UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROBERTO DO NASCIMENTO BATISTA

EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM VARIÁVEIS COMPLEXAS

CURITIBA

2019

ROBERTO DO NASCIMENTO BATISTA

EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM VARIÁVEIS COMPLEXAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: André Fabiano Steklain Lisbôa

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

B333e Batista, Roberto do Nascimento
Equações do 2º grau em variáveis complexas / Roberto do Nascimento Batista.-- 2018.
96 p.: il.

Disponível via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018 .
Bibliografia: p. 95-96.

1. Matemática - Dissertações. 2. Equações. 3. Equações quadráticas. 4. Formas quadráticas. 5. Números complexos. 6. Aprendizagem. 7. Prática de ensino. 8. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). I. Lisbôa, André Fabiano Steklain, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CURITIBA

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 57

A Dissertação de Mestrado intitulada "Equações do 2º grau em variáveis complexas", defendida em sessão pública pelo candidato Roberto do Nascimento Batista, no dia 07 de dezembro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. André Fabiano Steklain Lisbôa - Presidente – UTFPR

Prof. Dr. Andres David Baez Sanchez – UTFPR
Prof. Dr. Cristiano Torezzan - UNICAMP

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 07 de dezembro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente agradeço a Deus a oportunidade deste trabalho.
- Ao meu país pelo programa - PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática.
- À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pelo acolhimento e apoio.
- A todos os professores do curso, pelo incentivo e apoio. Em particular, ao Prof. Dr. André Fabiano Steklain Lisboa, pelas orientações sábias e ponderadas.
- Aos colegas de classe, em particular a Simone Venturi, pelos esclarecimentos oportunos.
- À minha família, pelo estímulo recebido.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

BATISTA, Roberto do Nascimento. EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM VARIÁVEIS COMPLEXAS. 73 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

Neste trabalho apresenta-se uma metodologia para o estudo de equações de segundo grau envolvendo variáveis complexas. Primeiramente é apresentado um histórico das equações de segundo grau e de números complexos. A seguir, apresenta-se o formalismo envolvendo as funções de segundo grau e números complexos. Por fim, é sugerida uma sequência didática para abordagem desta generalização da equação do segundo grau.

Palavras-chave: Equação do Segundo Grau; Função Quadrática; Números Complexos.

ABSTRACT

BATISTA, Roberto do Nascimento. QUADRATIC EQUATIONS ON COMPLEX VARIABLES. 73 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

In this work a methodology is presented to work on quadratic equations involving complex variables. Firstly, a history of the second-degree equations and complex numbers is presented. Following the formalism involving the functions of second degree and complex numbers is presented. Finally, a didactic sequence is suggested to approach this generalization of the quadratic equation.

Keywords: Quadratic equation; Quadratic function; Complex Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa aproximar a Geometria e a Álgebra na apresentação dos temas da Matemática, nos limites do currículo do Ensino Médio, no que se refere ao estudo da equação do segundo grau envolvendo variáveis complexas.

O trabalho está organizado da seguinte forma: a compreensão, significativa, da equação do 2º grau; a compreensão da linguagem algébrica na representação de problemas, bem como sua representação geométrica; estender conceitos utilizados em equações envolvendo números reais para outros corpos, como o dos números complexos. A interpretação das cônicas resultantes da análise do gráfico complexo como extensões do caso real.

A pesquisa histórica visa dar significado ao estudo proposto. A sequência didática apresentada tem ênfase na assimilação lógica e dedutível do tema. Destaca-se a demonstração da fórmula resolutiva da equação do 2º grau complexa a partir do mesmo procedimento utilizado para o caso real.

Além deste tratamento é proposta uma abordagem geométrica da função quadrática na tentativa de estender o conceito de parábola que normalmente é apresentado no contexto real. Para isso oferecemos duas abordagens diferentes, a primeira baseada no conceito de transformação e a segunda, no estudo dos gráficos das partes real e imaginária da função. Em ambos os casos é possível encontrar cônicas associadas a esta função.

Como núcleo central, apresentamos uma abordagem de maneira a estimular o pensamento lógico-dedutível, proporcionando aos educandos a compreensão do conteúdo não como um fim em si mesmo, mas como um meio para o desenvolvimento de competências e habilidades.

Assim, a importância da sequência didática apresentada não está tanto em seu produto final (o conhecimento formal), mas no seu desenvolvimento, pois abrange, as cinco competências básicas ou eixos cognitivos que compõem a matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Para maiores esclarecimentos destaca-se os itens abordados neste trabalho em consonância com os eixos cognitivos solicitados na Matriz de Referência do Enem:

> I - Dominar Linguagens (DL): ... fazer uso das linguagens matemáticas... II - Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento... [...]... de processos históricos-geográficos... III - Enfrentar situações-problema (SP): ... interpretar dados e informações representados de diferentes formas. IV - Construir argumentação (CA): ... construir argumentação consistente. V - Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade... (MEC, 2012).

Dessa forma, o presente trabalho está em conformidade com as expectativas das Matrizes de Referência do Enem, e este, por sua vez, atende à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em seu artigo 9º item VI:"assegurar processo nacional de avaliação do rendimento escolar...[...]...objetivando ...[...]...a melhoria da qualidade do ensino"(BRASIL, 1996). No entanto, o desenvolvimento dessas competências, só se efetiva,através da construção gradativa do conhecimento, no que concordamos plenamente com Ausubel: "a aprendizagem ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes,preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz"(AUSUBEL apud MOREIRA, 1999 p.151).

1 BREVE HISTÓRICO DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

O histórico a seguir pretende, em sua curta exposição, dar significado ao estudo da equação do 2º grau, percebendo-a como instrumento matemático na resolução de muitos problemas enfrentados pela humanidade desde eras remotas.

Garbi (2010) apresenta uma cronologia de matemáticos, dentre os quais destacam-se alguns que se dedicaram às equações do 2º grau:

- Pitágoras, de Samos: 586? - 500? a.C.
- Euclides, de Alexandria: 365? - 285? a.C
- Brahmagupta, de Ujjain: cerca de 630 d.C.
- Al-Khwarizmi, de Khwarezm: 850 - 930 d.C
- Sridhara, de Bengal: 991 - ?
- Bhaskara, de Biddur: 1114 - 1185
- Viéte, de Fontenary-de-Comte: 1540 - 1603
- Descartes, de la Haye: 1596 - 1650.

Os primeiros registros históricos referentes às equações do 2º grau, também chamadas quadráticas, remontam a cerca de dois mil anos antes de Cristo, conforme indicam textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia e papiros no Egito (PEDROSO, 2012). Em um destes papiros, conhecido como "Papiro de Moscou" e escrito cerca de 1890 a.C. está registrado o seguinte enunciado (BOYER, 2012; EVES, 2004):

"A área de um retângulo é 12 e altura é 3/4 da base. Quais são as dimensões?"

Este enunciado corresponde a um problema que envolve uma equação do 2º grau. De fato, a área A de um retângulo qualquer é dada por

$$A = b.h, \tag{1.1}$$

sendo b o comprimento da base e h a altura do retângulo. O problema fornece as seguintes informações:

$$A = 12,$$
$$h = \frac{3}{4}b.$$

Utilizando a fórmula para a área da Equação 1.1, temos

$$12 = b.\frac{3}{4}b = \frac{3}{4}b^2. \tag{1.2}$$

Trocando a notação b por x, o problema é correspondente a encontrar a incógnita x na seguinte equação quadrática:

$$\frac{3}{4}x^2 - 12 = 0.$$

O tratamento deste tipo de problema recebeu especial atenção dos babilônios, conforme escreve Boyer (2012)

> A solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para os egípcios, mas Otto Neugebauer em 1930 descobriu que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas. Por exemplo, um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. A solução desse problema, equivale a resolver $x^2 - x = 870$ (BOYER, 2012).

É interessante mencionar que os mesopotâmicos, cerca de 1800 - 1600 aC., utilizavam o sistema sexagesimal, ou seja, na base 60. Isto provavelmente ocorria pelo número de divisores que o número permite, "pois uma grandeza de 60 unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões." (BOYER, 2012). Os antigos babilônios também desenvolveram uma numeração posicional, de maneira que o número 14,30 na base sexagesimal, equivale ao nosso número 870, na base decimal. Transformando 14,30 para a base decimal, teremos $14.(60) + 30 = 870$ (BOYER, 2012).

Encontra-se entre textos cuneiformes, confeccionados pelos Babilônios, acerca de quatro mil anos, o problema de encontrar dois números sabendo-se sua soma s e seu produto p. Em Geometria, este equivale ao de se determinar os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro s e a área p (LIMA, 2013). Documentos históricos indicam que por volta de 2000 a.C "a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só resolviam equações quadráticas [...] como também se discutiam algumas cúbicas" (EVES, 2004). Tais relatos evidenciam a ancestralidade do uso das equações do 2º grau.

Fato interessante é que até as alterações propostas por François Viète e René Descartes, as resoluções das equações do 2º grau eram dadas em forma de "receitas" escritas. Por exemplo, para determinar o lado de um quadrado, se a área menos o lado é 14,30:

> Tome o metade de $1;00$, que é $0;30$, e multiplique $0;30$ por $0;30$, o que dá $0;15$; some isto a $14,30$, o que dá $14,30;15$. Isto é o quadrado de $29;30$. Agora some $0;30$ a $29;30$ e o resultado é 30, o lado do quadrado. (BOYER, 2012).

Os gregos (500 a 200 a.C.) deram um tratamento geométrico a muitos problemas matemáticos, inclusive à equação do 2º grau, como na Proposição 28 e 29, do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, conforme Eves (2004), além de vários exemplos de problemas relativos à equação do 2º grau. Também podemos observar em Boyer (2012), p.73: “... os gregos construíram a solução de equações quadráticas pelo processo conhecido como ‘aplicação de área’, uma parte da álgebra geométrica completamente estudada em Os Elementos, de Euclides.” Com Pitágoras e os pitagóricos a Matemática (nome criado por eles que significa "aquilo que é ensinado"), começa a ser formalizada. “Os pitagóricos descobriram formas criativas de se resolver, por meio de construções geométricas, problemas que hoje chamamos de algébricos” (GARBI, 2010).

Brahmagupta, nascido em 589 d.C, foi matemático e astrônomo. Em sua época, a solução das equações do 2º grau já era bem conhecida, mas é possível que tenha sido ele o primeiro matemático a enunciar as regras de solução destas equações com clareza e precisão (LINTZ, 2007).

Mohammed Ibn Musa al-Khwarizmi (Mohammed, filho de Moisés de Khwarizmi), árabe que viveu entre 780 a 850 d.C , escreveu *Hisob al-jabr wa’l muqabalah*, conhecido também como *Al-jabr*, que deu origem ao termo Álgebra (LINTZ, 2007). Para Lintz (2007), al-Khwarizmi pode ser considerado o "Cauchy dos árabes". O objetivo da “Álgebra” de al-Khwarizmi era ser um

> "... breve trabalho sobre cálculo pela complementação e redução, restringindo-me apenas ao que é mais fácil e útil em Aritmética, para as pessoas interessadas em resolver questões de herança, problemas legais, processos jurídicos, partilhas e o comércio em geral e demais atividades como cálculo de área de terras, construções de canais, cálculos geométricos e todas questões correlatas."(LINTZ, 2007)

A obra contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, em especial as de segundo grau (BOYER, 2012). O método de Al-Khwarizmi se baseia em duas operações chamadas *al-jebr* e *al-muqabala*. A palavra *al-jebr* literalmente significa “ligar”, “reunir” ou “restaurar”. O termo *al-muqabala* significa “oposição”, “transposição” ou “balanceamento”. O estudo das equações do 2º grau, objetivo principal de sua “Álgebra” , serviu como modelo de exposição algébrica. Al-Khwarizmi subdivide sua obra em três partes principais: na primeira parte ele dedica alguns capítulos à exposição das regras para a solução de diversas equações quadráticas; na segunda parte ele demonstra as regras usadas anteriormente, na terceira parte ele trata os demais tipos de problemas que se resolvem com equações quadráticas (LINTZ, 2007).

No capítulo I é apresentada a equação $x^2 = 5x$ cujo processo de resolução baseava-se na seguinte argumentação “se um quadrado é 5 vezes a raiz, então esta raiz é 5, cujo quadrado é 25”. No capítulo II é estudada a equação $x^2 = 9$ e no capítulo III a equação $4x^2 = 20$. Não são consideradas raízes negativas, pois eram esperadas, pelo contexto, soluções positivas (LINTZ, 2007). Neste caso entende-se a palavra “quadrado” como a raiz multiplicada por ela mesma, a qual é considerada como uma nova entidade com existência independente. O termo empregado era mal, significando “possessão” ou “tesouro”, o quadrado da quantidade desconhecida, x^2 (ROQUE, 2012). Então, ao escrever $x^2 = 2$, apenas se afirmava que um certo “quadrado” é igual a dois, consequentemente a “coisa”, ou x, existe, sendo 2 o seu quadrado. O termo $jidhr$

era utilizado para expressar a raiz (a incógnita, o x da questão) (ROQUE, 2012). Já a palavra "adad", quantidade conhecida, era reservada para o número, como por exemplo o 2, na equação acima. Nos capítulos IV, V e VI são tratados casos mistos, isto é, aqueles onde aparecem "raizes", "quadrados" e "números". Por exemplo, no capítulo IV estuda-se a equação:

$$x^2 + 10x = 39,$$

cujo tipo geral é

$$x^2 + bx = n.$$

A solução equivale ao uso da fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + n} - \frac{b}{2},$$

a qual "... não é demonstrada, indicando que seu uso já era prática corrente ente os matemáticos árabes."Os demais casos: $x^2 + n = bx$ e $bx + n = x^2$, são tratados nos capítulos V e VI de modo análogo (LINTZ, 2007). A Tabela 1 resume os termos utilizados por al-Khwarizmi.

Palavra	**Significado**	**Sentido nos problemas**	**Notação moderna**
adad		Quantidade conhecida (número dado)	c
jidhr	"raiz"	Quantidade desconhecida	x
mal	"tesouro"	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Tabela 1 – Termos utilizados por Al-Khowarizmi (ROQUE, 2012).

Al-Khwarizmi trata de seis tipos de equações, nas quais os coeficientes são sempre positivos (ROQUE, 2012):

- Quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$.
- Quadrados iguais a um número: $ax^2 = c$.
- Raízes iguais a um número: $bx = c$.
- Quadrados e raízes iguais a um número: $ax^2 + bx = c$.
- Quadrados e um número iguais a raízes: $ax^2 + c = bx$.
- Raízes e um número iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

Como exemplo, no quarto caso (quadrados e raízes iguais iguais a um número) é apresentado o seguinte enunciado:

"Um mal e dez jidher igualam trinta e nove denares."

Este enunciado corresponde à equação $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução era descrito da seguinte forma:

1. Tome a metade da quantidade do *jidher*: 5
2. Multiplique esta quantidade por si mesma: 25
3. Some ao resultado o *adad*: 25+39=64
4. Extraia a raiz quadrada do resultado: $\sqrt{64} = 8$
5. Subtraia deste resultado a metade do *jidher*, obtendo a solução: $8 - 5 = 3$

O quadro da Tabela 2 compara a solução de Al-Khwarizmi com o procedimento atual.

Solução dada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna, para uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de *jidhr*	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$(\frac{b}{2})^2$
Some ao resultado o *adad*	$25 + 39 = 64$	$(\frac{b}{2})^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c}$
Subtraia deste resultado a metade do *jidhr*, encontrando a solução	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$

Tabela 2 – Resolução das equações do tipo $ax^2 + bx = c$, por Al-Khwarizmi. Adaptado de (ROQUE, 2012).

Observa-se que a receita utilizada por Al-Khwarizmi para as equações citadas acima, está de acordo com a fórmula resolutiva que atualmente se emprega. A justificativa geométrica dos procedimentos algébricos, como ele afirma, "é um quadrado cujos lados são desconhecidos" (ROQUE, 2012). Considere, por exemplo, a Figura 1. Deve-se construir um quadrado, A que representa o *mal*, ou seja, o quadrado da raiz procurada. Junto a esse quadrado constrói-se dois retângulos B de lados x e 5. O desenho obtido deve possuir 39 unidades de área (o resultado encontrado é equivalente à proposição II.4 dos Elementos de Euclides). A seguir completa-se o desenho com um quadrado C de lado 5 (área 25) formando dessa maneira um quadrado cuja área é a soma das áreas de todos os polígonos e que possui área $39 + 25 = 64$. O lado do quadrado relativo a esta área é 8. A partir deste resultado obtém-se o valor de x subtraindo-se de 8 o lado do retângulo, ou seja, $8 - 5 = 3$. Roque (2012) faz uma observação muito interessante, indicando a contribuição dos árabes, ao afirmar :

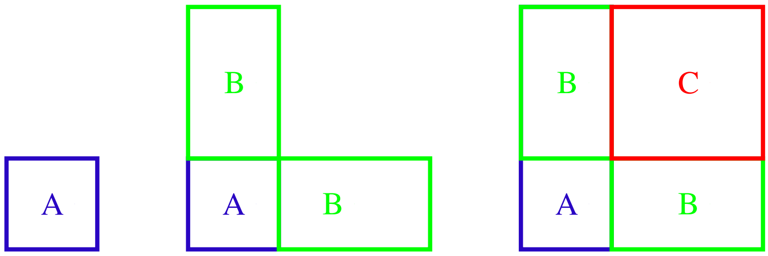


Figura 1 – Ilustração do primeiro caso de al-Khwarizmi.

Fonte – Adaptado de Roque (2012)

> “A justificativa geométrica apresentada por al-Khwarizmi não serve apenas para garantir a verdade do algoritmo ela nos faz compreender sua causa: a necessidade de completar o quadrado.Esse papel para uma argumentação geométrica, usado pelos árabes, era totalmente novo” (ROQUE, 2012).

A Figura 2 apresenta uma representação do sexto caso, que envolve raízes e um número iguais a quadrados, $bx + c = x^2$. Considere um quadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB} = x$ conforme a figura. Marque E sobre $\overline{AD}$, de maneira que $\overline{DE} = b$. Como $bx + c = x^2$, segue que o retângulo $ABFE$ é igual a c, pois o retângulo $EFCD$ possui área bx. Marque I, ponto médio de $\overline{DE}$, então $\overline{AI} = x - b/2$. A partir de AI construa o quadrado $AIKM$. A partir de EI, construir o quadrado $EIHG$. Os retângulos $GHKJ$ e $MJFB$ são congruentes, pois ambos são retângulos de lados $b/2$ e $x - b$, de forma que a soma das áreas de $AEJM$ e $GHKJ$ é igual à área de $ABFE$, ou seja, c. A partir da relação entre as áreas então fornece a equação a seguir:

$$\begin{aligned} S_{AIKM} &= S_{EIHG} + S_{AEJM} + S_{GHKJ} \\ \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \\ x - \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \\ x &= \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}. \end{aligned}$$

Abu-Kamil (850-930 d.C), foi um dos ilustres seguidores de al-Khwarizmi, conhecido como "o calculista egípicio". Ele retomou os tipos de equações do 2º grau tratadas por al-Khwarizmi, dando a elas um “tratamento muito mais completo e preciso” (LINTZ, 2007). Por exemplo, na equação:

$$x^2 + 21 = 10x$$

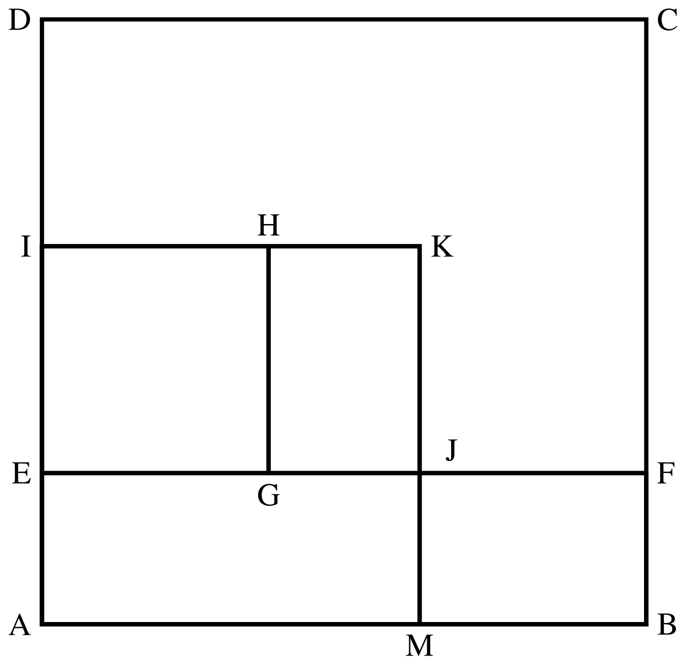


Figura 2 – Ilustração do sexto caso de Al-Khwarizmi.

Fonte – Adaptado de Lintz (2007)

Abu-Kamil emprega métodos algébricos equivalentes às fórmulas:

$$x_1 = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3$$
$$x_2 = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 7.$$

Abu-Kamil coloca em evidência as duas raízes, o que nem sempre era feito por al-Khwarizmi.

Sridhara, matemático indiano, por volta de 1020, produziu obras relacionadas à Aritmética e à Álgebra. O método que usava para resolver as equações quadráticas, era "essencialmente o mesmo usado pelos babilônios no 2º milênio a.C. e empregado pelos gregos em suas abordagens geométricas", o chamado "completamento do quadrado" (GARBI, 2010).

Abraham Bar Chiya era de origem judaica e natural de Barcelona. Em sua obra intitulada *Liber Embadorum*, encontra-se, "pela primeira vez, um texto latino contendo a solução completa da equação $x^2 + b = ax$, evidenciando a existência de duas raízes." (LINTZ, 2007).

Bháskara, também conhecido como Bháskara II ou Bháskara Acharya (significando Bháskara, o professor) nasceu em Bidur, Índia, e trabalhou no centro hindu de cultura, Ujjain, o qual havia um excelente observatório astronômico. Bháskara, além de astrônomo e matemático era também poeta e filósofo. Em uma de suas obras intitulada *Lilavati* há um estudo a respeito das operações elementares com inteiros, frações, regra de três e aplicações a problemas práticos sobre transações comerciais, estudos referentes a progressões aritméticas e geométricas, o uso, sem demonstrações, das regras de permutações e combinações, contendo inúmeras informações e processos algébricos da época, etc (LINTZ, 2007). Bháskara indica, como anteriormente fizera

Brahmagupta, o uso do zero, escrevendo $a + 0 = a$ e $a.0 = 0$, qualquer que seja a. Em outra obra, o *Bija-Ganta*, com uma álgebra mais avançada do que em *Lilavati*, menciona as operações com números negativos, entendidos como valores de débito ou perda. Equações do tipo $x^2 = a$, são tratadas de maneira precisa, apresentando duas raízes se a é positivo e nenhuma se a é negativa (LINTZ, 2007). Observa-se que na ocasião não se cogitava os números imaginários (complexos). Bháskara conhecia também identidades como

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

A obra de Bháskara, intitulada *Siddhanta Siromani* é dividida em quatro partes: *Lilavati*, *Bijaganita*, *Grahaganita*, e *Goladhyaya*, dedicados à aritmética, álgebra, astronomia e trigonometria esférica, respectivamente (ROQUE, 2012). Os problemas tratados por Bháskara eram enunciados e resolvidos em palavras, seguindo "receitas". Por exemplo,

> Verso 77: "De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?

Para resolver problemas desse tipo Bháskara usava o seguinte método. Primeiro, completar o quadrado (denominado "eliminação do termo médio"). No primeiro membro eram deixados a quantidade desconhecida, x, e seu quadrado, x^2, e no segundo membro o número (na linguagem atual, $ax^2 + bx = c$). A seguir forma-se no primeiro membro um quadrado perfeito. Para isso, ele dizia: "é por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados (que atualmente se escreve: $4a$) que é preciso multiplicar os dois membros" (ROQUE, 2012). Na linguagem atual, temos:

$$4a(ax^2 + bx) = 4ac,$$
$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac.$$

A seguir, recomendava: "e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas (ou seja, b^2) que é preciso adicionar". Obtém-se:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2,$$
$$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$$

O segundo passo é "diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros" , ou seja:

$$2ax + b = \pm\sqrt{4ac + b^2}.$$

Por fim, o terceiro passo é resolver a equação de primeiro grau, resultando:

$$2ax = -b \pm \sqrt{4ac + b^2},$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a}.$$

Roque (2012) considera um exagero atribuir a Al-Khowarizmi ou a Bháskara, a invenção da fórmula resolutiva da equação do segundo grau, pois não empregavam a simbologia atual. No entanto ela admite que "os métodos enunciados por Bháskara e Al-Khowarizmi permitem reduzir uma equação do segundo grau a uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$.". Além disso,

> Se traduzirmos o método usado por eles na linguagem algébrica atual e o aplicarmos a uma equação geral do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equação do segundo grau. Isto quer dizer que havia um método geral para resolução de equações, ainda que expresso por palavras. (ROQUE, 2012)

Provavelmente, essa tenha sido a razão da afirmação de (LINTZ, 2007) ao atribuir a Bháskara a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, embora a referida fórmula já fosse bem conhecida de Brahmagupta. Bháskara também estudou equações de grau superior ao 2º, com métodos puramente algébricos. Por exemplo, a equação

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

era resolvida adicionando-se $4x^2 + 400x + 1$ a ambos os membros:

$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2,$$

obtendo-se

$$x^2 + 1 = 2x + 100,$$

cujas raízes são $x_1 = -9$ e $x_2 = 11$ (LINTZ, 2007). As outras duas raízes correspondentes a $x^2 + 1 = -(2x + 100)$ são imaginárias e portanto, desprezadas por Bháskara. Bháskara também tratou de questões geométricas por métodos algébricos. Para Lintz (2007), Braskara pode ser considerado o "Gauss da cultura mágica !", em concordância com Boyer (2012), ao considerá-lo, "o mais importante matemático do século doze".

François Viète deu importantes contribuições à Álgebra ao introduzir uma simbologia apropriada aos entes matemáticos numa equação, ou seja:

> Usou uma vogal para representar,em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida. (BOYER, 2012)

Viète, também passou a simbolizar as potências usando uma mesma letra. Por exemplo, "Se A é a incógnita, seu quadrado era chamado $A\ quadratum$. Por exemplo, a equação que atualmente é escrita $x^2 + C = Bx$ seria escrita por Viète (fazendo $x = A$) como "$A\ quadratum$ + $C\ plano$ *aequatur* $B\ in\ A$". Nesta expressão *aequatur* significa "igual" e $B\ in\ A$, o produto BA (ROQUE, 2012). Viète, assim como Descartes, adotou o método analítico. Embora a argumentação denominada "análise" já houvesse sido empregada pelos gregos (ROQUE, 2012), Viète a reapresenta em sua obra intitulada *In Artem Analayticem Isagoge* (Introdução à Arte Analítica). O método analítico "define a suposição daquilo que procuramos" (ROQUE, 2012), x, a incógnita, com a qual se opera até se obter um valor válido (a menos que o problema não tenha solução), resolvendo assim a questão.

Viète aplicava a Álgebra como instrumento para a obtenção da solução em problemas geométricos. Por exemplo, seja a equação $A^2 + AB = D^2$, na linguagem atual, $x^2 + px = q^2$, extraído da obra intitulada *Effectionum geometricarum canonica recensio* (ROQUE, 2012). Viète desenvolveu a seguinte construção geométrica para a obtenção do segmento de medida A, a incógnita. Traça-se $MN = p$ e $TN = q$, perpendicular a MN, conforme a Figura 3. Seja O, o ponto médio de MN. Com centro em O, traça-se a circunferência de raio OT. Sejam R e S os pontos em que a circunferência intersecta a reta MN. Do triângulo RST, tem-se a relação:

$$TN^2 = RN.NS$$

o que equivale a:

$$\begin{aligned} q^2 &= (x + p)x, \\ q^2 &= x^2 + px, \\ D^2 &= A^2 + BA, \\ A^2 + AB &= D^2. \end{aligned}$$

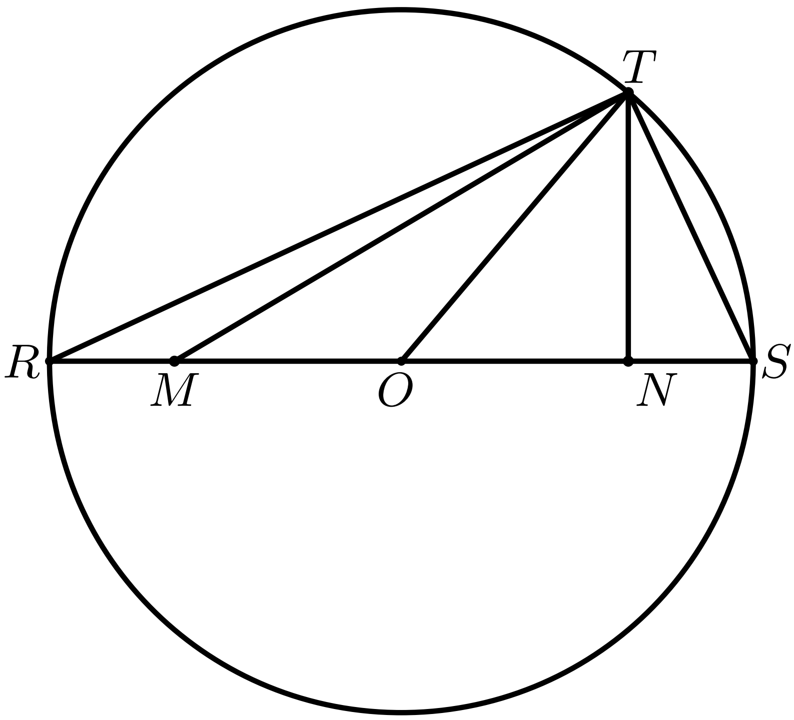


Figura 3 – Resolução geométrica da equação $A^2 + AB = D^2$.

Fonte – Adaptado de Roque (2012)

O uso da nova simbologia permitiu uma evolução na visualização dos termos, assim como o uso do método analítico. Para Viète a Matemática deveria ser "uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques" (BOYER, 2012).

René Descartes também se dedicou às equações do 2º grau por volta de 1628, no seu tratado *Discours de la méthode*. Esta obra contém "instruções detalhadas para resolver equações quadráticas, não no sentido algébrico dos antigos babilônios, mas geometricamente, um tanto à maneira dos gregos antigos." (BOYER, 2012). O objetivo de seu método era, por meio da álgebra, simplificar as construções geométricas, e, por outro lado, dar significado às operações algébricas por meio de interpretações geométricas. (BOYER, 2012). Garbi (2010) observa que Descartes escreveu suas equações de forma já inteligível aos matemáticos modernos. Foram usadas letras minúsculas do alfabeto: as primeiras $(a, b, c...)$ para as grandezas conhecidas e as últimas $(x, y, z...)$ para as desconhecidas. As potências acima de dois foram expressas por expoentes. Os sinais de soma e subtração já eram os atuais.O símbolo da raiz passou a ter um prolongamento indicando claramente o que era abrangido. Descartes passou a escrever suas equações igualando os polinômios correspondentes a zero, ou seja, na forma canônica, o que também passou a ser padrão, "não apenas por ser muito melhor do que os anteriores mas, também, por ter sido veiculado em seu livro que foi lido com admiração por toda a comunidade matemática da época". (GARBI, 2010). Por exemplo, a equação que atualmente se escreve $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$, foi por ele escrita $x^3 - 6xx + 13x - 10\infty 0$.

Roque (2012) analisa alguns casos de equações quadráticas tratadas por Descartes, demonstrando que a incógnita é um segmento de reta. Por exemplo, a equação $z^2 = az + b^2$ é representada na Figura 4.

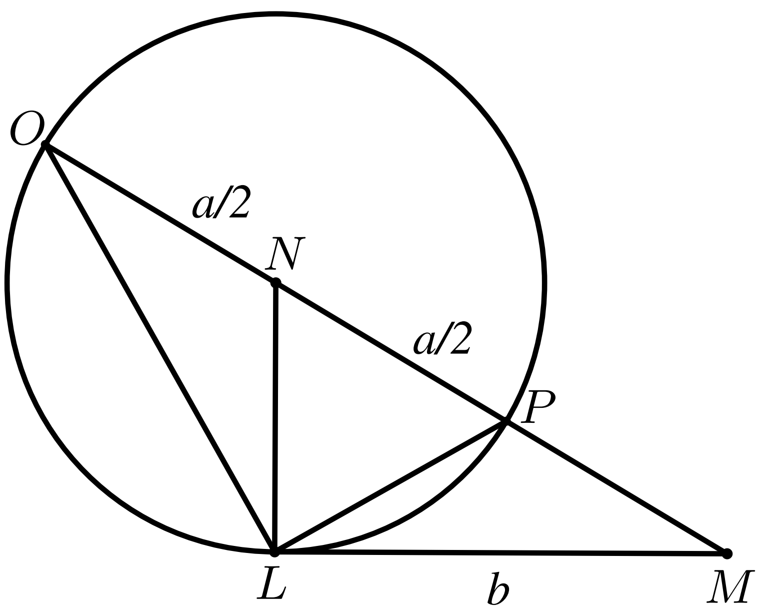


Figura 4 – Resolução geométrica da equação $z^2 = az + b^2$.

Fonte – Adaptado de Roque (2012)

Para mostrar esse resultado, inicialmente, constrói-se um triângulo retângulo NLM, reto em L, sendo $LM = b$ e $NL = \frac{a}{2}$. Traça-se a circunferência com raio $a/2$ e centro N. Ela corta MN em P e em O, no prolongamento de MN. Os triângulos OLM e LPM são semelhantes, pois o ângulo $L\hat{O}M$ e o ângulo $P\hat{L}M$, são ângulos inscritos e subentendem o mesmo arco LP, e o ângulo OML é comum. Desta maneira, obtém-se a seguinte proporção:

$$\frac{LM}{OM} = \frac{PM}{LM},$$

ou seja,

$$OM.PM = LM^2 \tag{1.3}$$

Se $OM = z$ e $PM = z - a$, substituindo em 1.3, têm-se:

$$z(z - a) = b^2$$

$$z^2 - az = b^2$$

Logo, $z^2 = az + b^2$.

Outra equação também tratada por Descartes, é $z = az - b^2$ (Figura 5). Como no exemplo anterior, a resolução inicia-se traçando o segmento $NL = \frac{a}{2}$ e $LM = b$, perpendiculares entre si.

Traça-se então uma reta MR paralela a NL passando por M. A seguir, traça-se uma circunferência de centro em N, passando por L, (de raio $a/2$) intersectando a reta MR em Q e R. Os segmentos de reta MR e MQ são as raízes da equação. De fato, os triângulos LRM e LQM são semelhantes. Os ângulos LRM e QLM são congruentes, pois são ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco LQ e o ângulo LMR é comum. Desta maneira pode-se construir a seguinte proporção:

$$\frac{LM}{QM} = \frac{RM}{LM},$$
$$LM^2 = QM.RM$$

Como $LM = b$ e admitindo $RM = z$, obtém-se:

$$b^2 = QM.z \tag{1.4}$$

Para obter-se QM em função de a e z, inicialmente obtém-se RQ em função de a e z. Como $NL = \frac{a}{2} = NQ = NR = OM$ e sendo O o ponto médio de RQ, tem-se:

$$RQ = 2(RM - NL),$$
$$RQ = 2(z - \frac{a}{2}),$$
$$RQ = 2z - a.$$

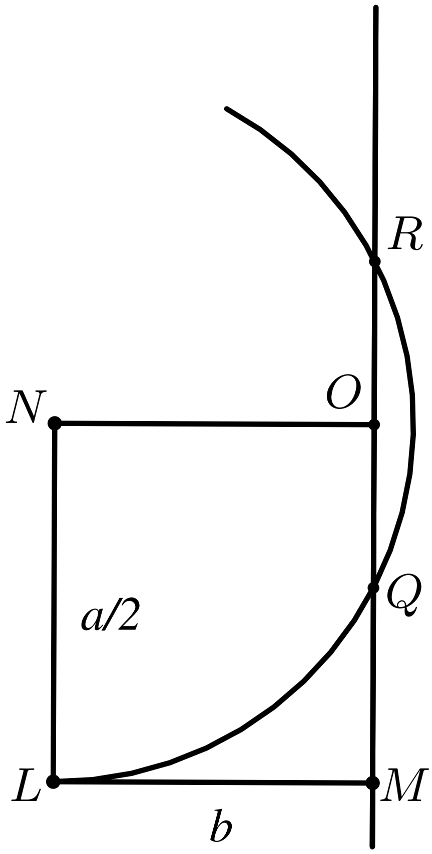


Figura 5 – Resolução geométrica da equação $z^2 = az - b^2$, por Descartes.

Fonte – Adaptado de Roque (2012)

Além disso,

$$QM = RM - RQ,$$
$$QM = z - (2z - a),$$
$$QM = z - 2z + a,$$
$$QM = a - z.$$

Substituindo em 1.4, obtém-se:

$$b^2 = (a - z)z,$$
$$b^2 = az - z^2,$$
$$z^2 = az - b^2.$$

Para deduzir a fórmula algébrica a partir da construção, aplica-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos NOR e NOQ. Além disso,

$$RM = RQ + QM,$$
$$z = 2\sqrt{\frac{1}{4}.a^2 - b^2} + a - z,$$
$$2z = a + 2\sqrt{\frac{1}{4}.a^2 - b^2},$$
$$z = \frac{1}{2}.a + \sqrt{\frac{1}{4}.a^2 - b^2}.$$

Para obter a outra raiz, se faz $MQ = z$. A partir da equação:

$$MQ = OM - OQ,$$

obtém-se

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Descartes aplicava a Álgebra na resolução de problemas de Geometria, o que propiciou o surgimento da Geometria Analítica tal como a conhecemos hoje (ROQUE, 2012).

No Século XVI a equação de 2º grau era bem conhecida, e era aceito o fato de que para algumas equações, não havia solução. Para isto a representação de Descartes era bastante útil, como pode ser visto na Figura 6. Nesta representação, as raízes da equação correspondem aos pontos em que o gráfico da função correspondente intersecta o eixo OX.

Ao contrário do que pode parecer, a motivação para o surgimento e estabelecimento dos números complexos começou não com o estudo das equações de 2º grau, mas sim das equações de 3º grau (cúbicas). Tartaglia (1500-1557) desenvolveu uma fórmula geral para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com p e q reais (BOYER, 2012). Esta fórmula foi posteriormente divulgada por Girolamo Cardano (1501-1576). A solução da equação cúbica $x^3 + mx = n$ descrita em sua *Ars Magna* é essencialmente a seguinte (EVES, 2004):

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}. \tag{1.5}$$

A equação cúbica, ao contrário da quadrática, sempre possui ao menos uma solução (STEWART, 2010). É fácil se convencer deste fato observando que a função cúbica é contínua e possui valores positivos e negativos, conforme ilustrado na Figura 7. Nesta caso permanecia a questão de qual era a natureza da solução expressa pela Equação 1.5.

Para ilustrar a dificuldade desta discussão, seja, por exemplo, a equação cúbica $x^3 - 15x = 4$. É fácil verificar que esta equação possui três soluções reais, a saber, $x = 4$, $x = -\sqrt{3} - 2$ e $x = \sqrt{3} - 2$. Ao se aplicar a fórmula de Cardano-Tartaglia, temos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{1.6}$$

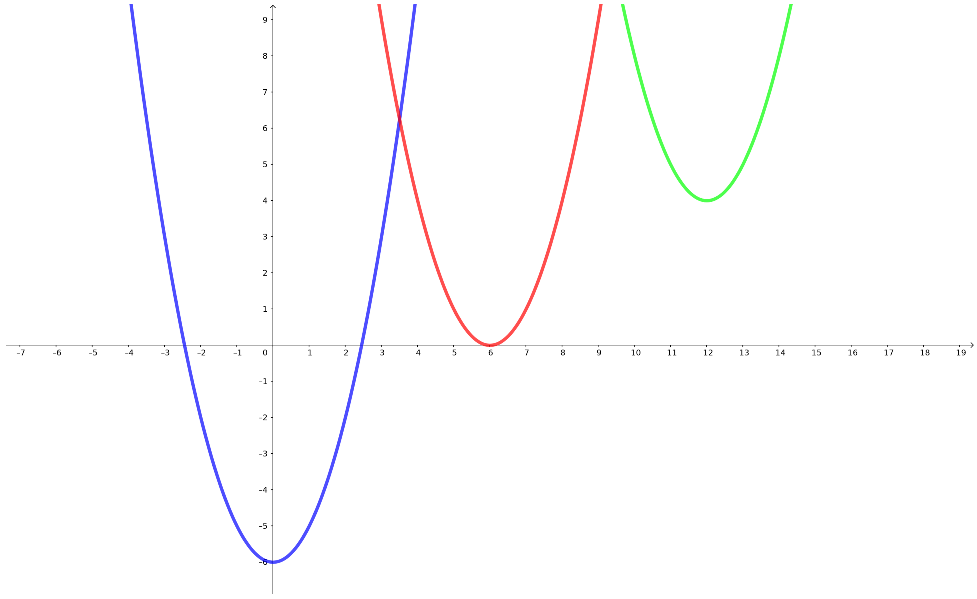
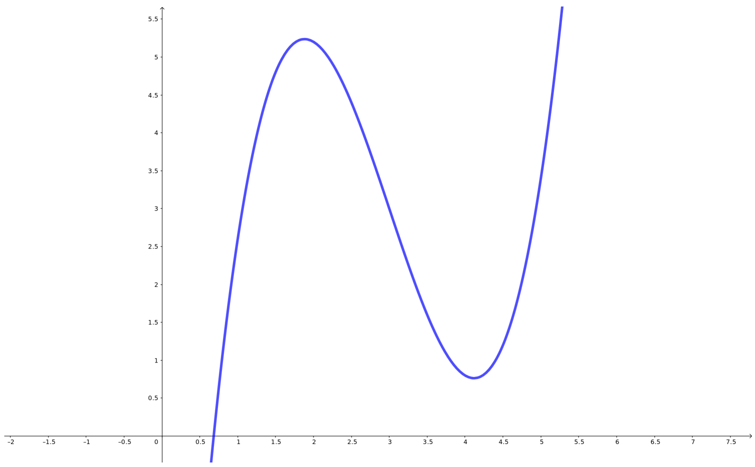


Figura 6 – Representação gráfica das raízes de equações de 2º grau. Em azul, a equação correspondente possui duas raízes distintas. Em vermelho, a equação correspondente possui uma única raiz. Em verde, a equação correspondente não possui solução.

Fonte – Autor

Figura 7 – Gráfico de uma função cúbica. Sempre existe ao menos um ponto em que o gráfico cruza o eixo OX.



Fonte – Adaptado de Roque (2012)

Existe um impasse nesta fórmula devido à presença das raízes negativas. Apesar disso, esta fórmula obrigatoriamente deve corresponder a um número real.

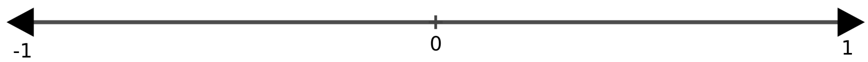
Para contornar este problema, um discípulo de Cardano, Rafael Bombelli (1526-1572) propôs considerar a raiz quadrada de -1 um número e desenvolveu regras operacionais que este número deveria obedecer (BOYER, 2012). Com base nestas operações é possível mostrar que, por exemplo, a solução 1.6 corresponde ao número real

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

Leonard Euler (1707 - 1783) posteriormente introduziu o símbolo i representando $\sqrt{-1}$ e passou a estudar números na forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais. Números nesse formato passaram a ser chamados *números complexos*.

Caspar Wessel (1745-1818) foi o primeiro matemático a apresentar uma representação gráfica para os complexos bastante próxima da que é utilizada hoje. No entanto, seu trabalho ficou praticamente esquecido. No final do século XVIII e início do século XIX, Jean-Robert Argand também propôs uma representação geométrica para os números complexos. Podemos entender esta representação iniciando pela representação dos números negativos (ROQUE, 2012).

Figura 8 – Representação dos números negativos de Argand.



Fonte – Adaptado de Roque (2012)

Na representação da Figura 8, multiplicar por -1, significa "mudar de sentido" , enquanto multiplicar por $+1$ significa "permanecer no mesmo sentido". Desta maneira, o número zero ganha um novo significado, o de ser um referencial. A multiplicação por -1, passa a ser vista como uma "reflexão em relação à origem" (ROQUE, 2012). Desta maneira, ao multiplicar-se $(+1)$ por (-1) obtém-se, por reflexão, (-1), e ao se efetuar a multiplicação de (-1) por (-1) , a mudança de sentido conduz novamente a $(+1)$. Desta forma, a representação proposta por Argand, torna compreensível as operações com os números negativos. Em seguida Argand amplia a representação das grandezas relativas (positiva e negativa) concebendo a meia proporcional entre $+1$ e -1, ou seja, como representar a proporção

$$\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$$

a qual fornece

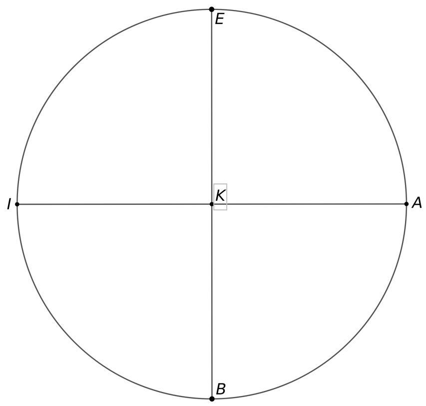
$$x^2 = -1,$$

$$x = - + \sqrt{-1}.$$

Argand encontrou a representação de x no diagrama ilustrado na Figura 9, onde KA e KI são segmentos orientados de K para A e de K para I e representam as grandezas unitárias positivas e negativas respectivamente.

Na sequência, traça-se uma perpendicular EN passando por K (ponto médio de IA). O segmento KA está para o segmento KE assim como KE, está para KI . Portanto, a condição de proporcionalidade exigida para a grandeza x é satisfeita por KE e KN , e podem ser vistas como

Figura 9 – Representação geométrica de $\sqrt{-1}$ por Argand.



Fonte – Adaptado de Roque (2012)

a representação geométrica de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$ (ROQUE, 2012). Dessa forma, a multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser entendida como uma rotação (de 90^o). O zero passa a ser um centro de rotação, de maneira que ao se multiplicar $(+1)$ (KA) por $\sqrt{-1}$ se obtém $+\sqrt{-1}$, representado pelo segmento KE , que por sua vez ao ser multiplicado por $\sqrt{-1}$ ($(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$) obtém -1 , representado pelo segmento KI , de forma análoga, KN passa representar $-\sqrt{-1}$, e fechando o ciclo o produto $(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1})$ resulta em $+1$ $(KA$).

Com isso Argand deu sua contribuição para que os números ditos “imaginários” fossem concebidos e admitidos como um novo conjunto numérico, o qual foi fundamentado nos trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e William Rowan Hamilton (1805-1865). Em 1831, Gauss, em sua obra *Theoria Residuirum Biquadraticorum Comentatio Secunda*, faz uma abordagem semelhante a Argand, justamente “devido à observação de que $+i$ e $-i$ podem se vistos como meias proporcionais entre $+1$ e -1” (ROQUE, 2012). Para Gauss as coisas contadas não devem ser consideradas “como substância, como objetos considerados em si mesmos, mas como relações entre esses objetos” (ROQUE, 2012). Conforme esclarece Gauss :

> É necessário que estes objetos formem, de algum modo, uma série como A, B, C, D, ... e que a relação que existe entre A e B possa ser vista como igual àquela que existe entre B e C e assim por diante. Essa noção de oposição implica ainda uma possível troca entre os termos da relação, operando de modo que, se a relação (ou passagem) de A a B é indicada por $+1$, a relação de B com A é indicada por -1 (ROQUE, 2012).

Ao concluir esse breve histórico, constata-se a importância da equação do 2º grau, que tem sido objeto da atenção de muitos matemáticos ao longo da História. Verifica-se, também, que a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, foi sendo construída e aperfeiçoada por muitos matemáticos no curso das civilizações. Apesar deste tipo de equação não ter sido o responsável direto pelo surgimento dos números complexos, muitas informações interessantes podem ser obtidas do estudo desta equação neste conjunto numérico.

2 A EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM COEFICIENTES REAIS

Chama-se *equação do 2º grau na incógnita* x toda equação que pode ser colocada na forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.1}$$

tal que os coeficientes a , b e c são constantes, tal que $a \neq 0$. No desenvolvimento a seguir vamos considerar $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Os *zeros* ou *raízes* da Equação 2.1 são os valores de x que tornam a equação verdadeira. Resolver a equação significa encontrar todas as suas raízes ou zeros.

Existe um método bem estabelecido para decidir se a equação de 2º grau possui raízes reais e, caso existam, determinar quais são. Contudo, antes de efetuar a dedução da fórmula resolutiva da equação de 2º grau, um estudo da forma canônica do trinômio é interessante. Considere o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]. \tag{2.2}$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $(x + \frac{b}{2a})^2$. Completando o quadrado, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \tag{2.3}$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \tag{2.4}$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau (conhecida como *forma canônica*) conduz imediatamente à formula que fornece as raízes da Equação 2.1. De fato,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0. \tag{2.5}$$

Dado que $a \neq 0$, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0. \tag{2.6}$$

Isolando-se o termo quadrático obtemos a seguinte igualdade:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \tag{2.7}$$

Estamos considerando apenas raízes reais como soluções da equação de 2º grau. Portanto, a existência de raízes fica condicionada ao valor(positivo, negativo ou nulo) do termo à direita na Equação 2.7. Este termo recebe o nome de *discriminante*, e é denotado

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.8}$$

Caso o discriminante da Equação 2.8 seja maior ou igual a zero é possível resolver a Equação 2.7 obtendo-se as seguintes soluções:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}. \tag{2.9}$$

Isolando-se a incógnita, finalmente, obtemos as seguintes soluções

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.10}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.11}$$

Caso $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes distintas dadas pelas equações 2.10 e 2.11. No caso $\Delta = 0$, no entanto, o termo dentro da raíz é nulo, e as duas soluções coincidem:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}. \tag{2.12}$$

Caso $\Delta < 0$ a equação não possui raízes reais. Note que o problema de se determinar o número de raízes (reais) distintas de uma equação de 2º resume-se a analisar se o discriminante da equação é positivo, negativo ou nulo.

Uma outra forma de determinar as raízes de uma equação do 2º grau é observar a relação existente entre estas e os coeficientes da equação. Supondo $\Delta \geq 0$, obtemos, para a soma das raízes:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}. \tag{2.13}$$

Para produto das raízes:

$$p = x_1.x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}. \tag{2.14}$$

As equações 2.13 e 2.14 são conhecidas como as *Fórmulas de Viète* para a equação do 2º grau. Utilzando estas fórmulas temos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - sx + p = 0.$$

Esta representação se mostra muito útil na resolução de problemas. Note que mesmo com $\Delta < 0$ é possível estabelecer a soma e o produto das raízes. No entanto, neste caso não existem dois números reais que satisfazem ambas as equações.

3 OS NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo z pode ser definido como um par ordenado (a, b) de números reais a e b, ou seja (CHURCHILL, 1899),

$$z = (a, b). \tag{3.1}$$

Dois números complexos são iguais se, e somente se, as partes real e imaginária são, respectivamente, iguais:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2 \tag{3.2}$$

Em particular, tem-se $z = (0, 0)$ se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$. Os números reais a e b são respectivamente a *parte real* e a *parte imaginária* de $z = (a, b)$. Denota-se

$$\Re(z) = a, \tag{3.3}$$

$$\Im(z) = b. \tag{3.4}$$

O *corpo* $\mathbb{C}$ dos números complexos é definido considerando o conjunto destes pares ordenados em conjunto com as seguintes operações de soma e multiplicação:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \tag{3.5}$$

$$z_1.z_2 = (a_1, b_1).(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1). \tag{3.6}$$

O fato que os números complexos formam um corpo pode ser demonstrado através da utilização das operações acima e das propriedades dos números reais. No Apêndice A esta demonstração pode ser encontrada.

O par $(a, 0)$ é identificado com o número real a, ou seja,

$$(a, 0) = a. \tag{3.7}$$

Desta forma, os números reais podem ser identificados como um subconjunto dos números complexos. De fato, as operações dos números reais são resgatadas:

$$a_1 + a_2 = (a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0), \tag{3.8}$$

$$a_1.a_2 = (a_1, 0).(a_2, 0) = (a_1a_2 - 0.0, a_1.0 + a_2.0) = (a_1a_2). \tag{3.9}$$

O número $(0, 1)$ é definido como *unidade imaginária* e denotado por i, ou seja,

$$(0, 1) = i. \tag{3.10}$$

Uma propriedade de i é a seguinte:

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{3.11}$$

Ou seja, ele está relacionado com a raíz de -1. Um número do tipo $(0, b)$ é denominado número imaginário puro. Utilizando esta notação, o número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito como

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Neste caso as operações entre números complexos podem ser escritas como

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \tag{3.12}$$

$$z_1.z_2 = (a_1 + b_1 i).(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{3.13}$$

A partir da definição de produto e soma entre números complexos é possível introduzir também a *subtração* e a *divisão* entre os números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \tag{3.14}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2}\right) i, \tag{3.15}$$

supondo, na Equação 3.15, que $z_2 \neq 0$.

3.1 O PLANO COMPLEXO

O plano no qual se representa os números complexos chama-se plano complexo, ou plano de Argand-Gauss. O ponto P pertencente a este plano e correspondente a um número complexo z é chamado de *afixo* de z . O plano complexo está ilustrado na Figura 10. Dado $z = a + bi$, a parte real de z é demarcado no eixo real, e a parte imaginária, no eixo imaginário. Além da representação dos números complexos por pontos no plano, também é muito frequente a representação por meio de vetores de componentes a e b (ÁVILA, 2008).

É possível efetuar a soma ou a subtração de complexos através das conhecidas regras do paralelogramo, conforme ilustrado nas Figuras 11 e 12.

3.2 O COMPLEXO CONJUGADO

Chama-se conjugado de um número complexo $z = a + bi$ o número complexo

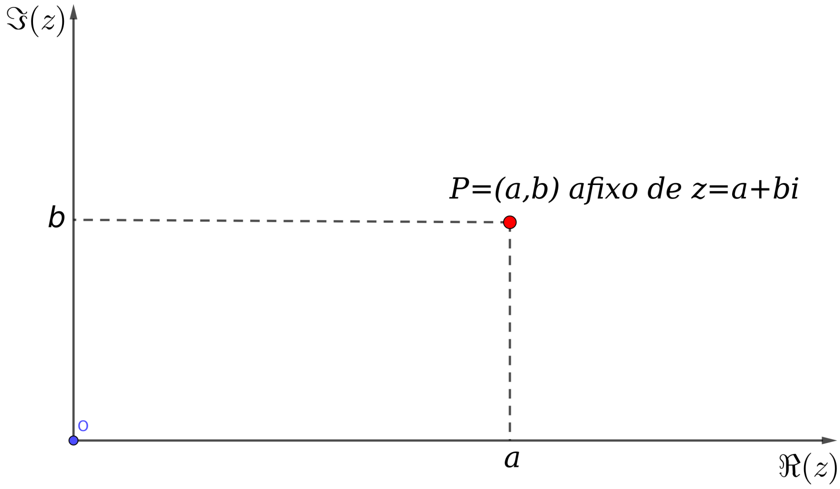
$$\bar{z} = a - bi \tag{3.16}$$

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é muito útil nas operações, pois resulta em um número real não negativo:

$$z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

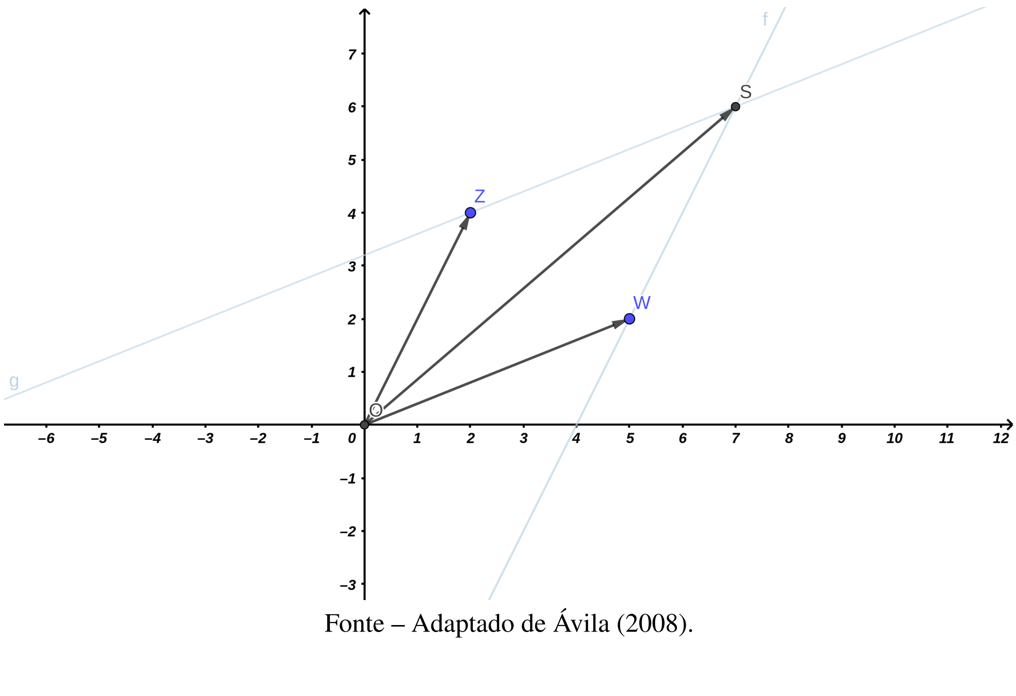
A representação do conjugado de z no plano complexo é dada pela reflexão de z em torno do eixo real, conforme pode ser visualizado na Figura 13.

Figura 10 – Representação de um número complexo no plano Argand-Gauss.



Fonte – Adaptado de Diniz (2010).

Figura 11 – Representação da soma de números complexos no plano Argand-Gauss.

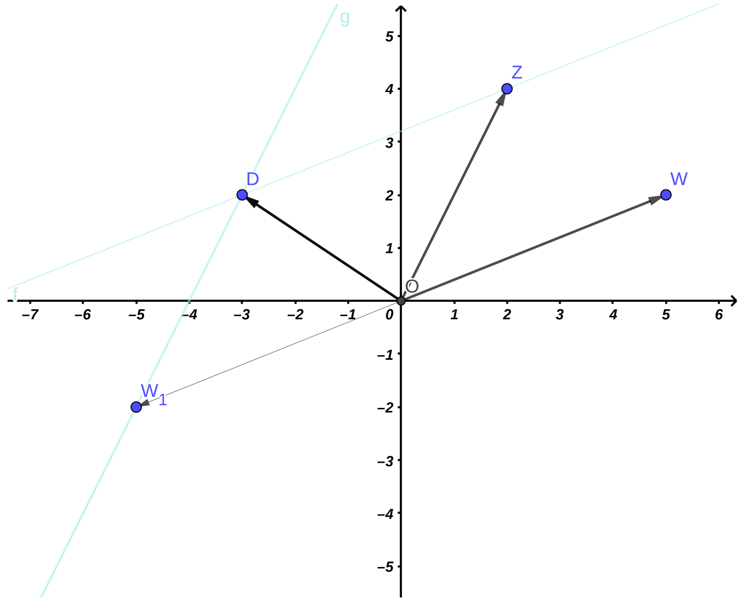


Fonte – Adaptado de Ávila (2008).

3.3 A FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

Assim como um ponto do plano $\mathbb{R}^2$ pode ser representado por coordenadas polares, os números complexos também podem ser representados na forma *polar*, ou *trigonométrica*. Utiliza-se, para isso, a distância do ponto P, afixo de z, até a origem do plano complexo e o ângulo que o vetor correspondente ao ponto P faz com o eixo real, conforme a Figura 14. Estas quantidades correspondem ao *módulo* e *argumento* de z definidos a seguir.

Figura 12 – Representação da subtração de números complexos no plano Argand-Gauss.



Fonte – Adaptado de Ávila (2008).

O módulo do número complexo $z = a + bi$ é definido como a distância do seu afixo até a origem, ou seja,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.17}$$

É importante notar que, em função do complexo conjugado $\bar{z}$ temos

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{3.18}$$

Note que, na representação do plano complexo, a origem O, o ponto $P = (a, b)$, afixo de $z = a + bi$, e o ponto do eixo real $(a, 0)$ formam um triângulo retângulo, cujos catetos medem a e b e a hipotenusa, $|z|$. Tomando o ângulo θ que o segmento OP faz com o eixo real, temos denotando $r = |z|$:

$$a = r\cos\theta, \tag{3.19}$$

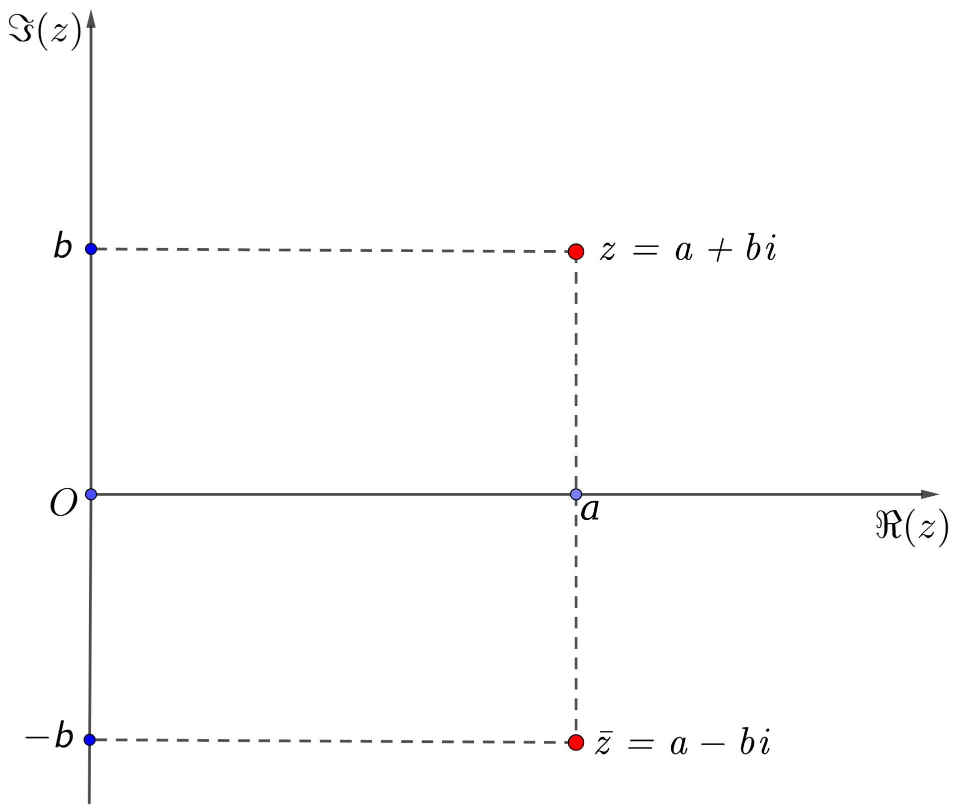
$$b = r\sin\theta. \tag{3.20}$$

Utilizando este resultado, pode-se escrever o número complexo z como

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{3.21}$$

Esta é a chamada forma trigonométrica ou polar do complexo z. A esse respeito Diniz (2010) observa que a representação do número $z = a + bi$ no plano complexo permite visualizar o ângulo θ , tomado em radianos, orientado no sentido anti-horário, ou seja, positivo. A esse ângulo dá-se o nome de argumento z, denotado por $\arg(z)$, o qual deve satisfazer as seguintes

Figura 13 – Representação do conjugado de números complexos no plano Argand-Gauss.



Fonte – Adaptado de Ávila (2008).

condições, para $z \neq 0$:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}, \tag{3.22}$$

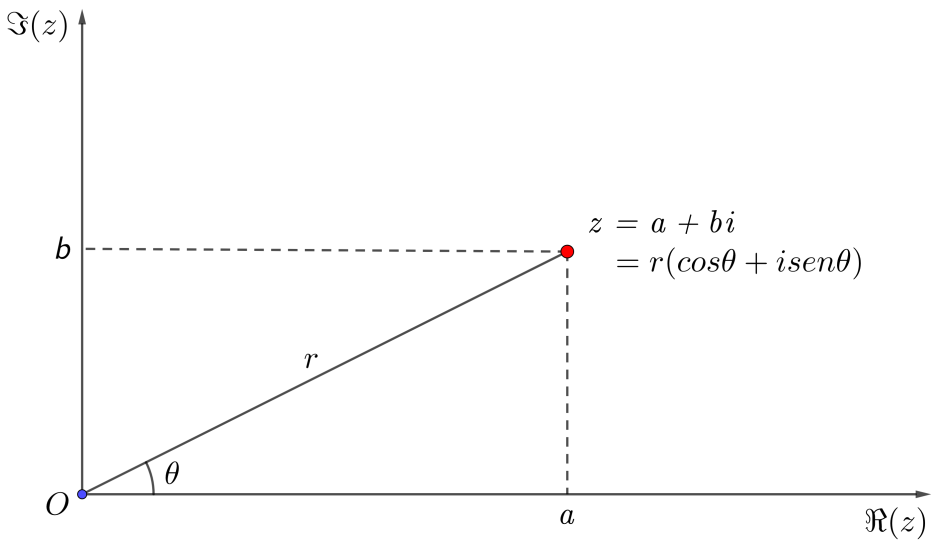
$$\sin\theta = \frac{b}{|z|}. \tag{3.23}$$

Note que, nesta representação, $0 \leq \theta < 2\pi$. No entanto, tomando $\phi = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$r(\cos\phi + i\sin\phi) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z. \tag{3.24}$$

Ou seja, a função $\arg(z)$ referente ao argumento do número complexo z pode ser consistentemente definido como qualquer ângulo da forma $\theta + 2k\pi$, com $0 \leq \theta < 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. É, portanto, uma função que pode assumir diversos valores para cada elemento do domínio, sendo, portanto, um exemplo de função *multivalente*.

Figura 14 – Representação polar de um número complexo.



Fonte – Adaptado de Ávila (2008).

Para o caso trivial $z = 0$ temos, univocamente, $|z| = 0$ e o argumento é totalmente indefinido. De fato, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ temos

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = 0.$$

3.4 RAÍZES DE NÚMEROS COMPLEXOS

Sejam dois números complexos z e w, dados na forma trigonométrica por

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

e

$$w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Churchill (1899), na p.10, demonstra que a multiplicação $z.w$ é dada por

$$z.w = |z|.|w|\left[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right] \tag{3.25}$$

Uma observação relevante, que será utilizada, ao se tratar da generalização da fórmula resolutiva da equação do 2ºgrau, é que,

$$\arg(z.w) = \arg z + \arg w \tag{3.26}$$

A partir desta operação é possível demonstrar por indução a relação que estabelece, para $z = r(\cos\theta + i\ sin\theta)$,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i.\sin n\theta), \tag{3.27}$$

$n \in \mathbb{N}$. De fato, a fórmula vale para $n = 1$. Supondo que vale para k, para $k + 1$ temos

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k.z = r^k.r\left[\cos\left(k\theta + \theta\right) + i\sin\left(k\theta + \theta\right)\right] \\ &= r^{k+1}\left[\cos\left((k+1)\theta\right) + i\sin\left((k+1)\theta\right)\right], \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. verificar-se que a mesma relação vale para inteiros negativos, isto é,

$$z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i.\sin(-n\theta)\right], \tag{3.28}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a Equação 3.27 vale para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Para $|z| = 1$ temos a seguinte relação:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i.\sin n\theta),$$

conhecida como *Fórmula de de Moivre*.

Vamos agora considerar o problema inverso, ou seja, dado um número complexo $w \neq 0$ encontrar os números complexos z tais que

$$z^n = w. \tag{3.29}$$

Uma análise da Equação 3.27 permite perceber que, se w é um número complexo dado na forma trigonométrica por

$$w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{3.30}$$

tal que $0 \leq \phi < 2\pi$, o número dado por

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n}\right)\right] \tag{3.31}$$

é solução da Equação 3.29. De fato,

$$z_0^n = (\sqrt[n]{\rho})^n\left[\cos\left(n\frac{\phi}{n}\right) + i\sin\left(n\frac{\phi}{n}\right)\right] = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = w.$$

No entanto, temos que w também pode ser escrito como

$$w = \rho\left[\cos\left(\phi + 2k\pi\right) + i\sin\left(\phi + 2k\pi\right)\right], \tag{3.32}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, os números complexos z_k dados por

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{3.33}$$

com $k \in \mathbb{Z}$, também são soluções da Equação 3.29. Ao passo que diferentes valores de k resultam no mesmo k, eles resultarão em n valores diferentes de z. As diferentes raízes de w se ditribuem em uma circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$, e a diferença entre duas raízes sucessivas é

$$\delta = \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = \frac{2\pi}{n}.$$

Em particular, para a raíz quadrada, $\delta = \pi$. Ou seja, existem apenas duas raízes distintas. Se uma delas é $z_0 = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]$, a outra será

$$z_1 = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right)\right] = -z_0.$$

Uma outra forma para se calcular as raízes quadradas de um número complexo é proposta por Araújo (2014). Neste trabalho, dado um número complexo, $w = a + bi$, a raiz quadrada de w, é um número complexo z, tal que $z = u + vi$, então,

$$z = \pm\sqrt{w} \tag{3.34}$$

$$z^2 = w \tag{3.35}$$

$$(u + vi)^2 = a + bi \tag{3.36}$$

$$u^2 + 2uvi + v^2 i^2 = a + bi \tag{3.37}$$

$$u^2 - v^2 + 2uvi = a + bi \tag{3.38}$$

Pela igualdade de dois números complexos, tem-se,

$$u^2 - v^2 = a \tag{3.39}$$

$$2uv = b \tag{3.40}$$

Isolando-se u na equação (1.40), obtém-se,

$$u = \frac{b}{2v} \tag{3.41}$$

E substituindo na equação (1.39), obtém-se,

$$\left(\frac{b}{2v}\right)^2 - v^2 = a \tag{3.42}$$

$$\frac{b^2}{4v^2} - v^2 = a \tag{3.43}$$

$$\frac{b^2 - 4v^4}{4v^2} = a \tag{3.44}$$

$$b^2 - 4v^4 = 4av^2 \tag{3.45}$$

$$4v^4 + 4av^2 - b^2 = 0 \tag{3.46}$$

Portanto, obtém-se uma equação biquadrada (1.46), fazendo-se $v^2 = x$, reescreve-se,

$$4x^2 + 4ax - b^2 = 0 \tag{3.47}$$

Assim,

$$\Delta = 16a^2 - 4(4)(-b^2) \tag{3.48}$$
$$\Delta = 16a^2 + 16b^2 \tag{3.49}$$
$$\Delta = 16(a^2 + b^2) \tag{3.50}$$

Portanto,

$$x = \frac{-4a \pm \sqrt{16(a^2 + b^2)}}{8} \tag{3.51}$$
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{3.52}$$
$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{3.53}$$
$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{3.54}$$

Como $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$, tem-se que $x_2 < 0$, o que implica que $v^2 = x_1$.

$$v^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{3.55}$$

Substituindo v^2 na equação (1.39), tem-se,

$$u^2 - \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right) = a \tag{3.56}$$
$$u^2 = a + \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{3.57}$$
$$u^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \tag{3.58}$$
$$u = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \tag{3.59}$$

Observe na equação (1.40),

$$b = 2uv \tag{3.60}$$
$$v = \frac{b}{2u} \tag{3.61}$$

que se u é positivo, então v tem o mesmo sinal de b. E se u é negativo, então v tem sinal oposto ao de b. Tomando-se u positivo, ou seja ,

$$u = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \tag{3.62}$$

Então, uma das raízes de $a + bi$, pode ser calculada pela fórmula,

$$z_+ = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + sig(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i, \tag{3.63}$$

onde $sig(b)$ é o sinal de b. A outra raíz, conforme já exposto, é $z_- = -z_+$. Estas raízes relacionam-se com z_0 e z_1 da seguinte forma:

$$z_+ = \begin{cases} z_0, & 0 \leq \theta < \pi, \\ z_1, & \pi \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Note que,

$$\sqrt{w} = z \tag{3.64}$$

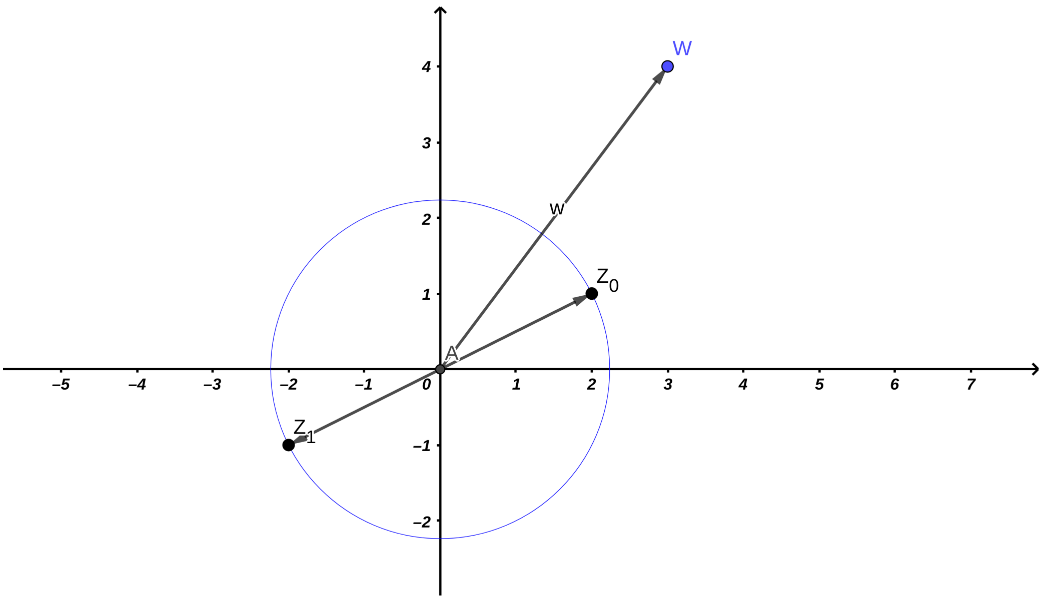
$$w = z^2 = (-z)^2 \tag{3.65}$$

Isso mostra que $-z$ é raiz de w, então a outra raiz é $-z$. Por exemplo, as raízes de $3 + 4i$, são,

$$\sqrt{3 + 4i} = \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} - 3}{2}}i = 2 + i \tag{3.66}$$

e $-(2 + i) = -2 - i$. A seguir as representações das raízes quadradas de $3 + 4i$, figura 15,

Figura 15 – Representação geométrica, da raízes quadradas de $3 + 4i$



Fonte – Autor

4 EXPLORAÇÕES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COMPLEXA

4.1 GENERALIZAÇÃO DA FÓRMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO DO 2ºGRAU

Nas discussões sobre a fórmula resolutiva da equação do 2ºgrau, considera-se normalmente uma equação quadrática com coeficientes reais. Mesmo durante a introdução das soluções complexas o estudo é restrito a este caso. Nos cursos de variáveis complexas, por sua vez, aborda-se apenas o caso simples $z^2 = a$.

A abordagem da equação quadrática genérica com coeficientes complexos normalmente não é abordada nos livros. Este tema possui relevância por fazer a conexão entre a equação do 2º grau e as raízes complexas. Em particular, é possível construir uma generalização da fórmula de resolutiva da equação do 2ºgrau e demonstrar a existência de soluções desta equação.

Considere a equação quadrática

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{4.1}$$

Sendo a, b, c, z, números complexos, com a diferente de zero. Podemos fazer um desenvolvimento similar ao do Capítulo 2:

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= 0 \\
az^2 + bz + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c &= 0 \\
z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\
z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}
\end{aligned}$$

A seguir é necessário utilizar o conceito de raíz complexa.(Tratado na seção intitulada : Raízes de Números Complexos). Assim, de pode escrever o lado direito da equação acima, na sua forma polar, ou seja,

$$\frac{\Delta}{4a^2} = |\frac{\Delta}{4a^2}|(\cos\theta + i\sin\theta) = \left|\frac{\Delta}{4a^2}\right| e^{i\theta} \tag{4.2}$$

Onde

$$\theta = \arg\frac{\Delta}{4a^2} = \arg\Delta - \arg 4a^2 \tag{4.3}$$

$$\theta = \arg\frac{\Delta}{4a^2} = \arg\Delta - (\arg 4 + \arg a + \arg a) \tag{4.4}$$

Como o $\arg 4 = 0$, obtém-se,

$$\theta = \arg\Delta - 2\arg a \tag{4.5}$$

As raízes, portanto, são dadas na forma

$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{4a^2}\right|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)\right] \tag{4.6}$$

Sendo $k = 0, 1$. Para $k = 1$, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -\cos\frac{\theta}{2} \tag{4.7}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -\sin\frac{\theta}{2} \tag{4.8}$$

Portanto, as soluções da equação quadrática são dadas na forma

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{4.9}$$

Churchill (1899),p.47 , demonstra que um número complexo, W, pode ser representado, como segue,

$$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = |w|e^{i\theta} \tag{4.10}$$

Então é possível simplificar a fórmula resolutiva da equação do 2ºgrau (3.9), através da propriedade (3.10) acima mencionada. Temos,

$$z = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|}e^{i\frac{\theta}{2}} \tag{4.11}$$

Substituindo θ conforme (3.5), e utilizando as propriedades de potências de mesma base, pode-se reescrever,

$$e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\arg\Delta - 2\arg a}{2}} = e^{i(\frac{\arg\Delta}{2} - \arg a)} = \frac{e^{i\frac{\arg\Delta}{2}}}{e^{i\arg a}} \tag{4.12}$$

Então, a fórmula (3.11), pode ser reescrita, como segue,

$$z = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|} \left(\frac{e^{i\frac{\arg \Delta}{2}}}{e^{i \arg a}} \right) \tag{4.13}$$

Temos que $a = |a|e^{i \arg a}$. portanto,

$$z = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} e^{i\frac{\arg \Delta}{2}}. \tag{4.14}$$

Vamos considerar as raízes complexas de Δ de fato, se $w^2 = \Delta$, temos

$$w = \sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|} e^{i\frac{\arg \Delta + k\pi}{2}}, \tag{4.15}$$

para $k = 0, 1$. Ou seja,

$$w = \pm\sqrt{|\Delta|} e^{i\frac{\arg \Delta}{2}}, \tag{4.16}$$

Ou seja, existe apenas uma indefinição quanto ao sinal, que pode ser incorporada facilmente na equação (4.14). Vamos denotar por $\sqrt{\Delta}$ a raíz relativa a $k = 0$, conforme a Seção 3.4. Desta forma, obtemos a fórmula de Báshara complexa:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{4.17}$$

Esta fórmula é basicamente a mesma utilizada no caso de uma equação real. Da mesma forma como se opera com os números reais, calcula-se uma das raízes complexas de Δ e então aplica-se o restante da fórmula.

Para que fique claro o procedimento, vamos estudar um exemplo. Vamos encontrar as raízes da equação

$$z^2 + (2 - i)z - 2i = 0. \tag{4.18}$$

Vamos primeiro calcular o discriminante Δ:

$$\Delta = (2 - i)^2 - 4.1.(-2i) = 4 - 4i + i^2 + 8i = 3 + 4i \tag{4.19}$$

Uma das raízes de Δ pode ser encontrada pela equação (3.63), lembrando, ainda, que a segunda parcela da fórmula refere-se à quantidade de partes imaginária,i, ou seja,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} - 3}{2}} = 2 + i. \tag{4.20}$$

Portanto, as raízes da equação são dadas por

$$z = \frac{-(2 - i) \pm (2 + i)}{2}. \tag{4.21}$$

Efetuando o restante dos cálculos encontra-se que as raízes são i e -2.

O desenvolvimento da equação de 2ºgrau complexa exige conhecimento sobre raízes complexas, que nem sempre é abordado nos cursos do Ensino Médio. Todavia, a “receita” apresentada é bastante simples e pode ser implementada com um mínimo de conhecimento sobre números complexos. É importante notar a existência de raízes para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{C}$. Outras equações baseadas em extensões complexas da função quadrática podem não apresentar este mesmo comportamento, como o caso apresentado no Apêndice B.

4.2 CÔNICAS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA COMPLEXA

Conforme visto, o gráfico de uma função quadrática real é uma parábola. Ao se fazer a extensão para os números complexos é interessante mostrar o que ocorre com estas estruturas. Neste sentido são apresentados dois tipos de explorações, mostrados a seguir.

4.2.1 TRANSFORMAÇÃO DE UMA RETA

Assim como uma função de uma variável real leva números da reta real para outro conjunto dos reais, as funções de uma variável complexa podem ser interpretadas como transformações que levam pontos de um plano complexo para outro. No Apêndice C é fornecida a demonstração para o fato que, dada uma reta no plano complexo z, ao se aplicar a função, $w = f(z) = z^2$, obtém-se uma parábola no plano complexo w, sendo que em alguns casos esta parábola é degenerada em uma semi-reta (por exemplo, para a reta $z = t$, $t \in \mathbb{R}$).

Considere,inicialmente, uma reta r formada por números complexos, num plano z, que passa pelos pontos $A(a, b)$ e $B(a', b')$. Utilizando-se das representações paramétricas, considere também um ponto $P(x, y), \in r$, e $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$P = A + t(AB) \tag{4.22}$$

$$(x, y) = (a, b) + t(a' - a, b' - b) \tag{4.23}$$

$$r : x = a + t(a' - a) \tag{4.24}$$

$$y = b + t(b' - b) \tag{4.25}$$

A figura 16, a seguir representa a relação entre o vetor (AB) e o ponto P na reta r :

Por exemplo, a reta que passa pelos pontos $A(4, 1)$ e $B(-1, 2)$. Sua equação na forma paramétrica tem como vetor, AB cujas coordenadas são $(-5, 1)$, como segue :

$$P(x,y) \in r, t \in \mathbb{R} \tag{4.26}$$
$$(x,y) = (4,1) + t(-5,1) \tag{4.27}$$
$$r : x = 4 - 5t \tag{4.28}$$
$$y = 1 + t \tag{4.29}$$

Considerando $z = x + yi$ e aplicando a transformação $w = f(z) = z^2$, obtém-se:

$$z = x + yi \tag{4.30}$$
$$z = (4 - 5t) + (1 + t)i \tag{4.31}$$
$$z^2 = [(4 - 5t) + (1 + t)i]^2 \tag{4.32}$$
$$z^2 = (4 - 5t)^2 + 2(4 - 5t)(1 + t)i + (1 + t)^2 i^2 \tag{4.33}$$
$$z^2 = 24t^2 - 42t + 15 + (-10t^2 - 2t + 8)i \tag{4.34}$$

Como $w = u + vi$, onde:

$$u(t) = 24t^2 - 42t + 15 \tag{4.35}$$
$$v(t) = -10t^2 - 2t + 8 \tag{4.36}$$

A figura **??**, permite visualizar um gráfico parabólico construído pela função $w = f(z) = z^2$, conforme dados mencionados acima.

4.2.2 USO DA PARTE REAL E IMAGINÁRIA

Sabe-se que uma função de uma variável complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode ser dada por

$$f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

sendo as funções u e v respectivamente as partes real e imaginária da função. Por exemplo, para a função $f(z) = z^2$ temos

$$f(z) = z^2 = (x + yi)^2 \tag{4.37}$$
$$= x^2 + 2xyi + y^2 i^2 \tag{4.38}$$
$$= x^2 - y^2 + 2xyi. \tag{4.39}$$

Ou seja, $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. Podemos então construir os gráficos destas duas funções reais. Para $u(x,y)$, que corresponde à parte real da função f, temos um parabolóide hiperbólico, também conhecido como *sela* (CAMARGO, 2005). Este gráfico está ilustrado nas Figuras 17 e 18.

E para a parte imaginária da função f ,ou seja, $v(x, y) = 2xy$ observa-se igualmente a formação da *sela*, conforme a Figura 19.

Tomando $y = 0$ temos $u(x, 0) = x^2$ e $v(x, 0) = 0$, ou seja, $f(x, 0) = x^2$ e recuperamos a função quadrática original, ver figura 24. Geometricamente, isto corresponde a fazer a interseção dos gráficos de u e v com o plano $y = 0$. Note que nestas condições, a interseção com o gráfico de u é uma parábola e com o gráfico de v é o eixo x. tomando esta interpretação, é então possível perguntar o que ocorre ao se fazer a interseção com outros tipos de plano. Por exemplo, ao tomarmos a interseção com o plano $x = 0$ temos $u(0, y) = -y^2$ e $v(0, y) = 0$, ou seja, temos novamente uma parábola, mas invertida. Ver figura 20.

Ao tomarmos $x = y$ temos $u(x, x) = 0$ e $v(x, x) = 2x^2$, ou seja, temos que agora a parábola corresponde à função v. Ver figura 21.

Por outro lado, tomando o plano $z = 0$ temos os eixos x e y para v e temos as retas $x = \pm y$ para u. Ver figura 22.

Para o plano $z = 1$, temos a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ para u e a hipérbole $y = 1/2x$ para v. Ver figura 23

É interessante obter o comportamento para a interseção da parte real ou imaginária de uma função quadrática na forma geral e um plano qualquer. Nos casos acima foram obtidos dois tipos de cônicas, parábolas e hipérboles. É possível obter uma elipse ou outro tipo de curva? Para responder esta questão, considere a função quadrática complexa na forma geral:

$$f(z) = az^2 + bz + c, \tag{4.40}$$

com $z, a, b, c \in \mathbb{C}$. Tomando $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ e $a = c_1 + ic_2$, temos, para a parte real e imaginária:

$$u(x, y) = a_1(x^2 - y^2) - 2a_2xy + b_1x - b_2y + c_1, \tag{4.41}$$

$$v(x, y) = a_2(x^2 - y^2) + 2a_1xy + b_2x + b_1y + c_2. \tag{4.42}$$

Vamos tomar a interseção dos gráficos destas duas funções com um plano de equação geral dada por

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \tag{4.43}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Vamos considerar primeiramente $\gamma \neq 0$. Neste caso, temos

$$z = -\frac{\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta}{\gamma}y - \frac{\delta}{\gamma}. \tag{4.44}$$

Fazendo $z = u(x, y)$ temos a seguinte equação:

$$a_1(x^2 - y^2) - 2a_2xy + \left(b_1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)x - \left(b_2 - \frac{\beta}{\gamma}\right)y + c_1 + \frac{\delta}{\gamma} = 0. \tag{4.45}$$

Analogamente, fazendo $z = v(x, y)$, temos

$$a_2(x^2 - y^2) + 2a_1xy + \left(b_2 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)x - + \left(b_1 + \frac{\beta}{\gamma}\right)y + c_2 + \frac{\delta}{\gamma} = 0. \tag{4.46}$$

Podemos analisar esta equação à luz da equação geral das cônicas, dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{4.47}$$

A natureza da cônica pode ser obtida através da análise do discriminante $\Delta_C = B^2 - 4AC$. Caso $\Delta_C < 0$ temos uma elipse, $\Delta_C = 0$ corresponde a uma parábola e, se $\Delta_C > 0$, trata-se de uma hipérbole. Em ambos os casos, nas Equações 4.45 e 4.46 temos, para o discriminante

$$\Delta_C = 4(a_1^2 + a_2^2) = 4|a|^2 > 0. \tag{4.48}$$

Note que a condição $|a| \neq 0$ corresponde ao fato que a função é quadrática. Portanto, a interseção do gráfico de u e v com um plano que intersecta o eixo z é sempre uma *hipérbole*.

Resta estudar o caso $\gamma = 0$. Neste caso temos, para que tenhamos um plano necessariamente α ou β diferentes de zero. Supondo $\beta \neq 0$, temos

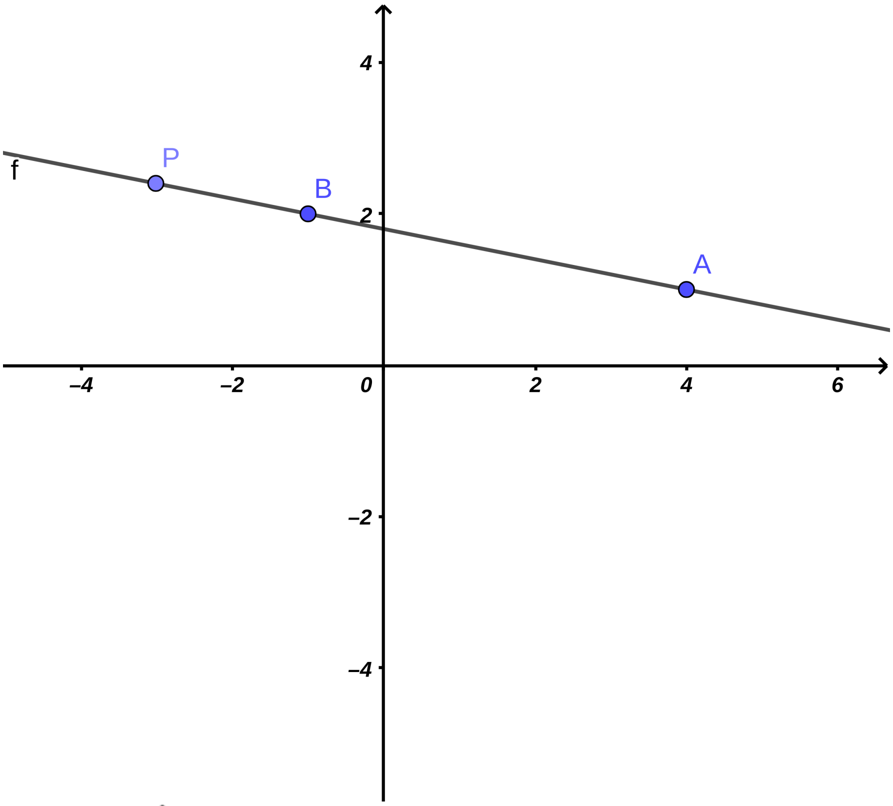
$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\delta}{\beta}. \tag{4.49}$$

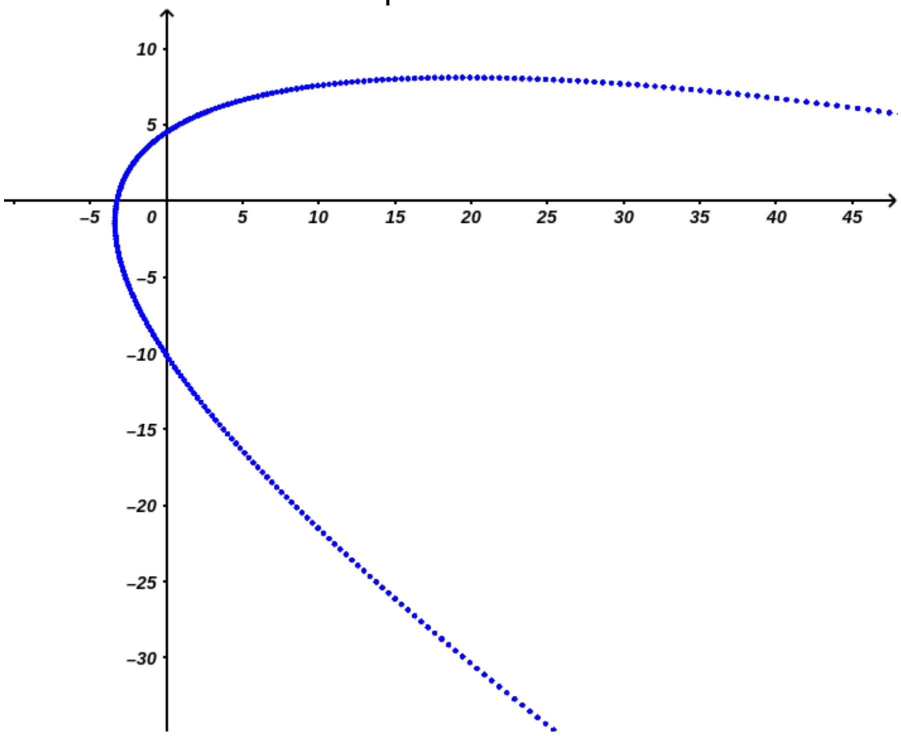
Fazendo esta substituição do lado direito da equação $z = u(x, y)$ e $z = v(x, y)$ temos z como uma função quadrática de x, o que define uma *parábola*. Portanto, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.1. *Seja $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função de uma variável complexa. A interseção dos gráficos de u e v com um plano no espaço resultará em uma hipérbole ou uma parábola.*

Neste sentido, parece coerente nomear as superfícies correspondentes aos gráficos destas funções como parabolóides hiperbólicos.

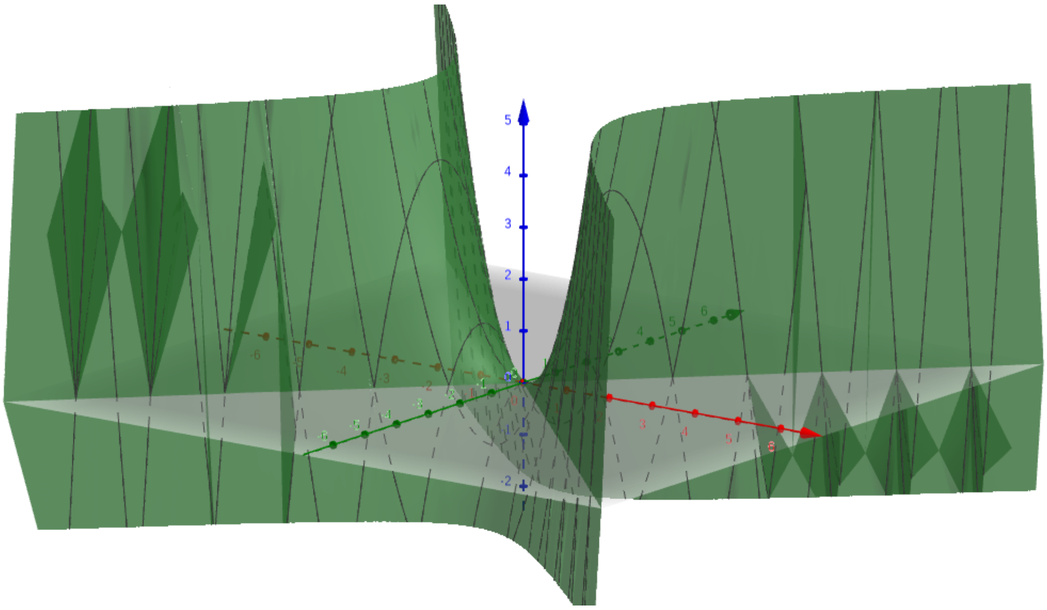
Figura 16 – Representação da reta r , no plano complexo z e a sua transformação pela função $f(z) = z^2$.





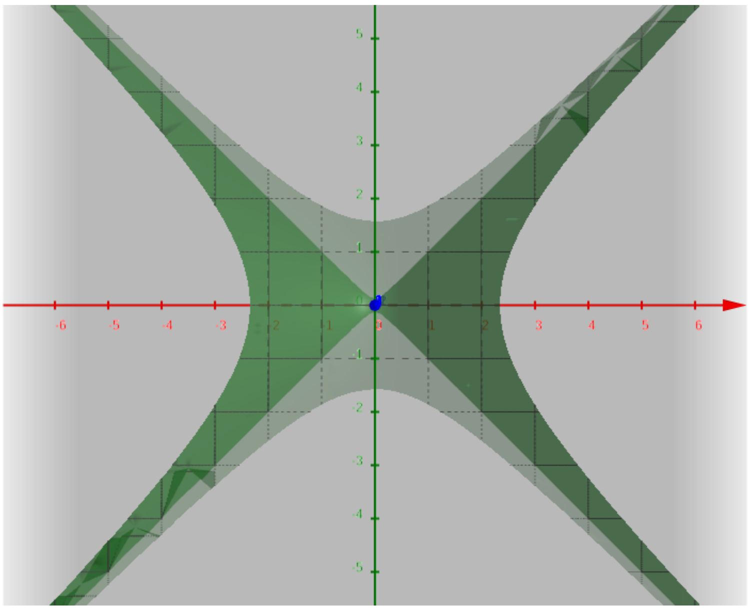
Fonte – Adaptado de Delgado Katia Frensel (2013)

Figura 17 – Gráfico da função $u(x, y) = x^2 - y^2$.



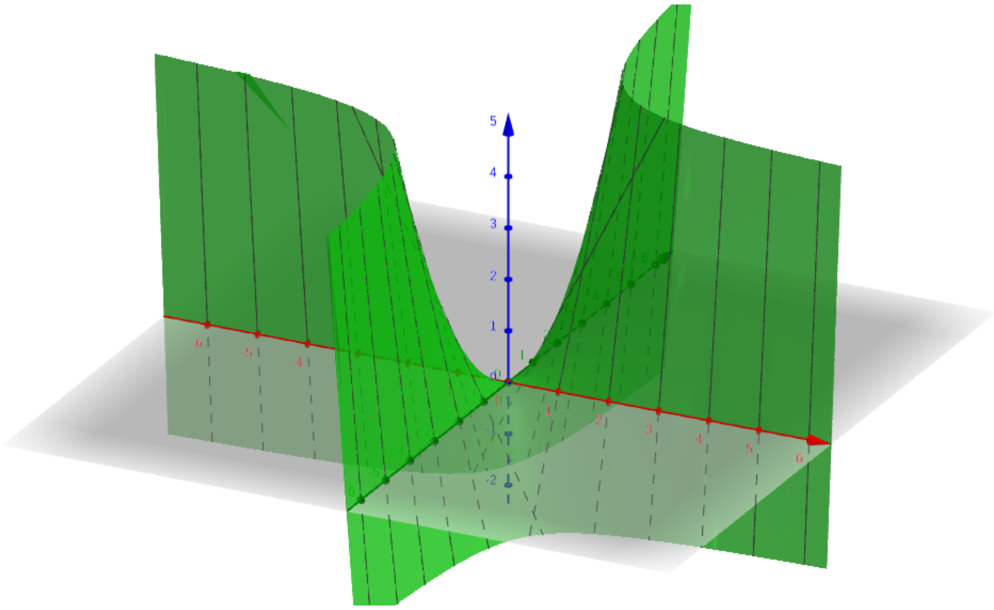
Fonte – Autor

Figura 18 – Gráfico da função $u(x, y) = x^2 - y^2$. Vista superior



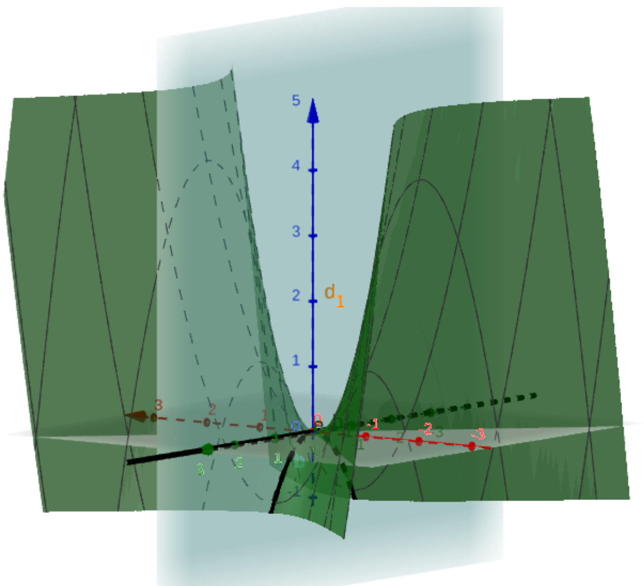
Fonte – Autor

Figura 19 – Gráfico da função $v(x, y) = 2xy$.



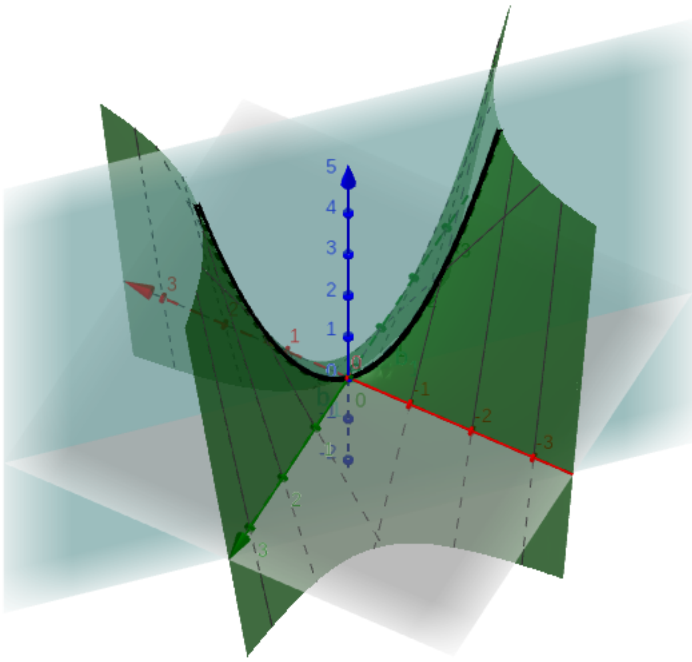
Fonte – Autor

Figura 20 – Intersecção do parabolóide hiperbólico $x^2 - y^2$ com o plano $x = 0$.



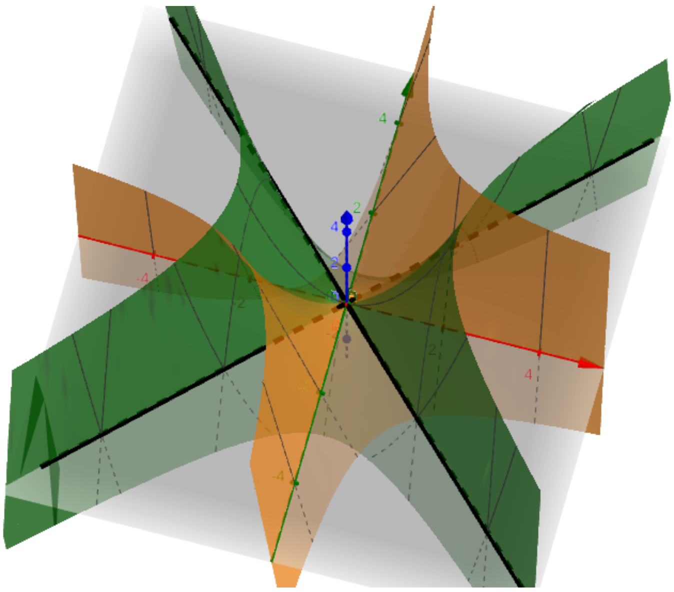
Fonte – Autor

Figura 21 – Intersecção do parabolóide hiperbólico $2xy$ com o plano $x = y$.



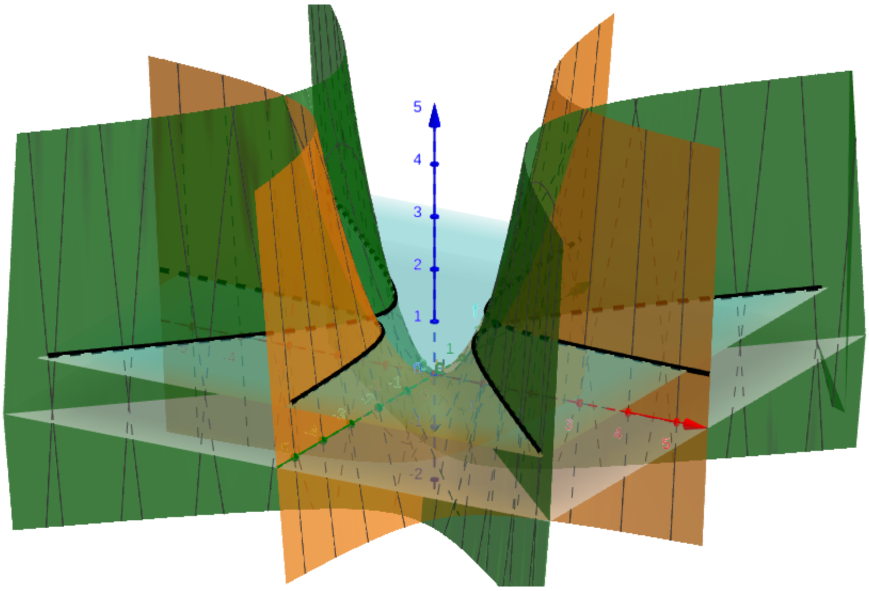
Fonte – Autor

Figura 22 – Intersecção dos parabolóides hiperbólicos $2xy$ e $x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$.



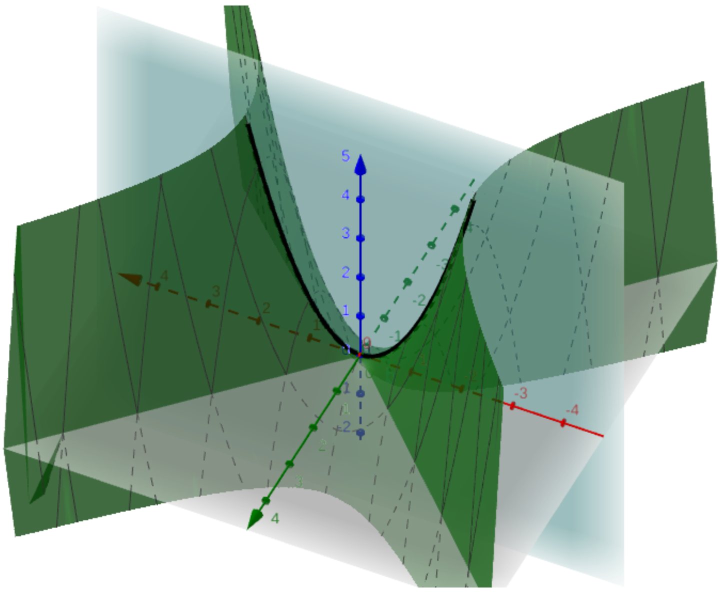
Fonte – Autor

Figura 23 – Intersecção dos parabolóides hiperbólicos $2xy$ e $x^2 - y^2$ com o plano $z = 1$.



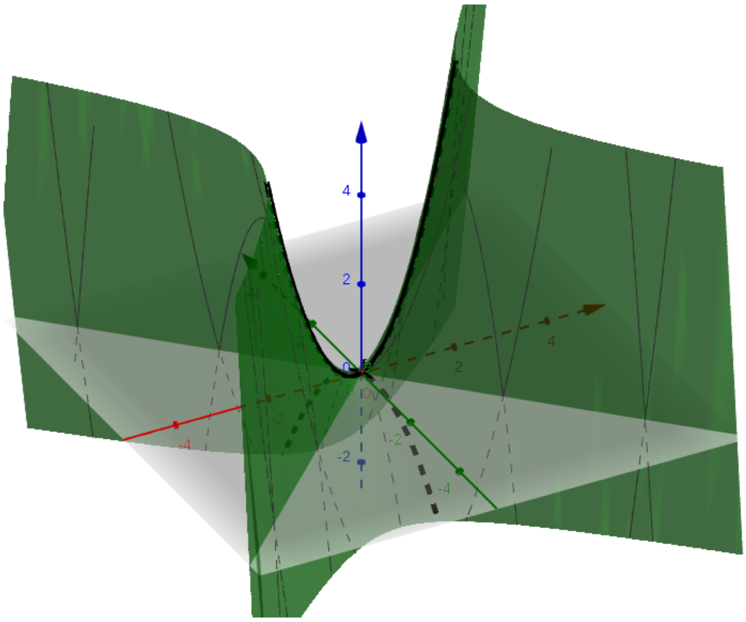
Fonte – Autor

Figura 24 – Intersecção do parabolóide hiperbólico $x^2 - y^2$ com o plano $y = 0$.



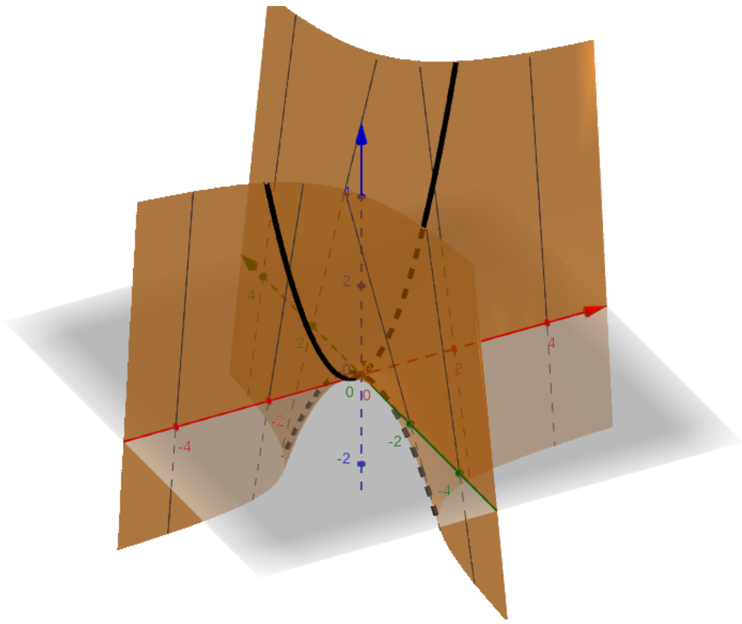
Fonte – Autor

Figura 25 – Parabolóide hiperbólico $x^2 - y^2$.



Fonte – Autor

Figura 26 – Parabolóide hiperbólico $2xy$.



Fonte – Autor

5 CONCLUSÕES

Os primeiros registros históricos referentes às equações do segundo grau remontam a dois mil anos antes de Cristo. Euclides descreve a resolução da equação do segundo grau de forma geométrica. Com Al-Khwarizmi, surge uma Álgebra aliada à Geometria, com relatos de uso na solução de problemas de ordem prática. Com Bhaskara surge a receita, o procedimento para a solução de equações completas do segundo grau. Mas só com François Viéte e Descartes, com sua simbologia, aliada à Geometria, a Álgebra começa a se expressar como a conhecemos, chegando à fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Com Tartaglia, Cardano e Bombelli, principia-se os números complexos, seu uso na resoluções de equações originalmente as de terceiro grau. Euler, Argand e Gauss fazem com que os números complexos se estabeleçam ,de fato na Matemática.

Constatou-se que a abordagem da equação quadrática genérica, com coeficientes complexos, normalmente não é tratada na literatura, no entanto, verificou-se a generalização da fórmula de Bháskara e demonstrou-se a existência de soluções dessas equações no conjunto dos complexos.

Os números complexos operados na forma algébrica, se aproximam das operações algébricas tratadas no Ensino Fundamental. Portanto podem ser abordados, de maneira introdutória, no processo ensino-aprendizagem, aos alunos deste período escolar.

Conclui-se o presente trabalho, com uma sequência didática, de maneira a tornar a compreensão dos conceitos matemáticos, um processo lógico-dedutível. E desta forma, espera-se contribuir com a arte de ensinar Matemática, no âmbito da Educação Matemática.

APÊNDICES

APÊNDICE A – O CORPO DOS COMPLEXOS

Um *corpo* $(V, +, \cdot)$ é um conjunto munido de duas operações, soma e produto, que obedecem às seguintes propriedades (HEFEZ, 2013):

(A1) Associatividade da Soma: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3, \forall x_1, x_2, x_3 \in V$;

(A2) Comutatividade da Soma: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \forall x_1, x_2 \in V$;

(A3) Elemento Neutro: $\exists\, 0 \in V$ tal que $x + 0 = x, \forall x \in V$;

(A4) Elemento Simétrico: $\forall x \in V, \exists\, (-x) \in V$ tal que $x + (-x) = 0$;

(P1) Associatividade do Produto: $x_1.(x_2.x_3) = (x_1.x_2).x_3, \forall x_1, x_2, x_3 \in V$;

(P2) Comutatividade do Produto: $x_1.x_2 = x_2.x_1, \forall x_1, x_2 \in V$;

(P3) Elemento Unitário: $\exists\, 1 \in V$ tal que $x.1 = x, \forall x \in V$;

(P4) Elemento Inverso: $\forall x \in V$ tal que $x \neq 0, \exists\, (x^{-1}) \in V$ tal que $x.(x^{-1}) = 1$;

(D) Distributividade do Produto sobre a Soma: $x_1.(x_2 + x_3) = x_1.x_2 + x_1.x_3, \forall x_1, x_2, x_3 \in V$.

O conjunto dos números complexos munidos das operações definidas pelas equações 3.5 e 3.6 formam um corpo. De fato, utilizando estas operações e o fato que os números reais formam um corpo, temos, para quaisquer $z = (a, b), z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2), z_3 = (a_3, b_3) \in \mathbb{C}$:

(A1) Associatividade da Soma:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) = && (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] \\ = && (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ = && (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) \\ = && (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\ = && [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) \\ = && (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

(A2) Comutatividade da Soma:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 = && (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \\ = && (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ = && (a_2 + a_1, b_2 + b_1) \\ = && (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \\ = && z_2 + z_1. \end{aligned}$$

(A3) Elemento Neutro:

$$z + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z.$$

(A4) Elemento Simétrico:

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = 0.$$

(P1) Associatividade do Produto:

$$\begin{aligned} z_1.(z_2.z_3) = & \quad (a_1, b_1).\left[(a_2, b_2).(a_3, b_3)\right] \\ = & \quad (a_1, b_1).(a_2.a_3 - b_2.b_3, a_2.b_3 + b_2.a_3) \\ = & \quad (a_1.a_2.a_3 - a_1.b_2.b_3 - b_1.a_2.b_3 - b_1.b_2.a_3, \\ & \quad a_1.a_2.b_3 + a_1.b_2.a_3 + b_1.a_2.a_3 - b_1.b_2.b_3) \\ = & \quad (a_1.a_2 - b_1.b_2, a_1.b_2 + b_1.a_2).(a_3, b_3) \\ = & \quad \left[(a_1, b_1).(a_2, b_2)\right].(a_3, b_3) \\ = & \quad (z_1.z_2).z_3. \end{aligned}$$

(P2) Comutatividade do Produto:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 = & \quad (a_1, b_1).(a_2, b_2) \\ = & \quad (a_1.a_2 - b_1.b_2, a_1.b_2 + b_1.a_2) \\ = & \quad (a_2.a_1 - b_2.b_1, a_2.b_1 + b_2.a_1) \\ = & \quad (a_2, b_2).(a_1, b_1) \\ = & \quad z_2.z_1. \end{aligned}$$

(P3) Elemento Unitário:

$$z.1 = (a, b).(1, 0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a, b) = z.$$

(P4) Elemento Inverso: Se $z \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} z.(z^{-1}) = & \quad (a, b).\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \\ = & \quad \left(a.\frac{a}{a^2 + b^2} - b.\frac{-b}{a^2 + b^2}, a\frac{-b}{a^2 + b^2} + b\frac{a}{a^2 + b^2}\right) \\ = & \quad (1, 0) \\ = & \quad 1. \end{aligned}$$

(D) Distributividade do Produto sobre a Soma:

$$\begin{aligned}
z_1.(z_2+z_3) = & \quad (a_1,b_1).\left[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)\right] \\
= & \quad (a_1,b_1).\left[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)\right] \\
= & \quad (a_1,b_1).(a_2+a_3,b_2+b_3) \\
= & \quad (a_1(a_2+a_3)-b_1.(b_2+b_3),a_1.(b_2+b_3)+b_1.(a_2+a_3)) \\
= & \quad (a_1.a_2+a_1.a_3-b_1.b_2-b_1.b_3,a_1.b_2+a_1.b_3+b_1.a_2+b_1a_3) \\
= & \quad (a_1.a_2-b_1.b_2,a_1.b_2+b_1.a_2)+(a_1.a_3-b_1.b_3,a_1.b_3+b_1.a_3) \\
= & \quad (a_1,b_1).(a_2,b_2)+(a_1,b_1).(a_3,b_3) \\
= & \quad z_1.z_2+z_1.z_3.
\end{aligned}$$

A partir da demonstração obtém-se o seguinte:

- O Elemento Neutro é $0=(0,0)$;
- Dado $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, o seu simétrico é $(-z)=(-a,-b)$;
- O Elemento Unitário é $1=(1,0)$;
- Dado $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ tal que $z\neq(0,0)$, o seu inverso é $(z^{-1})=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Note que o elemento neutro e unitário de $\mathbb{C}$ podem ser identificados com o elemento neutro e unitário de $\mathbb{R}$. De fato, o corpo $\mathbb{C}$ é uma *extensão* do corpo $\mathbb{R}$.

A.1 O CORPO $\mathbb{C}$ NÃO É ORDENÁVEL

Dado um corpo é importante determinar se o mesmo é ordenável, o que, intuitivamente, significa que podemos organizar os elementos em ua ordem crescente ou decrescente.

Formalmente, um corpo V é *ordenável* se existe um subconjunto $\mathcal{P}$ tal que $0\notin\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}$ satisfaz às seguintes condições:

(O1) $\forall x\in V$, apenas uma das três situações ocorre (tricotomia): $x=0$, $x\in\mathcal{P}$ ou $-x\in\mathcal{P}$;

(O2) Se $x,y\in\mathcal{P}$ então $x+y\in\mathcal{P}$ e $x.y\in\mathcal{P}$.

Se um corpo é ordenável pode-se estabelecer uma *relação de ordem* dada por

$$x<y \text{ se e somente se } y-x\in\mathcal{P}.$$

Admitindo-se, por hipótese, que o corpo $\mathbb{C}$ seja ordenável, vamos analisar o complexo $(0,1)=i$. Por (O1), como $i\neq0$, temos que $i\in\mathcal{P}$ ou $-i\in\mathcal{P}$. Suponha primeiramente $i\in\mathcal{P}$.

Logo, por (O2), $i^2 = i.i = (-1, 0) \in \mathcal{P}$. Por outro lado, se $(-1, 0) \in \mathcal{P}$, mais uma vez por (O2), $(-1, 0)(-1, 0) = (1, 0) \in \mathcal{P}$. Como $(\pm 1, 0) \in \mathcal{P}$ isto implica, novamente por (O2), que $(-1, 0) + (1, 0) = (0, 0)$, contradição, pois $(0, 0) \notin \mathcal{P}$. Similarmente, se $-i \in \mathcal{P}$ temos que $(-i)^2 = (-i).(-i) = (-1, 0) \in \mathcal{P}$ e obtém-se a mesma contradição. Logo, conclui-se que o corpo dos complexos não é ordenável. Isto significa que não podemos estabelecer uma relação de ordem para cada dois números complexos e determinar o maior e o menor.

APÊNDICE B – OUTRAS EXTENSÕES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Além da função $f(z) = az^2 + bz + c$ é possível extender a função quadrática para outras funções complexas, tais como

$$f_1(z) = az\bar{z} + \frac{b}{2}(z + \bar{z}) + c. \tag{B.1}$$

Supondo $a, b, c \in \mathbb{R}$, representando $z = x + iy$ temos a seguinte expressão:

$$f_1(x + iy) = a(x^2 + y^2) + bx + c. \tag{B.2}$$

Portanto esta é uma função *real* do número complexo z. Esta extensão, contudo, não é analítica, na medida que não satisfaz às condições de Cauchy-Riemann (CHURCHILL, 1899). Estas condições afirmam que uma condição necessária para que uma função complexa $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em z_0 é que, em uma uma vizinhança deste ponto devemos ter

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{B.4}$$

Para a função f_1 referente à Equação B.1 temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + b \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{B.8}$$

Ou seja, as condições valem apenas em um único ponto isolado, $z = -b/2a$. Portanto, não é analítica.

É interessante, porém, fazer um estudo das raízes de f_1. De fato, temos, fazendo $f_1(z) = 0$,

$$ax^2 + ay^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + ay^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0, \tag{B.9}$$

sendo, como sempre, $\Delta = b^2 - 4ac$. Fazendo $z_0 = -b/2a$ temos, para $z = x + iy$,

$$|z - z_0| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{B.10}$$

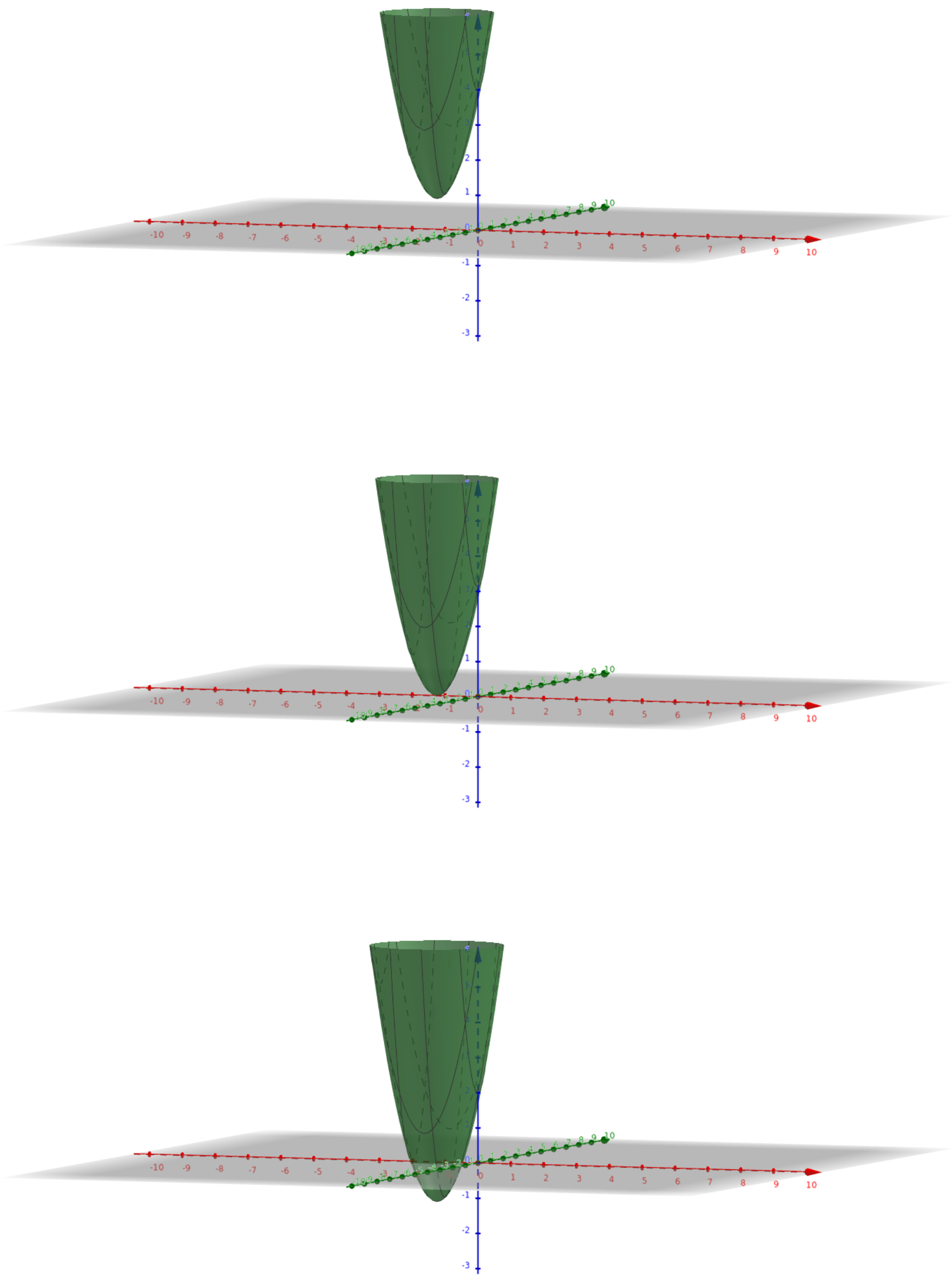
Como o módulo é uma quantidade real, para que esta equação possua solução devemos ter $\Delta \geq 0$. O caso $\Delta < 0$ corresponde a inexistência de raízes de f_1. Para o caso $\Delta = 0$ temos apenas uma solução distinta, $z = z_0$. Para o caso $\Delta > 0$, no entanto, temos uma circunferência correspondendo a infinitas soluções distintas, dadas por

$$z = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} e^{i\theta}, \tag{B.11}$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$.

Portanto, diferentemente de $f(z)$, que apresenta necessariamente uma ou duas raízes distintas, a equação $f_1(z) = 0$ possui casos com nenhuma, uma ou infinitas raízes. Este fenômeno pode ser visualizado facilmente através do gráfico de $u(x, y)$, que, neste caso, é um parabolóide de revolução. Assim como a parábola da função real possui uma, duas ou nenhuma solução conforme a parábola intercepta o eixo x, a função f_1 apresenta infinitas, uma ou nenhuma solução conforme o parabolóide intercepta o plano xy.

Figura 27 – Parabolóides referentes à parte real da função complexa $f_1(z) = 2z\bar{z} + \frac{5}{2}(z + \bar{z}) + c$. Acima, $c = 4$ ($\Delta < 0$). Meio, $c = 25/8$ ($\Delta = 0$). Abaixo, $c = 2$ ($\Delta > 0$). Os pontos em que o parabolóide intersecta o plano correspondem às raízes de f_1.



Fonte – Autor.

APÊNDICE C – TRANSFORMAÇÃO DE UMA RETA NO PLANO COMPLEXO PELA FUNÇÃO $f(z) = z^2$

A discussão da transformação de vários conjuntos pela função $f(z) = z^2$ foi mostrada de uma maneira pouco formal. Para um conjunto simples, como uma reta qualquer em $\mathbb{C}$, porém, é possível demonstrar que o *locus* geométrico dos pontos transformados é uma parábola. Temos a seguinte proposição:

Proposição C.1. *Toda reta no conjunto dos complexos é transformada em uma parábola (podendo ser degenerada) através da função* $f(z) = z^2$.

Para demonstrarmos esta proposição, seja uma reta qualquer em $\mathbb{C}$ parametrizada por $z(t) = z_0 + wt$, com $z_0, w \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{R}$. Neste caso é conveniente escrever $z(t) = x(t) + iy(t)$ obtendo, assim, as equações da parte real e imaginária:

$$x(t) = x_0 + w_x t,$$
$$y(t) = y_0 + w_y t.$$

Ao aplicarmos a transformação $f(z(t)) = z(t)^2$ temos, para a parte real e imaginária desta função

$$u(t) = x_0^2 - y_0^2 + 2(x_0 w_x - y_0 w_y)t + (w_x^2 + w_y^2)t^2,$$
$$v(t) = 2x_0 y_0 + 2(x_0 w_y + y_0 w_x)t + w_x w_y t^2.$$

Os termos independentes de t podem ser considerados como uma translação rígida e incorporados às funções u e v. Temos, desta maneira, as seguintes relações:

$$u'(t) = \alpha t + \beta t^2,$$
$$v'(t) = \gamma t + \delta t^2,$$

onde $\alpha = 2(x_0 w_x - y_0 w_y)$, $\beta = w_x^2 + w_y^2$, $\gamma = 2(x_0 w_y + y_0 w_x)$ e $\delta = w_x w_y$.

Para estabelecer o *locus* geométrico destes pontos é necessário eliminar o parâmetro t e obter uma relação entre u' e v'. Para este objetivo vamos tomar um caminho pouco usual. Vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} \alpha t + \beta t^2 = u' \\ \gamma t + \delta t^2 = v' \end{cases}.$$

Resolveremos este sistema considerando t e t^2 variáveis independentes. Obtemos, então,

$$t = \frac{\delta u' - \beta v'}{\delta\alpha - \beta\gamma},$$
$$t^2 = \frac{\gamma u' - \alpha v'}{\beta\gamma - \delta\alpha}.$$

Sabendo a relação entre t e t^2 temos, finalmente, a relação

$$\gamma u' - \alpha v' = \frac{1}{\gamma\beta - \alpha\delta}(\delta u' - \beta v')^2$$

Considerando as novas coordenadas dadas por

$$U = \delta u' - \beta v',$$
$$V = \gamma u' - \alpha v'$$

e fazendo $p = 1/(\gamma\beta - \alpha\delta)$ temos, finalmente,

$$V = pU^2,$$

ou seja, é uma parábola. A posição desta parábola dependerá dos parâmetros α, β, γ e δ que definem uma rotação nas coordenadas.

ANEXO A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A.1 INTRODUÇÃO

A sequência didática proposta tem como objetivos o estudo da equação do 2º grau, no âmbito curricular a ser desenvolvido pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio, bem como adquirir habilidades no uso do aplicativo de geometria dinâmica - GeoGebra (www.geogebra.org).

Sabe-se que cada aluno, assim como cada turma ou classe de alunos, apresenta um ritmo de aprendizagem, desta forma a sequência didática, pode ser fracionada em um número maior ou menor de aulas. As atividades propostas visam uma abordagem gradual, crescente do tema, através de exercícios que priorizam as formas geométricas. Sendo a álgebra apresentada e associada à essa formas geométricas.

Como introdução ao tema, solicitar aos alunos uma pesquisa, um resumo, em todas as fontes disponíveis, pesquisa essa que deve responder questões como: a) Quais civilizações utilizaram as equações do 2º grau? b) Em que época ou período histórico isso ocorreu? c) Cite alguns exemplos de resolução ou aplicações da equação do 2º grau, ao longo da História. Trata-se um breve histórico, com o objetivo de situar os alunos no espaço-tempo em que vivem, assim como motivá-los ao aprofundamento do tema.

Outra atividade motivacional e lúdica é a apresentação do vídeo intitulado "Esse tal de Bháskara", em que os protagonistas do filme respondem a questões como: Qual a origem e uso da equação do 2º grau? (Unicamp 2012).

A.1.1 DESAFIO

Ainda no contexto histórico, propor o seguinte desafio aos alunos: Os dois problemas a seguir eram estudados por jovens hindus do século XII. "Vamos resolvê-los também!".

Problema Um:

> Em ambas as margens de um rio existem duas palmeiras, uma em frente à outra. A altura de uma é de 30 côvados, a da outra 20. A distância entre seus troncos é de 50 côvados. Na copa de cada palmeira está um pássaro.Subitamente os dois pássaros descobrem um peixe que aparece na superfície da água. Os pássaros lançam-se sobre ele e alcançam-no no mesmo instante. A que distância do tronco da palmeira maior apareceu o peixe? (SÃO PAULO,2009).

Algumas considerações a respeito do problema Um: inicialmente,considere, x a distância do tronco da palmeira maior ao peixe.Como os pássaros chegam ao mesmo peixe e ao mesmo tempo (supondo que a velocidade de voo dos pássaros seja a mesma), devemos considerar que a distância por eles percorrida é a mesma.Portanto, os dois triângulos retângulos possuem a mesma medida de hipotenusa.Desse forma, aplicando o teorema de Pitágoras, obtém -se: $30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$. Embora pareça uma equação do 2º grau, os termos em x^2 se cancelarão, resultando em uma equação de 1º grau de raiz 20.Logo o peixe apareceu a 20 côvados da palmeira maior. (SEE, 2009).

Problema Dois: "O quadrado da oitava parte de um bando de macacos saltitava em um bosque, divertindo-se com a brincadeira, enquanto os 12 restantes tagarelavam no alto de uma colina.Quantos macacos constituem o bando?"(SEE, 2009).

Algumas considerações a respeito do problema dois, seja x o total do bando, tem-se que $(\frac{x}{8})^2 + 12 = x$. Resolvendo a equação, encontra -se duas possibilidades: 16 e 48 (SEE, 2009).

Lembrando que os problemas acima propostos, devem ser lançados como desafios. Que só deverão ser retomados, após os alunos terem percorrido a sequência didática, que ora se inicia.

A.2 USO DA RADICIAÇÃO

A atividade a seguir prioriza o uso da radiciação na resolução das equações incompletas do 2º grau, do tipo $ax^2 = c$. Trata-se de uma combinação da linguagem geométrica e algébrica."O uso dessa abordagem no trabalho com equações de 2º grau, além de resgatar, do ponto de vista histórico, como os matemáticos enfrentavam equações, permite estabelecer novas relações ...".(SEE, 2009).

Construir no aplicativo GeoGebra os desenhos de cada questão apresentada. Priorizar a determinação dos vértices por pontos, como por exemplo: "Vamos construir um quadrado de vértices $A = (1, 1); B = (8, 1); C = (8, 8); D = (1, 8)$.

A.2.1 QUESTÃO

A área de um quadrado de lado x é igual a $49cm^2$. Qual é a medida do lado desse quadrado? (SEE, 2009). A solução dessa questão é bastante simples, basta pensar qual o número que elevado ao quadrado resulta em 49, isto é, 7. O professor pode também trazer para a discussão que, assim como $7^2 = 49$, tem-se que $(-7)^2 = 49$, comentando que embora -7 satisfaça a equação, como se trata da medida do lado de um quadrado, esse valor negativo não deve constar no conjunto solução. Portanto, a solução para esse problema é única, $7cm$.(SEE, 2009). Importante enfatizar que a emissão da resposta ao problema requer reflexão e análise.E que as etapas da Resolução de um Problema, devem ser: 1º) Compreender o problema; 2º) Planejar a solução; 3º) Executar o que planejou; 4º) Verificar se resolveu corretamente o problema; 5º) Responder à pergunta do problema. (DANTE, 2009).

Naturalmente, os problemas apresentados, devem ser reproduzidos, de maneira a permitir uma compreensão adequada dos conceitos e propriedades inerentes aos mesmos.

A.2.2 QUESTÃO

Um retângulo tem área igual a $242cm^2$ e seu lado maior é o dobro do menor. Qual é a medida do lado maior desse retângulo? Indicando a medida do lado do retângulo por x teremos, $2x^2 = 242$, então $x^2 = 121$. Portanto,o maior lado mede $22cm$. (SEE, 2009)

A.2.3 QUESTÃO

A área de um triângulo retângulo isósceles é $18cm^2$. Determine as medidas de seus catetos e da hipotenusa. (SEE, 2009).Indicando a medida do cateto por x, obtém-se : $\frac{x^2}{2} = 18$, então $x^2 = 36$. Desse modo, os valores 6 e -6 satisfazem a equação, mas somente 6 é solução da equação, pois a medida do lado de um triângulo deve ser positiva. Para encontrar a medida da hipotenusa, aplica-de o teorema de Pitágoras: $h^2 = 6^2 + 6^2$,dai, $h = 6\sqrt{2})$ cm. Portanto, a resposta dessa atividade será catetos de medida 6 cm e hipotenusa de media $6\sqrt{2}$ cm. (SEE, 2009).

Os exercícios seguintes têm como objetivo a assimilação das operações de resolução da equação do 2º grau através da radiciação. Exercícios propostos: Resolva as equações a seguir e verifique se os valores encontrados satisfazem à equação.

$$x^2 = 9 \tag{A.1}$$

$$3x^2 = 27 \tag{A.2}$$

$$4 = x^2 \tag{A.3}$$

$$x^2 - 4 = 12 \tag{A.4}$$

Aprofundando o tema, sugere-se ao professor, após os alunos terem efetuado as resoluções, do exercício anterior, efetuar comparações e, ao mesmo tempo, esclarecer a respeito das equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$, que por sua vez apresentam raízes: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

A.3 USO DA FATORAÇÃO

Outra forma de resolução da equação incompleta do 2ºgrau, do tipo $ax^2 + bx = 0$ é o uso da fatoração, cujo processo aprimora as habilidades algébricas dos alunos. A resolução por fatoração, se baseia no fato de que, se o produto de dois fatores é zero, necessariamente um deles é zero. (SEE, 2009).

A proposta aos alunos é a resolução por fatoração de equações, como as que se seguem:

$$x^2 + x = 0 \tag{A.5}$$

$$3x^2 - 12x = 0 \tag{A.6}$$

$$5x^2 - 25x = 0 \tag{A.7}$$

$$4x^2 + 8x = 0 \tag{A.8}$$

$$2x^2 + 5x = 0 \tag{A.9}$$

$$x^2 + \frac{x}{5} = 0 \tag{A.10}$$

$$-x^2 + 4x = 0 \tag{A.11}$$

A.3.1 O MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADOS

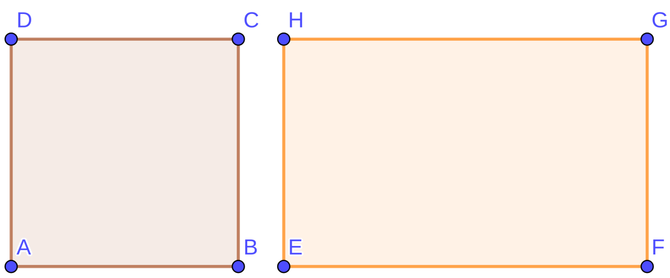
O método de completar quadrados foi desenvolvido pelo matemático árabe Al-Khowarizmi, que viveu em Bagdá no século IX. O método consiste na construção de quadrados e retângulos para obter as raízes da equação, conforme exemplo a seguir:

$$x^2 + 8x - 65 = 0 \tag{A.12}$$

$$x^2 + 8x = 65 \tag{A.13}$$

A equação (A.9) , pode ser interpretada como a soma da área de um quadrado de lado x e um retângulo de lado 8 por x que é igual a 65. Figura 28.

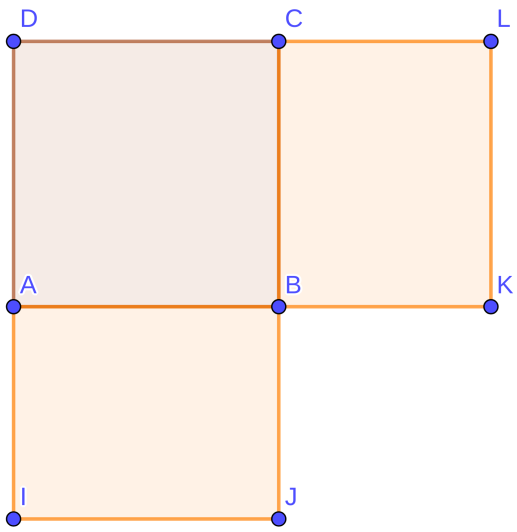
Figura 28 – Representação geométrica, associada à equação algébrica do tipo $x^2 + 8x = 65$.



Fonte – Autor

O retângulo é divido em dois retângulos de mesma área, de lados 4 por x, e justapostos aos lados do quadrado. Com isso o formato da figura se altera, mas a área total permanece 65 (unidades de área). Conforme indica a figura 29.

Figura 29 – Representação geométrica, associada à equação algébrica do tipo $x^2+4x+4x = 65$.

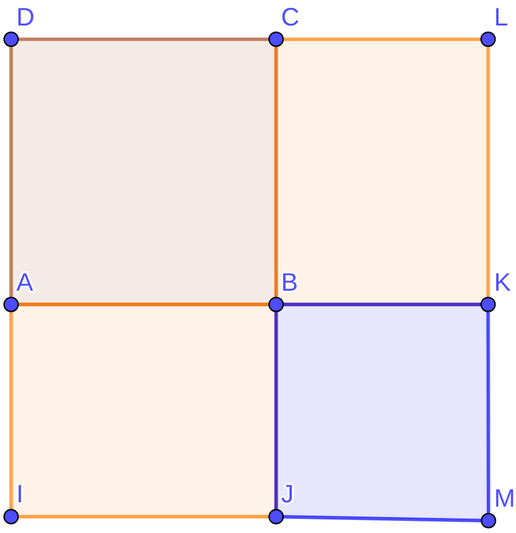


Fonte – Autor

Agora, passa-se a completar o que falta para se obter um quadrado, ou seja, acrescenta-se um quadrado menor,de lado 4, de maneira a formar o quadrado maior de lado $x+4$. Ver figura 30. Com isso, a área,do quadrado maior,passa a ser $65 + 16 = 81$. Por outro lado, se um quadrado tem área 81, então seu lado mede 9, então tem-se, $4 + x = 9$, logo $x = 5$. Eis a raiz positiva da equação $x^2 + 8x - 65 = 0$. Esse método, contextualiza, dá significado aos elementos algébricos, permitindo maior compreensão das operações matemáticas, além de resgatar a maneira com que por muitos anos os matemáticos tratavam essas equações.(SEE, 2009).

Aliando o tratamento geométrico ao algébrico, pode-se escrever as operações acima, como:

Figura 30 – Completando o quadrado,resultando em $x^2 + 4x + 4x + 16 = 65 + 16$.



Fonte – Autor

$$x^2 + 8x - 65 = 0 \tag{A.14}$$

$$x^2 + 4x + 4x = 65 \tag{A.15}$$

$$x^2 + 4x + 4x + 16 = 65 + 16 \tag{A.16}$$

$$(x + 4)^2 = 81 \tag{A.17}$$

$$(x + 4) = \pm 9 \tag{A.18}$$

$$x + 4 = 9 \tag{A.19}$$

$$x + 4 = -9 \tag{A.20}$$

Logo, as raízes são 5 e -13. O mesmo método pode ser aplicado em equação do tipo, $x^2 + 5x - 6 = 0$ ou $x^2 + 20x - 300 = 0$, no entanto em equações do tipo, $x^2 + 2x + 1 = 0$, o método não pode ser aplicado, pois, não há soma de quadrado e retângulos que resulta em -1, isto é, valores negativos, nesses casos o método algébrico de completar quadrados resolve:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \tag{A.21}$$

$$x^2 + 2x = -1 \tag{A.22}$$

$$x^2 + x + x = -1 \tag{A.23}$$

$$(x + 1)^2 = -1 + 1 \tag{A.24}$$

$$x + 1 = 0 \tag{A.25}$$

$$x = -1 \tag{A.26}$$

A.4 FÓRMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Como já tratado no início do presente trabalho, ao matemático conhecido como Bhaskara , se deve o método de resolução da equação do 2º grau, que posteriormente, deu origem à formula de resolução da mesma.

O que Bhaskara relata em palavras, aqui se fará utilizando o método geométrico de Al-Khowarizmi, como segue, dada a equação,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{A.27}$$

onde, a, b, c, são coeficientes reais, com a diferente de zero,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{A.28}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{A.29}$$

Isto posto, x^2 é interpretado como a área de um quadrado de lado x, e $\frac{b}{a}x$ como a área de um retângulo de lados x e $\frac{b}{a}$. Seguindo os passos de construção já mencionados e ilustrados nas figuras 28,29 e 30, tem-se que o quadrado menor que completa o quadrado maior tem lado igual a $\frac{b}{2a}$ e área $\frac{b^2}{4a^2}$. Assim algebricamente, obtém-se.

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a} \tag{A.30}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \tag{A.31}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{A.32}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \tag{A.33}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \tag{A.34}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{A.35}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

A sequência didática até o momento apresentada, possibilita, através de uma abordagem histórica, geométrica e algébrica uma compreensão lógica-dedutiva dos recursos matemáticos para a resolução das equações do 2ºgrau.

A.5 RESOLVENDO UMA EQUAÇÃO FAMOSA

A proposta dessa atividade é abordar temas fundamentais, como proporção, o teorema de Pitágoras e a resolução de equação do segundo grau, relacionados a Seção Áurea, ou Razão Áurea, assunto que tem despertado o interesse não só de matemáticos, mas de arquitetos e artistas. (QUEIROZ, 2008).

A.5.0.1 A SECÇÃO ÁUREA

Dado o segmento $a = AB$, pode-se determinar nele um ponto E tal que AE seja a média geométrica entre AB e BE, ou seja, $AE = \sqrt{AB.BE}$. O segmento AE é chamado segmento áureo interno de AB. Figura 31.

Figura 31 – Segmento áureo.

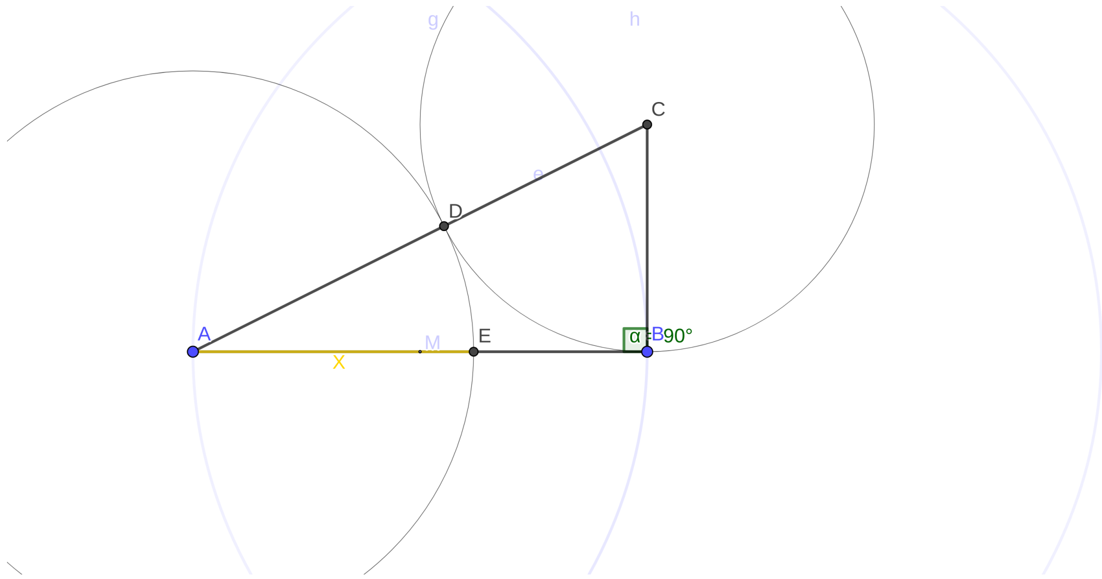
Fonte – Autor

Se denotamos $AE = x$, obtém-se $EB = a - x$, então,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \tag{A.36}$$

Euclides descreve esta secção em sua Proposição VI, 30 como: "dividir um segmento em média e extrema razão". Descreve , também, o processo para a determinação geométrica do segmento áureo, x , em sua obra Elementos, Livro II, Proposição 11. (QUEIROZ, 2008). Construção geométrica, vide figura 32

Figura 32 – Construção do segmento áureo.



Fonte – Adaptado de Queiroz (2008)

Procedimento: a) Construir inicialmente um triângulo retângulo ABC que tenha como catetos os segmentos a e $\frac{a}{2}$. b) Transporta-se a partir de C e sobre a semi-reta CA, o segmento CB, determinando o ponto D. c) O ponto E, pertence a AB tal que $AE = AD$, portanto, o valor procurado, $x = AE$.

Justificativa: Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ABC, tem-se a relação,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \tag{A.37}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{A.38}$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4} \tag{A.39}$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \tag{A.40}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \tag{A.41}$$

A partir da construção do segmento áureo x correspondente ao segmento a, dado inicialmente, pode-se construir o famoso retângulo áureo, que tem a e x como lados.

A.5.0.2 RESOLVENDO A EQUAÇÃO

Para resolver a famosa equação, decorrente da proporção áurea, faz-se,

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \tag{A.42}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{ax}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} = \frac{0}{a^2} \tag{A.43}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} - 1 = 0 \tag{A.44}$$

$$y = \frac{x}{a} \tag{A.45}$$

$$y^2 + y - 1 = 0 \tag{A.46}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{A.47}$$

$$\Phi = \frac{1}{y} = \frac{a}{x} \tag{A.48}$$

$$\Phi = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)} . \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} \tag{A.49}$$

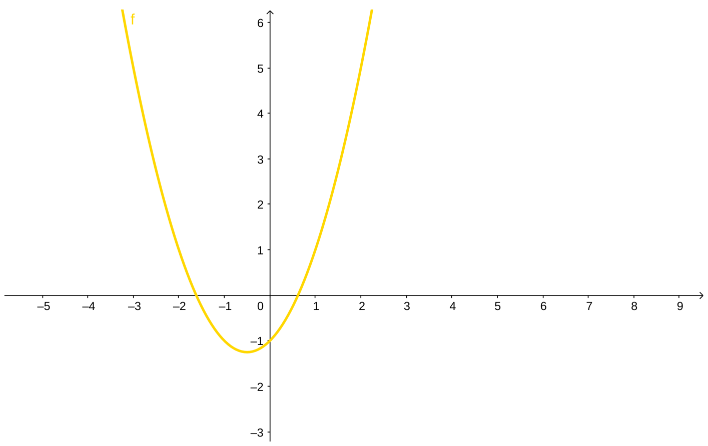
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618... \tag{A.50}$$

A razão $\frac{a}{x}$ é conhecida como razão áurea, e o número $\Phi = 1.618...$ como número de ouro ou número áureo. Considerando que em geometria as medidas são positivas, tomou-se apenas o valor positivo de y.

A.5.0.3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Para se obter a função quadrática, originária da proporção áurea, digite no Geogebra, $f(x) = x^2 + ax - a^2$, vide figura 33.

Figura 33 – Função $f(x) = x^2 + ax - a^2$, com $a = 1$.

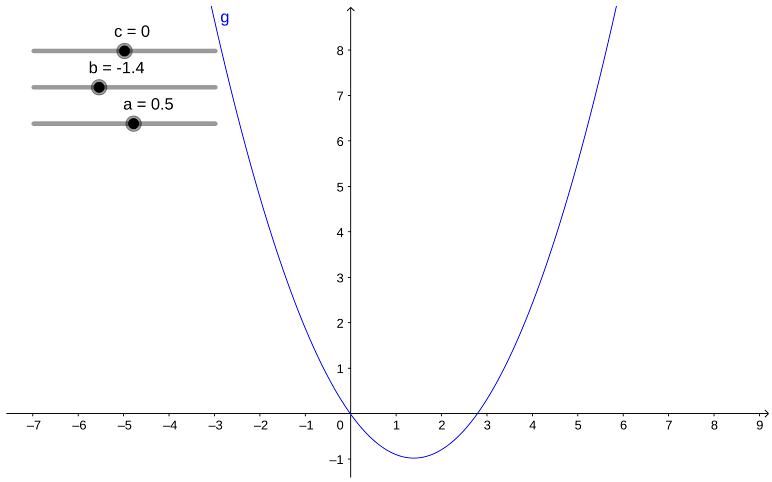


Fonte – Autor

Pode-se fazer a variar e observar o que ocorre em um gráfico dinâmico, o que enriquece o estudo do tema. Seguindo essa mesma dinâmica, pode-se fazer variar os demais coeficientes,

a, b, c em uma função $g(x) = ax^2 + bx + c$, para estudo do comportamento da função quadrática, vide figura 34.

Figura 34 – Função $g(x) = ax^2 + bx - c$, com com controles deslizantes em a, b, c.



Fonte – Autor

A.6 AMPLIANDO O CONJUNTO UNIVERSO

A seguir apresentamos um aprofundamento do tema, ampliando o conjunto solução das equação do 2ºgrau ao considerarmos os números complexos. Equações como $x^2 + 1 = 0$, não possuem raízes reais, no entanto, considerando o conjuntos do números complexos, possuem! Como o objetivo da presente sequência didática é uma introdução aos números complexos e como os alunos já possuem o conhecimento da posição dos números reais no plano cartesiano, se tratará da apresentação dos números complexos na forma algébrica.

A.6.1 REPRESENTAÇÃO

Abrir o Geogebra e digitar (sempre que possível,efetuar as atividades usando o aplicativo GeoGebra), $A = (2, 5)$ e $B = (5, 2)$, assim, os pontos A e B representam números complexos,que na forma algébrica, se escrevem como $A = 2 + 5i$ e $B = 5 + 2i$, sendo que a primeira coordenada (x do plano cartesiano) refere-se aos números reais, e a segunda (y do plano cartesiano) refere-se à parte imaginária ($i = \sqrt{-1}$). A apresentação singela é de maneira a facilitar a compreensão dos alunos. Figura 35.

A.6.2 OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

A.6.2.1 SOMA

Efetue a soma $A + B$, para tanto, basta somar as primeiras coordenadas, $2 + 5 = 7$, 7 será a primeira coordenada da soma e somar as segundas coordenadas, $5 + 2 = 7$, o resultado será a segunda coordenada da soma. Portanto, $A + B = 7 + 7i$, em coordenadas $A + B = C = (7, 7)$. Figura 35.

A.6.2.2 SUBTRAÇÃO

Efetuar: $A - B$, se $A = (2, 5)$ e $B = (5, 2)$, basta fazer $2 - 5 = -3$ e $5 - 2 = 3$, ficando $A - B = D = (-3, 3)$. 35.

A.6.2.3 MULTIPLICAÇÃO

Na multiplicação, efetuam-se as propriedades distributivas, considerando i como parte literal, substituindo-se i^2 por -1. Portanto, $A.B = E = (0, 29)$. Figura 35.

$$A.B = (2 + 5i)(5 + 2i) = \tag{A.51}$$

$$= 10 + 4i + 25i + 10i^2 \tag{A.52}$$

$$= 10 + 29i + 10(-1) \tag{A.53}$$

$$= 0 + 29i \tag{A.54}$$

A.6.2.4 DIVISÃO

Na divisão de A por B, multiplica-se A e B pelo conjugado do denominador, então

$$\frac{(2 + 5i)}{(5 + 2i)} . \frac{(5 - 2i)}{(5 - 2i)} = \tag{A.55}$$

$$= \frac{10 - 4i + 25i - 10i^2}{25 - 10i + 10i - 4i^2} = \tag{A.56}$$

$$= \frac{10 + 21i - 10(-1)}{25 - 4(-1)} = \tag{A.57}$$

$$= \frac{20 + 21i}{29} = \tag{A.58}$$

$$= \frac{20}{29} + \frac{21i}{29} \tag{A.59}$$

tem-se, $A/B = F = \left(\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$. Figura 35

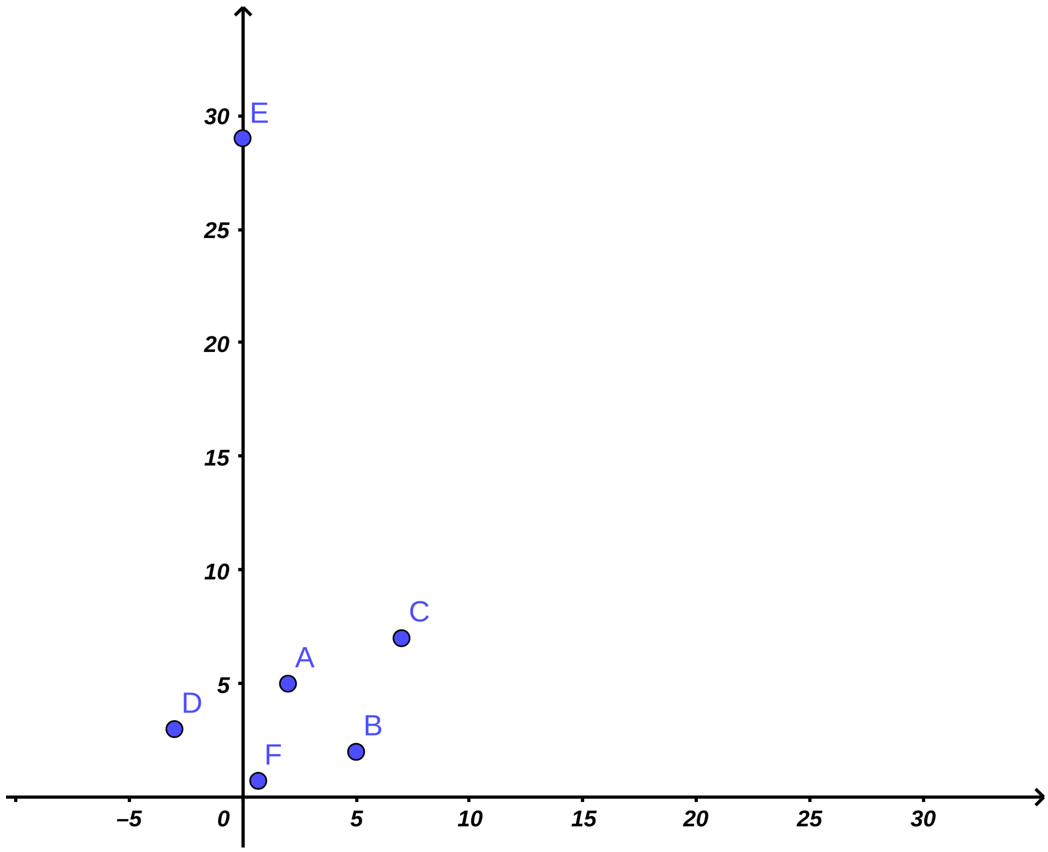
A.6.3 FUNÇÃO QUADRÁTICA COM VARIÁVEIS COMPLEXAS

A.6.3.1 LABORATÓRIO Z

O objetivo dessa atividade é despertar o interesse dos alunos, ao mesmo tempo que familiarizá-los com as funções no plano complexo.

Um número complexo, pode ser escrito como, $z = a + bi$, onde a é a parte real, b é a parte imaginária, e $i = \sqrt{-1}$, ou $i^2 = -1$.

Figura 35 – Representação de números complexos no plano



Fonte – Autor

Considere a função quadrática $w = f(z) = z^2$, obtém-se,

$$w = f(z) = z^2 = (a + bi)(a + bi) \tag{A.60}$$

$$w = a^2 + abi + abi + b^2i^2 \tag{A.61}$$

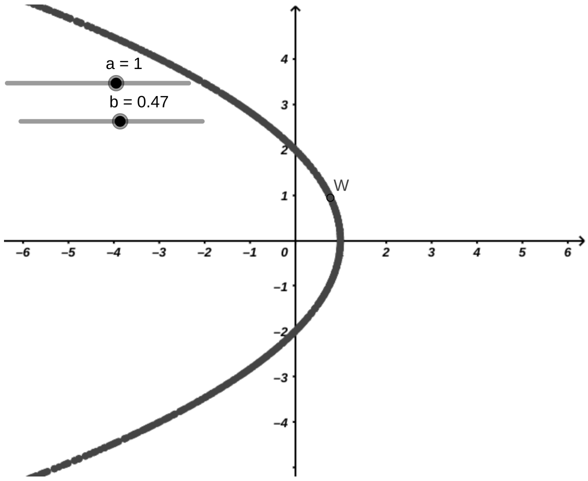
$$w = a^2 - b^2 + 2abi \tag{A.62}$$

Para representar a função $w = f(z)$ no plano complexo, é necessário considerar a parte real, como $u(a, b) = a^2 - b^2$ e a parte imaginária como $v(a, b) = 2ab$, então cada ponto no plano complexo será dado por $w = u + vi$.

A questão é, qual o gráfico a ser desenhado no plano w., quando se fixa a ou b , ou ainda quando se faz a variação de ambos?

Na caixa de entrada do aplicativo Geogebra digitar, a, aparecerá uma caixa de diálogo, criar controle deslizante, clique nessa caixa, digite b e crie também outro controle deslizante. Na sequência digite a função $u(a, b) = a^2 - b^2$, e tecle enter. Na linha seguinte, digite, $v(a, b) = 2ab$, dê entrada. Agora crie o ponto $W = (u(a, b), v(a, b))$, surgirá no plano um ponto, clique com o botão direito do mouse, sobre esse ponto e selecione a opção, exibir rastro, como $a = 1$, clique , à direita de b, fazendo variar b e observe! Figura 36

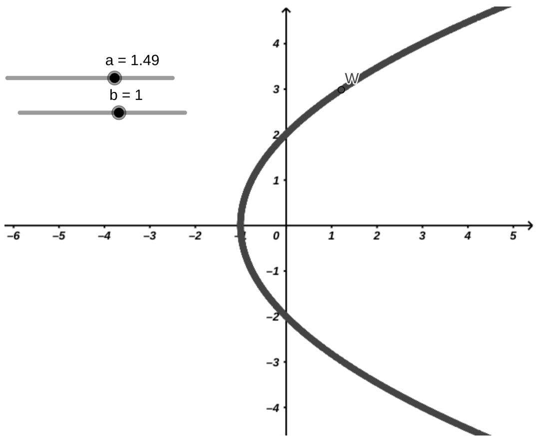
Figura 36 – Função $W = f(z) = z^2$, com $a = 1$ e b variando.



Fonte – Autor

Fazendo $b = 1$, e variando a , figura 37 tem-se,

Figura 37 – Função $W = f(z) = z^2$, com $b = 1$ e a variando.

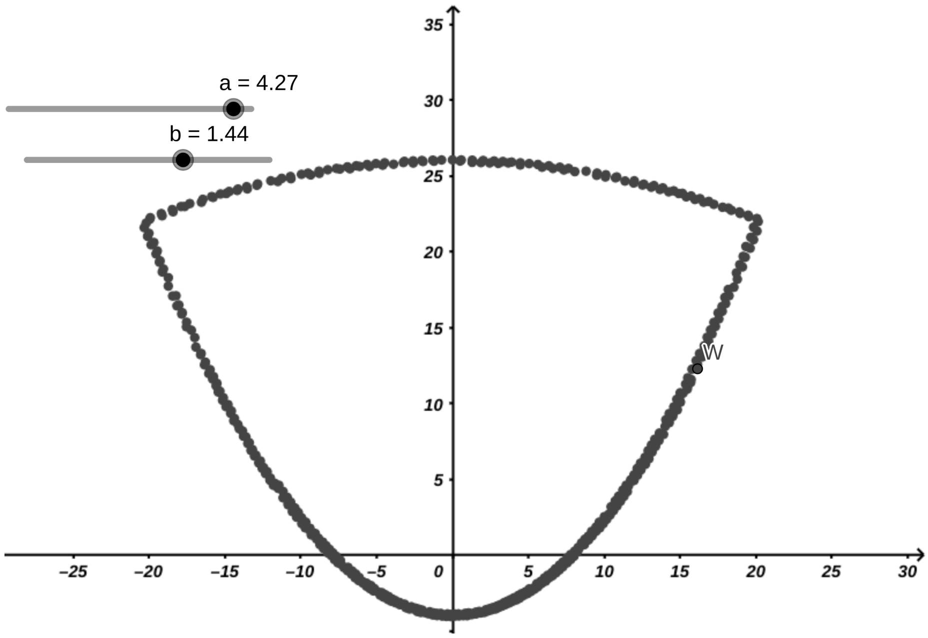


Fonte – Autor

Assim, tem-se o desenho de parábolas! Mas quando se faz variar a e b, ao mesmo tempo, formam-se composições que lembram trechos de parábolas combinadas! Verifique! Use o Geogebra como laboratório! Figura 38

Agora, veja o que ocorre quando se constrói a função $w = f(z) = z^2$, em um sistema cartesiano em $3D$, pelo Geogebra 3D, cortado por planos paralelos aos planos xz ou yz, de forma dinâmica. Acesse a Calculadora 3D - GeoGebra. Na caixa de entrada, digite a e selecione, criar botão deslizante, digite b e crie outro botão deslizante. Novamente na caixa de entrada digite a função $u(a, b) = a^2 - b^2$, a figura que surge é um parabolóide hiperbólico, correspondente à parte real da função w. Repita o procedimento anterior e digite, $v(a, b) = 2(a)(b)$, o gráfico desenhado é outro parabolóide hiperbólico, correspondente à parte imaginária, do plano w, citado na atividade anterior. Vide figura 39. No GeoGebra 3D, com o botão esquerdo pressionado,

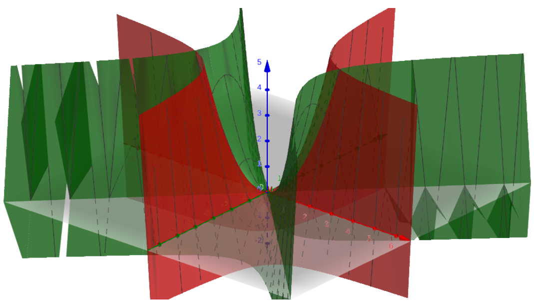
Figura 38 – Função $W = f(z) = z^2$, com a e b variando.



Fonte – Autor

movimente o mouse e verá a figura sob diversos ângulos, observe que o parabolóide hiperbólico, nas proximidades da origem, apresenta uma forma de $sela$, por isso também é conhecido por esse nome.

Figura 39 – Parabolóides hiperbólicos, $u(a, b) = a^2 - b^2$ e $v(a, b) = 2ab$.



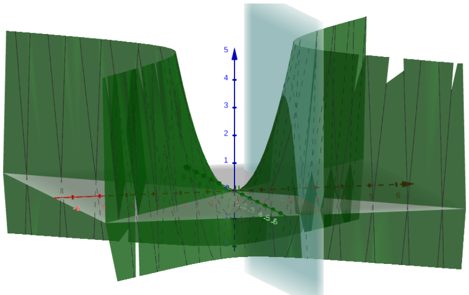
Fonte – Autor

Continuando, digite, $x = a$, na caixa de entrada, ao lado da função $u(a, b)$ há um círculo, clique sobre ele desabilitando a figura, faça o mesmo com $v(a, b)$. Observe, que $x = a$, determina um plano paralelo ao plano yz do sistema. Habilite novamente a função $u(a, b)$, clicando novamente no círculo ao lado da função correspondente. A seguir, clique na seta do botão deslizante a, e veja! Vide figuras 40 e 41.

A intersecção resulta um parábolas! Ou retas no caso da interseção do parabolóide hiperbólico $v(a, b)$. Vide figura 42.

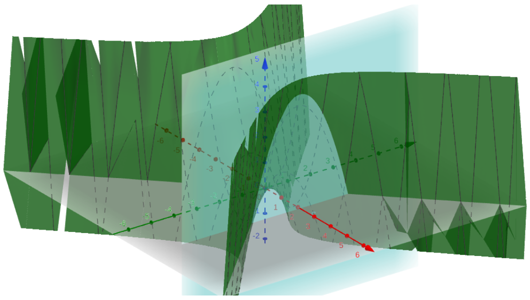
E qual figura surgirá ao se construir um plano paralelo ao plano xy ? Vejamos! Digite, $z = a$, e faça mover o plano! Surgem hiperbóles! Vide figuras 43 e 44.

Figura 40 – Parabolóide hiperbólico, $u(a,b) = a^2 - b^2$ intersectado por plano $x = a$.



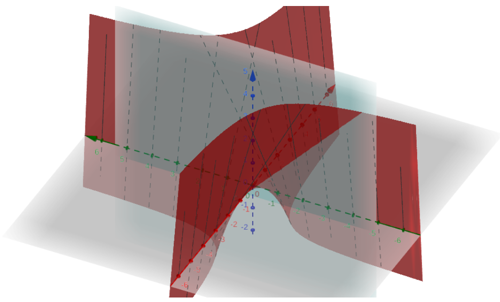
Fonte – Autor

Figura 41 – Parabolóide hiperbólico, $u(a,b) = a^2 - b^2$ intersectado por plano $x = a$, vista lateral.



Fonte – Autor

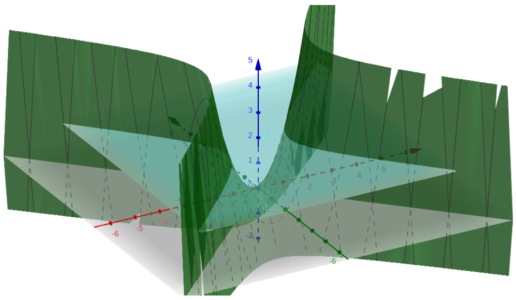
Figura 42 – Parabolóide hiperbólico, $u(a,b) = a^2 - b^2$ intersectado por plano $x = a$, vista lateral.



Fonte – Autor

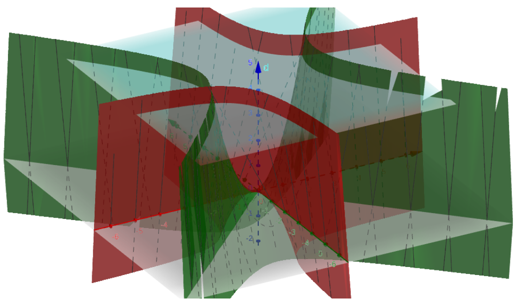
Assim, conclui-se essa sequência didática, que para além de uma sugestão de exercícios é um convite ao estudo da Matemática!

Figura 43 – Parabolóide hiperbólico, $u(a,b) = a^2 - b^2$ intersectado por plano $z = a$.



Fonte – Autor

Figura 44 – Parabolóides hiperbólicos, $u(a,b) = a^2 - b^2$ e $v(a,b) = 2ab$ intersectados por plano $z = a$.



Fonte – Autor

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, T. de S. **Números Complexos e Cônicas**. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal do Amazonas, 2014.

BOYER, U. C. M. C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard, 2012.

BRASIL. **Lei nº 9394,de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: [s.n.], 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 06/04/2012.

CAMARGO, P. B. Ivan de. **Geometria Analítica, um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas aplicações**. 1. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1899.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DELGADO KATIA FRENSEL, L. C. J. **Geometria Analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

DINIZ, K. C. S. S. e Maria Ignez de S. V. **Matemática: Ensino Médio**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LINTZ, R. G. **História da Matemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 2007. v. 1.

MEC. **Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: [s.n.], 2012. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=comcontent&view=article&id=13318&Itemid=310>. Acesso em: 06/04/2012.

PEDROSO, H. A. **História da Equação do Segundo grau**. São Paulo: [s.n.], 2012. Disponível em: <http://revistas.jatai.ufg.br/index.php/matematica/article/view/1044>. Acesso em: 30/03/2012.

QUEIROZ, E. Q. F. R. e Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. 2. ed. São Paulo: Unicamp, 2008.

ROQUE, J. B. P. C. T. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SEE, S. de Estado da E. **Caderno do Professor: Matemática**. 1. ed. São Paulo: São Paulo, 2009. v. 2.

STEWART, J. **CÁLCULO VOLUME 1 - TRADUÇÃO DA 6® EDIÇÃO NORTE-AMERICANA.** Cengage Learning Edições Ltda., 2010. ISBN 9788522109685. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7tiKAQAACAAJ>.

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.