



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Jean Akio Shida Hashioka

Modelo de precificação de ativos por cadeias de Markov

São José do Rio Preto  
2018

Jean Akio Shida Hashioka

Modelo de precificação de ativos por cadeias de Markov

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Benini

São José do Rio Preto  
2018

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

H279m Hashioka, Jean Akio Shida.  
Modelo de precificação de ativos por cadeias de Markov / Jean Akio Shida Hashioka. - 2018  
59 f. : il.

Orientador: Luiz Carlos Benini  
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018

1. Cadeias de Markov. 2. Probabilidade. 3. Mercado financeiro. I. Benini, Luiz Carlos. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

Alessandra Kuba Oshiro Assunção  
CRB-8/9013

# TERMO DE APROVAÇÃO

Jean Akio Shida Hashioka

MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS POR CADEIAS DE MARKOV

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Carlos Benini  
FCT/UNESP - Campus de Presidente Prudente  
Orientador

Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi  
UNESP - Presidente Prudente

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Silvia Maria Prado  
UFMT - Cuiabá

**Presidente Prudente, 15 de Junho de 2018**

*Dedico este trabalho à minha esposa e família.*

# Agradecimentos

À minha esposa, que esteve comigo em todos os momentos difíceis e sempre me inspirou a dar o melhor que tenho em tudo que faço.

Aos meus familiares, especialmente meus pais, que participaram de minhas conquistas e dificuldades, dando-me força e apoio incondicional nas escolhas que fiz no decorrer dos anos de minha vida.

Aos meus tios Armando e Ademar, que apesar da distância física, serão sempre lembrados por toda ajuda que proporcionaram aos meus pais e a mim.

Ao meu orientador, Dr. Luiz Carlos Benini, que apoiou-me na escolha do tema e orientou-me na condução da pesquisa, além de acreditar no meu esforço para concretização deste trabalho.

À UNESP por todos os recursos tangíveis e intangíveis disponibilizados aos alunos e comunidade.

Aos professores por compartilharem parte do seu conhecimento e sabedoria, que para mim, são as maiores heranças possíveis de serem passadas a outro indivíduo.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente em minha formação e que passaram por minha vida deixando algum aprendizado.

*O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.*

Albert Einstein

# Resumo

Este trabalho consiste em apresentar a abordagem das cadeias de Markov como ferramenta auxiliadora na prática docente da matemática no Ensino Médio, tornando o processo mais tangível à realidade dos alunos. A contextualização dos conteúdos de matrizes, sistemas lineares e probabilidade poderá ser feita com exemplos práticos do cotidiano, considerando o meio social em que vivem os estudantes, resgatando assim o desejo pela aprendizagem e pelas aplicações da matemática. Espera-se desta forma maior receptividade da disciplina por parte dos discentes e, potencialmente, melhor resposta ao aprendizado pretendido. Assim sendo, o estudo aborda, num primeiro momento, a convergência de distribuição de probabilidade de uma cadeia de Markov de dois estados por meio de limites no infinito de uma função de probabilidade. Desta primeira cadeia de Markov de dois estados, é elaborado um roteiro de aula a ser abordado como exemplo a ser trabalhado em sala de aula relacionado às probabilidades de um time de futebol vencer as suas próximas partidas. Prosseguindo, observa-se a aplicabilidade das cadeias de Markov para calcular a distribuição de probabilidades de um jogador estar perdido em diferentes salas de um labirinto para cada tentativa de encontrar a saída. A fim de evidenciar outro exemplo de aplicação das cadeias de Markov, há a construção de um modelo de precificação de ativos com o objetivo de prever os preços de algumas ações de empresas negociadas na BM&FBOVESPA, a bolsa de valores do Brasil. Tal modelo de precificação de ativos mostrou-se adequado estatisticamente como ferramenta de análise e cálculo dos retornos médios esperados de alguns dos ativos estudados. Por meio do conteúdo apresentado neste estudo, espera-se contribuir com o aprofundamento de alguns recursos e conceitos para a prática docente com aulas sobre cadeias de Markov no Ensino Médio. Esses aspectos direcionam esta pesquisa para um relevante processo de desenvolvimento do raciocínio, senso crítico e tomada de decisões em situações progressivamente mais complexas vividas pelos alunos.

**Palavras-chave:** cadeias de Markov, probabilidade, mercado financeiro.

# Abstract

This work presents the Markov chain approach as a useful tool in the teaching practice of mathematics in High School, making the process more tangible to the students' reality. The contextualization of matrix contents, linear systems and probability can be done with practical examples of daily life, considering the social environment in which students live, thus recovering the desire for learning and the applications of mathematics. It is expected in this way more receptivity of the discipline on the part of the students and, potentially, better response to the intended learning. Thus, the study addresses, first, the convergence of probability distribution of a two-state Markov chain by means of infinite limits of a probability function. From this first Markov chain of two states, a lesson script is elaborated to be approached as example to be worked in classroom related to the probabilities of a soccer team to win its next matches. Proceeding, we observe the applicability of Markov chains to calculate the probability distribution of a player being lost in different rooms of a maze for each attempt to find the exit. In order to highlight another example of the application of the Markov chains, an asset pricing model is designed to predict the prices of some shares of companies traded on BM&FBOVESPA, the Brazilian stock exchange. Such an asset pricing model proved to be statistically adequate as a tool for analysis and calculation of the expected average returns of some of the assets studied. Through the content presented in this study, it is hoped to contribute with the deepening of some resources and concepts for the teaching practice with classes on Markov chains in High School. These aspects direct this research to a relevant process of development of reasoning, critical sense and decision making in progressively more complex situations experienced by students.

**Keywords:** Markov chains, probability, financial market.

# Lista de Figuras

3.1	Variável aleatória $X(\omega)$ . . . . .	18
3.2	Exemplo de grafo . . . . .	20
3.3	Exemplo de grafo dirigido . . . . .	20
3.4	Exemplo de diagrama de transição . . . . .	21
3.5	Diagrama de transição do funcionamento da máquina . . . . .	25
3.6	Diagrama de transição dos resultados das partidas . . . . .	28
3.7	Ilustração do labirinto . . . . .	29
3.8	Diagrama de transição do labirinto . . . . .	30
4.1	Gráfico do ativo CIEL3 de 01/12/2014 a 29/01/2015 . . . . .	39
4.2	Gráfico do ativo CIEL3 de 01/12/2014 a 29/01/2015 com os valores esperados das cotações calculadas pelo modelo . . . . .	41

# Lista de Tabelas

4.1	Cálculo dos $RAMIndp_m$ e significância . . . . .	43
4.2	Cálculo dos $RAMIndp_m$ e significância . . . . .	43
4.3	Cálculo dos $RAMIndp_m$ e significância . . . . .	44
4.4	Cálculo dos $RAMIndp_m$ e significância . . . . .	44
4.5	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de CIEL3 . . .	45
4.6	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de CPFE3 . .	45
4.7	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de ETER3 . .	46
4.8	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de GRND3 . .	46
4.9	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de ITUB3 . .	47
4.10	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de LREN3 . .	47
4.11	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de MDIA3 . .	48
4.12	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ de SAPR4 . .	48
4.13	Cálculo das $SRAEp_m$ , $SRARp_m$ , $SRAEn_m$ e $SRARn_m$ da Carteira . .	49
4.14	Frequência de acertos dos movimentos de CIEL3 . . . . .	49
4.15	Frequência de acertos dos movimentos de CPFE3 . . . . .	50
4.16	Frequência de acertos dos movimentos de ETER3 . . . . .	50
4.17	Frequência de acertos dos movimentos de GRND3 . . . . .	51
4.18	Frequência de acertos dos movimentos de ITUB3 . . . . .	51
4.19	Frequência de acertos dos movimentos de LREN3 . . . . .	52
4.20	Frequência de acertos dos movimentos de MDIA3 . . . . .	52
4.21	Frequência de acertos dos movimentos de SAPR4 . . . . .	53
4.22	Frequência de acertos dos movimentos da Carteira . . . . .	53
4.23	Comparação do total das $SRARp_m$ e valorização das cotações . . . . .	54

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Objetivos . . . . .	12
1.2	Metodologia e organização do trabalho . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Cadeias de Markov</b>	<b>17</b>
3.1	Conceituação . . . . .	17
3.1.1	Experimento aleatório . . . . .	17
3.1.2	Probabilidade . . . . .	17
3.1.3	Variável aleatória . . . . .	18
3.1.4	Probabilidade conjunta . . . . .	19
3.1.5	Grafo . . . . .	19
3.1.6	Diagrama de transição . . . . .	20
3.1.7	Processos estocásticos . . . . .	20
3.1.8	Processos de Markov . . . . .	21
3.2	Cadeias de Markov . . . . .	21
3.2.1	Definição de cadeias de Markov . . . . .	21
3.2.2	Exemplo . . . . .	24
3.2.3	Vetor probabilidade e matriz de transição de estados . . . . .	26
3.3	Roteiro de aula sobre cadeias de Markov . . . . .	27
3.4	Jogo do labirinto . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Modelo de precificação de ativos</b>	<b>34</b>
4.1	Introdução ao mercado de ações . . . . .	34
4.2	Coleta de dados . . . . .	35
4.3	Modelo de estados . . . . .	36
4.3.1	Construção dos intervalos $I^q$ . . . . .	36
4.3.2	Construção dos subintervalos $I_n^q$ . . . . .	36
4.4	Justificativa para a escolha da janela de pregões e da quantidade de subintervalos . . . . .	38
4.5	Cálculo da matriz de transição . . . . .	39

4.6	Cálculo do retorno esperado pelo modelo . . . . .	40
4.7	Processamento dos dados e restrições operacionais do modelo . . . . .	41
4.8	Testes estatísticos . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Conclusão e considerações finais</b>	<b>55</b>
	<b>Referências</b>	<b>56</b>

# 1 Introdução

O Brasil figura entre os países com os piores indicadores de qualidade de ensino e aprendizagem em matemática e ciências do mundo. Pesquisas realizadas como o teste do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), o mais importante do mundo na área da educação, confirmam a delicada situação brasileira no que tange a educação. De acordo com o relatório *Global Information Technology*, divulgado no Fórum Econômico Mundial em Genebra, na Suíça, no dia 06/07/2016, o país está na 133<sup>a</sup> posição entre 139 nações.

Relatórios recentes da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) mostram que o Brasil é um dos dez países com mais alunos com baixo rendimento escolar em matemática, leitura e ciência. Além disso, o teste de Pisa de 2012 mostra o Brasil na 58<sup>a</sup> colocação entre 65 países, inferindo que dois a cada três estudantes de quinze anos não possuem o patamar mínimo de conhecimento.

Indubitavelmente, uma nação que apresenta uma das maiores populações do planeta, com dimensões territoriais continentais e que se posiciona entre as principais economias do mundo não pode permitir que tal situação permaneça sem melhora. Neste contexto, a busca por soluções concretas é de suma importância para que o ensino-aprendizagem da matemática, base das demais ciências, se torne mais eficiente. Pautado neste objetivo, este trabalho visa explorar os conceitos de matrizes, sistemas lineares e probabilidade para abordar aplicações da matemática em situações-problema concretas e do cotidiano, utilizando, como ferramenta diferenciada, as cadeias de Markov, tópico abordado atualmente apenas no Ensino Superior e que se utiliza desses conceitos. Assim, a própria abordagem das cadeias de Markov no Ensino Médio, além de mostrar aplicações para a matemática, poderá reforçar o aprendizado de matrizes, sistemas lineares e probabilidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p. 19) enfatizam a inter-relação entre os conteúdos matemáticos e sua aplicabilidade cotidiana:

[...] O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

Com um roteiro de aula adequado, as cadeias de Markov podem torna-se um conteúdo a ser abordado na escola para mostrar algumas aplicações para os conteúdos de

matemática ministrados no Ensino Médio. Os professores também poderão se pautar nos exemplos do presente trabalho para desenvolver seus próprios roteiros de aula e buscar exemplos na literatura a serem abordados em sala de aula a fim de tornar a matemática mais interessante aos alunos.

## 1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é propor uma abordagem metodológica para o ensino de cadeias de Markov no Ensino Médio. A proposta de abordar as cadeias de Markov vem da necessidade de tornar a matemática mais tangível à realidade dos alunos do Ensino Médio, mostrando algumas aplicações simples a situações-problema do cotidiano. A fim de mostrar uma aplicação interessante aos alunos, é abordado um roteiro de aula contendo um exemplo de cadeia de Markov para o cálculo da probabilidade de um time de futebol vencer os próximos jogos de um campeonato. Por fim, há a construção de um modelo de previsão de retornos esperados de ativos negociados em bolsa de valores, com a finalidade de atrair a atenção dos docentes com uma aplicação mais refinada para as cadeias de Markov. Dessa forma, espera-se a convergência do interesse de alunos e professores para o ensino da matemática de forma diferenciada.

## 1.2 Metodologia e organização do trabalho

O ensino das cadeias de Markov nas aulas de matemática é feito por meio de um roteiro de aula sugerido para que o docente possa abordar, de forma complementar, as propriedades de matrizes e o conteúdo de probabilidade. Nesse roteiro de aula sugerido, a abordagem das cadeias de Markov poderá ser feita por exemplos de aplicação como calcular a probabilidade de um time de futebol vencer as próximas partidas de um campeonato. Por exigir o conhecimento prévio de matrizes e probabilidade, as cadeias de Markov poderão complementar o aprendizado já consolidado em aulas anteriores. Na prática docente, o professor poderá contextualizar tais conteúdos matemáticos na resolução de diversos problemas em diferentes áreas, considerando também o meio social em que os alunos vivem. Dessa forma, haverá maior receptividade da matemática por parte dos discentes e, potencialmente, melhor resposta ao aprendizado pretendido. De forma complementar, esse novo cenário possibilitará a inserção da interdisciplinaridade de assuntos aparentemente isolados, contribuindo para o desenvolvimento de raciocínio, senso crítico e na tomada de decisão em situações cada vez mais complexas.

O Capítulo 2 do presente trabalho apresenta uma revisão bibliográfica relacionada a cadeias de Markov e suas aplicações, contemplando as metodologias e resultados de forma sintética a fim de relacionar diferentes abordagens a situações-problema diversas.

No Capítulo 3 é realizado o embasamento da teoria abordada nas cadeias de Markov, incluindo a resolução de algumas situações-problema a fim de mostrar a aplicabilidade

da matemática em situações diversas.

O Capítulo 4 aborda uma aplicação refinada das cadeias de Markov por meio de um modelo de previsão de preços de ativos negociados na BM&FBOVESPA, a bolsa de valores brasileira. São apresentados também aspectos gerais do mercado financeiro e sobre as ações de empresas negociadas em bolsa de valores.

Por fim, no Capítulo 5, estão as considerações finais.

## 2 Revisão bibliográfica

A teoria das cadeias de Markov foi iniciada pelo matemático Andrei Andreyevich Markov (1856-1922). Nascido em Ryazan, Rússia, graduou-se na Universidade de São Petesburgo (1878), onde começou a lecionar em 1886. Segundo Rodrigues (2013), a partir de 1900, Markov estudou os chamados Processos Estocásticos, modelos matemáticos aplicados a fenômenos aleatórios que têm como resultados funções. As cadeias de Markov nasceram de um estudo em que se desejava calcular a probabilidade de uma consoante ocorrer numa determinada posição de uma palavra qualquer. Para isso, fora utilizada a hipótese de que esta probabilidade só dependeria da letra precedente ser uma vogal ou uma consoante. Mais tarde, estudiosos como Norbert Winter (1923) e Andrei Kolmogorov (1930) trataram rigorosamente as cadeias de Markov e desenvolveram teorias mais abrangentes. Logo após os estudos realizados por Norbert Winter e Andrei Kolmogorov, as teorias de cadeias de Markov foram aplicadas às mais diversas áreas como física atômica, teoria quântica, biologia, genética, comportamento social, economia e finanças. A seguir, são listados alguns trabalhos sobre a aplicabilidade das cadeias de Markov em diversas áreas, inclusive na área da docência matemática no Ensino Médio:

Freitas et al. (2005) estimaram o crescimento populacional do rebanho bovino brasileiro utilizando o modelo de Richards, ajustado pela técnica de verossimilhança *profile*, e, a partir da modelagem de cadeias de Markov, calculou a probabilidade de vários cenários futuros para a população de bovinos. Os autores concluem que é possível prever a evolução do rebanho bovino brasileiro e encontrar situações ideais de tamanho de rebanho, taxa de abate e tempo para produção estratégica de carnes, couros, entre outros derivados.

Vasconcelos et al. (2009) estudaram a dinâmica nas classes diamétricas de árvores na Amazônia Ocidental, verificando a não existência de um padrão definido. A abordagem por cadeias de Markov revelou não haver diferença significativa entre frequências projetadas e observadas para a distribuição do número de árvores em cada classe diamétrica.

Abreu et al. (2008) utilizaram as cadeias de Markov com o objetivo de analisar o descarte de vacas em rebanho de cria, permitindo estimar a distribuição de idades no rebanho quando o mesmo estivesse em equilíbrio.

---

Keller Filho et al. (2006) verificaram, por meio de cadeias de Markov de terceira ordem, que, em uma grande zona pluvialmente homogênea do Planalto Central brasileiro, a ocorrência de chuvas em determinado dia é condicionada à sequência de dias secos e chuvosos nos três dias anteriores.

Segundo Barros Neto (2013), a integração do uso de tecnologias à matemática, além de estimular uma constante atualização do professor, mostra-se como uma solução para os problemas de aprendizagem em matemática no Ensino Médio. O autor ainda apresenta propostas de situações-problema na química, biologia, geografia e finanças que se utilizam das cadeias de Markov como ferramenta para o cálculo das soluções.

Soares Jr. (2014) apresenta em sua obra a abordagem de ensino de alguns tópicos de matemática utilizando-se do *software Winmat* para cálculos de matrizes e enfatiza o recurso dos jogos de estratégia como complementação do aprendizado das cadeias de Markov. O estudo mostrou algumas aplicações de matrizes, sistemas lineares e probabilidade em problemas relacionados ao cotidiano dos alunos.

Dellatorre (2016) mostrou algumas aplicações de cadeias de Markov para serem abordadas em sala de aula, acreditando que o processo de resolução de problemas do cotidiano aumente o interesse dos alunos em aprender matemática e instigue a busca pela investigação científica.

Segundo Rodrigues (2013), as cadeias de Markov apresentam conceitos essenciais e acessíveis a todos os alunos do Ensino Médio, podendo constar como um tópico dentro de matrizes. O autor apresenta a resolução de alguns problemas utilizando-se das cadeias de Markov e do *software Maxima*, para resolução dos sistemas lineares. Desta forma, espera que haja troca de experiências e discussões que auxiliem no processo ensino-aprendizagem.

Castro (2015) apresentou algumas aplicações simples de cadeias de Markov e uma sugestão de sequência didática para o seu ensino em sala de aula, incluindo o uso dos *softwares Geogebra, Matrix Calculator e o Winmat* para o cálculo das matrizes de transição e resolução dos problemas apresentados. Acreditou que a aplicação da matemática em alguma área do conhecimento é de suma importância para o aprendizado dos alunos.

Gomes e Wanke (2008) utilizaram as cadeias de Markov para abordar a gestão de estoques de peças de reposição descartáveis e compará-la à simulação convencional. Foi utilizada a política de estoques  $(S,s)$ , ou seja, quando o estoque baixar a um nível menor que  $s$ , repõe-se o estoque para um nível máximo  $S$ , cuja demanda fosse aderente à distribuição de Poisson. Foi possível inferir a distribuição de probabilidades da posição do estoque e determinar indicadores como estoque médio, probabilidade de falta e probabilidade de ressuprimento.

Staudt et al. (2011) propuseram um estudo de caso sobre a inclusão de refugos e retrabalhos na análise de capacidade de uma fábrica utilizando cadeias absorventes de Markov como ferramenta para obtenção do fator de capacidade. Os resultados

---

evidenciaram que o cálculo de capacidade utilizado pela companhia está subdimensionado em relação ao proposto, devido às ineficiências, refugos e retrabalhos não estarem normalmente considerados nesse dimensionamento.

Guillén e Garcia (2014) construíram um índice de credibilidade do Banco Central do Brasil que, diferentemente dos demais disponíveis na literatura, considera a dispersão das expectativas de agentes de mercado em relação à aversão do Banco Central à inflação. Os resultados sugerem que agentes otimistas e pessimistas se comportam de forma semelhante em relação à passagem de tempo. Avaliando o papel de cada agente no *ranking* mensal de expectativas, um segundo índice construído sugere uma queda na credibilidade em 2003 e 2004, quando o Banco Central alterou suas metas inflacionárias.

Silva (2013) apresentou seu trabalho com a resolução de três problemas de probabilidades de áreas distintas utilizando-se das cadeias de Markov de forma que um estudante do Ensino Médio possa ler e compreender suas soluções. O objetivo da pesquisa foi possibilitar a justificativa de aplicação das aulas de matemática aos questionamentos realizados pelos alunos.

Pautado nos estudos realizados pelos autores vistos, a presente pesquisa mostra-se adequada no contexto de complementação do método pedagógico, e, apesar de não ser pioneira, acrescentará novos exemplos trabalhados de forma interdisciplinar com outras matérias presentes nas bases curriculares do Ensino Médio. Além disso, o trabalho apresenta a construção de um modelo de cadeias de Markov que calcula uma estimativa de retornos de alguns ativos negociados em bolsa de valores. Tal modelo pode ser utilizado como um indicador para compra e venda de ações com rentabilidade superior às variações apresentadas pelas mesmas nos períodos estudados.

## 3 Cadeias de Markov

### 3.1 Conceituação

#### 3.1.1 Experimento aleatório

Segundo Correa (2003), os diversos fenômenos que podem ser observados são classificados em dois tipos: os aleatórios e os determinísticos. Os experimentos determinísticos conduzem sempre a um mesmo resultado quando são mantidas as mesmas condições iniciais. Já os experimentos aleatórios, mesmo mantendo idênticas condições, podem gerar resultados diferentes, ou seja, existe a imprevisibilidade dos resultados.

#### 3.1.2 Probabilidade

##### Definição frequentista

(Ross, 2010) Sejam

$\Omega$ : o espaço amostral correspondente ao conjunto de resultados possíveis de um experimento;

$E$ : cada evento do espaço amostral  $\Omega$ ;

$n(E)$ : o número de vezes que o evento  $E$  ocorre nas  $n$  primeiras repetições do experimento.

Então, a probabilidade do evento  $E$  é definida como

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Isto é,  $P(E)$  é definida como a proporção (limite) de tempo em que  $E$  ocorre. Ela é também a frequência limite de  $E$  e deve satisfazer aos três axiomas a seguir:

##### Axioma 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

##### Axioma 2

$$P(\Omega) = 1$$

**Axioma 3**

Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos  $E_1, E_2, \dots$  (isto é, eventos para os quais  $E_i \cap E_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ ),

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

**Probabilidade condicional**

(Ross, 2010) Sejam  $E$  e  $F$  eventos do espaço amostral  $\Omega$  e  $P(F) > 0$ . A probabilidade condicional de que  $E$  ocorra dado que  $F$  ocorreu é dada por

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

**Teorema da probabilidade total**

(Lebensztayn e Coletti, 2008) Sejam  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  tais que  $P(E_i) > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , isto é, esses eventos são dois a dois disjuntos (ou seja,  $\Omega = \cup_{i=1}^n E_i$ ). Então, para qualquer evento  $F$  do espaço  $\Omega$ , tem-se

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(E_i \cap F) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(F|E_i)$$

**3.1.3 Variável aleatória**

(Correa, 2003) Seja  $\Omega$  o espaço amostral associado a um experimento. Uma variável aleatória é uma função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

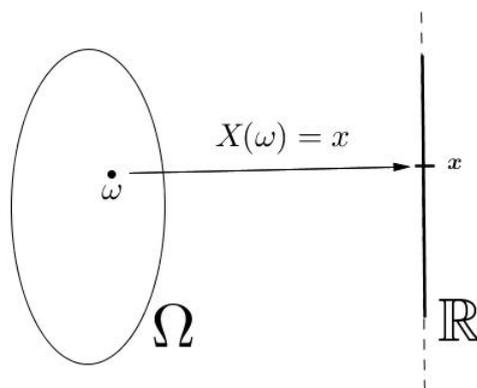


Figura 3.1: Variável aleatória  $X(\omega)$

### 3.1.4 Probabilidade conjunta

(Lebensztayn e Coletti, 2008) Seja  $\Omega$  o espaço associado a um experimento e  $X = X(\omega)$  e  $Y = Y(\omega)$ , duas funções, cada uma associando um número real para cada  $\omega \in \Omega$ . Tem-se  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional se os valores de  $X$  e  $Y$  forem finitos ou infinitos enumeráveis. Define-se então a função de probabilidade conjunta da variável bidimensional  $(X, Y)$ , a função

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(x_i, y_j)$$

que a cada valor de  $(x_i, y_j)$  associa a sua probabilidade de ocorrência e satisfaz às seguintes condições:

- i)  $P(X = x_i, Y = y_j) \geq 0$  para todo  $(x_i, y_j)$
- ii)  $\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) = 1$

#### Distribuição de probabilidade conjunta para o caso discreto

É definida como o conjunto  $((x_i, y_j), P(x_i, y_j))$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, r$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, s$ .

#### Probabilidades marginais de uma distribuição conjunta

Dada a distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , a probabilidade marginal de cada uma das variáveis é calculada por:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^s P(x_i, y_j)$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^r P(x_i, y_j)$$

#### Probabilidades condicionais de uma distribuição conjunta

Denomina-se probabilidade condicional de  $X = x_i$  dado que  $Y = y_j$  e  $P(Y = y_j) > 0$ , a probabilidade

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

### 3.1.5 Grafo

Um grafo  $G = (V, A)$  consiste em um conjunto não-vazio  $V$ , de elementos chamados vértices, e um conjunto  $A$  de arestas. Uma aresta é um par não-ordenado  $(V_i, V_j)$ , em que  $V_i$  e  $V_j$  são elementos de  $V$ . A Figura 3.2 ilustra um exemplo de grafo em que  $V = \{V_1, V_2, V_3\}$  e  $A = \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_2, V_2)\}$ .

Diz-se que um grafo  $G = (V, A)$  é dirigido quando o conjunto  $A$  de arestas é ordenado, ou seja,  $(V_i, V_j)$  é um par ordenado de vértices em que  $V_i$  e  $V_j$  são elementos de  $V$ . Tais vértices são chamados de nós terminais. A Figura 3.3 mostra um grafo dirigido em que  $V = \{V_1, V_2, V_3\}$  e  $A = \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_3, V_1), (V_2, V_2)\}$ .

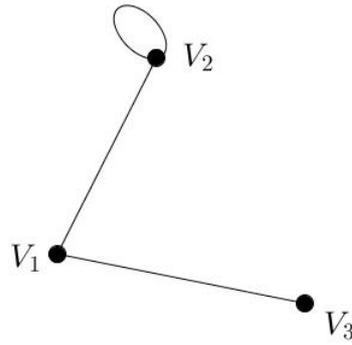


Figura 3.2: Exemplo de grafo

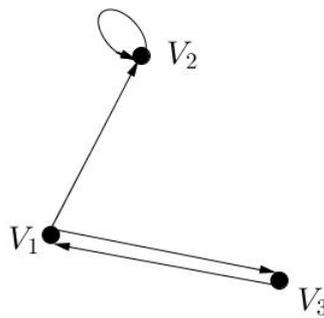


Figura 3.3: Exemplo de grafo dirigido

### 3.1.6 Diagrama de transição

Um diagrama de transição é um grafo dirigido em que os vértices são rotulados com os nomes dos estados e as arestas ordenadas representam as transições de estados possíveis do sistema estudado. Os rótulos das arestas marcam as probabilidades de transição de estados. A Figura 3.4 mostra um diagrama de transição com 3 estados  $i$ ,  $j$  e  $k$ .

### 3.1.7 Processos estocásticos

Um processo estocástico é definido, segundo Fernandez (1997), como uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t\}$  indexadas por um parâmetro  $t$  pertencente a um conjunto  $T$ . Representa-se por

$$\{X_t, t \in T\}$$

em que  $T$  é o espaço de parâmetros (em geral um conjunto de inteiros positivos), como por exemplo o tempo, e  $X_t$  representa uma característica mensurável de interesse em  $t$ .

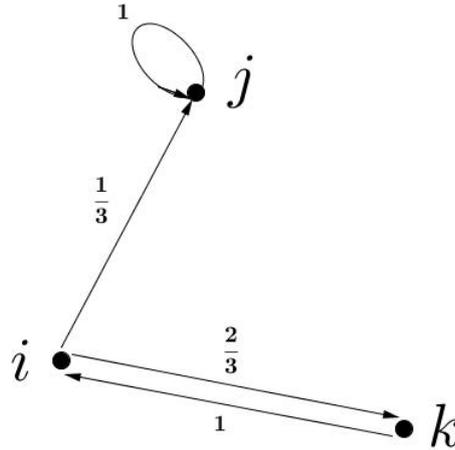


Figura 3.4: Exemplo de diagrama de transição

### 3.1.8 Processos de Markov

Um processo estocástico é dito um processo markoviano se o estado futuro depende apenas do estado presente, e não dos estados passados (processo sem memória). Assim, as probabilidades de transição não mudam com o tempo:

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

para todo  $t = 0, 1, 2, \dots$  (As probabilidades de transição são ditas estacionárias)

## 3.2 Cadeias de Markov

### 3.2.1 Definição de cadeias de Markov

Sejam  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  as sucessivas observações de um processo de parâmetro discreto no tempo contável, em que  $X_n$  é a variável aleatória cujo valor representa o estado do sistema no  $n$ -ésimo tempo. Uma sequência de variáveis aleatórias arbitrárias  $\{X_n\}$  é uma cadeia de Markov se a cada variável aleatória  $X_n$  é discreta e possui a propriedade de Markov:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

#### Probabilidade de transição

(Golmakani et al., 2014) Definida a cadeia de Markov, a probabilidade de  $X_{n+1}$  estar no estado  $j$  sabendo que  $X_n$  está no estado  $i$  é denominada por probabilidade de transição a um passo e denotada como  $P_{ij}^{n,n+1}$ , ou seja,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}^{n,n+1}$$

### Cadeia de Markov homogênea

Define-se cadeia de Markov homogênea no tempo ou estacionária quando as probabilidades de transição a um passo são independentes do tempo. Então, como  $P_{ij}^{n,n+1}$  não depende do tempo  $n$ , pode-se escrever simplesmente  $P_{ij}$  para a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  em um só passo.

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}$$

### Matriz de transição

Segundo Golmakani et al. (2014), define-se a matriz de transição  $\mathbf{P}$  do processo como sendo a matriz em que a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{P}$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots$ , é a distribuição de probabilidade de  $X_{n+1}$  condicionada a  $X_n = i$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dada a matriz de transição  $\mathbf{P}$ , as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- i)  $P_{ij} \geq 0$  para  $i, j = 0, 1, 2, \dots$
- ii)  $\sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = 1$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$

Para o caso de haver número de estados finito, tem-se a matriz de transição como uma matriz quadrada finita.

### Cadeia de Markov definida

(Fernandez, 2014) Uma cadeia de Markov é completamente definida se forem dados sua matriz de transição e o seu estado inicial (ou, de forma geral, a sua distribuição inicial de probabilidades). Logo, é possível calcular o valor de  $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$ . Pela propriedade de Markov, tem-se

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-2} = i_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \dots P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \\ &= P_{i_{n-1}, i_n} P_{i_{n-2}, i_{n-1}} \dots P_{i_0, i_1} \pi_0(i_0) \end{aligned}$$

em que  $\pi_0(i_0) = P(X_0 = i_0)$ .

### Matriz de transição a $n$ passos

(Fernandez, 2014) Seja  $\mathbf{P}$  a matriz de transição de uma cadeia de Markov homogênea. A matriz de transição a  $n$  passos dessa mesma cadeia de Markov é a  $n$ -ésima potência da matriz de transição  $\mathbf{P}$ , isto é,  $\mathbf{P}^n$ . Denotando a probabilidade de uma cadeia de Markov passar do estado  $i$  para o estado  $j$  em  $n$  passos por  $P_{ij}^n$ , com  $n$  inteiro e maior do que 1, pelo teorema da probabilidade total, pode-se escrever

$$P_{ij}^n = P(X_{m+n} = j | X_m = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{m+n} = j, X_{m+1} = k | X_m = i)$$

Para se passar do estado  $i$  para o estado  $j$  em  $n$  passos é necessário que se passe pelo estado intermediário  $k$  na primeira transição e depois prosseguir para o estado  $j$  em  $n - 1$  passos. Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{m+n} = j, X_{m+1} = k | X_m = i) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(X_{m+n} = j, X_{m+1} = k, X_m = i)}{P(X_m = i)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(X_{m+n} = j | X_{m+1} = k, X_m = i) P(X_{m+1} = k, X_m = i)}{P(X_m = i)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(X_{m+n} = j | X_{m+1} = k) P(X_{m+1} = k | X_m = i) P(X_m = i)}{P(X_m = i)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{m+n} = j | X_{m+1} = k) P(X_{m+1} = k | X_m = i) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{kj}^{n-1} P_{ik} = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik} P_{kj}^{n-1} \end{aligned}$$

Logo,

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik} P_{kj}^{n-1}$$

para

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Da teoria de matrizes,  $\sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik} P_{kj}^{n-1}$  é a fórmula de multiplicação de matrizes

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \times \mathbf{P}^{(n-1)}$$

Efetutando os cálculos para  $n$  fatores da matriz  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \dots \times \mathbf{P} = \mathbf{P}^n$$

finaliza-se a demonstração.

### Equação de Chapman-Kolmogorov

Seja  $\mathbf{P}$  a matriz de transição de uma cadeia de Markov homogênea, tem-se

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik}^m P_{kj}^n$$

para  $\forall i, j \in \Omega$  e  $n, m \geq 0$ .

### Comunicação entre estados em uma cadeia de Markov

Define-se como um caminho do estado  $i$  ao estado  $j$  a uma sequência de transições com probabilidades positivas que ligam esses dois estados. Diz-se que um estado  $j$  é acessível a partir de um estado  $i$  caso exista um caminho de  $i$  para  $j$ , ou seja, se para algum valor inteiro positivo de  $n$

$$P_{ij}^n > 0$$

Denota-se que o estado  $j$  é acessível a partir de um estado  $i$  por  $i \rightarrow j$ .

### Estados comunicantes em uma cadeia de Markov

Dois estados  $i$  e  $j$  são comunicantes se, e somente se,  $j$  for acessível a partir de  $i$  e  $i$  for acessível a partir de  $j$ . Denota-se que  $i$  e  $j$  são comunicantes como  $i \leftrightarrow j$ .

### Estados absorventes em uma cadeia de Markov

Fernandez (2014) define estado absorvente como sendo o estado  $i \in \Omega$  se  $P_{ii} = 1$ .

### 3.2.2 Exemplo

Considere o seguinte exemplo (Figura 3.5) de Hoel et al. (1972) para ilustrar uma cadeia de Markov: suponha que uma máquina se encontre em um dos estados  $X_n$  possíveis em cada dia  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{se a máquina estiver quebrada} \\ 1 & \text{se a máquina estiver em operação} \end{cases}$$

Supondo também que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) &= p \\ P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) &= q \end{aligned}$$

Denota-se

$$\begin{cases} \pi_0(1) = P(X_0 = 1) \\ \pi_0(0) = P(X_0 = 0) \end{cases}$$

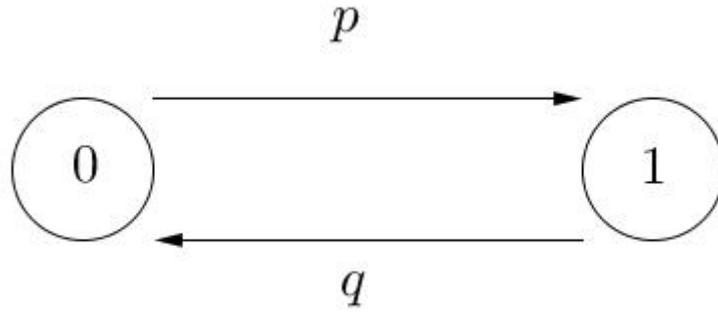


Figura 3.5: Diagrama de transição do funcionamento da máquina

e verifica-se os valores de  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$ .

Independentemente de  $\pi_0$  tem-se

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0, X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1, X_{n+1} = 0) \\
 &= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) \\
 &= P(X_n = 0)(1 - p) + P(X_n = 1)q \\
 &= P(X_n = 0)(1 - p) + [1 - P(X_n = 0)]q \\
 &= P(X_n = 0)(1 - p - q) + q
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando a equação anterior, pode-se efetuar os cálculos para cada  $n$ :

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = 0) &= \pi_0(0)(1 - p - q) + q \\
 P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)(1 - p - q) + q \\
 &= [\pi_0(0)(1 - p - q) + q](1 - p - q) + q \\
 &= \pi_0(0)(1 - p - q)^2 + q[(1 - p - q)^1 + (1 - p - q)^0] \\
 P(X_3 = 0) &= P(X_2 = 0)(1 - p - q) + q \\
 &= \pi_0(0)(1 - p - q)^3 + q[(1 - p - q)^2 + (1 - p - q)^1 + (1 - p - q)^0] \\
 &\vdots \\
 P(X_n = 0) &= P(X_{n-1} = 0)(1 - p - q) + q \\
 &= \pi_0(0)(1 - p - q)^n + q \sum_{i=1}^{n-1} (1 - p - q)^i
 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se a equação:

$$P(X_n = 0) = \pi_0(0)(1 - p - q)^n + q \sum_{i=1}^{n-1} (1 - p - q)^i \tag{3.2}$$

A fim de estudar a Equação (3.2), são listados os casos a seguir:

- 1<sup>o</sup> Caso:  $p = q = 0$

De imediato:  $P(X_n = 0) = \pi_0(0)$  e  $P(X_n = 1) = \pi_0(1)$

- 2<sup>o</sup> Caso:  $p + q > 0$

Para  $p + q > 0$ , tem-se a soma da progressão geométrica

$$\sum_{i=1}^{n-1} (1-p-q)^i = \frac{1 - (1-p-q)^n}{1 - (1-p-q)} = \frac{1 - (1-p-q)^n}{p+q}$$

Substituindo em (3.2), tem-se

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= \pi_0(0)(1-p-q)^n + q \left[ \frac{1 - (1-p-q)^n}{p+q} \right] \\ &= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left[ \pi_0(0) - \frac{q}{p+q} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como

$$\begin{cases} P(X_n = 0) + P(X_n = 1) = 1 \\ \pi_0(0) + \pi_0(1) = 1 \\ \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = 1 \end{cases}$$

consequentemente, tem-se

$$P(X_n = 0) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left[ \pi_0(1) - \frac{p}{p+q} \right] \quad (3.4)$$

Suponha que  $0 \neq p \neq 1$  e que  $0 \neq q \neq 1$ , então  $0 < p+q < 2$ ,  $|1-p-q| < 1$ .

Substituindo em (3.3) e (3.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \quad (3.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} \quad (3.6)$$

Em vista das expressões para o cálculo das probabilidades obtidas anteriormente, é possível afirmar que a probabilidade da máquina estar quebrada ou em operação só depende das probabilidades de transição ou, observado o 1<sup>o</sup> caso, da distribuição inicial de probabilidades.

### 3.2.3 Vetor probabilidade e matriz de transição de estados

Observado o mesmo exemplo do funcionamento da máquina, é possível escrever a respectiva matriz de transição  $\mathbf{P}$ , o vetor de estado inicial  $v^0$  e o vetor probabilidade  $v^n$  no  $n$ -ésimo passo (Golmakani et al., 2014):

$$v^0 = \left( \pi_0(0) \quad \pi_0(1) \right)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}$$

$$v^n = \begin{pmatrix} \pi_n(0) & \pi_n(1) \end{pmatrix}$$

em que  $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$  e  $\pi_n(1) = P(X_n = 1)$ .

Pode-se calcular  $v^n$  da seguinte forma, utilizando produto matricial  $v^n = v^0 \mathbf{P}^n$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} \pi_n(0) & \pi_n(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0(0) & \pi_0(1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}^n$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} \pi_n(0) & \pi_n(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0(0) & \pi_0(1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}^n$$

### 3.3 Roteiro de aula sobre cadeias de Markov

Seguindo algumas das sugestões de Castro (2015), é elaborado um exemplo de aplicação das cadeias de Markov a ser ensinado em sala de aula para alunos do Ensino Médio. Sobre o conteúdo de cadeias de Markov, a forma como deverá ser abordado ficará a cargo do professor, visto que somente ele conhecerá o aprofundamento no conteúdo que poderá ser ministrado aos alunos. Cabe ressaltar que o conteúdo das cadeias de Markov deverá ser uma complementação para o aprendizado, ou seja, recomenda-se que todo o conteúdo do Ensino Médio relacionado a matrizes, sistemas lineares e probabilidade seja ensinado previamente.

A fim de ilustrar uma aplicação interessante aos alunos, é proposto o seguinte exercício: deseja-se calcular a probabilidade de um time de futebol vencer as próximas partidas de um campeonato, dado que essa probabilidade só depende do resultado do último jogo disputado em um campeonato em que não seja admitido empate (deve-se sempre ter um vencedor em cada partida).

Enunciado proposto: O time de futebol Futebolense disputará um campeonato em que os jogos admitem apenas que um time seja vencedor e o outro perdedor (não há empates). Sabendo que a probabilidade do time Futebolense vencer a próxima partida só depende do resultado da última partida e que são dados: a probabilidade do time vencer sua próxima partida dado que perdeu a anterior é igual a 0,5 e a probabilidade dele perder sua próxima partida dado que venceu a anterior é igual a 0,2. Com base nas informações anteriores e que o Futebolense venceu uma partida amistosa antes do início deste campeonato, responda:

Questão 1: Qual a probabilidade do Futebolense vencer a partida da primeira rodada do campeonato?

Questão 2: Qual a probabilidade do Futebolense vencer a partida da segunda rodada de jogos, sabendo-se que ainda nem jogou na primeira rodada?

Questão 3: Qual a probabilidade do Futebolense vencer a partida da terceira rodada de jogos, sabendo-se que ainda nem jogou na primeira rodada?

Resolução proposta:

Pode-se adaptar a resolução abordada no exemplo dado anteriormente de Hoel et al. (1972). Logo, tem-se o time Futebolense em um dos estados  $X_n$  possíveis em cada jogo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  (observa-se que o jogo 0 é o amistoso que ele conseguiu vencer, ou seja,  $X_0 = 0$ ).

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{se o time for vencedor} \\ 1 & \text{se o time for perdedor} \end{cases}$$

Tem-se também o diagrama de transição que poderá ser representado em aula (ver Figura 3.6).

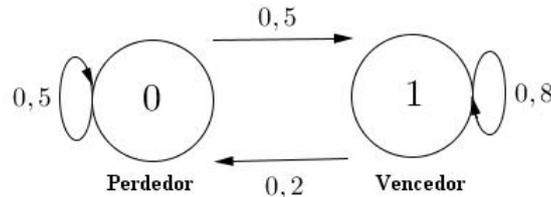


Figura 3.6: Diagrama de transição dos resultados das partidas

Resolução proposta para questão 1:

Conforme diagrama de transição (Figura 3.6), tem-se a probabilidade igual a 0,8.

Resolução proposta para questão 2:

Pede-se para calcular o vetor probabilidade  $v^2$  para  $p = 0,5$ ,  $q = 0,2$ ,  $\pi_0(0) = 0$  e  $\pi_0(1) = 1$  (pois o time venceu o jogo amistoso antes das rodadas do campeonato).

Primeiramente, deve-se encontrar  $\mathbf{P}^2$ . Então

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$v^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,74 \end{pmatrix}$$

Portanto, a resposta para a questão 2 é a probabilidade de 0,74.

Resolução proposta para questão 3:

Pede-se para calcular o vetor probabilidade  $v^3$ . Deve-se encontrar  $\mathbf{P}^3$ . Então

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,305 & 0,695 \\ 0,278 & 0,722 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$v^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,305 & 0,695 \\ 0,278 & 0,722 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,278 & 0,722 \end{pmatrix}$$

Portanto, a resposta para a questão 3 é a probabilidade de 0,722.

Em aula, é possível que o professor faça uma observação para a convergência dos valores do vetor probabilidade conforme  $n$  cresce. Pelas Equações (3.5) e (3.6) são verificadas a convergência quando se aumenta o valor de  $n$  em  $v^n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(0) = \frac{q}{p+q} = \frac{2}{7} = 0,285714$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(1) = \frac{p}{p+q} = \frac{5}{7} = 0,714285$$

### 3.4 Jogo do labirinto

Suponha que num determinado jogo de labirinto, o ponto de partida seja uma sala numerada 1 e deseja-se chegar até a sala 10, ponto de chegada, passando por diversas salas numeradas de 2 a 9, conforme ilustrado na Figura 3.7, em que as linhas pretas representam as paredes e as linhas vermelhas, as portas. Suponha que as probabilidades de se abrir cada uma das portas seja equiprovável, inclusive a porta que retorna para a mesma sala da qual o participante veio. Assim, é possível esboçar a matriz de transição de estados  $\mathbf{P}$  e o diagrama de transição (Figura 3.8) do presente problema.

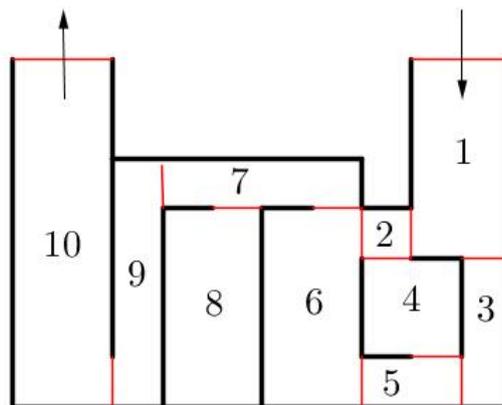


Figura 3.7: Ilustração do labirinto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,333 & 0 & 0 & 0,333 & 0 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0,333 & 0,333 & 0 & 0,333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0,333 & 0 & 0 & 0,333 & 0 & 0,333 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,333 & 0 & 0,333 & 0,333 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

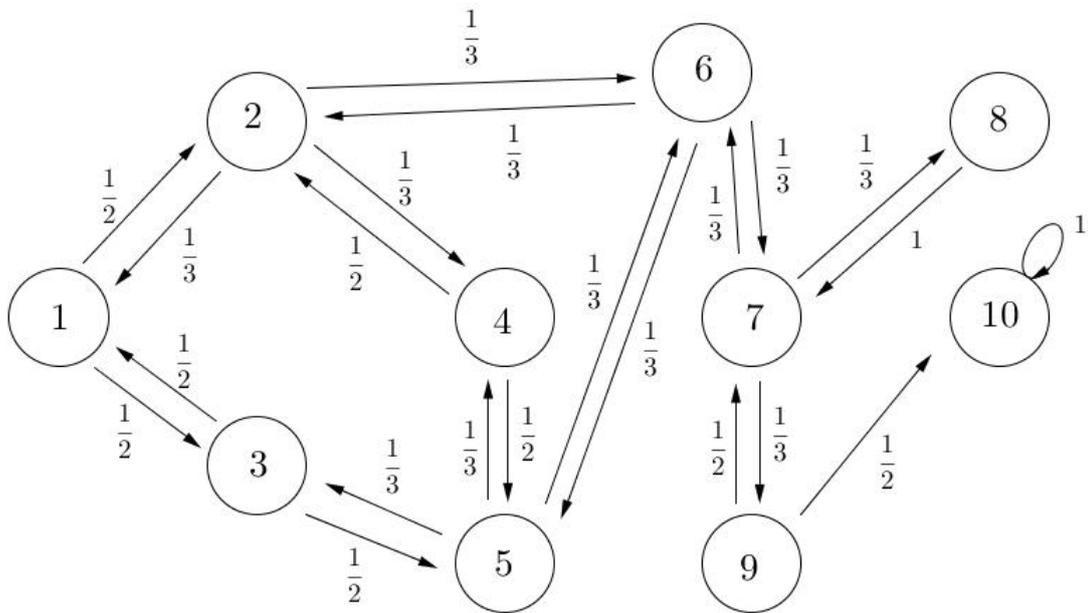


Figura 3.8: Diagrama de transição do labirinto

Com uma rápida observação à Figura 3.7, pode-se afirmar que é necessário pelo menos cinco etapas para se chegar à sala 10. Após os devidos cálculos pelo *software* Excel, obtem-se as matrizes  $\mathbf{P}^2$ ,  $\mathbf{P}^3$ ,  $\mathbf{P}^4$  e  $\mathbf{P}^5$ .





$$\mathbf{P}^{20} = \begin{pmatrix} 0,093 & 0,126 & 0,092 & 0,093 & 0,126 & 0,123 & 0,075 & 0,03 & 0,03 & 0,211 \\ 0,084 & 0,142 & 0,084 & 0,075 & 0,142 & 0,095 & 0,097 & 0,02 & 0,02 & 0,241 \\ 0,092 & 0,126 & 0,093 & 0,093 & 0,126 & 0,123 & 0,075 & 0,03 & 0,03 & 0,211 \\ 0,093 & 0,112 & 0,093 & 0,1 & 0,112 & 0,135 & 0,061 & 0,035 & 0,035 & 0,224 \\ 0,084 & 0,142 & 0,084 & 0,075 & 0,142 & 0,095 & 0,097 & 0,02 & 0,02 & 0,241 \\ 0,082 & 0,095 & 0,082 & 0,09 & 0,095 & 0,122 & 0,05 & 0,032 & 0,032 & 0,319 \\ 0,05 & 0,097 & 0,05 & 0,04 & 0,097 & 0,05 & 0,073 & 0,009 & 0,009 & 0,523 \\ 0,06 & 0,061 & 0,06 & 0,07 & 0,061 & 0,097 & 0,028 & 0,027 & 0,027 & 0,509 \\ 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,035 & 0,03 & 0,048 & 0,014 & 0,014 & 0,014 & 0,755 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos então os vetores:

$$v^{10} = (0,132 \quad 0,13 \quad 0,1 \quad 0,122 \quad 0,152 \quad 0,158 \quad 0,07 \quad 0,036 \quad 0,036 \quad 0,064)$$

$$v^{20} = (0,093 \quad 0,126 \quad 0,092 \quad 0,093 \quad 0,126 \quad 0,123 \quad 0,075 \quad 0,03 \quad 0,03 \quad 0,211)$$

Verifica-se que a distribuição de probabilidades passadas dez etapas e vinte etapas não muda drasticamente, indicando a possibilidade de convergência. Nota-se que, mesmo nas etapas 5 e 10, as chances do indivíduo encontrar-se perdido nas 5 primeiras salas são grandes, 0,636 e 0,53, respectivamente. Outra verificação é que, como o estado 10 é absorvente, visto que uma vez atingido não se altera para outro, a probabilidade de atingi-lo aumenta conforme o jogo do labirinto avança:

$$\begin{cases} \pi_5(10) = 0,009 \\ \pi_{10}(10) = 0,064 \\ \pi_{20}(10) = 0,211 \end{cases}$$

Com este exemplo é possível mostrar um pouco do poder desta importante ferramenta da matemática para encontrar uma distribuição de probabilidades para cada um dos estados em um dado instante de tempo. Logo, adotando um modelo matemático adequado, pode-se prever a evolução de inúmeros sistemas físicos, biológicos, químicos, econômicos, sociais, entre outros.

## 4 Modelo de precificação de ativos

### 4.1 Introdução ao mercado de ações

Uma ação de uma empresa representa a menor parcela de uma empresa de capital aberto. Esta, por sua vez, é aquela que possui suas ações negociadas em bolsas de valores. A bolsa de valores do Brasil é a BM&FBOVESPA.

As compras e vendas de ativos na bolsa de valores ocorre por meio da intermediação das corretoras de valores, que são instituições regulamentadas pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM), órgão que fiscaliza o sistema financeiro nacional. Estas negociações podem ocorrer via plataforma de negociação *on-line* chamada *Home Broker* ou pela assessoria de um agente autônomo de investimento, profissional qualificado para atender os clientes e passar todas as informações pertinentes aos mercados de renda fixa e de renda variável. Quando os investidores operam por conta própria, ou seja, utilizando o *Home Broker*, os custos operacionais tornam-se menores do que quando é utilizado o sistema via assessor de investimentos.

O mercado de renda variável possui este nome por não garantir qualquer rentabilidade ou remuneração durante um certo período de tempo. É neste ramo dos investimentos que estão as ações de empresas.

Segundo Rappaporte (2001), o valor da empresa é dado pelo valor presente dos fluxos de caixa de suas operações durante o período de previsão, acrescidos de seus valores residuais e em títulos negociáveis – investimentos não essenciais às suas operações e com possibilidade de conversão em caixa. Dessa forma, a criação de valor para um acionista é o resultado dos investimentos da empresa a taxas acima do custo de capital exigido pelo mercado de capitais, sendo este o sistema de distribuição de valores mobiliários que proporciona liquidez aos títulos de emissão de empresas e viabiliza o processo de capitalização. O autor define a criação de valor com o equacionamento:

$$\text{Valor do Acionista} = \text{Valor da Empresa} - \text{Dívida}$$

Há um consenso de grandes investidores e vários analistas de mercado de que o mercado brasileiro de ações se caracteriza como bastante especulativo, ou seja, que grande parte dos movimentos de preços de ativos não acompanha de forma fidedigna o valor das empresas e sua evolução. Dentro desta linha, há muitos trabalhos e pesquisas

que buscam por padrões, indicadores de tendência de comportamento de preços e de métodos preditivos para negociação de ativos, seja no curto, médio ou longo prazos. Dado o contexto apresentado, justifica-se a busca por novos modelos matemáticos para abordar este tema, sendo as cadeias de Markov uma ferramenta adicional disponível para ser explorada.

## 4.2 Coleta de dados

Foram selecionadas oito ações de empresas brasileiras listadas na bolsa de valores BM&FBOVESPA: Cielo (CIEL3), CPFL Energia (CPFE3), Eternit (ETER3), Grendene (GRND3), Banco Itaú (ITUB3), Lojas Renner (LREN3), M. Dias Branco (MDIA3) e Companhia de Saneamento do Paraná (SAPR4). A escolha dos ativos foi realizada com base em investimentos pessoais realizados nessas empresas e também servirá para seleção de futuros ativos para compor carteira de investimentos pessoal.

Sobre a sigla dos ativos, CIEL3, por exemplo, também chamada de *ticker*, é composta por, quase sempre, 4 letras iniciais seguidas por um número. Os *tickers* finalizados pelo número 3 são classificados como ações ordinárias (que dão direito a voto em deliberações de assembleias) e os finalizados por um número diferente de 3 são classificados em ações preferenciais (dão prioridade para distribuição de dividendos e a sua posse, em geral, não gera direito a voto em deliberações de assembleias).

As cotações coletadas representam os preços de fechamento em cada dia de pregão ajustados por proventos, para que fossem minimizados seus efeitos sobre os valores. Sobre os proventos, eles são os benefícios (dividendos, juros sobre capital próprio, bonificações, entre outros) distribuídos por uma empresa aos seus acionistas. O termo ajuste por proventos refere-se ao mecanismo em que a própria BM&FBOVESPA corrige os efeitos de um direito de distribuição de benefício sobre o preço da ação assim que ele é gerado ao detentor de uma ação. Por exemplo: uma empresa anuncia a distribuição de 1 real para os detentores de suas ações no dia 03 de agosto do ano corrente. Suponha que essa ação foi cotada a 10 reais no fechamento desse pregão. Quem adquirisse a ação no pregão seguinte, dia 04 de agosto, não teria direito a tal pagamento e esse 1 real por ação também não faria mais parte do patrimônio da empresa. Logo, a bolsa de valores desconta esse 1 real da cotação no pregão subsequente, fazendo com que a cotação de abertura desse pregão seguinte seja de 9 reais. Caso não fosse ajustado por proventos, haveria, para esse caso, uma queda de 10% na cotação de um pregão para o outro, o que geraria problemas para o cálculo dos retornos dos ativos.

Segundo especialistas de mercado, os preços de fechamento representam, de forma mais pontual, as expectativas dos investidores sobre o desempenho econômico das empresas, visto os possíveis cenários econômicos.

O período de coleta (série histórica) abrangeu todos os pregões dos anos de 2013 a 2016.

## 4.3 Modelo de estados

A construção do modelo de precificação de ativos será realizada passo a passo nas subseções que se seguem.

### 4.3.1 Construção dos intervalos $I^q$

Cada intervalo  $I^q$  do modelo é formado pelo preço mínimo e pelo preço máximo de fechamento atingido pela ação na janela de 30 pregões consecutivos iniciados a partir do primeiro pregão do mês  $q$ . Exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para o mês de 01/2013, tem-se } q = 1 \\ \text{Para o mês de 12/2013, tem-se } q = 12 \\ \text{Para o mês de 02/2014, tem-se } q = 14 \end{array} \right.$$

Exemplificação da construção dos intervalos para uma janela de 8 primeiros pregões do mês de 03/2013 ( $q = 3$ ) de uma ação qualquer com as seguintes cotações:

- R\$10,30
- R\$10,70
- R\$10,00
- R\$10,89
- R\$11,00
- R\$11,20
- R\$11,50
- R\$11,15

Tem-se então  $I^3 = [p_{min}^3; p_{max}^3] = [10,00; 11,50]$ .

### 4.3.2 Construção dos subintervalos $I_n^q$

Cada subintervalo  $I_n^q$  do modelo representa cada uma das 15 partições do intervalo  $I^q$  construído na subseção anterior. São 14 partições idênticas e a 15ª construída de forma a abarcar todas as demais cotações do intervalo  $I^q$ . Cada um desses subintervalos será um estado em que a ação poderá estar no  $m$ -ésimo pregão após a janela de 30 pregões consecutivos utilizados para construção de  $I^q$ . Cada um dos subintervalos são da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1^q = [p_{min}^q; \alpha_1^q] \\ I_n^q = [\alpha_{n-1}^q + 0,01; \alpha_n^q], n = 2, 3, 4, \dots, 14 \\ I_{15}^q = [\alpha_{14}^q + 0,01; p_{max}^q] \end{array} \right.$$

Em que:

$$\begin{cases} \alpha_1^q = p_{min}^q + \delta^q \\ \alpha_n^q = \alpha_{n-1}^q + 0,01 + \delta^q, n = 2, 3, 4, \dots, 14 \\ \delta^q = \frac{\lfloor \frac{100(p_{max}^q - p_{min}^q)}{15} + 0,5 \rfloor}{100} - 0,01 \\ p \in I^q \Rightarrow p \in \cup I_i^q, i = 1, 2, 3, \dots, 15 \end{cases}$$

Exemplo de cálculo dos subintervalos utilizando-se a mesma janela de cotações (da subseção anterior) dos 8 primeiros pregões do mês de 03/2013 ( $q = 3$ ):

- R\$10,30
- R\$10,70
- R\$10,00
- R\$10,89
- R\$11,00
- R\$11,20
- R\$11,50
- R\$11,15

Calcula-se primeiro a constante  $\delta^3$ :

$$\delta^3 = \frac{\lfloor \frac{100(p_{max}^3 - p_{min}^3)}{15} + 0,5 \rfloor}{100} - 0,01 = \frac{\lfloor \frac{100(11,50 - 10,00)}{15} + 0,5 \rfloor}{100} - 0,01$$

$$\delta^3 = \frac{\lfloor 10,5 \rfloor}{100} - 0,01 = \frac{10}{100} - 0,01 = 0,09$$

Substituindo-se nas expressões de  $\alpha_n^3$ , tem-se

$$\begin{cases} \alpha_1^3 = p_{min}^3 + \delta^3 = 10,00 + 0,09 = 10,09 \\ \alpha_2^3 = \alpha_1^3 + 0,01 + \delta^3 = 10,09 + 0,01 + 0,09 = 10,19 \\ \alpha_3^3 = \alpha_2^3 + 0,01 + \delta^3 = 10,19 + 0,01 + 0,09 = 10,29 \\ \vdots \\ \alpha_{14}^3 = \alpha_{13}^3 + 0,01 + \delta^3 = 11,29 + 0,01 + 0,09 = 11,39 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} I_1^3 = [p_{min}^3, \alpha_1^3] = [10,00; 10,09] \\ I_2^3 = [\alpha_1^3 + 0,01; \alpha_2^3] = [10,09 + 0,01; 10,19] = [10,10; 10,19] \\ I_3^3 = [\alpha_2^3 + 0,01; \alpha_3^3] = [10,19 + 0,01; 10,29] = [10,20; 10,29] \\ \vdots \\ I_{15}^3 = [\alpha_{14}^3 + 0,01; p_{max}^3] = [11,39 + 0,01; 11,50] = [11,40; 11,50] \end{cases}$$

Pode-se observar que a constante  $\delta^q$  comporta-se como um incremento para que haja a transição do sistema de um estado para outro. Por exemplo, se a ação encontrasse em determinado estado  $a$  (subintervalo  $I_a^q$ ) em determinado pregão, caso haja um incremento de  $\delta^q$  unidades na sua cotação no próximo pregão, necessariamente a ação passará para o próximo estado (subintervalo  $I_{a+1}^q$ ).

As cotações das ações, por serem feitas em reais, têm como unidade mínima os centavos. Por esta razão, há muitas vezes a impossibilidade numérica de se obter todos os quinze subintervalos idênticos em amplitude, sendo a construção do subintervalo  $I_{15}^q$  feita de forma a deixar todos os demais com a mesma amplitude, garantindo melhor padronização dos cálculos.

Dados os quinze subintervalos construídos iniciados no mês  $q$ , pode-se associá-los aos quinze estados de uma cadeia de Markov. No presente modelo, o estado 1 será dado quando o preço da ação estiver no subintervalo  $I_1^q$ , o estado 2 quando o preço da ação estiver no subintervalo  $I_2^q$  e assim, sucessivamente. Dada a janela de observação de 30 pregões consecutivos, há a possibilidade de calcular a probabilidade da cotação passar do subintervalo  $I_a^q$  para o  $I_b^q$  em  $m$  pregões, ou seja, a probabilidade de transição  $P^m(a, b)$  do sistema passar do estado  $a$  para o estado  $b$  em  $m$  passos para  $1 \leq a \leq 15$  e  $1 \leq b \leq 15$ .

#### **4.4 Justificativa para a escolha da janela de pregões e da quantidade de subintervalos**

A fim de verificar a acurácia do modelo em prever os preços futuros das ações, foi utilizado o teste  $t$  (teste de diferença entre médias) para amostras dependentes com o objetivo de comparar as observações dos retornos esperados pelo modelo e dos retornos reais das ações. Fora realizado tal teste por se tratar do comportamento da mesma ação para as mesmas janelas de pregões e dias correspondentes, pressupondo normalidade de suas distribuições. Assim, o modelo estudado apresentou testes bicaudais iniciais estatisticamente insignificantes a 1%, 5% e 10% para janelas de 90 e 150 pregões consecutivos, ou seja, os retornos esperados médios pelo modelo e os retornos reais médios foram estatisticamente diferentes. Uma justificativa para tal fato pode decorrer das ações ficarem mais suscetíveis a notícias de mercado, conjuntura econômica ou política conforme aumenta-se a janela de pregões para cálculo da matriz de transição de estados, alterando assim o comportamento médio das oscilações das cotações entre tendências de alta e de baixa dentro dessas janelas de 90 e de 150 pregões consecutivos. Com a janela de 30 pregões, pôde ser observado retornos esperados pelo modelo e retornos reais mais próximos, evidenciando que o modelo realmente prediz o comportamento médio das ações para esse ajuste.

A divisão em 15 subintervalos de preços deve-se ao fato da mudança de um estado para outro apresentar variação próxima de um por cento nas cotações para os ativos

estudados. Tal valor possibilita que sejam feitas transações reais de compra e venda de ações e que haja lucro operacional real, já descontados os custos e taxas envolvidos nas transações de compra e venda.

Com a finalidade de verificar a viabilidade do modelo adotado, após o cálculo da matriz de transição com 30 pregões consecutivos, o estudo verifica o comportamento das cotações dos ativos nos 10 próximos pregões e compara a variação esperada calculada pelas cadeias de Markov e a variação real do preço da ação. A Figura 4.1 apresenta o gráfico de preços de fechamento da ação CIEL3 no período de 01/12/2014 a 29/01/2015 com seus valores distribuídos nos 15 subintervalos de preços (15 subdivisões no eixo das ordenadas). Neste gráfico de cotações da Cielo, há os 30 primeiros pregões iniciados no mês  $q = 24$  (pregões 1 a 30 no eixo das abscissas), de onde será calculado as probabilidades de transição, e os próximos 10 pregões (pregões 31 a 40 no eixo das abscissas), que o modelo procura prever.

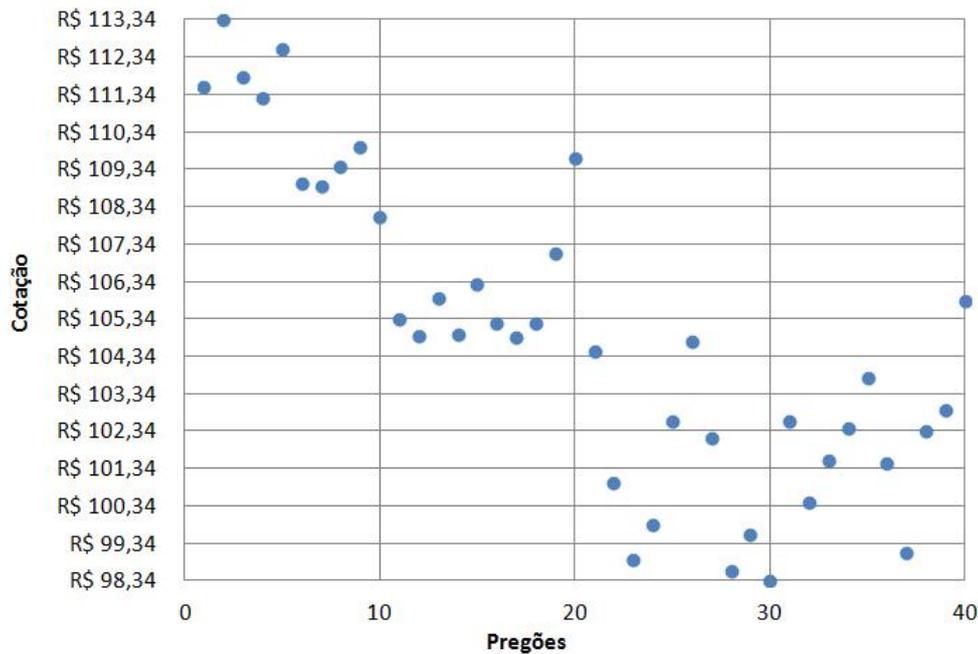


Figura 4.1: Gráfico do ativo CIEL3 de 01/12/2014 a 29/01/2015

## 4.5 Cálculo da matriz de transição

Os cálculos das probabilidades de transição de estados foram efetuados do primeiro pregão realizado no início de cada mês até o trigésimo consecutivo. Como as negociações da bolsa ocorrem apenas em dias úteis, levou-se em consideração um período aproximado de um mês e meio para a obtenção de cada matriz de transição. Utilizada esta metodologia, de janeiro de 2013 a dezembro de 2016 há 48 meses, e portanto, 47 matrizes para cada ativo no presente intervalo. Não foi possível utilizar o 48º mês, ou

seja, dezembro de 2016, pois necessitar-se-ia de 40 pregões consecutivos, avançando o mês de janeiro do ano de 2017, período não abrangido de coleta das cotações para o presente estudo.

A matriz  $\mathbf{P}$  a seguir exemplifica a matriz de transição do ativo CIEL3 para  $q = 24$ , ou seja, iniciando-se pelo primeiro pregão de dezembro de 2014.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,167 & 0 & 0 & 0,333 & 0,333 & 0,167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 4.6 Cálculo do retorno esperado pelo modelo

Dada a matriz de transição  $\mathbf{P}$ , conforme descrita na seção anterior, pode-se calcular o vetor probabilidade  $v^m$  contendo cada  $P^m(a, b)$ , ou seja, a probabilidade de transição do sistema passar do estado  $a$  para o estado  $b$  em  $m$  passos, com  $1 \leq m \leq 10$ .

$$v^m = v^0 \mathbf{P}^m$$

Com a finalidade de calcular o retorno acumulado esperado pelo modelo, foi definida a expressão:

$$RAE_m^q = \sum_{b=1}^{15} \frac{P^m(a, b)(b - a)\delta^q}{M_a^q} \quad (4.1)$$

em que

$$\begin{cases} M_1^q = \frac{p_{min}^q + \alpha_1^q}{2} \\ M_n^q = \frac{\alpha_{n-1}^q + 0,01 + \alpha_n^q}{2}, n = 2, 3, 4, \dots, 14 \\ M_{15}^q = \frac{\alpha_{14}^q + 0,01 + p_{max}^q}{2} \end{cases}$$

$(b - a)\delta^q$  representa o retorno obtido na transição do estado  $a$  para o  $b$   
 $M_a^q$  representa uma estimativa para o custo da ação no 30º pregão

Para fins de verificação e teste do modelo, dado o preço de fechamento  $p_j^q$  no  $j$ -ésimo pregão,  $1 \leq j \leq 40$ , iniciado no primeiro pregão do mês  $q$ , os retornos acumulados reais  $RAR_m^q$  das ações no  $m$ -ésimo pregão posterior ao último utilizado para o cálculo da matriz de transição são calculados por:

$$RAR_m^q = \frac{p_{30+m}^q}{p_{30}^q} - 1 \quad (4.2)$$

A Figura 4.2 apresenta o gráfico contendo a janela de 30 pregões consecutivos, juntamente com os 10 pregões posteriores e os respectivos valores esperados das cotações calculadas pelo modelo de precificação de ativos.

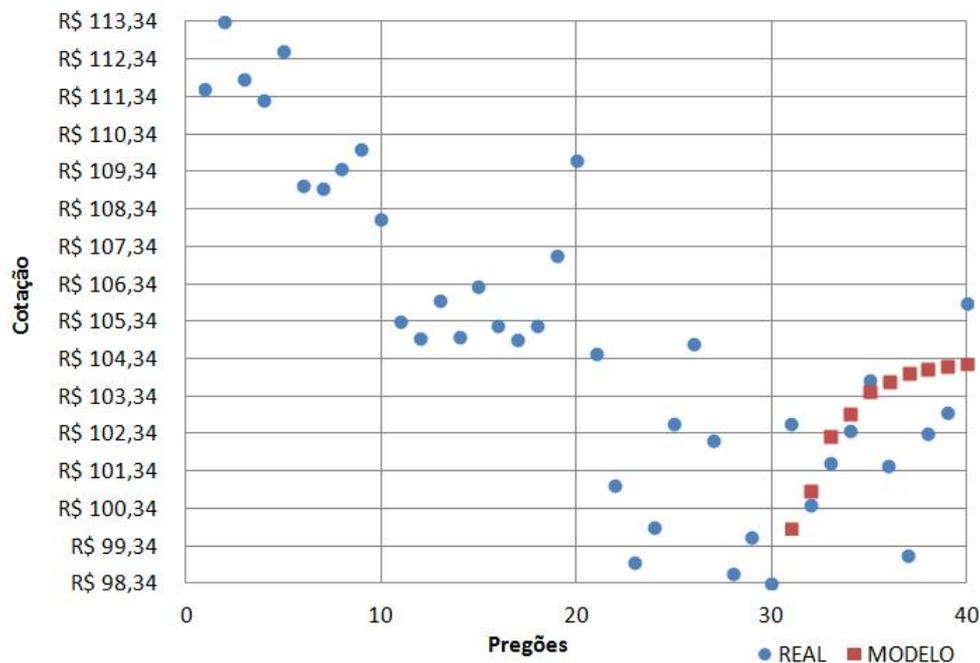


Figura 4.2: Gráfico do ativo CIEL3 de 01/12/2014 a 29/01/2015 com os valores esperados das cotações calculadas pelo modelo

## 4.7 Processamento dos dados e restrições operacionais do modelo

O cálculo das matrizes de transição foi efetuado no *software* Excel pela gama de ferramentas oferecida em suas planilhas eletrônicas, que possibilitaram inclusive as estimativas de retornos acumulados esperados e a comparação com os retornos acumulados reais. Tais cálculos foram efetuados utilizando fórmulas de operação entre as células das planilhas (um exemplo simples: para multiplicar os valores contidos nas células A2 e A3, basta selecionar a célula em que se deseja o resultado, suponha a célula A4, e digitar o comando = A3 \* A4).

Com o objetivo de minimizar os efeitos das bruscas oscilações nos preços dos ativos ocasionadas por notícias pontuais sobre o mercado ou sobre as empresas pesquisadas, foram retiradas, para o cálculo das matrizes de transição, as variações acima de três estados, ou seja, os saltos ou quedas de cotação que ultrapassaram três subintervalos. Além de diminuir o efeito especulativo dessas variações, há ganhos operacionais na redução dos cálculos efetuados.

A escolha realizada de 30 pregões para o cálculo da matriz de transição propiciou outra restrição do modelo em virtude de algumas janelas apresentarem sua última cotação sem histórico de mudança de subintervalo (ou seja, foi a primeira vez que se atingiu tal estado). Assim, dado que o sistema apresentou-se no estado  $a$  no trigésimo pregão e  $\sum_{b=1}^{15} P(a, b) = 0$ , houve exclusão destas janelas das análises e testes estatísticos por ocorrer impossibilidade do modelo em prever retornos acumulados esperados positivos ou negativos.

## 4.8 Testes estatísticos

A fim de verificar o ajuste do modelo aos dados de retornos acumulados reais, foi construída a variável  $dif_m^q$  (de diferença de retornos acumulados no  $m$ -ésimo pregão iniciado no  $q$ -ésimo mês) para aplicar o teste  $t$  bicaudal com amostras dependentes, pressupondo normalidade de seus retornos ( $RAR_m^q$  e  $RAE_m^q$ ). Fora aplicado tal teste  $t$ , também chamado teste  $t$  pareado, pelas amostras serem resultados de comparação das mesmas ações e pregões correspondentes para os retornos acumulados reais e os retornos acumulados esperados.

$$dif_m^q = RAR_m^q - RAE_m^q$$

Para níveis de significância a 1%, todos os testes  $t$  pareados foram rejeitados. No entanto, apresentaram a mesma média de retornos acumulados reais e os retornos acumulados esperados, as ações LREN3 e ITUB3 a 10% para  $m = 3$  e  $m = 5$ , respectivamente, e mesma média para os retornos das ações LREN3 para  $m = 2$ , significante a 5%. Para os demais casos, os testes  $t$  pareados evidenciaram que o modelo apresenta a média dos retornos acumulados reais diferente da média dos retornos acumulados esperados.

Realizada esta primeira etapa de testes estatísticos, a fim de explorar o modelo criado, em vez de verificar se o modelo apontaria quais seriam os retornos acumulados futuros, novos testes  $t$  pareados foram realizados com os retornos acumulados esperados como indicador para efetuar operação de compra e venda. Assim, foi definido um indicador de compra da seguinte forma:

$$\begin{cases} Indp_m^q = RAR_m^q, & \text{quando } RAE_m^q > 0 \\ Indp_m^q = 0, & \text{quando } RAE_m^q \leq 0 \end{cases}$$

para  $1 \leq m \leq 10$  e  $1 \leq q \leq 47$ .

Logo,  $Indp_m^q$  assume os valores dos retornos acumulados reais quando há  $RAE_m^q$  positivo, ou seja, quando o modelo prediz um resultado positivo numa possível operação de compra e venda de ações é realizado a negociação. Para aferir a eficácia deste indicador, define-se o retorno acumulado médio pelo indicador como:

$$RAMIndp_m = \sum_{q=1}^{47} \frac{Indp_m^q}{d}$$

em que  $1 \leq m \leq 10$  e  $d$  é a quantidade de vezes que  $Indp_m^q$  assume os valores positivos.

Utilizado o modelo construído como indicador de negociação, os testes  $t$  pareados, agora unicaudais ( $RAMIndp_m > 0$ ), apontaram retornos acumulados médios  $RAMIndp_m$  positivos estatisticamente significativos a 1% (\*\*\*) , 5% (\*\*) e 10% (\*) conforme Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. A consolidação dos dados das 8 ações é apresentado com o título "Carteira".

Tabela 4.1: Cálculo dos  $RAMIndp_m$  e significância

Ativo	$RAMIndp_1$	$RAMIndp_2$	$RAMIndp_3$	$RAMIndp_4$	$RAMIndp_5$
CIEL3	0,87%**	0,83%**	1,47%***	2,12%***	1,84%*
CPFE3	-0,02%	-0,38%	-0,78%	-0,22%	-0,03%
ETER3	0,06%	0,51%	0,81%	0,17%	0,26%
GRND3	0,76%	1,12%	0,96%	0,89%	0,57%
ITUB3	-0,03%	1,10%	1,61%***	1,46%**	1,33%**
LREN3	0,61%*	1,87%**	1,70%*	1,11%	1,48%
MDIA3	-0,36%	-0,55%	-0,22%	-0,08%	-0,07%
SAPR4	-0,81%	-0,06%	0,18%	0,45%	0,71%

Tabela 4.2: Cálculo dos  $RAMIndp_m$  e significância

Ativo	$RAMIndp_6$	$RAMIndp_7$	$RAMIndp_8$	$RAMIndp_9$	$RAMIndp_{10}$
CIEL3	2,53%**	0,93%	1,42%	2,58%*	2,29%*
CPFE3	-0,11%	-0,02%	0,36%	2,58%*	0,08%
ETER3	-0,37%	-0,27%	-1,23%	-0,26%	-1,27%
GRND3	0,15%	1,07%	0,60%	0,72%	1,39%
ITUB3	0,84%	0,61%	0,91%	0,93%	0,49%
LREN3	2,05%*	2,78%**	3,74%**	3,53%**	4,23%**
MDIA3	-0,24%	-0,87%	-1,12%	-0,39%	-1,45%
SAPR4	0,61%	1,02%	1,54%	2,05%	3,44%**

Tabela 4.3: Cálculo dos  $RAMIndp_m$  e significância

Ativo	$RAMIndp_1$	$RAMIndp_2$	$RAMIndp_3$	$RAMIndp_4$	$RAMIndp_5$
Carteira	0,18%	0,97%**	1,04%**	1,07%**	1,06%**

Tabela 4.4: Cálculo dos  $RAMIndp_m$  e significância

<b>Ativo</b>	$RAMIndp_6$	$RAMIndp_7$	$RAMIndp_8$	$RAMIndp_9$	$RAMIndp_{10}$
Carteira	1,08%**	1,13%*	1,14%*	1,27%***	1,17%**

Para complementar a análise dos resultados, com a finalidade de observar os retornos acumulados esperados e seus respectivos retornos acumulados reais, foram calculadas as somas dos retornos acumulados esperados positivos,  $SRAEp_m$ , e de seus respectivos retornos acumulados reais,  $SRARp_m$  (ver Tabelas 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13). De forma análoga, computou-se as somas dos retornos acumulados esperados negativos,  $SRARn_m$ , e de seus respectivos retornos acumulados reais,  $SRARn_m$ .

Baseado nas tabelas, pode-se verificar que, com exceção de CPFE3 e MDIA3, quando as cadeias de Markov indicavam movimentos de alta, as negociações apresentaram resultados médios positivos, altas mais acentuadas ou retornos negativos menos expressivos (caso de ETER3). Nos casos de negociação com indicação de baixa, com exceção de CPFE3 e MDIA3 novamente, as negociações utilizando o modelo obtiveram retornos médios negativos, quedas mais acentuadas ou retornos positivos menos expressivos (caso de CIEL3, GRND3 e ITUB3).

Objetivando quantificar o número de ocorrências de acerto do presente modelo na previsão de movimentos de altas e baixas nas cotações das empresas estudadas, são apresentadas tabelas contendo suas frequências relativas percentuais para  $1 \leq m \leq 10$  (ver Tabelas 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22).

Os dados evidenciam apenas duas ações, CIEL3 e LREN3, com acertos superiores a 60% com o indicador de movimento de alta. Confrontando-se a análise sobre os retornos previstos obtidos pelo modelo com as respectivas frequências de acerto (que não apresentam números muito acima de 50%), apesar de parecerem contraditórios, evidenciaram que, quando o modelo "acerta", o ganho obtido com a negociação é maior do que a perda gerada quando o modelo "erra". A Tabela 4.23 confirma o número de negociações e os acertos, juntamente com a soma dos retornos acumulados reais obtidos (caso houvessem essas negociações apontadas pelo modelo) e a valorização das respectivas cotações no período estudado.

Comparadas as somas dos retornos acumulados reais do modelo de precificação com a evolução do preço de cada ação, observa-se que o modelo apresenta retornos mais

Tabela 4.5: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de CIEL3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	12,84%	11,35%	-9,77%	11,13%
2	15,27%	12,38%	-5,80%	5,61%
3	15,78%	19,17%	-9,58%	9,45%
4	20,42%	27,62%	-6,72%	-7,73%
5	20,08%	25,75%	-9,68%	2,64%
6	19,41%	32,83%	-7,03%	-6,51%
7	22,79%	12,97%	-10,01%	-4,81%
8	22,03%	19,91%	-7,52%	-4,31%
9	21,45%	33,51%	-10,38%	4,49%
10	23,43%	32,06%	-7,96%	-7,56%
Total	193,53%	227,54%	-84,45%	2,38%

Tabela 4.6: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de CPFE3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	13,90%	-0,43%	-12,44%	0,39%
2	13,49%	-6,10%	-16,41%	0,93%
3	16,74%	-14,07%	-20,77%	13,83%
4	14,89%	-3,59%	-23,31%	3,88%
5	16,37%	-0,353%	-24,80%	7,30%
6	15,24%	-1,70%	-26,78%	10,18%
7	16,24%	-0,40%	-27,46%	-4,92%
8	14,92%	5,40%	-28,01%	2,08%
9	21,45%	33,51%	-28,12%	3,49%
10	14,60%	1,15%	-27,81%	2,89%
Total	157,84%	13,24%	-235,90%	40,03%

expressivos do que a valorização de suas cotações no período estudado, conforme tabela 4.23. Com exceção das ações CPFE3 e MDIA3, todas as ações tiveram maior rentabilidade se aplicadas seguindo as indicações das cadeias de Markov. As ações CIEL3, GRND3 e LREN3 apresentaram retornos maiores do que o dobro de suas respectivas valorizações, com destaque para o ativo LREN3, que chegou a quase multiplicar por cinco o seu aumento. A ação ETER3, apesar de apresentar rentabilidade negativa, teve uma redução de aproximadamente 80% da queda ocorrida no período estudado se comparado ao desempenho natural da ação. Mais um ponto de importante destaque é

Tabela 4.7: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de ETER3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	2,54%	0,36%	-11,11%	1,15%
2	4,01%	4,06%	-10,95%	6,45%
3	4,30%	5,65%	-11,96%	4,66%
4	4,57%	1,32%	-12,01%	5,86%
5	4,67%	2,09%	-13,20%	-0,16%
6	4,66%	-3,32%	-12,05%	-0,45%
7	4,61%	-1,91%	-13,60%	-16,82%
8	4,65%	-9,87%	-12,39%	-11,13%
9	4,64%	-1,79%	-13,53%	-24,93%
10	4,65%	-10,13%	-12,44%	-34,50%
Total	43,30%	-13,54%	-123,24%	-69,86%

Tabela 4.8: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de GRND3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	8,70%	11,33%	-9,65%	-0,92%
2	13,93%	13,47%	-14,54%	8,67%
3	14,71%	13,50%	-16,77%	4,98%
4	14,51%	11,57%	-16,71%	12,62%
5	16,00%	6,82%	-19,34%	7,38%
6	15,28%	1,68%	-17,71%	-5,43%
7	16,35%	13,85%	-19,14%	-8,89%
8	15,81%	6,60%	-18,01%	6,04%
9	16,82%	8,60%	-19,09%	2,02%
10	16,30%	16,67%	-17,56%	13,51%
Total	148,41%	104,10%	-168,53%	39,99%

a amplitude das valorizações de 5 das 8 ações estudadas, que ficaram acima de 100%, chegando a 318,98% no caso do ativo LREN3. Sob esses aspectos, o modelo mostra-se robusto na obtenção de indicadores de tendência de altas e pode ser aplicado como uma ferramenta no cotidiano dos investidores e gestores do mercado de ações.

Além da eficiência e eficácia para efetuar negociações com lucro na compra e venda de ações da bolsa de valores, o modelo apresenta-se de fácil implementação, coleta de dados e cálculo computacional. Estes fatores embasam a afirmação de que o modelo preditivo, além de contemplar características desejadas em um indicador de negociação

Tabela 4.9: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de ITUB3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	14,32%	-0,41%	-14,90%	0,53%
2	16,54%	14,29%	-17,47%	6,86%
3	19,21%	24,18%	-16,20%	2,24%
4	19,39%	24,82%	-15,72%	4,21%
5	19,97%	23,86%	-16,71%	18,63%
6	21,64%	15,09%	-17,58%	17,58%
7	23,21%	11,00%	-19,28%	8,56%
8	23,52%	16,36%	-20,00%	6,15%
9	24,51%	16,83%	-19,96%	10,75%
10	24,54%	8,78%	-20,24%	11,86%
Total	206,87%	154,79%	-178,06%	87,39%

Tabela 4.10: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de LREN3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	15,60%	9,16%	-12,69%	3,02%
2	14,00%	29,91%	-15,79%	4,52%
3	13,59%	25,44%	-15,16%	11,97%
4	14,11%	16,72%	-16,36%	3,08%
5	11,46%	20,74%	-17,61%	10,92%
6	11,80%	28,64%	-18,55%	2,47%
7	12,43%	38,90%	-20,17%	-22,95%
8	11,26%	48,65%	-21,69%	-18,10%
9	11,88%	45,83%	-22,16%	-9,97%
10	12,47%	54,97%	-23,34%	-0,62%
Total	128,60%	318,98%	-183,53%	-15,66%

de ativos, possui também grande potencial para ser explorado, em vista de que foram adotados, para o modelo, janelas de 30 pregões consecutivos e 15 subintervalos de preços, valores que ainda podem ser alterados e testados também com diferentes períodos de coleta e novos ativos negociados em bolsa de valores, entre outros.

Por meio do presente estudo, com vistas à criação de condições para melhoria da aprendizagem, as cadeias de Markov podem mostrar o poder do conhecimento aplicado da matemática em situações gradativamente mais complexas, alcançando um contexto até aparentemente caótico como o mercado de ações, exemplificado pelo modelo de

Tabela 4.11: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de MDIA3

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	7,39%	-3,59%	-8,59%	2,20%
2	5,91%	-5,49%	-7,32%	17,33%
3	6,36%	-2,02%	-12,28%	17,52%
4	6,76%	-0,76%	-10,35%	17,34%
5	7,54%	-0,63%	-13,92%	20,29%
6	7,17%	-2,40%	-11,66%	18,46%
7	7,34%	-8,65%	-15,03%	24,42%
8	7,46%	-11,15%	-12,23%	24,28%
9	7,57%	-3,86%	-15,67%	19,07%
10	7,48%	-14,47%	-12,76%	10,49%
Total	70,97%	-53,04%	-119,81%	171,41%

Tabela 4.12: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  de SAPR4

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	14,53%	-8,90%	-11,24%	4,29%
2	15,18%	-0,61%	-8,22%	11,97%
3	15,46%	2,02%	-10,86%	4,14%
4	15,16%	5,35%	-8,85%	5,87%
5	15,45%	8,57%	-10,56%	-5,24%
6	15,44%	7,33%	-8,96%	-22,34%
7	15,40%	12,29%	-10,15%	-25,70%
8	15,71%	18,52%	-8,64%	-36,67%
9	16,02%	24,66%	-9,76%	-25,51%
10	16,25%	41,28%	-8,34%	-22,19%
Total	154,60%	110,52%	-95,57%	-111,39%

precificação de ativos abordado neste capítulo. Assim, os alunos presenciarão um horizonte diferenciado de conhecimento em que eles sentir-se-ão mais motivados a estudar matemática e suas aplicações.

Tabela 4.13: Cálculo das  $SRAEp_m$ ,  $SRARp_m$ ,  $SRAEn_m$  e  $SRARn_m$  da Carteira

$m$	$SRAEp_m^q$	$SRARp_m^q$	$SRAEn_m^q$	$SRARn_m^q$
1	89,82%	18,88%	-90,38%	21,79%
2	98,32%	61,92%	-96,51%	62,33%
3	106,16%	73,87%	-113,58%	68,79%
4	109,82%	83,05%	-110,02%	45,13%
5	111,53%	86,67%	-125,81%	61,74%
6	110,65%	78,15%	-120,32%	13,96%
7	118,37%	78,05%	-134,85%	-51,10%
8	115,36%	94,41%	-128,50%	-31,66%
9	124,35%	157,29%	-138,68%	-20,59%
10	119,73%	130,31%	-130,44%	-26,12%
Total	1104,11%	862,60%	-1189,09%	144,28%

Tabela 4.14: Frequência de acertos dos movimentos de CIEL3

$m$	Altas pre- vistas	Altas efe- tivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	13	7	53,85%	10	4	40,00%
2	15	11	73,33%	9	4	44,44%
3	13	11	84,62%	12	4	33,33%
4	14	10	71,43%	10	5	50,00%
5	14	10	71,43%	12	6	50,00%
6	13	10	76,92%	10	6	60,00%
7	14	9	64,29%	12	5	41,67%
8	14	10	71,43%	10	5	50,00%
9	13	9	69,23%	12	6	50,00%
10	14	10	71,43%	10	6	60,00%
Total	137	97	70,80%	107	51	47,66%

Tabela 4.15: Frequência de acertos dos movimentos de CPFE3

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	19	9	47,37%	14	8	57,14%
2	16	8	50,00%	16	8	50,00%
3	18	8	44,44%	17	4	23,53%
4	16	7	43,75%	16	3	18,75%
5	18	9	50,00%	16	5	31,25%
6	15	9	60,00%	17	4	23,53%
7	17	9	52,94%	17	8	47,06%
8	15	8	53,33%	17	7	41,18%
9	13	9	69,23%	17	7	41,18%
10	15	7	46,67%	17	8	47,06%
Total	162	83	51,23%	164	62	37,80%

Tabela 4.16: Frequência de acertos dos movimentos de ETER3

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	6	4	66,67%	16	8	50,00%
2	8	2	25,00%	14	4	28,57%
3	7	4	57,14%	16	7	43,75%
4	8	4	50,00%	13	6	46,15%
5	8	4	50,00%	15	9	60,00%
6	9	4	44,44%	13	6	46,15%
7	7	4	57,14%	16	10	62,50%
8	8	4	50,00%	14	10	71,43%
9	7	4	57,14%	16	11	68,75%
10	8	3	37,50%	14	9	64,29%
Total	76	37	48,68%	147	80	54,42%

Tabela 4.17: Frequência de acertos dos movimentos de GRND3

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	15	7	46,67%	15	4	26,67%
2	12	7	58,33%	19	9	47,37%
3	14	7	50,00%	18	10	55,56%
4	13	7	53,85%	18	9	50,00%
5	12	6	50,00%	21	11	52,38%
6	11	5	45,45%	19	11	57,89%
7	13	5	38,46%	20	12	60,00%
8	11	4	36,36%	20	11	55,00%
9	12	4	33,33%	20	12	60,00%
10	12	4	33,33%	19	10	52,63%
Total	125	56	44,80%	189	99	52,38%

Tabela 4.18: Frequência de acertos dos movimentos de ITUB3

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	15	5	33,33%	17	10	58,82%
2	13	8	61,54%	18	10	55,56%
3	15	11	73,33%	17	9	52,94%
4	17	13	76,47%	15	7	46,67%
5	18	12	66,67%	14	5	35,71%
6	18	11	61,11%	14	5	35,71%
7	18	7	38,89%	14	6	42,86%
8	18	12	66,67%	14	6	42,86%
9	18	11	61,11%	14	7	50,00%
10	18	8	44,44%	13	5	38,46%
Total	168	98	58,33%	150	70	46,67%

Tabela 4.19: Frequência de acertos dos movimentos de LREN3

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	15	10	66,67%	15	9	60,00%
2	16	11	68,75%	14	7	50,00%
3	15	9	60,00%	16	6	37,50%
4	15	7	46,67%	16	7	43,75%
5	14	8	57,14%	16	8	50,00%
6	14	8	57,14%	17	10	58,82%
7	14	9	64,29%	17	11	64,71%
8	13	11	84,62%	18	10	55,56%
9	13	11	84,62%	18	9	50,00%
10	13	10	76,92%	18	10	55,56%
Total	142	94	66,20%	165	87	52,73%

Tabela 4.20: Frequência de acertos dos movimentos de MDIA3

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	10	4	40,00%	13	7	53,85%
2	10	4	40,00%	12	3	25,00%
3	9	5	55,56%	15	4	26,67%
4	9	4	44,44%	13	3	23,08%
5	9	3	33,33%	15	6	40,00%
6	10	3	30,00%	12	5	41,67%
7	10	4	40,00%	14	5	35,71%
8	10	4	40,00%	12	4	33,33%
9	10	5	50,00%	14	7	50,00%
10	10	3	30,00%	11	6	54,55%
Total	97	39	40,21%	131	50	38,17%

Tabela 4.21: Frequência de acertos dos movimentos de SAPR4

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	11	5	45,45%	12	6	50,00%
2	11	6	54,55%	11	3	27,27%
3	11	6	54,55%	12	7	58,33%
4	12	6	50,00%	11	4	36,36%
5	12	7	58,33%	11	5	45,45%
6	12	5	41,67%	11	6	54,55%
7	12	7	58,33%	11	8	72,73%
8	12	6	50,00%	11	9	81,82%
9	12	6	50,00%	11	7	63,64%
10	12	9	75,00%	11	5	45,45%
Total	117	63	53,85%	112	60	53,57%

Tabela 4.22: Frequência de acertos dos movimentos da Carteira

$m$	Altas previstas	Altas efetivas	Acertos	Baixas previstas	Baixas efetivas	Acertos
1	104	51	49,04%	112	56	50,00%
2	101	57	56,44%	113	48	42,48%
3	102	61	59,80%	123	51	41,46%
4	104	58	55,77%	112	44	39,29%
5	105	59	56,19%	120	55	45,83%
6	102	55	53,92%	113	53	46,90%
7	105	54	51,43%	121	65	53,72%
8	101	59	58,42%	116	62	53,45%
9	98	59	60,20%	122	66	54,10%
10	102	54	52,94%	113	59	52,21%
Total	1024	567	55,37%	1165	559	47,98%

Tabela 4.23: Comparação do total das  $SRARp_m$  e valorização das cotações

Ativo	Negociações	Acertos	$SRARp_m$ Total	Valorização
CIEL3	137	97	227,54%	93,88%
CPFE3	162	83	13,24%	36,69%
ETER3	76	37	-13,54%	-56,76%
GRND3	125	56	104,10%	37,07%
ITUB3	168	98	154,79%	79,75%
LREN3	142	94	318,98%	64,85%
MDIA3	97	39	-53,04%	60,31%
SAPR4	117	63	110,52%	70,28%

## 5 Conclusão e considerações finais

Faz-se necessário grande empenho das autoridades e governantes para que a educação no Brasil progrida de forma satisfatória, acompanhando às necessidades de uma sociedade mais dinâmica e muito carente de indivíduos com melhor formação. Indubitavelmente, a educação tem caráter transformador e com ela pode-se assegurar um caminho melhor para a vida de cada pessoa. Nesse ponto, a matemática tem um papel fundamental, pois é por meio dela que todas as outras ciências são possíveis, que a realidade é pautada. Por tamanha importância, deve-se cultivá-la de forma prazerosa e mostrar a ligação com cada elemento de nosso cotidiano, desde o momento do toque matinal do despertador ao projeto de construção de um foguete. Para que isso seja feito em sala de aula, as cadeias de Markov podem ser aplicadas a várias situações-problema a fim de mostrar a interdisciplinaridade da matemática com outras matérias da grade curricular e a poderosa ferramenta capaz de calcular a distribuição de probabilidades para vários cenários distintos de forma precisa, sendo necessário apenas os conhecimentos básicos do Ensino Médio para que seja abordado o roteiro de aula proposto neste trabalho.

De forma complementar, para motivar também os professores a se atualizarem e a pensar em novas formas de ministrar suas aulas, com a aplicação bem-sucedida das cadeias de Markov para elaboração de um modelo preditivo das cotações de ativos negociados em bolsa de valores, o presente estudo viabiliza a oportunidade de mostrar o quão importante é a matemática na compreensão do comportamento de fenômenos complexos por meio de ferramentas relativamente simples.

Por fim, espera-se que o presente trabalho contribua com novos exemplos a serem abordados em aula pelo professor, além de inspirá-lo a buscar outros. Somente assim, os discentes poderão presenciar a aplicação da matemática e compreender os conceitos abordados nas resoluções dos problemas de forma a se sentir mais seguros e com melhor autoestima para prosseguir em seus estudos, visto que vislumbrarão o quão forte a matemática está relacionada ao seu cotidiano e sua vasta aplicação no mundo que o cerca.

# Referências

ABREU, U. G. P.; SANTOS, S. A.; LOPES, P. S.; TORRES, R. A.; SANTOS, H. N. *Modelagem da dinâmica de rebanho de bovino de corte por meio de cadeia de Markov*. Santa Maria: Ciência Rural, v.38, n.9, p.2666-2669, dez. 2008.

ASSAF NETO, A. *Mercado financeiro*. 8ª edição. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

BARROS NETO, A. S. *Cadeias de Markov no Ensino Médio*. 2013. 47f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Sergipe.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, l.3, p.15, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL avança em conhecimento básico de matemática, mas continua atrás em ranking. BBC Brasil, online, 2016. Apresenta informações sobre indicadores da educação básica no Brasil. Disponível em: <[http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2016/02/160209\\_ocde\\_alunos\\_baixa\\_performance\\_pai\\_df](http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2016/02/160209_ocde_alunos_baixa_performance_pai_df)>. Acesso em: 04 jul. 2016.

BRASIL é um dos piores em educação de matemática e ciências. Veja.com, online, 2016. Apresenta informações sobre indicadores da educação básica no Brasil. Disponível em: <<http://veja.abril.com.br/educacao/brasil-e-um-dos-piores-em-educacao-de-matematica-e-ciencias/>>. Acesso em: 04 jul. 2016.

CASTRO, D. M. S. *Cadeias de Markov: uma aplicação para o ensino de matrizes e probabilidades*. 2015. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

CORREA, S. M. B. B. *Probabilidade e estatística*. 2ª edição. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.

DELATORRE, H. T. *Aplicações das cadeias de Markov no Ensino Médio*. 2016. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente.

FERNADEZ, P. J. Introdução aos processos estocásticos. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 10. , 1997, Poços de Caldas. *Notas de aulas-conferências*. Rio de Janeiro: IMPA, 1975. Disponível em:  
<[http://wwwimpa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/10CBM/10\\_CB\\_M\\_75\\_03.pdf](http://wwwimpa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/10CBM/10_CB_M_75_03.pdf)>. Acesso em: 04 jul. 2016.

FREITAS, A. R.; LOIBEL, S. M. C.; ANDRADE, M. G.; VAL, J. B. R. *Modelagem do crescimento populacional do rebanho bovino brasileiro*. Viçosa: Revista Brasileira de Zootecnia, v.34, n.6, p.2225-2232, dez. 2005.

GOLMAKANI, A.; SILVA, A. A.; FREIRE, E. M. S.; BARBOSA, M. K.; CARVALHO, P. H. G.; ALVES, V. L. Cadeias de Markov. In: VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 11. , 2014, Maceió. *minicurso*. Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2014. Disponível em:  
<<http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/minicurso/cadeias.pdf>>. Acesso em: 20 jun. 2018.

GOMES, A. V. P.; WANKE, P. *Modelagem da gestão de estoques de peças de reposição através de cadeia de Markov*. São Carlos: Gest. Prod., v.15, n.1, p.57-72, jan.-abr. 2008.

GUILLÉN, D.; GARCIA, M. *Expectativas desagregadas, credibilidade do Banco Central e cadeias de Markov*. Rio de Janeiro: RBE, v.68, n.2, p.197-223, abr.-jun. 2014.

HASHIOKA, J. A. S. *Anúncios de fusões e seus impactos na dinâmica de preços: um estudo sobre a perspectiva de mercado*. 2011. 42f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática Aplicada a Negócios) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto e Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto.

HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. *Introduction to stochastic processes*. Los Angeles: Houghton Mifflin Company, 1972.

JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. IMPA, CNPq, 1981.

KELLER FILHO, T.; ZULLO JUNIOR, J.; LIMA, P. R. S. R. *Análise de transição entre dias secos e chuvosos por meio da cadeia de Markov de terceira ordem*. Brasília: Pesquisa Agropecuária Brasileira, v.41, n.9, p.1341-1349, set. 2006.

LEBENSZTAYN, E.; COLETTI, C. F. Probabilidade: teoria e exercícios. In: PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA, 11, 2008, São Paulo. *Notas de aulas*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2008. Disponível em: <<http://hostel.ufabc.edu.br/cristian.coletti/arquivos/Livro.pdf>>. Acesso em: 17 jun. 2018.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de probabilidade e estatística*. 6ª edição. São Paulo: Edusp, 2004.

PENTEADO, M. A. B. *Uma avaliação estatística da análise gráfica no mercado de ações brasileiro à luz da teoria dos mercados eficientes e das finanças comportamentais*. 2003. 113f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo.

RAPPAPORT, A. *Gerando valor para o acionista: um guia para administradores e investimentos*. 1ª edição. Tradução. São Paulo: Editora Atlas, 2001.

RODRIGUES, C. R. *Cadeias de Markov: uma aula para alunos do ensino médio*. 2013. 44f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

ROSS, S. M. *Introduction to probability Models*. 9th edition, Berkeley: Elsevier Academic Press, 1972.

ROSS, S. M. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SILVA, C. E. V. *Aplicações da álgebra linear nas cadeias de Markov*. 2013. 39f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

SOARES JR., G. P. *Cadeias de Markov: uma proposta de ensino e aprendizagem*. 2014. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista.

---

STAUDT, F. H.; COELHO, A. S.; GONÇALVES, M. B. *Determinação da capacidade real necessária de um processo produtivo utilizando cadeia de Markov*. Florianópolis: Produção, v.21, n.4, p.634-644, out./dez. 2011.

VASCONCELOS, S. S.; HIGUCHI, N.; OLIVEIRA, M. V. N. *Projeção da distribuição diamétrica de uma floresta explorada seletivamente na Amazônia Ocidental*. Manaus: Acta Amazonica, v.39, n.1, p.71-80, mar. 2009.

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 12 de julho de 2018



---

Assinatura do autor