o importantíssimo intermédio de seu professor.

Serão aplicadas atividades em cada ano deste ciclo de acordo com o currículo do Estado de São Paulo, em todos os anos serão realizadas atividades de avaliação do material, para a verificação do sucesso ou não desta ferramenta.

6.2.1 1º Ano do Ensino Médio

Serão trabalhados com o uso do geoplano os seguintes conteúdos:

- Sequências

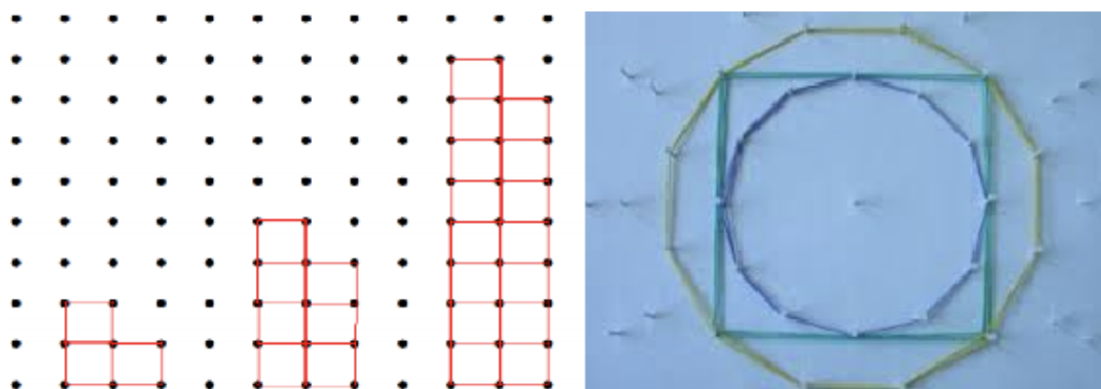
- Polígonos regulares: Inscrição e circunscrição na circunferência

Segundo DOLCE (1993) um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.

Serão Propostas e analisadas atividades com a finalidade de:

- Deduzir padrões de sequências;
- Deduzir intuitivamente a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética;
- Resolver situações problemas envolvendo representação geométrica de sequências;
- Observar propriedades de diversos polígonos regulares inscritos e circunscritos nas circunferências;
- Observar relação entre alguns elementos como: raio, apótema, centro, ângulo central;
- Observar a disposição geométrica de cada polígono.

A seguir encontramos uma representação de como podemos utilizar o geoplano para representar sequencias e inscrição e circunscrição de polígonos:



Fonte: Pinheiro (2014)

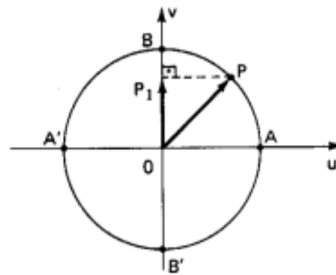
Figura 6.8: Sequências, Inscrição e Circunscrição.

6.2.2 2º Ano do Ensino Médio

Serão trabalhados com o uso do geoplano os seguintes conteúdos:

- Noções de trigonometria no ciclo trigonométrico

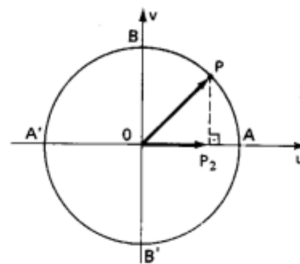
Segundo Iezzi (1997, p. 17) dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (indicamos $\text{sen } x$) a ordenada $\overline{OP}$, do ponto P em relação ao sistema $u\hat{O}v$. Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \text{sen } x$, isto é : $f(x) = \text{sen } x$.



Fonte: Iezzi (1997)

Figura 6.9: Função seno.

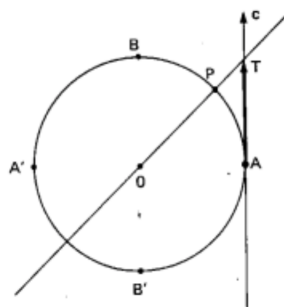
Também segundo Iezzi (1997, p. 17) dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\text{cos } x$) a abscissa $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação do sistema $u\hat{O}v$. Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \text{cos } x$, isto é, $f(x) = \text{cos } x$.



Fonte: Iezzi (1997)

Figura 6.10: Função cosseno.

Ainda segundo Iezzi (1997, p. 17), dado um número real x , $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta $\overline{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicamos $\text{tg } x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.



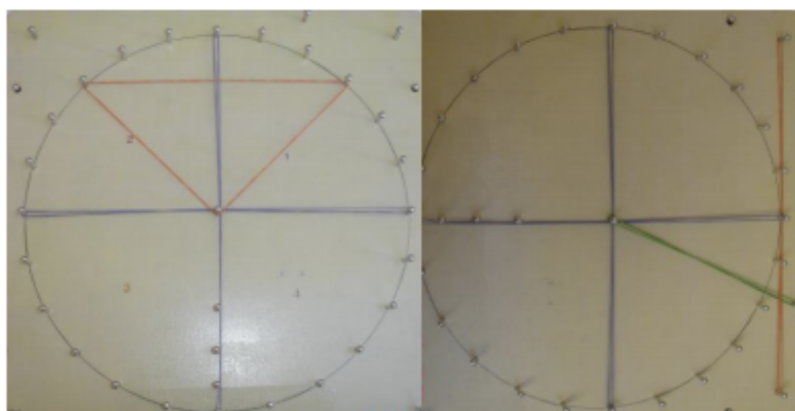
Fonte: Iezzi (1997)

Figura 6.11: Reta Tangente.

Serão Propostas e analisadas atividades com a finalidade de:

- Explorar conceitos do ciclo trigonométrico tais como: sentido, quadrantes, ângulos;
- Utilizar as representações em medidas de graus e radianos, fazendo as conversões necessárias;
- Identificar visualmente os conceitos de seno, cosseno e tangente;
- Movimentar ângulos nos quadrantes e identificar arcos correspondentes;
- Relacionar simetrias presentes no ciclo trigonométrico.

A seguir encontramos uma representação de como podemos utilizar o geoplano nesse contexto:



Fonte: Pinheiro (2014)

Figura 6.12: Quadrantes e Representação da Tangente.

6.2.3 3º Ano do Ensino Médio

Serão trabalhados com o uso do geoplano os seguintes conteúdos:

- Plano cartesiano
- Reta

Segundo Iezzi (1997, vol 7 p. 3) se considerarmos dois eixos x e y perpendiculares em O , os quais determinam o plano α .

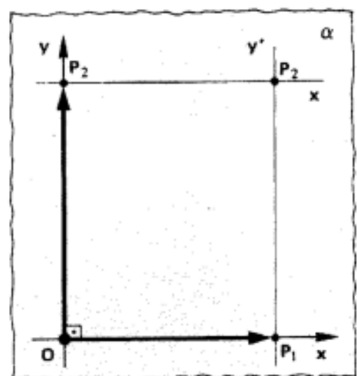
Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas:

$$x' \parallel x \text{ e } y' \parallel y$$

Denominamos P_1 a intersecção de x com y' e P_2 a intersecção de y com x' .

Nestas condições definimos:

- Abscissa de P é o número real $x_p = \overline{OP_1}$;
- Ordenada de P é o número real $y_p = \overline{OP_2}$;
- Coordenadas de P são os números reais x_p e y_p , geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p) onde x_p é o primeiro termo;
- Eixo das abscissas é o eixo x (ou Ox);
- Eixo das ordenadas é o eixo y (ou Oy);
- Sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou retangular) é o sistema xOy ;
- Origem do sistema é o ponto O ;
- Plano cartesiano é o plano α .



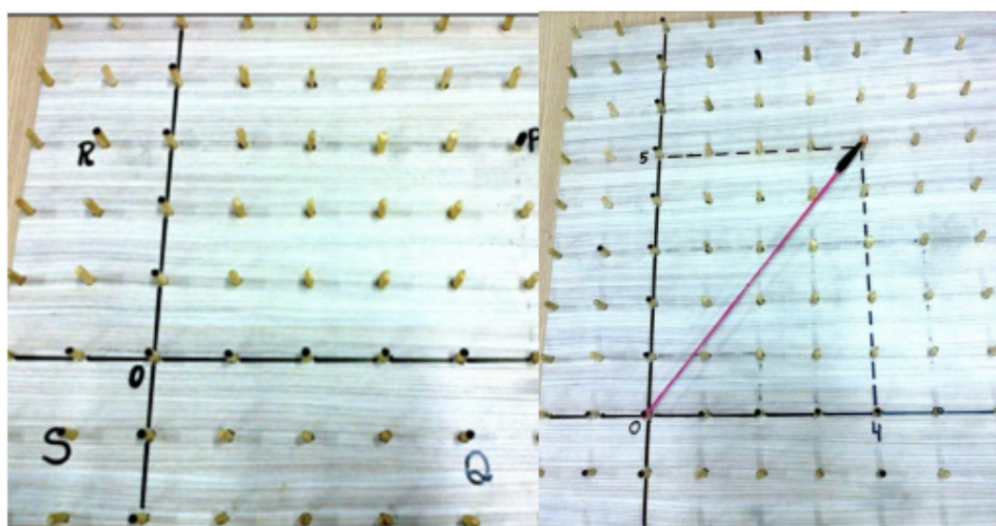
Fonte: Iezzi (1997)

Figura 6.13: Plano cartesiano.

Serão Propostas e analisadas atividades com a finalidade de:

- Identificar os quadrantes e localizar pontos no plano cartesiano;
- Deduzir e observar a aplicabilidade da fórmula da distância entre dois pontos;
- Observar e intuir o cálculo do ponto médio de um segmento e baricentro do triângulo;
- Definir e observar as propriedades das bissetrizes dos quadrantes;
- Relacionar o coeficiente angular com a inclinação da reta;
- Mover retas no plano cartesiano e observar posições relativas dessas retas e seus conceitos;
- Calcular a distância entre um ponto e uma reta.

A seguir encontramos uma representação do plano cartesiano no geoplano e também de um segmento de reta.



Fonte: Pinheiro (2014)

Figura 6.14: Plano Cartesiano e Reta.

7 Materiais

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações - MCTIC.

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento;

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio.

Levando em consideração as competências e habilidades necessárias para que alunos do ensino fundamental ciclo II e ensino médio consigam solucionar problemas propostos pela OBMEP, utilizou-se o geoplano como ferramenta facilitadora para a percepção de alguns pontos essenciais para a resolução desses desafios.

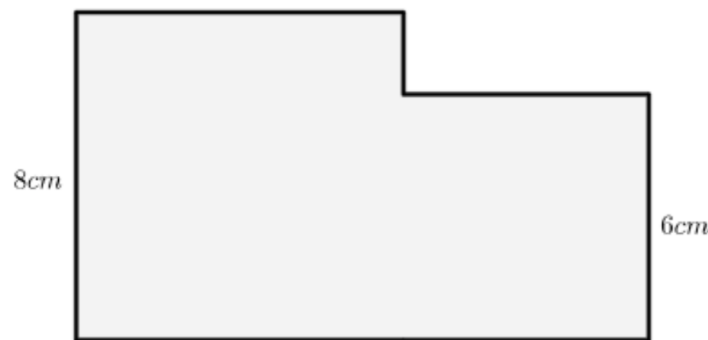
Para que esse estudo seja feito foram selecionadas algumas questões da avaliação que envolve em especial área e perímetro de figuras planas, retiradas da edição ocorrida no ano de 2016. Essas questões foram aplicadas para alunos do nono ano do ensino

fundamental e a seguir encontram-se as questões, a resolução disponibilizada pela comissão da OBMEP, a resolução dos alunos e algumas imagens registradas no momento da atividade.

7.1 Questões envolvendo áreas e perímetro retiradas da Olimpíada Brasileira de matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - edição do ano de 2016

7.1.1 Questão 1 - Cortando a escada para formar um quadrado

A figura a seguir mostra uma “escadinha” formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e um de lado 6 cm. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.



Fonte: OBMEP – Banco de Questões 2016

Figura 7.1: Formas geométricas.

- Qual a medida do lado do quadrado que deverá ser formado no final?
- Utilizando apenas um lápis, uma régua de 20cm, com marcações de 1cm em 1cm, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada
- Explique de que forma o geoplano facilitou a resolução desta atividade.

SOLUÇÃO DISPONIBILIZADA PELA COMISSÃO DA OBMEP

Como o quadrado não deve ter buracos, a área final deve ser igual à área original. Se chamarmos de L o lado do quadrado, temos:

$$\begin{aligned} L^2 &= 8^2 + 6^2 \\ L^2 &= 64 + 36 \\ L^2 &= 100 \\ L &= 10 \end{aligned}$$

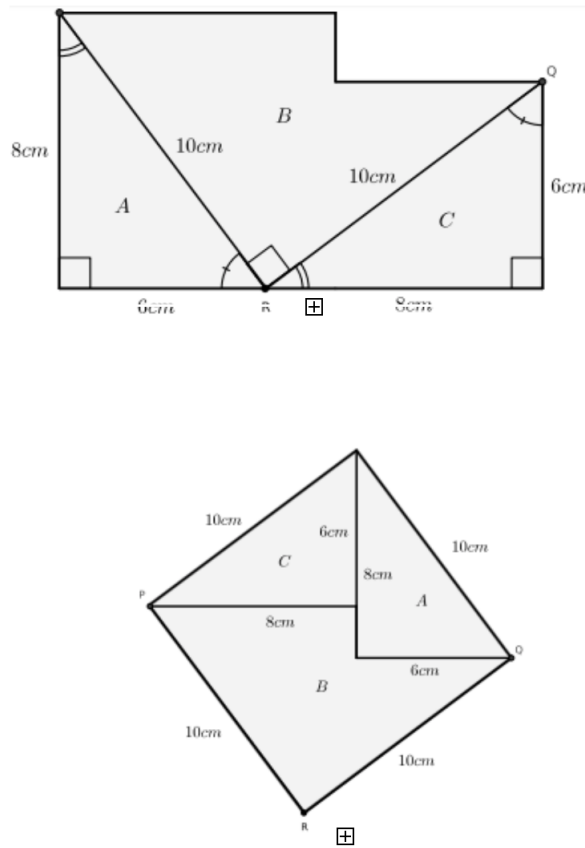


Figura 7.2: Questão 1 - Resolução..

7.1.2 Questão 2 - Montando Hexagonângulos

Um hexagonângulo é um hexágono que possui todos os ângulos iguais a 120° . Bia possui triângulos equiláteros com todos os lados inteiros possíveis. Além disso, ela possui muitos triângulos de cada tamanho e pretende usá-los para montar hexagonângulos. Por exemplo, ela usou 6 triângulos de lado 1 para formar um hexagonângulo de perímetro 6 como na figura a seguir

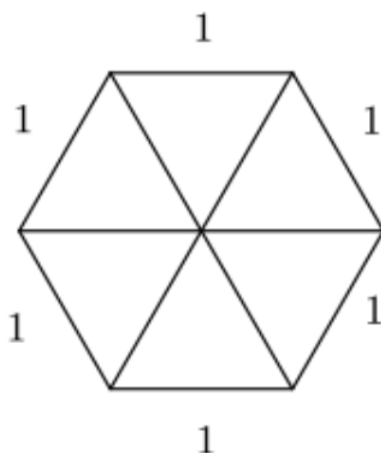


Figura 7.3: Questão 2 - hexagonângulo lado 1.

Na próxima figura, temos outro hexagonângulo de perímetro 19 formado por 8 triângulos.

Considere o hexagonângulo de perímetro 19 montado por Bia. Se ela o construísse usando apenas triângulos de lado 1, quantos triângulos seriam necessários?

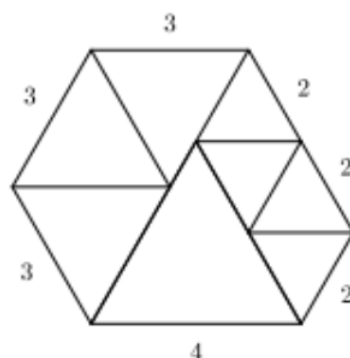


Figura 7.4: Questão 2 - hexagonângulo lado 2.

SOLUÇÃO DISPONIBILIZADA PELA COMISSÃO DA OBMEP

Observe que um triângulo de lado 2 é formado por 4 triângulos de lado 1, o triângulo de lado 3 por 9 triângulos de lado 1 e o triângulo de lado 4 por 16 triângulos de lado 1. Como o hexágono é formado por 4 triângulos de lado 2, 3 de lado 3 e 1 de lado 4, então a quantidade de triângulos de lado 1 para formar o mesmo hexágono é $4\Delta 4 + 3\Delta 9 + 1\Delta 16 = 16 + 27 + 16 = 59$.

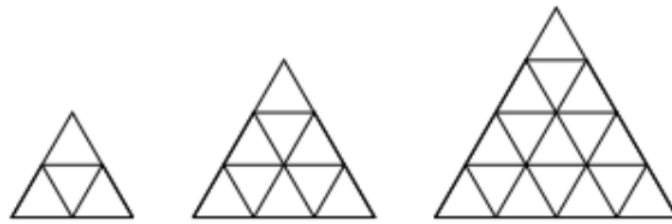


Figura 7.5: Questão 2 - Solução.

7.1.3 Questão 3 - Pontos nos lados do quadrado

Os pontos E e F estão nos lados AD e BC , respectivamente, do quadrado $ABCD$. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, encontre a área do quadrado

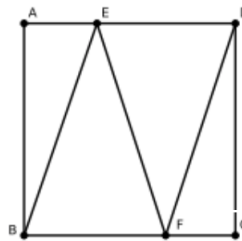


Figura 7.6: Questão 3 - quadrado.

SOLUÇÃO DISPONIBILIZADA PELA COMISSÃO DA OBMEP

Sejam G e H os pés das perpendiculares traçadas de E e F aos lados BC e AD , respectivamente.

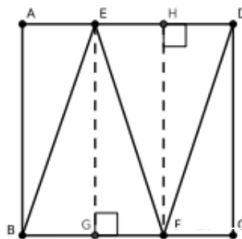


Figura 7.7: Questão 3 - Solução.

Como $AB = CD$ e $BE = FD$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{BE^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{FD^2 - CD^2} \\ &= FC. \end{aligned}$$

Além disto, como $EF = FD$, novamente pelo Teorema de Pitágoras, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{EF^2 - HF^2} \\ &= \sqrt{FD^2 - HF^2} \\ &= HD \\ &= FC. \end{aligned}$$

Consequentemente, $AE = EH = HD = x$ e $AB = AD = 3x$. Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEB , temos:

$$900 = BE^2 = AE^2 + AB^2 = x^2 + 9x^2$$

Logo, a área do quadrado é

$$AB^2 = 9x^2 = 810$$

7.2 Métodos e Resultados

A seguir estão descritos os métodos, discussões, estratégias, interações e resultados utilizados e observados para a resolução de cada uma das questões anteriormente propostas.

Para resolução da questão 1, inicialmente foi entregue a atividade em uma folha xerografada ao grupo composto por até quatro alunos, estes leram a atividade e tentaram desenvolvê-la traçando os seguimentos possíveis para os devidos cortes e apresentaram diversas dificuldades na resolução da atividade proposta pois a visualização de como a figura ficaria após os cortes ficou comprometida, uma vez que os mesmos teriam que imaginar a figura após esses cortes.

Depois de muitas tentativas e questionamentos a professora, foi entregue a cada grupo um geoplano e vários elásticos coloridos.

A professora orientou que deveria ser convencionado como um centímetro o espaçamento entre um pino e outro consecutivos, tanto na horizontal quanto na vertical para que fosse construída a figura inicial.

Foi orientado para que usassem elásticos coloridos para a representação de cada segmento de reta da figura.

Ao observar a figura formada notaram que ao traçar o segmento $\overline{BE}$ dividiriam a figura em dois quadrados sendo o de maior área igual a $64cm^2$ e o de menor área igual a $36cm^2$.

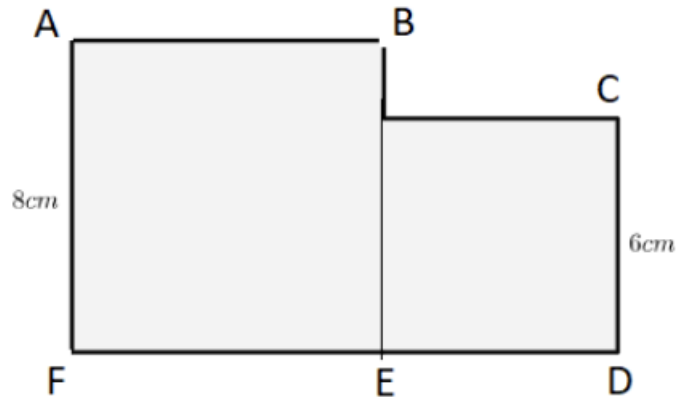


Figura 7.8: Formas geométricas.

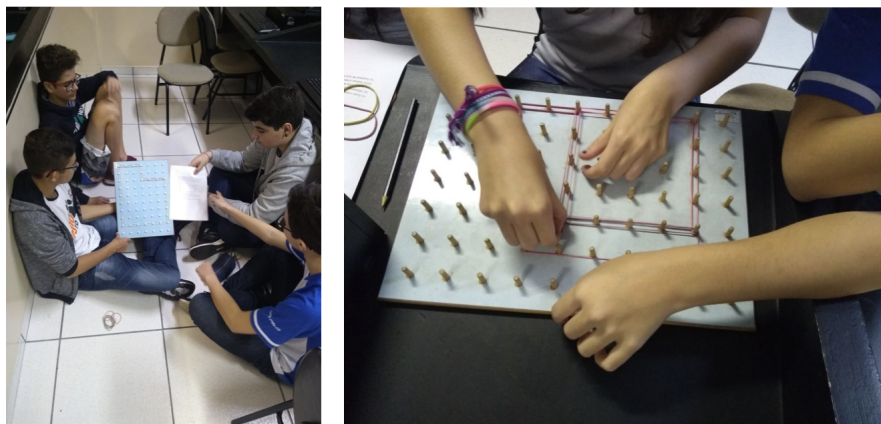
Ficou simples notar que ao remontar a figura o novo quadrado deveria ter 100cm^2 de área, uma vez que a soma de 64cm^2 e 36cm^2 é igual a 100cm^2 , logo o lado do novo quadrado deveria ter 10cm .

Partindo dessa observação os alunos começaram a transferir e remontar a figura movendo os elásticos de modo a formar o quadrado desejado, cortando a figura inicial em apenas três partes.

Alguns grupos dividiram a figura em quatro partes e após remontá-la obtiveram o quadrado de lado 10cm . No entanto, o objetivo era que fosse cortada em apenas três partes, por isso a professora orientou que refizessem a atividade e após algumas intervenções, vários grupos chegaram ao objetivo proposto.

A seguir estão alguns registros do momento da execução da atividade.

RESOLUÇÃO DE ALGUNS ALUNOS



⊕

Fonte: Fotografada em sala de aula, durante a execução da atividade.

Figura 7.9: Utilização do geoplano..

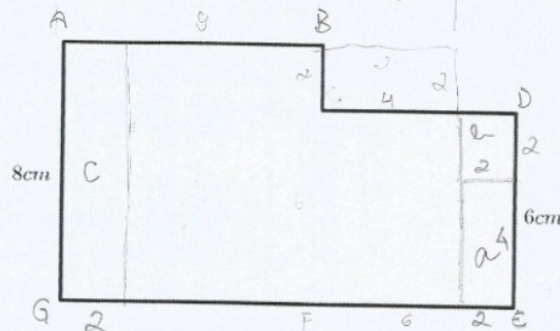
NOME:

Pedro Acatulin
 Luiz Henrique

Lucas Roberto
 Arthur Funes

1) Cortando a escada para formar um quadrado

A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado 8cm e um de lado 6cm. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.



- (a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final? 10 cm
 (b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de 20cm, com marcações de 1cm em 1cm, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada.
 (c) Explique de que forma o geoplano facilitou a resolução desta atividade.

c) O geoplano deu as áreas dos 2 quadrados separadamente, após a soma das duas áreas se fez a raiz quadrada. Ex.: $64 + 36 = 100 \Rightarrow \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

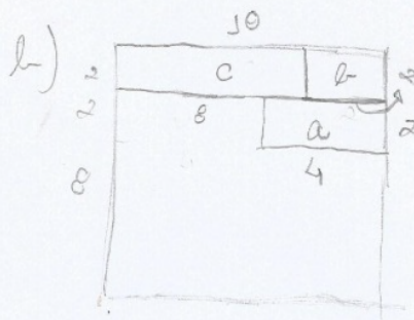


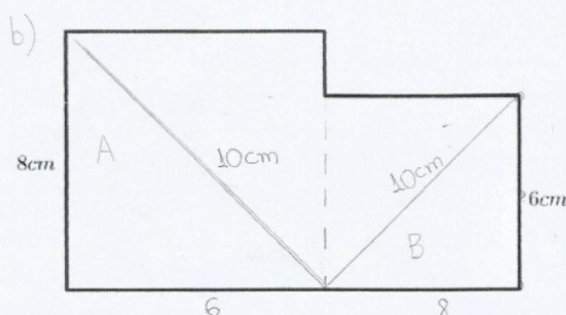
Figura 7.10: Resolução dos Alunos.

NOME:

Ana Beatriz dos Santos Xavier, Bárbara dos Santos Mijai, Gabriela Knezi Kaulakita Assini, Raquel Ortiz Lopes Skirke.

1) Cortando a escada para formar um quadrado

A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado 8cm e um de lado 6cm. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.



- (a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final? 10×10
- (b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de 20cm, com marcações de 1cm em 1cm, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada.
- (c) Explique de que forma o geoplano facilitou a resolução desta atividade.

a) $L^2 = 8^2 + 6^2$

$L^2 = 64 + 36$

$L^2 = 100$

$L = \sqrt{100}$

$L = 10$

c) Nos ajudou a ter ideia de como separar a figura em 3 partes.

Figura 7.11: Resolução dos Alunos.

Para resolução da questão 2, inicialmente foi entregue a atividade em uma folha xerografada ao grupo composto por até quatro alunos, estes leram a atividade a fim de desenvolvê-la, após algumas tentativas com o objetivo de desenhar os triângulos com um centímetro de lado dentro da figura inicial apresentaram diversas dificuldades na resolução da atividade proposta, pois a visualização de como a figura ficaria com os triângulos inscritos ficou comprometida.

Depois de muitas tentativas e questionamentos à professora, foi entregue a cada grupo um geoplano e vários elásticos coloridos.

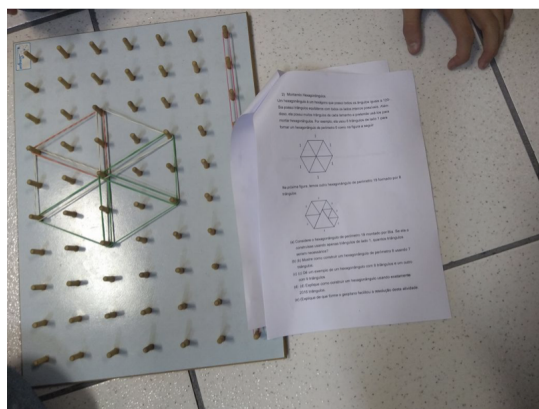
A professora orientou para que usassem os elásticos coloridos para a representação de cada triângulo equilátero e a construção com três pinos adjacentes seria considerado triângulo equilátero de lado um centímetro.

Após essa orientação foi solicitado aos alunos que construíssem triângulos equiláteros de lados de dois centímetros, três centímetros e quatro centímetros e que fossem inscritos dentro deles, triângulos equiláteros de um centímetro de lado, tudo isso para que chegassem a conclusão que dentro de cada triângulo equilátero é possível inscrever a quantidade de triângulos de lado um centímetro referente ao tamanho do lado do triângulo elevado ao quadrado, por exemplo, no triângulo de lado dois centímetros é possível inscrever quatro triângulos equiláteros de lado um centímetro, pois dois elevado ao quadrado é igual a quatro.

Após esta etapa, foi construída a figura proposta na atividade e preenchida com triângulos equiláteros coloridos de lado um centímetro, os alunos chegaram então a conclusão que seriam necessários 59 triângulos, uma vez que $4 \times 4 + 3 \times 9 + 1 \times 16 = 16 + 27 + 16 = 59$.

A seguir estão alguns registros feitos no decorrer da atividade.

RESOLUÇÃO DE ALGUNS ALUNOS

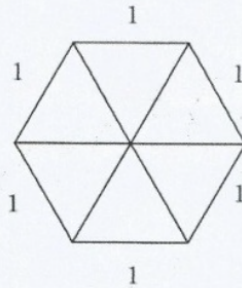


Fonte: Fotografada em sala de aula, durante a execução da atividade.

Figura 7.12: Utilização do geoplano..

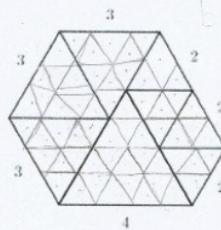
2) Montando Hexagonângulos

Um hexagonângulo é um hexágono que possui todos os ângulos iguais a 120° . Bia possui triângulos equiláteros com todos os lados inteiros possíveis. Além disso, ela possui muitos triângulos de cada tamanho e pretende usá-los para montar hexagonângulos. Por exemplo, ela usou 6 triângulos de lado 1 para formar um hexagonângulo de perímetro 6 como na figura a seguir



Na próxima figura, temos outro hexagonângulo de perímetro 19 formado por 8 triângulos.

a) Dados necessários: 59 triângulos



Considere o hexagonângulo de perímetro 19 montado por Bia. Se ela o construísse usando apenas triângulos de lado 1, quantos triângulos seriam necessários?

Figura 7.13: Resolução dos Alunos.

Para resolução da questão 3, inicialmente foi entregue a atividade em uma folha xerografada ao grupo composto por até quatro alunos e um geoplano com vários elásticos coloridos.

A professora orientou que deveria ser convencionado como um centímetro o espaçamento entre um pino e outro consecutivo, tanto na horizontal quanto na vertical para que fosse construída a figura inicial.

Foi orientado para que usassem elásticos coloridos para a representação de cada segmento de reta da figura.

Em seguida os alunos construíram com os elásticos a figura proposta na atividade, então marcaram os pontos G e H como os pés das perpendiculares traçadas de E e F aos lados BC e AD , respectivamente.

Após traçarem as alturas os alunos concluíram que foram formados seis triângulos semelhantes.

Após esta etapa foi observado que para que pudessem formar o segmento $\overline{DC}$ seriam necessários três elásticos de mesmo tamanho do segmento $\overline{CF}$, ou seja, $\overline{DC} = 3 \times \overline{CF}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle DCF$, os alunos chegaram a conclusão que:

$$\overline{DF}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$$

Até esse ponto não foi necessária à intervenção da professora, no entanto após esse ponto foi necessário que a professora intervisse mostrando aos alunos que eles deveriam substituir o segmento $\overline{DC}$ por três vezes $\overline{CF}$ e $\overline{FD}$ por 30.

$$\overline{DF}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$$

$$30^2 = (3\overline{CF})^2 + \overline{CF}^2$$

$$900 = 9\overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$$

$$900 = 10\overline{CF}^2$$

$$\overline{CF} = \sqrt{90}$$

$$\overline{CF} = 3\sqrt{10}$$

Ficou simples para que os alunos concluíssem que se $\overline{DC} = 3 \times \overline{CF}$, então fazendo a substituição do valor encontrado na equação acima, temos:

$$\overline{DC} = 3 \times \overline{CF}$$

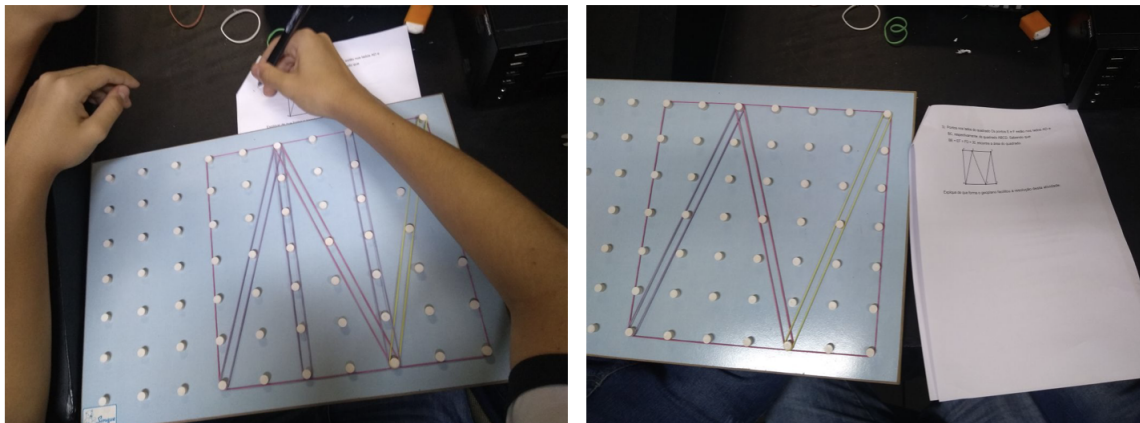
$$\overline{DC} = 3 \times 3 \times \sqrt{10}$$

$$\overline{DC} = 9 \times \sqrt{10}$$

Encontrando o valor de $\overline{DC}$, consequentemente os alunos concluíram que era igual o valor do lado do quadrado e rapidamente concluíram então que a área do quadrado $ABCD$ seria dada por:

$$\begin{aligned} A &= \overline{DC} \times \overline{DC} \\ A &= 9 \times \sqrt{10} \times 9 \times \sqrt{10} \\ A &= 81 \times \sqrt{100} \\ A &= 81 \times 10 \\ A &= 810 \end{aligned}$$

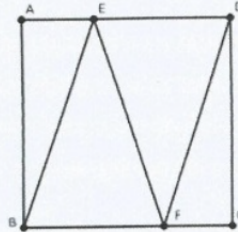
RESOLUÇÃO DE ALGUNS ALUNOS



Fonte: Fotografada em sala de aula, durante a execução da atividade.

Figura 7.15: Utilização do geoplano.

- 3) Pontos nos lados do quadrado Os pontos E e F estão nos lados AD e BC, respectivamente, do quadrado ABCD. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, encontre a área do quadrado



$x = 3y$
 $x^2 + y^2 = 900$
 $(3y)^2 + y^2 = 900$
 $9y^2 + y^2 = 900$

$10y^2 = 900$
 $y^2 = \frac{900}{10}$
 $y^2 = 90$
 $y = \sqrt{90}$

Explique de que forma o geoplano facilitou a resolução desta atividade.

$x^2 + 90 = 900$

$y = \sqrt{9 \cdot 10}$

$y = 3\sqrt{10}$

$A = x \cdot 3y$

$A = 3\sqrt{10} \cdot 3(3\sqrt{10})$

$A = 9\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10}$

$A = 8100$

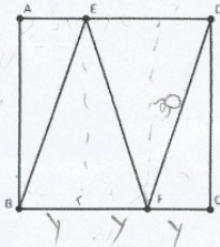
$A = 810 =$

$x = 3(3\sqrt{10})$

$x = 9\sqrt{10}$

Figura 7.16: Resolução dos Alunos.

- 3) Pontos nos lados do quadrado Os pontos E e F estão nos lados AD e BC, respectivamente, do quadrado ABCD. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, encontre a área do quadrado



Com o geoplano visualizamos que a medida da diagonal é maior que a de x , e que $3x$ equivale a $3y$, facilitando a descoberta de $x = y$, e a área

$$x = 3y$$

Explique de que forma o geoplano facilitou a resolução desta atividade.

$$3y = x$$

$$3 \cdot (3\sqrt{10}) = x$$

$$9\sqrt{10} = x$$

$$A = x \cdot 3y$$

$$A = 9\sqrt{10} \cdot 3 \cdot (3\sqrt{10})$$

$$A = 81\sqrt{100}$$

$$A = 81 \cdot 10$$

$$A = 810$$

$$x^2 + y^2 = 30^2$$

$$(3y)^2 + y^2 = 900$$

$$9y^2 + y^2 = 900$$

$$10y^2 = 900$$

$$y^2 = \frac{900}{10}$$

$$y^2 = 90$$

$$y = \sqrt{90}$$

$$y = \sqrt{9 \cdot 10}$$

$$y = 3\sqrt{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 5} = 3\sqrt{10}$$

Figura 7.17: Resolução dos Alunos.

7.3 Algumas Fotos Durante a Execução da Atividade:

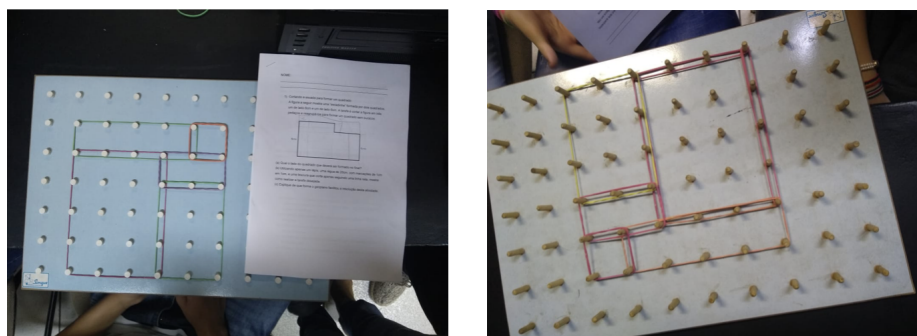


Figura 7.18: Execução da atividade.

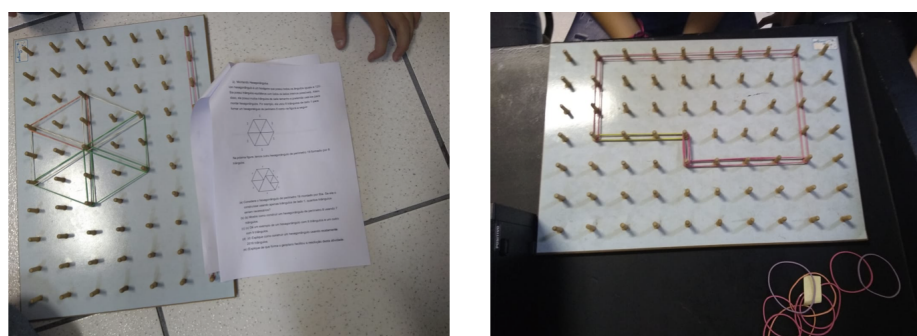


Figura 7.19: Execução da atividade.

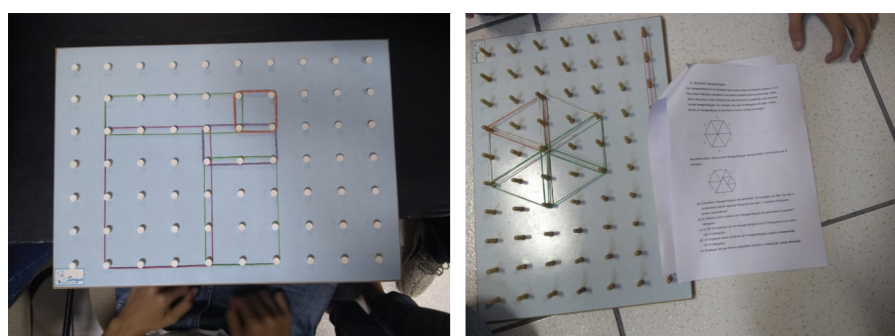


Figura 7.20: Execução da atividade.

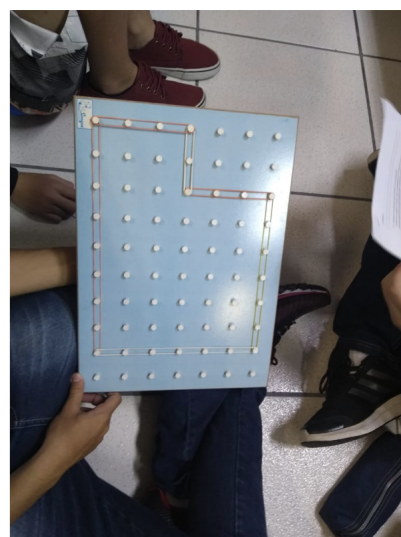


Figura 7.21: Execução da atividade.

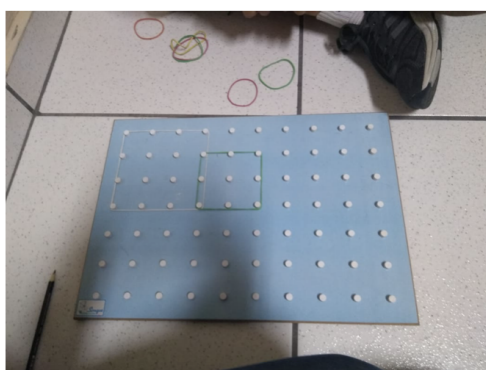


Figura 7.22: Execução da atividade.

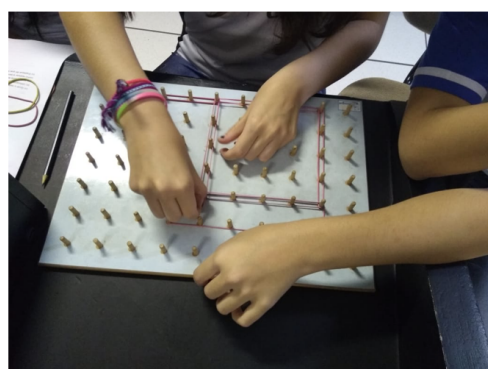


Figura 7.23: Execução da atividade.

7.4 Conclusões após as atividades:

Após a aplicação da atividade é possível perceber que ferramentas lúdicas são muito importantes, uma vez que torna o aprendizado muito mais divertido, deixa de ser monótono, fazendo com que o aluno aprenda com muito mais facilidade.

Observando a atividade antes e após a ferramenta lúdica geoplano, foi possível perceber que os alunos realizaram a atividade de forma bem mais simples e conseguiram visualizar a situação proposta de maneira rápida e com mais facilidade, nas três situações propostas. Os alunos conseguiram assimilar conceitos geométricos facilmente e algebrizar os conceitos explorados, não sendo necessária grande quantidade de intervenções da professora, ou seja, realizaram a atividade de forma mais independente, mais prazerosa, mais significativa e com certeza os conceitos foram realmente aprendidos, não apenas ensinados, pois o que realizamos de forma prática tem construção muito mais significativa e permanente, do que quando apenas decoramos conceitos.

Muitas vezes a visualização algébrica acaba ficando abstrata para os alunos e por isso a importância da relação entre o conceito algébrico e geométrico dos conteúdos. O trabalho geométrico faz com que os conceitos sejam visualizados e não apenas decorados.

A construção geométrica permite explorar muito além dos conceitos solicitados na atividade, permite explorar unidades de medidas, medidas correspondentes, alturas de figuras, equivalência entre lados, áreas, perímetros, permite que o aluno explore a geometria do assunto de um jeito divertido, prático, dando sentido tanto à parte algébrica quanto à geométrica e aprendendo de uma forma mais significativa e menos maçante.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É necessário inovar os métodos de ensino para que o aprendizado se torne divertido, prazeroso e mais eficaz. Não podemos nos prender aos métodos tradicionalistas, principalmente para o ensino da matemática, porque se continuarmos ensinando matemática da mesma forma que vem sendo ensinada, a sua beleza e o seu real contexto se perderão no tempo.

É preciso inovar, se adequar, desenvolver-se juntamente com a clientela de alunos que devemos atender. Recursos didáticos, tecnológicos, podem ser grandes parceiros, se usados com maestria, com preparo, pois é este o papel do professor em sala de aula, mostrar caminhos para que seus alunos cheguem ao aprendizado, sempre partindo da realidade do aluno; o professor é o elo entre o mundo em que o aluno está inserido e a matemática que existe nele.

Acredita-se que este trabalho tenha apresentado contribuições para melhorar esse aprendizado, pois ao decorrer dele conseguimos mostrar, principalmente através do geoplano, que as atividades lúdicas são meios de tornar o aprendizado mais significativo, levando em consideração a era da tecnologia, a geração de alunos presentes nas escolas, a clientela que o professor necessita atender. Mostramos que as ferramentas lúdicas como o geoplano, podem ser o caminho para algumas atividades, pois são atrativas. Chegamos à conclusão que os alunos aprenderam sem ao menos perceber, se divertiram aprendendo, sentiram-se instigados, animados, que através dessa ferramenta eles puderam vislumbrar uma matemática útil, significativa, diferente daquela matemática com apenas fórmulas decoradas e sem significativo no dia a dia, sem utilidade, maçante.

Acredita-se que a ludicidade possa ser utilizada com mais frequência no ensino da matemática, pois existem diversos contextos em que é possível sua aplicação e que professores consigam enxergar o quanto as atividades lúdicas são importantes para o aprendizado matemático.

É obvio que dificuldades sempre estarão pelo caminho, mas que possamos criar estratégias para passarmos por elas e talvez na ludicidade, especialmente no geoplano, encontrar caminhos facilitadores para desmistificar a matemática, desconstruindo paradigmas e medos dessa disciplina que é tão importante em quase todos os campos da existência humana.

Referências

ADAMI, P.S. *Fractais no ensino médio: uma sequência didática*. 2013. 55f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

ABRANTES, P. *Investigações em geometria na sala de aula*. Lisboa: APM, 1999.

ALMEIDA, P. N. *Educação lúdica: Técnicas e jogos pedagógicos*. 9ª ed. São Paulo: Loyola, 1998.

ALVES, E. M. S. *A ludicidade e o ensino da matemática: Uma prática possível*. Campinas: Papirus, 2001.

ANDRADE, J. A. A. *O ensino de geometria: uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos Anais dos ENEMs*. Dissertação de mestrado em Educação. Itatiba: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação - Universidade São Francisco, 2004.

BACKENDORF, V. R. *Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5º ano do ensino fundamental: um estudo de caso*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Porto Alegre: UFRGS, 2010.

BALTAR, P. M. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*. Grenoble, 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BORBA, Â.M. *A brincadeira como experiência de cultura*. In: CORSINO, Patrícia. (Org.). *Educação Infantil - cotidiano e políticas*. Campinas. SP: Autores Associados, 2009.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

- BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos: primeiro segmento do Ensino Fundamental: São Paulo: Ação Educativa, 2001.
- BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> > Acesso em 12 de julho de 2017.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002. Disponível em < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> > Acesso em 12 de julho de 2017.
- BRAZ, F. M. A história da Geometria hiperbólica. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- BRAZ, F. M. A história da Geometria hiperbólica. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- BURIGO, E. Z. Para que ensinar e aprender geometria no Ensino Fundamental? Um exercício de reflexão sobre o currículo. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2005.
- CARAÇA, B. Conceitos fundamentais de matemática. Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.
- CARAÇA, B. J. Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa, 1951.
- CARVALHO, D. G.; BELLEMAIN, P. M. B. Ensino de Área de Figuras Geométricas

Planas no Currículo de Matemática do Projovem Urbano. Rio Claro: Bolema, 2015.

CARVALHO, F. G. de. O ensino da matemática na educação infantil. In: Edu vale revista científica eletrônica de ciências sociais aplicadas, 2005. Disponível em: < <http://www.drb-assessoria.com.br/2oensinodamatematicanaeducacaoinfantil.pdf> >. Acesso em 25 out. 2017.

CARVALHO, J. B. P. F. Matemática: Ensino Fundamental. Coleção Explorando o Ensino. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, 2010.

CHIUMMO, A. O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do ensino fundamental. 1998. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1998.

CONCEIÇÃO, P. R.; GOMES, S. L. V.; WROBEL, J. S. Atividades com o geoplano no 1º ano do Ensino Médio. IV EIEMAT - Escola de Inverno de Educação Matemática. 2º Encontro Nacional Pibid Matemática. In: Educação Matemática para o Século XXI: Trajetória e perspectivas. Universidade Federal do Espírito Santo, Vila Velha/ES, 06-08 agosto 2014. Disponível em: < http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/RE/RE_Ramos_Pammela.pdf >. Acesso em: 25/08/2017.

CUNHA, J. S.; SILVA, J. A. V. A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática. NATAL: IFRN, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. Da realidade à ação: reflexões sobre educação ematemática. Campinas: Unicamp, 1999.

D'AMBRÓSIO, U. Educação Matemática - da teoria à prática. In: Coleção Perspectivas em Educação Matemática da SBEM. Campinas-SP: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. Educ. Pesqui., São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, Mar. 2005. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-97022005000100008&lng=en&nrm=iso >. acesso em 10/09/2017.

DANTE, L. R. Didática da Resolução de Problemas Matemáticos. Ed. Ática, 12ª Ed. São Paulo, 2000.

DANTE, L. R. Tudo é Matemática. São Paulo: Ática, 2002.

DELVAL, Juan. Crescer e Pensar. POA: Artmed, 1998.

DIAS, M. A. Experiências matemáticas no Geoplano. Universidade Católica de Pelotas VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA. Canoas-RS. 16 a 17 outubro, 2013. Disponível em: < <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1145/439> >. Acesso em: 25/08/2017.

DIENES, Z. P. Exploração do espaço e prática da medição. São Paulo: Editora pedagógica e Universitária, 1974.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics, 1989.

ENGELS, F. Sobre o papel do trabalho na transformação do macaco em homem. São Paulo: Edições Sociais, 1975.

EVES, H. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. Uma introdução a história da matemática. São Paulo: Atual, 1969.

FARIAS, A. M. A. A importância do material concreto na aprendizagem de conceitos geométricos. IX ePBem - Encontro Paraibano de Educação Matemática. 2016. Disponível em: < https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA4_ID761_30102016122832.pdf >. Acesso em: 27/08/2017.

FERREIRA, A. B. H. Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. Curitiba: Nova Fronteira, 1999.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão In: Revista Cocar. Belém: EDUEPA, 2008, v. 2, n.4, p. 7-15

FURKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. A Geometria da Tartaruga: uma introdução à Linguagem LOGO. In: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA. Presidente Prudente: Anais, 2009.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. Rio Claro: Bolema, 2002.

GATTÁS, M. L. B.; FUREGATO, A. R. F. A interdisciplinaridade na educação. Rev.

RENE. Fortaleza, v. 8, n. 1, p. 85-91, jan./abr.2007. Disponível em: < <http://www.periodicos.ufc.br/index.php/rene/article/view/5286/3890> >. Acesso em: 05/06/2017.

GOMEZ-GRANELL, C. A aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. São Paulo: Ática, 1996.

GONÇALVES, M. A. S. Teoria da ação comunicativa de Habermas: possibilidades de uma ação educativa de cunho interdisciplinar na escola. Educ. Soc., Campinas, v. 20, n. 66, p. 125-140, Apr. 1999. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-73301999000100007&lng=en&nrm=iso >. Acesso em: 06/06/2017

GRAVINA, M. A.; LOPES, S. A. A. Perímetro e área. 2º Simpósio de Formação de Professor de Matemática da Região Nordeste. SBM, 2016.

KALEFF, A. M. M. R. Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. 2 ed. Niterói, EDUFF, 2003

KAMII C. HOUSMAN, L.B. Crianças pequenas reinventam a Aritmética: implicações da teoria de Piaget. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

KISHIMOTO, M. T. Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 2001.

KORDAKI, M. The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. Educational Studies in Mathematics, 2003.

LARA, I. C. M. Jogando com a Matemática. De 5ª a 8ª série. São Paulo: Rêspel, 2003.

LIMA, P. F; BELLEMAIN, P. M. B. Habilidades matemáticas relacionadas com grandezas e medidas. São Paulo: Global, 2004.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P., orgs. Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994

LOPES, M. G. Jogos na Educação: criar, fazer, jogar. São Paulo: Cortez, 2000.

LORENZATO, S. Educação Infantil e percepção matemática. Campinas, SP: Autores Associados, 2006b.

- LORENZATO, S. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2010.
- LORENZATO, S. Para aprender Matemática. Autores associados, 2006a.
- LORENZATO, S. Porque ensinar Geometria? Educação Matemática em Revista, Florianópolis: SBEM, Nº. 04, 1995.
- LORENZATO, S. Porque ensinar Geometria? Educação Matemática em Revista, Florianópolis: SBEM, Nº. 04, 1995.
- LOVELL, K. O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos da criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.
- LUCKESI, C. C. Filosofia da Educação. São Paulo: Cortez, 1994.
- MARIM, V.; COPPE, C. Educação Matemática: contextos e práticas. Campinas, SP: Editora Alínea, 2010.
- MARTINS, L. F. Motivando o ensino da Geometria. Criciúma: Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC, 2008.
- MENDES, I. A. Investigação histórica no ensino da Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.
- MOYELES, Janet R. A excelência do brincar. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- MUNIZ, C. A. Brincar e Jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.
- NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. L. A busca da verdade matemática e o método axiomático. VI ENPEC - Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Universidade Estadual de Londrina, 2007. Disponível em: < <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/vienpec/CR2/p422.pdf> >. Acesso em: 25/08/2017.

NEGRINI, A. O lúdico no contexto da vida humana: da primeira infância à terceira idade. In: Brinquedo teca: a criança, o adulto e o lúdico. Petrópolis: Vozes, 2000.

NOÉ, M. Geometria Plana, 2016. Disponível em: < <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/geometria-plana.htm> >. Acesso em 30 ago. 2017.

PASSOS, C. L. B. Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: A Geometria na Sala de Aula. 2000. 348p. Tese (Doutorado em Educação). UNICAMP, Campinas, SP, 2000.

PAVANELLO, R. M. Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. In: Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. Curitiba, 2001.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetiké. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPM, 1993.

PERRIN-GLORIAN, M. Problèmes Didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Les cas des aires. Actes da 11^a École d'été de Didactique des Mathématiques - La Pensée Sauvage Editions. 2001.

PIAGET, J. Psicologia e Pedagogia. Rio de Janeiro. Forense Universitária, 1976

PIAGET, J.; INHELDER, B. A Representação do Espaço na Criança. Porto Alegre: artes médicas, 1993.

PIASESKI, C. M. A Geometria no ensino fundamental. Erechim: Universidade Regional Integrado Alto Uruguai e das Missões Campus de Erechim - URI, 2010.

PILETTI, N. Sociologia da Educação. São Paulo. Ática, 1988.

PINHEIRO, R. R. Aplicações do Geoplano no Ensino Básico. PROFMAT ? Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.

PIRES, C. C.; CURI, E.; PIETROPAOLO, R. Educação Matemática. São Paulo: Atual, 2002.

PLAZZA, M. C. C. El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Madrid: Editorial Síntesis, 1988.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. Lisboa: APM, 2003.

ROCHA, C. A. et. al. Uma discussão sobre o ensino de área e perímetro no ensino fundamental. Rio Grande do Sul: UFRGS, 2014.

RODRIGUES, C. T. Matemática como Ciência mais Geral: forma da experiência e categorias. COGNITIO-ESTUDOS: Revista Eletrônica de Filosofia, São Paulo, v. 4, n. 1, jan/jun, 2007, p. 37-59. Disponível em: < http://www.pucsp.br/pragmatismo/downloads/5cog_est_v4n1_rodrigues_cassiano_terra.pdf >. Acesso em: 27 ago. 2017.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades, 2014. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf> >. Acesso em 30 ago. 2017.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades, 2014. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf> >. Acesso em 30 ago. 2017.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. B. Geometria Euclidiana Plana. São Paulo: UFS, 2011.

SANTOS, C. O. A importância da visualização no ensino da Geometria plana e espacial. Jussara: Universidade Estadual de Goiás, 2009.