



**Universidade de Brasília**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Departamento de Matemática**

Breno Ramires Vargas da Silva

**Teorema de Van Aubel:**  
**Uma abordagem em sala de aula e demonstração de um caso similar**

Brasília DF

2018

Breno Ramires Vargas da Silva

**Teorema de Van Aubel:**

**Uma abordagem em sala de aula e demonstração de um caso similar**

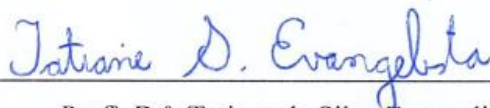
Dissertação de mestrado profissional (PROFMAT) apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obter o título de Mestre.

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Rogério César dos Santos – MAT/UnB (Orientador)



---

Profª. Drª. Tatiane da Silva Evangelista - FGA/UnB



---

Profª. Drª. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues – MAT/UnB

Brasília DF

2018

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esse trabalho ao meu filho, Gabriel, e à minha esposa, Andréia, pelo amor e pela força nessa conquista desejada.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, nosso criador, por todas as oportunidades de desfrutar a vida a cada dia que acordo.

Ao meu pai, pelo exemplo de homem que eu almejo muito um dia ser digno de me tornar.

À minha mãe, esposa e filho, por todo amor que me dão de todo coração.

Ao meu professor orientador, Rogério César dos Santos, pela paciência e apoio nessa trajetória árdua, mas compensadora.

E a toda minha família, amigos e companheiros, que me ajudam a atravessar todos os obstáculos que a vida me proporciona e que me fazem fortalecer ainda mais, de corpo e alma.

## RESUMO

O estudo da geometria é indispensável aos alunos dos ensinos fundamental e médio, haja vista sua necessidade em diferentes profissões, como a de pedreiro, arquiteto, cientista, dentre outras. Além do mais, a geometria nos permite enxergar de maneira mais clara a beleza dos padrões matemáticos. Esse trabalho teve o objetivo de mostrar um teorema pouco conhecido e abordado, mas que torna essa beleza da geometria mais palpável, o teorema de Van Aubel e uma variação do mesmo. Também foi realizada uma atividade com alunos do ensino médio e verificadas as reações dos mesmos frente ao problema. Constatamos com este trabalho que a Geometria Plana ainda possui muito campo a ser desvendado, e suas atuais descobertas possuem possibilidades de aplicação no ensino de Matemática no nível médio, com as devidas adaptações, por exemplo, como atividades paralelas ou extracurriculares.

**Palavras-chave:** Van Aubel; Geometria Plana; Ensino de Matemática; GeoGebra.

## ABSTRACT

The study of geometry is indispensable to students of primary and secondary education, given their need in different professions, such as mason, architect, and scientist, among others. Moreover, geometry allows us to see more clearly the beauty of mathematical patterns. This work had the objective to show a theorem little known and approached, but that makes this beauty of geometry more palpable, Van Aubel's theorem and a variation of the same. There was also an activity with high school students and their reactions to the problem were verified. We find that Geometric Plana still has a lot of field to be unveiled, and its current discoveries have possibilities of application in Mathematics teaching in the middle level, with the appropriate adaptations, for example as parallel or extracurricular activities.

**Keywords:** Van Aubel; Plane Geometry; Mathematics Teaching; GeoGebra.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	9
2 UMA RÁPIDA REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA, NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA ANALÍTICA .....	11
2.1 BASE MÉDIA DE UM TRIÂNGULO .....	11
2.2 QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS .....	12
2.3 NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA.....	12
2.4 PRODUTO E QUOCIENTE ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS.....	13
2.5 ROTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS .....	14
2.6 VETORES NO PLANO .....	14
3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL POR GEOMETRIA POSICIONAL	17
3.1 ENUNCIADO DO TEOREMA DE VAN AUBEL .....	17
3.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL POR GEOMETRIA POSICIONAL .....	18
4 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL POR NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA ANALÍTICA .....	20
5 PLANEJAMENTO E APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES NO GEOGEBRA PARA A SALA DE AULA .....	23
6 UMA VARIAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL .....	29
6.1 ENUNCIADO DA PROPOSIÇÃO.....	29
6.2 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO.....	30
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	34
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	37

## 1 INTRODUÇÃO

Do ponto de vista histórico, o estudo da geometria tem sua origem no período anterior ao cristianismo, onde os gregos desenvolveram investigações e teoremas que, ainda hoje, são aplicados. O livro *Elementos de Euclides*, o teorema de Pitágoras e o teorema de Tales são alguns dos exemplos de estudos realizados há mais de dois mil anos e que estão presentes até hoje. São considerados como conhecimentos indispensáveis para o desenvolvimento humano, os quais evidenciam que o tempo, as guerras ou catástrofes não podem mudar a *pureza* e a verdade que possui a Geometria.

Não obstante, é muito comum o professor ser questionado pelos alunos sobre a origem de certos enunciados e fórmulas matemáticas. Nesse sentido, indagações como “quem inventou isso?”, “para que serve isso?”, “como vou utilizar isso em meu cotidiano?” fazem parte da realidade de sala de aula. Porém, já que a geometria consiste em uma vertente altamente rica em imagens e figuras, os conhecimentos matemáticos podem ser desenvolvidos de forma mais lúdica e criativa, de modo que seu ensino pode se tornar mais claro e atrativo aos olhos dos alunos.

Neste trabalho, demonstra-se, por diferentes meios, um teorema de grande interesse na geometria plana. Trata-se do Teorema de Van Aubel, que é ainda pouco explorado por professores de ensino fundamental e de ensino médio. Em seguida, é demonstrado também um caso semelhante que se julga ser inédito. As ferramentas empregadas são a Geometria Plana Posicional, os Números Complexos e a Geometria Analítica. Em termos metodológicos, foram aplicadas algumas atividades relacionadas ao tema a estudantes de nível médio e superior com o auxílio do software GeoGebra.

A ideia principal é mostrar o potencial que a geometria plana ainda possui de apresentar novos resultados que podem ser apresentados em sala de aula. Ao final do trabalho, serão apresentadas as impressões acerca das reações dos estudantes frente às atividades propostas.

O ensino da Geometria, em várias instituições educacionais, muitas vezes, é negligenciado. É comum observar que existe uma ideia equivocada de que a geometria é uma parte abstrata da Matemática, ocasionando, assim, uma grande aversão por parte da maioria dos alunos. Nota-se, também, que na maioria dos livros didáticos, os conteúdos de Geometria são apresentados quase sempre de forma resumida, existindo pouca conexão com outros conteúdos da matemática.



Assim, ficam relegados ao esquecimento e os alunos não conseguem uma absorção dos conteúdos necessários para sua vida acadêmica. Nesse sentido, Putnoki (1988) assevera que "a Geometria, cada vez mais, vem se tornando o grande terror da Matemática, tanto para os alunos, quanto para professores". Dessa forma, fica evidenciado certo abandono dos conteúdos da geometria, em função da falta de objetividade por parte dos atores envolvidos no processo educacional.

De acordo com Braviano e Rodrigues,

A escola não pode funcionar mais como um meio inibidor do desenvolvimento das noções espaciais do estudante. Com o advento do computador e sua inserção, ainda que por etapas, em escolas, pode-se oferecer aos alunos a possibilidade de aprimorar seus conhecimentos usando ambientes computacionais que executem a Geometria Dinâmica (BRAVIANO; RODRIGUES, 2002).

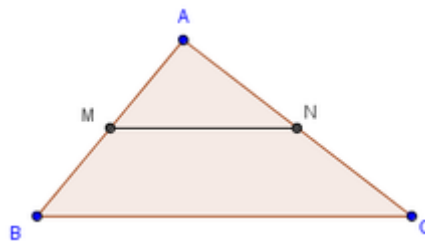
## 2 UMA RÁPIDA REVISÃO DE GEOMETRIA PLANA, NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo, serão revisados alguns conceitos e proposições sobre Geometria Plana, Números Complexos e Geometria Analítica ensinados no Ensino Médio, os quais serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

### 2.1 BASE MÉDIA DE UM TRIÂNGULO

Define-se como **base média de um triângulo** o segmento que une os pontos médios de dois de seus lados. Vale o seguinte resultado: seja ABC um triângulo qualquer, se MN é a base média de ABC relativa à BC, então  $MN \parallel BC$ , como ilustra a Figura 1. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB é traçada a paralela ao lado BC, então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N. Além disso, em qualquer dos casos acima, tem-se:

$$MN = \frac{BC}{2}.$$

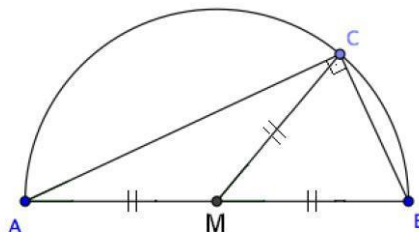


**Figura 1-** Base média de um triângulo

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018)

Em um triângulo retângulo, a mediana relativa a sua hipotenusa é igual à metade da mesma. Observa-se a Figura 2 a seguir, na qual se tem

$$\overline{CM} = \frac{\overline{AB}}{2}.$$



**Figura 2 -** Mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo

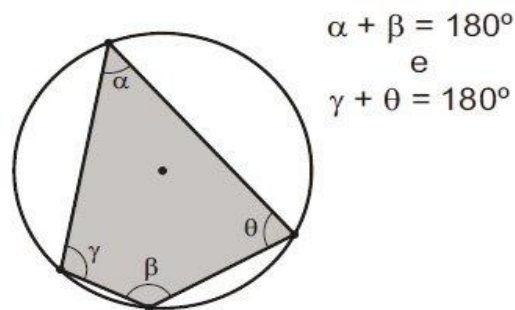
Fonte: Doeimat (2011).

## 2.2 QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Com relação aos quadriláteros, será útil lembrar que um quadrilátero é chamado de inscrito se existir um círculo passando por seus vértices. Se um quadrilátero for inscrito, então o círculo que passa pelos seus vértices é único. Tal círculo é denominado **círculo circunscrito** e vale a proposição a seguir.

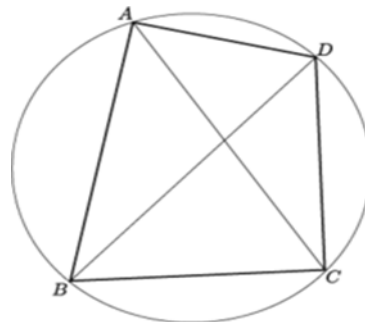
Um quadrilátero convexo ABCD de lados AB, BC, CD e DA é inscrito, se e somente se, qualquer uma das condições a seguir for satisfeita:

- 1) Os ângulos opostos são suplementares (Figura 3) ou;
- 2)  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$  (Figura 4).



**Figura 3** - Quadrilátero inscrito 1

Fonte: Blog do Enem (2018).



**Figura 4** - Quadrilátero inscrito 2

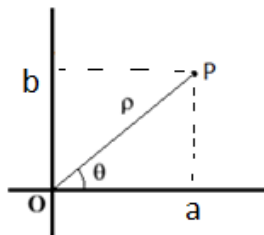
Fonte: Wikipédia (2018).

## 2.3 NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Cada número complexo  $z = a + bi$  está associado a um ponto P no plano, de coordenadas (a, b), isto é, P(a, b), como mostra a Figura 5. Essas são as coordenadas

cartesianas do número  $z$ . Outra representação de  $z$ , para  $z$  diferente de zero, é dada por meio de suas *coordenadas polares*, que são o módulo e o argumento, descritos a seguir:

- Módulo do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , indicado por  $|z|$  ou  $\rho$ , representando a distância do ponto  $P$  à origem do plano.
- O ângulo  $\theta$ , em que  $0 \leq \theta < 2\pi$ , que o vetor  $\overrightarrow{Oz}$  forma com o eixo  $x$  no sentido anti-horário. Esse ângulo  $\theta$  é chamado de *argumento* de  $z$  e é indicado por  $\arg(z)$ .



**Figura 5** – Coordenadas cartesianas e polares de um número complexo correspondente ao ponto  $P(a, b)$

Fonte: Elaborada pelo orientador da pesquisa (2018).

Pela Figura 5, nota-se que  $\cos\theta = a / \rho$ , isto é,  $a = \rho \cos \theta$ . Analogamente,  $b = \rho \sin \theta$ . Logo, conclui-se que

$$z = a + bi = \rho \cos \theta + \rho i \sin \theta, \text{ ou seja,}$$

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Essa notação é denominada de *forma trigonométrica* ou *forma polar* de  $z$ .

## 2.4 PRODUTO E QUOCIENTE ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

Demonstra-se que o produto de dois números complexos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à 1ª volta ( $0 \leq \arg. (z_1 z_2) < 2\pi$ ).

Logo, dados os números complexos seguintes

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e}$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

tem-se o seguinte produto:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Por outro lado, tem-se que o quociente entre dois números complexos na forma trigonométrica, onde o segundo número é diferente de 0, é o número complexo cujo o módulo

é o quociente dos módulos e cujo o argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à 1ª volta ( $0 \leq \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) < 2\pi$ ).

Ou seja, dados os dois números complexos seguintes

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \text{ e}$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2),$$

tem-se, então, como quociente:

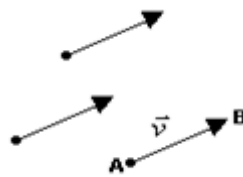
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

## 2.5 ROTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Uma aplicação importante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica consiste em possibilitar a **rotação** de pontos no plano: se um ponto (a, b) deve ser rotacionado em relação à origem em  $\alpha$  graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo  $\mathbf{a+bi}$  pelo complexo  $\mathbf{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}$ , já que o ângulo do produto será a soma dos ângulos dos números complexos multiplicados.

## 2.6 VETORES NO PLANO

Se A e B são pontos no plano, o **vetor**  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Cada segmento equipolente AB é **um representante** do vetor  $\overrightarrow{AB}$ , conforme a Figura 6 a seguir:



**Figura 6** - Vetores equipolentes

Fonte: Figura adaptada de SÓFÍSICA (2008).

Considerações importantes:

1º) Os segmentos orientados AB e XY são equipolentes, se e somente se, representam o mesmo vetor.

2º) Dado um ponto A do plano, o vetor  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$  é o **vetor nulo**.

3º) Dado o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , de origem A =  $(a_1, a_2)$  e extremidade B =  $(b_1, b_2)$ , o vetor equipolente a  $\vec{v}$ , cuja origem é a origem dos eixos coordenados (0,0), possui como coordenadas de sua extremidade os números  $b_1 - a_1$  e  $b_2 - a_2$ . Escreve-se, portanto:

$$\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

O **módulo** de um vetor é o comprimento de qualquer uma de suas representações equipolentes, e a **direção** e **sentido** de um vetor não-nulo são a direção e o sentido de qualquer uma das suas representações.

O módulo do vetor  $\overrightarrow{AB}$  é representado por  $|\overrightarrow{AB}|$ , logo se tem que se  $\overrightarrow{AB}$  é um vetor, então  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ .

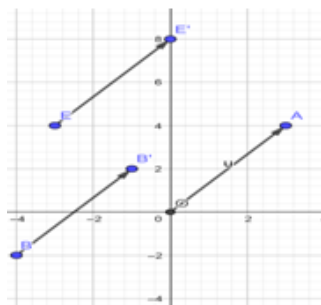
O **ângulo de direção** de qualquer vetor não-nulo é o ângulo  $\theta$  medido do lado positivo do eixo x no sentido anti-horário, até a representação posicional do vetor. Se  $\theta$  for medido em radianos,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Se  $\overrightarrow{AB}$  é um vetor  $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ , então,

$$\text{tg}\theta = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}, \text{ se } (b_1 - a_1) \neq 0.$$

Sendo A o ponto  $(a_1, a_2)$ , o vetor A poderá ser representado geometricamente pelo segmento de reta orientado  $\overrightarrow{OA}$ .

Se o vetor  $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ , então uma outra representação de A que possui ponto inicial em  $(x, y)$  tem como pontos finais  $(x + a_1, y + a_2)$ . Dessa forma, o vetor pode ser considerado como uma translação do plano dele mesmo.

A Figura 7 abaixo ilustra representações ou translações do vetor  $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ .

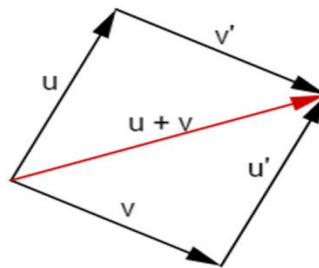


**Figura 7** - Vetores transladados

Fonte: Elaborado pelo aluno no GeoGebra (2018).

Define-se como a soma de dois vetores a operação em que a cada par de vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  associa-se o vetor  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , designado  $\vec{u} + \vec{v}$  e chamado **soma dos vetores**  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

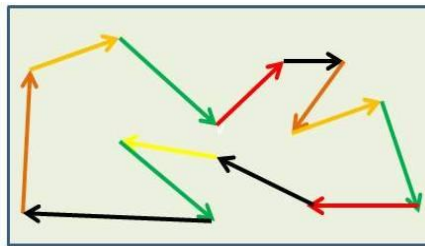
A soma dos vetores é igual ao vetor diagonal do paralelogramo formado pelos vetores  $\vec{u}, \vec{v}'$ ,  $\vec{u}'$  e  $\vec{v}$ , onde  $\vec{v}'$  tem início na extremidade do vetor  $\vec{u}$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v}$ , e o vetor  $\vec{u}'$  tem início na extremidade do vetor  $\vec{v}$  e é paralelo ao vetor  $\vec{u}$ , pela chamada **regra do paralelogramo**, conforme a Figura 8 a seguir:



**Figura 8** - Soma de dois vetores

Fonte: Internet (2018)

A soma de  $n > 2$  vetores é igual a zero se e somente se os mesmos formam uma figura completamente fechada que retorna à origem, como ilustra a Figura 9.



**Figura 9** - Soma nula de vetores

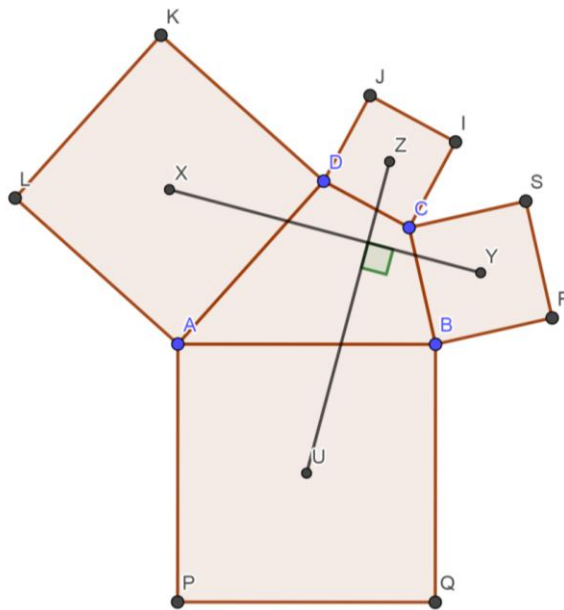
Fonte: Elaborado pelo aluno (2018).

### 3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL POR GEOMETRIA POSICIONAL

Neste capítulo será realizada a demonstração do teorema de Van Aubel, tendo como referência o trabalho de Nishiyama (2010), por meio da geometria posicional.

#### 3.1 ENUNCIADO DO TEOREMA DE VAN AUBEL

Dado um quadrilátero  $ABCD$  qualquer, não necessariamente convexo, construa sobre cada um dos seus lados quadrados com lados medindo  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $AD$ . Chame de  $U$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $X$ , respectivamente, os centros dos quadrados assim construídos, de acordo com a Figura 10 a seguir.



**Figura 10-** Teorema de Van Aubel

Fonte: Elaborado pelo aluno no GeoGebra (2018).

O teorema de Van Aubel garante, então, que  $ZU$  e  $XY$  satisfazem:

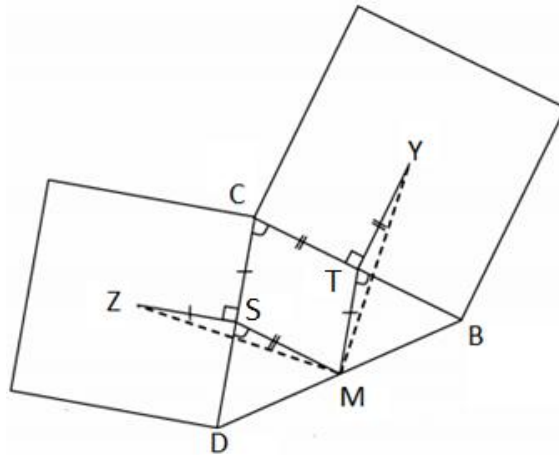
$$\begin{cases} ZU = XY \\ ZU \perp XY \end{cases}$$

Isto é, os segmentos que unem os centros dos quadrados possuem a mesma medida e são perpendiculares (ou ortogonais).



### 3.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL POR GEOMETRIA POSICIONAL

Será tomado como referência para a demonstração o trabalho de Nishiyama (2010). Na Figura 11,  $DBC$  é um triângulo qualquer e  $Z$  e  $Y$  são os centros dos quadrados construídos sobre os lados  $DC$  e  $BC$ , respectivamente. Além disto,  $M$  é o ponto médio de  $DB$ .



**Figura 11-** Igualdade e perpendicularismo entre  $ZM$  e  $YM$

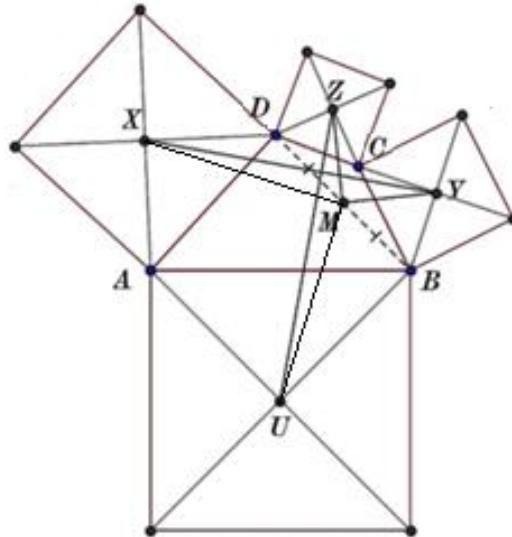
Fonte: Youtube (2012) (adaptada).

Olhando para os triângulos  $DMS$  e  $DBC$ ,  $M$  e  $S$  são os pontos médios de  $DB$  e  $DC$ , respectivamente. Então, pelo teorema da base média, tem-se que  $MS \parallel BC$ . Analogamente,  $MT \parallel DC$ . Logo, pela propriedade de ângulos correspondentes, valem as igualdades entre os ângulos  $D\hat{S}M = S\hat{C}T = M\hat{T}B$  e, como  $MS \parallel TS$  e  $MT \parallel SC$ , valem as igualdades entre os lados  $MS = TC = TY$  e  $MT = SC = SZ$ .

Conclui-se então que são congruentes os triângulos  $MSZ$  e  $YTM$  por LAL e, portanto,  $MZ = MY$ . Logo, como o paralelogramo  $MSCT$  possui ângulos opostos congruentes e a soma dos ângulos internos de  $MZS$  vale 180 graus, é fácil concluir que o ângulo  $Z\hat{M}Y$  mede noventa graus. Guarda-se esta informação.

Na Figura 12, ABCD é um quadrilátero qualquer, X, Z, Y e U são os centros dos quadrados construídos sobre seus lados e M é ponto médio de DB. Analogamente ao que foi feito antes, tem-se, na Figura 12, que:

$$UM = MX \text{ e } UM \perp MX$$



**Figura 12** – Perpendicularismo e igualdade entre UM e MX

Fonte: Youtube (2012) (adaptada).

Portanto, como pode ser verificado ainda na Figura 12,  $\widehat{XMY} = \widehat{XMZ} + 90^\circ$  e  $\widehat{UMZ} = 90^\circ + \widehat{XMZ}$ . Logo,

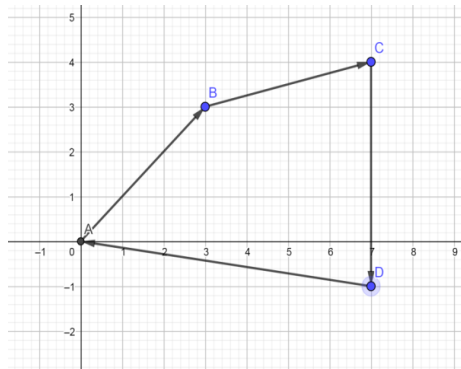
$$\widehat{XMY} = \widehat{UMZ}.$$

Assim, por LAL, os triângulos XMY e UMZ são congruentes. Logo,  $XY = ZU$ , provando, assim, a primeira parte do teorema de Van Aubel.

Como MX é perpendicular a MU e MY é perpendicular a MZ, fazendo a rotação do  $\Delta XMY$  em  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno do ponto M, o  $\Delta XMY$  irá coincidir com o  $\Delta UMZ$ , pois são congruentes e, desta forma, o segmento XY terá que coincidir com o segmento ZU. Então, foram necessários  $90^\circ$  para que XY coincidisse com UZ. Logo,  $XY \perp UZ$ , finalizando a prova de Van Aubel.

#### 4 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL POR NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA ANALÍTICA

Tendo como referência o trabalho de Nishiyama (2010), suponha-se que a figura abaixo está no plano complexo, com a origem coincidindo com o vértice **A** do quadrilátero ABCD, isto é, **A**  $(0,0)$ . Considera-se a Figura 13, a seguir:



**Figura 13-** Vetores como lados de um quadrilátero

Fonte: Elaborado pelo aluno no GeoGebra (2018).

Considera-se  $B - A$  o ponto  $(a_1, a_2)$ . Definindo

$$a = \frac{a_1 + ia_2}{2},$$

então  $2a = a_1 + ia_2$  é o número complexo associado ao ponto  $B - A = (a_1, a_2)$ .

Analogamente, considera-se  $C - B$  como sendo igual ao ponto  $(b_1, b_2)$  e  $2b = b_1 + ib_2$  o número complexo associado ao ponto  $C - B = (b_1, b_2)$ .

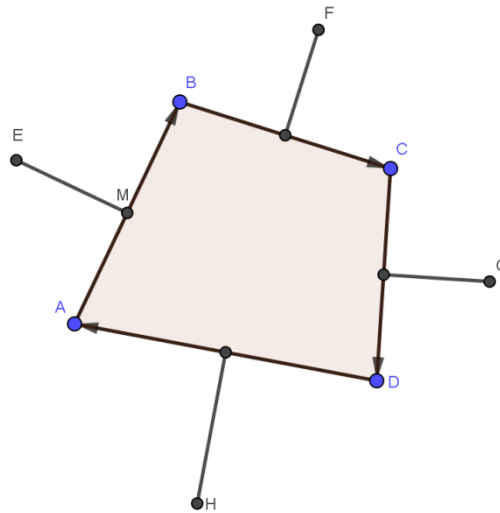
Também, considera-se  $D - C$  como sendo igual ao ponto  $(c_1, c_2)$  e  $2c = c_1 + ic_2$  o número complexo associado ao ponto  $D - C = (c_1, c_2)$ .

Por último, considera-se  $A - D$  como sendo igual ao ponto  $(d_1, d_2)$  e  $2d = d_1 + id_2$  o número complexo associado ao ponto  $A - D = (d_1, d_2)$ .

Desta forma,  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  e  $2d \in \mathbb{C}$  são os números complexos dados por  $(B - A)$ ,  $(C - B)$ ,  $(D - C)$  e  $(A - D)$ , respectivamente, isto é, são os números cujos vetores são equipolentes aos lados do quadrilátero, todos tendo origem no ponto  $(0, 0)$ .

Tem-se, então, que  $2a + 2b + 2c + 2d = 0$ , ou seja,  $a + b + c + d = 0$  (a soma dos vetores  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ ).

Indica-se, desta vez, os centros dos quadrados construídos sobre os lados de E, F, G e H, de acordo com a Figura 14, a seguir.



**Figura 14-** Demonstração do Teorema de Vau Aubel por números complexos

Fonte: Elaborado orientador da pesquisa (2018).

Seja M o ponto médio de AB. Assim, ME é o vetor de tamanho  $|AB|/2$ , isto é,  $|a|$ , e argumento igual ao argumento de AB somado de noventa graus. Assim,

$$E = a + ai = a(1 + i).$$

Isto equivale a percorrer AB até a metade, rotacionar noventa graus e depois percorrer mais metade de AB.

Já o ponto F é obtido percorrendo o vetor AB, em seguida metade de BC, rotacionando noventa graus e percorrendo mais metade de BC:

$$F = 2a + (1 + i)b.$$

Analogamente,

$$G = 2a + 2b + (1 + i)c \text{ e}$$

$$H = 2a + 2b + 2c + (1 + i)d.$$

Chamam-se  $x = G - E$  e  $y = H - F$ , com vistas a mostrar que  $x$  e  $y$  são ortogonais e têm o mesmo tamanho, ou seja,  $|x| = |y|$ .

Para isso, é suficiente mostrar que  $x = iy$ , ou seja, basta mostrar que  $x - iy = 0$ .

Sendo  $x = G - E$ , tem-se:

$$x = 2a + 2b + (1 + i)c - (1 + i)a,$$

$$x = 2a - a + 2b + c + ic - ia,$$

$$x = a + 2b + c + i(c - a)$$

Já para  $y$ , tem-se:

$$y = H - F,$$

$$y = 2a + 2b + 2c + (1 + i)d - 2a - b - ib,$$

$$y = b + 2c + d + i(d - b).$$

Logo,

$$x - iy = a + 2b + c + i(c - a) - i(b + 2c + d + i(d - b));$$

$$x - iy = a + 2b + c + ic - ia - ib - 2ic - id + d - b;$$

$$x - iy = a + 2b - b + c + d + ic - ia - ib - 2ic - id;$$

$$x - iy = (a + b + c + d) - i.(a + b + c + d) = 0;$$

Onde tem-se:

$$\underbrace{(a + b + c + d)}_x = \underbrace{i(a + b + c + d)}_{iy}.$$

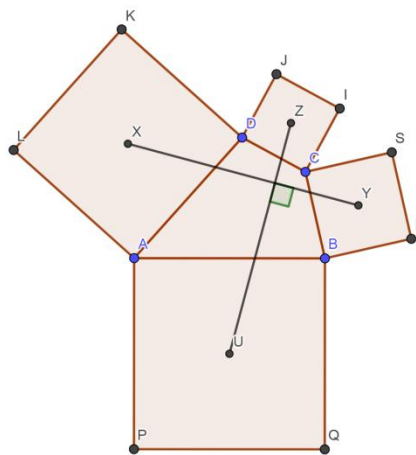
## 5 PLANEJAMENTO E APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES NO GEOGEBRA PARA A SALA DE AULA

Visando à aplicação do teorema de Van Aubel para alunos do ensino médio de escolas particulares, além de alunos do curso de Matemática de uma faculdade particular, se fez a verificação desse teorema no software GeoGebra. Os alunos tiveram a oportunidade de verificar que é realmente válido o teorema para qualquer quadrilátero, tornando, assim, mais "palpável" a absorção do conhecimento da figura geométrica construída.

Participaram das atividades 52 alunos, sendo oito do ensino superior e 44 alunos de ensino médio. Os alunos de ensino superior pertencem a uma mesma turma de uma faculdade particular da cidade de Planaltina-DF, enquanto que os 44 alunos de ensino médio são de duas escolas particulares da mesma cidade, sendo 26 alunos de uma turma e 18 alunos de outra turma. Os resultados foram coletados agrupando-se todos os alunos participantes, que responderam anonimamente as atividades propostas.

A atividade foi dividida em etapas:

1ª) Construção da figura geométrica aplicando o teorema de Van Aubel.



**Figura 15-** Verificação do teorema de Van Aubel

Fonte: Elaborado pelo aluno no GeoGebra (2018).

O primeiro passo consistiu em mostrar, através do software, como retirar e colocar segmentos, pontos, polígonos e outras figuras geométricas no GeoGebra, para que o aluno pudesse se familiarizar com o processo necessário para o desenvolvimento da atividade.

O segundo passo foi construir um quadrilátero qualquer e mostrar como aplicar as definições de segmento perpendicular, segmento fechado, ponto médio, polígono convexo,

diagonal de um quadrado, ponto central e ângulos entre dois segmentos. Além disso, pode-se ocultar nomes e dados que não são necessários para o final da atividade, tornando, assim, mais prática a visualização da figura geométrica.

Já o terceiro passo consistiu em mostrar a parte lateral esquerda do software que contém detalhadamente como cada passo aplicado no GeoGebra fica gravado na memória do aplicativo, onde se pode localizar seus dados como localização no plano, comprimentos, áreas ou posições, dependendo de qual parte da figura deseja-se observar.

O quarto passo, por sua vez, foi verificar pelo GeoGebra que o Teorema de Van Aubel é válido, terminando a construção e fazendo a verificação dos segmentos (côngruos e do ângulo de intersecção entre eles ser reto).

Com relação à construção, ficou nítida a facilidade dos jovens de hoje para assimilar rapidamente os comandos que estão contidos no software GeoGebra. Também se fez notar o fator “curiosidade”, pois, para a maioria deles, se tratou de algo novo. Ao conhecer pela primeira vez o software, mostraram entusiasmo e interesse pelo mesmo.

Em contrapartida, os alunos do curso de matemática do ensino superior já estavam fazendo uso do software GeoGebra, mostrando habilidade e rapidez para efetuar os comandos para a aplicação do teorema. Isso mostra que os futuros colegas docentes estão se preparando e se qualificando cada vez mais no intuito de se tornarem professores de qualidade e engajados na inovação de tecnologias para a educação.

2<sup>a</sup>) Aplicação do questionário sobre a aula proposta.

O trabalho foi dividido em dois tipos de perguntas no questionário.

1- Sobre o aplicativo:

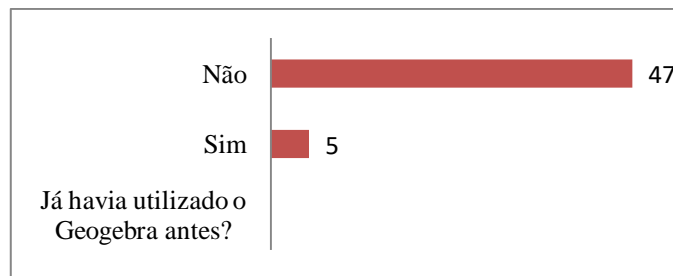
- Já havia utilizado o aplicativo?
- Sua experiência nesse aplicativo foi satisfatória?
- Recomendaria o uso desse aplicativo em sala de aula?

2- Sobre o teorema de Van Aubel:

- A atividade aplicada sobre o teorema de Van Aubel foi satisfatória?
- Recomendaria o uso dessa atividade em sala de aula?
- Na sua opinião, qual seria a metodologia que os professores deveriam utilizar para que a Geometria se torne algo mais compreensível aos olhos dos discentes?

Os gráficos a seguir mostram as respostas a cada pergunta feita aos alunos.

- 1º Gráfico: Já havia utilizado o aplicativo?

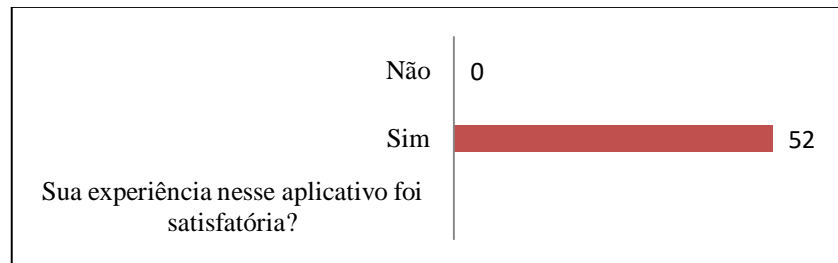


**Gráfico 1** - Questionário sobre a atividade 1

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018).

A primeira pergunta do questionário já mostra que os jovens ainda estão em um processo de "descoberta" dessa nova tecnologia da educação, pois apenas cinco jovens (9,6%) já conheciam e tinham feito uso desse software. Os cinco jovens em questão são alunos do ensino superior. Catalogados entre os 47 que responderam “não”, nota-se que três jovens do ensino superior ainda não conheciam o software. Os restantes 44 jovens são alunos do ensino médio. Isso também mostra que a maioria das escolas particulares ainda não adotou o uso desse aplicativo, mostrando a importância da apresentação do GeoGebra de forma mais concreta em todas as instituições de ensino do país.

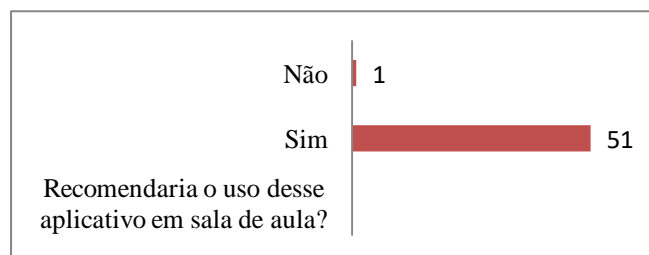
- 2º Gráfico: Sua experiência nesse aplicativo foi satisfatória?



**Gráfico 2** - Questionário sobre a atividade 2

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018).

- 3º Gráfico: Recomendaria o uso desse aplicativo em sala de aula?



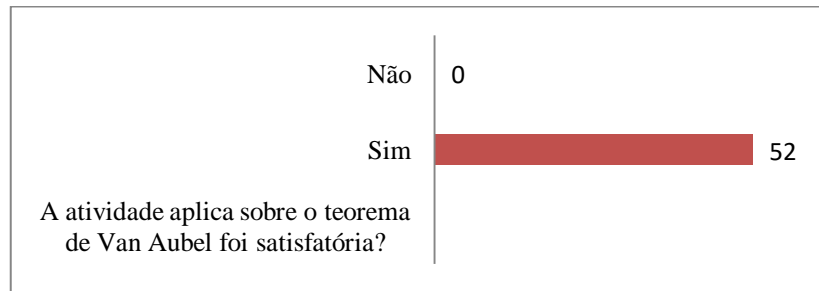
**Gráfico 3** - Questionário sobre a atividade 3

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018)



Com relação aos gráficos 2 e 3, é possível notar a unanimidade em relação à satisfação e recomendação dos alunos perante o GeoGebra, por facilitar a assimilação e uma melhor visualização das figuras que ele representa. O único aluno que não recomenda o uso do software foi um aluno do ensino médio, sendo que não apresentou justificativa ou ressalva para o não uso do GeoGebra.

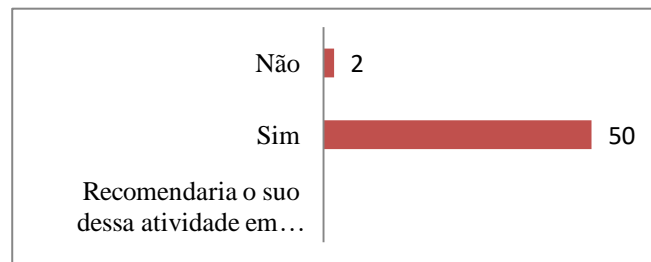
- 4º Gráfico: A atividade aplicada sobre o teorema de Van Aubel foi satisfatória?



**Gráfico 4** - Questionário sobre a atividade 4

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018).

- 5º Gráfico: Recomendaria o uso dessa atividade em sala de aula?



**Gráfico 5** - Questionário sobre a atividade 5

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018)

Essa pergunta, apesar de ser semelhante à pergunta do terceiro gráfico, refere-se ao uso do software especificamente para o teorema de Van Aubel. Novamente, foi possível notar a quase unanimidade em relação à satisfação e recomendação dos alunos perante a demonstração do Teorema de Van Aubel.

Os alunos, a cada passo dado, manifestavam um misto de espanto, surpresa e “magia” ao visualizarem tão rapidamente as definições geométricas aplicadas de forma rápida e precisa, onde ele pode corrigir seus erros na mesma rapidez, garantindo conhecimento e praticidade.

Os alunos conseguiram visualizar que os segmentos eram congruentes através do GeoGebra, pois o mesmo, em cada passo feito, apresenta um campo que mostra os detalhes de todos os segmentos formados, possibilitando a veracidade da congruência entre os segmentos.

Também foi pedido aos alunos que utilizassem o comando que possibilita calcular o ângulo formado por duas retas, comprovando que eles são perpendiculares entre si.

Quando, finalmente, finalizou-se a figura e constatou-se o enunciado do problema, os alunos ficaram muito satisfeitos pelo resultado. Além de terem a oportunidade de “modificar a estrutura do quadrilátero sem mudar a definição do teorema”, verificando, assim, de fato, que o teorema é válido para todo quadrilátero convexo ou não.

Por fim, foi deixado um espaço para que os alunos deixassem sua opinião sobre a seguinte questão: “qual seria a metodologia que os professores deveriam utilizar para que a Geometria se torne mais compreensível aos olhos dos discentes?”.

Dentre todas as repostas, duas foram destacadas que, segundo considera-se aqui, são mais interessantes:

Aluno 1: “Procurar formas de mostrar as aplicações da geometria com uso de materiais e itens que façam com que o aluno se interesse pela aula”.

Aluno 2: “Os professores poderiam utilizar recursos tecnológicos como este, para que a visualização das matérias fosse de forma mais clara”.

Como professor, considera-se importante levar em consideração tais respostas, pois o intuito aqui é ensinar e aprimorar o processo de ensino aprendizagem, para que se possa evoluir com as mudanças de linguagem, cultura e tecnologias que as gerações atuais estão presenciando.

A Figura 16 que mostra um questionário respondido por um aluno (a):

• **SOBRE O APLICATIVO GEOGEBRA**

2.1- Já havia utilizado ele antes?

Sim  Não

2.2- Sua experiência nesse aplicativo foi satisfatória?

Sim  Não

2.3- Recomendaria o uso do aplicativo em sala de aula?

Sim  Não

• **SOBRE O TEOREMA DE VAN AUBEL**

3.1- A atividade aplicada sobre o teorema de Van Aubel foi satisfatória?

Sim  Não

3.2- Recomendaria o uso dessa atividade em sala de aula?

Sim  Não

3.3- Na sua opinião qual seria a metodologia que os professores deveriam utilizar para que a Geometria se torne mais compreensível aos olhos dos docentes?

*Os professores poderiam utilizar recursos tecnológicos como este para que a visualização das matérias seja de forma mais clara.*

**Figura 16 - Resposta de um aluno**

Fonte: Elaborado pelo aluno (2018).

A Figura 17 que mostra um questionário respondido por outro aluno (a):

**VAN AUBEL**

• **SOBRE O APLICATIVO GEOGEBRA**

2.1- Já havia utilizado ele antes?

Sim  Não

2.2- Sua experiência nesse aplicativo foi satisfatória?

Sim  Não

2.3- Recomendaria o uso do aplicativo em sala de aula?

Sim  Não

• **SOBRE O TEOREMA DE VAN AUBEL**

3.1- A atividade aplicada sobre o teorema de Van Aubel foi satisfatória?

Sim  Não

3.2- Recomendaria o uso dessa atividade em sala de aula?

Sim  Não

3.3- Na sua opinião qual seria a metodologia que os professores deveriam utilizar para que a Geometria se torne mais compreensível aos olhos dos docentes?

*O uso de ferramentas que auxiliem os alunos a visualizar o conteúdo, como aplicativos que facilitem os desenhos ou figuras planas.*

**Figura 17 - Resposta de um aluno**

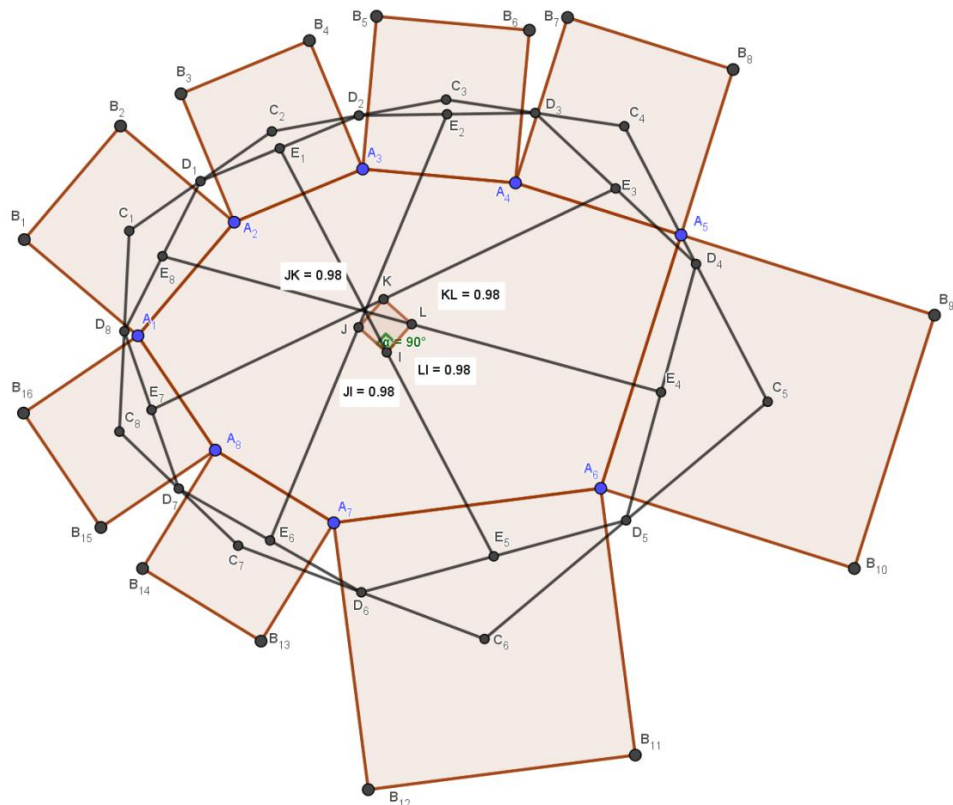
Fonte: Elaborado pelo aluno (2018)

## 6 UMA VARIAÇÃO DO TEOREMA DE VAN AUBEL

Inspirado no teorema de Van Aubel, pretende-se, neste capítulo, demonstrar um resultado que se julga ser inédito, pelo fato de não se ter encontrado trabalhos semelhantes na literatura brasileira ou estrangeira. Pode-se, assim, garantir que a geometria ainda possui muitos campos a serem descobertos e possivelmente demonstrados.

### 6.1 ENUNCIADO DA PROPOSIÇÃO

Considere um octógono convexo ou côncavo, ou com possíveis auto interseções entre seus lados e vértices, como mostra a Figura 18 a seguir, denotados por  $A_1A_2 \dots A_8$ , e quadrados,  $A_1B_1B_2A_2, A_2B_3B_4A_3, \dots, A_8B_{15}B_{16}A_1$ , construídos todos externamente ou todos internamente aos lados do octógono. Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_8$ , os centros dos quadrados e  $D_1, D_2, \dots, D_8$  os pontos médios de  $C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_8C_1$ , e sejam  $E_1, E_2, \dots, E_8$  os pontos médios de  $D_1D_2, D_2D_3, \dots, D_8D_1$ , respectivamente. Tomando  $I, J, K$  e  $L$  os centros de  $E_1E_5, E_2E_6, E_3E_7$  e  $E_4E_8$ , respectivamente, é possível mostrar que  $IJKL$  é um quadrado.



**Figura 18-** Variação do teorema de Van Aubel

Fonte: Elaborado pelo orientador da pesquisa (2018).

## 6.2 DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO

Interpretam-se os pontos da Figura 18 como sendo números complexos, ou seja, pontos no plano complexo. Para isso, supõe-se que a figura está no plano complexo, com a origem coincidindo com o vértice  $A_1$  do octógono  $A_1A_2 \dots A_8$ . Isto é  $A_1$   $(0,0)$ .

Considera-se  $A_2 - A_1 = A_2$  o ponto  $(a_1, a_2)$  e define-se  $2a = a_1 + ia_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_2 = (a_1, a_2)$ .

Analogamente, consideram-se:

$A_3 - A_2$  como sendo igual ao ponto  $(b_1, b_2)$  e  $2b = b_1 + ib_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_3 - A_2 = (b_1, b_2)$ ;

$A_4 - A_3$  como sendo igual ao ponto  $(c_1, c_2)$  e  $2c = c_1 + ic_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_4 - A_3 = (c_1, c_2)$ ;

$A_5 - A_4$  como sendo igual ao ponto  $(d_1, d_2)$  e  $2d = d_1 + id_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_5 - A_4 = (d_1, d_2)$ ;

$A_6 - A_5$  como sendo igual ao ponto  $(e_1, e_2)$  e  $2e = e_1 + ie_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_6 - A_5 = (e_1, e_2)$ ;

$A_7 - A_6$  como sendo igual ao ponto  $(f_1, f_2)$  e  $2f = f_1 + if_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_7 - A_6 = (f_1, f_2)$ ;

$A_8 - A_7$  como sendo igual ao ponto  $(g_1, g_2)$  e  $2g = g_1 + ig_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_8 - A_7 = (g_1, g_2)$ ;

$A_1 - A_8$  como sendo igual ao ponto  $(h_1, h_2)$  e  $2h = h_1 + ih_2$  o número complexo associado ao ponto  $A_1 - A_8 = (h_1, h_2)$ .

Tem-se, então, que:

$2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 2h = 0 \rightarrow a + b + c + d + e + f + g + h = 0$ , (a soma dos vetores:  $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_7} + \overrightarrow{A_7A_8} + \overrightarrow{A_8A_1} = \vec{0}$ ).

Denotam-se os centros dos quadrados construídos sobre os lados de  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  como mostra a Figura 18.

Observa-se que o ponto  $C_1$  pode ser obtido da seguinte maneira:

Percorre-se o lado  $\overrightarrow{A_1A_2}$  até a metade, giram-se  $90^\circ$  graus e anda-se mais a metade do comprimento  $\overrightarrow{A_1A_2}$ . Em termos de números complexos, isso significa:

$$C_1 = 2a/2 + 2ai/2 = a + ia = a(1 + i)$$

De maneira análoga, tem-se:

$$C_2 = 2a + b(1+i)$$

$$C_3 = 2a + 2b + c(1+i)$$

$$C_4 = 2a + 2b + 2c + d(1+i)$$

$$C_5 = 2a + 2b + 2c + 2d + e(1+i)$$

$$C_6 = 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + f(1+i)$$

$$C_7 = 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + g(1+i)$$

$$C_8 = 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + h(1+i).$$

Definem-se como  $D_1, D_2, \dots, D_8$ , os pontos médios de  $C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_8C_1$ , respectivamente, com isso obtêm-se:

$$D_1 = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{3a + (a + b)i}{2}$$

$$D_2 = \frac{C_2 + C_3}{2} = \frac{4a + 3b + c + (b + c)i}{2}$$

$$D_3 = \frac{C_3 + C_4}{2} = \frac{4a + 4b + 3c + d + (c + d)i}{2}$$

$$D_4 = \frac{C_4 + C_5}{2} = \frac{4a + 4b + 4c + 3d + e + (d + e)i}{2}$$

$$D_5 = \frac{C_5 + C_6}{2} = \frac{4a + 4b + 4c + 4d + 3e + f + (e + f)i}{2}$$

$$D_6 = \frac{C_6 + C_7}{2} = \frac{4a + 4b + 4c + 4d + 4e + 3f + g + (f + g)i}{2}$$

$$D_7 = \frac{C_7 + C_8}{2} = \frac{4a + 4b + 4c + 4d + 4e + 4f + 3g + h + (g + h)i}{2}$$

$$D_8 = \frac{C_8 + C_1}{2} = \frac{3a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + h + (a + h)i}{2}$$

Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_8$  os pontos médios obtidos de  $D_1D_2, D_2D_3, \dots, D_8D_1$ , respectivamente, tem-se, assim, os pontos obtidos:

$$E_1 = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{7a + 4b + c + (a + 2b + c)i}{4}$$

$$E_2 = \frac{D_2 + D_3}{2} = \frac{8a + 7b + 4c + d + (b + 2c + d)i}{4}$$

$$E_3 = \frac{D_3 + D_4}{2} = \frac{8a + 8b + 7c + 4d + e + (c + 2d + e)i}{4}$$

$$E_4 = \frac{D_4 + D_5}{2} = \frac{8a + 8b + 8c + 7d + 4e + f + (d + 2e + f)i}{4}$$

$$E_5 = \frac{D_5 + D_6}{2} = \frac{8a + 8b + 8c + 8d + 7e + 4f + g + (e + 2f + g)i}{4}$$

$$E_6 = \frac{D_6 + D_7}{2} = \frac{8a + 8b + 8c + 8d + 8e + 7f + 4g + h + (f + 2g + h)i}{4}$$

$$E_7 = \frac{D_7 + D_8}{2} = \frac{7a + 6b + 6c + 6d + 6e + 6f + 5g + 2h + (g + 2h + a)i}{4}$$

$$E_8 = \frac{D_8 + D_1}{2} = \frac{6a + 3b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + h + (h + 2a + b)i}{4}$$

Tomando  $I, J, K$  e  $L$  os centros de  $E_1E_5, E_2E_6, E_3E_7$  e  $E_4E_8$ , respectivamente, obtêm-se os seguintes pontos:

$$1^a) I = \frac{E_1 + E_5}{2} = \frac{15a + 12b + 9c + 8d + 7e + 4f + g + (a + 2b + c + e + 2f + g)i}{8}$$

$$2^a) J = \frac{E_2 + E_6}{2} = \frac{16a + 15b + 12c + 9d + 8e + 7f + 4g + h + (b + 2c + d + f + 2g + h)i}{8}$$

$$3^a) K = \frac{E_3 + E_7}{2} = \frac{15a + 14b + 13c + 10d + 7e + 6f + 5g + 2h + (c + 2d + e + g + 2h + a)i}{8}$$

$$4^a) L = \frac{E_4 + E_8}{2} = \frac{14a + 11b + 10c + 9d + 6e + 3f + 2g + h + (d + 2e + f + h + 2a + b)i}{8}$$

Para se obter o resultado pedido, ou seja, provar que os pontos  $IJKL$  representam um quadrado, chama-se  $x = J - I$  e  $y = L - I$ . Se quer mostrar que  $x$  e  $y$  são ortogonais e têm o mesmo tamanho, ou seja,  $|x| = |y|$ . Para isso, é suficiente mostrar que  $x = iy$ , ou seja, basta mostrar que  $x - iy = 0$ .

Sendo  $x = J - I$ , tem-se:

$$x = J - I = \frac{16a + 15b + 12c + 9d + 8e + 7f + 4g + h + (b + 2c + d + f + 2g + h)i}{8}$$

$$- \frac{15a + 12b + 9c + 8d + 7e + 4f + g + (a + 2b + c + e + 2f + g)i}{8}$$

$$x = J - I = \frac{a + 3b + 3c + d + e + 3f + 3g + h + (-a - b + c + d - e - f + g + h)i}{8}$$

Sendo  $y = L - I$ , tem-se:

$$y = L - I = \frac{14a + 11b + 10c + 9d + 6e + 3f + 2g + h + (d + 2e + f + h + 2a + b)i}{8}$$

$$- \frac{15a + 12b + 9c + 8d + 7e + 4f + g + (a + 2b + c + e + 2f + g)i}{8}$$

$$y = L - I = \frac{-a - b + c + d - e - f + g + h + (a - b - c + d + e - f - g + h)i}{8}$$

Agora, substituindo na fórmula  $x - iy = 0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{a + 3b + 3c + d + e + 3f + 3g + h + (-a - b + c + d - e - f + g + h)i}{8} \\
- i \cdot & \left( \frac{-a - b + c + d - e - f + g + h + (a - b - c + d + e - f - g + h)i}{8} \right) = \\
& \frac{a + 3b + 3c + d + e + 3f + 3g + h - ai - bi + ci + di - ei - fi + gi + hi +}{8} \\
& \frac{+ ai + bi - ci - di + ei + fi - gi - hi + a - b - c + d + e - f - g + h}{8} \\
= & \frac{a + a + 3b - b + 3c - c + d + d + e + e + 3f - f + 3g - g + h + h -}{8} \\
& \frac{-ai + ai - bi + bi + ci - ci + di - di - ei + ei - fi + fi + gi - gi + hi - hi}{8} \\
= & \frac{2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 2h}{8}
\end{aligned}$$

O numerador representa a soma dos vetores que geram o octógono  $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_7} + \overrightarrow{A_7A_8} + \overrightarrow{A_8A_1} = 0$ , logo tem-se:

$$= \frac{2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + 2h}{8} = \frac{0}{8} = 0.$$

Logo, como  $x - iy = 0$ , tem-se que os segmentos (J - I) e (L - I) possuem a mesma medida e são perpendiculares entre si. Pensando de forma análoga, mostra-se que os segmentos (J - K) e (L - K) possuem a mesma medida e são perpendiculares entre si.

Como os dois ângulos opostos do quadrilátero IJKL possuem a mesma medida  $\widehat{JIL} = \widehat{JIL} = 90^\circ$ , os triângulos  $\Delta JIL$  e  $\Delta JKL$  são isósceles, pois (J - I) é congruente a (L - I). Da mesma forma, (J - K) e (L - K) também são congruentes. Logo, os dois ângulos internos dos triângulos  $\Delta JIL$  e  $\Delta JKL$  medem  $45^\circ$  cada um deles. Portanto, no quadrilátero IJKL o ângulo  $\widehat{JKL}$  é a soma dos ângulos  $\widehat{JIL}$  e  $\widehat{LJK}$  resulta em  $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ . De maneira análoga, pode-se verificar que a soma dos ângulos  $\widehat{KLJ}$  e  $\widehat{JLI}$  resulta em  $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ .

Assim, percebe-se que o quadrilátero IJKL possui todos os ângulos internos medindo  $90^\circ$  e dois lados adjacentes entre si possuindo a mesma medida. Portanto, IJKL é um quadrado.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de o Teorema de Van Aubel ser pouco divulgado no mundo acadêmico, principalmente quando é levado em conta seu uso no ensino de educação básica da rede pública ou particular, pode-se notar uma grande aceitabilidade pelos alunos na assimilação e compreensão das definições e propriedades apresentadas a eles. Isso demonstrou o quanto ainda é possível aprofundar o estudo da Geometria como um todo e em como se pode torná-la cada vez mais agradável aos alunos.

O fato de poucos alunos conhecerem o dispositivo GeoGebra também mostra a dificuldade de inserção do aplicativo em atividades, pois o próprio livro didático ainda não aborda tal ferramenta. Quanto aos professores, seria interessante procurar, na forma de atividades extras ou exposições, mostrar o uso e aplicação do software em atividades que possam atrair os olhos curiosos dos jovens, pois os mesmos são personagens que estão altamente conectados a essa nova era virtual.

A matemática proporciona a possibilidade de mostrar que definições e teoremas podem ser abordados por vários caminhos. O teorema de Van Aubel ilustra bem este fato, pois no trabalho o mesmo foi demonstrado por cálculos usando a Geometria Euclidiana, como também foi demonstrado usando a Geometria Analítica com números complexos.

É interessante notar que, na Geometria Euclidiana Plana, ainda existem muitos resultados a serem desvendados, ao contrário do que se costuma pensar. Como foi dito na introdução do trabalho, mesmo usando definições e teoremas que remetem ao período que antecede o desenvolvimento do cristianismo, ainda há vários casos novos a serem “descobertos” e, se possível, demonstrados, como foi desenvolvido nesse trabalho. Aqui, abordou-se uma situação similar ao Teorema de Van Aubel, acerca do qual ainda não se tem nenhum trabalho ou artigo, brasileiro ou estrangeiro, sobre a proposição abordada e demonstrada.

No momento da atividade em sala com os alunos, como introdução à pesquisa, apresentou-se o teorema no quadro negro e foi pedido para que eles desenhassem, com o auxílio de uma régua, o quadrilátero juntamente com os segmentos formados pelos centros dos quadrados formados pelos lados. Foi pedido também que eles medissem os dois segmentos formados pelos centros dos quadrados. Para a maioria dos alunos, depois de feitas as medidas dos segmentos, foi encontrada uma pequena diferença de valores. Isso mostra a

dificuldade de entender a definição do teorema e de visualizar que ele pode ser aplicado em qualquer quadrilátero convexo ou não.

Os alunos, ao usar o software, mostraram interesse e aptidão para desenvolver a atividade de maneira rápida e com melhor entendimento da forma como se aplica a definição do teorema de Van Aubel. Porém, foi observado também que existiu uma falta de interesse dos alunos sobre como é feita a demonstração deste teorema, bem como sobre o que foi feito para provar que o resultado atingido é realmente válido em qualquer quadrilátero convexo ou não abordado. Isso mostra que os jovens estão, a cada ano que passa, mais focados apenas em como usar uma ferramenta que auxilie na construção de determinado problema ou atividade. Dessa forma, fica muito evidenciado que os alunos não demonstram interesse no conhecimento de como certas fórmulas foram planejadas e aplicadas em situações e atividades diferenciadas.

A atividade em si ocorreu de forma organizada e rápida, pois foram necessários pouco mais de trinta minutos para a aplicação da atividade e para que os alunos respondessem o questionário. Em geral, eles ficaram animados e, por isso, não ocorreu nenhum tipo de tumulto ou conversas desnecessárias, evidenciando, assim, que o software pode ser útil em algumas atividades a serem aplicadas em uma turma que apresenta alto índice de conversa e/ou indisciplina. Deve-se considerar também que o GeoGebra ajuda na concentração dos alunos, na rápida correção e visualização das figuras desejadas, tornando a aula mais participativa por parte dos alunos, diminuindo, assim, a possibilidade de conversas e comportamentos indesejados em sala de aula.

Pode-se dizer, com certeza, que o teorema de Van Aubel possui muitas variações ainda não abordadas, o que garante a possibilidade de futuras pesquisas em um campo extremamente rico, que é a Geometria Euclidiana. No ponto de vista didático, trata-se de um teorema de fácil visualização, que torna a aula mais atrativa e compreensível, fazendo com que seja possível aplicar esse teorema na forma de alguma atividade extracurricular, como, por exemplo, uma feira científica.

Dessa forma, os alunos poderiam demonstrar o uso do aplicativo GeoGebra, bem como suas funcionalidades. Assim, poderia-se aplicar o teorema de Van Aubel como uma atividade proposta, onde, para cada computador, haveria três alunos, para que assim otimizasse o tempo com a quantidade de jovens participando da atividade, mostrando a definição do teorema e o modo de como demonstrar que ele é válido através do uso do software.

Ao final deste trabalho, fica a expectativa de que os leitores tenham apreciado a proposta do trabalho, pois fornece a oportunidade de conhecer e de demonstrar uma nova variação do teorema não publicada antes. Sendo assim, espera-se que os colegas professores façam uso, em suas práticas pedagógicas, do que foi apresentado e da atividade proposta, objetivando, assim, um constante crescimento acadêmico e pessoal, capaz de propiciar o pleno desenvolvimento da aprendizagem de seus alunos.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLOG DO ENEM. **Ângulos na circunferência**. 2018. Disponível em: <<https://blogdoenem.com.br/angulos-na-circunferencia-matematica-enem/>>. Acesso em: 15 dez. 2018.
- BRAVIANO, G.; RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria Dinâmica: Uma nova geometria? **RPM: Revista do Professor de Matemática**, n. 49, p. 22-26, 2002.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2011.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.
- DOEIMAT. **Mediana**. 2011. Disponível em: <<https://doeimat.wordpress.com/2011/02/15/mediana/>>. Acesso em: 15 dez. 2018.
- FABOSSI, A.; SANTOS, T. "**Painéis**", Paineis 3: Um belo problema. Colégio FAAP Ribeirão. Ribeirão Preto/SP, 1999.
- IEZZI, G. et al. **Matemática**. Vol. Único. 6. ed. São Paulo:Atual, 2015.
- MASTROCHIRICO, R. **Condições para um Quadrilátero Convexo ser um Quadrilátero Pipa**. Mestrado Profissional (Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do ABC, Santo André/SP, 2013.
- MULYADI; MASHADI; HABIBIS, S.; HASRIATI. Pengembangan Teorema Van Aubel Pada Segienam. **Pendidikan Matematika**, PPs Universitas Riau, v. 2, n. 2, 2017. Disponível em: <<http://deacas.com/se/jurnal/index.php/JMP>>. Acesso em: 20 nov. 2018.
- NAGA, D.; KRISHNA, V. **A note on special cases of Van Aubel's theorem**. Department of Mathematics, Narayana Educational Institutions, Machilipatnam, Bangalore, India, 2016.
- NAGA, D.; KRISHNA, V. **A New Equilateral Triangle associated with Hexagon**. Department of Mathematics, Narayana Educational Institutions, Machilipatnam, Bangalore, India, 2016.
- NETO, A. C. M. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- NISHIYAMA, Y. **Beautiful Theorems of Geometry as Van Aubel's Theorem**. Department of Business Information, Faculty of Information Management, Osaka University of Economics, Osumi Higashiyodogawa, Osaka, Japan, 2010.
- PUTNOKI, J. C. Que se devolva a Euclides a régua e o compasso. **Revista do Professor de Matemática**, n. 13, p. 13-17, 1988.
- QUARTA POTÊNCIA. **Números complexos e exercícios resolvidos**. 2012. Disponível em: <<http://quartapotencia204.blogspot.com/2012/12/numeros-complexos-e-exercicios.html>>. Acesso em: 20 nov. 2018.

SÓFÍSICA. **Vetores**. 2008. Disponível em: <<https://www.sofisica.com.br/conteudos-/Mecanica/Cinematica/Vetores.php>>. Acesso em: 20 nov. 2018.

YOUTUBE. **El teorema de Van Aubel**. 2012. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=V1IT\\_1OLu8](https://www.youtube.com/watch?v=V1IT_1OLu8)>. Acesso em: 20 nov. 2018.

WIKIPEDIA. **Quadrilátero Cíclico**. 2018. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadril%C3%A1tero\\_c%C3%ADclico](https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadril%C3%A1tero_c%C3%ADclico)>. Acesso em: 20 nov. 2018.