# MODELAGEM MATEMÁTICA:

# UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO

# DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

por

Karin Andressa Pereira da Cunha Mesquita

CURITIBA

MAIO - 2013

# Modelagem Matemática:

# Uma alternativa para o ensino

# de Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Karin Andressa P. da Cunha Mesquita

Departamento de Matemática - UFPR

019081-980, Curitiba, PR

Brazil

karinandressa@hotmail.com

14 de maio de 2013

**Resumo**

Neste artigo, apresenta-se a metodologia de Modelagem Matemática como alternativa de estratégia de ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas. Destaca sua importância para a aprendizagem significativa e compara-se a abordagens diferentes além de elencar vantagens e desvantagens de aplicação dessa metodologia.

**Palavras-Chave:** Modelagem Matemática, Funções Exponenciais, Funções Logarítmicas

## Introdução

Neste artigo, discute-se o uso e a aplicação da Modelagem Matemática para o ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas em sala-de-aula, com o objetivo de apresentá-la a professores e alunos como metodologia auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Para tanto, descreve-se os principais conceitos sobre a Modelagem Matemática, como propostos em [7] e [5]. Entretanto, em virtude das fragilidades da forma como a teoria é proposta em [7] e [6], seguiremos os pressupostos de [5], pois este dividiu a modelagem em três casos, dos quais escolhemos o primeiro que sugere apresentar a situação-problema direta ao aluno, auxiliando o professor que deseja iniciar o uso gradual da Modelagem em suas aulas. Esse artigo está dividido em quatro seções, sendo que na primeira será apresentada definições sobre Modelagem; na segunda, será exibido uma lista de modelos Funções Exponenciais e Logarítmicas com sugestões de situações- problema; e já na terceira parte, duas sugestões de sequência didática. Por fim, conclui-se o presente texto apresentando as considerações finais sobre o trabalho proposto.

## 1. Modelagem Matemática

A inquietação dos professores perante a dificuldade dos alunos do Ensino Médio em compreender e aplicar os conceitos de Funções Exponenciais e Logarítmicas motivou a reflexão sobre o processo do ensino-aprendizagem desses dois assuntos específicos dos currículos da Matemática para o Ensino Médio. Em geral, muitos professores enfatizam, durante as suas aulas, os procedi- mentos algorítmicos tentando em alguns momentos da aula contextualizar o conteúdo. Sendo assim, se o trabalho em sala não for contextualizado o con- teúdo abordado torna-se artificial e desconectado da realidade. Quando fala- se de realidade não se trata especificamente da realidade do aluno, mas sim da real aplicação dos conceitos matemáticos aqui abordados. Percebe-se que em alguns livros didáticos, situações para contextualização são apresentadas apenas no fim dos capítulos correspondentes. Todavia, a contextualização não deveria ser apenas uma nota de rodapé, mas usada com maior destaque em todo o capítulo, quando possível. Com efeito, acredita-se a aprendizagem só será efetiva no processo de construção dos conceitos matemáticos se for trabalhada de maneira que o aluno entenda-a no seu contexto e seja apresentada de forma significativa. E com base nessa perspectiva, a Modelagem Matemática entra como uma solução na significação e na contextualização de conceitos matemáticos abordados no Ensino Médio. Assim, tem-se na modelagem matemática um pro- cesso pelo qual se pode transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real e na linguagem Matemática. Em [7] a Modelagem Matemática é apresentada como "um processo dinâmico, utilizado para a obtenção e generalização com a finalidade de previsão de tendências". Existem várias definições sobre Modelagem Matemática dentre elas destaca-se as citadas por [7] e [5]. Vejamos a seguir os conceitos que envolvem a Modelagem Matemática:

• Modelagem Matemática: segundo [7] "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo- real."

• Modelagem Matemática: segundo [5] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade de aprendizagem.

Como a proposta é apresentar uma forma de abordagem em sala-de-aula mais significativa para o aluno e mais conectada com a realidade, acredita-se que a definição de modelagem abordada por [5] seja mais prática e possa auxiliar o professor nesses primeiros passos de uma aula usando Modelagem como auxiliar no processo ensino-aprendizagem. Ao analisarmos alguns estudos realizados por [5], citamos que no ambiente da Modelagem Matemática, há "três níveis de possibilidades", os quais o autor chama de "casos", exibidos abaixo:

1º Caso: O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. Quando o aluno investiga, logo aparecem as indagações sobre o processo investigativo. Assim, a relação entre investigação e indagação não podem estar separadas, pois uma é consequência da outra.

Neste caso percebe-se que a coleta de dados fica dentro das situações- problema,não havendo necessidade de investigação fora de sala-de-aula.

2º Caso: O professor traz para a sala de aula um problema de outras áreas da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução. Os dados são obtidos fora da sala-de-aula e os alunos são responsáveis pela simplificação das situações-problema.

3º Caso: A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

É importante o professor perceber que ele fará várias intervenções durante o processo de resolução, estando presente com os alunos durante as investigações, e sempre dialogando com eles, deixando o aluno com a maior parte da responsabilidade sobre a resolução. Já no 1º Caso, o professor perceberá que sua intervenção será maior, e é justamente esse caso que nos interessa, pois estamos galgando os primeiros passos no uso da modelagem matemática. Assim que o professor estiver familiarizado com as novas abordagens, ele poderá repensar sua prática usando o 2º e o 3º casos. Assim, o 1º Caso ficará em destaque em nossa abordagem. Apesar de alguma dificuldade durante o uso da modelagem matemática, o professor deve perceber que ela apresenta inúmeras potencialidades que permitem aos alunos desenvolverem uma aprendizagem mais significativa e conectada com a realidade. Dentre os argumentos favoráveis à sua utilização no ensino, [6] e [7] destacam que a modelagem matemática:

• é prazerosa;

• torna os estudantes explorativos, criativos, habilidosos na resolução de problemas;

• dá significado ao conhecimento, no sentido de fundamentação de conceitos;

• facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações;

• faz com que o estudante vislumbre alternativas de direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica;

• alia teoria à prática, utilizando a matemática como ferramenta para re- solver problemas em diferentes situações e problemas;

• motiva alunos e professores a procurarem entender a realidade que os cercam, a buscarem meios de agir sobre ela, e transformá-la;

• é um método que ajuda a preparar o indivíduo a assumir seu papel de cidadão;

Apesar de possuir inúmeros argumentos favoráveis ao uso dessa metodologia, algumas fragilidades podem aparecer, dentre elas destacam-se:

• é possível que o estudante se mostre inseguro e apático nas aulas pois é algo novo e diferente da rotina dele;

• corre-se o risco do tema escolhido não motivar o aluno e causar desinteresse na exploração do problema;

• pode-se despertar insegurança no professor por ser algo novo e diferente, pois eles não se sentem habilitados para desenvolver situações-problema com modelos matemáticos;

• por se tratar de uma aplicação do cotidiano, não se sabe inicialmente por onde o modelo passa;

• nem sempre a ferramenta matemática está ao alcance do aluno ou do professor;

• nem sempre a metodologia por modelagem está em adequação ao currículo legalmente estabelecido;

• há algumas dificuldades do acompanhamento simultâneo do professor, na aplicação dessa metodologia.

**2**. Tendo em vista as fragilidades da metodologia por modelagem matemática apresentadas acima, sugere-se aos professores uso o 1º Caso apresentado por [5], pois acredita-se que o mesmo pode sanar algumas das fragilidades aponta- das por [7] e [6]. Por isso, consideremos alguns modelos de funções exponenciais e logarítmicas para que o professor possa utilizar em suas aulas e fazer uso da Modelagem Matemática, algumas retiradas de [7] e [2]. O motivo que nos levou a elencar modelos exponenciais está ligado ao fato deles surgirem de forma espontânea em diversas situações onde envolvem aumento ou diminuição de grandezas e as várias possibilidades de aplicações, dentre elas:

*juros contínuos

* resfriamento e aquecimento

* decaimento radioativo

* reprodução de bactérias

* crescimento populacional

* acústica

*escala Richter

* magnitude de uma estrela

* eliminação de àlcool ingerido.

* pressão atmosférica

* Escala musical

Tais assuntos podem ser trabalhados com modelagem matemática, como iremos verificar a seguir:

Como sugestão apresentamos uma sequência didática abordando uma situação sobre a temperatura ideal para consumir o café, que pode ser o representada por uma função exponencial e logarítmica utilizando para isso modelagem matemática:

**3. A temperatura ideal do café**

Inicialmente é proposta a leitura do texto "A lenda do café" e feitos alguns questionamentos logo após, lê –se um texto "resfriamento de Newton" que tem caráter explicativo da aplicação da Lei de Resfriamento de Newton.

Com esses dois textos o professor deverá agir como mediador para que o aluno selecione todos os dados para responder o seguinte questionamento: "Se uma xícara de café estava a uma temperatura de 95◦C e esfriou para 85◦C em um minuto em uma sala a 20◦C, em quanto tempo esse café atingirá a temperatura de 65°C, sendo possível tomá-lo sem riscos de queimadura?"

Para determinar os valores de k e α os alunos devem usar os dados fornecidos pelo problema. Como $T(0)=95$, temos: $95=k\cdot e^{-\alpha\cdot 0}+20 \Rightarrow 95=k+20 \Rightarrow k=75$. Com isso, é de se esperar que a determinação da constante α ficará mais fácil e clara para o aluno e professor. De fato, temos: $85=20+75\cdot e^{-\alpha} \Rightarrow e^{-\alpha}= 65/75 = 13/ 15 \Rightarrow \alpha=-\ln( 13/ 15) \approx 0,1431$. Dessa forma o aluno encontrou todas as constantes usando os dados encontrando nos textos, e nos questionamentos que o professor fez ao longo do desenvolvimento. Assim o aluno ao substituir as constantes encontrará a função: $T(t)=75\cdot e^{-0,1431t} +20$. Com a função e suas respectivas constantes, o aluno terá condições de responder, por exemplo, ao primeiro questionamento; ou seja, encontrar o tempo para que o café atinja a temperatura de 65◦C. Fazendo $T(t)=65$ o professor esperará a seguinte resposta: $75e^{-0,1431t} +20=65 \Rightarrow 75e^{-0,1431t} =45 \Rightarrow e^{-01431}= 3 /5$ . Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros temos:

$-0,1431t =\ln (3/5)$

$\Rightarrow t = 0,5108 / 0,1431 \Rightarrow t =3,57$min.

A interpretação do resultado também faz parte do desenvolvimento da situação- problema; ou seja, o valor $t = 3{,}57$ min significa que esse é o tempo necessário para que o café mantenha o sabor sem riscos de queimaduras.

Acreditamos que pela metodologia de Modelagem Matemática o aluno é levado a pensar sobre o problema, investigar soluções. Frisamos que o estudo está baseado no 1º caso apontado por Barbosa , pois visualizamos um professor que queira iniciar a aplicação dessa metodologia que se mostra neste nível mais cômoda e segura para um profissional que não está habituado com o mesmo. Também deixamos a possibilidade de avançar nos casos apresentados e exemplos de aplicações deste conteúdo em problemas de uso trivial.

**4. Criminalística: a hora da morte?**

Inicialmente o professor propõe a leitura de um texto "Em um ano 10 mil crimes ficam sem solução no Paraná" para instigar o aluno sobre o assunto, a seguir é assistido um vídeo "Os Suspeitos" que sugere a investigação de um crime, com detalhes, horários e temperatura e a seguinte função:

$Tc(t)=ti(0)\cdot er\cdot t$.

O professor deve esperar que o aluno entenda as variáveis. Caso isso não ocorra, o professor deve questioná-lo sobre o significado das variáveis encontradas no problema. Após o total entendimento o aluno deverá identificar:

- $r$ = taxa de decaimento exponencial relacionada com a diferença de temperatura.
- $t$ = tempo transcorrido.
- $ti$ = temperatura inicial de um corpo.

Após a apresentação das variáveis pelo aluno é esperado o início da resolução. Assim, o professor deverá perceber se o aluno conseguiu chegar à seguinte relação entre os dados do texto e a função apresentada. $Tc(t)=ti(0)\cdot e^{r\cdot t} \Rightarrow 28=36{,}5\cdot e^{6r} \Rightarrow e^{6r} = 0{,}767$. Aplicando o logaritmo a ambos os membros tem-se: $\ln e^{6r} = \ln 0{,}767 \Rightarrow 6r = -0{,}265 \Rightarrow r = -0{,}044$.

Que substituindo na equação: $Tc(t)=ti(0)\cdot e^{-0{,}044\cdot t}$, Usando essa função ele pode determinar quanto tempo o corpo levou para chegar à temperatura de 32◦C. Dessa forma, deve-se esperar a seguinte resolução: $Tc(t)=ti(0)\cdot e^{-0{,}044\cdot t} \Rightarrow 32=36.5\cdot e^{-0{,}044t} \Rightarrow e^{-0{,}044t} = 0{,}876$. Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros temos:

$e^{-0{,}044t} = 0{,}876 \Rightarrow \ln e^{-0{,}044t} = \ln 0{,}876 \Rightarrow -0{,}044t = -0{,}132 \Rightarrow t = 3,$

De posse desse resultado o aluno deve perceber que Dona Florinda morreu cerca de 3 horas antes dela ter sido encontrada por sua amiga. Isentando o jardineiro do crime.

**Conclusões**

Ao iniciar este artigo houve uma preocupação com o processo de ensino- aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas, mais especificamente a forma como que os professores aplicam esses conceitos. Para isso, indicamos o uso da Modelagem Matemática baseada nos pressupostos de [7], [5] e [6]. Conforme foi verificado e devido a de algumas fragilidades apontadas por [7] e [6] optou-se pela teoria apresentada por [5]. Ele aponta três casos sobre Modelagem Matemática, dos quais selecionamos para esse trabalho o primeiro, pois propõe que se apresente a situação-problema diretamente ao aluno. Este, por sua vez, pode encontrar todos os dados necessários para a resolução dessa situação.

Outro fato que nos fez escolher esse primeiro caso é a facilidade e a praticidade que o professor encontra ao utilizar a Modelagem Matemática como uma metodologia auxiliar. Porém, ele deverá ficar mais atento aos questionamentos que envolverão a prática. Por esse motivo, apresentou-se uma lista com sugestões de situações-problema que envolvem funções exponenciais e logarítmicas para que o professor as utilize nas aulas em que usará a Modelagem. Além disso, foi também apresentado duas sequências didáticas das quais pode-se perceber na Modelagem a possibilidade de apresentar os conceitos de Funções Exponenciais e Logarítmicas de forma satisfatória, contextualizada e que pode vir a ser mais significativa para o aluno. Desta forma, esse artigo visa, dentre as várias teorias que envolvem a Modelagem, ser um auxiliador para o professor que deseja iniciar o uso dessa metodologia em sala de aula e avançar com pesquisas nessa área. É importante ressaltar que a Modelagem Matemática não pode ser vista como uma "tábua de salvação"no ensino da Matemática, ela é mais uma ferramenta para auxiliar nessa tarefa de ensinar de forma mais significativa e empolgante, tanto para professor quanto para o aluno.

**REFRÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**


[1] C. Kluepfel: When are Logarithms used?, The Mathematics Teacher, Vol. 74, No 4 (April, 1981), pp.250 - 253.

[2] E. L. Lima: Logaritmos, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[3] E. L. Lima: A matemática do ensino médio Volume 1/ Elon Lages Lima, PauloCezarPintoCarvalho,EduardoWagner,AugustoCésarMorgado,Rio de Janeiro, 2006.

[4] E. L. Lima: Temas e Problemas/ Paulo Cezar Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[5] J. C. Barbosa: Modelagem na Educação Matemática: contribuições para debate teórico/In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Rio de Janeiro, 24, 2001.

[6] M. S. Biembengut: Modelagem matemática no ensino, Contexto, São Paulo, 2003.

[7] R. C. Bassanezi: Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, Con- texto, São Paulo, 2002.

[8] R. C. Bassanezi: Equações Diferenciais: com Aplicações, Harba, São Paulo, 1988

[9] EscalaRichter,http://www.ufrgs.br/museudetopografia/artigos/Escala_Richter.pdf, acessado 07/02/2013

[10] ABIC - Associação Brasileira da Indústira do café, http:// www.abic.com.br/publique/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?sid=39, Aces- sado em 10/03/2013.

[11] http://www.youtube.com/watch?v=Vy36aCdV35s, acessado em: 23/03/2013.

[12] http://www.advocaciabittar.adv.br/noticias/item/em-um-ano-10-mil- crimes-ficam-sem-soluo-no-paran.html, Acessado em: 23/03/2013.

[13] http://astroweb.iag.usp.br/∼dalpino/AGA215/APOSTILA/cap08cor.pdf, acessado em: 07/02/2013.