UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do Geogebra

Edilaine Cláudia Lima da Silva

Orientador
Prof. Dr. Marco Antonio Piteri

Presidente Prudente
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do Geogebra

Edilaine Cláudia Lima da Silva

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.
Financiadora: CAPES.

Orientador
Prof. Dr. Marco Antonio Piteri

Presidente Prudente
2018

Silva, Edilaine Cláudia Lima da.
Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do Geogebra / Edilaine Cláudia Lima da Silva. -- Presidente Prudente, 2018
141 f. : il. , tabs.

Orientador: Marco Antonio Piteri
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. GeoGebra (Software de computador). 3. Quádricas. 4. Seções cônicas. I. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Edilaine Cláudia Lima da Silva

Estudo de cônicas e quádricas:
construções com o uso do Geogebra

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

Financiadora: CAPES.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Piteri
FCT/UNESP - Campus de Presidente Prudente
Orientador

Prof.ª. Dr.ª. Cristiane Nespoli Morelato França
FCT/UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Francisco Assis da Silva
Universidade Estadual de São Paulo - USP

Presidente Prudente, 24 de Agosto de 2018

Dedico este trabalho a DEUS e meu SENHOR JESUS, a minha mãe DEZITA LIMA DA SILVA, a meu esposo DOUGLAS PEREIRA DA SILVA, a minha filha ANA JULIA que está a caminho, e família em geral.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que está me proporcionando essa conquista, pois sem Deus, nada disso estaria acontecendo.

Agradeço ao meu esposo Douglas Silva que sempre esteve ao meu lado todos os dias, me compreendendo e dando suporte necessário para cursar o mestrado.

Aos meus pais, Dezita e Antônio, que são meus incentivadores e meus provedores de meios desde a minha infância.

A minha Família que são alicerce em minha trajetória de vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Marco Antônio Piteri pela atenção, paciência e seriedade com que me guiou no período de elaboração e confecção desse trabalho.

Aos professores do mestrado que nos dispensaram durante todo o tempo a atenção e todas as informações necessárias de conhecimento para chegarmos até aqui.

Aos colegas de classe que sempre me ajudaram nos estudos em sala e até mesmo virtualmente por meio de novas tecnologias.

E em geral, a todos os familiares e amigos que de uma forma direta ou indireta me ajudaram com incentivo verbais ou com atitudes a concluir esse curso.

Agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), que possibilitou a realização desse trabalho.

A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.
Albert Einstein

Resumo

Este trabalho tem como propósito estudar cônicas e quádricas que podem ser representadas algebricamente por equações do segundo grau em duas e três variáveis, respectivamente. Em particular, a temática de cônicas foi objeto de estudo dos gregos bem antes do início da era cristã, muito embora sob uma perspectiva meramente geométrica. As cônicas e as superfícies de revolução obtidas a partir destas possuem inúmeras aplicações práticas em várias áreas do conhecimento humano, sendo, portanto, um conceito interdisciplinar. Vale salientar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), sugerem a investigação de temas e eixos transversais que possam ser discutidas em várias disciplinas ao longo da vida escolar do estudante. Atividades didáticas que exploram os elementos fundamentais associados a cada uma das cônicas foram propostas para serem desenvolvidas junto aos estudantes do ensino médio. No intuito de se diferenciar das formas tradicionais de ensino, procura-se fazer uso das denominadas novas tecnologias, em especial do software de matemática dinâmica Geogebra, que é capaz de trabalhar conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística e, em particular, simular construções geométricas baseadas em régua e compasso. Os inúmeros recursos de visualização em 2D e 3D, aliados a animação de objetos matemáticos, permite que os jovens estudantes possam ter níveis de abstração e enxergar relações entre objetos no espaço difíceis de serem obtidas por meios convencionais. Ademais, essa ferramenta permite aos estudantes explorar, investigar, conjecturar e com isso despertar e estimular o interesse dos mesmos pela construção de seu saber matemático, tornando-os agentes nesse processo.

Palavras-chave: Cônicas, Quádricas, GeoGebra.

Abstract

The purpose of this work is to study conics and quadrics that can be represented algebraically by equations of the second degree in two and three variables, respectively. In particular, the concepts of conics was studied by the Greeks before the beginning of the Christian era, albeit from a purely geometric perspective. The conics and surfaces of revolution obtained from these have numerous practical applications in several areas of human knowledge, being, therefore, an interdisciplinary concept. It should be noted that the National Curricular Parameters (PCN's) suggest the investigation of themes and transversal axes that can be discussed in various disciplines throughout the student's school life. Didactic activities that explore the fundamental elements associated to each of the conics were proposed to be developed with high school students. In order to differentiate itself from the traditional forms of teaching, we try to make use of the so-called new technologies, especially Geogebra dynamic mathematics software, which is able to work with geometry, algebra, calculus and statistics content and, in particular, simulate geometric constructions based on ruler and compass. This software has numerous 2D and 3D visualization capabilities, coupled with the animation of mathematical objects, enable young students to have levels of abstraction and to see relationships between objects in space that are difficult to obtain by conventional means. In addition, this tool allows students to explore, investigate, conjecture and thereby awaken and stimulate their interest in building their mathematical knowledge, making them agents in this process.

Keywords: Conics, Quadrics, GeoGebra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Entre os temas que pontuam a educação desde o início deste século, sem dúvida o avanço da tecnologia no mundo globalizado incita uma maior atenção de todos os responsáveis em propagar o conhecimento. O avançado mundo eletrônico, das modernas interações virtuais são novidades que rompem regras e estabelecem uma consistente evolução tecnológica que vem dominando espaços nas nações, culturas e como consequência nas pessoas.

Estudada em todas as séries do ensino básico, a Geometria de forma geral, tem contribuição fundamental para o desenvolvimento de habilidades fundamentais ao aluno em várias áreas de conhecimento. Pesquisas em educação Matemática mostram que, no processo ensino-aprendizagem, o aluno se apropria de novos conhecimentos quando participa ativamente da construção destes. O uso de metodologias variadas é um dos caminhos possíveis para o envolvimento do aluno com construção do seu saber. A ferramenta computador aliada a uma escolha adequada dos softwares e das atividades tem mostrado resultados positivos nesse aspecto.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998), o estudo dos conceitos geométricos, é parte do currículo de Matemática no ensino fundamental que constituiu-se a partir de uma coleção de regras isoladas, decorrentes da experiência e diretamente conectadas com a vida diária. Não se tratava, portanto, de um sistema logicamente unificado.

Os professores da atualidade têm um grande desafio, uma formação do professor reflexivo, uma questão fundamental em um processo de formação. Na tentativa de contribuir com o desafio de encontrar caminhos que possibilitem formar professores para utilizar os recursos do computador de acordo com abordagem reflexiva.

As cônicas são curvas especiais em que se podem destacar a elipse, a parábola e a hipérbole que ganharam destaques significativos com os estudos do geômetra grego Apolônio. Atualmente elas são aplicadas em diversas áreas como na geometria, física, engenharia, arquitetura, entre outros. No ensino básico, As cônicas são objetos de estudo no terceiro ano do ensino médio, sendo quase sempre trabalhadas somente com centro na origem, esquecendo-se assim das cônicas com centros em outras localizações do sistema do plano cartesiano (PEREIRA, 2013). No ensino superior elas ganham força e são estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço através de estudo de superfícies quádricas, em Geometria Analítica, com enfoque nas equações analíticas e Álgebra Linear, onde é feita uma ligação delas com vetores e matrizes.

Com o intuito em despertar o interesse pela matemática, tornando-se mais simples e mais atrativa para os alunos, faz-se o uso do software Geogebra e com isso explorar as cônicas e suas aplicações partindo do construtivismo a partir dos planos de aulas a serem ministradas aos alunos.

> O estudo de Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimular e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de Teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos: a geometria que leva à trigonometria w a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes (PCNs, 2007).

O que se afere em geral, é a existência da grande promessa de contribuição social com a utilização destas novas e modernas tecnologias. E tal promessa não se limita ao âmbito escolar. Com ela se fortalece a ideia de ser possível, além da melhora na qualidade da educação, solucionar demandas sociais, em especial ao que se refere à capacidade de uma educação inclusiva.

Aulas tradicionais por meio do quadro negro e giz são mais cômodas para o professor, tendo em vista que ele já está acostumado com a rotina, seria o método "copia e cola", onde o professor escreve na lousa e o aluno reproduz exatamente no caderno. No entanto, esse método se torna ineficaz ao ensino-aprendizado do aluno por não priorizar o tempo excessivo e exaustivo ao decorrer de cada conteúdo, não conseguindo alcançar todas as habilidades e competências pretendidas ao final do ano letivo. É preciso ainda considerar que, ao inserir conteúdos de Geometria no quadro negro, por exemplo, faz com que o aluno deixe de ter uma perspectiva melhor nas imagens em 3D e em propriedades e características do desenho geométrico.

De fato, os alunos demonstram tamanha dificuldade quando o professor propõe a eles a análise de situações em que devem ser relacionados dados ou fatos fazendo uso de possíveis caminhos de resolução, não se permitem tentar, errar, acertar, não se mobilizam, desanimam e esperam a explicação do professor. No entanto, quando se prioriza a resolução de problemas, abre-se a oportunidade do aluno pensar por si mesmo, de construir estratégias de resolução, de relacionar diferentes conhecimentos e, perseverar na solução. Logo, é pela resolução de problemas que se desenvolve formas específicas de pensar, as quais podem habilitar o estudante a enfrentar desafios na vida escolar e particular, e mais sensato ainda, utilizando as novas tecnologias para maior eficácia.

Nessa nova era digital, é preciso sair do comodismo e buscar aprimoramento e conhecimento a fim de utilizar as novas tecnologias em sala de aula e alcançar o objetivo inserido em um plano de aula (PEREIRA, 2013). Sem dúvidas, é um grande desafio para muitos professores que ainda não se adaptaram à essas inovações, mas buscando a modernidade para a sala de aula irão fazer com que o aluno se interesse mais pelo conteúdo abordado, resultando em uma aula mais significativa para o aluno.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002. p. 111.)

Logo, os professores de Matemática precisam saber utilizar de recursos modernos voltados ao ensino da matemática, reconhecendo suas limitações e possibilidades e fazendo a valoração necessária para aferir em que sentido eles podem agregar valor à aprendizagem da disciplina.

É verdade que não é mais possível pensar na formação do aluno sem considerar a Tecnologia da Comunicação e Informação (TIC), em especial *o computador*. O computador está cada vez mais acessível pelo aluno, seja em casa, nas comunidades em que vive e convive, de fato, já faz parte do seu cotidiano. Por isso, é fundamental utilizar os recursos diversos do computador, tablets, calculadoras, computadores e outros, de modo a favorecer simultaneamente a aprendizagem da Matemática e dos recursos tecnológicos que comumente estão disponíveis nos softwares instalados nas máquinas e outros que são de distribuição gratuita na internet.

1.1 Objetivos

Visando demonstrar a importância da matemática direcionada à aplicação da Geometria Analítica em diversos setores, utilizando as tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática, o presente estudo tem por objetivo principal despertar o gosto pela matemática, tornando-se significativo em seu contexto escolar, utilizando o software Geogebra, uma ferramenta tecnológica, para enriquecer o ensino-aprendizagem no Ensino Médio.

Para tanto, nesse trabalho são tratados sobre cônicas e suas principais características e ainda, falar brevemente sobre superfícies quádricas, identificando algumas aplicações do nosso cotidiano, tendo como objetivo específico amparar os alunos e professores com um material didático com o uso do software Geogebra, além de propor para o currículo escolar em matemática no ensino médio o estudo já trabalhado de maneira singela.

1.2 Organização do Trabalho

Nesse trabalho são apresentados alguns conceitos de Geometria Analítica e a importância da Matemática direcionada à sua aplicação da Geometria Analítica em diversos setores, utilizando tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática.

Após este capítulo introdutório, a presente dissertação está organizada conforme a estrutura que segue.

O segundo capítulo apresenta a evolução do Ensino da Matemática em ambiente escolar propício para o uso das novas tecnologias, permitindo ao professor identificar os estágios por que passaram os conceitos.

No terceiro capítulo, estão apresentadas as Seções Cônicas, suas principais características, bem como as elipses, hipérboles e parábolas e suas construções cônicas.

No quarto capítulo estão dispostos o conteúdo de Quadráticas, iniciando com seu conceito histórico de quadráticas, passando pela Elipsoide, Hiperboloide de uma folha, Hiperboloide de duas folhas, Cone Elíptico, Paraboloide elíptico, Paraboloide hiperbolico, e, em seguida expõe-se uma aplicação prática.

No quinto capítulo, estão dispostos o Plano de Aula realizado com a utilização de novas tecnologias voltado as Seções Cônicas, que são vistos pelos alunos no 3º ano do Ensino Médio, fazendo uso dos anexos e apêndices disponíveis nesse trabalho.

Por fim, estão apresentadas as considerações finais do estudo.

2 Tecnologias em Educação Matemática

A introdução da Tecnologia de Informação e Comunicação no sistema de ensino público iniciou-se na década de 80, a partir de recomendações dos seminários nacionais realizados, quando o Ministério da Educação e Cultura - MEC patrocinou o projeto EDUCOM. Foram implantados centros-piloto de informática em educação em cinco universidades públicas, os quais dedicavam-se a desenvolver pesquisas e metodologias sobre o uso do computador como recurso pedagógico.

A perspectiva educativa inovadora, segundo Andrade e Lima (1993), da proposta brasileira caracterizou-se pela formação de cidadãos crítico-reflexivos que utilizam a tecnologia para a busca, seleção e articulação entre informações e conhecimentos com vistas à construção de novos conhecimentos para melhor compreender o seu contexto e atuar em sua transformação.

O Projeto Gênese foi lançado no ano de 1990, por Paulo Freire, com o objetivo de integrar a informática à grade curricular como uma ferramenta interdisciplinar (ALMEIDA, 2000).

Para propiciar aos alunos o acesso às tecnologias de informação e comunicação nas escolas que possuíam equipamentos, houve um momento em que a tendência usual recaiu sobre a criação de uma nova disciplina voltada ao desenvolvimento de habilidades de domínio instrumental do computador e a consequente introdução de conteúdos informáticos ao currículo. Nessa última perspectiva, o computador é tutorado pelo aluno para representar a solução de um problema ou implantar um projeto, criando seus próprios modelos mentais, permitindo-lhe representar a integração entre conteúdos e a forma como os estrutura, promovendo o desenvolvimento de novas e mais complexas estruturas de pensamento (GIROTO; POKER; OMOTE, 2013).

Quando os computadores foram primeiramente introduzidos nas salas de aula, os reformadores concentraram-se na inovação nos computadores e no software. Eles não pensaram muito em como a tecnologia seria integrada na instrução e influenciaria a avaliação. De fato, a tecnologia acrescentou mais uma camada de complexidade, todo um novo conjunto de coisas que os professores que já tinham excesso de trabalho e que já estavam estressados teriam que aprender e gerenciar.

No entanto, à medida que o projeto continuava, os professores encontraram formas estratégicas de utilizar a tecnologia. Seu uso na instrução e aprendizagem mudou à medida que os próprios professores mudavam. Neste cenário, os professores mudaram suas crenças no que tange a aprendizagem, nas relações professor-aluno, e sobre a prática instrucional (VALENTE, 1993).

Logo, a nova tecnologia passou a ser na prática clássica em sala de aula. A aula expositiva, resposta oral e trabalho individual permaneceram como forma dominante de tarefas dos alunos; mas os alunos passaram a associar as ações inovadoras a projetos pedagógicos, constituídos por programas inovadores e por processos de ensino-aprendizagem e pesquisa que permitam investir, analisar, refletir e depurar o processo de utilização dos computadores (RÊGO, 2013).

Ensinar e aprender com as tecnologias de informação e comunicação constituem ferramentas poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado podendo ser integrada com outras disciplinas. O uso das tecnologias de informação e comunicação em educação está voltado à promoção da aprendizagem, proporcionando um desenvolvimento das possibilidades de perceber representações diferentes de uma mesma situação, controle sobre configurações geométricas levando a descoberta de propriedades novas e interessantes (RÊGO, 2013).

Evidentemente, com as novas tecnologias é possível conduzir, de forma proativa e inovadora, o processo de aprendizagem. O propósito primário não é usar ou não usar as novas tecnologias, mas, sim, repercutir sobre os meios e formas mais adequadas de uso para alcançar o objetivo pretendido.

O mais fascinante nas novas tecnologias disponíveis nos dias de hoje, em especial na Internet, não é que, com seu uso, seja possível ensinamentos à distância, mas, sim, que elas possam auxiliar os professores na criação de ambientes ricos em capacidade de aprendizagem, nos quais pessoas entusiasmadas e motivadas podem aprender sem terem que se tornar mártires de um processo formal e maçante de ensino. O aprendizado, neste caso, é interposto somente pela tecnologia.

Indubitavelmente, por trás das tecnologias há pessoas, que preparam os materiais e os dispõem por meio da rede. Quando se utiliza dos recursos disponíveis na Internet para o ensino-aprendizagem consequentemente se utiliza materiais de diferentes naturezas, que são preparados nos mais variados contextos, com diferentes ferramentas pedagógicas, e com inúmeras formas de didáticas, por serem os conteúdos virtuais preparados por um vasto e distinto clã de pessoas (RÊGO, 2013). Desta forma, a utilização da ferramenta torna o ensino acessível ao mais variado perfil de aluno e possibilita a efetivação do ensino inclusivo.

2.1 Calculadora como uso tecnológico

Falando ainda de tecnologia, destaca-se o uso da calculadora que cada vez mais ganha destaque ao mencionar em ensino de Matemática em sala de aula. Esse recurso ainda é muito censurado nas aulas de Matemática, pois ainda tem-se uma grande negatividade sobre o seu uso, justificando-se o fato que o aluno do ensino médio desaprende como fazer cálculos, torna-se dependente da máquina, calcula mecanicamente e não poderá usá-la em exames e provas.

Para Sancho e Hernandez (2006), é errôneo afirmar que o aluno que não utiliza máquinas sabe fazer conta melhor e com mais consciência do que aquele que as utiliza. Na verdade, falta de habilidade com cálculos é consequência da maneira mecânica e sem significado como ele é ensino e da ausência de um trabalho efetivo com cálculo mental e estimativa.

Com relação aos exames de vestibulares e provas, não se faz necessário efetivamente a utilização da calculadora, tendo em vista que, as questões propostas são para avaliar se o estudante de fato domina as habilidades e competências ali pretendidas.

Vale mencionar que, na maioria das universidades, faz-se o uso constante da calculadora para operações diversas como base do cálculo mental que reside no conhecimento das operações e no uso adequado de suas propriedades.

2.2 Celulares smartphone, tablets e notebooks no ensino da Matemática em ambiente escolar

O uso da tecnologia nas escolas vem crescendo a cada dia. No entanto, o uso de ferramentas tecnológicas em excesso e de forma errônea pode contribuir para o fracasso de aprendizagem matemática, tendo em vista que, o manuseio delas pode buscar resultados resolvidos que atrapalham o raciocínio dos estudantes.

É de suma importância que aplicativos ou sites, entre outros, a serem usados em sala de aula tenham um acompanhamento por parte dos docentes e estes, devem estar preparados e capacitados para interagir com essas novas tecnologias (SANCHO; HERNANDEZ, 2006).

Celulares smartphones, tablets e notebooks, os alunos já têm posse, podem facilitar a aprendizagem em sala de aula e ainda servir como ferramenta de auxílio ao professor de Matemática utilizando alguns programas como Geogebra, Cinderella, Winplot, Wingeom, entre outros, promovendo no aluno uma participação mais ativa e prazerosa no ambiente escolar, facilitando o ensino. Para tanto, os professores devem estar atualizados e aprimorar as aulas em sala, fazendo uso dessas novas tecnologias em benefício da aprendizagem matemática.

2.3 Jogos Matemáticos

De forma integrada, estudantes e professores passam a trabalhar de forma unida pela busca pelo conhecimento, usando a tecnologia como ferramenta, ressalta-se que o uso de Jogos Matemáticos por meios de softwares utilizados em sala de aula, passou a ser uma das tendências, entretanto, se visa afirmar que os jogos resolvem todos os problemas de aprendizagem dentro da instituição de ensino, mas eles podem dar uma contribuição muito grande tanto para o educando como para o educador.

Na educação matemática os jogos passam a ter o caráter de material de ensino quando considerado provocador de aprendizagem. Os jogos de expressão, interpretação e interiorização de conteúdos, além de desenvolver a inteligência, enriquece a linguagem oral e escrita estimulando o educando a uma participação ativa, criativa e crítica no processo de aprendizagem. Estes não são selecionados por idade, mas sim pela análise crítica do professor após uma leitura feita pelo educando, somente depois disso o professor poderá ajustá-la em sua turma, de acordo com seu contexto; assim os jogos matemáticos podem ser empregados em todos os níveis de ensino.

Segundo Moura (1991), o jogo aproxima-se da matemática via a manipulação em diferentes situações, os jogos matemáticos podem ser usados de forma criativa, desde que o professor procure provocar os alunos para testar diferentes idéias sobre os conteúdos apresentados.

De acordo com os novos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, MEC, 1998, p.47), os jogos representam um extraordinário recurso pedagógico a ser aplicado em sala de aula, tendo em vista que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (MEC, 1998, p.47).

Os jogos promovem a construção do conhecimento cognitivo, físico, social e psicomotor o que corresponde a corresponde a um impulso natural e desafiante, e neste sentido, satisfaz uma necessidade interior do ser humano, pois este apresenta uma tendência lúdica. A atitude de jogar apresenta dois elementos: o prazer e o desafio, o prazer conduz ao desafio, e o desafio ao prazer.

O professor passa a ser um mediador disseminando inúmeras possibilidades na construção do conhecimento, respeitando as diversidades, proporcionando ao aluno maior assimilação do conteúdo abordado.

2.4 Softwares Matemáticos

Segundo Valente (1993), trabalhar a informática passa a propiciar uma verdadeira revolução no processo de ensino-aprendizagem na formação de professores que começam a perceber que pode exercer outras funções além de ser o repassador de conhecimento, como facilitador do aprendizado, com recursos amplamente utilizados em vários setores da sociedade.

Entre tantos softwares matemáticos, são selecionados recursos que comumente estão disponíveis nos softwares instalados nas máquinas e que são de acesso ou distribuição gratuita na internet, de modo que, caso a escola e os estudantes já disponham de acesso aos recursos das TIC's, não haja impedimento para resolver os problemas propostos. Alguns dos softwares matemáticos livres a destacar seriam: *Winmat* que permite construir matrizes e operar com elas; *Winplot* que permite construir gráficos a partir de funções elementares; *Cinderella* que permite a construção em geometria multiplataforma; *Curve Expert* que ajusta curvas em conjunto de pontos no plano; *MatLab* que podem gerar gráficos matemáticos no formato vetorial; *Wingeon* para construções geométricas em duas e três dimensões; *Winarc* um programa com alguns jogos matemáticos; *GeoGebra* um aplicativo de geometria dinâmica, mas permite incorporar gráficos de funções.

Ao longo desse trabalho são estimulados o uso de recursos tecnológicas de modo a oferecer a aprendizagem da Matemática, tendo como ideia utilizar novas mídias e tecnologias educacionais. Entre os softwares citados anteriormente, destaca-se o *Software Geogebra* para elaboração de planos de aula proposto no ensino de Matemática.

2.5 O Software GeoGebra

O software GeoGebra é uma ferramenta que pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem da geometria de maneira dinâmica com a abordagem de vários conteúdos matemáticos, possibilitando o seu uso e vários níveis de ensino, tendo em vista que combina geometria, álgebra, tabela, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema.

Esse software viabiliza a abordagem de assuntos simples e através de suas ferramentas vem a possibilidade de abordagens de conhecimentos mais complexos. São inúmeros os recursos de visualização 2D e 3D, aliados a animação de objetos matemáticos na construção de gráficos de funções, favorecendo ensino da Geometria em ambiente escolar.

De livre acesso, o software GeoGebra vem inovar o ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo estatística, possibilitando aos professores e aos alunos explorar e investigar tais conteúdos na construção de conhecimento matemático. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses.

Ao argumentarem que o GeoGebra é uma tecnologia poderosa para o estudo do comportamento variacional de funções reais (múltiplas representações de funções), autores como Rezende, Pesco e Bortolossi (2012) dizem que:

> No GeoGebra, pontos podem ser criados sobre gráficos de funções de modo que, ao movê-los, eles continuem sempre sobre o gráfico da função. Os valores das coordenadas desses pontos podem ser então recuperados e usados em cálculos ou na criação de outros elementos geométricos (pontos, segmentos e retas). Esse tipo de recurso permite ao usuário estudar (graficamente, algebricamente e numericamente) como, por exemplo, características locais da função (taxas de variação média e instantânea)mudam de acordo com a posição do ponto sobre o gráfico da função (Rezende; Pesco; Bortolossi, 2012, p. 78).

Lieban e Muller (2012, p. 49) comentam que através de atividades com o GeoGebra, podendo criar um ambiente mais propício para a aprendizagem de matemática. No entanto, de acordo com Baldini e Cyrino (2012, p. 162-163), o computador ou a utilização do Geogebra por si só, não garante o sucesso dos processos de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido, é vislumbrado a importância em se discutir aspectos sobre o processo de elaboração de atividades matemáticas baseadas no uso de tecnologias educacionais.

3 Seções Cônicas

As seções cônicas são curvas obtidas pela interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano. Neste capítulo são estudados os tipos de curvas cônicas e suas características principais, além disso, são apresentados algumas de suas aplicações presentes no cotidiano. A princípio é apresentado uma breve introdução histórica sobre as seções cônicas, ou simplesmente, cônicas.

3.1 Contexto histórico: seções cônicas

Ao longo da história são frequentes os casos em que ilustres matemáticos dedicaram uma boa parte de suas vidas a investigar conceitos que aparentemente não possuíam nenhuma utilidade prática, contudo se descobre que tais conceitos possuem uma grande utilidade em outras áreas da ciência. As cônicas são um exemplo dessa situação.

O surgimento e os primeiros estudos das seções cônicas tiveram origem na Grécia antiga, e suas definições primárias surgiram do problema da duplicação dos quadrados. Segundo Pitágoras, era possível construir um novo quadrado com o dobro de área do antecedente, tal duplicação foi considerada como um dos três problemas famosos da antiguidade.

De acordo com Costa (2013), na Grécia Antiga o problema da duplicação dos quadrados tem indícios de surgimento com a insatisfação do Rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho. O resultado da solicitação do rei foi um túmulo oito vezes maior.

Na antiguidade, ainda por volta de 427 A.C, os atenienses na tentativa de sanar a epidemia de uma peste que já teria dizimado um quarto da população de Atenas, teriam que duplicar o altar de Apolo que também tinha o formato de um cubo, o resultado dessa tentativa também foi um altar aumentado em oito vezes o seu volume e não dois, conforme a orientação dos Deuses.

A história relata que esse problema chegou até academia de Platão e foi objeto de estudo e proposta de soluções de Euxodo, Manecmo a segundo alguns relatos do próprio Platão.

As primeiras contribuições efetivas para a propostas de solução dos problemas se deram através de Hipócrates através das médias proporcionais de segmentos. Sobre as contribuições de Hipócrates de Quios:

> Depois da redução de Hipócrates, todas as tentativas de duplicação partiram do princípio: a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta de dados, uma das mais antigas e notáveis demonstrações partiu de Arquitas (viveu em torno de 390 A.C). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toroide de diâmetro inferior zero e um cone circular reto (SEVERIANO, 2017).

Hipócrates de Quios foi um matemático que viveu de 460-380 A.C e sua tentativa de solução foi uma das primeiras propostas, iniciativa essa que deu origem aos primeiros estudos da escola geométrica.

Manecmo é percursor da solução proposta por Hipócrates, ele que era da escola platônica, também buscava uma solução para a duplicação dos cubos e a suas contribuições foram as primeiras definições de cônicas, segundo Lago (2017). Hipócrates e Manecmo, encontraram soluções algébricas e geométricas para a solução do problema dos cubos, que trouxe as primeiras contribuições sobre o tema.

Boa parte do trabalho dos gregos não tem registros claros, a forma com que foram desenvolvidos e registrados por meio de citação do estudo ao trabalho de outros matemáticos. Os registros acerca das descobertas das cônicas passa ainda por Eutocio e Arquimedes, o trabalho relevante de Menecmo, é citado por Eutocio como solução relevante:

> Eutocio continua afirmando que Menecmo encontrou duas soluções: uma pela interseção de um hipérbole, retangular e uma determinada parábola e outra, achando a intersecção de duas parábolas. Proclus também se refere a ele como descobridor das seções cônicas. Para Menecmo cada cônica era obtida de um tipo diferente de cone, logo as cônicas, surgem como tratamento sintético mas fragmentadas, elas só são unificadas com Apolônio (BORDALLO, 2011, p. 3).

Assim segue a primeira parte dos estudos intitulados de cônicas, no entanto, os mais importantes trabalhos criados a respeito delas foram os volumes escritos por Apolônio, o que faz ele ser citado por alguns como o grande geômetra.

Apolônio de Perga em 261 A.C, contemporâneo de Arquimedes, é então responsável pela construção dos materiais mais efetivos conhecido como "tratado sobre cônica", o que então foi desenvolvido em volumes. Sua obra admirável, "As Cônicas", era composta de seis livros dos quais apenas se conhecem os textos dos quatro primeiros que lhe garantiram o título de grande geômetra, destacando-se entre os mais profundos matemáticos gregos.

Aristeu também contribuiu para a construção da descoberta das cônicas com obras citadas como cone acutângulo, seção do cone do ângulo reto e seção do cone obtusângulo. Porém, todos os conteúdos produzidos foram unificados nas obras de Apolônio:

> Até Apolônio, cada cônica era uma seção de plano perpendicular a geratriz de um tipo de cone: a elipse era obtida a partir de cone acutângulo, a parábola de um cone retângulo e a hipérbole de um cone obtusângulo. Apolônio deu, portanto, um grande passo no desenvolvimento das cônicas; em outras palavras, ele as unificou obtendo-as de um mesmo cone, que pode ser qualquer um com seções circulares. Esse grande geômetra tornou as três curvas ainda mais próximas, mas essa visão unificada se perdeu no ensino das cônicas o longo do tempo (BORDALLO, 2011 - p. 3).

A grande descoberta de Apolônio consistia no fato de não ser necessário a realização de cortes dos cones por planos perpendiculares a geratriz, bastava somente variar a inclinação do plano da seção. O cone, segundo ele, não precisava ser reto, poderia ser escaleno ou oblíquo, pois antes de Apolônio as cônicas só eram obtidas segundo o ângulo no vértice do cone se fosse agudo, reto ou obtuso. Responsável também por trocar o cone de uma por duas folhas, a hipérbole é entendida como uma curva de dois ramos até os dias atuais.

Grande parte dos estudos dos gregos se perderam ao longo do tempo, e posteriormente nos séculos seguintes. Claude Mydorge e St. Vicent de Burgues produziram conteúdos de estudos de cada uma das cônicas afim de estudá-las, alguns teoremas gerais e métodos variados. Pierre de Fermat e René Descartes produziram conteúdos que servem de base moderna para o ensino das cônicas. As contribuições mais efetivas a respeito das cônicas, conforme já foram citadas, foram de Hipócrates de Quios, Manecmo e Apolônio de Perga, porém outros matemáticos e estudos modernos contribuiram posteriormente à descoberta dos gregos, como Fermat, Descartes, Girard Desargues e Pascal.

3.2 Aplicações das cônicas

As seções cônicas apresentam muitas práticas presentes no cotidiano em diversas situações. Nessa seção são apresentadas algumas destas aplicações.

- As cônicas têm destaques na Física, na construção de espelhos parabólicos;
- Em Química, no estudo dos átomos, as órbitas dos elétrons em torno do núcleo são elípticas;
- As propriedades refletoras, contribuindo para a construção de lanternas, telescópios, antenas, faróis de navegação, entre outros. Atrelado à propriedade refratora, as aplicações das cônicas ganham força também em óculos de grau, microscópios, lupas, entre outros;
- Em Astronomia, quando Klepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol ocupando um dos focos, conforme a Figura 3.1:

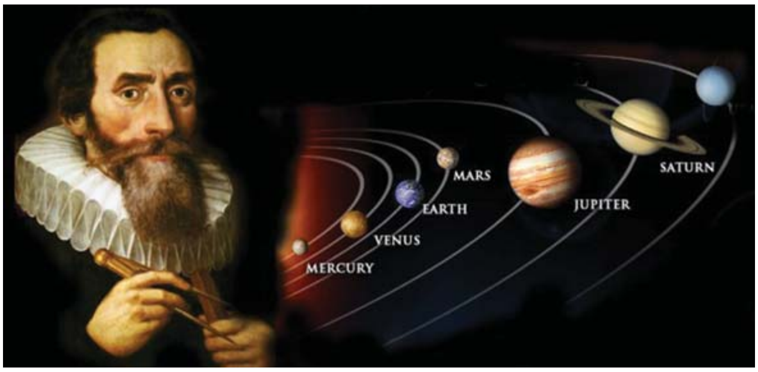


Figura 3.1: Órbitas elípticas dos planetas
Fonte: Garcia (2012)

- Em engenharia, na construção de pontes de suspensão parabólicas, como a ponte Hercílio Luz que está localizada em Florianópolis, Santa Catarina, sendo a maior ponte pênsil do Brasil, como ilustra a Figura 3.2;

Figura 3.2: Ponte Hercílio Luz
Fonte: Vieira (2016)

- Sistemas de navegação aérea e marítima como: sinais de rádio, frequência de ondas;

- Construção civil, utilizando as propriedades de elipsoide;

- Na tecnologia atual, através dos televisores que podem fazer transmissão "ao vivo"por meio de sinais de transmissão de pequenas antenas parabólicas em seus telhados e terraços. Isso é fruto da atitude dos americanos ao colocar em órbita um satélite de comunicação, chamado Telstar, vindo a ser aprimorado ao longo dos anos por outros técnicos de comunicação, levando ao indivíduo comum o acesso a sinais de televisão;

- Na arquitetura, as curvas hiperbólicas também são destaque, como exemplo é possível notar a catedral de Brasília projetada por Oscar Niemeyer e o planetário do Saint Luis Science Center, nos Estados Unidos conforme a Figura 3.3.

Figura 3.3: Catedral de Brasília e o Planetário do Saint Luis Science Center
Fonte: Sommerfeld (2013)

3.3 Cônicas

Considere duas retas e e g concorrentes e não perpendiculares entre si com ponto comum O. Conservando a reta e fixa e mantendo constante o ângulo entre as retas, resulta que, a reta g gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O conforme a Figura 3.4. A reta g é chamada *geratriz* da superfície cônica caracterizada pela concorrência de todas as geratrizes num ponto, e a reta e, eixo de superfície.

Denomina-se *seção cônica* ou *cônica*, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

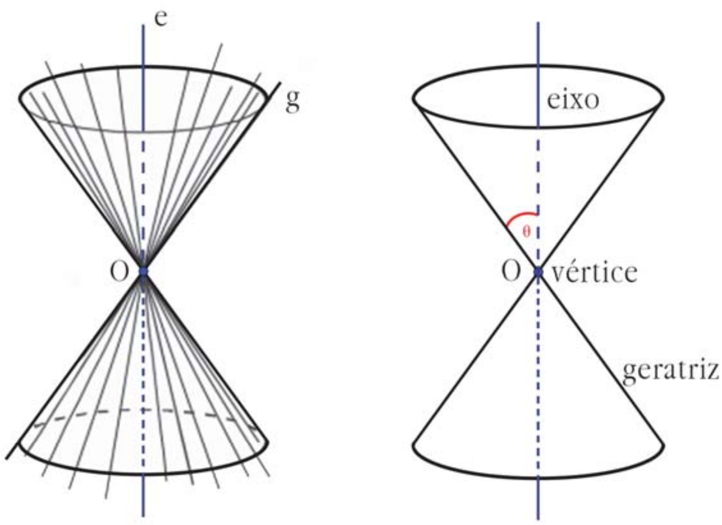


Figura 3.4: Cone circular obtido pela rotação de uma geratriz em torno de seu eixo

Uma seção cônica é uma curva obtida pela interseção de um cone (mais precisamente, uma superfície cônica circular) com um plano. Os três tipos de cônicas são a elipse, a hipérbole e a parábola. A circunferência é um caso especial da elipse, e existem casos degenerados como um par de linhas em interseção, um ponto, uma linha dupla, etc.

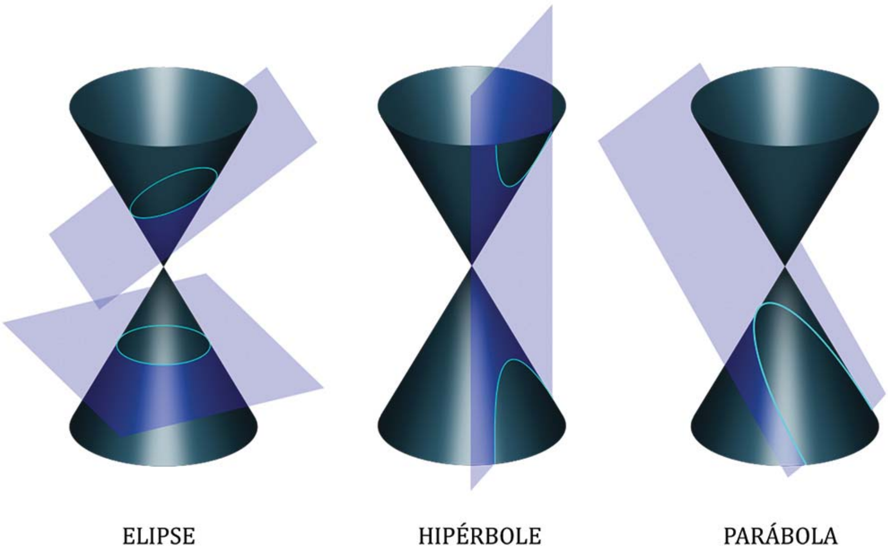


Figura 3.5: Intersecções de um plano com diferentes rotações no cone duplo
Fonte: Wikimedia (2018)

As seções cônicas se diferenciam em decorrência do ângulo com que o plano secante corta o cone. Veja:

Características:

- **Elipse:** se o plano corta o cone de maneira oblíqua ao seu eixo central de maneira a atravessar o cone, cortando todas geratrizes, então, a seção formada é uma elipse. Já a **circunferência**, caso especial da elipse, o plano corta o cone de maneira perpendicular ao seu eixo central;
- **Hipérbole:** se o plano corta o cone de maneira a atravessar suas duas folhas, seja formando um ângulo oblíquo ou seja paralelo ao eixo central do cone, então, a seção formada é uma hipérbole;
- **Parábola:** se o plano corta o cone de maneira oblíqua ao seu eixo central e paralelo a uma geratriz, então, a seção formada é uma parábola.

As seções cônicas apresentadas na Figura 3.5 devem ser consideradas como ilimitadas, ou seja, constituídas de duas folhas que se estendem indefinidamente em ambos os sentidos. E ainda, se cada um dos planos secantes dessa figura forem transladados paralelamente até chegarem ao vértice O, são obtidas as respectivas cônicas *degeneradas*: uma reta, um ponto ou duas retas concorrentes.

Definição 3.1. *Fixado um sistema ortogonal de coordenadas, chama-se* ***cônica*** *o lugar geométrico dos pontos* $X = (x, y)$ *que satisfazem uma equação de segundo grau* $g(x, y) = 0$*, em que*

$$g(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3.1}$$

onde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$*, sendo* A, B *e* C *não simultaneamente nulos.*

- Se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$, a Equação 3.1 define uma **elipse** ou **circunferência**, ou ainda, formas degeneradas: vazio, ponto;
- Se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, a Equação 3.1 define uma **parábola**, ou ainda, formas degeneradas: vazio, reta, duas retas paralelas;
- Se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$, a Equação 3.1 define uma **hipérbole**, ou ainda, formas degeneradas: duas retas concorrentes.

Cônicas degeneradas

Quando o plano intercepta pelo vértice, são geradas o que é denominado cônicas degeneradas, como ilustra a Figura 3.6. Tais que:

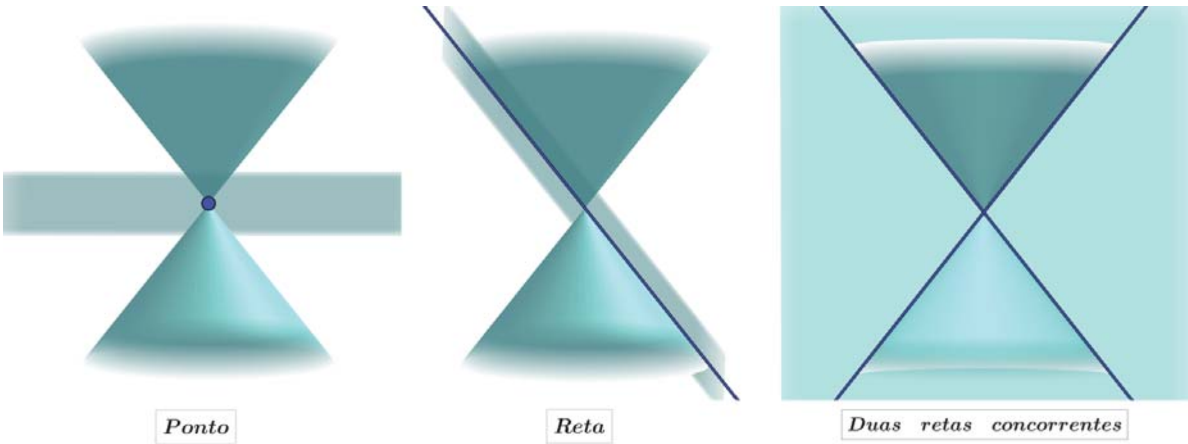


Figura 3.6: Cônicas degeneradas

- Se o plano passa pelo vértice paralelamente a base, a interseção resultante dá lugar a um **ponto**;
- Se o plano passa pelo vértice paralelamente a geratriz do cone, então a interseção resultante dá lugar a uma **reta**;
- Se o plano passa pelo vértice perpendicularmente a base, logo a interseção resultante dá lugar a **duas retas concorrentes no vértice**.

A condição sobre o grau significa que ao menos um dos números A, B, C é diferente de zero. Sendo assim:

- $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é uma **equação de cônica**;
- Ax^2, Bxy e Cy^2 são **termos quadráticos**, e para distinguir Bxy dos outros dois, refere-se a ele como **termo quadrático misto**;
- Dx e Ey são os **termos lineares**;
- F é o **termo independente**.

Exemplo 3.1. Dada a equação cônica a seguir, classifique-as:

(a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$;

Resolução:

Considerando os valores de $A = 3, B = 2, C = 3, D = E = 0$ e $F = -4$, obtém-se:

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0 \Longleftrightarrow \Delta = 2^2 - 4.3.3 = -32 < 0 \Longrightarrow \text{Elipse.}$$

(b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

Resolução:

Considerando os valores de $A = 1, B = 0, C = 1, D = E = 0$ e $F = 1$, obtém-se:

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0 \Longleftrightarrow \Delta = 0^2 - 4.1.1 = -4 < 0 \Longrightarrow \text{Elipse.}$$

No entanto, a equação implica que $x^2 + y^2 = -1$, o que é impossível. Logo, não existe ponto $P = (x, y)$ que satisfaz a equação, daí o conjunto de pontos é **vazio**: caso de cônica degenerado.

(c) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$;

Resolução:

Considerando os valores de $A = 1, B = 0, C = 1, D = -2, E = -6$ e $F = 10$, obtém-se:

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0 \Longleftrightarrow \Delta = 0^2 - 4.1.1 = -4 \Longrightarrow \text{Elipse.}$$

Mas o único ponto que satisfaz a equação de modo que seja nula é o ponto $P = (1, 3)$, portanto é outro caso degenerado de cônica.

(d) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + 3y - 6 = 0$.

Resolução:

Considerando os valores de $A = 2, B = -4, C = 2, D = -1, E = 3$ e $F = -6$, obtém-se:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 \Longleftrightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.2.2 = 0 \Longrightarrow \text{Parábola ?}$$

Como podemos ter certeza que é uma parábola?

Para saber com certeza somente achando uma base (autovetores) na qual a cônica possa ser colocada numa forma mais simples, ou seja, forma reduzida.

Usando as transformações de rotação e translação, é possível encontrar eixos adequados que reduzem a equação geral de uma cônica a sua forma reduzida.

3.4 Translação de eixos

Noção intuitiva

Considere o plano cartesiano ilustrado na Figura 3.7, com x indicando o eixo na horizontal, y no eixo vertical e O representa a origem desse sistema de eixos.

Deseja-se transladar ("deslocar") o plano cartesiano XOY para uma outra posição, criando assim um novo plano cartesiano denotado de $x'O'y'$, de tal modo que os novos eixos x' e y' são paralelos aos eixos x e y, respectivamente.

Considere que as coordenadas de O' em xOy seja (x_0, y_0) e seja $P = (x', y')$ em $x'O'y'$. Dessa forma, as coordenadas de P em xOy serão $(x + x_0, y + y_0)$, conforme a Figura 3.7.

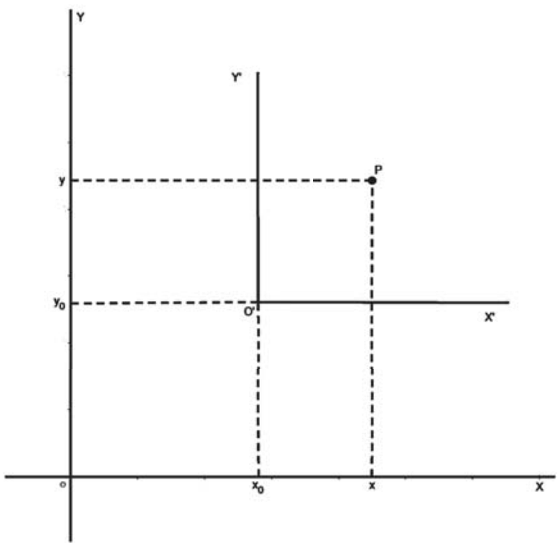


Figura 3.7: Translação de sistema

Definição 3.2. *Considere o plano cartesiano xOy em um ponto $O' = (x_0, y_0)$ desse plano. Agora, considere o plano cartesiano $x'O'y'$, de tal modo que os eixos x' e y' são paralelos aos eixos x e y, respectivamente. Se um ponto P em $x'O'y'$ tem coordenadas (x', y') e esse mesmo ponto em xOy tem coordenadas (x, y), então:*

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

3.5 Rotação de eixos

Noção intuitiva

Considere o plano cartesiano ilustrado na Figura 3.8, com x indicando o eixo na horizontal, y no eixo vertical e O representa a origem desse sistema de eixos.

Deseja-se rotacionar no sentido anti-horário o plano cartesiano xOy para uma outra posição, criando assim um novo plano cartesiano denotado de $x'O'y'$, de tal modo que esse novo plano cartesiano possui a mesma origem do anterior.

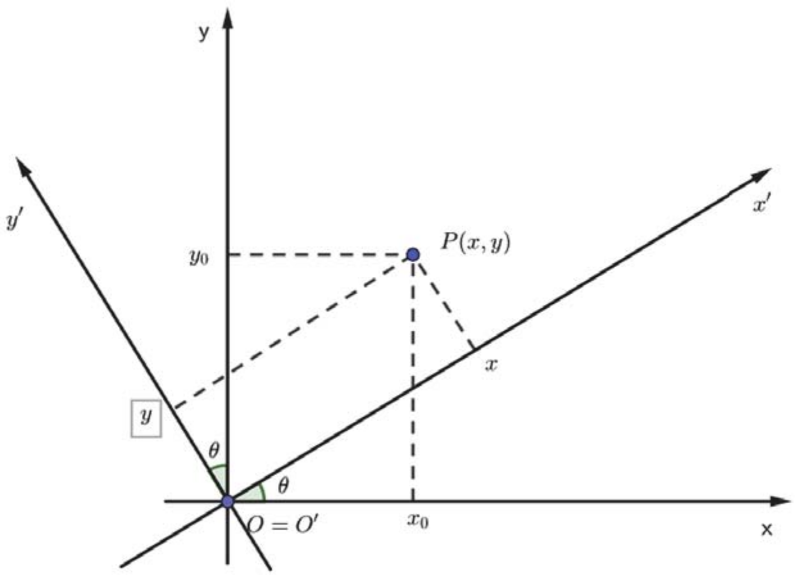


Figura 3.8: Rotação de eixos

Considere que as coordenadas de P em xOy seja (x_0, y_0) e as coordenadas de P em $x'O'y'$ seja (x, y) e dessa forma, é possível relacionar as coordenadas de P em xOy e em $x'O'y'$.

Definição 3.3. *Considere os planos cartesianos xOy e $x'O'y'$, de tal modo que $x'O'y'$ é obtido de xOy através de sua rotação no sentido anti-horário por um ângulo θ.*

Se um ponto P em $x'O'y'$ tem coordenadas (x, y) e esse mesmo ponto em xOy tem coordenadas (x_0, y_0), então:

$$\begin{cases} x_0 = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y_0 = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = x_0\cos\theta + y_0\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = -x_0\,\mathrm{sen}\,\theta + y_0\cos\theta \end{cases}$$

Logo, a rotação de um plano cartesiano é útil na simplificação da equação de uma cônica.

3.6 Rotação de cônicas

Equação quadrática pode ser representada numa equação em cima de coordenadas cartesianas nas variáveis x e y dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Podendo sofrer mudança de sistema de coordenadas através de uma rotação dada por:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Substituindo o sistema de coordenadas anterior na Equação 3.1, obtém-se:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \tag{3.2}$$

É importante mencionar que, como os termos da Equação 3.1 são lineares, ao fazer a substituição do sistema de coordenadas, a nova equação obtida 3.2 manterá o mesmo grau de equação e, portanto, terá novamente uma equação com duas variáveis x' e y', e com coeficientes diferentes.

Teorema 3.1. *Se $B \neq 0$, a Equação $g(x, y)$ dada por:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

podendo ser transformada na Equação $g'(x, y)$ 3.2:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

onde A' e C' não são ambos nulos, por uma rotação de eixos de ângulo θ para o qual

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}, \tag{3.3}$$

e satisfazem 3.6.

Demonstração:

Dada a Equação quadrática 3.1, ao substituir o sistema de coordenadas, obtém-se a Equação 3.2. Veja:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Substituindo o sistema, obtém-se:

$$\begin{aligned} A(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + \\ +C(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta) + \\ +E(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + F = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} A((x')^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\operatorname{sen}\theta + (y')^2\operatorname{sen}^2\theta) + \\ B(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + \\ +C(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta) + \\ +E(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + F = 0. \end{aligned}$$

Em seguida, permitindo que a equação anterior fique com aparência da Equação 3.1. Logo,

$$\begin{aligned} (x')^2(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta) + \\ +x'y'(-2A\cos\theta\operatorname{sen}\theta + B\cos^2\theta - B\operatorname{sen}^2\theta + 2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + \\ +(y')^2(A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta) + \\ +x'(D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta) + y'(-D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta) + F' = 0. \end{aligned}$$

Considerando que,

$$\begin{aligned} B' = -2A\cos\theta\operatorname{sen}\theta + B\cos^2\theta - B\operatorname{sen}^2\theta + 2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta \iff \\ B' = (C-A)(2\cos\theta\operatorname{sen}\theta) + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \iff \\ B' = (C-A)\operatorname{sen}2\theta + B\cos 2\theta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto,

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

onde:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ B' = (C-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta \\ C' = A\,\mathrm{sen}^2\,\theta - B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta \\ E' = (-D\,\mathrm{sen}\,\theta + E\cos\theta \\ F' = F \end{cases}$$

tendo em vista que F é invariante por rotação.

Analisando ainda o coeficiente B', é fato que:

$$B' = 0 \iff$$
$$B\cos 2\theta = (A-C)\,\mathrm{sen}\,2\theta. \tag{3.5}$$

Ao escolher um ângulo θ de tal maneira que a Equação 3.5 aconteça, logo $B' = 0$, e então a Equação 3.1 não terá o termo $x'y'$, portanto ficará numa forma mais fácil de estudar. Então é preciso analisar dois casos:

1^0 **Caso:** Se $A = C$, na Equação 3.5, o lado direito da igualdade se anulará, por sua vez, a expressão do lado esquerdo da equação se iguala a zero. Para tanto,

$$B\cos 2\theta = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{4}.$$

2^0 **Caso:** Se $A \neq C$, desenvolvendo 3.5, tem-se:

$$B\cos 2\theta = (A-C)\,\mathrm{sen}\,2\theta \iff \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{B}{A-C} \iff$$
$$\iff \mathrm{tg}\,2\theta = \frac{B}{A-C}. \tag{3.6}$$

E, portanto,

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{4}, & \text{se} \quad A = C, \\ \mathrm{tg}\,2\theta = \dfrac{B}{A-C}, & \text{se} \quad A \neq C. \end{cases}$$

Exemplo 3.2. Determine as equações de mudança de coordenadas que transformam a equação

$$4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1,$$

em uma equação desprovida do termo $x'y'$.

Resolução:

Comparando a equação dada com a Equação 3.1, então $A = 4, B = 4$ e $C = 1$, ou seja, $A \neq C$, então pela Equação 3.6 obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{4}{3} \Longrightarrow \\ \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} &= \frac{4}{3} \Longrightarrow \\ 4 - 4\operatorname{tg}^2\theta &= 6\operatorname{tg}\theta \Longrightarrow \\ 4\operatorname{tg}^2\theta + 6\operatorname{tg}\theta - 4 &= 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde a Equação 3.7 é do 2^0 grau, sendo válido aplicar a fórmula de Báskara.

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4.a.c = 6^2 - 4.4.(-4) &= 36 + 64 = 100 \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{8} \Longrightarrow \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{-6 \pm 10}{8} \Longrightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{tg}_1\theta = & \frac{1}{2} & \text{convém;} \\ \operatorname{tg}_2\theta = & -2 & \text{não convém.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Então, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$, tendo em vista que $\theta < 90^0$. O que implica que,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} &\Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Considerando a Relação Fundamental da Trigonometria, temos que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \tag{3.9}$$

e substituindo a Equação 3.8, obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta = 1 \Longrightarrow 5\operatorname{sen}^2\theta &= 1 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \Longrightarrow \cos\theta &= \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Pela equação de mudança de coordenadas, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x'\frac{2\sqrt{5}}{5} - y'\frac{\sqrt{5}}{5}; \\ y = x'\frac{\sqrt{5}}{5} + y'\frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{array} \right.$$

3.7 Elipse

A elipse é uma curva cônica resultante da interseção de uma superfície cônica e um plano de ângulo fixo, ou seja, ao seccionar um cone com um plano que não passa pelo vértice e que cortar todas as geratrizes do cone de folhas folhas, a seção formada é uma elipse.

É possível desenhar uma elipse com o auxílio de um barbante ou linha preso a dois pregos ou alfinetes fixados em dois pontos, cujo seu comprimento deve ser maior que a distância entre os pregos ou alfinetes fixados. Com um lápis ou estaca, sustenta-se o barbante ou linha de modo a esticá-lo sobre sobre o plano ou mesa, e traça-se uma curva ao redor dos dois pregos mantendo o barbante sempre esticado, como se verifica na Figura 3.9.

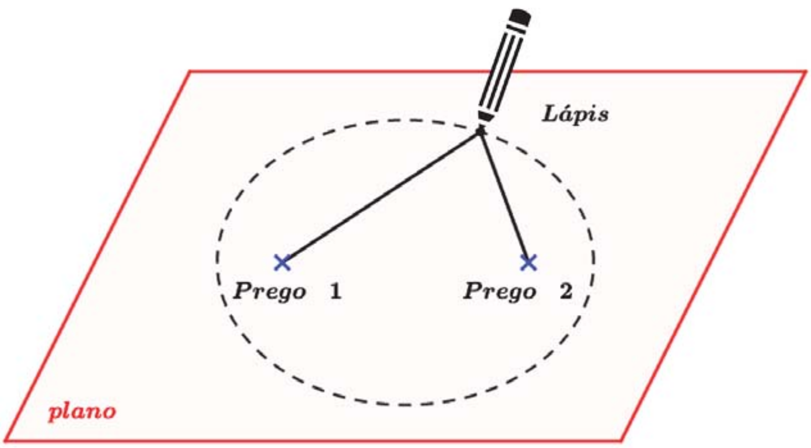


Figura 3.9: Desenhando uma elipse

Logo, o conjunto de todos os pontos pertencentes a essa curva é uma elipse, cujos seus focos são os pontos onde os pregos são fixados.

Durante aproximadamente 18 séculos, não houve estudos detalhados de aplicação das cônicas no mundo físico. No entanto, pesquisas de físicos, astrônomos, projetistas foram mostrando aplicações do estudo de Apolônio presentes na atualidade.

A elipse possui uma importante aplicação na Astronomia. Segundo a teoria comprovada por Johannes Kepler (1571-1630), grande astrônomo alemão, os planetas descrevem movimentos elípticos em órbita do sol, estando localizados em um dos focos da elipse, como mostra a Figura 3.1.

Definição 3.4. *Uma elipse é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano cuja soma das distâncias a partir de dois pontos fixos (focos) é constante.*

Definição 3.5. *Uma elipse é o "locus geométrico"de um conjunto de pontos no plano cuja soma das distâncias a partir de dois pontos fixos F_1 e F_2 é a constante $2a$ sendo $2a > 2c$, com $2c$ a distância entres eles.*

É conveniente escolher um sistema de eixos tal que os focos tenham coordenadas $F = (c, 0)$ e $F‘ = (-c, 0)$. A distancia $2c$ entre os focos é chamada de distância focal da elipse. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a elipse quando

$$\text{Elipse} = \{P \in \pi \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) \mid = 2a\} \tag{3.10}$$

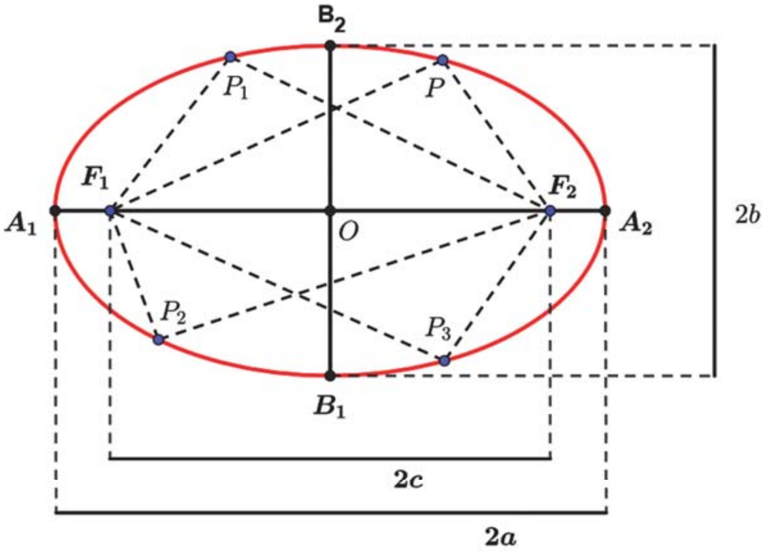


Figura 3.10: Elementos fundamentais associados à elipse

Considerando a Figura 3.10, logo:

$$
\begin{aligned}
PF_1 + PF_2 &= 2a \\
P_1F_1 + P_1F_2 &= 2a \\
P_2F_1 + P_2F_2 &= 2a \\
P_3F_1 + P_3F_2 &= 2a
\end{aligned}
$$

com P, P_1, P_2, P_3 pertencentes à elipse.

3.7.1 Elementos principais da elipse

- $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0) \longrightarrow$ focos;
- $O =$ Ponto Médio $(F_1F_2) \longrightarrow$ centro;
- $A_1A_2 = 2a \longrightarrow$ medida do eixo maior;

- $B_1B_2 = 2b \longrightarrow$ medida do eixo menor;
- $A_1 = (-a, 0); A_2 = (a, 0); B_1 = (-b, 0); B_2 = (b, 0) \longrightarrow$ vértices;
- $2c \longrightarrow$ distância focal;
- $\frac{c}{a} \longrightarrow$ excentricidade;
- $a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow$ relação fundamental.

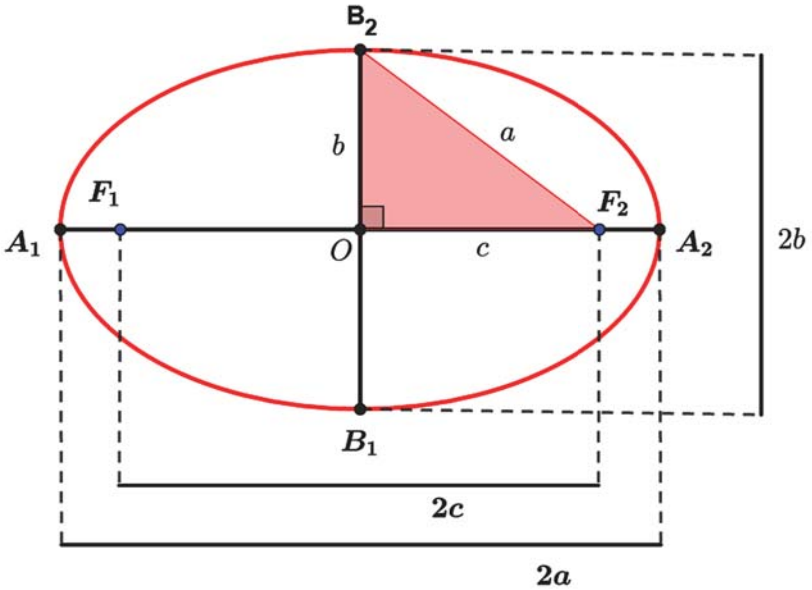


Figura 3.11: Relação fundamental da elipse

Note que, dada a Figura 3.11, do triângulo retângulo B_2OF_2 hachurado em destaque, é possível aplicar o **Teorema de Pitágoras** que diz que *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*, sendo b e c os catetos e a a hipotenusa e, portanto, é válida a relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Observações:

- Os eixos **maior** e **menor** são denominados eixos de simetria;
- **Eixo maior**: contém os focos e os seus extremos pertencem a elipse;
- Os eixos de simetria são perpendiculares;
- Os vértices da elipse são os extremos dos eixos maior e menor;
- O centro da elipse é dado pela interseção dos eixos de simetria, que também se localiza em seus pontos médios.

3.7.2 Excentricidade da elipse

A excentricidade de uma elipse, indicada por e, é um número real positivo $e > 0$ definida como o quociente entre a *metade da distância focal* e a *metade da medida do eixo maior* da elipse. Logo,

$$e = \frac{c}{a}. \tag{3.11}$$

Como $a > c > 0$, temos que a excentricidade da uma elipse é um número compreendido entre 0 e 1, tal que $0 < e < 1$.

Observando a Figura 3.12 a seguir:

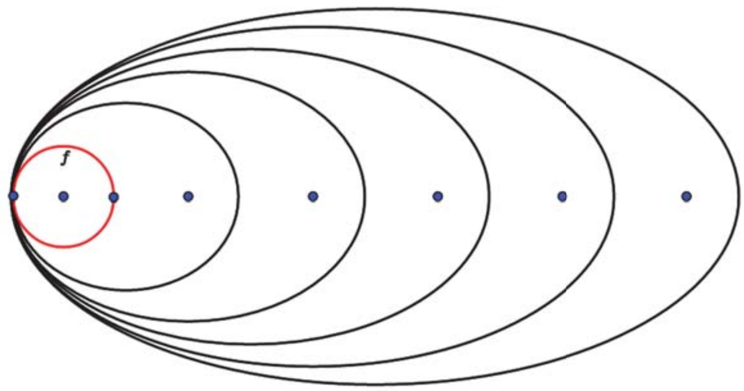


Figura 3.12: Relação da excentricidade com a forma da elipse

Portanto, quanto maior for a distância focal de uma elipse, mais a excentricidade se aproxima do valor 1, mais alongada ("achatada") é a curva e, portanto, mais se afasta da forma da circunferência. Analogamente, quanto menor for a distância focal de uma elipse, mais a excentricidade se aproxima do valor 0, ou seja, mais a elipse terá aparência de uma circunferência.

Finalmente, se o eixo maior da elipse for igual ao eixo menor, então a excentricidade é nula, ou seja, $e = 0$, obtendo uma circunferência: caso especial da elipse. Nesse caso, $a = b$, logo $c = 0$, ou seja, a distância focal é nula e os dois focos estão coincidentes com o centro da circunferência, conforme nota-se a circunferência f na Figura 3.12.

3.7.3 Equação reduzida da elipse

Dado um sistema cartesiano ortogonal tal que $A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$. Os focos da elipse são os pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Utilizando a equação da distância entre dois pontos, é possível encontrar a equação reduzida da elipse a partir de sua definição.

Seja:

$$\begin{aligned} d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \Longrightarrow \\ \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \end{aligned}$$

Extraindo as raízes e desenvolvendo os binômios quadrados, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 \Longrightarrow \\ (x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 2.2a.\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2 \Longrightarrow \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -2cx = 4a^2 - 4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 2cx \Longrightarrow \\ 4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4(a^2+cx). \end{aligned}$$

Simplificando e elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, então:

$$\begin{aligned} a.\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx \Longrightarrow \\ (a.\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (a^2+cx)^2 \Longrightarrow \\ a^2.(x+c)^2+y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2. \end{aligned}$$

Isolando $(a^2 - c^2)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} a^2x^2 + a^2.2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Longrightarrow \\ (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \end{aligned}$$

Considerando $a^2 = b^2 + c^2$, o que implica que $a^2 - c^2 = b^2$. Então,

$$\begin{aligned} (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \Longrightarrow \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por a^2b^2, portanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.12}$$

é a forma mais comum de escrever a equação reduzida da elipse com eixo maior contido em x e centro $C(0,0)$ conforme a Figura 3.13:

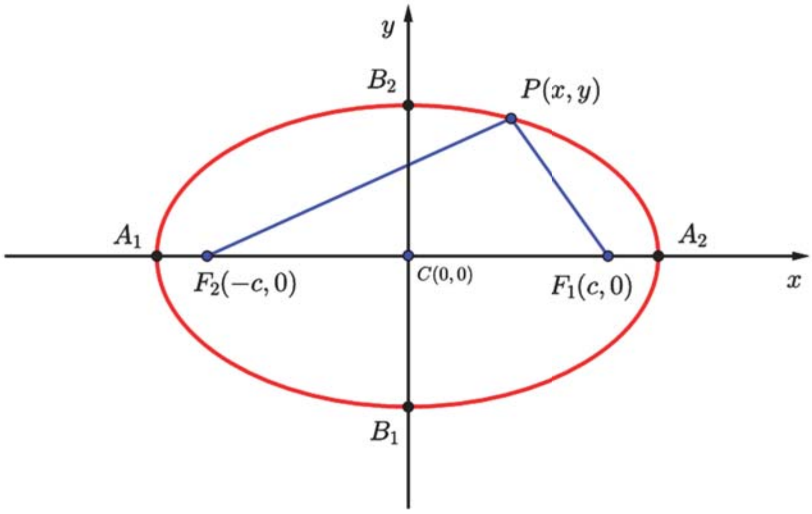


Figura 3.13: Elipse com eixo maior A_1A_2 contido no eixo das abscissas

Outros Casos:

- Analogamente, se a elipse apresenta $A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$, ou seja, se a elipse tem centro $C = (x_0, y_0)$, sendo x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, e o eixo maior está contido em x, tem-se:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \tag{3.13}$$

que é, neste caso, a equação reduzida da elipse com eixo maior contido em y, como ilustra a Figura 3.14:

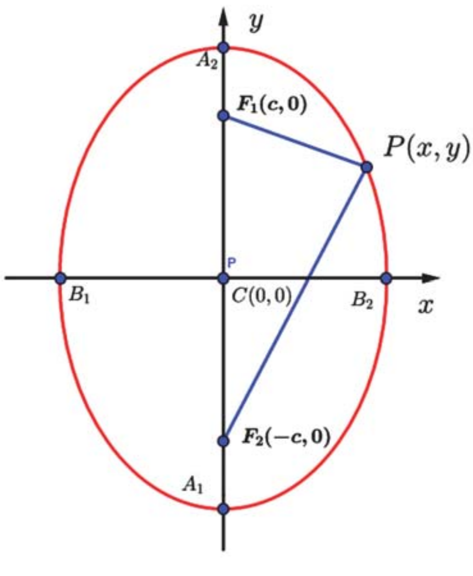


Figura 3.14: Elipse com eixo maior A_1A_2 contido no eixo das ordenadas

- Se a elipse tem centro $C = (x_0, y_0)$, sendo x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, e o eixo maior está contido em x, tem-se:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.14}$$

que pode ser obtida substituindo os pontos de focos dada pela Equação 3.12 por $F_1 = (x_0 + c, y_0)$, $F_2 = (x_0 - c, y_0)$.

- Quando o centro da elipse é $C = (x_0, y_0)$ com x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, e o eixo maior está contido em y, tem-se:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1. \tag{3.15}$$

Neste caso, $F_1 = (x_0, y_0 + c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 - c)$.

Logo, se o eixo focal for paralelo a um dos eixos coordenados de um sistema cartesiano preestabelecido, então a equação da elipse é dada a Equação 3.14 ou 3.15, conforme o eixo focal é paralelo a $0x$ ou a $0y$, respectivamente, com centro de elipse em $C'(x_0, y_0)$, conforme a Figura 3.15:

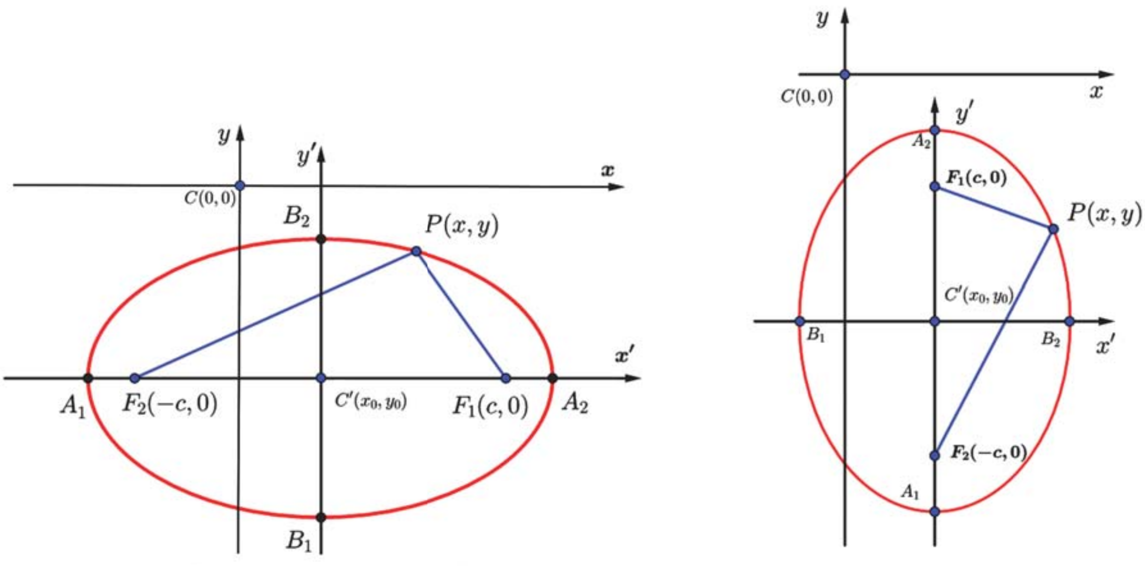


Figura 3.15: Elipses transladadas e suas equações

- Quando o centro da elipse é $C = (x_0, y_0)$ com x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, e os eixos não são paralelos aos eixos coordenados, a existência do termo em xy na equação de uma elipse indica que o eixos da elipse são oblíquos aos eixos cartesianos, nesse caso faz-se uso de sua rotação e translação.

3.7.4 Equações paramétricas da elipse

Consideremos a elipse de Equação 3.12. Traçando uma circunferência de centro O e raio igual ao semieixo maior da elipse conforme a Figura 3.16.

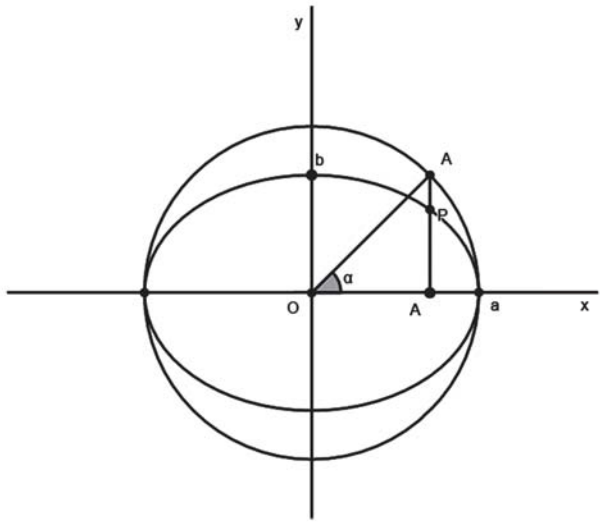


Figura 3.16: Circunferência e elipse de mesmo centro

Seja $P = (x, y)$ um ponto da elipse. A reta que passa por P e é paralela ao eixo y, resulta na interseção de uma circunferência em A e raio AO que determina com o eixo x um ângulo θ.

Pelo triângulo $A'AO$, tem-se:

$$\cos\theta = \frac{OA'}{OA} \Longrightarrow$$
$$x = a\cos\theta. \tag{3.16}$$

Substituindo x na Equação 3.12, obtém-se:

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.17}$$

Por esse motivo, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Para cada valor de θ corresponde somente um ponto P da elipse e, quando θ varia de 0 a 2π, o ponto P parte de $(a, 0)$, descrevendo a elipse no sentido anti-horário.

Portanto, das equações anteriores, conclui-se que as equações paramétricas da elipse de Equação 3.12 e parâmetro θ, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é o sistema:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Observações:

1. Quando o eixo maior da elipse estiver contido em x, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a equação paramétrica é dada por:
$$\begin{cases} x = b\cos\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

2. Quando o centro for $C(x_0, y_0)$ e o eixo maior da elipse estiver paralelo ao eixo de x, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tem-se que a equação paramétrica pela translação de eixos é dada por:
$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - x_0 = a\cos\theta \\ y - y_0 = b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

3. Quando o centro for $C(x_0, y_0)$ e o eixo maior da elipse estiver paralelo ao eixo de y, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tem-se que a equação paramétrica é dada por:
$$\begin{cases} x = x_0 + b\cos\theta \\ y = y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

4. Quando as equações são dadas na forma paramétrica e deseja-se a elipse na forma padrão, deve-se considerar a Relação Fundamental da Trigonometria dada por:
$$\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1. \tag{3.18}$$

Exemplo 3.3. Dar as medidas dos eixos e a distância focal da elipse da equação $x^2 + 16y^2 = 4$.

Resolução:
Temos que:
$$\begin{aligned} x^2 + 16y^2 = 4 &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1 &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2$, e $b^2 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

Finalmente $c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow c^2 = 4 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$.

E, portanto, $c = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Pode-se verificar esses valores por meio do esboço da equação da elipse no Geogebra conforme a Figura 3.17:

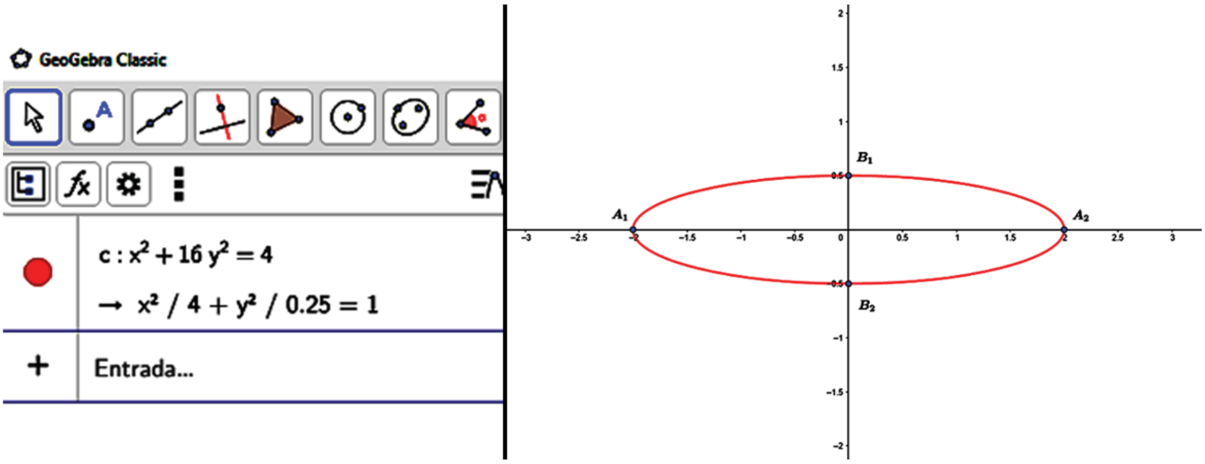


Figura 3.17: Construção da elipse do exemplo dado

Logo, a medida do eixo maior: $2a = 4$, a medida do eixo menor: $2b = 1$ e a distância focal: $2c = \sqrt{15}$.

3.8 Circunferência: caso particular da elipse

Se em determinada elipse os parâmetros a e b forem iguais, então ela representa uma circunferência conforme a Figura 3.18, cuja excentricidade é nula pelo fato de seus focos coincidirem com o centro e o raio ser exatamente seus semi-eixos maior e menor. Nessa seção são estudadas algumas de suas propriedades e características.

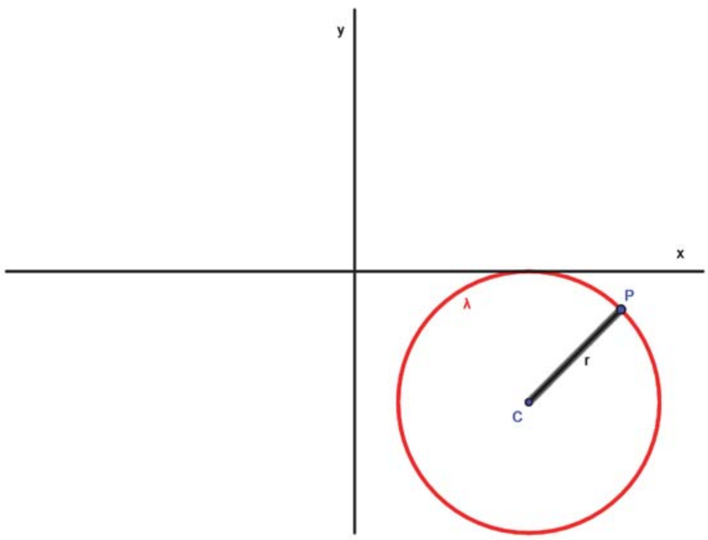


Figura 3.18: Circunferência: caso particular da Elipse

Definição 3.6. *Dados um ponto C, pertencente a um plano π, e uma distância r não nula, chama-se circunferência o conjunto de π que estão à distância r do ponto C.*

$$Circunferência = \{P \in \pi \mid d(P, C) = r\}. \tag{3.19}$$

Considere a circunferência λ de centro $C = (a, b)$ e raio r. Um ponto $P = (x, y) \in$ a λ se, e somente se, a distância $d(P, C)$ é igual ao raio r :

$$P \in \lambda \Longleftrightarrow d(P, C) = r.$$

Chama-se equação da circunferência aquela que é satisfeita exclusivamente pelos pontos $P = (x, y)$ pertencentes à curva.

Portanto, tem-se:

$$P \in \lambda \Longleftrightarrow d(P, C) = r \Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

e daí segue a **equação reduzida da circunferência** dada por:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{3.20}$$

Desenvolvendo a Equação Reduzida 3.20, obtém:

$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = r^2,$$

isto é,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0, \tag{3.21}$$

chamada **equação geral da circunferência**.

3.8.1 Elementos principais da circunferência

Dada uma Equação 3.1 do 2^0 grau, então:

- Representará uma circunferência se x^2 e y^2 tiverem coeficientes iguais, se não existir termo misto xy e se $r^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$ for real e positivo;
- As coordenadas do centro da circunferência serão $(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2A})$;
- O raio da circunferência será igual a $\dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2.|A|}$;
- Se uma das três condições necessárias $A = B \neq 0, C = 0, D^2 + E^2 - 4AF > 0$ não for satisfeita, a Equação 3.1 não representa circunferência mas pode representar uma cônica;

- Quando a equação de uma circunferência apresenta x^2 e y^2 com coeficientes unitários ($A = B = 1$), as coordenadas do centro e o raio podem ser calculadas da seguinte forma:
$$a = -\frac{D}{2}, b = \frac{E}{2}, r = \sqrt{a^2 + b^2 - F};$$

- Um outro processo prático que pode ser utilizado quando $A = B = 1$ para obter o centro e o raio de uma circunferência é passar a equação da forma reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, em que a leitura de a, b, r é imediata.

3.8.2 Excentricidade da circunferência

Pelo caso notável de elipse, então: $a^2 = b^2 + c^2$. Se $a = b$, então $a^2 = b^2$, o que implica que: $a^2 = b^2 + c^2 \iff a^2 - b^2 = c^2 \iff c = 0$.

Segue que,
$$e = \frac{c}{a} = \frac{0}{a} = 0.$$

O que nos diz que, quando os eixos de uma elipse tem medidas iguais, logo a distância focal é nula e a excentricidade é nula. Finalmente, conclui-se que, se $e = 0$, então uma elipse degenerada: **a circunferência**.

3.9 Orientações diferentes da circunferência

Uma circunferência de centro C e raio r, pode ser localizada ao longo dos quatro quadrantes do plano cartesiano, com o ponto P pertencente a circunferência λ, tendo em vista que:

- No 1^0 quadrante, os pontos no centro da circunferência possuem abscissa e ordenada positiva, cuja a equação reduzida da circunferência resulta na forma: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$;

- No 2^0 quadrante, os pontos no centro da circunferência possuem abscissa negativa e ordenada positiva, cuja a equação reduzida da circunferência resulta na forma: $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = r^2$;

- No 3^0 quadrante, os pontos no centro da circunferência possuem abscissa e ordenada negativa, cuja a equação reduzida da circunferência resulta na forma: $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = r^2$;

- No 4^0 quadrante, os pontos no centro da circunferência possuem abscissa positiva e ordenada negativa, cuja a equação reduzida da circunferência resulta na forma: $(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 = r^2$.

Tais orientações da circunferência localizada nos quatro quadrantes se verifica na Figura 3.19:

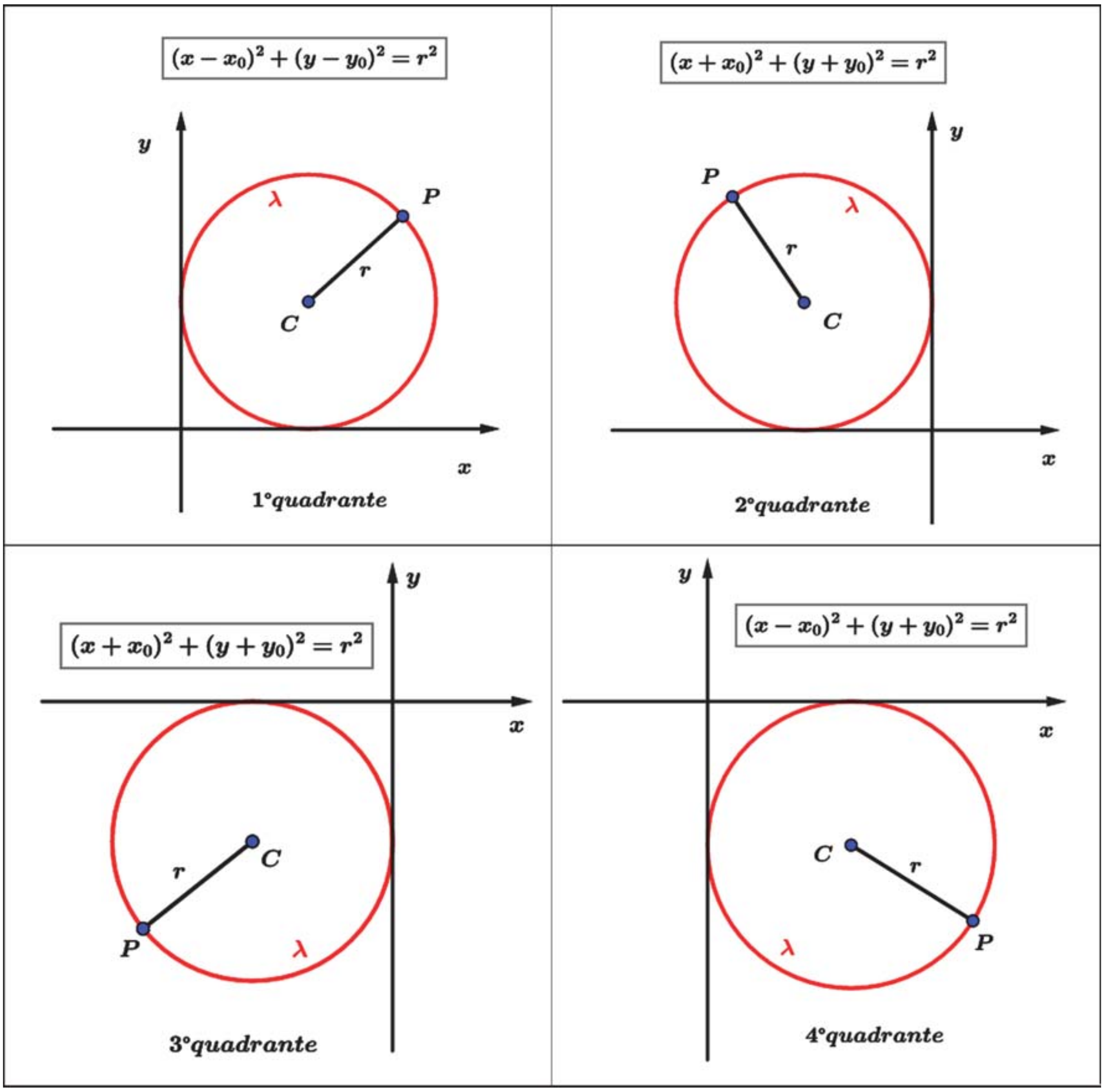


Figura 3.19: Circunferência: localização nos quatro quadrantes

3.9.1 Circunferência: uma aplicação do cotidiano

Exemplo 3.4. São vários os objetos e construções que possuem a forma de uma circunferência, como uma laranja, a Terra, entre outros. No exemplo da laranja, usando a imaginação, enlace-a pelo equador. Depois, pegue uma linha e estenda-a pelo comprimento de um metro e, novamente a enlace. Seria possível passar um rato pela folga? Agora pela Terra, um círculo ainda maior, repetindo o mesmo procedimento. Utilizando ainda a linha do equador, circunde-a e aumente o comprimento obtido em um metro. Enlace-a de novo e responda: um rato passaria pela folga?

De início qualquer um diria que não, tendo em vista que um metro é bastante significativo em se tratando de uma laranja ou outros objetos menores, bem diferente da Terra, algo como 40 milhões de metros, entretanto é pura relatividade.

Retornando à matemática, pode-se dizer que há tempos que o homem reconheceu que enlaçando um círculo obteria o comprimento da circunferência (C). E que o diâmetro (D) desta circunferência é obtida dividindo essa medida da circunferência obtendo sempre um valor constante. Ou seja, a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e o dobro do valor de seu raio (R) é um número constante representado pela letra grega π que costuma ser arredondado para $3,14$. Logo, $C = 2\pi R$.

Desta forma, se reconhecer que o raio médio de qualquer circunferência, tanto para uma laranja, quanto para a Terra, o comprimento é obtido se o valor dessa medida for multiplicado por $6,28(2\pi)$ para que se obtenha o comprimento do fio que as enlaça pelo equador, o que dá sempre algo como $2\pi R$. Aumentando em um metro o comprimento do equador de qualquer dessas bolas, a nova cinta corresponderá a um raio um pouco maior (ou seja, o R aumentado de h, sendo h é a largura da folga).

Portanto,

$$C + 1 = 2\pi(R + h) \Longrightarrow C + 1 = 2\pi R + 2\pi h.$$

O que implica que, $2\pi R$ corresponde ao comprimento C, e $2\pi h$ corresponde ao um metro. Ou seja, $h = 0,1592\ldots$, a folga será de 15,9 centímetros, sendo possível passar por ele animais de qualquer tamanho.

O que às vezes não passa é imaginação do indivíduo comum, pois esta frequentemente engana-se.

3.10 Hipérbole

A hipérbole é uma cônica que não está tão presente no senso comum quanto a elipse, mas também é muito importante na matemática, cuja Figura 3.20 ilustra um exemplo da mesma. Há várias aplicações práticas de hipérbole no cotidiano, como em mecânica celeste, mecânica dos fluidos e sistema LORAN e DECCA de navegação aérea, ode são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos que são captados pelos aeroplanos. Uma das construções mais marcantes na arquitetura e engenharia é o *Planetário de Saint Louis* como mostra a Figura 3.3.

Definição 3.7. *Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano π, seja $2c$ a distância entres eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de π cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ sendo $0 < 2a < 2c$.*

$$\textit{Hipérbole} = \quad \{P \in \pi \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid= 2a\}. \tag{3.22}$$

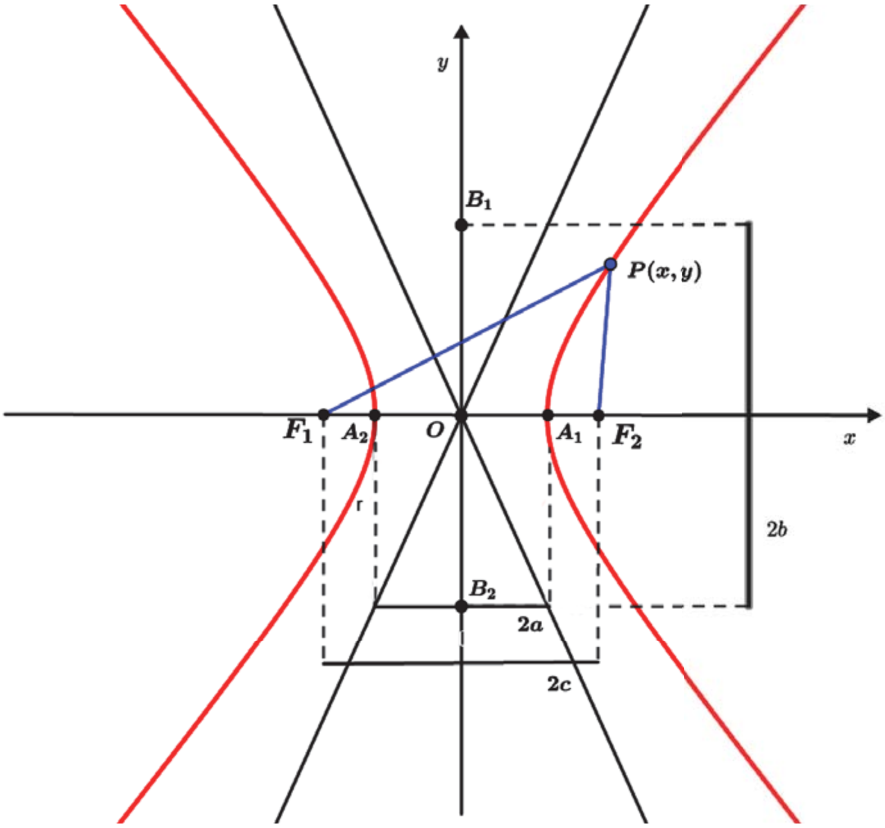


Figura 3.20: Hipérbole

3.10.1 Elementos principais da hipérbole

- $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0) \longrightarrow$ focos;
- $O \longrightarrow$ centro;
- $A_1A_2 = 2a \longrightarrow$ medida do eixo real ou eixo focal;
- $B_1B_2 = 2b \longrightarrow$ medida do eixo imaginário ou eixo transverso;
- $2c \longrightarrow$ distância focal;
- $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0) \longrightarrow$ vértices que determinam o eixo real;
- $\frac{c}{a} \longrightarrow$ excentricidade e;
- $b^2 = c^2 - a^2 \longrightarrow$ relação notável.

Note que, dada a Figura 3.21, do triângulo retângulo hachurado em destaque, é possível aplicar o **Teorema de Pitágoras**, sendo a e b os catetos e c a hipotenusa e, portanto, é válida a relação: $c^2 = a^2 + b^2$ e, portanto, $b^2 = c^2 - a^2$.

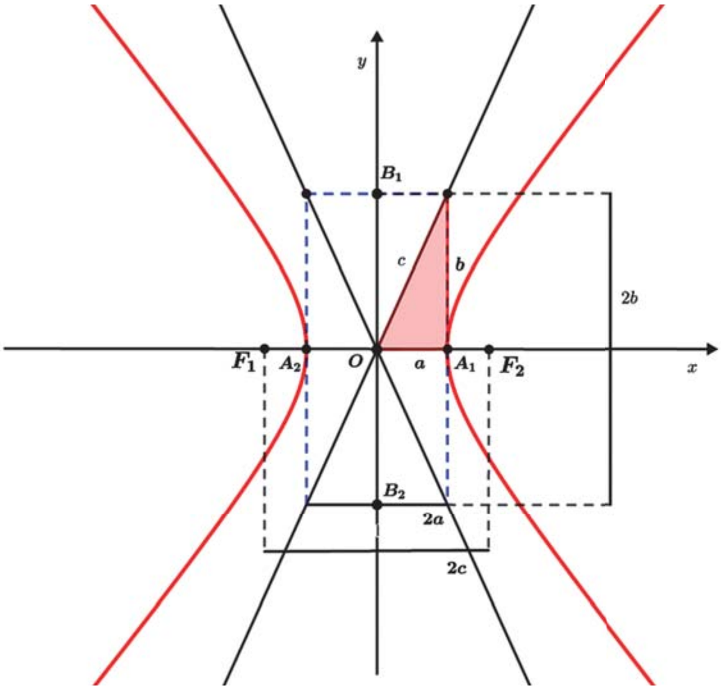


Figura 3.21: Relação fundamental da hipérbole

Observações:

- Se $a = b$, a hipérbole é chamada *equilátera*, ou seja, os semi-eixos real e imaginário são iguais;
- *Assíntotas* da hipérbole: são retas que contêm as diagonais do retângulo de lados $2a$ e $2b$, conforme a Figura 3.21.
- Quando o eixo real da hipérbole é horizontal e as assíntotas passam pela a origem do sistema cartesiano, o coeficiente angular dessas retas é $m = \pm\frac{b}{a}$ e suas equações são das forma: $y = \pm\frac{b}{a}x$;
- Quando o eixo real da hipérbole é vertical e as assíntotas passam pela a origem do sistema cartesiano, o coeficiente angular dessas retas é $m = \pm\frac{a}{b}$ e sua equação é da forma: $y = \pm\frac{a}{b}x$;
- Note que, sendo a hipérbole uma curva aberta, o significado geométrico do eixo imaginário B_1B_2 é, por enquanto, abstrato.

3.10.2 Excentricidade da hipérbole

A excentricidade da hipérbole é dada por um número real e tal que:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como $c > a$, sua excentricidade é sempre um número maior que 1.

Sem perda de generalidade, considere o foco $F(c, 0)$ e a diretriz como sendo a reta $d : x = \dfrac{c}{e^2}$.

Considerando o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, tais que, pela equação da distância entre dois pontos, tem-se:

$$\begin{aligned} \mid PF \mid = e \mid Pd \mid &\Longleftrightarrow \\ \sqrt{(c-c)^2 + y^2} &= e \left| x - \frac{c}{e^2} \right|. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = ce^2 \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right).$$

Podendo ser escrito da forma:

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{d^2}} = 1. \tag{3.23}$$

Comparando com a Equação 3.22, conclui-se que $e = \dfrac{c}{a} > 1$.

E portanto, a excentricidade da hipérbole é maior do que 1.

3.10.3 Equação reduzida da hipérbole

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de centro $O(0, 0)$ e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. De acordo com a definição da hipérbole, tem-se:

$$\begin{aligned} \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a &\Longleftrightarrow \\ \mid \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \mid = 2a &\Longleftrightarrow \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a &\Longleftrightarrow \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}&. \end{aligned}$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado e simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 2.2a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 &\Longleftrightarrow \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + \pm 4a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &\Longleftrightarrow \\ \pm 4a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2 &\Longleftrightarrow \\ \pm a.\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2&. \end{aligned}$$

Ao elevar novamente ambos os membros ao quadrado e simplificando, obtém-se:

$$\begin{aligned} a^2.[(x-c)^2+y^2] &= c^2x^2 - 2.a^2cx + a^4 \Longleftrightarrow \\ a^2.x^2 - 2.a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 - 2.a^2cx + a^4 \Longleftrightarrow \\ c^2x^2 - a^2.x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2) \Longleftrightarrow \\ (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2). \end{aligned}$$

Na hipérbole vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$, o que implica que $c^2 - a^2 = b^2$, logo

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a^2b^2 \neq 0$, então dividindo ambos os membros da última igualdade por a^2b^2, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.24}$$

que é denominada **equação reduzida** da hipérbole de diâmetros a e b, como o centro na origem do sistema cartesiano e cujos focos estão sobre o eixo x, como ilustra a Figura 3.20.

Outros casos:

- Se a hipérbole tem centro na origem e eixo real contido em y, sua equação pode ser obtida trocando x por y e y por x obtendo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \tag{3.25}$$

  é que a **equação reduzida** da hipérbole cujos focos estão sobre o eixo y, conforme a Figura 3.22.

- Se a hipérbole tem centro $C = (x_0, y_0)$ e eixo real horizontal, sendo x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, tem-se:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.26}$$

  onde $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$. Logo, a Equação 3.26 é a **equação reduzida** da hipérbole, utilizando a translação de eixos, cujo eixo real de centro $C(x_0, y_0)$ é paralelo ao eixo x;

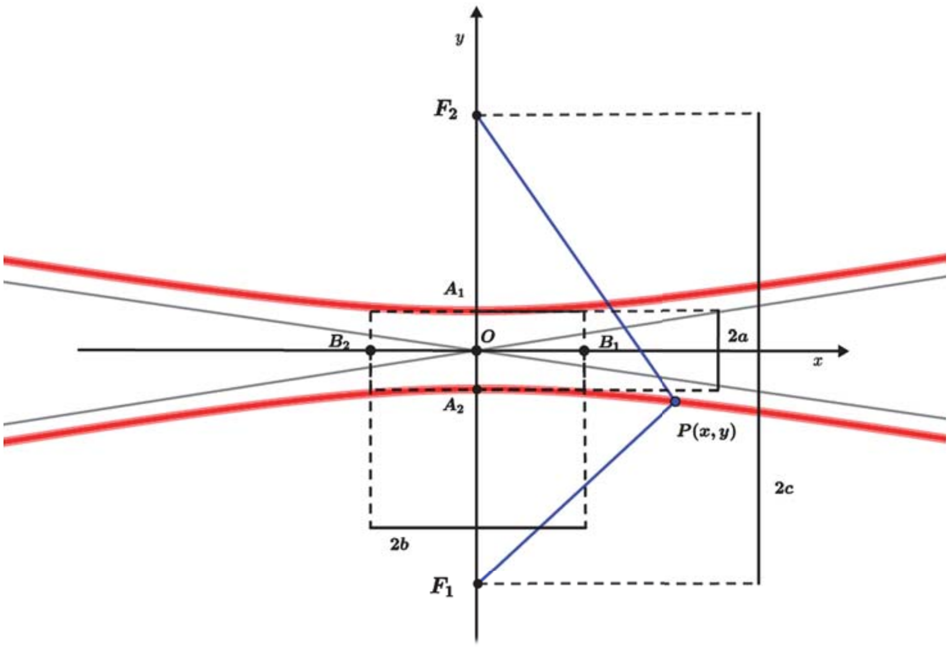


Figura 3.22: Hipérbole cujos focos estão sobre o eixo y

- Se a hipérbole tem centro $C = (x_0, y_0)$ e eixo real vertical, sendo x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, temos:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.27}$$

  onde $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 - c, y_0)$ e, portanto, é a **equação reduzida** da hipérbole cujo eixo real é paralelo ao eixo y;

- A hipérbole é equilátera quando os semi-eixos real e imaginário são iguais, ou seja, quando $a = b$;

- Quando o centro da hipérbole é $C = (x_0, y_0)$ com x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, e os eixos não são paralelos aos eixos coordenados, a existência do termo em xy na equação de uma hipérbole indica que seus eixos são oblíquos aos eixos cartesianos, nesse caso há necessidade da rotação, além da translação.

3.10.4 Equações paramétricas da hipérbole

Considere a hipérbole de Equação 3.24, onde $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ são números reais cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Usando a Relação Fundamental da Trigonometria e dividindo ambos os membros por $\cos^2\theta \neq 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \Longleftrightarrow \\ \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Tendo em vista que,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta \quad \text{e} \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$

Então, substituindo em 3.28, resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \Longleftrightarrow \\ (\operatorname{tg}\theta)^2 + 1 &= (\sec\theta)^2 \Longleftrightarrow \\ \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta &= 1. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Comparando a definição de hipérbole com a Equação 3.29, conclui-se que:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sec\theta \\ \dfrac{y}{b} = \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Isolando x e y, obtém-se:

$$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

3.11 Parábola

Outro material de estudo de cônicas é a **Parábola**. No geral, seu conceito é muito estudado como gráfico da função do 2^0 grau no Ensino Médio, no entanto sua definição é geométrica. Há uma série de aplicações dos conceitos da Parábola no cotidiano comum, como em faróis parabólico de carros, nos refletores, lanternas, entre outros.

Outra curiosa aplicação de Parábola no cotidiano comum é a logomarca do McDonald's, originando o famoso "M"formado pelo cruzamento de dois arcos dourados que surgiram do trabalho de um dos filhos do comerciante. Passou a fazer parte do design do restaurante, vindo a ser transformado em um par de parábolas altas de metal, pintadas de dourado neon, pelo arquiteto dos restaurantes, e no decorrer do tempo sofreu mais algumas alterações, ganhando sombreamento na logomarca, como se verifica na Figura 3.23.

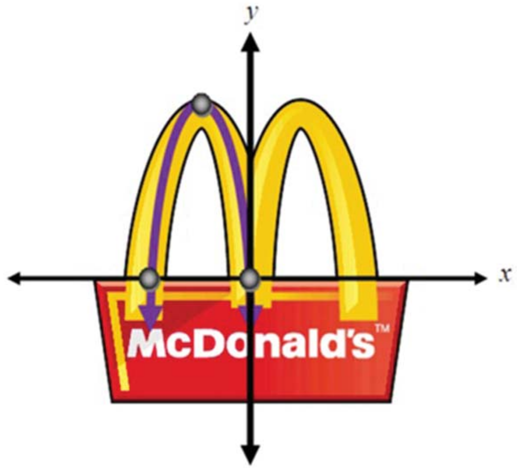


Figura 3.23: McDonalds
Fonte: Pinterest (2018)

Definição 3.8. *Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano π, com $F \notin d$, seja p a distância entres F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de π que estão à mesma distância de F e de d.*

$$\textit{Parábola} \quad = \{P \in \pi \mid d(P,F) = d(P,d)\} \tag{3.30}$$

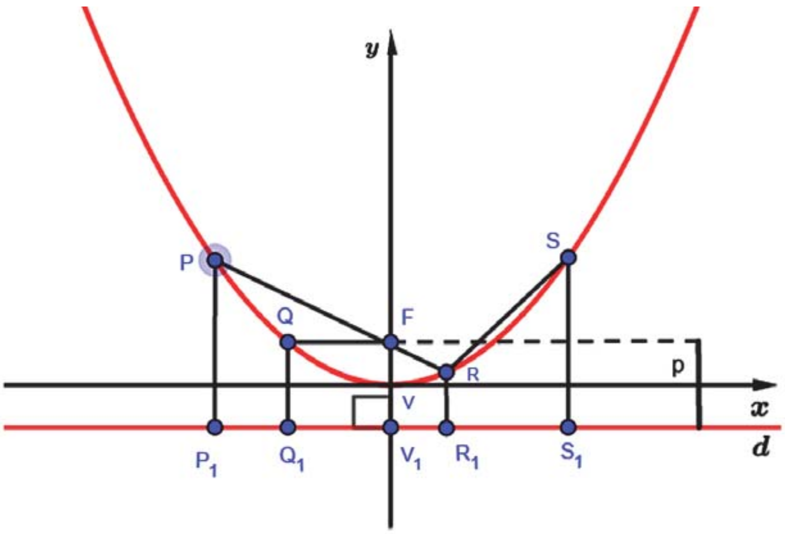


Figura 3.24: Elementos principais associados à parábola

Conforme a Figura 3.24, tem-se:

$$VF = VV_1$$
$$PF = PP_1$$
$$QF = QQ_1$$
$$RF = RR_1$$
$$SF = SS_1$$

3.11.1 Elementos principais da parábola

- $F \longrightarrow$ foco;
- $d \longrightarrow$ diretriz;
- $p \longrightarrow$ parâmetro;
- $V \longrightarrow$ vértice;
- reta $VF \longrightarrow$ eixo de simetria;
- $VF = \dfrac{p}{2} \longrightarrow$ relação notável;

3.11.2 Excentricidade da parábola

A excentricidade da parábola é dada por um número real e tal que:

$$e = \frac{c}{a} = 1.$$

Sem perda de generalidade, considere o foco $F(c, 0)$, e uma constante real e d a reta diretriz como sendo $D(d, y) \in d$. Logo, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, tais que, pela Equação da distância entre dois pontos, tem-se:

$$\mid PF \mid = e \mid Pd \mid$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = e\sqrt{(x-d)^2 + (y-y)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e simplificando, obtém-se:

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2.$$

Desenvolvendo os binômios quadrados e simplificando, tem-se:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2dx + d^2) &\Longleftrightarrow \\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2de^2x + d^2e^2) &\Longleftrightarrow \\
x^2 - e^2x^2 - 2cx + 2de^2x + y^2 + c^2 - d^2e^2 = 0 &\Longleftrightarrow \\
x^2(1 - e^2) + (2de^2 - 2c)x + y^2 + c^2 - d^2e^2 = 0. & \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Fazendo $e = 1$ na equação acima, teremos:

$$y^2 + 2(d - c)x + c^2 - d^2 = 0.$$

Considerando $d = -c$, conclui-se que:

$$
\begin{aligned}
y^2 - 4cx = 0 &\Longleftrightarrow \\
y^2 = 4cx, & \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

onde a Equação 3.32 é uma parábola da forma $y^2 = 2px$, com $c = \dfrac{p}{2}$.

Portanto, a constante e é denominada excentricidade da parábola cujo valor é 1.

3.11.3 Equação reduzida da parábola

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e cuja reta diretriz d é paralela ao eixo x, com o ponto $P'(x, y_0 - c)$ pertencentes à reta $d : y = y_0 - c$ e foco $F(x_0, y_0 + c)$.

De acordo com a Equação 3.30, tem-se:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + c)]^2} + \sqrt{(x - x)^2 + [y - (y_0 - c)]^2}. \qquad (3.33)$$

Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\left[\sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + c)]^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x - x)^2 + [y - (y_0 - c)]^2}\right]^2 &\Longleftrightarrow \\
(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + c)]^2 = 0^2 + [y - (y_0 - c)]^2. &
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo os binômios quadrados e simplificando, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
(x - x_0)^2 + y^2 - 2y(y_0 + c) + (y_0 + c)^2 = y^2 - 2y(y_0 - c) + (y_0 - c)^2 &\Longleftrightarrow \\
(x - x_0)^2 + y^2 - 2y_0y - 2yc + {y_0}^2 + 2y_0c + c^2 = y^2 - 2yy_0 + 2yc + {y_0}^2 - 2y_0c + c^2 &\Longleftrightarrow \\
(x - x_0)^2 - 2yc + 2y_0c = 2yc - 2y_0c. &
\end{aligned}
$$

Isolando $(x - x_0)$ e simplificando a última igualdade, então:

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 &= 4yc - 4y_0c \Longleftrightarrow \\ (x - x_0)^2 &= 4c(y - y_0). \qquad (3.34)\end{aligned}$$

Portanto, a Equação 3.34 é denominada **equação reduzida** da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$, cuja reta diretriz é paralela ao eixo x e está abaixo do foco, conforme a Figura 3.25.

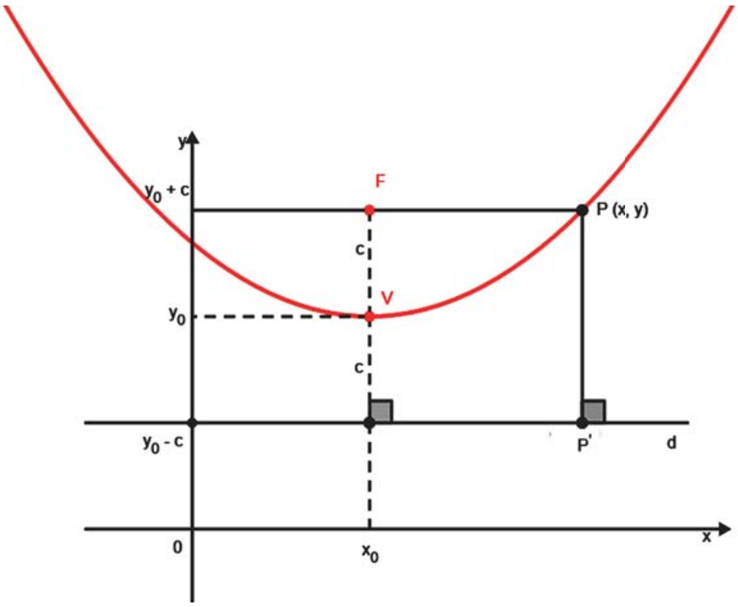


Figura 3.25: Parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo x e abaixo do foco

Outros casos:

- Se a parábola de $V(x_0, y_0)$, cuja diretriz é paralela ao eixo x e está acima do foco conforme a Figura 3.26, logo as coordenadas do foco é da forma $F(x_0, y_0 - c)$ e a reta $d : y = y_0 + c$, é possível mostrar de maneira semelhante que a **equação reduzida** é dada por:

$$(x - x_0)^2 = -4c(y - y_0). \qquad (3.35)$$

Para uma parábola de $V(x_0, y_0)$, cuja diretriz é paralela ao eixo y e vértice $V(x_0, y_0)$, considere duas possibilidades:

- Se a reta diretriz d é paralela ao eixo y e está à esquerda do foco $F(x_0 + c, y_0)$ e a reta $d : x = x_0 - c$ conforme a Figura 3.27, de maneira semelhante a **equação reduzida** é dada por:

$$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0). \qquad (3.36)$$

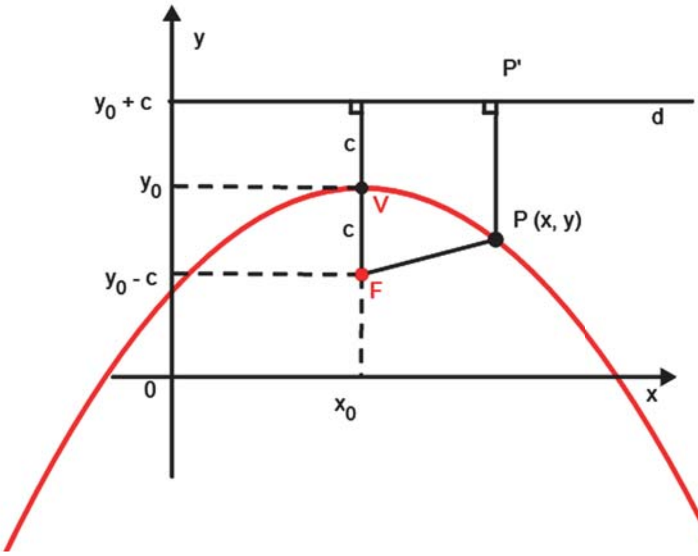


Figura 3.26: Parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo x e acima do foco

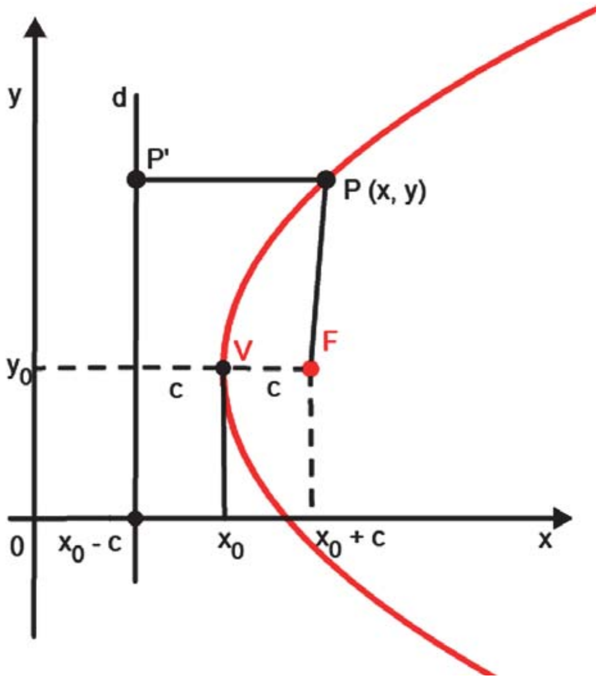


Figura 3.27: Parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo y e à esquerda do foco

- Se a reta diretriz d é paralela ao eixo y e está à direita do foco $F(x_0 - c, y_0)$ e a reta $d : x = x_0 + c$ conforme a Figura 3.28, é possível mostrar que a **equação reduzida** é dada por:

$$(y - y_0)^2 = -4c(x - x_0). \tag{3.37}$$

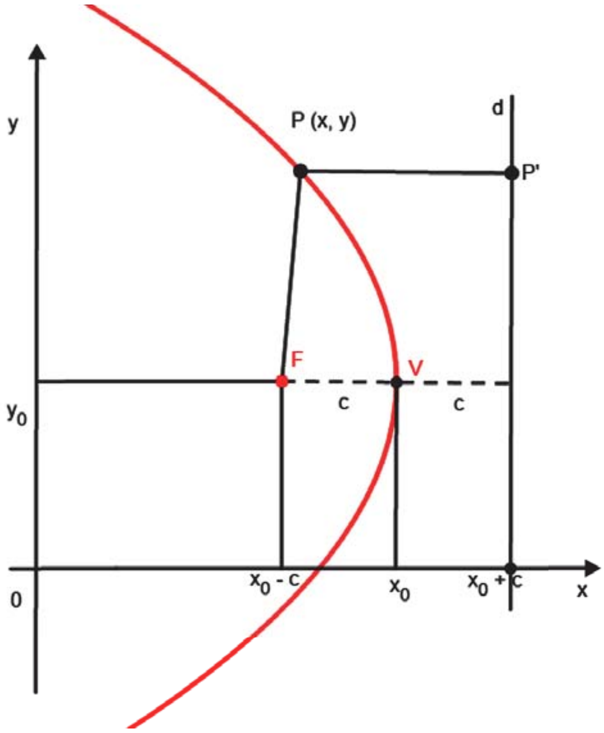


Figura 3.28: Parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo y e à direita do foco

- Quando o centro da hipérbole é $C = (x_0, y_0)$ com x_0 e y_0 não simultaneamente nulos, e os eixos não são paralelos aos eixos coordenados, a existência do termo em xy na equação de uma hipérbole indica que seus eixos são oblíquos aos eixos cartesianos, nesse caso há necessidade da rotação, além da translação.

Equação reduzida da parábola com vértice na origem

1^0 **Caso:** Dado um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco.
O foco é $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$.

Nessas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação:

$$y^2 = 2px. \tag{3.38}$$

2^0 **Caso:** Analogamente, se a parábola apresenta vértice na origem, foco $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ no eixo das ordenadas e diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$, tem-se:

$$x^2 = 2py. \tag{3.39}$$

De fato, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer na parábola de Foco $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$, por definição da parábola, tem-se:

$$P \in \pi \mid d(P, F) = d(P, d).$$

Como o ponto $P' = \left(x, -\dfrac{p}{2}\right) \in d$, tem-se:

$$\left|\left(x - 0, y - \frac{p}{2}\right)\right| = -\left|\left(x - x, y + \frac{p}{2}\right)\right|. \tag{3.40}$$

Desenvolvendo a Equação 3.40, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} &\Longleftrightarrow \\
(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 &\Longleftrightarrow \\
x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} &\Longleftrightarrow \\
x^2 = 2py. & \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

cuja Equação 3.41 é a **equação reduzida** da parábola no eixo y e vértice na origem.

3.11.4 Equação paramétrica da parábola

Deseja-se determinar as equações paramétricas da parábola cuja equação da parábola é da forma:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

onde t é chamado de parâmetro.

Considerando uma parábola com eixo paralelo ao eixo de y e vértice na origem pela Equação 3.38, então:

$$\begin{aligned}
y^2 &= 2py \\
y &= \frac{1}{4p}x^2.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Ao substituir x por t na Equação 3.42, obtém-se:

$$y = \frac{1}{4p}x^2 = \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{4p}t^2 \end{cases}$$

Uma outra maneira de associar a equação paramétrica da parábola é considerar a Figura 3.29 dada por:

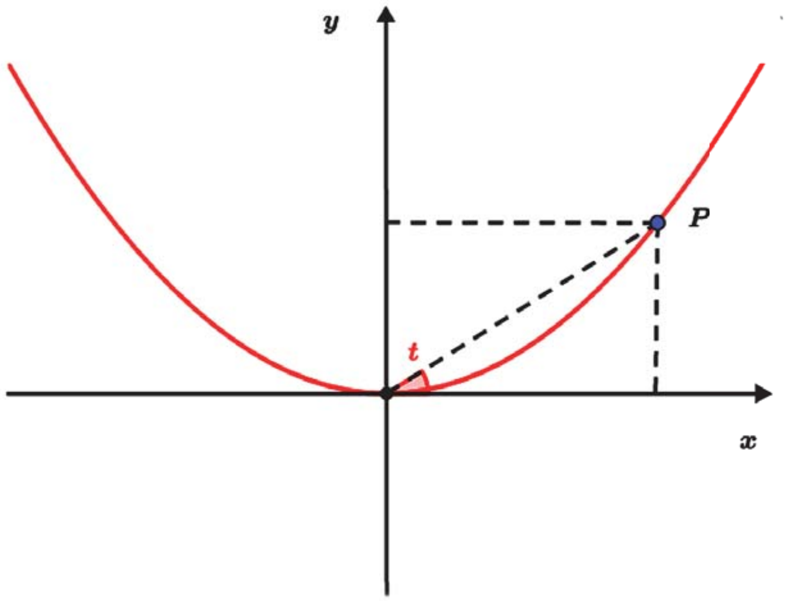


Figura 3.29: Parábola com ângulo t

Deseja-se agora associar x e y com o ângulo t. Considerando o triângulo retângulo POX, cujos os catetos medem x e y, tem-se:

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{x}. \tag{3.43}$$

Substituindo a Equação 3.42 em 3.43, obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t = \frac{\frac{1}{4p}x^2}{x} &\iff \\ x = 4p \operatorname{tg} t. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Por outro lado, considerando a Equação 3.42 e substituindo 3.44, tem-se:

$$y = 4p \operatorname{tg}^2 t. \tag{3.45}$$

Portanto, uma outra equação paramétrica da parábola é dada por:

$$\begin{cases} x = 4p \operatorname{tg} t; \\ y = 4p \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

Essa seção foi dedicada apenas aos estudos dos fundamentos teóricos sobre cônicas, no entanto, no **Capítulo 5** visa explorar cada dos elementos fundamentais das cônica por meios de orientações para as construções de cada uma.

4 Quádricas

No capítulo anterior, são vistos as cônicas que são casos especiais de curvas, no entanto, nesse capítulo é estudado as quádricas que são casos especiais de superfícies.

Este capítulo tem como propósito descrever as quádricas que podem ser resultantes da rotação de uma das cônicas em torno de um eixo, sendo um conteúdo muito abordado por estudantes de matemática, e sua aplicação diária poderá ser verificada na engenharia, da medicina, na física, entre outros.

Embora não seja abordado na base curricular nacional, o tema "Quádricas"é objeto de estudo nos anos iniciais do curso de Cálculo na graduação de Licenciatura em Matemática e é de grande importância que o futuro docente consiga ter conhecimento destas relações do plano com o espaço.

Para tanto, foi realizada a descrição das principais características das superfícies quádricas a partir de suas equações reduzidas. Assim, será possível observar que quádrica ou superfície quádrica é, no campo da Matemática, o conjunto dos pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas formam um polinômio de segundo grau de no máximo três variáveis, denominada de equação cartesiana da superfície. O Geogebra tem recursos para animação, visualização 3D, visualização por transparência, que permitem aumentar o nível de abstração.

4.1 Contexto histórico: quadráticas

A Geometria tem seu início com os gregos, o período de surgimento de conteúdo aprofundado que se perdurou até os dias atuais, principalmente em resolução de problemas. Assim como o problema da duplicação do cubo que deu início a cálculos algébricos como fonte das possíveis soluções para duplicação, Euclides é citado como referência entre os geômetras gregos que não contribui apenas com estudos de cônicas, como também teria produzido conteúdo a respeito de paraboloides, hipérboles e elipsoides. Os criadores das cônicas se utilizaram de cálculos algébricos e matemáticos para as teorias de curvas em relação aos eixos. Os registros encontrados por historiadores deram em pergaminhos e acredita-se que boa parte do real estudo e conteúdo estudado na Grécia antiga tenha se perdido. Ariquemes que viveu em 287 - 212 a.C foi discípulo de Euclides e deixou registrados valiosos estudos na construção de sólidos de revolução como concepção inicial que seria utilizada nos conceitos de quádricas e geometria plana.

> Sobre os conóides e esferoides: descreveu sólidos de revolução gerado por elipses, parábolas e hipérboles entorno de seus eixos (quádricas de revolução). Ademais nessa obra Arquimedes obtém a área de uma elipse. Sobre as esferas e cilindro: contém demonstrações rigorosas do cálculo do volume e da área dos referidos sólidos. Vai além: estuda as áreas e volumes das superfícies obtidas por seções planas sobre a esfera (calotas e segmentos) e sobre o cilindro. A pedido de Arquimedes, foi gravado na lápide de seu túmulo a representação de uma esfera inscrita num cilindro circular reto (VENTURI, 1949, p. 161).

Peres (2001) define as cônicas como sendo a equivalência tridimensional das cônicas, ou seja, uma abordagem as curvas estudas em cônicas. Peres apud Fermat, cita que:

> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distinguí-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só. Esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc (PERES, 2001, p. 61).

Pierre de Fermat no século XVII foi um dos grandes contribuintes para os estudos das cônicas, assim como os resgates de continuidade na obra dos gregos, o conteúdo produzido por ele foi considerado a base da geometria analítica. Assim como a herança da produção moderna de conteúdo nos séculos que se seguiram, Leonhard Euler publicou um livro em 1748 intitulado "Análise infinita", considerado para muitos, com uma das primeiras explanações escritas sobre quádricas. A utilização da álgebra na geometria foi das expressivas contribuições de Fermat e de equivalência importância do matemático francês René Descartes, autor de plano cartesiano, e que em sua obra "Discurso do método", foi de grande influência e evolução nos estudos da geometria analítica, através da utilização da álgebra.

Definição 4.1. *Chama-se* ***quádrica*** *qualquer subconjunto* Ω *de* E^3 *que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau dada por:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{4.1}$$

com a condição que pelo menos um dos números A, B, C, D, E, F *é diferente de zero de modo que a equação seja quádrica.*

Os seis tipos básicos de **superfícies quádricas** são:

- Elipsoide;
- Hiperboloide de uma folha;
- Hiperboloide de duas folhas;
- Paraboloide elíptico;
- Paraboloide hiperbólico;
- Cone elíptico.

Outros exemplos de quádricas (chamadas **degeneradas**):

- $x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 0 \longrightarrow$ conjunto vazio;
- $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \longrightarrow$ um ponto;
- $x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ uma reta;
- $z^2 = 0 \longrightarrow$ um plano;
- $x^2 - 9 = 0 \longrightarrow$ reunião de dois planos paralelos;
- $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = 0 \longrightarrow$ reunião de dois planos transversais.

Efetivamente, os seis tipos básicos de superfícies quádricas apresentados anteriormente juntamente com estes de quádricas degeneradas dão todos os tipos possíveis de quádricas.

O grau e o sinal do grau dos termos, bem como quais termos estão presentes, ajudam a determinar qual das seis superfícies quadráticas básicas é dada.

Para representar graficamente uma superfície quádrica, geralmente é útil representar graficamente o plano xy, o plano xz e o plano yz. Estas são a interseção da superfície com esses três planos.

- Para determinar o plano xy, defina $z = 0$;
- Para determinar o plano xz, defina $y = 0$;
- Para determinar o plano yz, defina $x = 0$.

Superfícies

A equação cartesiana $f(x, y, z) = 0$ representa genericamente uma superfície. Na E^3 as equações do 2^0 grau constituem-se em superfícies quadráticas e as do 1^0, 3^0, $4^0 \ldots$ graus em superfícies não quadráticas.

Definição 4.2. ***Superfície de revolução*** *é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma* ***curva plana*** *ou* ***cônica*** *em torno de um de seus eixos ou em torno de uma reta fixa pertencente ao plano da curva plana ou canônica. Sendo que, a curva cônica chamada de* ***geratriz*** *que gira* 360^0 *em torno de uma reta ou eixo da superfície.*

A seguir estudaremos alguns tipos básicos de superfícies quadráticas.

4.2 Elipsoide

O nome *Elipsoide* baseia-se nas intersecções das quádricas com planos paralelos aos planos coordenados. Nesse caso, todas as interseções são exclusivamente elipses.

Os elipsoides são utilizados, nas ciências cartográficas, como aproximação da forma irregular da Terra ou qualquer outro corpo planetário.

Definição 4.3. *Uma quádrica* Ω *é um* ***elipsoide*** *se existem números reais positivos* a, b, c, *pelo menos dois deles distintos, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual* Ω *pode ser descrita pela equação:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.2}$$

chamada ***equação reduzida*** *de* Ω, *conforme a Figura 4.1.*

Caso a, b e c sejam iguais, a equação Ω será uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio a. Se pelo menos dois dos valores de a, b e c são iguais, o elipsoide é de revolução.

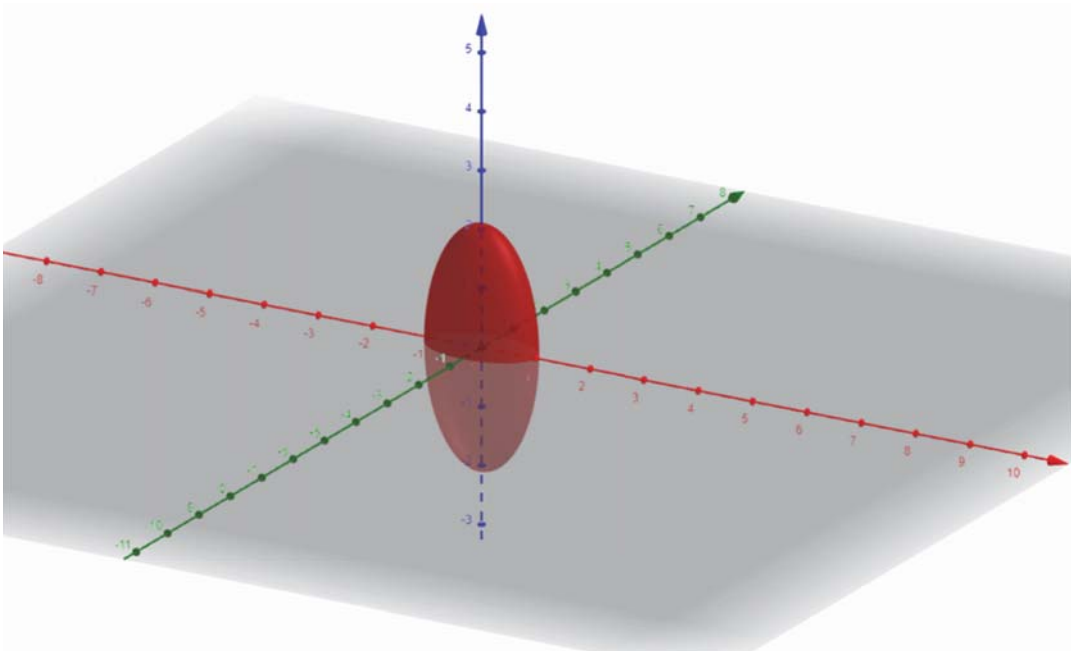


Figura 4.1: Elipsoide centrado na origem com eixo maior paralelo ao eixo Oz

Características

- Todos os termos presentes são do segundo grau;
- Todos os termos de grau dois são positivos quando a equação é igual a 1;
- Todos os traços são elipses;
- A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.
- As secções pelos planos coordenados $x = 0, y = 0$ e $z = 0$ são elipses;
- Para $x = 0$, resulta no plano coordenado yz a elipse $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
  Ao rotacionar essa elipse em torno do eixo Oy, obtém-se o elipsoide de revolução, ao substituir z por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$, obtém a equação:
  $$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b_2} + \frac{z^2}{c_2} = 1.$$
- Para $y = 0$, resulta no plano coordenado xz a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;
- Para $z = 0$, resulta no plano coordenado xy a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
- A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem.

Observe ainda que, as interseções do elipsoide com planos $x = k, y = k$ ou $z = k$, com k constante, resultam numa elipse, num ponto ou no conjunto vazio.

O elipsoide de maneira mais geral, representado na Figura 4.1, é representado pela Equação 4.2, onde a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsoide.

Se o centro do elipsoide é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b_2} + \frac{(z - z_0)^2}{c_2} = 1.$$

Da mesma forma, a superfície esférica de centro (x_0, y_0, z_0) e raio a, resulta na equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

4.3 Hiperboloide

O nome *hiperboloide* baseia-se nas interseções das quádricas com planos paralelos aos planos coordenados. Nesse caso, apesar de não haver exclusivamente, as interseções que prevalecem são as hipérboles. Para distinguir os tipos de hiperboloides, deve-se observar que todos os hiperboloides (exceto os de rotação) são elípticos, pois as interseções quando não são hipérboles, são elipses. No caso das hipérboles de rotação, as interseções são circunferências.

No Capítulo **Seções Cônicas** são estudados sobre cônicas, nesse caso, em especial da **hipérbole**. Ela não está tão presente no senso comum quanto a elipse, mas também é muito importante na matemática. Ao rotacionar uma hipérbole em torno de um dos eixos de simetria, gera uma superfície denominada *hiberbolóide de revolução.*

4.3.1 Hiperboloide de uma folha

Definição 4.4. *Uma quádrica Ω é um* ***hiperboloide de uma folha*** *se existem números reais positivos a, b, c, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.3}$$

denotada por ***equação reduzida*** *de Ω do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo Oz. As outras duas formas são:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad e \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e representam hiperboloides de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente, conforme a Figura 4.2.

Características

- Todos os termos presentes são de segundo grau;
- Dois termos de grau dois são positivos e um é negativo quando a equação é igual a 1;
- Um traço é uma elipse;
- Dois traços são hipérboles;
- O eixo é paralelo à variável negativa;
- A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem;

- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é negativo na forma canônica de sua equação.

- Para $x = 0$, resulta no plano coordenado yz a hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;
  Ao rotacionar essa hipérbole em torno do eixo Oz, resulta no hiperboloide de uma folha, ao substituir z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, obtém a equação:
  $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c_2} = 1.$$

- Para $y = 0$, resulta no plano coordenado xz a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

- Para $z = 0$, resulta no plano coordenado xy a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

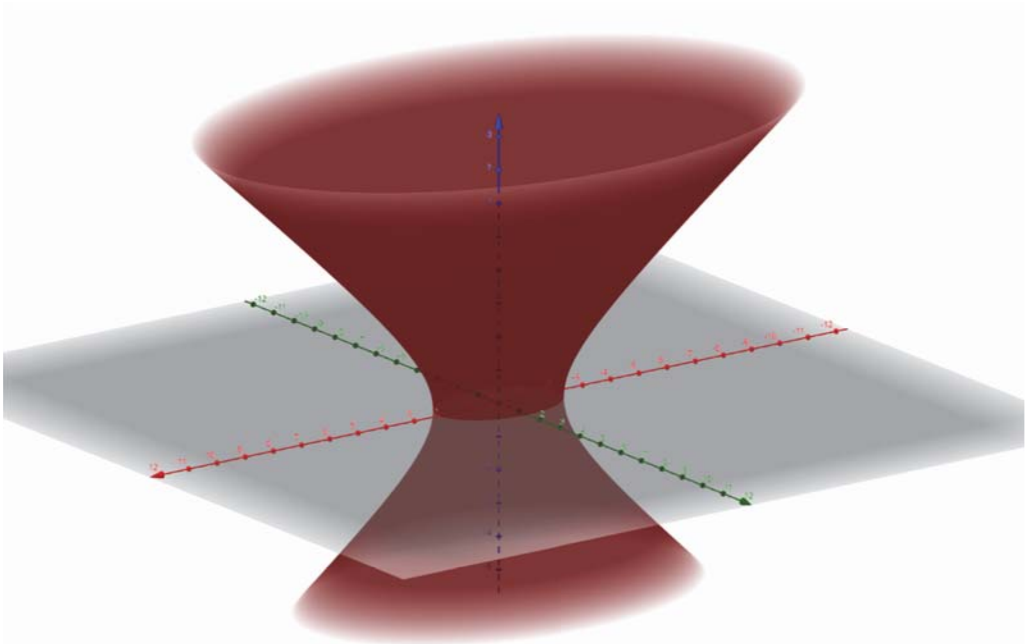


Figura 4.2: Hipérboloide de uma Folha ao longo do eixo Oz

Um traço no plano $z = k$ é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles. Caso na Equação 4.3 tiver $a = b$, o hiperboloide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo imaginário, no caso eixo z. O traço no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, com $z = 0$.

Se o centro da hiperboloide de uma folha é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b_2} - \frac{(z-z_0)^2}{c_2} = 1.$$

Observação

É importante ressaltar que, embora a Figura 4.2 mostre um hiperboloide limitado ao longo de um eixo, essa figura se prolonga indefinidamente ao longo desse eixo (a menos que se restrinja seu valor a um intervalo limitado). Essa observação estende-se para todas as superfícies a serem apresentadas.

4.3.2 Hiperboloide de duas folhas

Definição 4.5. *Uma quádrica Ω é um **hiperboloide de duas folhas** se existem números reais positivos a, b, c, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:*

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.4}$$

*chamada **equação reduzida** de Ω, do hiperboloide de duas folha ao longo do eixo Oz, conforme a Figura 4.3. As outras duas formas são:*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad e \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e representam hiperboloides de duas folhas ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

Características

- Todos os termos presentes são de segundo grau;
- Dois termos de grau dois são negativos e um é positivo quando a equação é igual a 1;
- Dois traços são hipérboles;
- Um traço será uma elipse paralela ao terceiro plano;
- O eixo é paralelo à variável positiva;
- A superfície é simétrica em relação a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e a origem;
- A superfície está ao longo do eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é positivo na forma canônica de sua equação;
- Para $x = 0$, resulta no plano coordenado yz a hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

Ao rotacionar essa hipérbole em torno do eixo Oy, resulta no hiperboloide de folhas, ao substituir z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, obtém a equação:

$$-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c_2}=1;$$

- Para $z=0$, resulta no plano coordenado xy a hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$;
- Para $x=0$, resulta na cônica vazia, tendo em vista que, o hiperboloide de duas folhas não intercepta a superfície no plano xz.

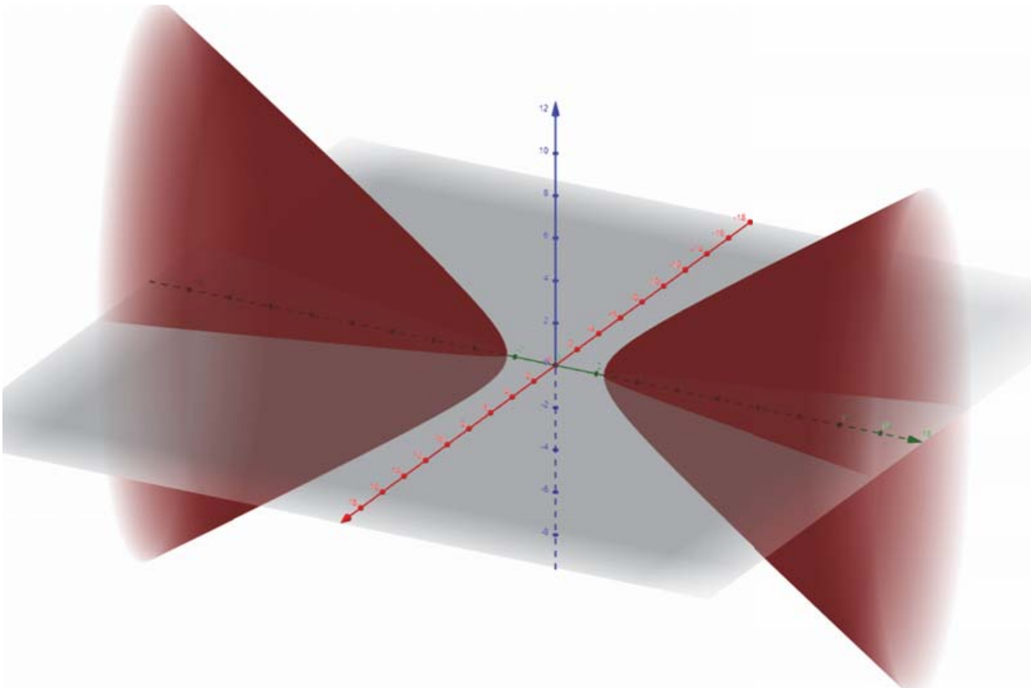


Figura 4.3: Hiperboloide de Folhas ao longo do eixo Oz

Observe que, os traços desses hiperboloides nos planos $x=k, y=k$ ou $z=k$ (k constante) resultam em hipérboles, elipses, um ponto ou um conjunto vazio.

Se o centro da hiperboloide de duas folhas é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b_2}-\frac{(z-z_0)^2}{c_2}=1.$$

4.4 Paraboloide

O nome *paraboloide* baseia-se nas interseções das quádricas com planos paralelos aos planos coordenados. Nesse caso, apesar que de não haver exclusivamente, as interseções que prevalecem são as parábolas.

Para distinguir os tipos de paraboloides, deve-se observar as interseções que não são parábolas, podendo ser elipses, hipérboles ou circunferências. Esse é o critério para chamá-los de *paraboloide elíptico* ou *paraboloide hiperbolóide*.

Definição 4.6. *Se existem números reais positivos a b e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual uma quádrica* Ω *é descrita pela equação reduzida dada por:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{4.5}$$

Logo:

- *se* $a \neq b$, *então* Ω *é um* ***pararaboloide elíptico****;*
- *se* $a = b$, *então* Ω *é um* ***pararaboloide de rotação****.*

4.4.1 Paraboloide elíptico

O paraboloide elíptico é a função real de duas variáveis obtida de sua equação reduzida, onde suas curvas de nível são elipses pelos cortes horizontais e pelos cortes verticais paralelos resultam em parábolas.

Definição 4.7. *Uma quádrica* Ω *é um* ***paraboloide elíptico*** *se existem números reais positivos* a, b, c, *e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual* Ω *pode ser descrita pela equação:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{4.6}$$

chamada ***equação reduzida*** *de* Ω, *do paraboloide elíptico ao longo do eixo* Oz, *conforme a Figura 4.4. As outras duas formas são:*

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad e \quad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

e representam paraboloides elípticos ao longo dos eixos Oy *e* Ox, *respectivamente.*

Características

- Um termo é de grau;
- Um traço é uma elipse;
- Dois traços são parábolas;
- O eixo é paralelo a uma variável de grau um;
- Se $a = b$ tem-se uma paraboloide de revolução;

- A superfície está ao longo do eixo correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica de sua equação;
- A interseção da superfície com os eixos coordenados é $O(0, 0, 0)$;
- Para um paraboloide elíptico ao longo do eixo z, o traço no plano xy é a origem $O(0, 0, 0)$;
- Para $x = 0$, resulta no plano coordenado yz a parábola $\frac{y^2}{b^2}$;
- Para $y = 0$, resulta no plano coordenado xz a parábola $\frac{x^2}{a^2}$.

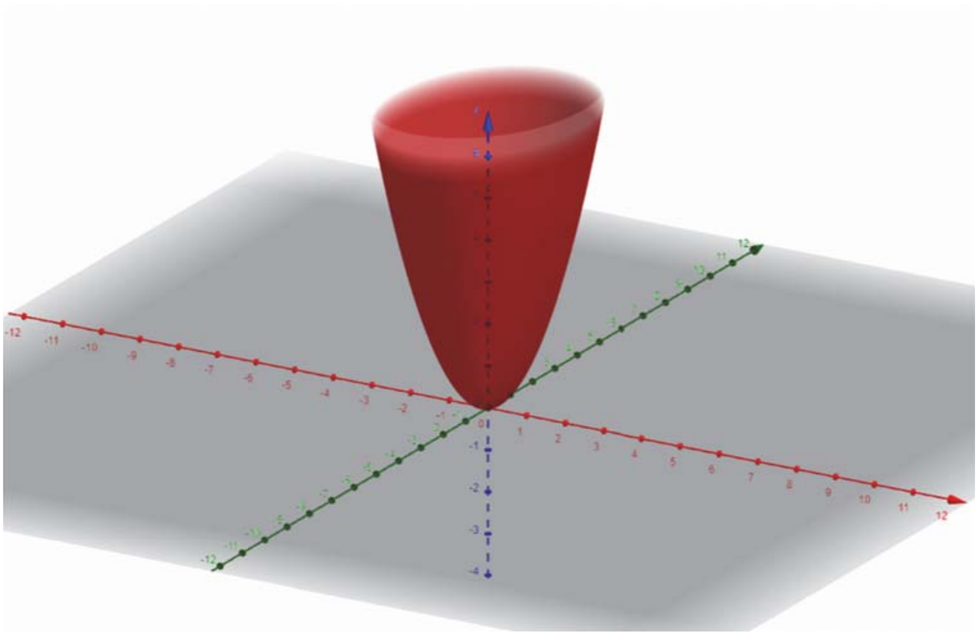


Figura 4.4: Paraboloide Elíptico

A Equação 4.6 mostra que o traço do paraboloide no plano $xy(z = 0)$ é a origem $(0, 0, 0)$, os traços nos planos $z = k > 0$ são elipses, nos planos $z = k < 0$ são vazios e nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Um traço no plano $z = k$, com $k > 0$, é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xy. Caso $a = b$, o paraboloide é de revolução e pode ser gerado pela rotação em torno do eixo z. O traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

Se o vértice do parabolide elíptico é o ponto (x_0, y_0, z_0) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação na forma canônica, obtida por uma translação de eixos coordenados, assume a forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b_2} = c(z - z_0).$$

4.4.2 Paraboloide Hiperbólico

O paraboloide hiperbólico ou sela é a função real de duas variáveis obtida de sua equação reduzida, onde suas curvas de nível pelos cortes horizontais aparece o mapa de contornos desta função e pelos cortes verticais paralelos aos eixos coordenados, resultam em parábolas.

Definição 4.8. *Uma quádrica Ω é um* ***paraboloide hiperbólico*** *se existem números reais positivos a, b, c, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:*

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{4.7}$$

chamada ***equação reduzida*** *de Ω, do paraboloide hiperbólico ao longo do eixo Oz, conforme a Figura 4.5. As outras duas formas são:*

$$y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad e \quad x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

e representam paraboloides hiperbólicos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

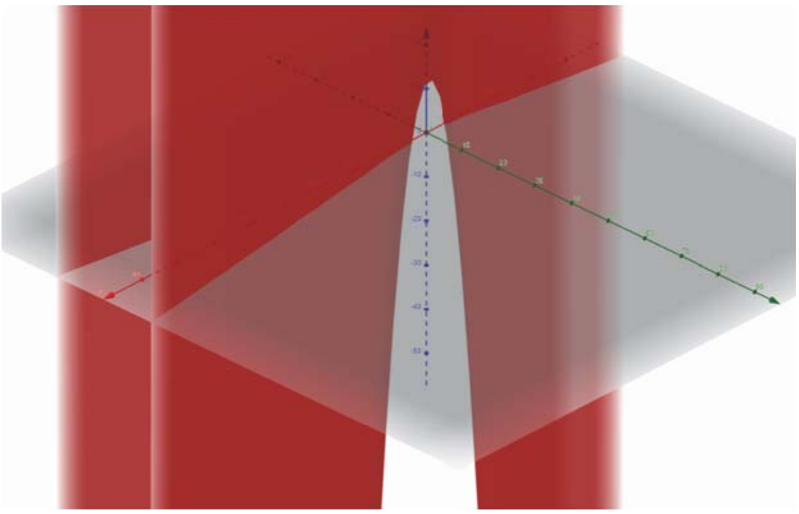


Figura 4.5: Paraboloide hiperbólico

Características

- Dois termos de grau 2 presentes. Um termo é positivo e o outro é negativo;
- Um traço é uma hipérbole;
- Dois traços são parábolas;
- O eixo é paralelo a uma variável de grau um;

- A superfície está ao longo do eixo correspondente à variável do primeiro grau na forma canônica de sua equação.

A Equação 4.7 e a própria Figura 4.5 mostram que os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas, ao passo que em $z = k$ são hipérboles que se degeneram em duas retas quando $z = 0$. Ainda com relação à Equação 4.7, quando $z = k > 0$, os traços nesses planos são hipérboles com eixo real paralelo a Oy, enquanto que para $z = k < 0$, os traços são hipérboles de eixo real paralelo a Ox.

4.5 Cone Elíptico

O cone elíptico é a função real de duas variáveis obtida de sua equação reduzida, onde seus traços em planos paralelos ao plano xy são elipses e os traços nos planos yz e xy são pares de retas que se interceptam na origem. Em planos paralelos, os traços são hipérboles.

Definição 4.9. *Uma quádrica Ω é um* ***cone elíptico*** *se existem números reais positivos a, b, c, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:*

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{4.8}$$

chamada ***equação reduzida*** *de Ω, do cone elíptico ao longo do eixo Oz, conforme a Figura 4.6. As outras duas formas são:*

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad e \quad x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

e representam paraboloides hiperbólicos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

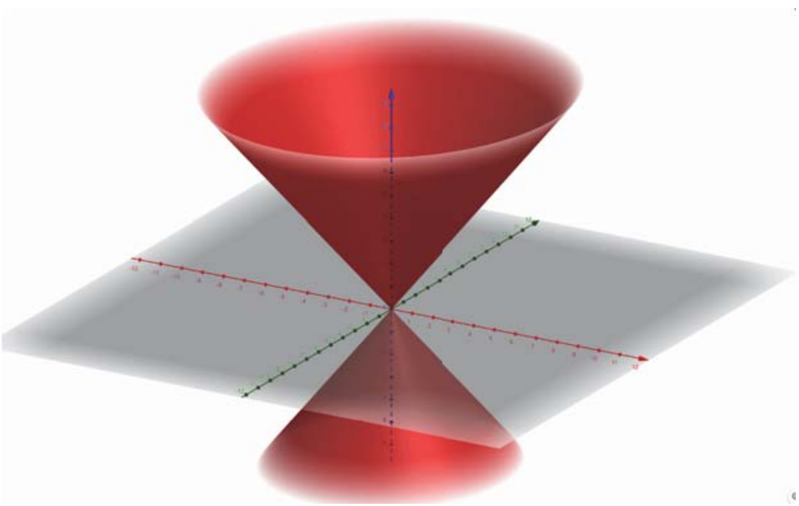


Figura 4.6: Cone Elíptico

Características

- Todos os termos presentes são de segundo grau;
- Dois termos de grau dois são positivos e um é negativo quando a equação é igual a 0;
- Dois traços são hipérboles;
- Um traço será um ponto ou elipse paralelo ao terceiro plano;
- O eixo é paralelo à variável negativa.

O traço no plano xy é um ponto na origem e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xy são pares de retas que se interceptam na origem. Os traços em planos paralelos a estes são hipérboles.

Observe ainda que, o cone elíptico dado pela Equação 4.8 é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Sua interseção com o plano $z = k$, com $k \neq 0$ resulta em uma elipse; no entanto, com os planos $x = k$ e $y = k$, com $k \neq 0$ resulta em uma hipérbole.

4.6 Cilindro Quádrico

Definição 4.10. *Um* ***cilindro quádrico*** *é uma superfície regrada S que satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Contém uma diretriz D que é uma cônica em um plano;*
- *Para $P \in D$, a reta geratriz L_p, passando pelo ponto P, é perpendicular ao plano que contém a diretriz D. Portanto, as geratrizes são retas paralelas.*

Um cilindro quádrico é denominado cilindro *elíptico*, *parabólico* ou *hiperbólico*, se a sua geratriz for uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, respectivamente.

Tendo em vista que, as equações dos cilindros quádricos aparecem apenas duas variáveis, logo, deve-se considerar todos os possíveis pares de variáveis que possam figurar na equação de um cilindro quádrico: x e y; x e z. ou y e z.

- Os cilindros elípticos têm equações do tipo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b_2} = 1$, podendo ser verificado conforme a Figura 4.7:

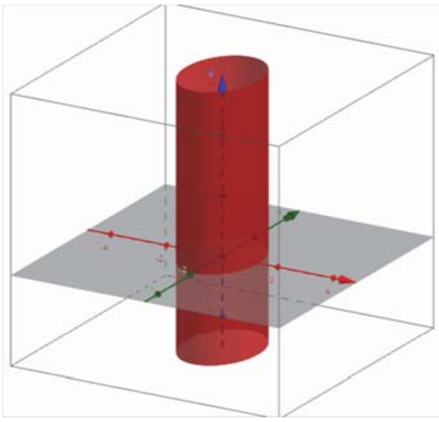


Figura 4.7: Cilindro elíptico

- Os cilindros parabólicos têm equações do tipo $y^2 = \dfrac{x^2}{a^2}$, conforme a Figura 4.8:

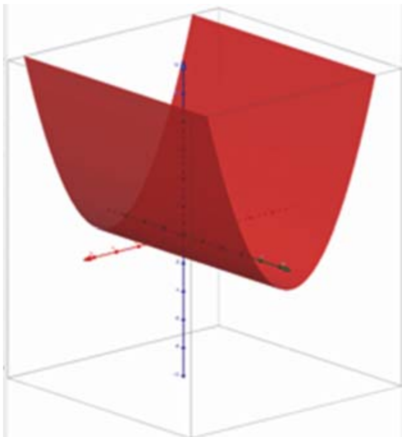


Figura 4.8: Cone parabólico

- Os cilindros hiperbólicos têm equações do tipo $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b_2} = 1$, como a Figura 4.9:

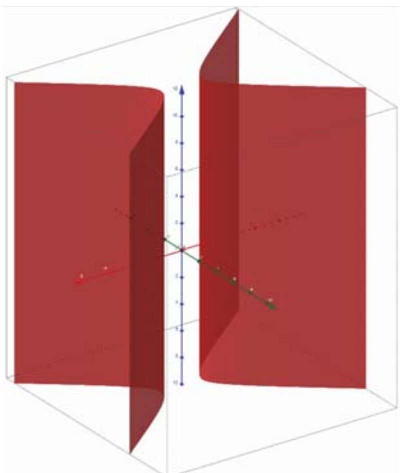


Figura 4.9: Cilindro hiperbólico

4.7 Equações paramétricas das superfícies quádricas

Seja a equação de uma superfície S em coordenadas retangulares da forma

$$F(x, y, z) = 0. \tag{4.9}$$

Sejam funções de um par de variáveis (u, t) numa região, R, do plano, ou seja,

$$\begin{cases} x = f(u, t) \\ y = g(u, t) \\ z = h(u, t) \end{cases}$$

para todo $(s, t) \in \mathbb{R}$.

Se para quaisquer valores do par de variáveis (u, t) numa região, R, do plano, os valores de x, y e z determinados pelas equações anteriores que satisfazem 4.9 e, portanto, são chamadas **equações paramétricas da superfície** S e as variáveis independentes u e t são chamadas parâmetro, e formam uma representação paramétrica da superfície S.

A seguir são estudadas as equações paramétricas das quadráticas já citadas anteriormente.

4.7.1 Equação paramétrica do elipsoide

O elipsoide de Equação 4.2 com vértice na origem e eixo de rotação paralelo ao eixo z, pode ser representada parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}(u)\cos(t) \\ y = b \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(t) \\ z = c\cos(u) \end{cases}$$

para todo $u \in [0, \pi]$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Com efeito, elevando ao quadrado a equação $x = a \operatorname{sen}(u)\cos(t)$ e dividindo-os por a^2, tem-se:

$$\begin{aligned} x = a \operatorname{sen}(u)\cos(t) &\Longrightarrow \\ x^2 = a^2 \operatorname{sen}^2(u)\cos^2(t) &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(u)\cos^2(t)}{a^2} &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} = \operatorname{sen}^2(u)\cos^2(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b\,\text{sen}(u)\,\text{sen}(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2\,\text{sen}^2(u)\,\text{sen}^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} &= \text{sen}^2(u)\,\text{sen}^2(t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

E ainda, elevando ao quadrado e dividindo por c^2 a equação $z = c\cos(u)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} z^2 &= c^2\cos^2(u) \Longrightarrow \\ \frac{z^2}{c^2} &= \cos^2(u). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Somando os resultados obtidos nas Equações 4.10, 4.11 e 4.12, logo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \text{sen}^2(u)\cos^2(t) + \text{sen}^2(u)\,\text{sen}^2(t) + \cos^2(u) \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \text{sen}^2(u)(\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)) + \cos^2(u) = 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.7.2 Equação paramétrica do hiperboloide de uma folha

O hiperboloide de uma folha de Equação 4.3 com centro na origem e o eixo de rotação paralelo ao eixo z, pode ser representada parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2}\,\text{sen}(t) \\ y = b\sqrt{1+u^2}\cos(t) \\ z = c(u) \end{cases}$$

para todo $(u) \in \mathbb{R}$ e para todo $(t) \in [0, 2\pi]$.

De fato, considerando a equação $x = a\sqrt{1+u^2}\,\text{sen}(t)$, elevando ambos os membros ao quadrado e dividindo-os por a^2, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{1+(u)^2}\,\text{sen}(t) \Longrightarrow \\ x^2 &= a^2(1+(u)^2)\,\text{sen}^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= \frac{a^2(1+(u)^2)\,\text{sen}^2(t)}{a^2} \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= (1+(u)^2)\,\text{sen}^2(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b\sqrt{1+u^2}\cos(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2(1+(u)^2)\cos^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} &= (1+(u)^2)\cos^2(t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

E ainda, elevando ao quadrado e dividindo por c^2 ambos os lados da equação $z = c(u)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} z^2 = c^2(u)^2 &\Longrightarrow \\ \frac{z^2}{c^2} &= (u)^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Somando os resultados obtidos nas Equações 4.14 e 4.15 e subtraindo do resultado da Equação 4.16, logo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= (1+u^2)\operatorname{sen}^2(t) + (1+u^2)\cos^2(t) - u^2 \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= (\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)) + u^2(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)) - (u)^2 \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 + (u)^2 - (u)^2 = 1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.7.3 Equação paramétrica do hiperboloide duas folhas

O hiperboloide de duas folhas de Equação 4.4 com centro na origem e o eixo de rotação paralelo ao eixo z, pode ser representada parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{(u)^2 - 1}\operatorname{sen}(t) \\ y = b\sqrt{(u)^2 - 1}\cos(t) \\ z = c(u) \end{cases}$$

para todo $(u) \in [-1, 1]$ e para todo $(t) \in [0, 2\pi]$.

De fato, considerando a equação $x = a\sqrt{(u)^2 - 1}\operatorname{sen}(t)$, elevando ambos os membros ao quadrado e dividindo-os por a^2, tem-se:

$$\begin{aligned} x = a\sqrt{(u)^2 - 1}\operatorname{sen}(t) &\Longrightarrow \\ x^2 = a^2((u)^2 - 1)\operatorname{sen}^2(t) &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2((u)^2 - 1)\operatorname{sen}^2(t)}{a^2} &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= ((u)^2 - 1)\operatorname{sen}^2(t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b\sqrt{(u)^2 - 1}\cos(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 = b^2((u)^2 - 1)\cos^2(t) &\Longrightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} &= ((u)^2 - 1)\cos^2(t). \end{aligned} \tag{4.19}$$

E ainda, elevando ao quadrado e dividindo por c^2 ambos os lados da equação $z = c(u)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} z^2 = c^2(u)^2 &\Longrightarrow \\ \frac{z^2}{c^2} &= (u)^2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Somando os resultados obtidos nas Equações 4.18 e 4.19 e subtraindo do resultado da Equação 4.20, logo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= ((u)^2 - 1)\,\text{sen}^2(t) + ((u)^2 - 1)\cos^2(t) - (u)^2 \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= (u)^2(\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)) - (\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)) - (u)^2 \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= (u)^2.(1) - 1 - (u)^2 = -1. \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.7.4 Equação paramétrica do paraboloide elíptico

O paraboloide elíptico de Equação 4.6 com vértice na origem, pode ser representada parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{(u)}\cos(t) \\ y = b\sqrt{(u)}\,\text{sen}(t) \\ z = (u) \end{cases}$$

para todo $(u) \in [0, +\infty]$, e para todo $(t) \in [0, 2\pi]$.

Considerando a equação $x = a\sqrt{(u)}\cos(t)$, elevando ao quadrado e dividindo por a^2 ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned} x = a\sqrt{u}\cos(t) &\Longrightarrow \\ x^2 = a^2(u)\cos^2(t) &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2(u)\cos^2(t)}{a^2} &\Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} = (u)\cos^2(t). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b\sqrt{(u)}\,\text{sen}(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 = b^2(u)\,\text{sen}^2(t) &\Longrightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} &= (u)\,\text{sen}^2(t). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Somando os resultados obtidos nas Equações 4.22 e 4.23, obtém-se a equação $z = (u)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = (u)\cos^2(t) + (u)\operatorname{sen}^2(t) - (u) \Longrightarrow \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = (u)(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)) - (u) = z.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

4.7.5 Equação paramétrica do paraboloide hiperbólico

O paraboloide hiperbólico de Equação 4.7 com vértice na origem, pode ser representada parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(u) \\ z = (t)^2 - (u)^2 \end{cases}$$

para todo $(u), (t) \in \mathbb{R}$.

De fato, elevando ambos os membros ao quadrado a equação $x = a(t)$ e dividindo-os por a^2 ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned}
x = a(t) \Longrightarrow \\
x^2 = a^2(t)^2 \Longrightarrow \\
\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2(t)^2}{a^2} \Longrightarrow \\
\frac{x^2}{a^2} = (t)^2.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b(u)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
y^2 = b^2(u)^2 \Longrightarrow \\
\frac{y^2}{b^2} = (u)^2.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Somando os resultados obtidos nas Equações 4.25 e 4.26, obtém-se a equação $z = (t)^2 - (u)^2$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (t)^2 - (u)^2 \Longrightarrow \\
z = (t)^2 - (u)^2.
\end{aligned}$$

4.7.6 Equação paramétrica do cone elíptico

O cone elíptico de Equação 4.8 com vértice na origem pode ser representada parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a(u)\cos(t) \\ y = b(u)\,\mathrm{sen}(t) \\ z = (u) \end{cases}$$

para todo $(u) \in \mathbb{R}$ e para todo $(t) \in [0, 2\pi]$.

De fato, elevando ambos os membros ao quadrado a equação $x = a(u)\cos(t)$ e dividindo-os por a^2 ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned} x = a(u)\cos(t) &\implies \\ x^2 = a^2(u)^2\cos^2(t) &\implies \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2(u)^2\cos^2(t)}{a^2} &\implies \\ \frac{x^2}{a^2} = (u)^2\cos^2(t). & \end{aligned} \tag{4.27}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b(u)\,\mathrm{sen}(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 = b^2(u)^2\,\mathrm{sen}^2(t) &\implies \\ \frac{y^2}{b^2} = (u)^2\,\mathrm{sen}^2(t). & \end{aligned} \tag{4.28}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado ambos os lados da equação $z = (u)$, tem-se:

$$z^2 = (u)^2. \tag{4.29}$$

Somando os resultados obtidos nas Equações 4.27 e 4.28 , obtém-se a Equação 4.29, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (u)^2\cos^2(t) + (u)^2\,\mathrm{sen}^2(t) &\implies \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (u)^2(\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t)) &\implies \\ (u)^2 = z^2. & \end{aligned}$$

4.7.7 Equação paramétrica dos cilindros quádricos

Considerando os cilindros quádricos de centro na origem e a geratriz no eixo z, obtém-se as equações paramétricas dos cilindros: elíptico, parabólico e hiperbólico.

- **Equação paramétrica do cilindro elíptico**

O cilindro elíptico de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, pode ser representado parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\,\mathrm{sen}(t) \\ z = (u) \end{cases}$$

para todo $u \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$.

De fato, elevando ambos os membros ao quadrado a equação $x = a\cos(t)$ e dividindo-os por a^2 ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned} x = a\cos(t) \Longrightarrow x^2 &= a^2\cos^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= \frac{a^2\cos^2(t)}{a^2} \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= \cos^2(t). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b\,\mathrm{sen}(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2\,\mathrm{sen}^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} &= \mathrm{sen}^2(t). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Igualando os resultados obtidos nas Equações 4.30 e 4.31, tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t) = 1. \tag{4.32}$$

- **Equação paramétrica do cilindro parabólico**

O cilindro parabólico de equação $y^2 = \dfrac{x^2}{a^2}$, pode ser representado parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a^2(t) \\ y = a(t) \\ z = (u) \end{cases}$$

para todo $u, t \in \mathbb{R}$.

De fato, elevando ao quadrado ambos os membros da Equação $x = a^2(t)$ e dividindo-os por a^2, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= a^2(t) \Longrightarrow \\ x^2 &= a^2 a^2(t)^2 \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= \frac{a^2 a^2(t)^2}{a^2} \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= a^2(t)^2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado ambos os lados da equação $y = a(t)$, obtém-se:

$$y^2 = a^2(t)^2. \tag{4.34}$$

Igualando os resultados obtidos nas Equações 4.33 e 4.34, tem-se:

$$a^2(t)^2 = a^2(t)^2 \Longrightarrow y^2 = \frac{x^2}{a^2}. \tag{4.35}$$

- **Equação paramétrica do cilindro hiperbólico**

O cilindro hiperbólico de equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, pode ser representado parametricamente pelas equações:

$$\begin{cases} x = a\sec(t) \\ y = b\,\mathrm{tg}(t) \\ z = (u) \end{cases}$$

para todo $(u) \in \mathbb{R}$ e para todo $(t) \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad U \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

De fato, elevando ambos os membros ao quadrado a equação $x = a\sec(t)$ e dividindo-os por a^2, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= a\sec(t) \Longrightarrow \\ x^2 &= a^2\sec^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= \frac{a^2\sec^2(t)}{a^2} \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} &= \sec^2(t). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Consequentemente, elevando ao quadrado e dividindo por b^2 ambos os lados da equação $y = b\,\mathrm{tg}(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y^2 = b^2 \operatorname{tg}^2(t) &\Longrightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} &= \operatorname{tg}^2(t). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Subtraindo os resultados obtidos nas Equações 4.36 e 4.37, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= (\sec^2(t)) - \operatorname{tg}^2(t) \Longrightarrow \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= (\operatorname{tg}^2(t) + 1) - \operatorname{tg}^2(t) = 1. \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.8 Quádrica: aplicações práticas

É possível identificar a aplicação das cônicas e das superfícies quádricas em diversas situações, no movimento dos planetas no sistema solar, ou de satélite se movem ao redor de suas próprias órbitas em movimentos elípticos.

A elipsoide enquanto variação da rotação da elipse, sua aplicação pode ser encontrada na medicina em tratamentos radioterápicos ou ainda em luminárias que se utilizam da reflexão da elipse na superfície elipsoide formando o que são chamados de foco, como as luminárias médicas utilizadas em centros cirúrgicos ou em consultórios odontológicos.

A superfície gerada da hipérbole pode ser verificada na construção civil e em demais áreas. A rotação do eixo transverso da hipérbole gera um reta que são identificadas em diversos projetos de engenharia, como o projeto da catedral de Brasília executado por Oscar Neimayer (Figura 3.3), dentre outras aplicações que podem ser utilizadas como telescópio, e outras propriedades com variação de foco.

Analisando as propriedades de aplicação da parábola, pode ser facilmente identificada na engenharia civil na construção de pontes. A sua aplicação refletora, se dá a partir da rotação no eixo de simetria, que permite a identificação da superfície de paraboloide e as suas propriedades refletoras utilizadas em faróis de carro, entre outros.

De fato, quádricas são superfícies utilizadas em diferentes contextos no cotidiano das pessoas. Na sequência são enumeradas algumas aplicações mais visíveis no senso comum.

4.8.1 Aplicação 1: Qual é a forma da Terra?

Tendo em vista que a terra é achatada nos pólos, ela não redonda, seu formato se aproxima mais de um elipsóide.

Na figura 4.10 está exposta uma secção da superfície da terra por meio de um plano que contém a reta que liga os pólos, dando origem a uma elipse, em que o semieixo maior a é a metade do diâmetro da linha do equador e o semieixo menor b é a metade da distância entre os pólos norte e sul.

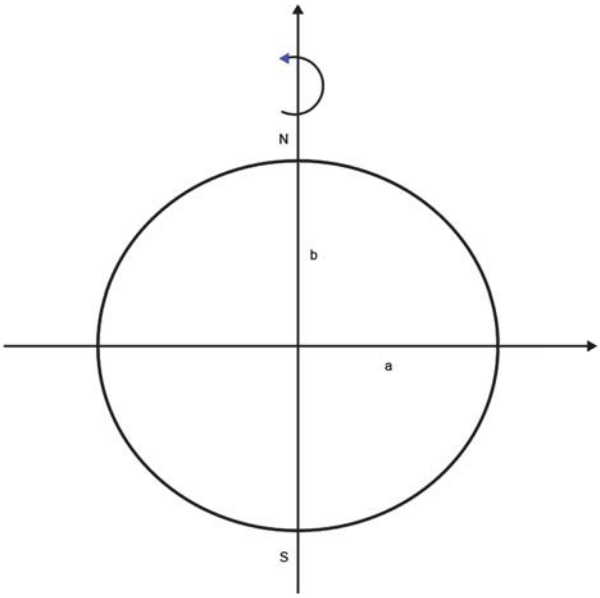


Figura 4.10: Representação Gráfica da Terra

Desta forma, a partir deste ponto, a superfície da terra passará a ser considerada como um globo. Assim, o globo terrestre vem sendo muito utilizado como uma ferramenta didática, na qual é representada como uma esfera, conforme a figura 4.11.

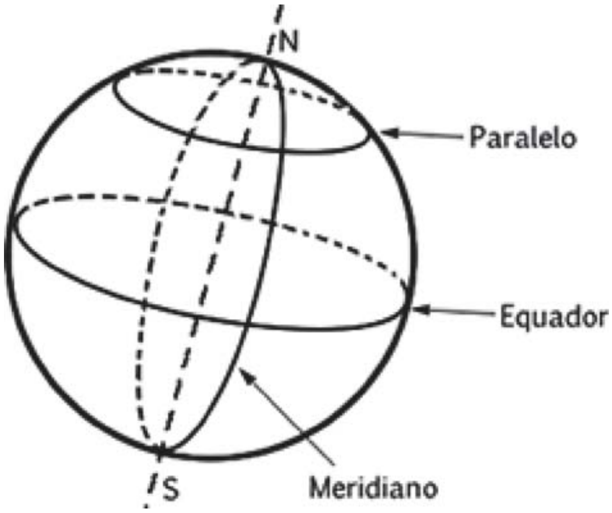


Figura 4.11: Globo terrestre
Fonte: Alves (2005)

Os pólos norte e sua são representados como N e S, respectivamente, formando o eixo polar. Trata-se de uma reta na qual a terra faz um movimento de rotação.

O plano do equador passa pelo centro da superfície esférica e é perpendicular ao eixo polar.

A linha do equador é considerada uma circunferência máxima, tendo em vista que representa a interseção do plano do equador com a superfície esférica, subdividindo-os em dois hemisférios, norte e sul.

Os paralelos são representados pelas secções da superfície terrestre, por meio de planos coincidentes ao plano do equador, portanto são circunferências. Os paralelos notáveis são: o Equador; o Trópico de câncer; o Trópico de Capricórnio; o Circulo Polar Ártico; e o Círculo Polar Antártico.

Num modelo esférico, a latitude é medida em graus do arco da circunferência de um meridiano, medido a partir do Equador, tendo o centro do planeta como vértice. Já longitude é a medida em graus do arco da circunferência de um paralelo, medido a partir o meridiano de Greenwich, tendo o centro do planeta como seu vértice.

4.8.2 Aplicação 2: Antena parabólica

É do conhecimento comum que durante anos as antenas parabólicas foram utilizadas para potencializar os sinais emitidos por satélites, melhorando significativamente as imagens reproduzidas nas TV's. Isto somente é possível devido a uma importante propriedade das superfícies parabólicas que convergem os sinais recebidos por elas em um único ponto, o foco da parábola. Neste foco, localiza-se um receptor que, por sua vez, envia os sinais concentrados para um decoder ligado a um aparelho de televisão, proporcionando imagens limpas quase sem ruídos.

Trata-se de uma aplicação comum de quádricas no dia a dia das pessoas, desta forma, suponha que uma antena parabólica esteja direcionada paralelamente com a superfície plana conforme a Figura 4.12.

Fixa-se sobre ela o plano de coordenadas cartesianas xOy de forma que se tenha foco sobre o ponto $(3, 2)$ e reta diretriz $x = 4$. Deste modo, é determinada a equação cartesiana desta parábola.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da curva que deseja-se procurar e seja $Q(4, y)$ um ponto qualquer da diretriz e foco $F(3, 2)$.

Pela definição de parábola como lugar geométrico dos pontos cuja distância ao foco é igual à distância até a diretriz, tem-se:

$$d_{P,F} = d_{P,Q} \Longrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-y)^2}.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado e simplificando, obtém-se:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 \Longrightarrow 2x = -y^2 + 4y + 3.$$

Dividindo ambos os lados por 2 e deixando com aparência de equação reduzida da parábola, logo:

$$x = -\frac{y^2}{2} + 2y + \frac{3}{2} \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}(y^2 - 4y - 3).$$

Completando quadrados na equação, obtém-se:

$$x = -\frac{1}{2}[(y^2 - 2)^2 - 7] \Longrightarrow x - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(y - 2)^2, \tag{4.39}$$

chamada de forma canônica da equação da parábola.

Considerando a Equação 4.39, pode-se concluir que, as coordenadas do vértice V é dado por $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$.

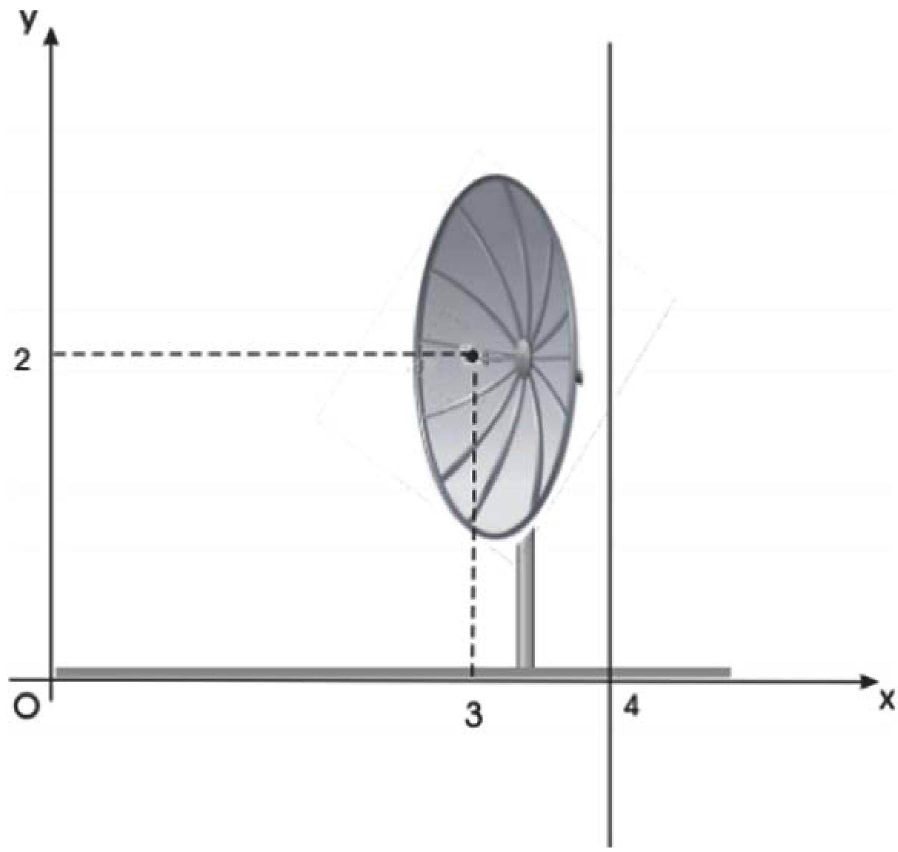


Figura 4.12: Esquema da antena parabólica
Fonte: Santos (2014)

4.8.3 Aplicação 3: Farol de carro

Quando uma reta atinge a parábola emergindo de seu foco é refletido paralelamente ao seu eixo. De forma equivalente, toda reta que incide paralelamente ao eixo da parábola é refletido pelo seu foco, ou seja, é dito como propriedade refletora da parábola.

Considerando as seguintes retas passando por um ponto $P_1(x_1, y_1)$ da parábola, conforme a Figura 4.13.

- r, a reta paralela à reta focal;
- n, a reta normal à parábola;
- s, a reta que passa pelo foco F.

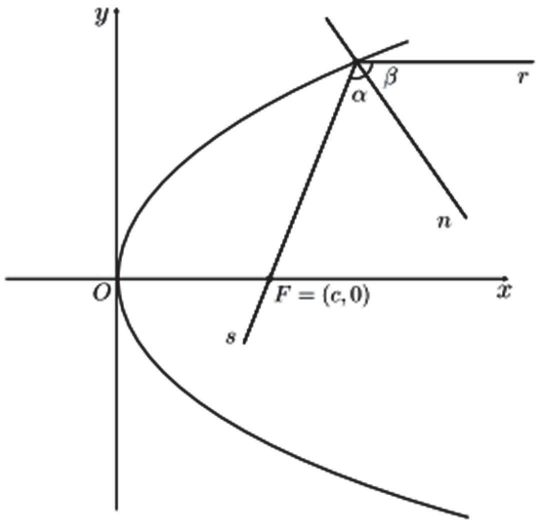


Figura 4.13: Propriedade refletora da parábola
Fonte: Gaspar (2014)

Observando a Figura 4.13, pode-se concluir que o ângulo α é formado pelos segmentos de reta n e s e o ângulo β formado por n e r.

Mostre que $\alpha = \beta$.

A equação da parábola da forma: $y^2 = 4cx$. Derivando sua equação em relação a x e dividindo por $2y$, obtém-se:

$$2yy' = 4c \Longrightarrow \frac{2y.y'}{2y} = \frac{4c}{2y} \Longrightarrow$$
$$y' = \frac{2c}{y}. \tag{4.40}$$

Logo, a declividade da tangente à parábola no ponto $P_1(x_1, y_1)$ é $\frac{2c}{y_1}$, o que implica que a declividade da reta normal n será $-\frac{y_1}{2c}$. Como a declividade da reta s é da forma e $\frac{y_1}{x_1 - c}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{-\dfrac{y_1}{2c} - \dfrac{y_1}{x_1 - c}}{1 - \dfrac{{y_1}^2}{2c(x_1 - c)}} \Longrightarrow \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{-y_1(x_1 + c) - 2cy_1}{2c(x_1 - c) - {y_1}^2} \Longrightarrow \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{-x_1y_1 + cy_1 - 2cy_1}{2cx_1 - 2c^2 - {y_1}^2} \Longrightarrow \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{-x_1y_1 - cy_1}{2cx_1 - 2c^2 - {y_1}^2}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Tendo em vista que o ponto P_1 está sobre a parábola, suas coordenadas satisfazem a equação dada por ${y_1}^2 = 4cx_1$. Substituindo na Equação 4.41, logo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha = \frac{-x_1y_1 - cy_1}{2cx_1 - 2c^2 - {y_1}^2} &= \frac{-y_1(x_1 + c)}{-2c(x_1 + c)} \Longrightarrow \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{y_1}{2c}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Como a declividade de r é nula, então

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-(-\dfrac{y_1}{2c})}{1 + 0(-\dfrac{y_1}{2c})} = \frac{y_1}{2c}. \tag{4.43}$$

E, portanto, $\alpha = \beta$. Então podemos concluir que, que todo raio que incidir na parábola paralelamente ao eixo de simetria é refletido segundo uma reta que passa pelo foco e todo raio que incidir na parábola derivado do foco é refletido paralelamente ao eixo de simetria, como ilustra a Figura 4.14.

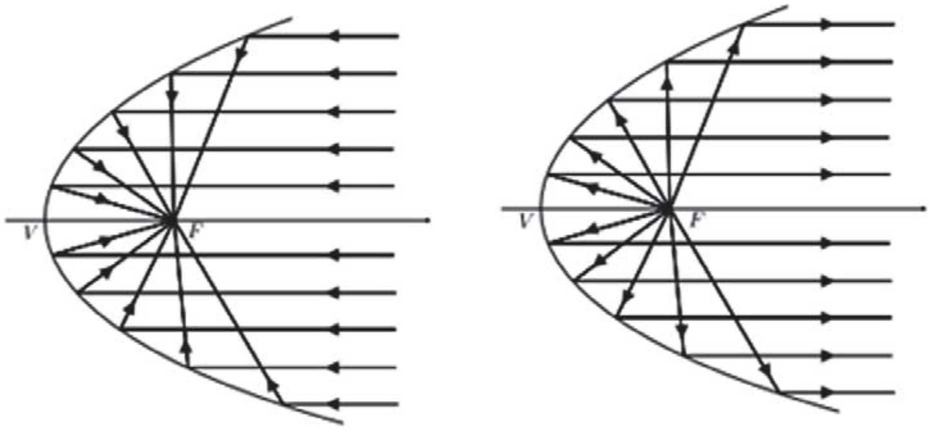


Figura 4.14: Raios refletidos na parábola
Fonte: Gaspar (2014)

Girando a parábola em torno do seu eixo de simetria, obtém-se uma superfície chamada parabolóide elíptico. Considerando uma superfície de um parabolóide elíptico e a propriedade refletora, é possível encontrar os faróis de carro como outra aplicação no cotidiano comum.

Figura 4.15: Farol do carro
Fonte: Gaspar (2014)

Este é o princípio do refletor parabólico que permite que a luz derivada da fonte se difunda em raios paralelos, formando o que chamamos de facho de luz, princípio este que pode ser encontrado em lanternas, holofotes e faróis de carros, conforme a Figura 4.15.

A seguir são apresentados uma tabela com o resumo das superfícies quádricas estudadas ao longo desse capítulo, identificando suas características e equação padrão.

Tabela 4.1: Resumo de Superfícies Quádricas

Superfície Quádrica	**Características**	**Equação Padrão**
Elipsoide	Nenhum sinal de menos	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperboloide de uma folha	Um sinal de menos	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperboloide de duas folhas	Dois sinais de menos	$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Paraboloide elíptico	Um termo linear, dois termos quadráticos com o mesmo sinal	$z-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Paraboloide hiperbólico	Um termo linear, dois termos quadráticos com sinais opostos	$z+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Cone Elíptico	Nenhum termo linear	$z^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

5 Atividades Propostas

A prática pedagógica por meio de projetos desenvolvidos em sala de aula possibilita inúmeras que facilitam o saber disciplinar de situações do dia-a-dia e do contexto do aluno, ressaltando sua articulação com situações do cotidiano. A prática reflexiva permite o desenvolvimento da capacidade de lidar com saberes específicos enfrentando situações reais por meio do desenvolvimento de competências e habilidades fundamentais para a autonomia das pessoas.

Em posse de tanta tecnologia, fica cada vez mais visível na vida das pessoas o uso de aparelhos mais sofisticados, mas nada se compara com a velocidade que vem crescendo a tecnologia dos computadores, onde praticamente tudo é possível ser feito através dele. Neste cenário, é possível utilizar-se desta tecnologia no ambiente escolar com vistas na promoção da aprendizagem em Matemática. Em especial no ensino de Geometria, tendo em vista que nas avaliações nacionais como o SAEBE e o ENEM tem apresentado significativa dificuldade por parte dos alunos no que tange os conteúdos Geométricos (Gripa, 2009, p. 02). Deste modo, a seguir são desenvolvidos um plano de aula de Matemática com o uso de nova tecnologia: o *Geogebra*.

5.1 Objetivo Geral

O Objetivo específico deste planejamento consiste em recordar os conteúdos já vistos em sala de aula, porém de uma forma mais construtivista, tendo como objetivo principal propor que os próprios alunos realizem construções de figuras geométricas cônicas estudadas em sala através do Caderno do Aluno - volume 1 - 3^0 ano do Ensino médio disponíveis em **Anexo** e a partir da construção poder visualizar e conceituar. E ainda:

- Identificar cônicas, bem como diferenciá-las e classificá-las (elipse, parábola e hipérbole);
- Reconhecer componentes de cada uma das cônicas (eixo, foco, vértice, distância focal, entre outros);
- Definição e propriedades das cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

5.2 Objetivo específico

Os objetivos específicos foram organizados para cada um dos conteúdos, a saber: cônicas: elipse, hipérbole e parábola.

1. Objetivos específicos em relação ao conceito de elipse:
    - Conceituar o que é uma elipse;
    - Identificar um exemplo de cônica: a elipse;
    - Realizar construções de elipses através do uso do software Geogebra;
    - Reconhecer a circunferência como caso especial da elipse;
    - Concluir que a soma das distâncias dos focos seja sempre igual uma constante;
    - Definir o que é uma elipse.
2. Objetivos específicos em relação ao conteúdo de hipérbole:
    - Conceituar o que é uma hipérbole;
    - Identificar uma outra cônica: a hipérbole;
    - Reconhecer os diferentes tipos de hipérbole a partir do esboço de uma qualquer;
    - Realizar construções de hipérbole através do uso do software Geogebra;
    - Concluir que a diferença (em módulo) das distâncias dos focos seja sempre igual uma constante;
    - Definir o que é uma hipérbole.
3. Objetivos específicos em relação ao conteúdo de parábolas:
    - Conceituar o que é uma parábola;
    - Identificar um outro exemplo de cônica: a parábola;
    - Realizar construções de parábola através do uso do software Geogebra;
    - Concluir que um conjunto de pontos de um plano qualquer têm a mesma distância de um ponto de foco e de uma reta diretriz, sendo esse foco não pertencente a reta;
    - Definir o que é uma parábola.

5.3 Pré-Requisitos

- Reconhecer e conceituar um ponto;
- Saber identificar e possuir um conhecimento breve de reta, semirreta, segmento de reta e plano;
- Representar pares ordenados no plano cartesiano;
- Conhecer um computador bem como saber utilizar suas funções básicas.

5.4 Estrutura Curricular

Modalidade: Ensino Médio - alunos do 3^0 ano;

Componente Curricular: Matemática;

Tema: Cônicas e suas propriedades - Geometria.

5.5 Recursos Didáticos

1. Caderno do Aluno - volume 1 - 3^0 ano do Ensino Médio;
2. Laboratório de informática com o software Geogebra instalado em todas as máquinas;
3. Projetor multimídia e lousa interativa;
4. Questionários após construção das cônicas com o uso do Geogebra.

5.6 Duração das Atividades

Para o desenvolvimento desse plano de aula, serão necessários 13 aulas divididas da seguinte forma:

- 2 horas/aula para desenvolver a introdução de cônicas (elipse, hipérbole e parábola) contida no *Caderno do Aluno - volume 1* - 3^0 *ano do Ensino Médio* proposto em **Anexo**;
- 1 hora/aula para conhecer o software *GeoGebra* e suas ferramentas;
- 2 horas/aula para desenvolver as atividades propostas no Geogebra sobre elipse e em seguida, responder as questões propostas pelo professor, a fim de chegar aos objetivos já citados;

- 2 horas/aula para desenvolver as atividades propostas no Geogebra sobre hipérbole e posteriormente, responder as questões propostas pelo professor, a fim de alcançar os objetivos mencionados anteriormente;
- 2 horas/aula para desenvolver as atividades propostas no Geogebra sobre parábola e em seguida, responder as questões propostas pelo professor, a fim de alcançar os objetivos;
- 1 hora/aula para conceituar e definir o que é cônica e suas propriedades. Em seguida, realizar as atividades do *Caderno do Aluno* sobre cônicas;
- 3 horas/aula para responder os questionários de cônicas propostos ao final de cada atividade proposta, sendo 1 hora/aula para cada questionário. As 3 listas de exercícios contêm no total 15 questões de cônicas, divididos entre elipse, hipérbole e parábola.

5.7 Metodologia

A metodologia consiste em que a aula aconteça de maneira expositiva e dialogada, no qual os alunos serão questionados em relação a cada conteúdo que estejam sendo relembrados, ou seja, reta, semirreta, segmento de reta, ponto. Com o intuito de introduzir o conceito de seções cônicas aos alunos do 3^0 ano do Ensino Médio e alcançar os objetivos pretendidos nesse plano de aula, inicialmente faz-se o uso do material em **Anexos** proposto no *Caderno do Aluno - volume 1 -* 3^0 *ano do Ensino Médio*, disponibilizando de 2 horas/aula para cada cônica a ser apresentada.

Na aula seguinte, os alunos são encaminhados para a sala de informática disponível na própria escola e familiarizar com o software Geogebra bem como conhecer suas ferramentas, dispondo de, no mínimo, uma (01) hora/aula. É importante que o mediador fique atento a prática dos alunos para o manuseio das novas tecnologias e, caso necessário, disponibilize de mais tempo de modo que o aluno se socialize com o software matemático.

E por fim, nas aulas seguintes os alunos são direcionados para a construção da figura geométrica - cônicas (elipse, hipérbole e parábola), para através da construção realizada no Geogebra, poder realizar as observações pertinentes das figuras construídas organizadas em três atividades: **Atividade 1 - Construindo uma elipse**, **Atividade 2 - Construindo uma hipérbole** e **Atividade 3 - Construindo uma parábola**. Para o desenvolvimento dessas atividades é necessário 2 horas/aula cada.

A atividade 1 é realizada em grupo, com no máximo três alunos, com o objetivo de identificar uma Elipse e suas características. Assim, é possível realizar a caracterização da cônica: Elipse e algumas aplicações. Para tanto, faz-se necessário utilizar giz, lousa, folhas de orientações (professor/alunos), computador para construir as cônicas pelo software geogebra já instalado na máquina. Esta etapa poderá ter duração de duas aulas simples, ou seja, 50 minutos cada.

A atividade 2 também é realizada em grupo, com no máximo três alunos, do 3º ano do ensino médio. Esta tem como objetivo identificar uma Hipérbole e suas características. Assim, deve ter em seu conteúdo a caracterização da cônica, Hipérbole e algumas aplicações. Para tanto, é necessário utilizar giz, lousa, folhas de orientações (professor/alunos), computador para construir as cônicas pelo software geogebra já instalado na máquina. Para a realização dessa atividade é preciso ter a disposição de duas aulas simples, ou seja, 50 minutos cada.

E por fim, na atividade 3 é realizada em grupo, com no máximo três alunos, do 3º ano do ensino médio. Esta tem como objetivo conceituar o que é uma Parábola; identificar um outro exemplo de cônica: a Parábola; realizar construções de Parábola através do uso do software Geogebra; concluir que um conjunto de pontos de um plano qualquer têm a mesma distância de um ponto de foco e de uma reta diretriz, sendo esse foco não pertencente a reta; definir o que é uma parábola. Para tanto, é necessário utilizar giz, lousa, folhas de orientações (professor/alunos), computador para construir as cônicas pelo software geogebra já instalado na máquina. Esta etapa pode ter duração de duas aulas simples. Caso necessário, o mediador pode usufruir de mais aulas a fim de desenvolver todas as atividades com eficaz.

Após o desenvolvimento de cada atividade, deve-se aplicar a definição de cada cônica utilizando a distância entre dois pontos e chegar à equação reduzida de cada curva, conforme o **Capítulo 3** e, por fim, responder ao questionário de questões disponíveis ao final de cada atividade.

5.8 Atividade 1 - Construindo uma Elipse

Atividade 1: Identificando uma elipse e suas características.

Atividade individual e/ou em grupo: Grupos de, no máximo, três alunos.

Público alvo: Alunos do 3º ano do ensino médio.

Conteúdo(s): Caracterização da cônica: elipse e algumas aplicações.

Objetivo(s) (competências/habilidades): Conceituar o que é uma elipse; identificar um exemplo de cônica: a elipse; realizar construções de elipses através do uso do software geogebra; reconhecer a circunferência como caso especial da elipse; concluir que a soma das distâncias dos focos seja sempre igual uma constante; definir o que é uma elipse.

Material utilizado: Giz, lousa, folhas de orientações (professor/alunos), computador para construir as cônicas pelo software geogebra já instalado na máquina.

Tempo de duração: 2 aulas simples (50 minutos cada).

Procedimento pedagógico/orientações ao docente: O tema envolve o conceito de construção de cônicas através do software geogebra, o qual necessita que os discentes tenham conhecimentos prévios sobre o conceito de elipse e, ainda, manuseio e habilidades no uso de novas tecnologias: o software geogebra e suas ferramentas. Utilizando o passo-a-passo para construir uma elipse, mostre as principais características da cônica construída por meio de cada passo. È importante que, no decorrer da atividade proposta os alunos possam sempre interagir uns com os outros, manifestando suas opiniões, e caso necessário o mediador intervir, solucionando as dúvidas que forem surgindo. È essencial que o mediador fique atento e dê uma maior atenção aos alunos que não têm muita habilidade para manusear com facilidade o computador, a fim de que possa obter um maior aproveitamento da aula, podendo alcançar os objetivos pretendidos nessa atividade.

Introdução

Uma seção cônica é uma curva obtida pela interseção de um cone circular reto com um plano. Os três tipos de curvas cônicas são a elipse, a hipérbole, e a parábola. Será desenvolvida a construção da elipse e a circunferência, um caso especial da elipse. A abordagem desse conteúdo no curso do Ensino Médio geralmente segue o modelo tradicional (mecânico), onde se exige que os alunos decorem as fórmulas relacionadas ao assunto trabalhado sem exigir um real entendimento sobre o mesmo. Busca-se contornar esse problema através do uso de novas tecnologias como complemento para o conteúdo discutido. Para tanto, inicialmente faz-se o uso do *Caderno do do Aluno - 3º ano do Ensino Médio - vol. 1 - Situação de Aprendizagem 4: Circunferências e cônicas* para introduzir e explorar sobre o conceito de cônicas disponibilizado em **Anexos**. Em seguida, a partir do software de geometria dinâmica geogebra, deve-se fazer a construção da elipse, utilizando ferramentas próprias do software para a construção de objetos matemáticos.

Etapa 1: Construção de Elipse no Geogebra

1^0 **Passo:** Inicie o Geogebra;

2^0 **Passo:** Marque os pontos F_1 e F_2 quaisquer distintos na área de trabalho;

3^0 **Passo:** Marque um ponto P qualquer, não pertencente ao segmento F_1F_2;

4^0 **Passo:** Selecione a ferramenta **Elipse** e selecione os pontos F_1, F_2 e P, respectivamente;

5^0 **Passo:** Com a ferramenta de **Ponto no Objeto**, crie um outro ponto D distinto de P sobre a elipse;

6^0 **Passo:** Construa dois segmentos de reta DF_1 e DF_2 denotados por f e g, respectivamente e exiba o rótulo com o valor de suas medidas;

7^0 **Passo:** No comando de entrada, digite $s = f + g$;

8^0 **Passo:** Refaça os passos $5, 6$ e 7 por três vezes seguidos, e adote outro ponto Q, R e S em cada repetição;

9^0 **Passo:** Mova o ponto D livremente;

10^0 **Passo:** Observe o valor da soma $DF_1 + DF_2$ que mantém-se constante para qualquer valor do ponto D na elipse;

11^0 **Passo:** Clique sobre o ponto D com o botão direito do mouse e selecione a opção **Animar**.

Etapa 2 - Questionário: Construção de Elipse no Geogebra

1. Observe os valores de f_1 e f_2. O que notou?
2. Alterando as posições dos pontos F_1, F_2 e D, o que percebeu?
3. Observe o valor da soma $DF_1 + DF_2$. O valor se altera ao mudar a posição do ponto D?
4. Caso os pontos F_1 e F_2 e se coincidirem, o que você pode observar?
5. Observando todas as informações dadas e adquiridas, dê uma definição para essa curva elipse.

Espera-se que o aluno após a construção e análise das informações obtidas, conclua que, a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos focos é constante. E, a Circunferência é um caso especial da elipse, caso seus focos se coincidirem.

Etapa 3 - Questionário sobre a cônica: Elipse

Essa seção é destinada para um questionário composto por 05 questões sobre cônicas, sendo que estas foram divididas em 3 questões objetivas e 2 dissertativas, contendo o gabarito de respostas ao final da lista de exercícios propostas. Tais exercícios foram selecionados com base nas sequências de livros inseridos como referência neste trabalho.

Lista de exercícios

1. Determine o centro, a medida do eixo maior, as medida do eixo menor e as coordenadas dos focos F_1 e F_2 da elipse cuja equação é $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

2. (PUC-SP) Um ponto P da elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ dista 2 de um dos focos. Qual é a distância de P ao outro foco da elipse?

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 5

   (e) 7

3. (Cescem-SP) As elipses $9x^2 + 16y^2 = 25$ e $16x^2 + 9y^2 = 25$:

   (a) não tem ponto em comum.

   (b) tem 1 ponto em comum.

   (c) têm 2 pontos em comuns.

   (d) têm 3 pontos em comuns.

   (e) têm 4 pontos em comuns.

4. (Mackenzie-SP) Os pontos do plano que satisfazem a equação $5x^2 + 3y^2 = 15$ representam:

   (a) uma parábola;

   (b) uma elipse;

   (c) um par de retas;

   (d) uma circunferência;

   (e) uma hipérbole.

5. Um satélite de órbita elíptica e excentricidade $\dfrac{1}{3}$ viaja ao redor de um planeta situado em um dos focos da elipse. Sabendo que a distância mais próxima do satélite ao planeta é de 300 km, calcular a maior distância.

Respostas

1.
   - Centro da elipse localizado na origem, ou seja, no ponto $C(0,0)$;
   - Medida do eixo maior: $2a = 8$ e medida do eixo menor: $2b = 3$, $a > b$;
   - Focos $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$.
2. (c)
3. (e)
4. (b)
5. 600 km.

5.9 Atividade 2 - Construindo uma Hipérbole

Atividade 2: Identificando uma Hipérbole e suas características.

Atividade individual e/ou em grupo: Grupos de, no máximo, três alunos.

Público alvo: Alunos do 3º ano do ensino médio.

Conteúdo(s): Caracterização da cônica: hipérbole e algumas aplicações.

Objetivo(s) (competências/habilidades): Conceituar o que é uma hipérbole; identificar uma outra cônica: a hipérbole; reconhecer os diferentes tipos de hipérbole a partir do esboço de uma qualquer; realizar construções de hipérbole através do uso do software Geogebra; concluir que a diferença (em módulo) das distâncias dos focos seja sempre igual uma constante; definir o que é uma hipérbole.

Material utilizado: Giz, lousa, folhas de orientações (professor/alunos), computador para construir as cônicas pelo software geogebra já instalado na máquina.

Tempo de duração: 2 aulas simples (50 minutos cada).

Procedimento pedagógico/orientações ao docente: O tema envolve o conceito de construção de cônicas através do software geogebra, o qual necessita que os discentes tenham conhecimentos prévios sobre o conceito de Hipérbole e, ainda, manuseio e habilidades no uso de novas tecnologias: o software geogebra e suas ferramentas. Utilizando o passo-a-passo para construir uma hipérbole, mostre as principais características da cônica construída por meio de cada passo. Alguns alunos podem não ter muita habilidade para manusear com facilidade o computador, por isso é essencial que o mediador fique atento e dê uma maior atenção a esses, a fim de que possa obter um maior aproveitamento da aula, podendo alcançar os objetivos pretendidos nessa atividade.

Introdução

Uma seção cônica é uma curva obtida pela interseção de um cone circular reto com um plano. Será desenvolvida nessa atividade a construção de hipérbole. Para tanto, inicialmente faz-se o uso do *Caderno do do Aluno - 3º ano do Ensino Médio - vol. 1 - Situação de Aprendizagem 4: Circunferências e cônicas* para introduzir e explorar sobre o conceito de cônicas, em especial, a hipérbole, disponibilizado em **Anexos**. Em seguida, a partir do software de geometria dinâmica geogebra, deve-se fazer a construção da hipérbole, utilizando ferramentas próprias do software para a construção de objetos matemáticos.

Etapa 1 - Construção de Hipérbole no Geogebra

1^0 **Passo:** Inicie o Geogebra;

2^0 **Passo:** Marque os pontos F_1 e F_2 quaisquer distintos na área de trabalho;

3^0 **Passo:** Marque um ponto P qualquer, não pertencente ao segmento F_1F_2;

4^0 **Passo:** Selecione a ferramenta **Hipérbole** e selecione os pontos F_1, F_2 e P, respectivamente;

5^0 **Passo:** Com a ferramenta de **Ponto no Objeto**, crie um outro ponto D distinto de P sobre a hipérbole;

6^0 **Passo:** Construa dois segmentos de reta DF_1 e DF_2 denotados por f e g, respectivamente e exiba o rótulo com o valor de suas medidas;

7^0 **Passo:** No comando de Entrada do GeoGebra, digite $d = abs(f - g)$. Note que, a função abs dará o módulo de $DF_1 - DF_2$;

8^0 **Passo:** Refaça os passos $5, 6$ e 7 por três vezes seguidos, e adote outro(s) ponto(s) Q, R e S em cada repetição;

9^0 **Passo:** Mova o ponto D livremente;

9^0 **Passo:** Observe o valor do módulo da diferença entre DF_1 e DF_2 mantém-se constante para qualquer valor do ponto D na hipérbole;

10^0 **Passo:** Clique sobre o ponto D com o botão direito do mouse e selecione a opção **Animar**.

Etapa 2 - Questionário: Construção de Hipérbole no Geogebra

1. Observe os valores de f_1 e f_2. O que notou?
2. Alterando as posições dos pontos F_1, F_2 e P, o que percebeu?
3. Observe o valor do módulo da diferença entre DF_1 e DF_2 . O valor se altera ao mudar a posição do ponto D?
4. Observando todas as informações dadas e adquiridas, dê uma definição para essa curva hipérbole.

Após a construção de hipérbole e analisar as informações e características obtidas, espera-se que o aluno conclua que, a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias aos focos é constante.

Etapa 3 - Questionário sobre a cônica: Hipérbole

Essa seção é destinada para um questionário composto por 05 questões sobre cônicas, sendo que estas foram divididas em 3 questões objetivas e 2 dissertativas, contendo o gabarito de respostas ao final da lista de exercícios propostas. Tais exercícios foram selecionados com base nas sequências de livros inseridos como referência neste trabalho.

Lista de exercícios

1. Determine a equação da hipérbole cujos focos são $F_1(-2,-2)$ e $F_2(2,-2)$, dado que a medida do eixo imaginário é igual a $2\sqrt{3}$.
2. (UFPE) O resultado da interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano paralelo ao eixo, sem passar pelo vértice, pode ser:

   (a) uma hipérbole;

   (b) uma circunferência;

   (c) uma elipse;

   (d) uma parábola;

   (e) um par de retas.
3. (PUC-MG) Se o ponto $P(2,h)$ pertence à curva de equação $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$, o valor positivo de h é:

(a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

(b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

(c) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

(d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

(e) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

4. Os pontos de interseção da reta $y = \dfrac{1}{4}x - 1$ com a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 16$ são:

   (a) $(-4, 0)$ e $(\dfrac{-20}{3}, \dfrac{-8}{3})$;

   (b) $(4, 0)$ e $(\dfrac{20}{3}, \dfrac{8}{3})$;

   (c) $(4, 0)$ e $(\dfrac{-20}{3}, \dfrac{8}{3})$;

   (d) $(4, 0)$ e $(\dfrac{-20}{3}, \dfrac{-8}{3})$;

   (e) n.d.a.

5. Ache as equações da hipérbole e das suas assíntotas, conhecendo:

   (a) os focos $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$ e a medida do eixo transverso, 6;

   (b) um foco $F_1 = (0, -\sqrt{11})$, a distância focal $2\sqrt{11}$, e a medida do eixo conjugado $2\sqrt{11}$ (F_2 no eixo Oy).

Respostas

1. $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1.$

2. (a)

3. (d)

4. (d)

5. **(a)** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad y = \dfrac{2}{3}x \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{2}{3}x.$

   (b) $-\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad y = \dfrac{2}{\sqrt{7}}x \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}x.$

5.10 Atividade 3 - Construindo uma Parábola

Atividade 3: Identificando uma parábola e suas características.

Atividade individual e/ou em grupo: Grupos de, no máximo, três alunos.

Público alvo: Alunos do 3º ano do ensino médio.

Conteúdo(s): Caracterização da cônica: parábola e algumas aplicações.

Objetivo(s) (competências/habilidades): Conceituar o que é uma parábola; identificar um outro exemplo de cônica: a parábola; realizar construções de parábola através do uso do software Geogebra; concluir que um conjunto de pontos de um plano qualquer têm a mesma distância de um ponto de foco e de uma reta diretriz, sendo esse foco não pertencente a reta; definir o que é uma parábola.

Material utilizado: Giz, lousa, folhas de orientações (professor/alunos), computador para construir as cônicas pelo software Geogebra já instalado na máquina.

Tempo de duração: 2 aulas simples (50 minutos cada).

Procedimento pedagógico/orientações ao docente: O tema envolve o conceito de construção de cônicas através do software Geogebra, o qual necessita que os discentes tenham conhecimentos prévios sobre o conceito de parábola e, ainda, manuseio e habilidades no uso de novas tecnologias: o software Geogebra e suas ferramentas. Utilizando o passo-a-passo para construir uma parábola, mostre as principais características da cônica construída por meio de cada passo. Alguns alunos podem não ter muita habilidade para manusear com facilidade o computador, por isso é essencial que o mediador fique atento e dê uma maior atenção a esses, a fim de que possa obter um maior aproveitamento da aula, podendo alcançar os objetivos pretendidos nessa atividade.

Introdução

Uma seção cônica é uma curva obtida pela interseção de um cone circular reto com um plano. Será desenvolvida nessa atividade a construção de parábola. Para tanto, inicialmente faz-se o uso do *Caderno do do Aluno - 3º ano do Ensino Médio - vol. 1 - Situação de Aprendizagem 4: Circunferências e cônicas* para introduzir e explorar sobre o conceito de cônicas, em especial, a parábola, disponibilizado em **Anexos**. Em seguida, a partir do software de geometria dinâmica Geogebra, deve-se fazer a construção da hipérbole, utilizando ferramentas próprias do software para a construção de objetos matemáticos.

Etapa 1 - Construção de Parábola no Geogebra

1^0 **Passo:** Inicie o Geogebra;

2^0 **Passo:** Construa uma reta d qualquer com a ferramenta **Reta definida por Dois Pontos** e em seguida, oculte os dois pontos usados na construção da reta;

3^0 **Passo:** Marque um ponto F qualquer, não pertencente a reta;

4^0 **Passo:** Selecione a ferramenta **Parábola** e selecione o ponto F e a reta d, nessa ordem. Obtenha o foco F e a reta diretriz da parábola d;

5^0 **Passo:** Com a ferramenta de **Ponto no Objeto**, crie um outro ponto P pertencente à parábola;

6^0 **Passo:** Com a ferramenta de **Reta Perpendicular** trace uma reta r perpendicular a d, passando por P;

7^0 **Passo:** Marque o ponto de intersecção da reta r e da reta d, nomeando de G;

8^0 **Passo:** Construa dois segmentos de reta PF e PG, denotados por f e g, respectivamente;

9^0 **Passo:** Oculte a reta r e exiba o rótulo com o valor da unidade de medidas de ambos os segmentos f e g;

9^0 **Passo:** Mova o ponto P livremente sobre a Parábola. Observe o valor dos segmentos PF e PG. Mantiveram a mesma unidade de medida?

Etapa 2 - Questionário: Construção de Parábola no Geogebra

1. Observe os pontos F e P. O que notou?
2. Alterando as posições dos pontos F, P e G, o que percebeu?
3. Caso o foco F pertença a reta d, o que se pode concluir?
4. Observando todas as informações dadas e adquiridas, de uma definição para essa curva parábola.

Etapa 3 - Questionário sobre a cônica: Parábola

Essa seção é destinada para um questionário composto por 05 questões sobre cônicas, sendo que estas foram divididas em 2 questões objetivas e 3 dissertativas, contendo o gabarito de respostas ao final da lista de exercícios propostas. Tais exercícios foram selecionados com base nas sequências de livros inseridos como referência neste trabalho.

Lista de exercícios

1. Uma família de parábolas tem equação $y = ax^2 + bx + 8$. Sabendo que uma delas passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(3, -1)$, determinar as equações paramétricas desta parábola.

2. A equação da parábola com vértice na origem e foco no ponto $F(0, \frac{1}{2})$ é:

   (a) $y^2 = -2x$;

   (b) $x^2 = -2y$;

   (c) $x^2 = 2y$;

   (d) $y^2 = 2x$;

   (e) $y^2 = 4x$.

3. O foco da parábola de equação $y^2 = 12x$ é:

   (a) $F(0, 3)$;

   (b) $F(-3, 0)$;

   (c) $F(6, 0)$;

   (d) $F(3, 0)$;

   (e) $F(-6, 0)$.

4. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção da reta $s : y - x = -1$ com a parábola $(x - 2)^2 = 3(y - 1)$? E o ponto de intersecção da reta s com a reta diretriz da parábola?

5. Determinar uma equação da curva descrita por um ponto que se move, de modo que sua distância ao ponto $A(-1, 3)$ seja:

   (a) igual a sua distância à reta $x = 3$;

   (b) a metade de sua distância à reta $x = 3$;

   (c) o dobro de sua distância à reta $x = 3$.

Respostas

1. $x = t + 3$ e $y = t^2 - 1.$

2. (c)

3. (d)

4. $(2, 1)$ e $(5, 4)$; $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$.

5. **(a)** $y^2 - 6y + 8x + 1 = 0$ (parábola)

   (b) $3x^2 + 4y^2 + 14x - 24y + 31 = 0$ (elipse)

   (c) $3x^2 - y^2 - 26x + 6y + 26 = 0$ (hipérbole)

5.11 Avaliação

Avaliação é realizada de forma continuada em todas as etapas do processo.

Na primeira etapa é realizada a introdução de cônicas, disponível no caderno do aluno, com o objetivo de identificar o conhecimento dos alunos sobre as cônicas, apresentando seus aspectos conceituais e históricos.

Na segunda etapa verifica-se a capacidade de dedução do aluno à partir das informações fornecidas, por meio delas, o aluno realiza as construções de elipse, hipérbole e parábola, para somente depois disso, o mediador fornecer as fórmulas e equações a serem resolvidas pelos alunos.

Destaca-se que o conhecimento sobre cônicas a princípio era escasso, no entanto, após o desenvolvimento de cada uma das atividades propostas no capítulo 5, se faz necessário a aplicação de um questionário em grupo que possibilite verificar se os alunos alcançaram os objetivos apontados neste plano de aula.

6 Considerações finais

Pesquisas em educação matemática mostram que, no processo ensino-aprendizagem, o aluno se apropria de novos conhecimentos quando participa ativamente da construção destes. O uso de metodologias variadas é um dos caminhos possíveis para o envolvimento do aluno na construção do seu saber. Assim, neste contexto, o computador como ferramenta aliada a uma escolha adequada dos softwares e das atividades tem mostrado resultados positivos.

O uso do software permite aos alunos realizarem construções, manipulação, visualização de diversas formas e ângulos, conjecturas a partir da experimentação e observação, facilitando desta forma a compreensão dos conceitos geométricos em relação aos elementos da aprendizagem envolvidos.

Dentre os softwares educacionais disponíveis, encontra-se o Geogebra, trata-se de uma ferramenta de ensino adotada em centenas de sistemas educacionais do mundo, na qual permite aos alunos realizarem construções, manipulação, explorar recursos para animação, visualização de diversas formas e ângulos, que permitem aumentar o nível de abstração.

Atualmente, o ensino das seções cônicas está incluído no Ensino Médio. Inicialmente, são ensinadas as fórmulas, para somente depois de sua aplicação, a figura das cônicas são mostradas, que aliás, muitas vezes os alunos não conseguem atingir o final da matéria, e dificilmente alcançam o conteúdo completo. Desta forma, o presente estudo propõe, por meio do Software Geogebra, que o ensino siga um método inverso, primeiramente o aluno aprenderá a montar a figura, se familiarizar com suas dimensões, para em seguida ele venha a reconhecer a necessidade das fórmulas. Da forma como vem sendo aplicado o ensino das seções cônicas em sala de aula, muitas vezes os alunos não conseguem atingir o final da matéria, e dificilmente alcançam o conteúdo completo.

Em relação ao conteúdo de quádricas, este não encontra espaço dentro da grade curricular do Ensino Médio. Mesmo assim, deixa-se uma proposta para que se estude a possibilidade de aplicar este conteúdo no Ensino Superior, da mesma forma com que foi construído as Seções Cônicas no Ensino Médio.

Destaca-se que todas as atividades foram criadas para serem desenvolvidas em ambiente escolar fazendo uso do software GeoGebra. Embora tenham sido propostas atividades, não foi possível colocá-las em prática, tendo em vista que a escola na qual seciono não tem o Ensino Médio, no entanto, a partir de um questionário aplicado aos professores, as atividades poderiam ser melhoradas e com a opinião dos profissionais docentes é possível convergir para corroborar com as ideias iniciais propostas.

É possível ter a convicção que, desta maneira o mediador vai poder fazer uma verdadeira avaliação crítica das atividades, vai ter condições, por exemplo, de avaliar se o tratamento matemático feito na atividade é compatível com o conhecimento dos seus alunos, se ela está muito extensa, se os itens estão por demais repetitivos, se as palavras empregadas no texto estão muito sofisticadas, para série específica ou pelo contrário, estão muito simplistas.

Por fim, destaca-se a importância de o professor promover, ao final de cada sessão no computador, uma ampla discussão sobre as questões propostas e as diversas soluções possíveis. Isto é fundamental porque todas as atividades foram elaboradas com o objetivo de levar o aprendiz a refletir, agir, e a partir de suas ações, levantar hipóteses sobre o conteúdo. No entanto, para que os alunos possam se apropriar das noções fundamentais de geometria analítica é necessário que o professor conduza sempre um debate sobre as ações e ensaios realizados no software durante a manipulação no computador.

Referências

ALMEIDA, F. J., *Educação e Informática. Os computadores na escola.* São Paulo, SP, Cortez, 1988.

ALVES, S., *A geometria do globo terrestre.* IME/USP, 2015. Disponível no site:< http://www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf>. Acesso em: 15/04/2018.

BALDIN, Y.; FURUYA, Y., *Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra.* São Carlos: EdUFSCar. 2011.

BALDINI, L. A. F.; CYRINO, M. C. C. T., *Função seno - uma experiência com software GeoGebra na formação de professores de matemática.* Revista do Instituto de GeoGebra Internacional de São Paulo, v.1, p. CL-CLXIV, 2012.

BALESTRI, R., *Matemática: interação e tecnologia.* Volume 1 - 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BARCO, L., *A Laranja, a Terra e rato.* Revista Supertinteressante 1. 1997. p 85.

BORBA, M. C., *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de Aula e Internet em Movimento.* 1a ed; reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORDALLO, M., *As Cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro.* Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011.

BOULOS, P. e CAMARGO, I., *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial.* Prentice Hall: São Paulo, 2005.

BOYER, C., *História da Matemática.* 2a Edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação, *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.* MEC, SEB, BICEI, 2013.

BRASIL, PCN+ Ensino Médio., *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2002.

Costa, V. C., *Números Construtíveis.* Campina Grande, 2013. Disponível no site:< `http://mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Valderi.pdf/`>. Acesso em: 22/06/2018.

DELGADO, J., FRENSEL, K. e CRISSAFF, L., *Geometria Analítica Coleção PROFMAT.* Rio de janeiro:SBM, 2013.

GARCIA, L., *O legado de Johannes Kepler: O defensor da ciência empírica.* 2012. Disponível no site:< `http://dissecandoouniverso.blogspot.com/2012/01`>. Acesso em: 17/04/2017.

GASPAR, A. S., *As cônicas, quádricas e suas aplicações.* Dissertação do mestrado. Universidade de Brasília. 2014. p. 55-68.

GEOGEBRA. Disponível no site:< `www.geogebra.org`>. Acesso em 25/08/2017.

GIROTO, C. R. M.; POKER, R. B.; OMOTE, S. (Org.)., *As tecnologias nas práticas pedagógicas inclusivas Oficina Universitária.* São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

IEZZI, G. , *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica.* 5a edição. São Paulo: Editora Atual, 2005.

LIEBAN, D. E.; MULER, T. J., *Construção de utilitários com software GeoGebra: Uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos.* Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v.1. 2012. p. 37- 50.

LINHARES, G., *Coordenadas Cilíndricas e Esféricas, SlidePlayer, 2014.* Disponível no site:< `https://slideplayer.com.br/slide/385664/`>. Acesso em: 15/06/2018.

MOURA, M. O. de., *O jogo na educação matemática. In: O jogo e a construção do conhecimento.* São Paulo: FDE, n.10, p. 45-53, 1991.

OLIVEIRA, R., *Informática educativa: Dos planos e discursos à sala de aula.* 17a. edição. Campinas, SP: Papirus, 2012.

PINTEREST. *Ss find equations of parabolas that matches the McDonald's arches.*

(Would need to create a geogebra file), 2018. Disponível no site:< `https://br.pinterest.com/pin/260434790923531293/?lp=true`>. Acesso em: 11/09/2017.

PUC-SP., *Sobre o GeoGebra. In: Faculdades de Ciências Exatas e Tecnologia.* Disponível no site:< `http://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html`>. Acesso em 12/12/2017.

RÊGO, J. A., *A importância das TIC na promoção de uma escola inclusiva.* Acedido setembro, 14, 2013.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U. e BORTOLOSSI, H. J., *Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra.* Instituto de Matemática e Estatística. 1a. Conferência Latino Americana de GeoGebra, 2011.

SANCHO, J. M. e HERNÁNDEZ, F., *Tecnologias para transformar a educação.* Tradução de Valério Campos. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

SANTOS, M. H. *Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra.* Dissertação do mestrado. Universidade Federal de Goiás, 2014. p. 46-54.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. , *Caderno do Aluno - Matemática* - 3^0 *ano do ensino médio.* Vol. 1. São Paulo: Nova edição, 2014 - 2017.

SEVERIANO, T. P. , *Estudo das cônicas: uma proposta didática com uso de GeoGebra para o Ensino Médio.* Dissertação de Mestrado profissional Em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

SMOLE, K. e DINIZ, M.., *Matemática ensino médio.* Volume 3. São Paulo: Saraiva, 2005.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. , *Geometria analítica.*2. edição. São Paulo: Makron Books, 1987.

SOMMERFELD, G. F., *Cônicas, quádricas e suas aplicações.* Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, Belo Horizonte, 2013. p. 29-32.

VALENTE, J. A. , *Diferentes usos do Computador na Educação, in Valente, J. A. (org.), Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação.* Campinas, SP, Gráfica Central da Unicamp, 1993.

VENTURI, J. J. , *Álgebra e Vetorial e Geometria Analítica*. 5ª ed. Curitiba. 1949. Disponível no site:< `http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf`>. Acesso em 25/09/2017.

VIEIRA, G., *Ponte Hercilio Luz: A história do principal cartão postal de Floripa*, 2016. Disponível no site:< `http://vemfloripar.com.br/ponte-hercilio-luz`>. Acesso em: 24/04/2017.

WIKIMEDIA. *As três seções cônicas criadas quando um cone duplo é cruzado com um plano, 2018*. Disponível no site:< `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conic_sections_with_plane.svg` >. Acesso em: 05/05/2017.

A Apêndice A: Construções geométricas

No programa computacional GeoGebra há construções geométricas que podem ser realizadas de diferentes maneiras. Pode-se, por exemplo, utilizar diferentes conceitos algébricos ou geométricos para construir o mesmo objeto. Nessa seção, são inseridos exercícios resolvidos de cônicas e quádricas fazendo uso de construções geométricas no software Geogebra.

Resolução de exercícios fazendo uso do Geogebra

1. Construir no plano cartesiano a elipse cuja equação é dada por:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

Resolução

Digite a equação da elipse no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**. Logo, obtém-se a Figura A.1:

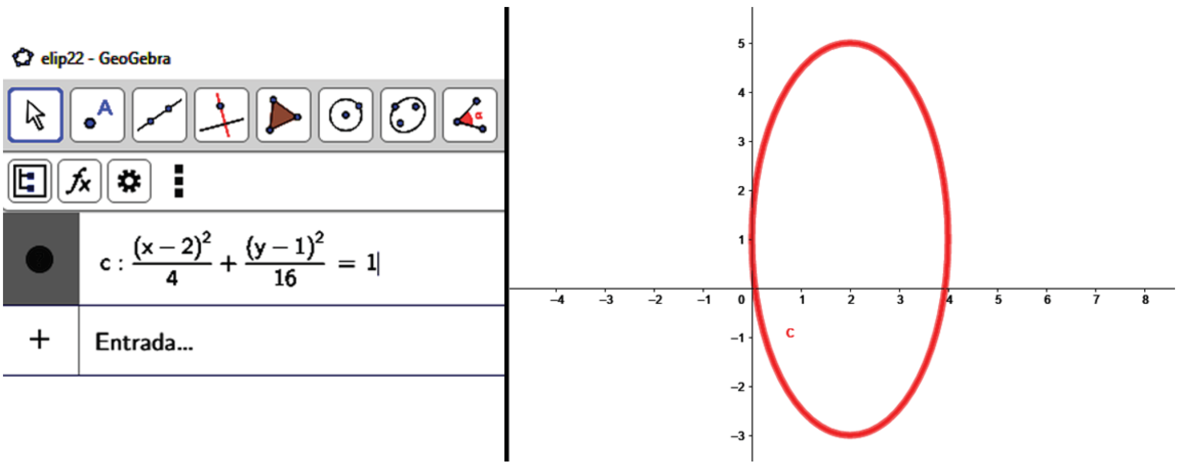


Figura A.1: Elipse construída no Geogebra à partir da equação fornecida

2. Construir uma elipse com focos $F_1(-4,2)$ e $F_2(-4,8)$ e que passe pelo ponto $P(5,0)$.

Resolução

Acesse o menu **Arquivo** e escolha a opção **Nova Janela** para abrir um novo arquivo.

Em seguida, crie um ponto F_1, digitando $F_1(-4,2)$ no campo Entrada e pressionando a tecla **Enter**.

Repita o procedimento para marcar os pontos $F_2(-4,8)$ e $P(5,0)$.

Selecione o botão **Elipse** e clique sobre os focos e o ponto P (pertencente à elipse), nesta ordem, para construir a elipse no plano cartesiano, obtendo a Figura A.2:

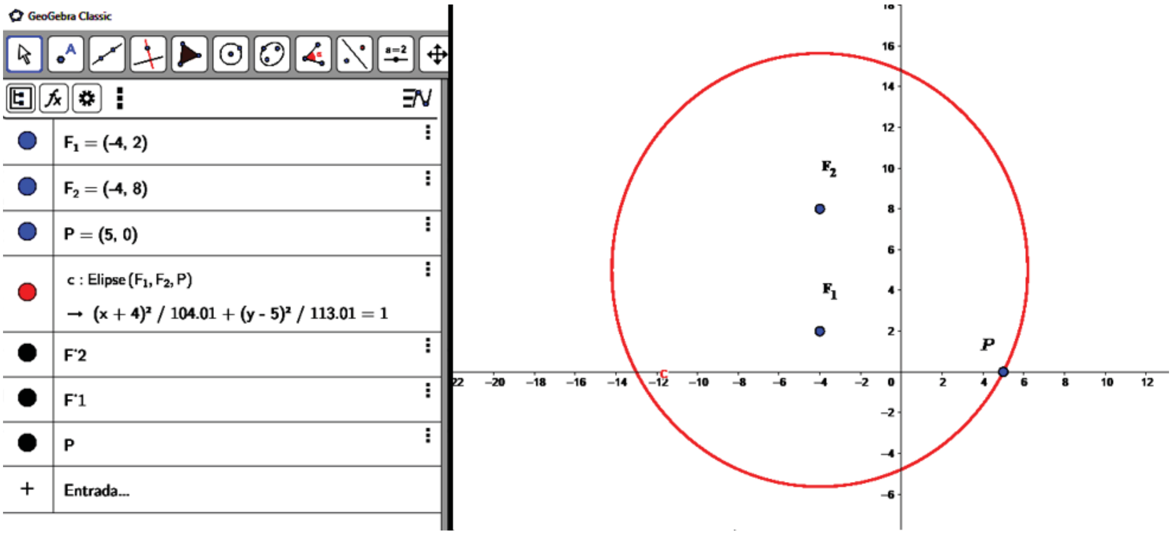


Figura A.2: Elipse construída no Geogebra à partir de seus focos e um ponto P

Observe que, a equação da elipse aparece na Janela de Álgebra.

Para exibí-la na forma reduzida, clique com o botão direito do mouse sobre a equação e escolha a opção Equação $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$.

Logo, obtém-se a equação reduzida da elipse construída dada por:

$$\frac{(x+4)^2}{104,01}+\frac{(y-5)^2}{113,01}=1,$$

cujos os focos são $F_1(-4,2)$ e $F_2(-4,8)$.

3. Verificar se a equação $25x^2 - 36y^2 = 900$ representa uma hipérbole. Caso afirmativo, escreva-a na forma reduzida.

Resolução

Digite a equação dada no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**.
Logo, obtém-se a Figura A.3:

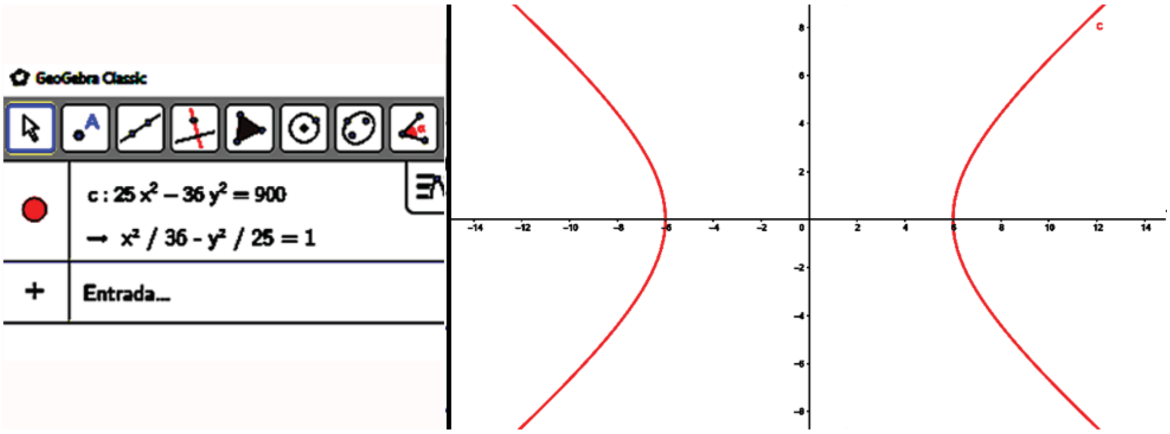


Figura A.3: Hipérbole construída no Geogebra à partir da equação fornecida

Observe que, a equação da hipérbole aparece na Janela de Álgebra.

Para exibí-la na forma reduzida, clique com o botão direito do mouse sobre a equação e escolha a opção Equação $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

Logo, obtém-se a equação reduzida da hipérbole construída dada por:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

4. Esboce o gráfico da parábola dada pela equação $(x+1)^2 = 6\left(y - \dfrac{1}{2}\right)$ e em seguida, escreva-a na forma reduzida.

Resolução

Digite a equação da parábola no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**.
Logo, obtém-se a Figura A.4:

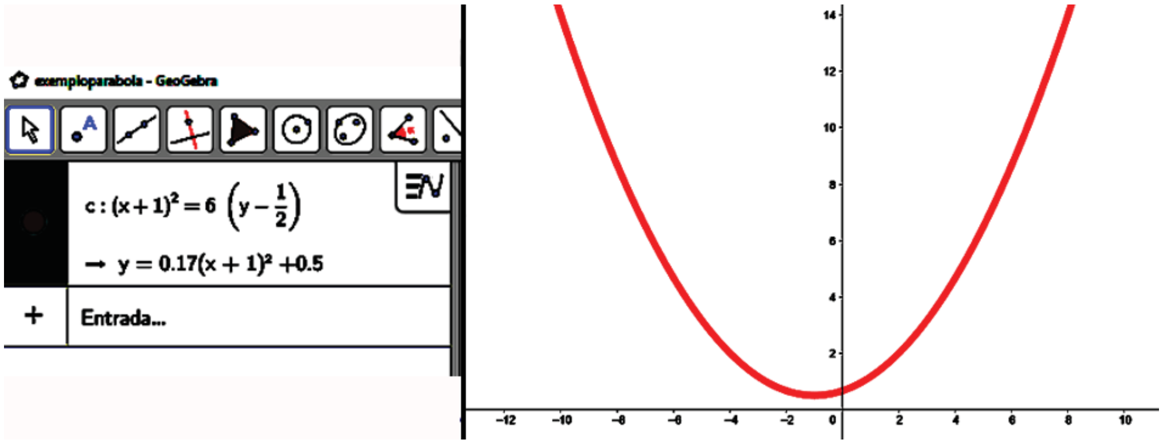


Figura A.4: Parábola construída no Geogebra à partir da equação fornecida

5. Ache os pontos de interseção da reta r de equação $3x - 2y - 6 = 0$ com:

(a) a elipse de equação $4y^2 + 9x^2 - 36 = 0$.

(b) a parábola de equação $4x + y^2 = 0$.

(c) a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 7$.

Resolução

Inicialmente, deve-se isolar a incógnita x da equação da reta r e em seguida, substituir o valor encontrado em cada umas das equações dadas pelas alternativas da questão, de modo a encontrar os pontos de interseção pelo método de substituição de sistemas lineares.

Tem-se:

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 6 = 0 &\Longrightarrow \\ 3x = 2y + 6 &\Longrightarrow \\ \therefore x = \frac{2}{3}y + 2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Em seguida, deve-se resolver o sistema linear de duas equações de cada alternativa do exercício, de modo a encontrar os pontos de interseção entre a reta r e a cônica dada.

(a) Dada a equação da elipse: $4y^2 + 9x^2 - 36 = 0$.

Substituindo a Equação A.1, tem-se:

$$
\begin{aligned}
4y^2 + 9x^2 - 36 = 0 \Longrightarrow 4y^2 + 9\left(\frac{2}{3}y + 2\right)^2 - 36 = 0 \Longrightarrow \\
4y^2 + 9\left(\frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{3}y + 4\right) - 36 = 0 \Longrightarrow \\
8y^2 + 24y \Longrightarrow 8y(y+3) = 0 \Longrightarrow \\
\therefore y = 0 \quad \text{ou} \quad y = -3.
\end{aligned}
$$

Encontrado o valor numérico de y, agora substituí-o na Equação A.1 e obter o valor numérico de x, a fim de encontrar os pontos de intersecção entre a reta r e a elipse dada nesse item.

Para $y = 0$, tem-se: $x = \frac{2}{3}.(0) + 2 \Longrightarrow x = 2.$
Se $y = -3$, tem-se: $x = \frac{2}{3}.(-3) + 2 \Longrightarrow x = 0.$

Portanto, os pontos de intersecção entre a reta r e a equação de elipse fornecida nesse item do exercício são: $A(2, 0)$ e $B(0, -3)$, como pode-se verificar facilmente no software Geogebra apenas digitando ambas equações da reta r e da elipse no comando de entrada, obtidos conforme a Figura A.5.

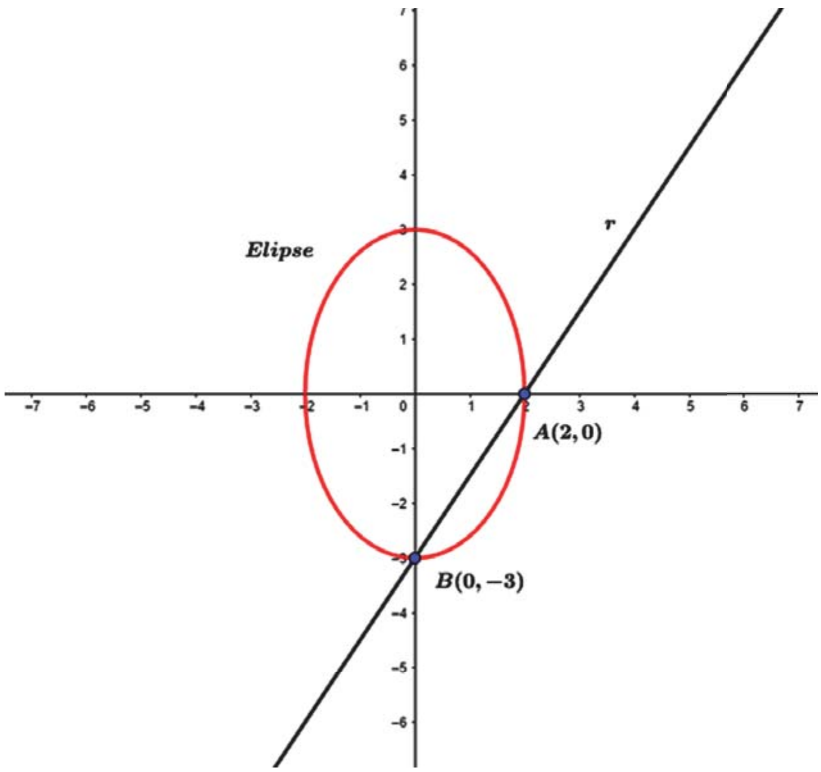


Figura A.5: Intersecção entre a reta r e a elipse

(b) Dada a equação da parábola: $4x + y^2 = 0$.

Substituindo a Equação A.1, obtém-se:

$$4x + y^2 = 0 \Longrightarrow \tag{A.2}$$
$$4\left(\frac{2}{3}y + 2\right) + y^2 = 0 \Longrightarrow$$
$$y^2 + \frac{8}{3}y + 8 = 0. \tag{A.3}$$

Observe que, a Equação A.3 é do 2º grau. Resolvendo-a pela fórmula de Báskara, tem-se:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Longrightarrow$$
$$\Delta = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4.1.8 \Longrightarrow$$
$$\Delta = \frac{16}{9} - 32 \Longrightarrow$$
$$\Delta \simeq -30.$$

Como $\Delta < 0$, a Equação A.3 não possui raízes reais, ou seja, não há pontos de intersecção entre a reta r e a equação da parábola dada nesse item do exercício, como ilustra a Figura A.6.

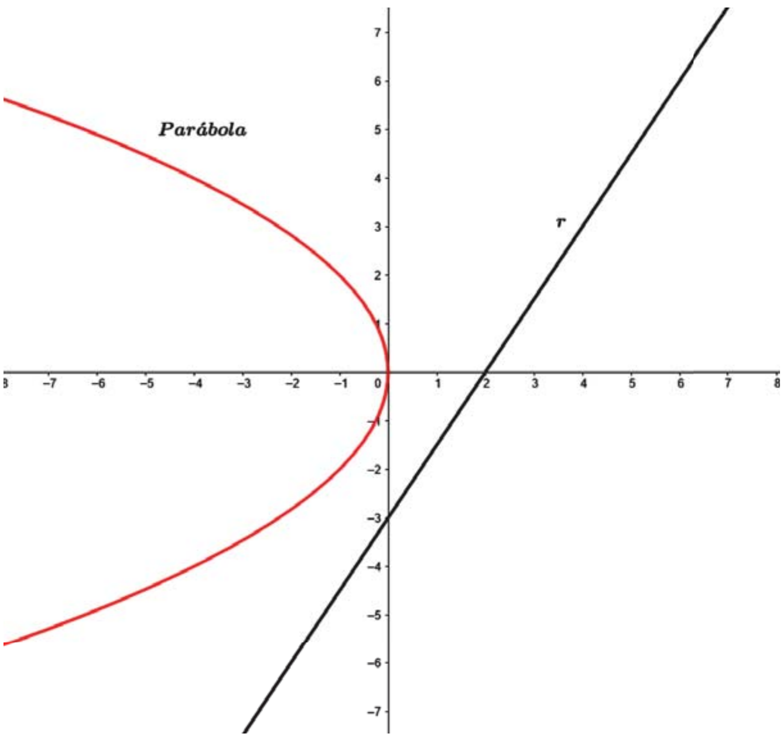


Figura A.6: Intersecção entre a reta r e a parábola

(c) Dada a equação da hipérbole: $x^2 - y^2 = 7$.

Substituindo a Equação A.1, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 7 \Longrightarrow (\frac{2}{3}y + 2)^2 - y^2 = 7 \Longrightarrow \\ \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{3}y + 4 - y^2 = 7 \Longrightarrow \\ -\frac{5}{9}y^2 + \frac{8}{3}y - 3 = 0 \Longrightarrow \\ (-5y^2 + 24y - 27)(-1) = 0 \Longrightarrow \\ \therefore 5y^2 - 24y + 27 = 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Logo, a Equação A.4 é do 2º grau. Resolvendo-a pela fórmula de Báskara, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4.a.c \Longrightarrow \\ \Delta = (-24)^2 - 4.5.27 \Longrightarrow \\ \Delta = 576 - 540 \Longrightarrow \\ \Delta = 36. \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, pode-se afirmar que a equação terá duas raízes.

Em seguida, utilizando a fórmula de Báskara, substituindo o discriminante $b^2 - 4.a.c$ por Δ, tem-se:

$$\begin{aligned} y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \\ y = \frac{-(-24) \pm \sqrt{36}}{2.5} \Longrightarrow \\ y = \frac{24 \pm 6}{10} \Longrightarrow \\ \begin{cases} y_1 = \dfrac{24 + 6}{10} = 3; \\ y_2 = \dfrac{24 - 6}{10} = \dfrac{9}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Para $y = 3$, tem-se: $x = \frac{2}{3}.(3) + 2 \Longrightarrow x = 4$.

Se $y = \frac{9}{5}$, tem-se: $x = \frac{2}{3}.\left(\frac{9}{5}\right) + 2 \Longrightarrow x = \frac{16}{5}$.

Portanto, os pontos de intersecção entre a reta r e a equação de hipérbole fornecida nesse item do exercício são: $A(4,3)$ e $B(\frac{16}{5}, \frac{9}{5})$, como pode ser verificado na Figura A.7 facilmente construída no software Geogebra apenas digitando ambas as equações no comando de entrada.

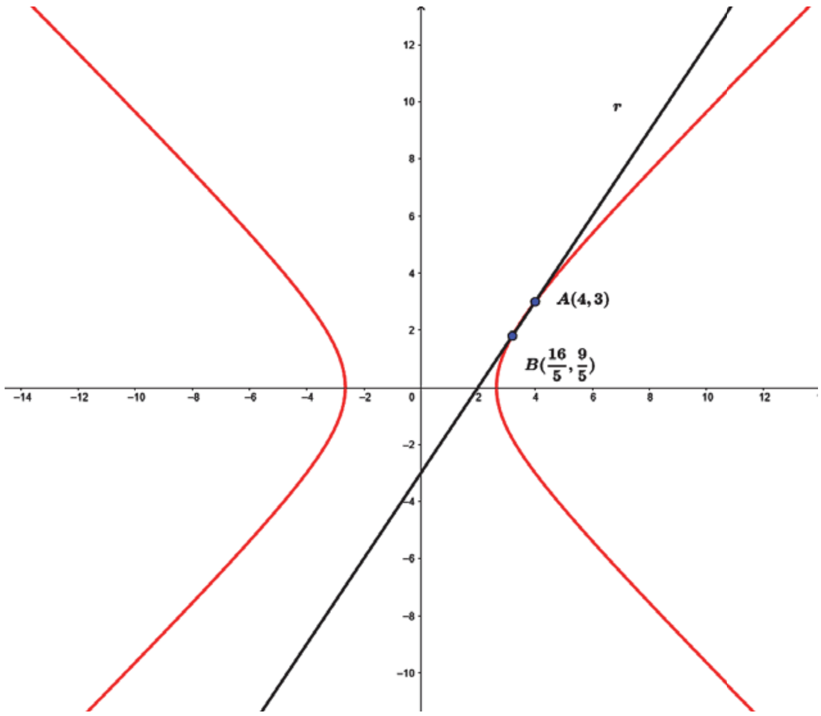


Figura A.7: Intersecção entre a reta r e a hipérbole

6. Verifique se a equação $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z+12=0$ representa uma superfície esférica. Caso seja, dê o centro e o raio.

Resolução

Seja:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z+12=0 &\Longleftrightarrow \\ (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+(z+4)^2-16+12=0 &\Longleftrightarrow \\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2-9=0 &\Longleftrightarrow \\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=9 &\Longleftrightarrow \\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=3^2&. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma superfície esférica, onde o centro é $C=(2,1,-4)$ e o raio é $r=3$.

A superfície esférica pode ser notada através da construção no Geogebra proposta na Figura A.8:

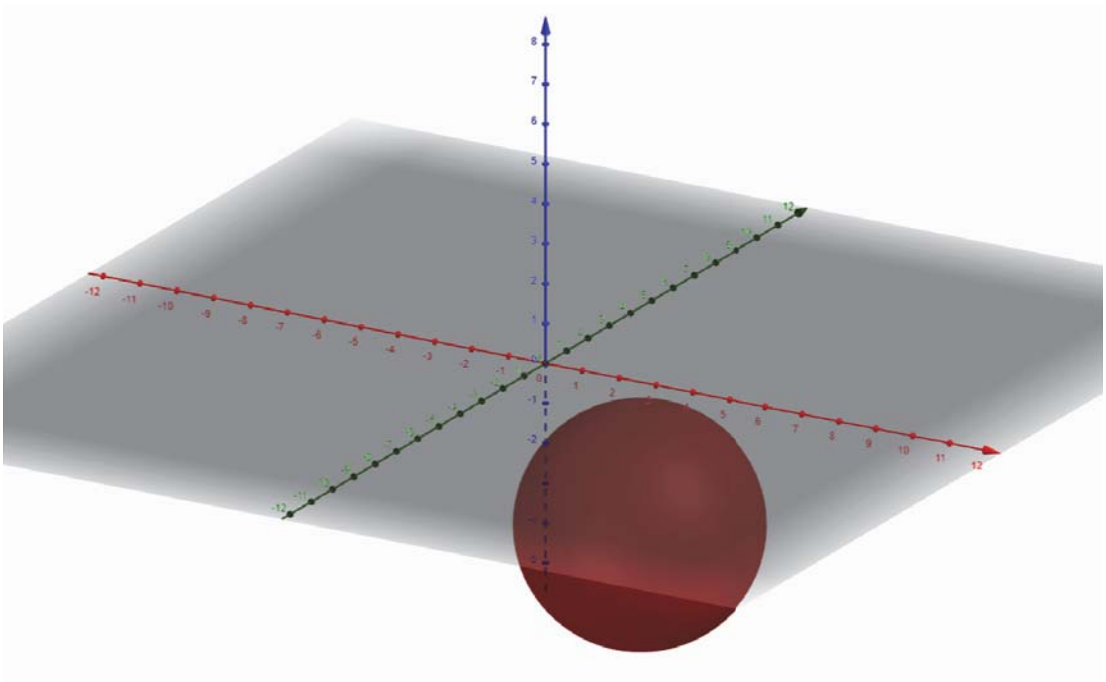


Figura A.8: Superfície esférica proposta do exercício proposto

7. Verifique se a equação $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$ representa uma superfície esférica. Caso seja, dê o centro e o raio.

Resolução

Seja:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0 &\iff \\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 16 &\iff \\ \frac{2x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = \frac{16}{16} &\iff \\ \frac{x^2}{8} + \frac{{}^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 &\iff \\ \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{{}^2}{2^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1. & \end{aligned}$$

Logo, essa equação representa uma elipsoide com centro na origem e os valores de a, b e c são $2\sqrt{2}, 2$ e 4, respectivamente.

A construção dessa superfície esférica pode ser notada através da construção no Geogebra conforme a Figura A.9:

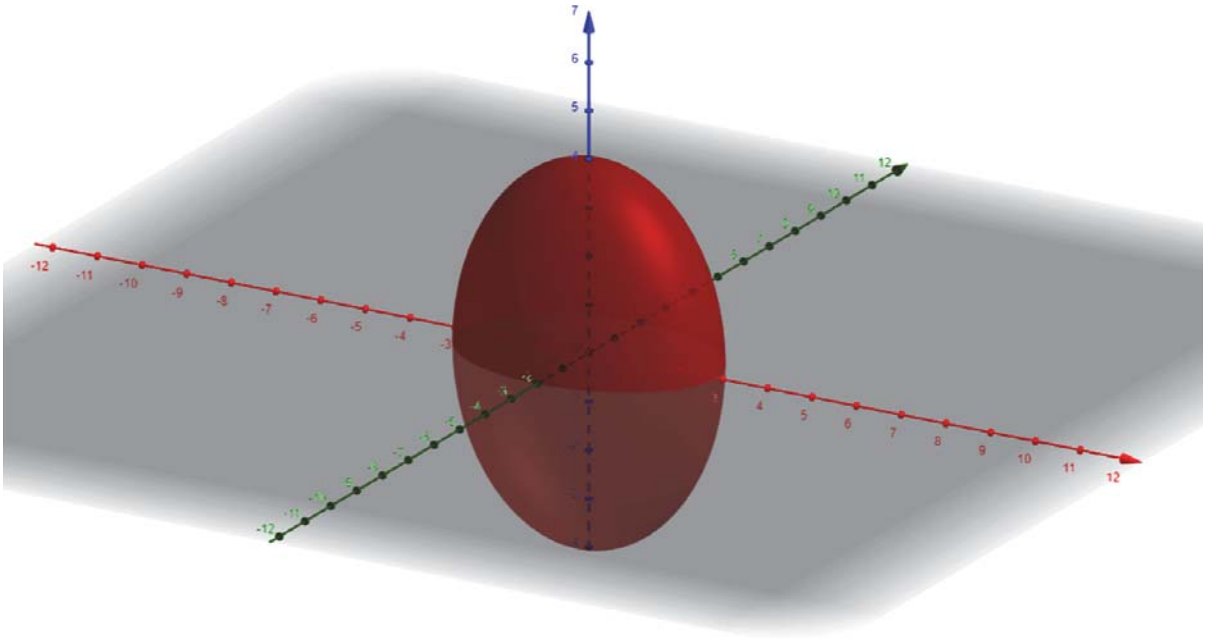


Figura A.9: Superfície esférica construída no GeoGebra

8. Dada a equação $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$, identifique se representa um hiperboloide de uma folha ou duas folhas.

Resolução

Note que, a equação tem um sinal negativo e dois sinais positivos.
Então:

$$
\begin{aligned}
36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36. &\Longleftrightarrow \\
\frac{36x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} - \frac{4z^2}{36} = \frac{36}{36.} &\Longleftrightarrow \\
x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1.&
\end{aligned}
$$

Nesta equação há apenas um sinal negativo acompanhado com z. Portanto, representa um hiperboloide de uma folha com rotação ao longo do eixo z.

A Figura A.10 é a construção, no Geogebra, da hiperboloide desejada nesse problema.

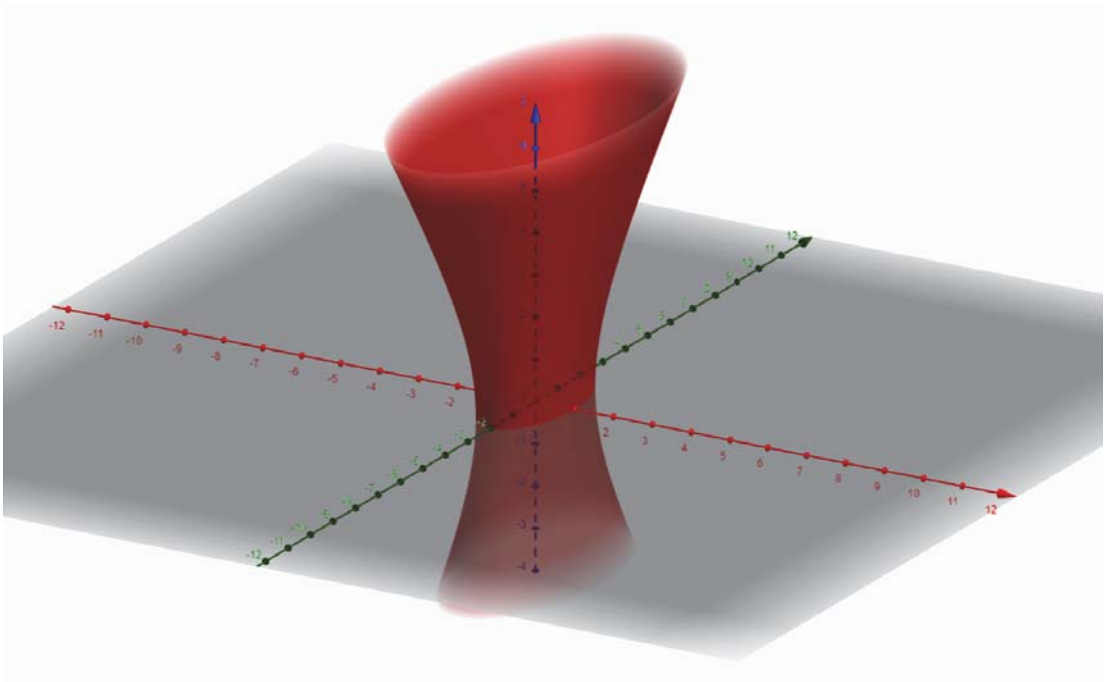


Figura A.10: Hiperboloide de uma folha construída no GeoGebra

9. Identifique as seguintes curvas:

(a) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$.

(b) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$.

Resolução

Inicialmente, deve-se reduzir as equações na forma canônica para identificar com mais facilidade.

No Geogebra é possível identificar com facilidade qual curva é proposta em cada item desse exercício.

(a) Seja:

$$\begin{aligned} x^2 + 4z^2 = 8y &\iff \\ \frac{x^2}{8} + \frac{4z^2}{8} = \frac{8y}{8} &\iff \\ y = \frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{2}&. \end{aligned}$$

Logo é uma curva paraboloide elíptico ao longo do eixo y, conforme a Figura A.11 construída no Geogebra.

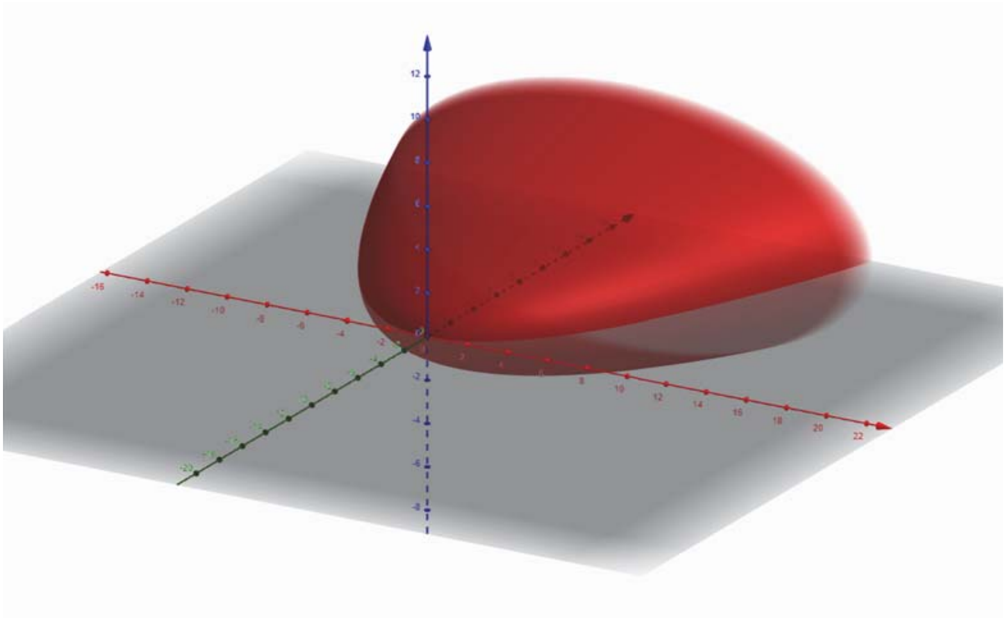


Figura A.11: Paraboloide elíptico construído no GeoGebra

(b) Reduzindo na forma canônica, tem-se:

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 = 36z &\iff \\
\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36z}{36} &\iff \\
z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}&.
\end{aligned}
$$

Obtém-se uma curva paraboloide hiperbolico ao longo do eixo z, que pode ser verificado na Figura A.12 construída no Geogebra.

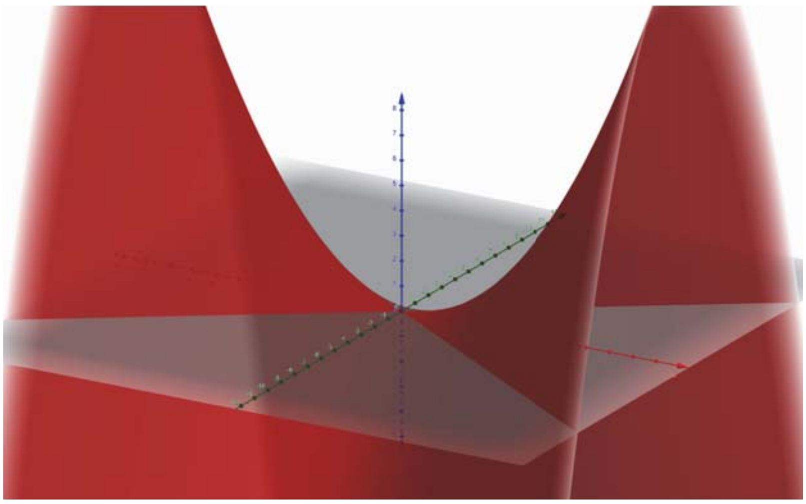


Figura A.12: Paraboloide hiperbolico construído no GeoGebra

A Apêndice B: Questionário sobre cônicas

Essa seção é destinada para um questionário com dez (10) questões sobre cônicas (elipse, hipérbole e parábola), sendo que estas foram divididas em cinco (5) questões objetivas e cinco (5) dissertativas, contendo o gabarito de respostas ao final da lista de exercícios propostos.

Tais exercícios foram selecionados com base nas sequências de livros inseridos como referência neste trabalho.

Lista de exercícios

1. (PUC-SP) Um ponto P da elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ dista 2 de um dos focos. Qual é a distância de P ao outro foco da elipse?

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 5

   (e) 7

2. (Cescem-SP) As elipses $9x^2 + 16y^2 = 25$ e $16x^2 + 9y^2 = 25$:

   (a) não tem ponto em comum.;

   (b) tem 1 ponto em comum;

   (c) têm 2 pontos em comuns;

   (d) têm 3 pontos em comuns;

   (e) têm 4 pontos em comuns.

3. (Mackenzie-SP) Os pontos do plano que satisfazem a equação $5x^2 + 3y^2 = 15$ representam:

   (a) uma parábola;

   (b) uma elipse;

   (c) um par de retas;

   (d) uma circunferência;

   (e) uma hipérbole.

4. (UFPE) O resultado da interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano paralelo ao eixo, sem passar pelo vértice, pode ser:

   (a) uma hipérbole;

   (b) uma circunferência;

   (c) uma elipse;

   (d) uma parábola;

   (e) um par de retas.

5. (PUC-MG) Se o ponto $P(2, h)$ pertence à curva de equação $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$, o valor positivo de h é:

   (a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

   (b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

   (c) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

   (d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

   (e) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

6. Ache as equações da hipérbole e das suas assíntotas, conhecendo:

   (a) os focos $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$ e a medida do eixo transverso, 6;

   (b) um foco $F_1 = (0, -\sqrt{11})$, a distância focal $2\sqrt{11}$, e a medida do eixo conjugado $2\sqrt{11}$ (F_2 no eixo Oy).

7. Uma família de parábolas tem equação $y = ax^2 + bx + 8$. Sabendo que uma delas passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(3, -1)$, determinar:

   (a) os pontos de intersecção com o eixo dos x;

   (b) os pontos de ordenada 15;

   (c) equações paramétricas desta parábola.

8. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção da reta $s : y - x = -1$ com a parábola $(x - 2)^2 = 3(y - 1)$? E o ponto de intersecção da reta s com a reta diretriz da parábola?

9. Um satélite de órbita elíptica e excentricidade $\frac{1}{3}$ viaja ao redor de um planeta situado em um dos focos da elipse. Sabendo que a distância mais próxima do satélite ao planeta é de 300 km, calcular a maior distância.

10. Determinar uma equação da curva descrita por um ponto que se move, de modo que sua distância ao ponto $A(-1, 3)$ seja:

    (a) igual a sua distância à reta $x = 3$;

    (b) a metade de sua distância à reta $x = 3$;

    (c) o dobro de sua distância à reta $x = 3$.

Respostas

1. (c)
2. (e)
3. (b)
4. (a)
5. (d)
6. **(a)** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad y = \dfrac{2}{3}x \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{2}{3}x.$

   (b) $-\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad y = \dfrac{2}{\sqrt{7}}x \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}x.$

7. **(a)** $(2, 0) \quad \text{e} \quad (4, 0).$

   (b) $(-1, 15) \quad \text{e} \quad (7, 15).$

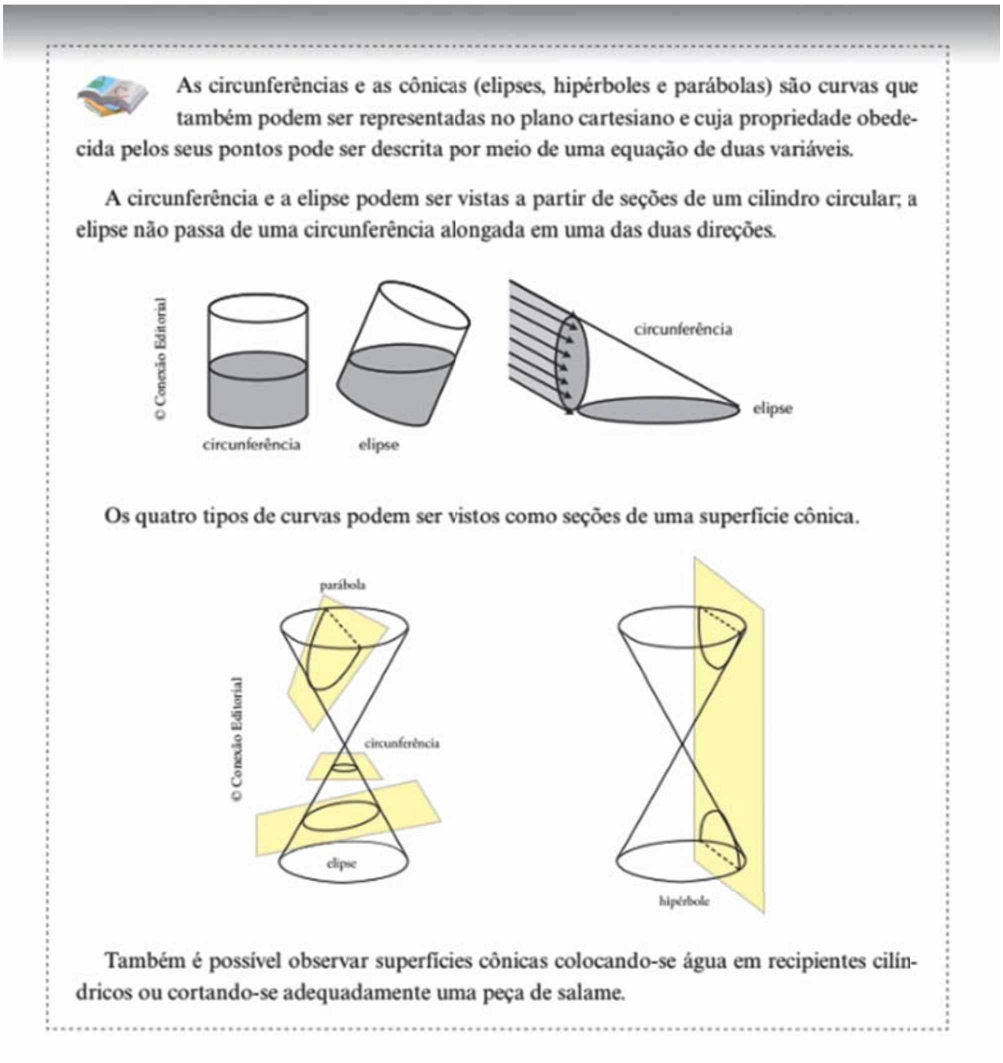
   (c) $x = t + 3 \quad \text{e} \quad y = t^2 - 1.$

8. $(2, 1) \quad \text{e} \quad (5, 4); \quad \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{1}{4}\right).$
9. 600 km.
10. **(a)** $y^2 - 6y + 8x + 1 = 0$ (parábola);

    (b) $3x^2 + 4y^2 + 14x - 24y + 31 = 0$ (elipse);

    (c) $3x^2 - y^2 - 26x + 6y + 26 = 0$ (hipérbole).

B Anexo 01: Atividade 01 - Introdução de Cônicas: Elipse e Circunferência



As circunferências e as cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que também podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.

A circunferência e a elipse podem ser vistas a partir de seções de um cilindro circular; a elipse não passa de uma circunferência alongada em uma das duas direções.

Os quatro tipos de curvas podem ser vistos como seções de uma superfície cônica.

Também é possível observar superfícies cônicas colocando-se água em recipientes cilíndricos ou cortando-se adequadamente uma peça de salame.

Figura B.1: Introdução à cônicas
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

Matemática – 3ª série – Volume 1

Circunferência

A propriedade característica da circunferência é a de que seus pontos são todos equidistantes de um ponto interior chamado centro; a distância comum de cada um de seus pontos ao centro é o raio da circunferência. Assim, se o centro for a origem do sistema de coordenadas e P (x; y) um ponto de uma circunferência de raio r, a equação que relaciona as coordenadas de um ponto qualquer da circunferência é:

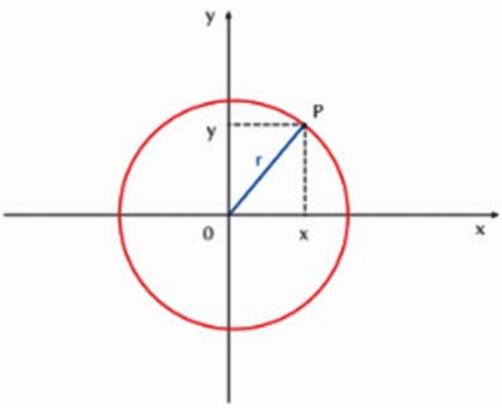
$d(P; O) = r;$

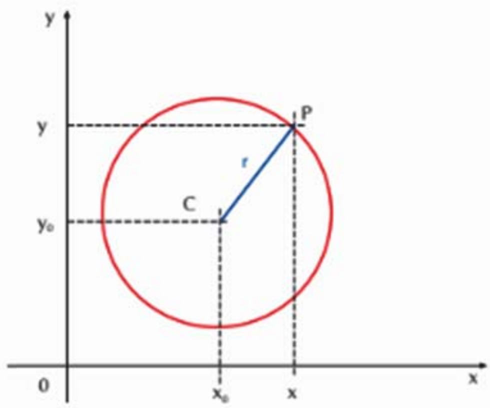
ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = r;$

ou, ainda, $x^2 + y^2 = r^2$.

Se o centro C for o ponto $(x_o; y_o)$, então da igualdade característica $d(P; C) = r$ resultará: $\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = r$.

Ou seja, $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$.





Exemplos

- A equação $x^2 + y^2 = 10$ representa uma circunferência com centro na origem e raio igual a $\sqrt{10}$.
- A equação $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ representa uma circunferência de centro no ponto (3; 5) e raio igual a 4.
- A equação $x^2 + (y - 1)^2 = 25$ representa uma circunferência de centro no ponto (0; 1) e raio igual a 5.
- A equação $(x + 7)^2 + y^2 = 13$ representa uma circunferência de centro no ponto (–7; 0) e raio igual a $\sqrt{13}$.

1. Sabendo que uma circunferência de centro $C(x_0; y_0)$ e raio **r** tem equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, considere a circunferência de centro (4; 4) e de raio 4.

Figura B.2: Propriedades características da circunferência
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

Elipse

As curvas chamadas cônicas – a elipse, a hipérbole e a parábola – ocorrem com muita frequência na natureza e no dia a dia. Vamos conhecer suas principais características, começando pela elipse.

Quando inclinamos um recipiente cilíndrico aberto, de seção circular, contendo água em repouso, o contorno da superfície da água é uma elipse. Também é uma elipse a sombra projetada de uma circunferência situada em um plano vertical, quando a luz do Sol, ou outra luz qualquer, incide obliquamente.

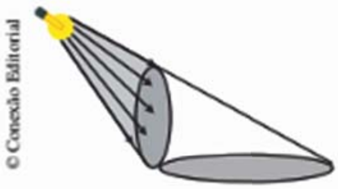
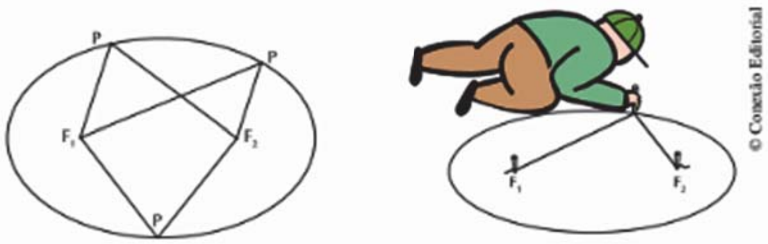


Figura B.3: Conceito de elipse
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

Foi Johannes Kepler (1571-1630), em seus estudos de Astronomia, quem associou às trajetórias dos planetas ao redor do Sol não mais circunferências, mas sim elipses, ou seja, circunferências "achatadas". Nessas elipses, Kepler destacou a existência de dois pontos simetricamente opostos em relação ao centro, chamados focos, em um dos quais o Sol se situava.

A partir desses dois pontos, uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante. Jardineiros utilizam frequentemente essa propriedade para construir canteiros elípticos: fincando-se duas estacas, uma em cada foco, e deslocando-se um estilete, com um barbante de comprimento L (maior do que a distância entre os focos) esticado, obtém-se uma elipse.



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constante}$$

Um coador de café de plástico pode ilustrar o fato de que as elipses podem ser consideradas como curvas intermediárias entre a circunferência e o segmento de reta:

Uma elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por **a**, o menor por **b**. Assim, os dois eixos são 2a e 2b.

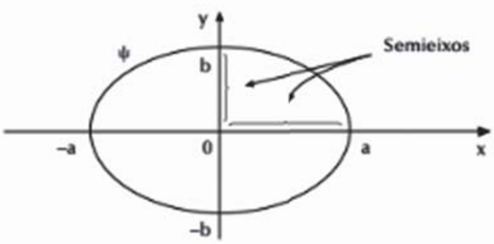
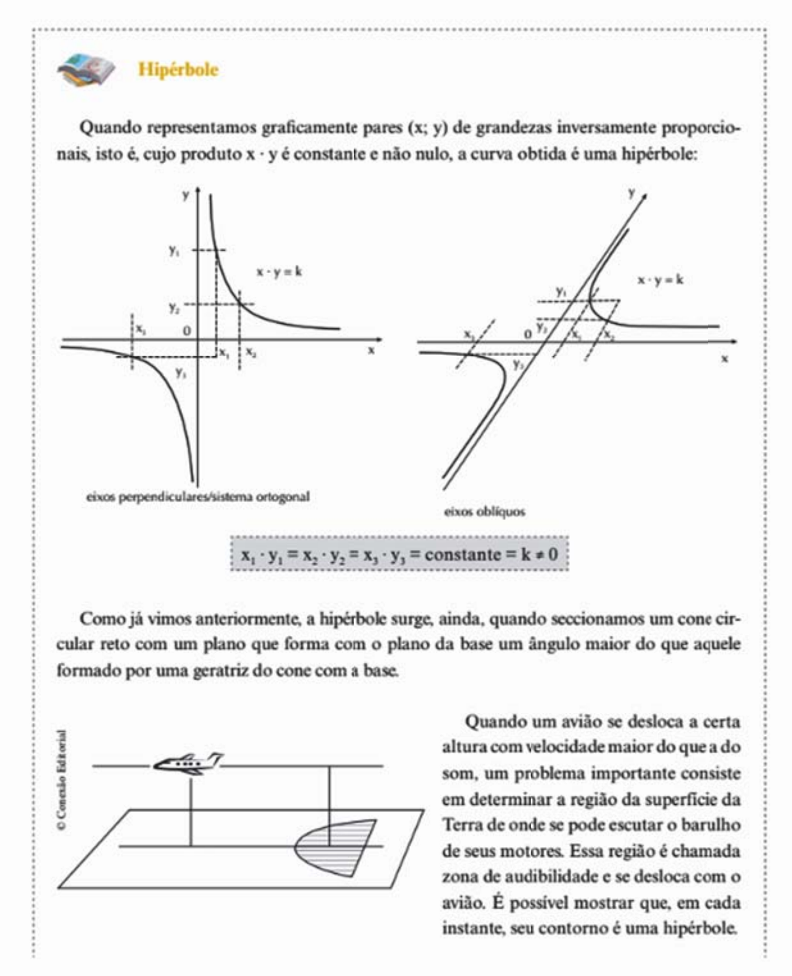


Figura B.4: Aplicações da elipse
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

C Anexo 02: Atividade 02 - Introdução de Cônicas: Hipérbole



Hipérbole

Quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas inversamente proporcionais, isto é, cujo produto $x \cdot y$ é constante e não nulo, a curva obtida é uma hipérbole:

eixos perpendiculares/sistema ortogonal

eixos oblíquos

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \text{constante} = k \neq 0$$

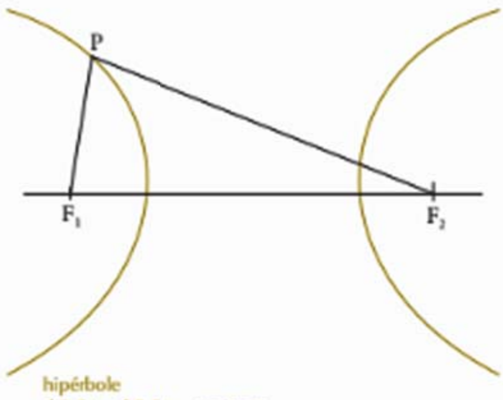
Como já vimos anteriormente, a hipérbole surge, ainda, quando seccionamos um cone circular reto com um plano que forma com o plano da base um ângulo maior do que aquele formado por uma geratriz do cone com a base.

© Conexão Editorial

Quando um avião se desloca a certa altura com velocidade maior do que a do som, um problema importante consiste em determinar a região da superfície da Terra de onde se pode escutar o barulho de seus motores. Essa região é chamada zona de audibilidade e se desloca com o avião. É possível mostrar que, em cada instante, seu contorno é uma hipérbole.

Figura C.1: Conceito de Hipérbole
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

Uma propriedade característica da hipérbole é a seguinte: existem dois pontos fixados F_1 e F_2 tais que a diferença entre as distâncias de qualquer ponto da curva até esses dois pontos é constante. A partir dessa propriedade, é possível traçar hipérboles da forma indicada na figura a seguir:



Para escrever a equação da hipérbole, podemos partir da representação de grandezas inversamente proporcionais. No caso de um sistema XOY em que os eixos cartesianos são ortogonais, a hipérbole é chamada equilátera e os dois ramos da curva aproximam-se indefinidamente dos eixos coordenados, nunca os tangenciando. A origem é um centro de simetria e os eixos coordenados são chamados, nesse caso, de assíntotas da hipérbole.

Por exemplo, as curvas formadas pelos pontos cujas coordenadas satisfazem as relações a seguir são hipérboles tendo como assíntotas os eixos coordenados (ver figuras).

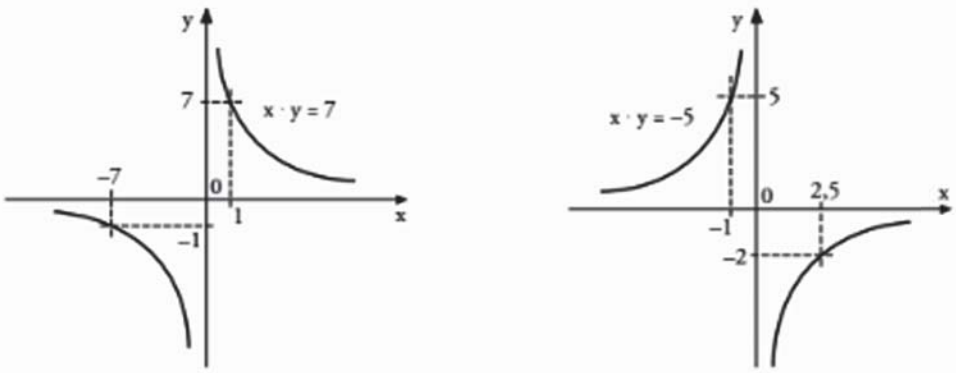
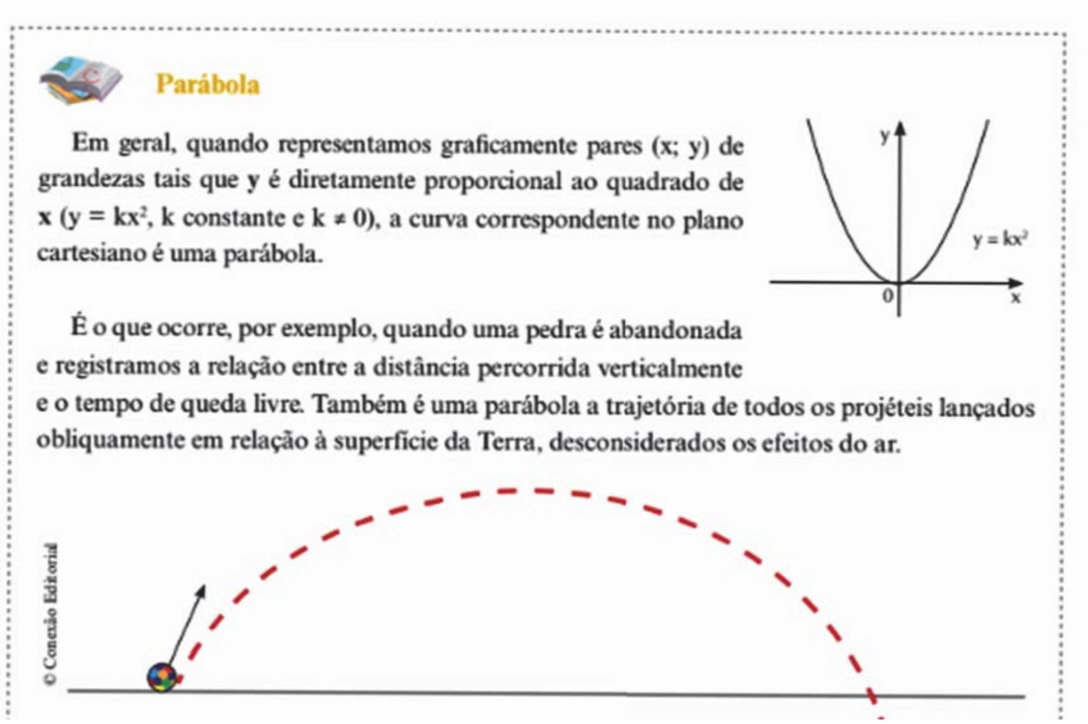


Figura C.2: Propriedades características da Hipérbole
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

D Anexo 03: Atividade 03 - Introdução de Cônicas: Parábola



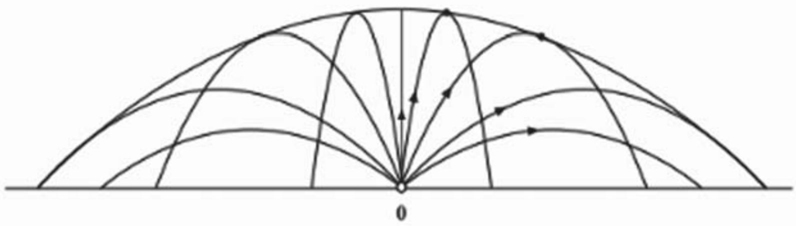
Parábola

Em geral, quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas tais que y é diretamente proporcional ao quadrado de **x** ($y = kx^2$, k constante e $k \neq 0$), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.

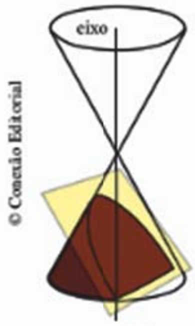
É o que ocorre, por exemplo, quando uma pedra é abandonada e registramos a relação entre a distância percorrida verticalmente e o tempo de queda livre. Também é uma parábola a trajetória de todos os projéteis lançados obliquamente em relação à superfície da Terra, desconsiderados os efeitos do ar.

Figura D.1: Introdução à cônicas
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

Além disso, quando, de um ponto fixado no solo, lançamos projéteis sempre com a mesma velocidade inicial v_0, em todas as direções possíveis, em um plano vertical dado, o contorno da região determinada pelos pontos que podem ser atingidos pelos projéteis é também uma parábola, chamada parábola de segurança.



Quando seccionamos um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, obtemos também uma parábola.



A parábola tem certas propriedades características que podem ser utilizadas para defini-la. Uma delas é a existência de um ponto **F**, fixado, e de uma reta **r**, fixada, tais que a distância de cada ponto **P** da parábola até **F** é igual à distância de **P** até **r**. **F** é o foco da parábola e **r** é sua diretriz.

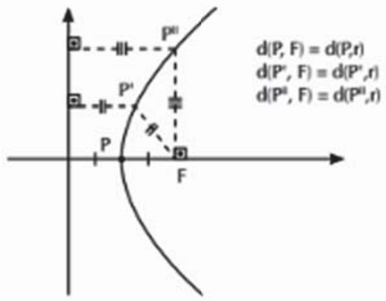
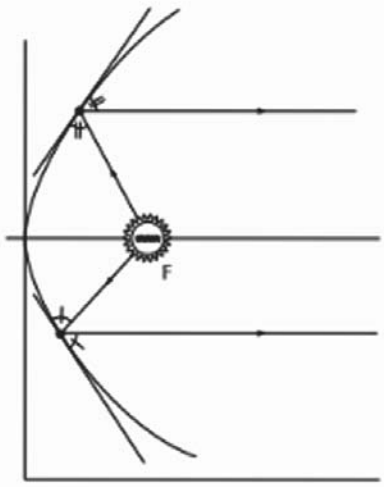


Figura D.2: Propriedades características da parábola
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)

Uma propriedade interessante das parábolas é a seguinte: sendo **P** um ponto qualquer da parábola, a reta que passa pelo foco **F** e por **P** forma com a tangente à parábola em **P** um ângulo igual ao formado pela tangente com a reta paralela ao eixo da parábola passando por **P** (veja a figura).



Isso explica a razão de os faróis dos automóveis serem envolvidos por uma superfície cuja seção é um paraboloide, ou seja, é a superfície gerada por uma parábola que dá uma volta completa em torno de seu eixo. Se a lâmpada situar-se exatamente no foco, os raios de luz formarão um feixe paralelo ao eixo, como é desejável.

Figura D.3: Aplicações da Parábola
Fonte: Caderno do Aluno - Matemática - 3^0 ano do ensino médio (2014-2017)