UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

O Uso do Teodolito Caseiro como instrumento de Ensino da Trigonometria

Diego Cavalcante de Sousa

Teresina - 2018

Diego Cavalcante de Sousa

Dissertação de Mestrado

O Uso do Teodolito Caseiro como instrumento de Ensino da Trigonometria

Dissertação submetida à Coordenação do Mestrado profissional em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza

Teresina - 2018

Cavalcante, Diego.

O Uso do Teodolito Caseiro como instrumento de Ensino da Trigonometria

Diego Cavalcante de Sousa – Teresina: 2018.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza.

1. Mestrado Profissional em Matemática

CDD 516.36

A existência de um ser superior na nossa vida, faz com que acreditemos em um amanhã melhor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por tudo que tem feito em minha vida, por me guiar nos momentos em que mais precisei e por sentir sua presença em todos os momentos da minha vida. A minha digníssima esposa, por todo amor e carinho e por sempre acreditar nos meus sonhos. A minhas filhas, por ser minha fonte de inspiração e de existência. A todos os professores do Curso, pela dedicação, compreensão e interação. Aos meus Pais que deram amor, carinho e acima de tudo caráter e força vontade para vencer na vida. Aos meus amigos de curso, foram anos de muitos estudos e interação entre eles. A meu orientador, Professor Dr. João Carlos de Oliveira Souza pela dedicação, paciência e contribuição durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

"Um futuro melhor só alcança quem buscar".

Diego Cavalcante

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo geral apresentar e discutir uma proposta didática que explore o uso do teodolito caseiro no ensino da Trigonometria, especialmente no Ensino Médio, buscando evidenciar uma forma de abordar o assunto. Os objetivos específicos são: elaborar uma sequência didática com atividades de construção e utilização do teodolito para o ensino de medida de alturas, desenvolver a sequência didática em uma sala de aula e por fim aplicar um instrumento de avaliação diagnóstica para a obtenção dos resultados. O desenvolvimento deste trabalho teve como base as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), onde se buscou orientações que norteassem o ensino da Matemática. **Palavras-Chaves:**Trigonometria, Matemática - Estudo e ensino, teodolito.

Abstract

The present work has for general objective to present and a didactic proposal that explores the use of the home-made teodolito in the teaching of the Trigonometry to discuss, especially in the Medium Teaching, looking for to evidence a form of approaching the subject. The specific objectives are: to elaborate a didactic sequence with construction activities and use of the teodolito for the teaching of measure of heights, to develop the didactic sequence in a classroom and finally to apply an instrument of evaluation diagnóstica for the obtaining of the results. The development of this work had as base the Orientações Curriculares for the Medium (OCEM) Teaching, where it was looked for orientations to orientate the teaching of the Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Neste trabalho, propomos a construção e a utilização de um Teodolito Caseiro (instrumento utilizado para medir ângulos) como ferramenta importante para o ensino dos conteúdos que envolvam a Trigonometria.

A escolha do tema vai ao encontro das suas dificuldades enfrentadas em sala de aula no que diz respeito ao ensino e aprendizagem em relação ao estudo da trigonometria, seja nas definições ou nas aplicações em problemas.

Dessa forma, ao escolher o tema para a dissertação de mestrado, pensamos em contribuir para uma aprendizagem mais dinâmica e que se aproxime da realidade dos alunos. A possibilidade de facilitar a aprendizagem, somada com uma metodologia mais dinâmica, são metas a perseguir neste trabalho, tentando minimizar o que foi exposto acima, sobre o ensino de Trigonometria ministrado nas turmas de ensino médio. Assim, faz parte desta proposta de trabalho apresentar uma ferramenta que possa ser usada pelo professor e seus alunos, em sala de aula ou no seu cotidiano, durante o processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria.

Na construção de um Teodolito Caseiro iremos trabalhar em equipe, utilizar materiais concretos, dividir tarefas, explicar passo a passo para que serve aquele instrumento, utilizá-lo dentro e fora da sala de aula e descrever com palavras a construção de resultados, de forma a proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos de Trigonometria.

A aplicação de atividades utilizando o Teodolito é de suma importância para resolver questões do cotidiano. Por exemplo, para se calcular a altura aproximada de uma árvore, de um prédio, de uma montanha, de uma torre, de um edifício,a largura de um rio e até mesmos a área de um terreno. Através desses exemplos, verificamos que a utilização do Teodolito pode auxiliar no cálculo de distâncias, sejam elas acessíveis ou inacessíveis.

Diante do exposto, esse trabalho monográfico tem como tema O Uso do Teodolito Caseiro como instrumento de Ensino da Trigonometria. Nesse sentido, apresentaremos uma possibilidade de trabalho com a Trigonometria, buscando evidenciar as inúmeras formas de abordar o assunto, não utilizando apenas o quadro e o pincel.

O trabalho é composto de três capítulos. No primeiro capítulo, mostramos um pouco das Noções Preliminares, apresentando definições e demonstrações de resultados que serão úteis nas seções posteriores. Para fundamentação do mesmo utilizamos o livro de Geometria Euclidiana Plana da Coleção do Professor de Matemática assim como o livro Fundamentos da Matemática Elementar.

No segundo capítulo, mostramos um pouco da história da trigonometria e discutimos o ensino de trigonometria apresentando algumas possibilidades e materiais didáticos segundo as orientações curriculares do ensino médio (OCEM). Mostramos também as razões trigonométricas no triângulo retângulo assim como a lei dos senos e cossenos em um triângulo qualquer e, por último, abordamos área de um polígono utilizando trigonometria.

No terceiro capítulo, discorremos sobre a experiência vivenciada em sala de aula na construção e aplicação do teodolito caseiro como instrumento importante no ensino de trigonometria. Discorremos também sobre a experiência vivenciada fora da sala de aula onde utilizamos o teodolito e uma trena para calcular a altura de um prédio, de uma arvore, de uma torre, de uma igreja, a largura de um rio e etc. Por fim, realizamos um pré teste e um pós teste para avaliar todo o trabalho e a abordagem didática do tema onde diagnosticamos êxito e fizemos nossas considerações finais, expondo as reflexões fruto da pesquisa realizada no decorrer do trabalho.

Capítulo 1

Noções preliminares

Neste capítulo apresentaremos noções iniciais de Geometria Plana, que serão utilizadas para a demonstração do conteúdo de Trigonometria, para mais detalhes deste tema veja a referência [2].

1.1 Noções iniciais de geometria

Na geometria euclidiana plana os elementos primitivos são denominados ponto, reta e plano. Os axiomas são as leis que os elementos primitivos devem satisfazer. Essas leis são regras que precisam ser compreendidas de forma intuitiva e que ficam claras em desenhos, mas que precisam ser formalmente estabelecidas segundo critérios rigorosos da lógica matemática. As definições a seguir reúnem vários conceitos úteis para este trabalho.

Definição 1. *Semirreta é cada uma das partes em que uma reta fica dividida por um de seus pontos. Iremos denotar a semirreta que tem origem em O e passa nos pontos* O *e* A *por* $\overrightarrow{\mathsf{OA}}$.

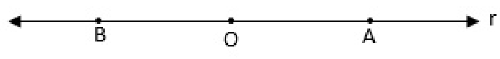


Figura 1.1: Semirreta

Definição 2. *Ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem. Os segmentos de retas* $\overline{\mathsf{OA}}$ *e* $\overline{\mathsf{OB}}$ *iremos chamar de lados do ângulo, o vértice do ângulo por* $\hat{O}$ *e denotaremos o ângulo por* $B\hat{O}A$ *ou* $A\hat{O}B$.

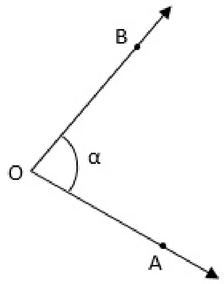


Figura 1.2: Ângulo

Observação 1. *É comum escrevermos letras gregas para representar os ângulos, por exemplo* α,β,θ, *etc.*

Definição 3. *Se* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *coincidem, dizemos que elas determinam um ângulo nulo.*

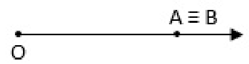


Figura 1.3: Ângulo nulo

Se as semirretas são opostas, dizemos que determinam dois ângulos rasos.

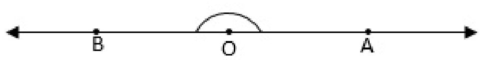


Figura 1.4: Ângulo raso

Definição 4. *Interior do ângulo* $A\hat{O}B$ *é a interseção de dois semiplanos abertos, a saber:* α *com origem na reta* $\overleftrightarrow{OA}$ *contendo o ponto* B *e* β *com origem na reta* $\overleftrightarrow{OB}$ *contendo o ponto* A. *Iremos representar o interior de* $A\hat{O}B$ *por* $\alpha \cap \beta$.

Observação 2. *Os pontos do interior de um ângulo são pontos internos ao ângulo.*

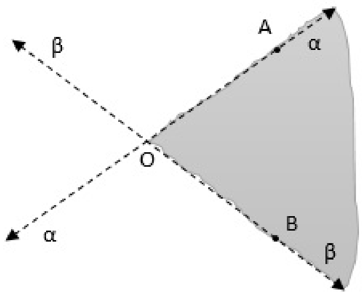


Figura 1.5: Interior do ângulo

Definição 5. *Exterior do ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto dos pontos que não pertencem nem ao ângulo $A\hat{O}B$ nem ao seu interior.*

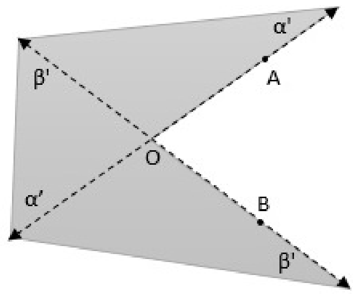


Figura 1.6: Exterior de ângulo

O exterior de $A\hat{O}B$ é a reunião de dois semiplanos abertos, a saber:

α' com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que não contém o ponto B e β' com origem na reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que não contém o ponto A. Iremos representar o exterior de $A\hat{O}B$ por $\alpha' \cup \beta'$.

Observação 3. *Os pontos do exterior de um ângulo são pontos externos ao ângulo.*

Definição 6. *Dois ângulos são consecutivos se um lado de um deles é também lado do outro.*

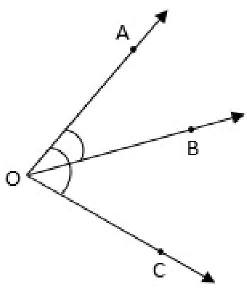


Figura 1.7: $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são consecutivos com $\overline{OA}$ lado comum

Dois ângulos são adjacentes se um lado de um deles é também lado do outro e não possuem pontos internos comuns.

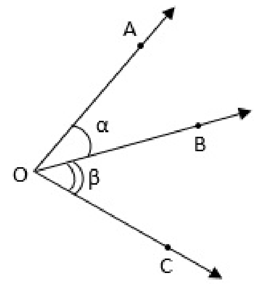


Figura 1.8: $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes

Definição 7. *Comparação de ângulos*

Dados dois ângulos $A\hat{O}C = \alpha$ *e* $D\hat{E}F = \beta$*, podemos transportar o ângulo* $D\hat{E}F$ *sobre* $A\hat{O}C$*, de tal forma que a semirreta* $\overrightarrow{ED}$ *coincida com a semirreta* $\overrightarrow{OC}$.

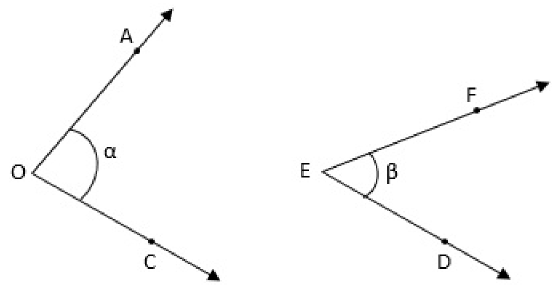


Figura 1.9: Comparação de ângulos

Temos assim três casos:

1. $\overrightarrow{EF}$ *é semirreta interna a* $A\hat{O}C$*. Então* $A\hat{O}C > D\hat{E}F$*, conforme Figura 1.10.*

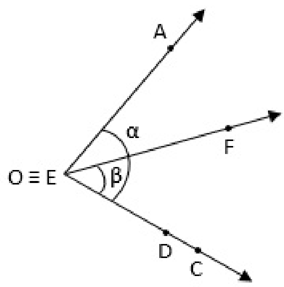


Figura 1.10: Semirreta interna

2. $\overrightarrow{\mathsf{EF}}$ *é semirreta externa a* $A\hat{O}C$. *Então* $A\hat{O}C < D\hat{E}F$, *conforme Figura* **??**.

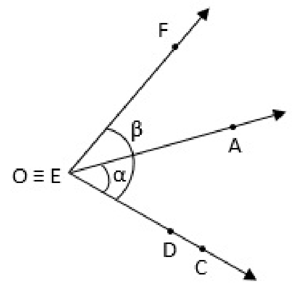


Figura 1.11: Semirreta externa

3. $\overrightarrow{\mathsf{EF}}$ *coincide com* $\overrightarrow{\mathsf{OA}}$. *Então* $A\hat{O}C \equiv D\hat{E}F$, *conforme Figura 1.12.*

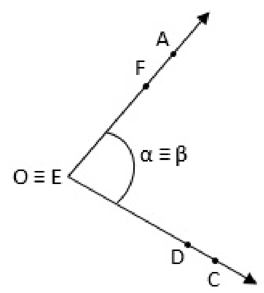


Figura 1.12: AÔC e DÊF congruentes

Observação 4. *Neste último caso, os ângulos* $A\hat{O}C$ *e* $D\hat{E}F$ *se dizem congruentes.*

Definição 8. *Soma de ângulos*

Dados dois ângulos quaisquer $A\hat{O}C = \alpha$ *e* $D\hat{E}F = \beta$, *transportamos* $D\hat{E}F$ *de tal forma que* $\overrightarrow{\mathsf{ED}} \equiv \overrightarrow{\mathsf{OC}}$ *e* $\overrightarrow{\mathsf{EF}}$ *seja externa a* $A\hat{O}C$, *isto é, que* α *e* β *sejam adjacentes.*

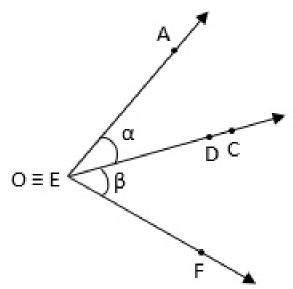


Figura 1.13: $A\hat{O}F = \alpha + \beta$

O Ângulo $A\hat{O}F$ *assim obtido chama-se ângulo soma de* α *e* β.

Definição 9. *Unidade de medida de ângulos*

Consideremos um ângulo raso $A\hat{O}B$. Podemos dividir esse ângulo em 180 partes iguais.

Chama-se ângulo de 1°(um grau) ao ângulo que corresponde a 1/180 do ângulo raso.

Os submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.

Um minuto(1')é o ângulo correspondente a 1/60 do ângulo de um grau.

Um segundo (1")é o ângulo correspondente a 1/60 do ângulo de um minuto.

Definição 10. *Medida de um ângulo*

Medir um ângulo significa verificar quantas unidades de medida (1°) cabem no ângulo dado.

Definição 11. *Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°, ou seja, $m(A\hat{O}B) + m(C\hat{D}E) = 180°$.*

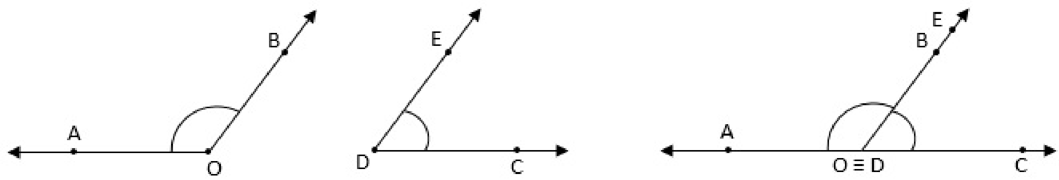


Figura 1.14: Ângulos Suplementares

Definição 12. *Se dois ângulos são adjacentes, suplementares e têm medidas iguais, então cada um deles é chamado ângulo reto e sua medida é 90°.*

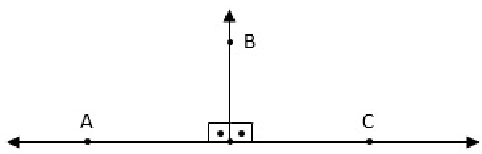


Figura 1.15: Ângulo reto

Definição 13. *O ângulo que mede menos de 90° é chamado ângulo agudo.*

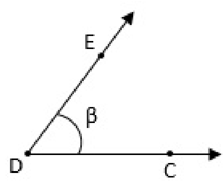


Figura 1.16: Ângulo agudo

O ângulo que mede entre 90° e 180° é chamado ângulo obtuso.

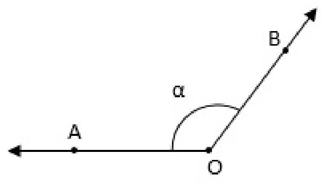


Figura 1.17: Ângulo obtuso

Definição 14. *Dois ângulos são complementares se,e somente se, a soma de suas medidas é 90°, ou seja,* $m(A\hat{O}B) + m(D\hat{C}E) = 90°$.

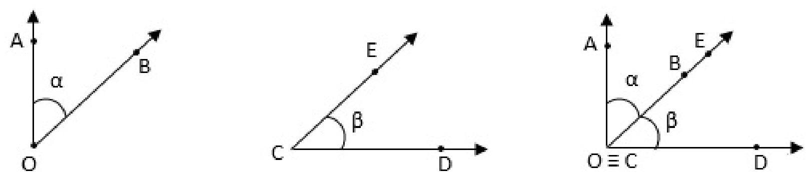


Figura 1.18: Ângulos complementares

Definição 15. *Dados três pontos A,B e C, não colineares, eles determinam três segmentos de reta:* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{AC}$, *a reunião desses segmentos de reta* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{AC}$ *é chamada triângulo ABC.*

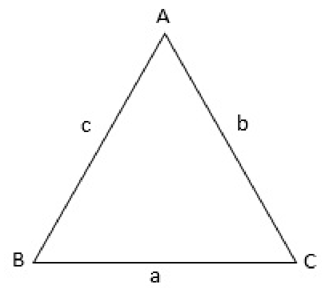


Figura 1.19: Triângulo

Definição 16. *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

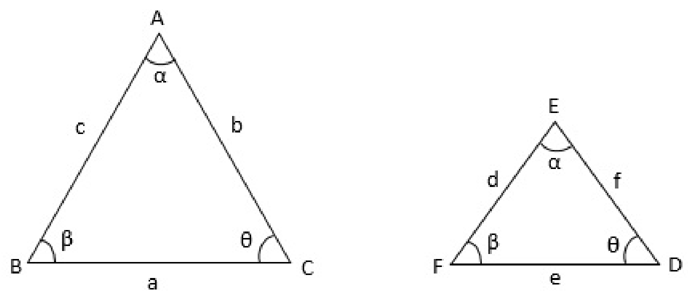


Figura 1.20: Semelhança de triângulos

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \begin{cases} A \equiv E \\ B \equiv F \\ C \equiv D \\ \dfrac{a}{e} = \dfrac{b}{f} = \dfrac{c}{d}. \end{cases}$$

Definição 17. *Tipos de triângulos quanto aos ângulos:*

1. *Triângulo acutângulo: São todos aqueles triângulos que possuem todos os ângulos internos agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que* $90°$.

2. *Triângulo obtusângulo: São todos aqueles triângulos que possuem um dos ângulos internos obtuso, isto é, as medidas dos ângulos são maiores do que* $90°$.

3. *Triângulo retângulo: São todos aqueles triângulos que possuem um ângulo interno reto, isto é, a sua medida é igual a* $90°$.

Observação 5. *Utilizaremos a notação seguinte para os elementos de um triângulo Retângulo ABC, os lados de* $\overline{AB}$,$\overline{BC}$,$\overline{AC}$,*os ângulos internos de* $B\hat{A}C$,$A\hat{B}C$,$A\hat{C}B$, *as medidas dos lados de* a = *medida de* $\overline{BC}$ *(que também é chamada de hipotenusa),* b = *medida de* $\overline{AC}$, c = *medida de* $\overline{AB}$, *onde b e c são chamados de catetos e as medidas dos ângulos:* $\hat{A}$ *sendo a medida de* $B\hat{A}C$, β = *medida de* $A\hat{B}C$ *e* α = *medida de* $A\hat{C}B$.

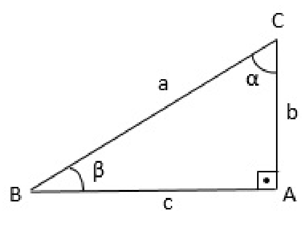
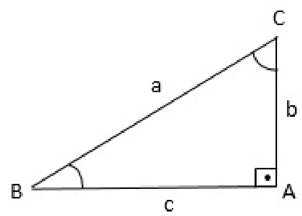


Figura 1.21: Triângulo Retângulo

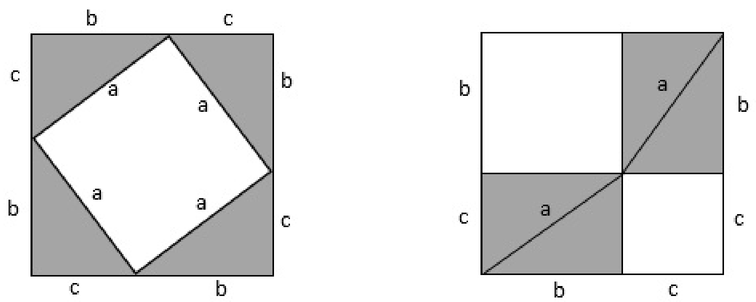
TEOREMA DE PITÁGORAS

Em qualquer triângulo retângulo podemos utilizar o Teorema de Pitágoras que é definido do seguinte modo: a área do quadrado cujo lado á a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$.



Demonstração. Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, considere o quadrado cujo lado é $b + c$.



Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado $b+c$ quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado a. Na figura direita, retiramos também do quadrado de lado $b+c$ os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado b e um quadrado de lado c. Logo, a área do quadrado de lado a é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c,veja mais detalhes sobre o tema na referência [1]. □

Capítulo 2

Trigonometria

Neste capítulo apresentaremos um pouco de história da trigonometria desde o seu surgimento e suas descobertas até os dias atuais, apresentaremos também as noções iniciais de Trigonometria no triângulo Retângulo bem como em um triângulo qualquer e suas aplicações em áreas de um Polígono em especial de um Triângulo.

2.1 Um pouco de História da Trigonometria

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r o raio da circunferência então $c = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Esta é a origem da palavra seno, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo jiba (corda) com jaib (dobra, cavidade, sinus em latim),veja mais detalhes sobre o tema na referência [1].

O objetivo inicial da trigonometria era o tradicional problema de resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura(três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. O significado da palavra trigonometria (do grego trigonon, triângulo, e metron, medida) remete-nos ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos, figuras básicas em qualquer estudo de Geometria. Mais amplamente, usamos a trigonometria para resolver problemas geométricos que relacionam ângulos e distâncias. A origem desses problemas nos leva a civilizações antigas do mediterrâneo e à civilização egípcia, em que eram conhecidas regras simples de mensuração e demarcação de linhas divisórias de terrenos nas margens dos rios. Há registros de medições de ângulos e segmentos datados de 1500 a.C. no Egito, usando a razão entre a sombra de uma vara vertical (gnomon) sobre uma mesa graduada. Alguns desses registros encontram-se no museu Egípcio de Berlim. Também teria surgido no Egito um dos primeiros instrumentos conhecidos para medir ângulos, chamado groma, uma versão inicial do teodolito, para ajudar a construir as pirâmides. Além disso, também há registros que indicam que os romanos usavam ferramentas como a dioptra (placa circular com ângulos marcados), para fins semelhantes. Em 1571, Leonard Digges desenvolveu um dispositivo que se assemelhava a um teodolito primitivo e chamou-lhe "theodolitus". Era um círculo dividido e um quadrado com uma bússola no centro, de acordo com o artigo Brief History of Turning Angles, mas faltava-lhe um telescópio (encontrado em versões modernas). Os teodolitos antigos eram obras de arte, pois eram feitos à mão, de bronze, e os ângulos também eram marcados com a mão. No entanto, representavam uma significativa margem de erro porque eram apenas tão precisos quanto o indivíduo que marcava os ângulos. Isto é importante, porque um erro de um segundo de arco traduzido para um erro métrico geraria distâncias de centenas de metros. Durante muito tempo, a trigonometria esteve ligada a Astronomia, devido à dificuldade natural que havia em relação às estimativas e ao cálculo de distâncias inacessíveis. A civilização grega, dando continuidade aos trabalhos iniciados pelos babilônios, deixou contribuições importantes nesse sentido, como, por exemplo, a estimativa das distâncias entre o sol e a Terra e entre o sol e a lua, feita por Aristarco, por volta de 260 a.C. mesmo que seus números estivessem muito longe dos valores modernos , e a estimativa da medida do raio da terra, feita por Eratóstenes, por volta de 200 a.c. No entanto, o primeiro estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo é o de Hiparco de Niceia (180 a.C. 125 a.C.), que ficou conhecido como pai da trigonometria. Em 1773, Jesse Ramsden inventou um motor de divisão mecânico que permitiu maior precisão e produção de teodolitos. Isto, por sua vez, resultou em um aumento da disponibilidade do dispositivo e colocou a Inglaterra na linha de frente da indústria de produção de teodolito. Estes objetos chegaram aos Estados Unidos em 1815, a pedido de Thomas Jefferson. Ele queria que Ferdinand Hassler, o superintendente nomeado da Survey of the Coast, mapeasse a América. Os teodolitos permaneceram praticamente inalterados até 1950, quando foram adotadas medidas eletrônicas de distância. Somente no século XVIII, com a invenção do cálculo infinitesimal, a trigonometria desvinculou-se da Astronomia, passando a ser um ramo independente e em desenvolvimento da Matemática. A trigonometria é um importante tópico que consta nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), veja [6].

2.2 Definição das Razões Trigonometricas no Triângulo Retângulo

1. **Seno de um Ângulo Agudo**

   Na figura abaixo, considere o triângulo retângulo $O\hat{A}B$.

   No prolongamento do segmento $\overline{OA}$, indicamos os pontos A_1, A_2 e A_3 e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_3B_3}$,com os respectivos pontos B_1,B_2 e B_3 no prolongamento do segmento $\overline{OB}$.

   Desta forma obtemos os triângulos retângulos OA_1B_1, OA_2B_2 e OA_3B_3.

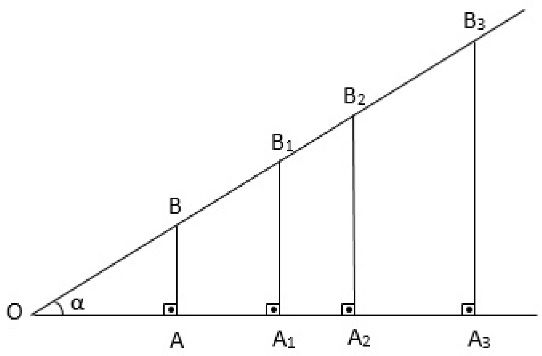


Figura 2.1: Triângulo retângulo $O\hat{A}B$

   Os triângulos retângulos OA_1B_1, OA_2B_2 e OA_3B_3 são semelhantes ao triângulo OAB, pois têm um ângulo comum de medida α e um ângulo reto. Assim, podemos escrever:

   $\Delta OAB \sim \Delta\ OA_1B_1 \Rightarrow \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$

   $\Delta OAB \sim \Delta\ OA_2B_2 \Rightarrow \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$

   $\Delta OAB \sim \Delta\ OA_3B_3 \Rightarrow \dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$

Observe que:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

que por sua vez é igual a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa.

Convém observar que há infinitos triângulos retângulos semelhantes ao triângulo OAB com vértices em A e lado oposto ao vértice O formado por segmentos paralelos a $\overline{AB}$ com vértices situados nos prolongamentos de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Para todos esses triângulos retângulos, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é constante.
A essa razão chamamos de seno do ângulo α e a indicamos por sen α.

Considerando qualquer um dos triângulos anteriores, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao angulo de medida } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

2. **Cosseno de um Ângulo Agudo**

Observe novamente o triângulo OÂB e os triângulos retângulos OA_1B_1, OA_2B_2 e OA_3B_3.

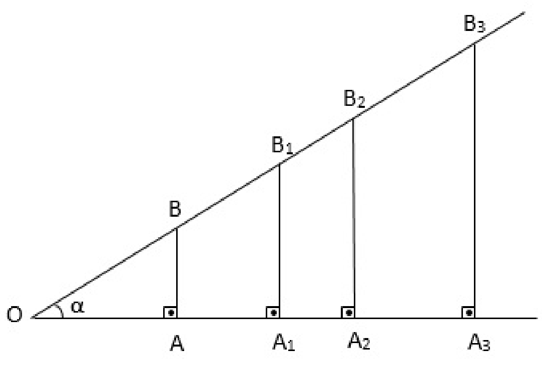


Figura 2.2: Triângulos retângulos semelhantes

Já vimos que esses triângulos são semelhantes. Assim podemos escrever:

$\Delta OAB \sim \Delta\ OA_1B_1 \Rightarrow \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$\Delta OAB \sim \Delta\ OA_2B_2 \Rightarrow \dfrac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$\Delta OAB \sim \Delta\ OA_3B_3 \Rightarrow \dfrac{\overline{OA_3}}{\overline{OB_3}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

Observe que:

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

que por sua vez é igual a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa.

A razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é constante. A essa razão chamamos de cosseno do ângulo α e a indicamos por cos α.

Considerando qualquer um dos triângulos anteriores, temos:

$$\cos\,\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ angulo\ de\ medida\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

3. **Tangente de um Ângulo Agudo**

Consideremos novamente o triângulo O$\hat{A}$B e os triângulos retângulos OA_1B_1, OA_2B_2 e OA_3B_3.

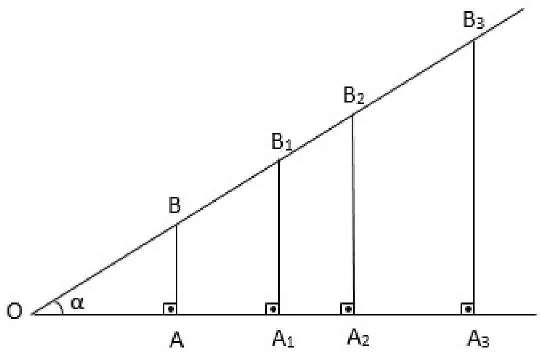


Figura 2.3: Triângulos semelhantes

Já vimos que esses triângulos são semelhantes. Assim podemos escrever:

$\Delta OAB \sim \Delta\ OA_1B_1 \Rightarrow \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$

$\Delta OAB \sim \Delta\ OA_2B_2 \Rightarrow \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$

$\Delta OAB \sim \Delta\ OA_3B_3 \Rightarrow \dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$

Observe que:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

que por sua vez é igual a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α.

A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α é constante. A essa razão chamamos de tangente do ângulo α e a indicamos por tg α.

Considerando qualquer um dos triângulos anteriores, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao angulo de medida } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao angulo de medida } \alpha}$$

Observação 6. *O que acabamos de fazer foi definir, para um ângulo agudo de medida α, isto é,$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ os valores do senα, cosα e tgα. Para um ângulo obtuso de medida α, isto é, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ definimos, sen$(180^\circ - \alpha) =$ senα e cos$\alpha = -$ cos $(180^\circ - \alpha)$,veja mais detalhes sobre o tema na referência [7].*

2.3 Aplicação das Razões Trigonometricas em um Triângulo Retângulo

Dado um triângulo retângulo B$\hat{A}$C com catetos $\overline{AC} =$ b , $\overline{AB} =$ c e hipotenusa $\overline{BC} =$ a, com ângulos agudos α e β de vértices respectivamente C e B, para mais detalhes sobre o tema pesquisa a referência [5].

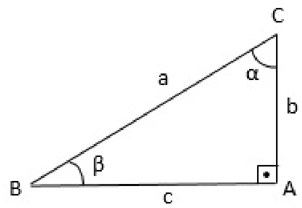


Figura 2.4: Triângulo retângulo B$\hat{A}$C

i) Utilizando as definições de seno e cosseno no triângulo retângulo B$\hat{A}$C, temos que:

Tabela 2.1: tabela do seno e cosseno

$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$	$\cos\,\beta = \frac{c}{a}$
$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\,\alpha = \frac{b}{a}$

É evidente, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento. Daí a palavra "cosseno"(seno do complemento).

(ii) Utilizando a definição da tangente no triângulo retângulo $B\hat{A}C$, temos que:

$\text{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$ (dividindo numerador e denominador por a)

$$tg\beta = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}},$$

como $\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$ e $\cos\,\beta = \frac{c}{a}$

Logo,

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\,\beta}.$$

Da mesma forma: $\text{tg}\,\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$.

Note que: $\text{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b}$, ou seja, a tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso da tangente do seu complemento.

(iii)Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $B\hat{A}C$, temos que:

$$\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 \text{ (dividindo ambos os membros por } \mathrm{a}^2\text{)}$$

$$\mathrm{a}^2/\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2/\mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2/\mathrm{a}^2$$

$$1 = (\text{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2$$

Da mesma forma: $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

A relação fundamental mostra que, a rigor, basta construir uma tabela de senos para ter a de cossenos, ou vice-versa,veja mais detalhes sobre o tema na referência [4].

2.4 Seno , Cosseno e Tangente de alguns Ângulos Agudos

Vamos agora calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos sem o uso de uma calculadora.

i) Razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°

Tomemos um triângulo ABC equilátero de base $\overline{BC}$ e lado unitário, traçamos a sua altura $\overline{AD}$ (que também é mediana e bissetriz).

Obtemos então $\overline{DC} = \dfrac{1}{2}$ e $D\hat{A}C = D\hat{A}B = 30°$.

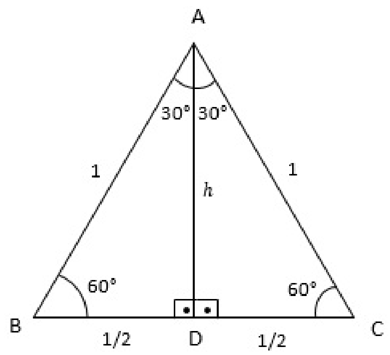


Figura 2.5: Triângulo equilátero

Utilizando o teorema de Pitágoras no $\triangle\ A\hat{D}C$ temos que:

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2$$
$$1^2 = h^2 + (\frac{1}{2})^2$$
$$1 = h^2 + \frac{1}{4}$$
$$h^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do triângulo retângulo $A\hat{D}C$ temos que:

Tabela 2.2: Razões trigonométricas de ângulos notáveis

$\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}$	$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^o = \frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} 30^o = (1/2)/(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{tg} 60^o = (\frac{\sqrt{3}}{2})/(1/2) = \sqrt{3}$

ii) Vejamos agora as razões trigonométricas com o ângulo de 45°

Tomemos um triângulo $B\hat{A}C$ retângulo isósceles de cateto medindo 1. Desta forma utilizando o teorema de Pitágoras obtemos a medida da hipotenusa $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

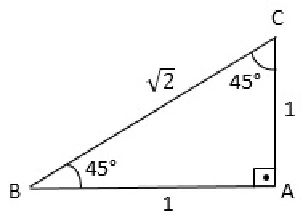


Figura 2.6: Triângulo retângulo isósceles

Assim temos que:

$$\operatorname{sen} 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^o = (\frac{\sqrt{2}}{2})/(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1.$$

2.5 Trigonometria em um Triângulo Qualquer

Após nos depararmos com vários problemas trigonométricos em triângulos retângulos, iremos agora trabalhar com problemas envolvendo triângulos quaisquer.

1. **Lei dos senos**

Seja ABC um triângulo quaisquer tais que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \theta$, a proporcionalidade entre os lados e os senos dos ângulos opostos a esses respectivos lados é chamada Lei dos Senos.

$$\left(\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\theta} \right)$$

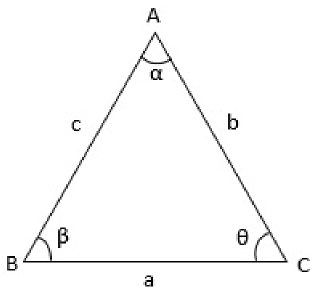


Figura 2.7: Triângulo qualquer

Demonstração. I caso : Tomemos o triângulo ABC como acutângulo e tracemos a sua altura h relativa ao lado $\overline{BC}$, de modo que a interseção entre h e $\overline{BC}$ seja o ponto D.

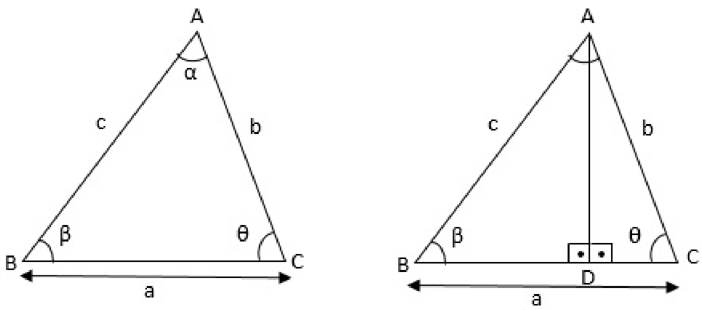


Figura 2.8: Triângulo acutângulo

Agora, do triângulo retângulo $A\hat{D}C$ temos que:

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b}$, ou seja, $h = b \,.\, \operatorname{sen}\hat{C}$ (i)

Tomando da mesma forma o triângulo retângulo $A\hat{D}B$ temos que:

$\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{h}{c}$, ou seja, $h = c \ . \ \operatorname{sen}\hat{B}$ (ii)

Portanto igualando (i) com (ii) obtemos:

$b \ . \ \operatorname{sen}\hat{C} = c \ . \ \operatorname{sen}\hat{B}$

Assim,

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}.$$

Repetindo o mesmo raciocínio com a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, conseguimos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

II caso: Tomemos o triângulo A$\hat{B}$C como obtusângulo e tracemos a sua altura h relativa ao lado $\overline{BC}$, de modo que h intersecte o prolongamento de $\overline{BC}$ no ponto P.

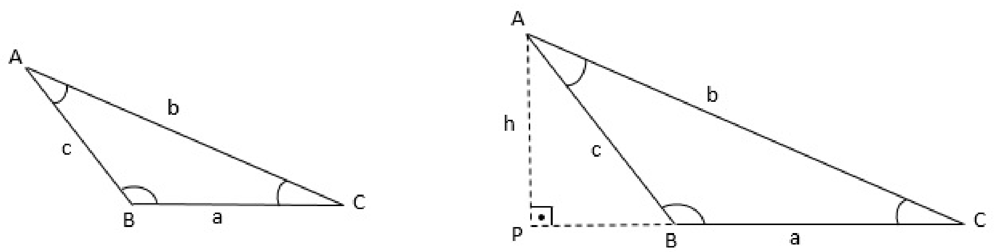


Figura 2.9: Triângulo obtusângulo

Agora, do triângulo retângulo A$\hat{P}$B, temos que:

$\operatorname{sen}(180° \text{ - } \hat{B}\ ) = \dfrac{h}{c}$, ou seja, $h = c \ . \ \operatorname{sen}\hat{B}$ (i), pois $\operatorname{sen}(180° \text{ - } \hat{B}) = \operatorname{sen}\hat{B}$

Tomando da mesma forma o triângulo retângulo APC temos que:

$\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{h}{b}$, ou seja, $h = b \ . \ \operatorname{sen}\hat{C}$ (ii)

Portanto, igualando (i) com (ii), obtemos:

$c \; . \; \operatorname{sen} \hat{B} = b \; . \; \operatorname{sen} \hat{C}$

Assim,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

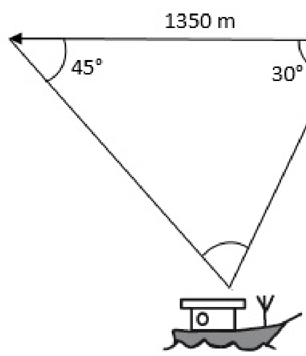
Repetindo o mesmo raciocínio com a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, conseguimos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

□

Veja mais detalhes sobre o tema na referência[3].

Exemplo 1. *Topografia é área do conhecimento que trabalha com levantamento de dados para a representação gráfica detalhada de uma região da superfície terrestre (distâncias, relevo, formas, etc.). Esse nome vem do idioma grego, em que topos significa (lugar) e graphein significa (descrever): (descrição de um lugar). Desde as civilizações mais antigas, os povos já demarcavam a posição e limitavam a extensão de suas terras aplicando técnicas rudimentares de topografia. Imagine que Thais, estudante do curso de Topografia, caminha em uma pequena estrada retilínea paralela a uma praia, quando vê, da estrada, um grande barco no mar. Curiosa, quer saber a distância do barco à estrada. Pega seu teodolito no carro e verifica que a reta que une o barco ao ponto onde ele está forma 45° com a estrada. Após percorrer mais 1350 m na estrada, Thaís verifica que a reta que une o barco ao novo ponto onde ela está forma com a estrada um ângulo de 30°; com essas informações:*



Usando sen 105° = 0,96 determine distância desejada.

Solução: *Primeiramente somando os dois ângulos medidos por ela obtemos 30° + 45° = 75°, logo o terceiro ângulo do mesmo triângulo será 180° - 75° = 105°. Utilizando a lei dos senos obtemos que:*

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathit{sen}30^\circ} = \frac{1350}{\mathit{sen}105^\circ} \Rightarrow \frac{\mathsf{d}}{0,5} = \frac{1350}{0,96} \Rightarrow d = \frac{675}{0,96} \Rightarrow d = 703\ m.$$

2. **Lei dos Cossenos**

Seja ABC um triângulo qualquer tal que $\overline{\mathsf{BC}}$ = a, $\overline{\mathsf{AC}}$ = b e $\overline{\mathsf{AB}}$ = c, chama-se lei dos cossenos a seguinte equação:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$

Demonstração. Tomemos o triângulo ABC como acutângulo e tracemos a sua altura h relativa ao lado $\overline{\mathsf{BC}}$, de modo que a interseção entre h e $\overline{\mathsf{BC}}$ seja o ponto D e chamemos $\overline{\mathsf{DC}}$ = m e $\overline{\mathsf{BD}}$ = a - m.

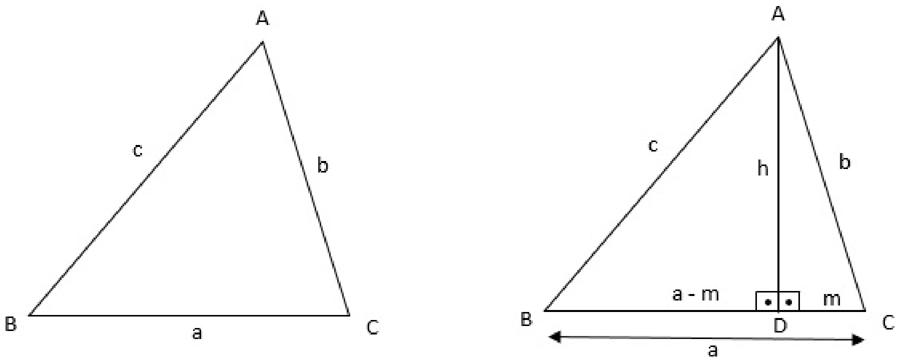


Figura 2.10: Triângulo acutângulo

Agora do triângulo retângulo ADC temos que:

$\cos \hat{C} = \frac{m}{b}$, ou seja, $m = b \,.\, \cos \hat{C}$ (i) e $b^2 = m^2 + h^2$ (ii)

Tomando da mesma forma o triângulo retângulo $A\hat{D}B$ temos que:

$c^2 = (a - m)^2 + h^2$

$c^2 = a^2 - 2.a.m + m^2 + h^2$ (iii)

Portanto substituindo (i) e (ii) em (iii) obtemos:

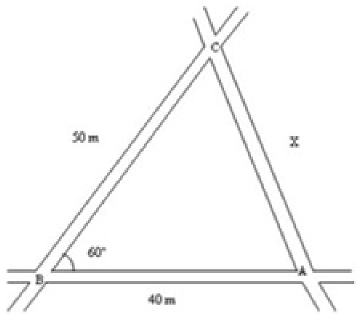
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

Analogamente, podemos obter:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A} \text{ e } b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$

□

Exemplo 2. *Um engenheiro precisa fazer as medições de um terreno na forma triangular. Um dos lados mede 40 metros, outro mede 50 metros e o ângulo formado por estes dois lados é de 60°.*



O valor do lado que está representado por x

Solução: *Utilizando a lei dos cossenos obtemos que:*

$x^2 = 50^2 + 40^2 - 2.50.40.\cos 60°$

$x^2 = 2500 + 1600 - 2.50.40.(1/2)$

$x^2 = 4100 - 2000$

$x^2 = 2100$

$x = \sqrt{2100}$

$x = 10\sqrt{21}$ m.

2.6 Área de um Polígono Convexo

Para medir a área de um terreno plano com a forma de um quadrilátero convexo ABCD, um topógrafo posicionou seu teodolito no vértice A e mediu os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ obtendo, respectivamente, 38°, 65°, 860m, 900m e 980m.

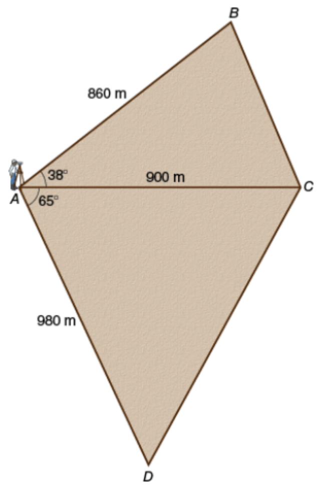


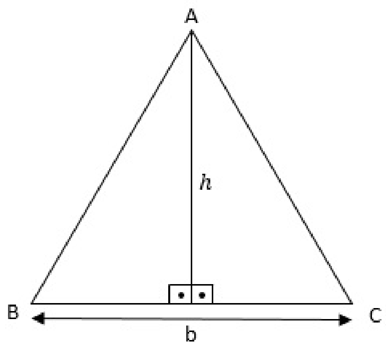
Figura 2.11: Quadrilátero

A seguir, ele calculou a área dos triângulos ABC e ACD em função das medidas dos lados conhecidos em cada um e da medida do ângulo compreendido por esses lados. Finalmente, adicionou as áreas desses triângulos, obtendo a área do terreno.

Esse método, conhecido como triangulação, é apenas um dos vários procedimentos usados na topografia para o cálculo de área. Note que, nesse método, a área de cada triângulo é calculada em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido por eles. Neste tópico, estudaremos essa forma de cálculo.

2.7 Área de um triângulo

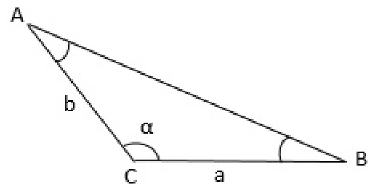
Sabemos que a área A de um triângulo pode ser calculada como metade do produto das medidas da base e da altura relativa a essa base:



$$A = \frac{b.h}{2}$$

Agora, faremos o cálculo dessa área de outra maneira. Vamos calcular a área do triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo determinado por eles, conforme o teorema a seguir.

Se dois lados de triângulo têm medidas a e b e o ângulo interno determinado por esses lados tem medida α, então a área A do triângulo é dada por:



$$A = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

Demonstração. Indicando por MNP um triângulo com $\overline{NM}$ = a, $\overline{NP}$ = b e m($M\hat{N}P$)= α, seja h a medida da altura $\overline{MQ}$ relativa ao lado $\overline{NP}$:

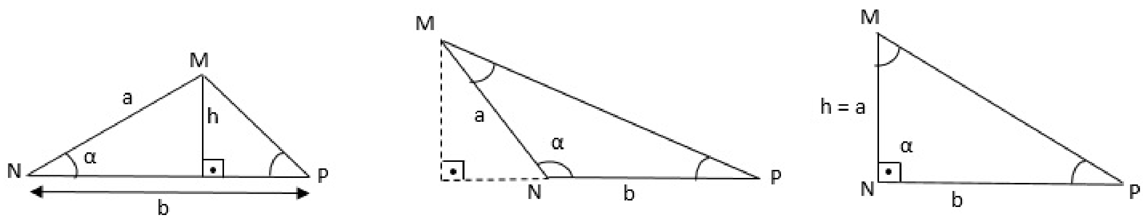


Figura 2.12: Área de um triângulo

Em qualquer um dos três casos, a área A do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b.h}{2} \text{ (I)}$$

1º caso: $\alpha < 90^o$

No triângulo MNQ, sen $\alpha = \frac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a.\text{sen}\,\alpha \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos a área do triângulo em função de a,b e α.

$$A = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

2º caso: $\alpha > 90^o$

No triângulo MNQ, sen (180° - α) = $\frac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a.\text{sen}\,(180° - \alpha)$$

Mas sabemos que $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$. Logo:

$$h = a.\text{sen}\,(\alpha)\ (III)$$

Substituindo (III) em (I), obtemos a área do triângulo em função de a,b e α.

$$A = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

3º caso: $\alpha = 90°$
Temos: $A = \dfrac{a.b.sen\alpha}{2}$
como $h = a, 1 = \text{sen}\,90°$ e $\alpha = 90°$, concluímos:

$$A = \frac{a.b.sen90°}{2} \Rightarrow A = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

□

veja mais detalhes sobre o tema na referência [3].

Exemplo 3. *Numa esquina cujas ruas se cruzam, formando um ângulo de 120°, está situado um terreno triangular com frentes de 20 m e 45 m para essas ruas, conforme representado na figura a seguir:*

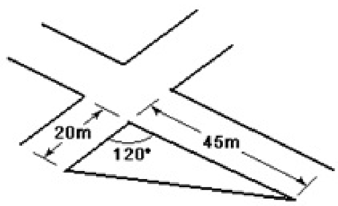


Figura 2.13: Área de um triângulo

Qual a área desse terreno, em metros quadrados?

Solução: Utilizando a fórmula da área de um triângulo obtemos que:
$A = \dfrac{20.45.sen120°}{2} = \dfrac{20.45.sen60°}{2} = 450.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3}.$

2.8 Teorema das Áreas

Nesta seção abordaremos a Área de um quadrilátero em função de suas diagonais e do ângulo formado por elas.

Considere um quadrilátero PQRS qualquer com T sendo o encontro entre as duas diagonais D e d, mostrado a seguir.

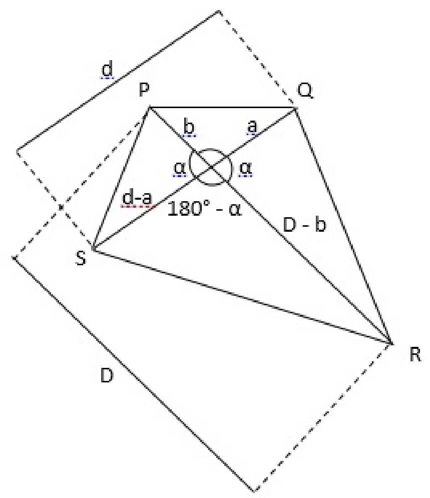


Figura 2.14: Polígono

Observe que a área do quadrilátero pode ser encontrada por meio da soma das áreas dos triângulos que o compõem. Partindo desse raciocínio, é possível determinar a fórmula da área do quadrilátero.

$$A_{QPRS} = A_{QTR} + A_{RTS} + A_{PTS} + A_{QTR}$$

Demonstração. $A_{QPRS} = \frac{1}{2}.a.(D-b).sen\alpha + \frac{1}{2}.(D-b).(d-a)sen(180° - \alpha) + \frac{1}{2}.b.(d-a).sen\alpha + \frac{1}{2}.a.b.sen(180° - \alpha)$

considerando que $sen(180° - \alpha) = sen\alpha$, o cálculo prossegue desta forma:

$A_{QPRS} = \frac{1}{2}.sen\alpha[a.(D-b) + (D-b).(d-a) + b.(d-a) + a.b]$

$A_{QPRS} = \frac{1}{2}.sen\alpha[a.D - a.b + D.d - D.a - b.d + b.a + b.d - b.a + a.b]$

$A_{QPRS} = \frac{1}{2}.(D.d).sen\alpha$

□

Capítulo 3

Teodolito

Neste capítulo apresentaremos uma proposta e uma experiência com a construção e o uso do teodolito caseiro como ferramenta integrante para o ensino prático da trigonometria. À medida que ensinamos matemática sentimos a necessidade de um material concreto para a construção desse conhecimento, pensando nisso ensinamos passo a passo como construir um teodolito caseiro, utilizando simples materiais recicláveis e de fácil acesso, para que ele possa ser utilizado não só dentro da sala de aula como também fora dela, no seu dia-a-dia se surgir uma necessidade, tudo isso a fim de envolver e motivar os alunos a trabalharem de forma prazerosa na construção dos conhecimentos de trigonometria. Apresentaremos também como se utiliza um teodolito, seja para calcular distância no sentido horizontal ou vertical, dentre elas a altura de uma árvore, a altura de uma igreja, a altura de uma torre e a largura de um rio. Por fim mostramos neste capítulo através de um pré teste e de um pós teste, com questões envolvendo trigonometria que foram retiradas do banco de questões do (Pisa) Programa de Avaliação de Estudantes e do (Saeb) Sistema de Avaliação da Educação Básica, que a utilização do teodolito caseiro no ensino de trigonometria é eficaz e prazeroso, fazendo com que os alunos aprendam de uma maneira pratica.

3.1 Como construir um Teodolito Caseiro

Materiais necessários para a construção de um Teodolito caseiro:

1. Pote redondo com tampa (o pote deve possuir movimento circular fixado a tampa)

2. Canudo oco em formato cilíndrico reto (o buraco interno deve ter o diâmetro de forma que seja possível visualizar o outro lado)

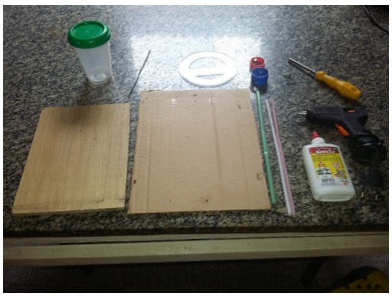
3. O desenho de um transferidor (com os ângulos estejam dispostos num círculo de diâmetro maior que o pote)

4. Madeira ou papelão que caiba a imagem do transferidor

5. Tabela trigonométrica.

6. Cola de madeira ou cola quente

7. Arame de comprimento maior que o diâmetro do transferidor



Como Montar um Teodolito Caseiro:

Cole o transferidor na madeira;

Fure a parte superior do pote com o arame e deixe aparecendo igualmente dos dois lados;

Cole a tampa do pote de cabeça para baixo no meio do transferidor;

Fixe o canudo paralelamente ao arame em cima do pote;

Materiais necessários para a construção de um outro tipo de Teodolito caseiro:

1. Um pedaço de madeira.
2. Um transferidor de plástico ou madeira.
3. Canudo, tubo de antena ou cano.
4. Cola de madeira ou Cola quente.
5. Tachinha, prego ou parafuso e uma tampa de guaraná.

Como Montar o Teodolito Caseiro:

1. Cole o transferidor na madeira;

2. Fure a parte superior da tampa de refrigerante e coloque um canudo passando por esses furos;

3. Cole a tampa na parte central do transferido:

3.2 Como Utilizar um Teodolito Caseiro

Esta Seção vem ensinar passo a passo como se deve utilizar corretamente um teodolito caseiro para a medição de ângulos no sentido vertical e no sentido horizontal e mostrar também como se calcula a altura de um prédio, de um morro e a largura de um rio.

Utilizando o teodolito caseiro no sentido horizontal

Posicione o teodolito caseiro de modo que a sua base fique perpendicular ao objeto o qual pretendemos medir a sua altura.
Olhe através do canudo e mire no ponto mais alto daquele objeto.
Olhe agora para o arame, ele indicará o ângulo desejado no transferidor.

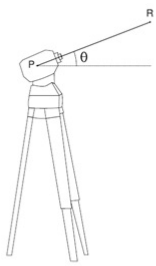
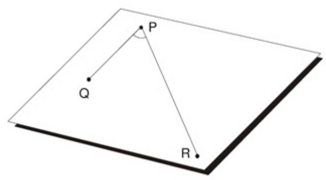


Figura 3.1: Teodolito

Utilizando o teodolito caseiro no sentido vertical

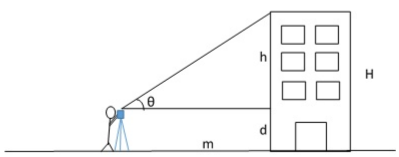
Se o observador P vê um objeto Q e girando a luneta vê um objeto R, ambos no plano horizontal, ele pode determinar o ângulo $Q\hat{P}R$.



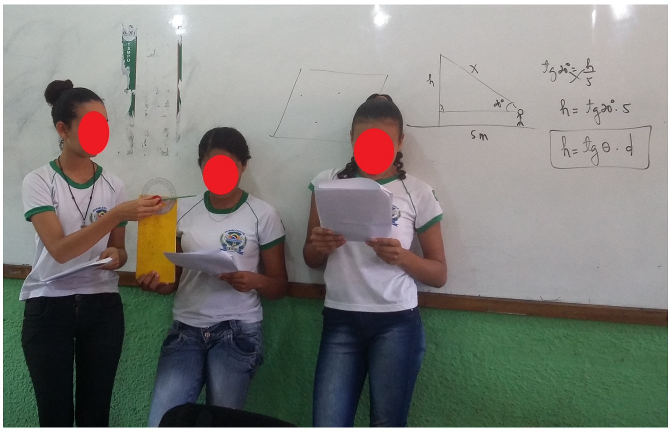
3.3 Situação dentro e fora da sala de aula

Nessa seção mostraremos que, com o auxílio de uma fita métrica, chamada de trena, e do Teodolito caseiro confeccionado pelos alunos, um professor pode ensinar trigonometria na prática, calculando a altura de uma árvore, a altura de um prédio, de um morro, de uma igreja, de uma torre, a largura de um lago e até mesmo distâncias inacessíveis. Essa atividade pode ser aplicada dentro e fora da sala de aula com seus alunos.

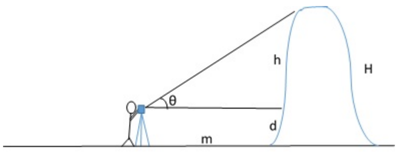
1. Para medir a altura de um prédio o observador tem que se posicionar a uma certa distância dele (distância essa que possa ser medida com uma trena). Depois com o auxílio de um teodolito ele medirá o ângulo de visão fixando o olhar no topo do prédio. Assim com esses duas medidas utilizaremos a tangente referente ao ângulo encontrado e obteremos a altura da vista da pessoa até o topo do prédio, onde somada com a medida da vista da pessoa ao solo resulta na altura total do prédio.



$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{h}{m} \Rightarrow h = m.\operatorname{tg}\theta$, logo $H = d + h$.

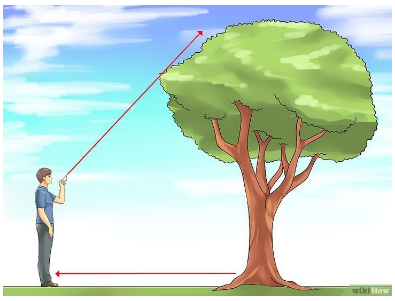


2. Para medir a altura de um morro o observador tem que se posicionar a uma certa distância dele (distância essa que possa ser medida com uma trena). Depois com o auxílio de um teodolito ele medirá o ângulo de visão fixando o olhar no topo do morro. Assim com esses duas medidas utilizaremos a tangente referente ao ângulo encontrado e obteremos a altura da vista da pessoa até o topo do morro, onde somada com a medida da vista da pessoa ao solo resulta na altura total do morro.

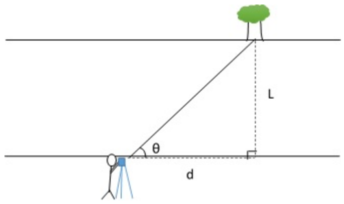


$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{h}{m} \Rightarrow h = m.\operatorname{tg}\theta$, logo $H = d + h$.

3. Para medir a altura de uma árvore usamos os mesmos procedimentos.



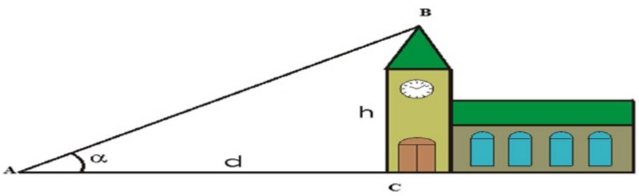
4. Para medir a largura de um rio o observador tem que se colocar em uma da margem do rio e tentar avistar um ponto de referência do outro lado da margem, de modo que ele e esse ponto de referência estejam alinhados. Na margem onde ele se encontra ele irá caminhar uma certa distância (d) e irá medi-la com a trena. No final dessa distância ele irá pegar seu teodolito e medirá o ângulo θ de visão (do ponto onde ele se encontra e o ponto de referência do outro lado do rio). Assim usando a tangente desse ângulo obtemos a largura (L) do rio.



$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{L}{d} \Rightarrow L = d.\operatorname{tg}\theta$

Para medir a altura de uma igreja pedimos aos alunos que colocassem o teodolito no chão, de modo a desprezar a altura do observador.

5. Para medir a altura de uma igreja o observador tem que se posicionar a uma distância dela, distância essa que possa ser medida com uma trena. Depois com o auxílio de um teodolito no chão ele medirá o ângulo de visão fixando o olhar no topo da igreja. Assim com essas duas medidas utilizaremos a tangente referente ao ângulo encontrado e obtemos a altura da igreja.

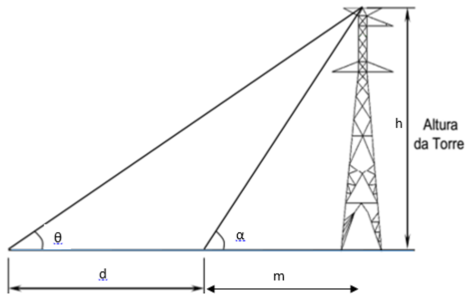


$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{d} \Rightarrow$ Logo $h = d.\operatorname{tg}\alpha$.

Observação 7. *Caso particular*

6. Quando o observador coloca o teodolito no chão e obtém um ângulo de visão de 45° é equivalente dizer que a altura da igreja será igual a distância que o observado está dela.
   $\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{h}{d} \Rightarrow \mathrm{h} = \mathrm{d}.\operatorname{tg} 45^\circ$,como $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, Logo $\mathrm{h} = \mathrm{d}$.
   Fora da sala de aula pedimos aos alunos que calculassem a altura de uma torre que estava um pouco distante do ponto de observação, assim tivemos que utilizar outro procedimento.

7. Para calcular a altura de uma torre que não está perto do observador ele deve em primeiro lugar calcular o ângulo θ de visão horizontal de onde ele estar ao topo da torre, depois ele caminha uma certa distância (d) em direção da torre (distância essa que possa ser medida com uma trena) e medi novamente o ângulo α de visão horizontal desse novo ponto de observação ao topo da torre.



Por último utilizando uma das razões trigonométricas obtemos:
(i) tg $\theta = \dfrac{h}{d+m}$ e (ii) tg $\alpha = \dfrac{h}{m}$.
De (ii) temos que h = m . tgα, substituindo em (i) teremos:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m.tg\alpha}{d+m}$$

$$\text{m . tg}\,\alpha = \text{d.tg}\,\theta + \text{m.tg}\,\theta$$

$$\text{m . tg}\,\alpha \text{ - m.tg}\,\theta = \text{d.tg}\,\theta$$

$$\text{m . (tg}\,\alpha \text{ - tg}\,\theta) = \text{d.tg}\,\theta$$

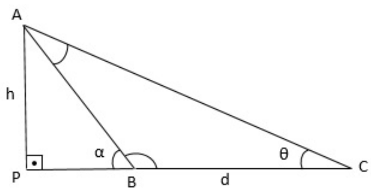
$$\text{m} = \text{d.tg}\,\theta/(\text{tg}\,\alpha \text{ - tg}\,\theta)$$

$$\text{como, h} = \text{m . tg}\,\alpha,$$

$$\text{temos, h} = \text{d .tg}\,\alpha.\text{tg}\,\theta/(\text{tg}\,\alpha \text{ - tg}\,\theta).$$

Sem perda de generalidade desprezemos a altura do observador, caso contrário e só somar o resultado de h com a altura do dele.

Observação 8. *Caso Particular: Quando* $\alpha = 2\theta$, *temos que* $h = d.sen\,\alpha$



Demonstração. Sejam os triângulos A$\hat{\text{P}}$C e A$\hat{\text{P}}$B retângulos e o triângulo A$\hat{\text{B}}$C obtusângulo com $\overline{AP}$ = h, $\overline{BC}$ = d, A$\hat{\text{B}}$P = α e A$\hat{\text{C}}$P = θ.

Como α é um ângulo externo ao ΔA$\hat{\text{B}}$C, então por definição α = B$\hat{\text{A}}$C + θ,
ou seja, B$\hat{\text{A}}$C = α - θ.
Como por hipótese $\alpha = 2\theta$, Então B$\hat{\text{A}}$C = 2θ - θ, logo B$\hat{\text{A}}$C = θ.

Assim temos que o Δ ABC é isósceles com $\overline{AB} = \overline{BC} = d$.

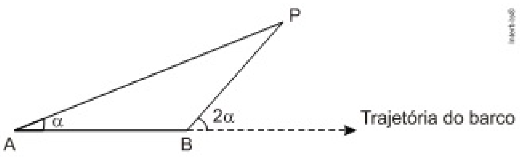
Aplicando a definição de seno no triângulo retângulo A$\hat{P}$B obtemos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\overline{AB}}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{d}$$
$$h = d.\ \operatorname{sen}\alpha$$

□

A seguir acrescentamos dois exemplos que possam ilustrar um pouco mais a demostração feita anteriormente.

Exemplo 4. *(Enem 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:*

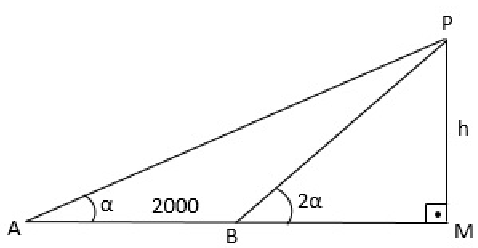


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $\overline{AB} = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, qual a menor distância do barco até o ponto fixo P ?

solução:

A menor distância do barco até o ponto fixo P será a altura h do ΔABP.

Tracemos essa altura de modo a formar um novo ΔB$\hat{M}$P, como mostra a figura.



Como $P\hat{B}M$ é um ângulo externo ao ΔABP, então $P\hat{B}M = A\hat{P}B + \alpha$, como $P\hat{B}M = 2\alpha$, então $A\hat{P}B = \alpha$ e desta forma o ΔABP é isósceles, tendo assim $\overline{AB} = \overline{BP} = 2000$.

Aplicando a definição de seno no triângulo retângulo $B\hat{M}P$, teremos:

$\operatorname{sen} 2\alpha = h/2000$, como $\alpha = 30°$,

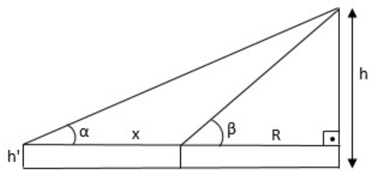
$\operatorname{sen} 60° = h/2000$

$h = 2000.\operatorname{sen} 60°$

$h = 2000\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h = 1000\sqrt{3}$ m.

Exemplo 5. *(EXAME DE ACESSO PROFMAT / 2016)*
Um topógrafo com o objetivo de determinar a altura h de uma torre do outro lado de um rio de largura constante R passando por uma região totalmente plana, procedeu da seguinte maneira: Foi até a margem do rio e mediu o ângulo β entre a horizontal e o topo da torre. Em seguida, afastou-se x metros da margem do rio e fez outra medição de um ângulo α .



Sabendo que o teodolito tem altura h', a altura h da torre e a largura R do rio são:

a) $h = \dfrac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$ *e* $R = \dfrac{x.tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}$

b) $h = h' + \dfrac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$ *e* $R = \dfrac{x.tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}$

c) $h = h' + \dfrac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$ *e* $R = \dfrac{x.tg\alpha}{tg\alpha - tg\beta}$

d) $h = h' + \dfrac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$ *e* $R = h' + \dfrac{x.tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}$

e) $h = h' + \dfrac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$ *e* $R = h' + \dfrac{x.tg\alpha}{tg\alpha - tg\beta}$

solução: Temos que $tg\beta = \dfrac{h - h'}{R}$ e $tg\alpha = \dfrac{h - h'}{x + R}$ e assim

$h - h' = (x + R)tg\,\alpha$

h - h'=(x + $\frac{h - h'}{tg\beta}$).tgα

h - h'= x.tgα + ($\frac{tg\alpha}{tg\beta}$).(h - h')

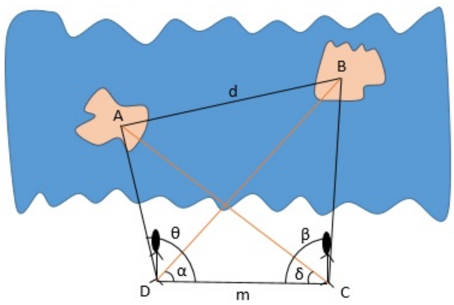
h - h'= $\frac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$

h = h' + $\frac{x.tg\alpha.tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$.

como R = $\frac{h - h'}{tg\beta}$
temos R = $\frac{x.tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}$.

A próxima situação vem mostrar como se calcula a distância entre duas ilhas, estando o observador na praia.

8. Para calcular a distância (d) entre duas ilhas, respectivamente (A) e (B), decorremos os seguintes passos:



I passo: Na praia tomemos dos pontos de observação C e D , de modo que a distância (m) entre eles possa ser medida com uma trena, formando assim um quadrilátero com os pontos A, B, C e D.

II passo: Calculemos com um teodolito os ângulos C$\hat{D}$B = α , D$\hat{C}$B = β e utilizaremos a Lei dos Senos no ΔBCD para determinar a medida do segmento $\overline{BC}$:
$\frac{\overline{BC}}{sen\alpha} = \frac{m}{sen(D\hat{B}C)} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{m.\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(D\hat{B}C)}$
Porém α + β + D$\hat{B}$C = 180°, assim D$\hat{B}$C = 180° - α - β

III passo: Calculemos com um teodolito os ângulos $D\hat{C}A = \delta$, $C\hat{D}A = \theta$ e utilizaremos a Lei dos Senos no ΔADC para determinar a medida do segmento $\overline{AC}$:

$$\frac{\overline{AC}}{sen\theta} = \frac{m}{sen(D\hat{A}C)} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{m.\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,(D\hat{A}C)}$$

Porém $\theta + \delta + D\hat{A}C = 180°$, assim $D\hat{A}C = 180°$ - θ - δ

IV passo: Utilizaremos por fim a Lei dos Cossenos no ΔACB e obteremos a distância (d) entre as duas ilhas.

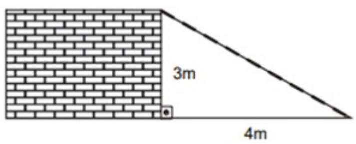
$d^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2.\overline{BC}.\overline{AC}.\cos(A\hat{C}B)$, porém $A\hat{C}B = \beta - \delta$.

3.4 Pré Teste

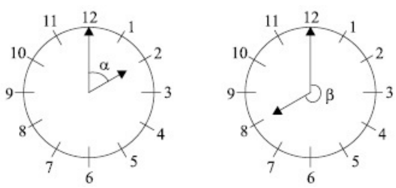
No dia 07 de maio de 2018 foi realizado na turna do 2° Ano do ensino médio da Unidade Escolar Cazuza Barbosa na cidade de Altos - Pi, um pré-teste com 30 alunos contendo os conteúdos referentes a trigonometria no triângulo retângulo. A finalidade do pré teste era avaliar os alunos em relação aos conhecimentos adquiridos sobre trigonometria, onde durante as aulas foram utilizados somente o quadro, o livro didático e o pincel.

Pré Teste

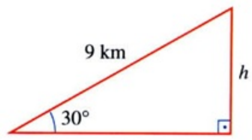
01. A figura abaixo mostra um muro que tem 3m de altura. Sabendo-se que o pé da escada está a 4m do muro, então, Qual o comprimento da escada?



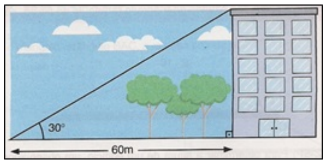
02. Dois relógios sem pilhas, indicando 2:00 h e 8:00 h, respectivamente, têm seus mostradores registrados nas figuras, sendo que α e β indicam as medidas de um dos ângulos formados pelos ponteiros, em cada caso. Nessas condições, Quais os valores de α e β?



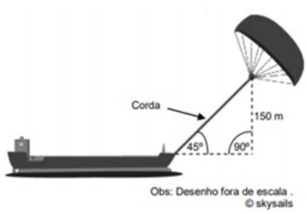
03. Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30º em relação ao solo. Após percorrer 9 km em linha reta, Qual a sua altura h em relação ao solo?



04. Determine a altura do prédio da figura seguinte.



05. (PISA 2012) Aproximadamente qual é o comprimento de corda para que a kite sail puxe o navio a um ângulo de 45° e fique a uma altura vertical de 150 m, como mostrado no diagrama à direita?



A tabela a seguir mostra os resultados obtidos através deste pré teste feito em sala de aula. Podemos observar que na maioria das questões a quantidade de erros é maior que a quantidade de acertos.

Tabela 3.1: Resultado do Pré Teste

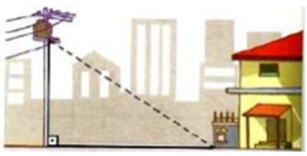
QUESTÃO	ASSUNTO ABORDADO	ACERTOS	ERROS
01	Teorema de Pitágoras	20	10
02	Ângulos Agudos e ângulos Obtusos	10	20
03	Utilização das razões trigonométricas	7	23
04	Utilização da tangente no triângulo retângulo	0	30
05	Utilização das razões trigonométricas	0	30

3.5 Pós Teste

No dia 15 de maio de 2018 foi realizado na turna do 2° Ano do ensino médio da Unidade Escolar Cazuza Barbosa na cidade de Altos-Pi, um pós-teste com 30 alunos contendo os conteúdos referentes a trigonometria no triângulo retângulo. A finalidade do Pós teste era avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre trigonometria, onde durante as aulas foram utilizados o quadro de acrílico, o pincel, o livro didático, a construção do teodolito caseiro, a utilização do teodolito para calcular ângulos e uma trena para auxiliar nos cálculos da altura de um objeto utilizando trigonometria.

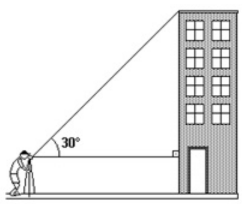
Pós Teste

01. Quantos metros de fio são necessários para puxar luz de um poste de 6 m de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8 m da base do poste?

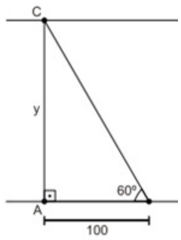


02. Quais os valores do menor e do maior ângulo formados pelos ponteiros de um relógio as 17h00min?

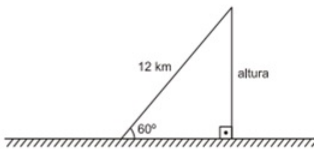
03. Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, determine, em metros, o valor da altura deste prédio. Use os valores: (sen30° = 0,5; cos30° = 0,866; tg30° = 0,577)



04. Em uma aula prática de Topografia, os alunos aprendiam a trabalhar com o teodolito, instrumento usado para medir ângulos. Com o auxílio desse instrumento, é possível medir a largura y de um rio. De um ponto A, o observador desloca-se 100 metros na direção do percurso do rio, e então visualiza uma árvore no ponto C, localizada na margem oposta sob um ângulo de 60°, conforme a figura ao lado. Nessas condições, qual a largura do rio, em metros?



05. Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo sob um ângulo de 60º, conforme a figura. Qual a altura em que se encontra o foguete, após ter percorrido 12km?

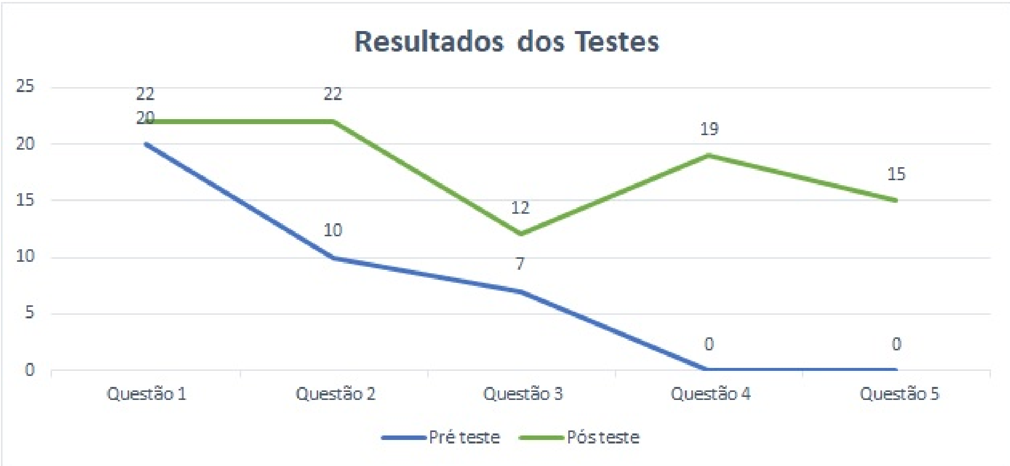


A tabela a seguir mostra os resultados obtidos com o Pós teste. Observarmos que através das aulas praticas e com a utilização do teodolito uma melhoria significativa, a quantidade de acertos superou a quantidade de erros, ou seja, uma aula de trigonometria onde os alunos possam utilizar materiais concretos e possam de maneira prazerosa construir seus próprios conhecimentos, fazem com que o aluno aprenda um pouco mais e passe a se interessar por aquele conteúdo.

Tabela 3.2: Resultado do Pós Teste

QUESTÃO	ASSUNTO ABORDADO	ACERTOS	ERROS
01	Teorema de Pitágoras	22	08
02	Ângulos Agudos e Ângulos Obtusos	22	08
03	Utilização das razões trigonométricas	12	18
04	Utilização da tangente no triângulo retângulo	19	11
05	Utilização das razões trigonométricas	15	15

O gráfico a seguir vem mostrar a diferença entre o pré teste e o pós teste.



Capítulo 4

Conclusão

Constatou-se com esta intervenção matemática durante a construção do teodolito caseiro que os alunos puderam utilizar o teodolito para medir ângulos e comprimentos, assim os estudantes relacionaram o conteúdo com a realidade, evitando assim a simples memorização de regras. A relação da atividade com a vida facilitou a compreensão da trigonometria. Dessa forma constatou-se que foi possível trabalhar com o teodolito, o qual possibilitou que os alunos medissem os ângulos para resolverem as atividades propostas. Reconheceram que usando a tangente de um ângulo chegariam ao resultado pretendido, em seguida somaram ao valor obtido a distância mínima dos seus olhos ao chão. A interpretação bem feita do problema permitiu uma fácil resolução do mesmo. Os alunos ficaram admirados com a forma como podiam aplicar a Matemática na solução de problemas do quotidiano.

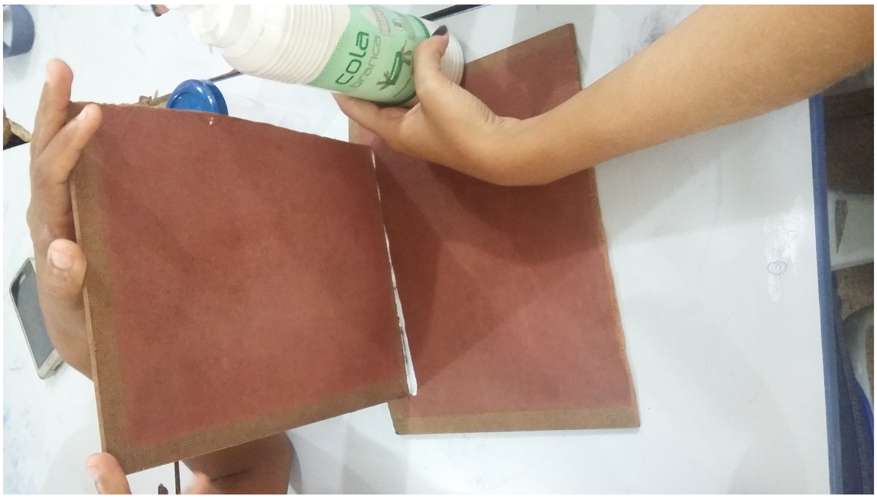
Os resultados da experimentação apontam que o ensino da Trigonometria do triângulo é gerador de motivações, incluindo atividades diversificadas, com situações problematizadoras, que estimule o pensar, contribuindo para que os alunos construam o significado das razões trigonométricas, além de favorecer a argumentação e modificar várias concepções errôneas.

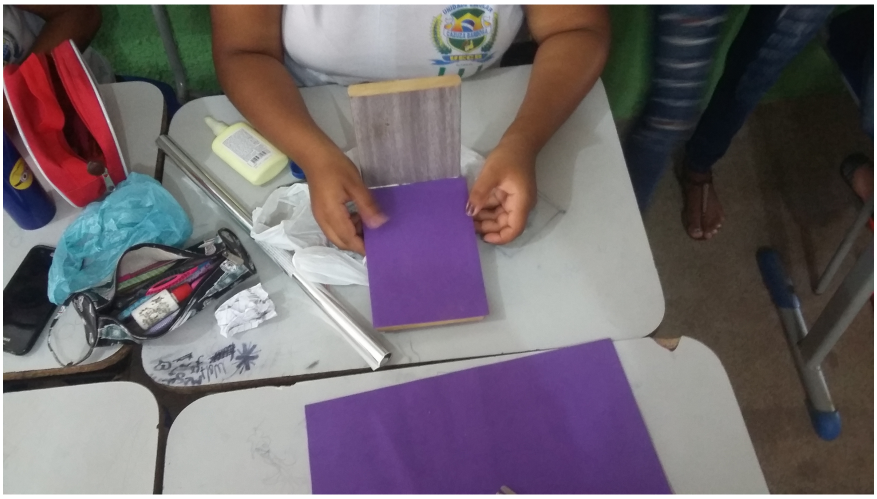
Com esta atividade, os alunos desenvolveram o entendimento da matemática e suas utilizações, a atividade os levou a relacionar o conteúdo com a realidade, evitando assim a simples memorização de regras. Quando o aluno perceber a relação da disciplina com sua vida é que conseguiremos de fato alcançar a aprendizagem, no caso da trigonometria e a medida de altura de objetos da escola. Dessa forma, os estudantes precisam de aulas mais práticas, para assim poderem entender o verdadeiro sentido da matemática.

Capítulo 5

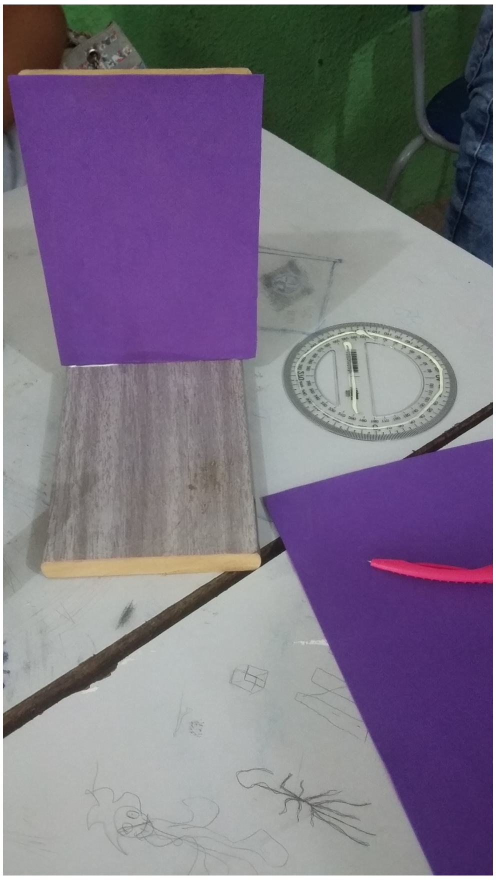
Anexos

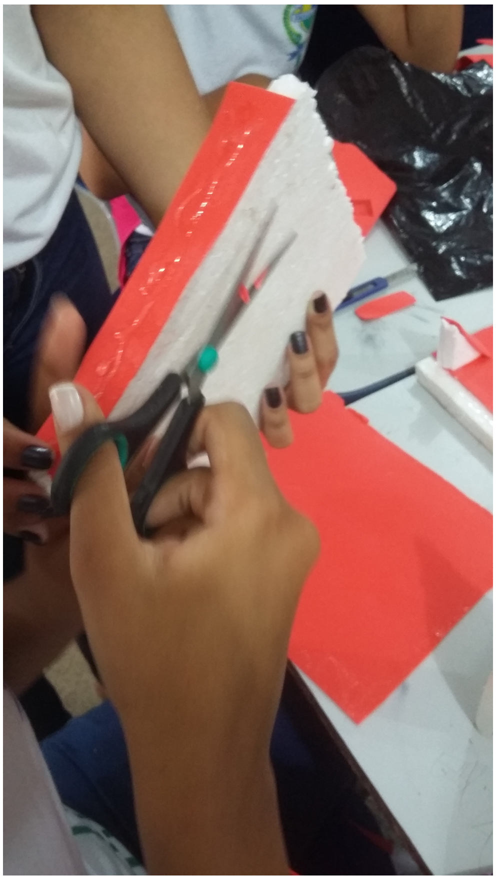
Neste anexo mostraremos as fotos dos alunos construindo o teodolito em sala de aula e fotos deles utilizando o teodolito dentro e fora da sala de aula.



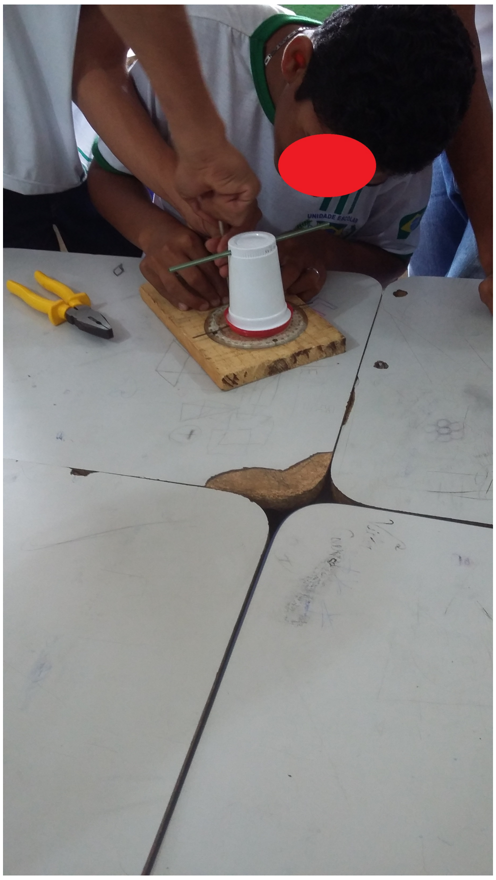



VIGOR

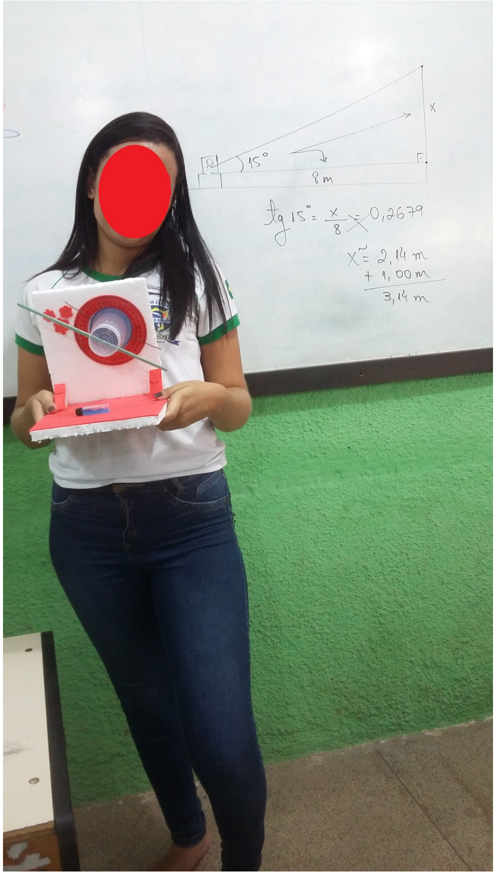





Glinorte
Cola Isopor




Joycinha


15°
8m
x
tg 15° = x/8 = 0,2679
x ≅ 2,14 m
+ 1,00 m
3,14 m

Referências Bibliográficas

[1] Lima,E.L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E.,Morgado, A.C., A Matemática do Ensino Médio,volume 1, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Iezzi,G., Murakami, C., Fundamentos de Matemática Elementar,volume 9, Editora Atual, São Paulo, 2013.

[3] Paiva,M.P., Moderna Plus,volume 1 e 2, Editora Moderna,São Paulo, 2016.

[4] Do Carmo,M.P., Wagner, E., Morgado, A.C., Trigonometria, Números Complexos, 3ª Edição , SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[5] Iezzi,G., Ciência e aplicações, volume 2, 9ª Edição, Saraiva, Sâo Paulo, 2016.

[6] BRASIL,Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias, Volume 2, MEC, SEB, Brasília, 2006.

[7] Cruz Neto,J.X., Elementos de Matemática I, UFPI/UAPI, Teresina, 2007.