Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Van Eudes Farias do Nascimento

Juazeiro do Norte

2018

Van Eudes Farias do Nascimento

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Professora Dra. Érica Boizan Batista

Juazeiro do Norte

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

N193d Nascimento, Van Eudes Farias do.
Demonstrações do Teorema de Pitágoras /Van Eudes Farias do Nascimento. – 2018.
64 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profª. Dra. Érica Boizan Batista

1. Pitágoras. 2. Teorema. 3. Demonstrações. 4. Atividades. I. Título.

. CDD 516

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Van Eudes Farias do Nascimento

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 29 de outubro de 2018.

Banca Examinadora

Érica B. Batista

Profª. Dra. Érica Boizan Batista - UFCA

Orientador

Maria Silvana Alcântara Costa

Profª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Clarice Dias de Albuquerque

Profª. Dra. Clarice Dias de Albuquerque – UFCA

Dedico este trabalho a minha esposa, família, amigos e orientadora.

Agradecimentos

À Deus por ter me concedido força, determinação e coragem na busca deste título.

À minha esposa Nayara Tavares, que não mediu esforços em me ajudar e incentivar, Sempre presente me dizendo para não desistir.

Aos meus pais e irmãs pelo amor expresso de várias formas.

Aos colegas Luiz Carlos, Márcio e Mônik pela amizade e companheirismo durante todo o curso, em especial ao colega Carlos Augusto pelo incentivo e a disponibilidade em ajudar com a parte gráfica deste trabalho.

À minha orientadora Dra. Érica Boizan Batista pela atenção, paciência e dedicação na realização deste trabalho.

À Professora e Coordenadora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa pela dedicação e ensinamentos.

À todos os Professores que lecionaram nessa turma pelos conhecimentos transmitidos.

Aos meus colegas de trabalho e alunos pela compreensão e apoio nos momentos difíceis.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo do Teorema de Pitágoras. Pitágoras e sua Escola Pitagórica tiveram grande importância no desenvolvimento de conhecimentos em várias áreas, em especial, na Matemática. Apesar de não serem os primeiros a perceber a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, os pitagóricos foram os primeiros a demonstrá-la. Somos apresentados à varias demonstrações deste teorema, bem como de sua recíproca e também de sua generalização. Concluímos este trabalho com a sugestão de algumas atividades para serem aplicadas em sala de aula.

Palavras-chave

Pitágoras, Teorema, demonstrações, atividades.

Abstract

This work is dedicated to the study of the Pythagorean Theorem. Pythagoras and his Pythagorean School had great importance in the development of knowledge in several areas, especially in mathematics. Although not the first to perceive the relationship between the measurements on the sides of a right triangle, the Pythagoreans were the first to demonstrate it. We are presented with various demonstrations of this theorem, as well as of its reciprocal and also of its generalization. We conclude this work with the suggestion of some activities to be applied in the classroom.

Keywords

Pythagoras, Theorem, demonstrations, activities.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Apresentar demonstrações matemáticas no ensino básico é algo muito difícil, os alunos geralmente esperam trabalhar com números e fórmulas. As demonstrações, através do uso de resultados prévios para se alcançar novos resultados, ajudam muito no desenvolvimento do raciocínio além de fazer crescer no aluno a vontade de contestar, não somente resultados matemáticos, mas também problemas que ocorram no meio em que esta inserido.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais belos e importantes resultados da matemática. Originalmente seu enunciado é: **Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.**

Nesse trabalho apresentamos diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas delas elaboradas por matemáticos reconhecidos e brilhantes, bem como um breve histórico sobre a vida de Pitágoras e a sociedade fundada por ele. Finalizamos propondo atividades baseadas em quebra-cabeças pitagóricos para serem utilizadas em sala de aula com o intuito de estimular e facilitar a compreensão de demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Os capítulo estão divididos como segue abaixo:

No Capítulo 2, apresentamos um breve histórico sobre a vida de Pitágoras passando pela Escola Pitagórica e suas contribuições para grandes descobertas.

No Capítulo 3, apresentamos diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, começando pela demonstração atribuída aos pitagóricos e finalizamos esse capítulo com algumas demonstrações de matemáticos reconhecidos e amadores.

No Capítulo 4, são apresentadas demonstrações feitas por comparações de áreas, semelhança de triângulos, fórmula de Heron, vetores e dissecção.

No Capítulo 5, apresentamos a generalização do Teorema de Pitágoras bem como sua demonstração utilizando razão de semelhança e em seguida outra demonstração desenvolvida pelo matemático húngaro George Pólya.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas algumas atividades baseadas em quebra-cabeças pitagóricos para estimular e auxiliar o ensino de demonstrações do Teorema de Pitágoras.

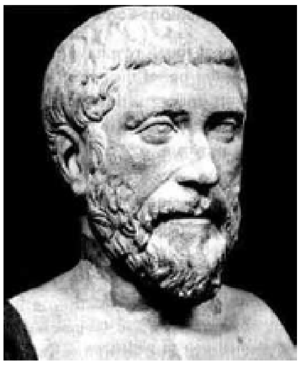
2 UMA BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Contar a história da disciplina que esta sendo estudada pode ser uma forma de ilustrar as aulas e motivar os alunos. Assim, também o professor de matemática pode e deve lançar mão desse recurso, apresentando à classe fatos interessantes sobre a vida de matemáticos famosos, bem como descobertas e curiosidades nessa área do conhecimento. (ROSA NETO, 1987, p. 7)

2.1 Pitágoras

Pitágoras nasceu por volta de 570 a.C. na ilha de Samos, na Grécia, e foi um dos personagens mais importantes na história da matemática. Não existem relatos originais sobre sua vida e trabalho, os primeiros escritos sobre sua vida datam de 150 e 250 anos depois de sua morte e são baseados em histórias transmitidas de forma oral.

Figura 1: Busto de Pitágoras.



Fonte: [1]

Quando tinha entre 18 e 20 anos, Pitágoras viajou a Mileto e lá encontrou Tales, que exerceu uma forte impressão no jovem Pitágoras, despertando nele o interesse por matemática e astronomia. Seguindo os conselhos de Tales, viajou ao Egito para se aperfeiçoar e aprender mais sobre essas ciências.

No Egito, visitou templos e participou de discussões com sacerdotes, iniciando-se nos rituais e crenças que posteriormente colocaria em prática na sociedade que fundaria na Itália.

Em 508 a.C. sua Escola Pitagórica foi violentamente atacada e Pitágoras teve que fugir para Metaponto. Quanto à sua morte, alguns autores afirmam que suicidou-se após a queda de sua sociedade.

2.2 A Escola Pitagórica

Após ter viajado bastante pelo Egito e Sicília, Pitágoras retornou para Samos, que se encontrava sob o domínio dos Persas, isso o fez emigrar para Crotona, cidade localizada ao sul da Itália, onde, aos 56 anos, fundou uma escola que era uma verdadeira sociedade secreta e tinha forte influência dos costumes que ele observou no Egito. A Escola Pitagórica era um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais que rapidamente ganhou notoriedade e atraiu inúmeros seguidores. Esta sociedade tinha como emblema o pentágono estrelado (pentagrama).

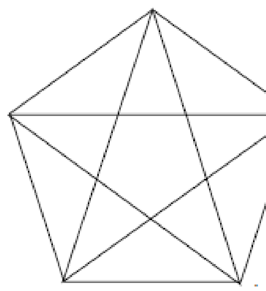


Figura 2: Pentagrama

Pitágoras foi o mentor desta sociedade dentro de um restrito círculo de adeptos. Os membros da Escola Pitagórica eram divididos em ouvintes e matemáticos, somente aos matemáticos eram revelados os verdadeiros segredos dessa sociedade, os ouvintes poderiam se tornar matemáticos após três anos de rigorosos estudos. Os membros dessa sociedade eram proibidos de divulgar as suas descobertas, não havia propriedade individual, tudo pertencia aos pitagóricos. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, não foi descoberto e demonstrado necessariamente por Pitágoras de Samos, mas foi uma descoberta da sua escola.

Para ser admitido na escola era exigido o cumprimento de algumas regras, incluindo um período probatório de cinco anos e a exigência de total silêncio perante os membros mais antigos da Escola Pitagórica.

Para os membros da Escola Pitagórica, a matemática era mais que uma busca intelectual, era um mecanismo para explicar o mundo. Alguns de seus pensamentos ficaram conhecidos pela humanidade, dos quais podemos destacar:

- Educai as crianças e não será preciso punir os homens.
- Não é livre quem não obteve domínio sobre si.
- Pensem o que quiserem de ti; faz aquilo que te parece justo.
- O que fala semeia; o que escuta recolhe.
- Ajuda teus semelhantes a levantar a carga, mas não a carregues.
- Com ordem e com tempo encontra-se o segredo de fazer tudo e tudo fazer bem.
- Todas as coisas são números.
- A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar é aproximar-se de Deus.
- A evolução é a lei da vida, o número é a lei do universo, a unidade é a lei de Deus.
- A vida é como uma sala de espetáculos: entra-se, vê-se e sai-se.
- A sabedoria plena e completa pertence aos deuses, mas os homens podem desejá-la ou amá-la tornando-se filósofos.
- Anima-te por teres de suportar as injustiças; a verdadeira desgraça consiste em cometê-las.

Quanto aos desenvolvimentos de trabalhos matemáticos, atribui-se à Escola Pitagórica as seguintes descobertas:

1. De estabelecer em que proporções uma corda deve ser dividida para a obtenção das notas musicais dó, ré, mi, etc.
2. A classificação dos números em: pares e ímpares, primos e compostos, figurados, perfeitos.
3. O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum.
4. Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
5. Que a soma das áreas dos quadrados determinados pelos lados catetos de um triângulo retângulo é igual a área do quadrado determinado pela hipotenusa.
6. O primeiro número irracional, a raiz quadrada de 2.

2.3 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, esse possui um ângulo reto, o lado oposto a esse ângulo é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos. Originalmente o Teorema de Pitágoras foi enunciado da seguinte forma: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados são cada um dos catetos desse mesmo triângulo".

Isso nos leva a uma pergunta: Se em um triângulo o quadrado da medida de um lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, esse triângulo é retângulo? A resposta para essa pergunta é sim e a demonstração segue abaixo.

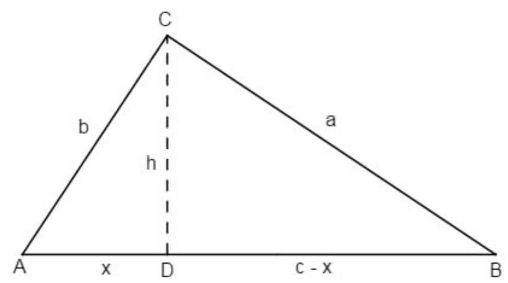


Figura 3: Triângulo retângulo

Considere um triângulo ABC, como na Figura 3. Com $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ para o qual temos por hipótese que $a^2 = b^2 + c^2$.

Vamos supor que $B\hat{A}C < 90^o$ e considerar $b \leq c$.

Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$ como na Figura 3.

Como o triângulo ADC é retângulo em D, temos $b^2 = h^2 + x^2$, assim $h^2 = b^2 - x^2$.

Temos também que o triângulo CDB é retângulo em D, assim $a^2 = h^2 + (c - x)^2$. Substituindo h^2 e desenvolvendo $(c - x)^2$ temos,

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

O que contradiz a hipótese inicial de que $a^2 = b^2 + c^2$.

Vamos supor que $B\hat{A}C > 90^o$.

Assim, o ponto D, projeção de C sobre a reta suporte de AB, cai fora do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$ como na Figura 4.

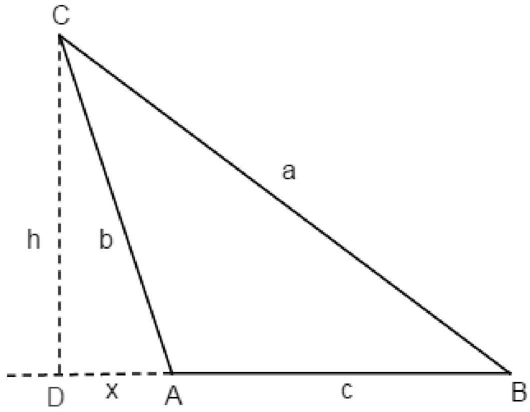


Figura 4: Triângulo

Como o triângulo ADC é retângulo em D, temos $b^2 = h^2 + x^2$, assim $h^2 = b^2 - x^2$.

Temos também que o triângulo CDB é retângulo em D, assim $a^2 = h^2 + (c+x)^2$. Substituindo h^2 e desenvolvendo $(c+x)^2$ temos,

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

O que contradiz a hipótese inicial de que $a^2 = b^2 + c^2$.

Ora, se $B\hat{A}C$ não é maior nem menor que 90^o, podemos concluir que $B\hat{A}C = 90^o$, ou seja, o triângulo é retângulo, como queríamos provar.

3 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

As demonstrações apresentadas nesse capítulo podem ser encontradas em [1], [4] e [7].

Por ser um dos resultados mais belos e conhecidos da matemática, várias demonstrações são conhecidas para O Teorema de Pitágoras. O professor de matemática norte-americano Elisha Scott Loomis durante 20 anos colecionou demonstrações do Teorema de Pitágoras e organizou o livro The Pythagorean Propositon (A Proposição de Pitágoras), com mais de 300 demonstrações diferentes desse teorema.

Neste capítulo apresentaremos algumas provas do Teorema de Pitágoras. Serão apresentadas provas desenvolvidas por matemáticos brilhantes como Bhaskara e Euclides; e também de matemáticos amadores, como o ex-presidente americano J. A. Garfield.

3.1 Demonstração atribuída aos Pitagóricos

A seguir apresentamos uma demonstração que é atribuída aos pitagóricos.

Na Figura 5, temos um quadrado de lado $b + c$. Destaquemos quatro triângulos retângulos de lados a, b e c, assim restando um quadrado de lado a. Note que os lados do quadrado de lado a são hipotenusas dos triângulos retângulos sombreados.

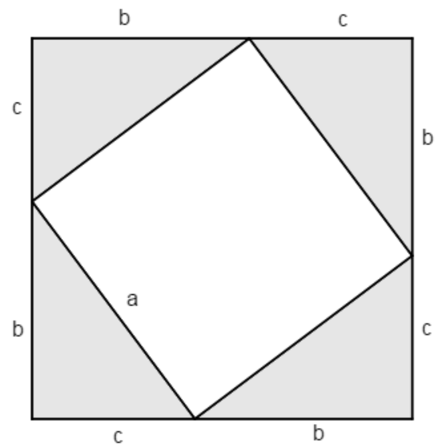


Figura 5: Quadrado de lado $b + c$ e quadrado de lado a

Na Figura 6, temos também um quadrado de lado $b + c$. Destaquemos os mesmos quatro triângulos retângulos da Figura 5 mas de uma forma que restem apenas dois quadrados, um de lado b e outro de lado c.

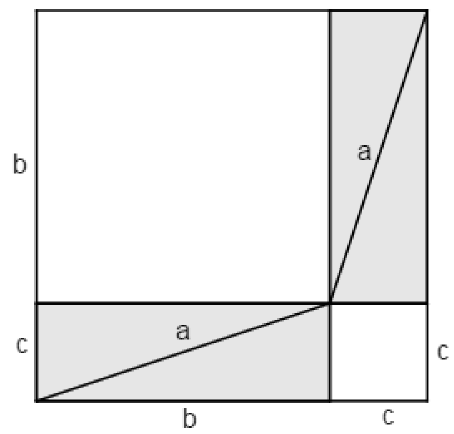


Figura 6: Quadrado de lado $b + c$ onde são destacados quatro triângulos

Observe que, se retirarmos os quatro triângulos da Figura 5 e também da Figura 6, as áreas restantes ainda serão iguais, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

3.2 Demonstração de Bhaskara

Nascido em 1114, em Vijayapura, Índia, Bhaskara é conhecido em sua terra natal pelo nome Bhaskaracharya - Bhaskara, o professor. Filho de Astrólogo eminente, Bhaskara assumiu o posto de chefe no Observatório Astronômico em Ujjain, o centro avançado de matemática indiana na época.

O trabalho de Bhaskara é concentrado em seis livros: O Lilavati (A Beleza) sobre matemática de modo geral; o Bijaganita (extração de raízes) sobre álgebra; o Siddhantasiromani sobre astronomia matemática e sobre esferas; o Vasanabhasya que são os comentários de Bhaskara sobre o Siddhantasiromani; o Karanakutuhala (cálculo das maravilhas astronômicas) que é uma versão reduzida do Siddhantasiromani e, finalmente, Vivarana que são comentários sobre o livro Shishyadhividdhidatantra de Lalla, cujo livro é dividido em duas partes: sobre o cálculo da posição dos planetas e sobre a esfera.

Bhaskara foi capaz de realizações notáveis como a expanção dos conceitos de aritmética com o número zero de Brahmagupta, matemático que introduziu o conceito de número zero e de aritmética com números negativos.

Aqui iremos mostrar a demonstração do Teorema de Pitágoras feita por Bhaskara.

Considere o triângulo retângulo ABC com hipotenusa a e catetos b e c. Construa um quadrado $BCDE$ de lado a, como mostra a Figura 7.

A partir da Figura 7 construa a Figura 8, repetindo o mesmo processo para cada lado do quadrado.

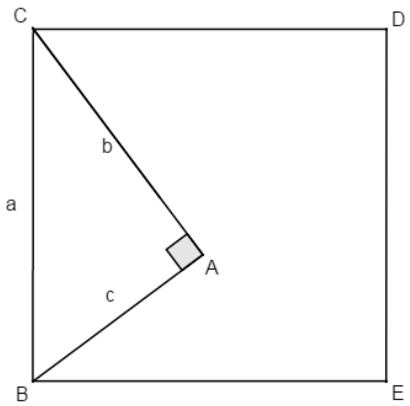


Figura 7: Quadrado de lado a.

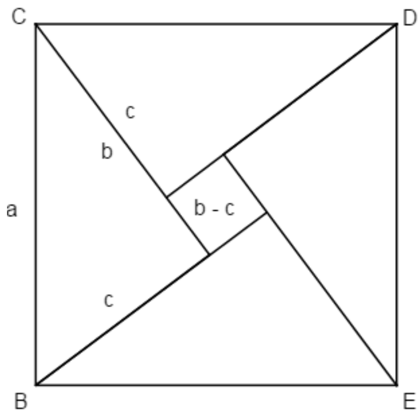


Figura 8: Quadrado de lado a com triângulos sombreados.

Os quatro triângulos sombreados são congruentes e cada um tem área $\frac{1}{2} \cdot bc$, enquanto o quadrado Q de lado $b - c$, que aparece em branco na Figura 8, tem área $(b - c)^2$.

Assim podemos escrever

$$\text{área}(BCDE) = \text{área}(Q) + 4 \cdot \text{área}(ABC),$$

ou seja,

$$a^2 = (b - c)^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2}bc).$$

Desenvolvendo o segundo membro dessa última equação obtemos

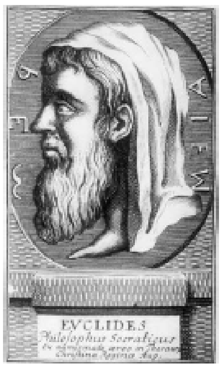
$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc.$$

Assim, provando que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.3 Demonstração de Euclides

Pouco se sabe a respeito de Euclides de Alexandria. Acredita-se que ele nasceu por volta de 325 a.C. e faleceu, aproximadamente em 265 a.C., em Alexandria. Também conhecido como o Pai da Geometria, ele é até hoje, na história da matemática, considerado como um dos mais significativos estudiosos desta área. A Euclides é atribuída uma das maiores obras da matemática: Os Elementos, que reunia toda matemática conhecida até o momento. Este trabalho foi a base do ensino matemático por 2000 anos.

Figura 9: Euclides de Alexandria.



Fonte: [1]

A proposição 47 do livro I de Elementos de Euclides nos apresenta a seguinte demonstração do Teorema de Pitágoras:

Considere o triângulo retângulo ABC, de lados medindo a, b e c, como na Figura 10.

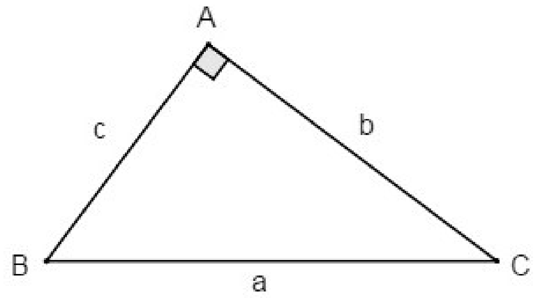


Figura 10: Triângulo retângulo.

Construa a Figura 11, onde $BCKF$ é um quadrado de lado a, $ALMC$ é um quadrado de lado b, $ABGH$ é um quadrado de lado c e AD é a altura do triângulo ABC, relativamente à hipotenusa BC.

Prolongando-se DA e GH, determinamos o ponto J; prolongando-se FB, determina-se o ponto I sobre o segmento HJ e prolongando-se AD, determina-se E sobre FK.

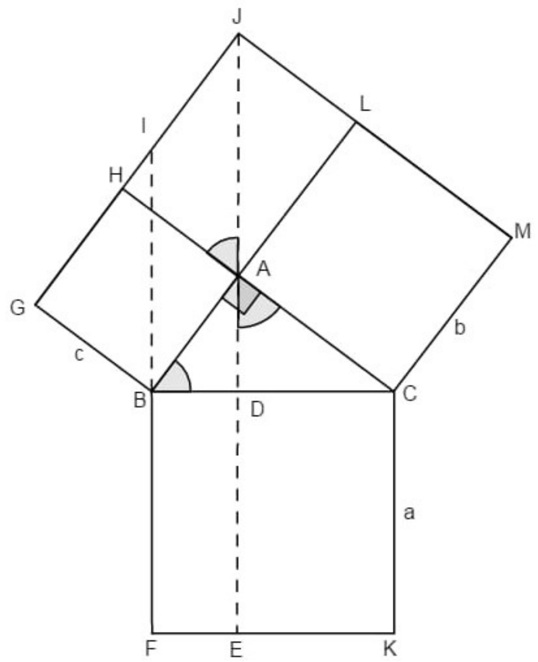


Figura 11: Triângulo retângulo com quadrados construídos sobre seus lados.

Assim o ângulo $A\hat{B}C = H\hat{A}J = C\hat{A}D$ ($A\hat{B}C$ e $H\hat{A}J$ são complementos do ângulo $A\hat{C}B$) e como $AB = AH$, pois ambos são lados do quadrado de lado c, vem que os triângulos ABC e HAJ são congruentes pelo caso ALA. Desse fato resulta que

$DE = BC = AJ$.

O retângulo $BDEF$ e o paralelogramo $ABIJ$ têm a mesma base DE e a mesma altura BD, portanto têm a mesma área.

Também podemos observar que o quadrado $ABGH$ e o paralelogramo $ABIJ$ têm mesma base AB e a mesma altura BG, logo têm a mesma área. Assim, podemos concluir que área$(ABGH)$ = área$(BDEF)$.

Com um raciocínio análogo, podemos mostrar que a área$(DCKE)$ = área$(ACML)$. Assim, podemos escrever

$$\text{área}(BCKF) = \text{área}(DCKE) + \text{área}(BDEF) = \text{área}(ABGH) + \text{área}(ACML).$$

Portanto, concluimos que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.4 Demonstração de Garfield

James Abram Garfield assumiu a presidência dos Estados Unidos em 1881 durante 200 dias, pois foi assassinado neste mesmo ano. Em 1876, alguns anos antes de tornar-se presidente, Garfield elaborou uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras.

Figura 12: James Abram Garfield.

Fonte: [1]

Seja ABC um triângulo retângulo de lados a, b e c (Figura 13), faça a construção abaixo:

1. Prolongue AC para obter o ponto D de forma que se tenha $CD = c$.

2. Construa por D o segmento DE, que seja perpendicular a AD e tal que $DE = b$.

3. Unindo os pontos B e E, obtemos o trapézio $ABED$ de bases $AB = c$, $ED = b$ e altura $b + c$ conforme Figura 14.

Nessa figura, observamos que

$$\text{área}(ABED) = \text{área}(ABC) + \text{área}(BCE) + \text{área}(CDE), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}bc, \text{ assim,}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2.$$

Resultando no que queremos, $a^2 = b^2 + c^2$.

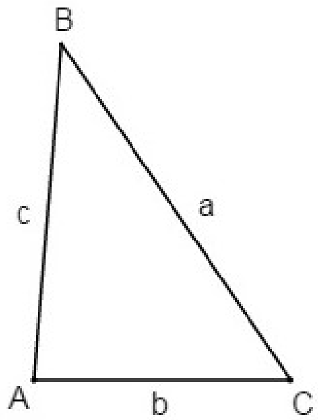


Figura 13: Triângulo retângulo.

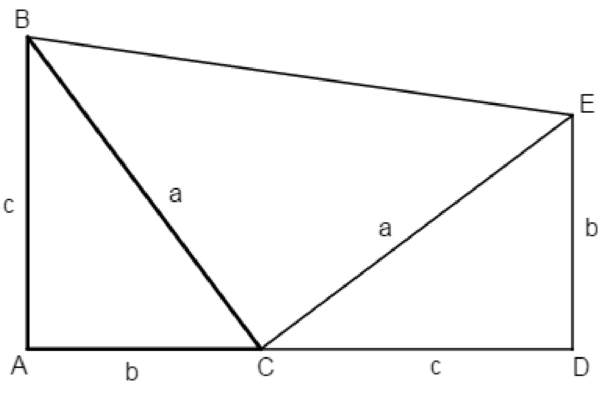


Figura 14: Triâgulos retângulos.

3.5 Demonstração de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci nasceu na Itália em 1452. Ao longo de sua vida, da Vinci se tornou pintor, arquiteto, designer, engenheiro e matemático. Estudando os trabalhos de Leon Batistta e Piero Della Francesca (sobre a pintura em perspectiva) teve seus primeiros contatos com a geometria, aprofundando-se com o estudo de Euclides e Paccioli. Leonardo da Vinci também demonstrou o Teorema de Pitágoras. Vejamos abaixo.

Figura 15: Leonardo Da Vinci.

Fonte: [1]

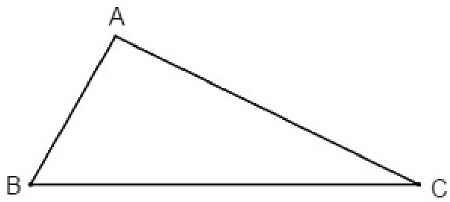


Figura 16: Triângulo retângulo.

Considere um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c, como na Figura 16 e faça a seguinte construção:

1. Construa quadrados $BCDE$, $ABFH$ e $ACGI$ sobre os lados desse triângulo.

2. Construa também o triângulo EDJ, congruente ao triângulo CBA e determine os segmentos HI, FG e AJ, como mostra a Figura 17.

Os quadriláteros $ACDJ$ e $CBFG$ são congruentes ($CD = BC$, $DJ = AB = BF$, $EJ = AC = CG$, $A\hat{C}D = B\hat{C}G$ e $C\hat{D}J = C\hat{B}F$). Também são congruentes os quadriláteros $ABEJ$ e $FHIG$. Resulta, portanto, que a área$(ACDJ)$ = área$(CBFG)$ e a área$(ABEJ)$ = área$(FHIJ)$, e daí área$(FHIGCB)$ = área$(ACDJEB)$.

Como os triângulos HIA, EDJ e BCA são congruentes, temos

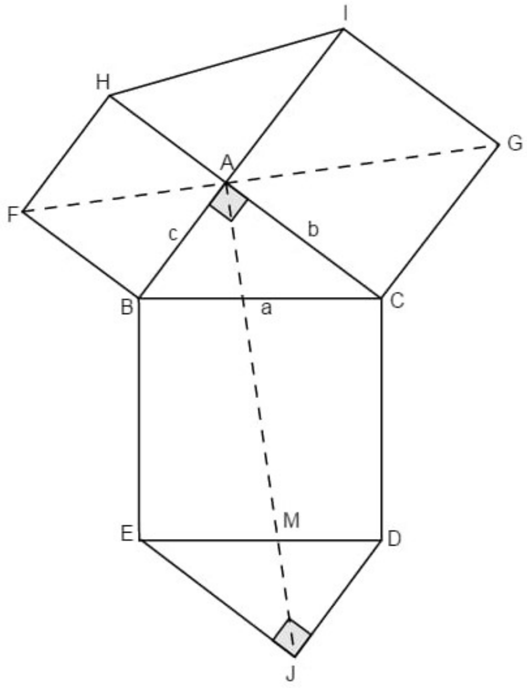


Figura 17: Construção de Leonardo da Vinci.

$$\text{área}(CDML) = \text{área}(ACDJ) - [(MDJ) + (ACL)] = \text{área}(BCGF) - \text{área}(ABC) = \text{área}(ACG) + \text{área}(ABF),$$

$$\text{área}(BLME) = \text{área}(AFH) + \text{área}(AIG).$$

Das equações acima, observe que

$$\text{área}(BCDE) = \text{área}(ACGI) + \text{área}(ABFH),$$

portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

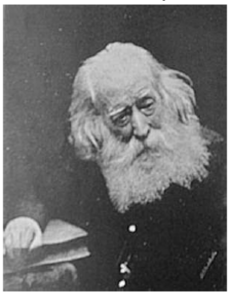
3.6 Demonstração de Perigal

Henry Perigal, Inglês, nasceu em 1 de abril de 1801 e faleceu em junho de 1898. O que se sabe hoje a seu respeito é devido a seu irmão, Frederick Perigal (dez anos mais jovem), que, na época da morte de Perigal, reuniu em um pequeno livro dados da vida de Henry e de outros.

Aos seus quarenta anos, Perigal conseguiu um emprego como corretor na empresa de fundos de investimentos de um amigo onde permaneceu até a aposentadoria com

87 anos. Segundo ele próprio, teria se aposentado para devotar mais tempo às causas científicas.

Figura 18: Henry Perigal.



Fonte: [1]

Em 1830, anunciou uma prova simples e elegante do Teorema de Pitágoras. Esta demonstração ficou conhecida como dissecção de Perigal.

Seja o triângulo ABC de lados a, b e c com $b > c$ (sem perda de generalidade). Obtenha a Figura 19 com a seguinte construção:

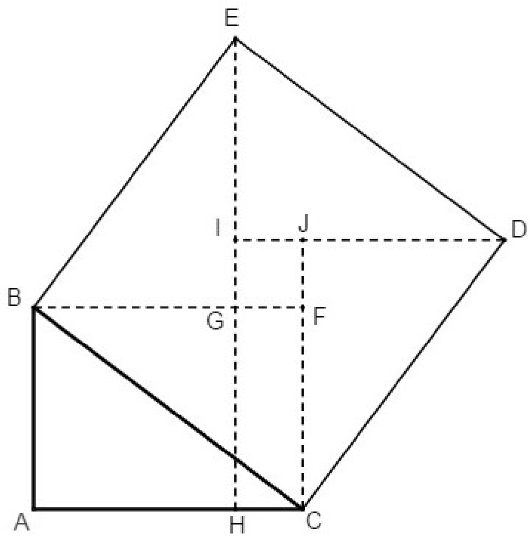


Figura 19: Triângulo retângulo com um quadrado construído sobre a hipotenusa.

1. Construa sobre o lado a desse triângulo o quadrado $BCDE$.

2. Construa o retângulo $BACF$ e marque G sobre BF de modo que $BG = AB = c$.

3. Prolongue EG para determinar H em AC.

4. O quadrilátero $BGHA$ é um quadrado de lado c, os triângulos BEG e BCA são congruentes pelo caso LAL, pois $BE = BC$ (lado do quadrado $BEDC$), $BA = BG$ (lado do quadrado $BAHG$) e $E\hat{B}G = 90^o - G\hat{B}C = A\hat{B}C$.

5. Trace DI paralelo a AC e prolongue CF para determinar J em DI.

6. Os triângulos GBE, JDC, IED e FCB são todos congruentes ao triângulo ABC pelo caso LLL.

Considerando esses quatro triângulos e o quadrado $FGIJ$ de lado $b-c$, temos

$$\text{área}(BCDE) = 4\cdot\text{área}(ABC) + \text{área}(FGIJ),$$

ou seja,

$$a^2 = 4\cdot\frac{1}{2}bc + (b-c)^2.$$

Desenvolvendo $(b-c)^2$, obtemos

$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2,$$

concluindo assim que, $a^2 = b^2 + c^2$.

Uma outra demonstração, também atribuída a Perigal, segue abaixo.

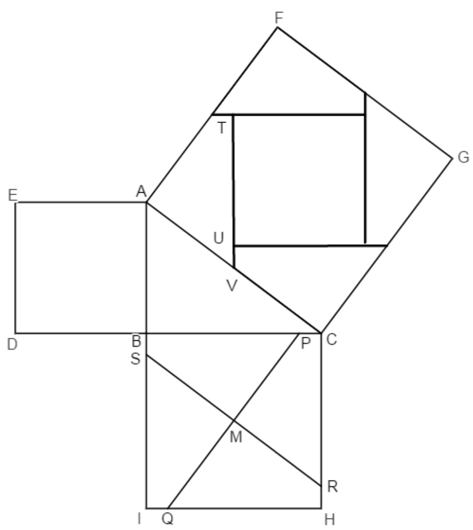


Figura 20: Construção para a demonstração de Perigal.

Considere a Figura 20, os segmentos RS e PQ são traçados de tal forma que RS é paralelo a AC, PQ é perpendicular a RS e M é o ponto de intersecção das diagonais do quadrado $BCHI$.

O fato dos segmentos MP, MQ, MR e MS serem iguais a metade do lado do quadrado $AFGC$ e o fato das 4 peças destacadas do quadrado $BCHI$ possuírem ângulo reto no vértice M, implicam que estas podem ser deslocadas sobre o quadrado $AFGC$ para se encaixarem perfeitamente, do modo como esta ilustrado na Figura 20. Assim, mostramos que as 4 peças cobrem todo o quadrado $AFGC$, exceto por um quadrilátero central, que possui, claramente, somente ângulos retos. Para terminar esta demonstração precisamos mostrar que este quadrilátero central é igual ao quadrado $ABDE$.

Vamos calcular o lado TU deste quadrilátero central. O quadrilátero $ACRS$ é um paralelogramo, logo $CR = AS$, assim podemos escrever que

$$TU = TV - UV = CR - BS = AS - BS = AB.$$

De modo análogo podemos provar que todos os lados do quadrilátero central são iguais aos lados do quadrado $ABDE$. Provando assim que $a^2 = b^2 + c^2$.

4 OUTRAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

As demonstrações apresentadas neste capítulo podem ser encontradas em [1], [4] e [7].

Nesta seção apresentaremos algumas provas do Teorema de Pitágoras utilizando diversos conceitos de geometria como: áreas, semelhança de triângulos, vetores, fórmula de Heron, teorema de cordas, Dissecção e outros.

4.1 Demonstração com uso de áreas e relações métricas no triângulo retângulo

No triângulo retângulo ABC de lados a, b e c construa sobre seus lados quadrados $BCDE$, $ACFG$, $ABHI$ e o segmento AJ, como na Figura 21.

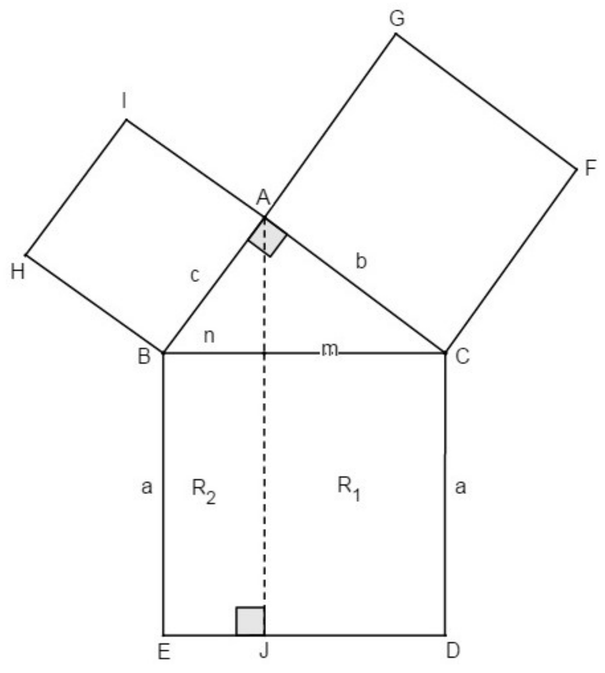


Figura 21: Triângulo retângulo com quadrados construídos sobre seus lados.

Na Figura 21, R_1 é um retângulo cujos lados medem a e m, e R_2 é outro retângulo de lados medindo a e n.

Observe que

$$\text{área}(EBCD) = \text{área}(R_1) + \text{área}(R_2),$$

assim $a^2 = a \cdot a = a \cdot (m+n) = am + an$. Das relações métricas no triângulo retângulo, temos $am = b^2$, $an = c^2$, e daí $a^2 = b^2 + c^2$.

4.2 Demonstração por construção e comparação de áreas

Considerando o triângulo retângulo ABC de lados a, b e c como na Figura 22, construímos a Figura 23, onde $BCDE$ é um quadrado de lado a.

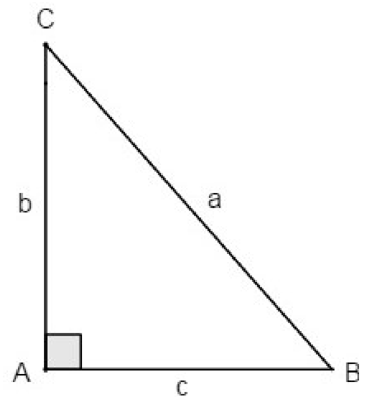


Figura 22: Triângulo retângulo.

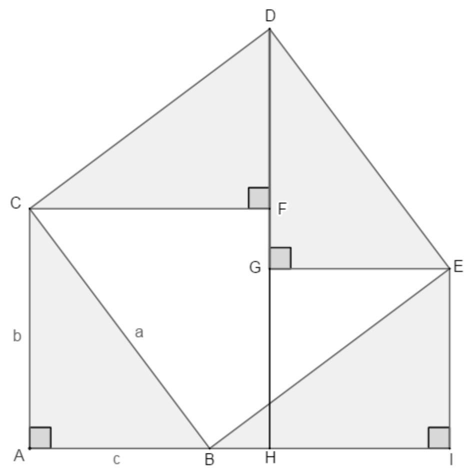


Figura 23: Construção para a demonstração.

Os quatro triângulo sombreados são congruentes entre si, pois $D\hat{C}F = 90^o - B\hat{C}F = A\hat{C}B, D\hat{E}G = 90^o - B\hat{E}G = I\hat{E}B, C\hat{D}F = D\hat{E}G$ por serem complementos de $A\hat{C}B, E\hat{B}I = A\hat{C}B$ por serem complementos de $A\hat{B}C$, $B\hat{E}I = A\hat{B}C$ por serem complementos de $I\hat{B}E = A\hat{C}B$ e todos eles têm um lado de comprimento a, assim temos que

$$AB = EI = GE = DF = c.$$

Comparando as áreas da Figura 23, temos

$$\text{área}(ACFH) + \text{área}(GEIH) = \text{área}(BCFGE) + 2\cdot\ \text{área}(ABC) = \text{área}(BCDE).$$

$$b^2 + c^2 = a^2 - \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} + 2 \cdot \frac{bc}{2} = a^2$$

Concluindo assim que $a^2 = b^2 + c^2$.

4.3 Demonstração por áreas

Seja $ABCD$ um quadrado de lado L. Tome b e c de modo que $b + c = L$.

Traçando segmentos de comprimento a, forme triângulos retângulos de medidas a, b e c como na Figura 24.

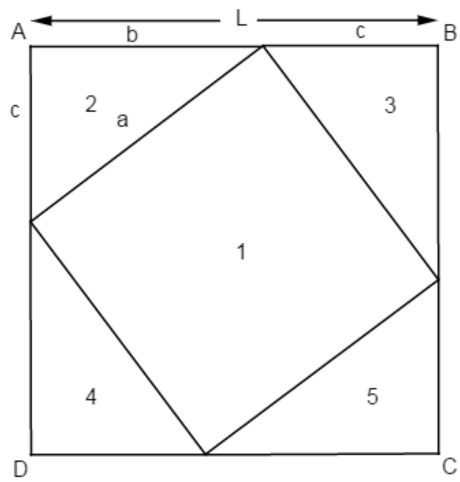


Figura 24: Quadrado de lado $b + c$.

Esses quatro triângulos são todos congruentes entre si pelo caso LLL. E, portanto, têm a mesma área dada por $\dfrac{bc}{2}$.

Conforme Figura 24 concluimos que área$(ABCD)$ = área(1) + 4$\cdot$ área(2), ou seja,

$$L^2 = a^2 + \frac{4bc}{2} = a^2 + 2bc.$$

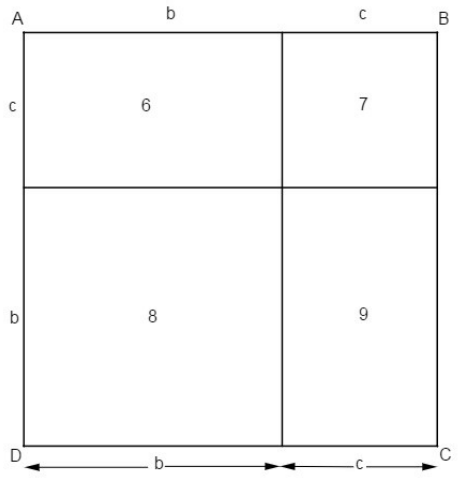


Figura 25: Quadrado dividido em quatro figuras

O mesmo quadrado pode ser dividido como mostra a Figura 25, assim, temos que

$$L^2 = \text{área}(6) + \text{área}(7) + \text{área}(8) + \text{área}(9) = bc + c^2 + b^2 + bc.$$

Ou seja, $L^2 = b^2 + 2bc + c^2$. Comparando as equações, temos

$$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2.$$

Assim, podemos concluir que $a^2 = b^2 + c^2$.

4.4 Demonstração com uso de vetores

Seja o triângulo retângulo ABC de lados a, b e c como na Figura 26.

Considerando os lados desse triângulo como vetores, temo $a = |\overrightarrow{BC}|$, $b = |\overrightarrow{AC}|$ e $c = |\overrightarrow{BA}|$. Além disso,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Temos também que,

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{BA}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|.$$

Como $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, obtemos, $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$.

Portanto, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

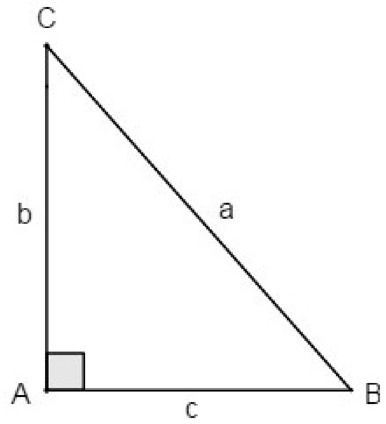


Figura 26: Triângulo retângulo para a demonstração com vetores.

4.5 Demonstração por semelhança de triângulos

Considere o triângulo retângulo ABC (Figura 27), onde a, b e c são os comprimentos dos lados desse triângulo e h é o comprimento da altura relativa a hipotenusa BC.

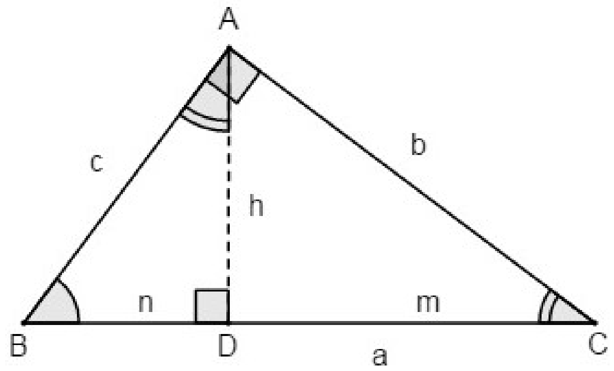


Figura 27: Triângulo retângulo para a demonstração por semelhança.

Observe que, a partir da Figura 27, podemos destacar os triângulos ABD e ADC.

E observe também que os triângulos ABC, ABD e ACD são semelhantes pois possuem ângulos congruentes. Assim temos, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{n}{c}$, daí $c^2 = an$ e também $\dfrac{b}{a} = \dfrac{m}{b}$, portanto, $b^2 = am$.

Somando membro a membro essas duas últimas igualdades e observando na Figura 27 que $a = m + n$, temos

$$b^2 + c^2 = am + an = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2.$$

4.6 Demonstração com a fórmula de Heron

Considere o triângulo retângulo ABC de lados a, b e c como mostra a Figura 28.

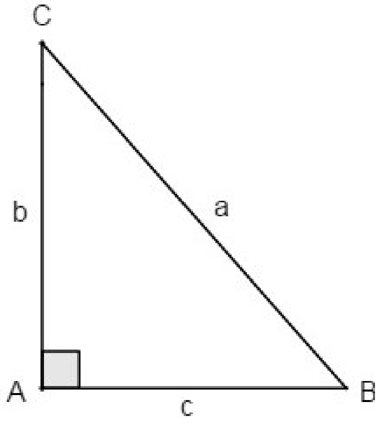


Figura 28: Triângulo retângulo.

Pela fórmula de Heron, a área desse triângulo é dada por

$$\text{área}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Efetuando os produtos dentro do radical e sabendo que o semiperímetro $p = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)$ obtemos

$$\text{área}(ABC) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Também sabemos que $\text{área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot bc$. Comparando essas duas equações temos

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{1}{2} \cdot bc.$$

Ou seja,

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4 \cdot b^2c^2.$$

Efetuando as devidas simplificações obtemos $(b^2+c^2-a^2)^2 = 0$, portanto $a^2 = b^2+c^2$.

4.7 Demonstração por dissecção

Considere o triângulo retângulo ABC, de lados a, b e c como na Figura 29.

Construa sobre os lados desse triângulo os quadrados $BCDE$, $ACIH$ e $ABFG$ como na Figura 30.

Com base na Figura 30 faça as seguintes construções:

1. Prolongue EB até encontrar AG em J.

2. Prolongue DC até encontrar HI em L.

3. Construa LK perpendicular a CL, com K em AH.

4. Construa EM paralelo a AB e DO paralelo a AC, com M em BC e O em EM.

5. Prolongue FB até encontrar EM em N.

6. Marque P em BE de modo que $BP = BJ$.

7. Trace PQ perpendicular a EM e marque o ponto Q em EM.

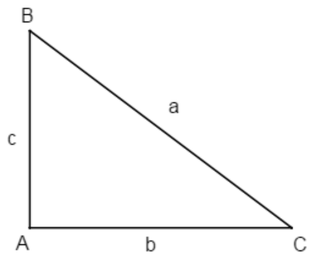


Figura 29: Triângulo retângulo para a demonstração por dissecção.

Observe que $EBN \equiv ABC$, pois, $BC = BE$ e $A\hat{B}C = E\hat{B}N$, assim $AB = BN$ e consequentemente $BNM \equiv BAJ$.

$CIL \equiv CAB$ pois, $CI = AC$ e $I\hat{C}L = A\hat{C}B$. $DOE \equiv CAB$ pois, $DE = BC$ e $D\hat{E}O = A\hat{B}C$, assim $CIL \equiv CAB \equiv DOE$.

Dessa forma podemos afirmar que $ODCM \equiv LCAK$.

$PQE \equiv KHL$, pois, os ângulos internos de PQE são congruentes aos ângulos internos de KHL e também $HL = EQ$ pois, $EN = AH = HI$, $QN = FG = AB = LI$, logo $HL = HI - LI = EN - QN = EQ$.

$BFGJ \equiv BNQP$, pois, $BP = BJ$, $FG = AB = BN$, $F\hat{B}J = P\hat{B}N$ e $B\hat{J}G = B\hat{P}Q$. De todo o exposto acima, podemos concluir que

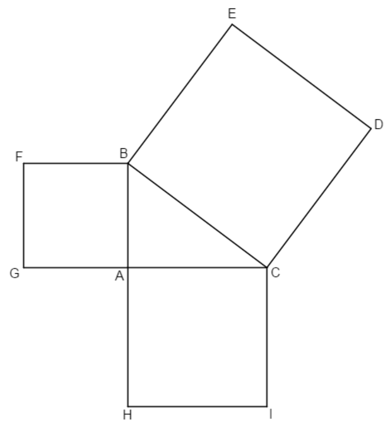


Figura 30: Quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

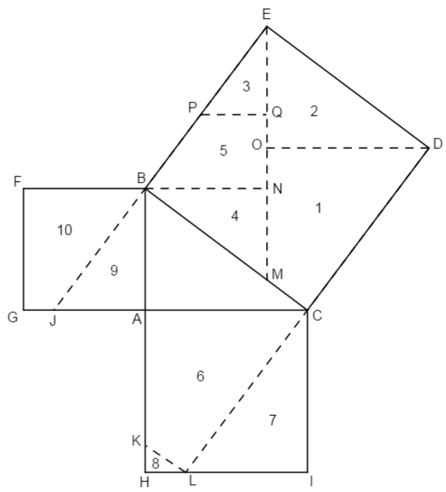


Figura 31: Quadrados com as construções dos segmentos.

$$\text{área}(1) + \text{área}(2) + \text{área}(3) + \text{área}(4) + \text{área}(5) = (\text{área}(6) + \text{área}(7) + \text{área}(8)) + (\text{área}(9) + \text{área}(10)),$$

ou seja, área$(BCDE)$ = área$(ACIH)$ + área$(ABFG)$. Provando então que $a^2 = b^2+c^2$.

4.8 Outra demonstração por dissecção

Considere o triângulo retângulo ABC, e faça as seguintes construções:

1. Construa quadrados sobre os lados deste triângulo.

2. Considere agora o quadrado maior, de lado BC, reflita o triângulo ABC em torno do Lado BC, de modo que o triângulo refletido fique dentro do quadrado maior.

3. Construa mais três triângulos retângulos congruentes ao inicial sobre os lados do quadrado maior, como sugere a Figura 32.

4. Divida dois destes triângulos em outros dois triângulos, de modo que um destes triângulos seja retângulo isósceles.

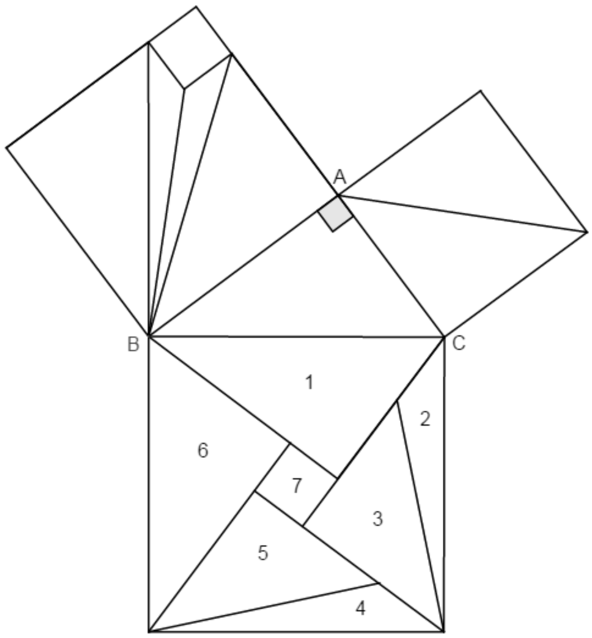


Figura 32: Triângulo retângulo com quadrados construídos sobre seus lados.

Observe que os triângulos isósceles 3 e 5 tem catetos de medida AC por construção logo, encaixam-se no quadrado menor de lado AC. Os triângulos 1 e 6 possuem um dos catetos com medida AB e outro com medida AC e sua hipotenusa mede BC, pois são congruentes ao triângulo ABC. Os triângulos 2 e 4 são congruentes, seus lados maiores medem BC e os lados menores medem $AB - AC$. A peça 7 é um quadrado, pois todos os seus ângulos são retos e seus lados medem $AB - AC$. Considerando as afirmações acima concluímos que as peças 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 encaixam-se no quadrado de lado BC, como mostra a Figura 32. Assim, está provado que a área do quadrado maior pode ser decomposta na área dos dois quadrados menores.

4.9 Demonstração usando círculo inscrito

Sejam a a hipotenusa do triângulo retângulo e r o raio da circunferência inscrita, observe na Figura 33 que $a = (c - r) + (b - r)$, assim podemos concluir que $r = p - a$, onde p é o semiperímetro do triângulo retângulo.

Observe, na Figura 33, que podemos calcular a área do triângulo retângulo de lados a, b e c da seguinte forma,

$$r \cdot (c - r) + r \cdot (b - r) + r^2.$$

Desenvolvendo e fazendo as simplificações necessárias podemos concluir que a área do triângulo retângulo pode ser calculada fazendo o produto $p \cdot r$.

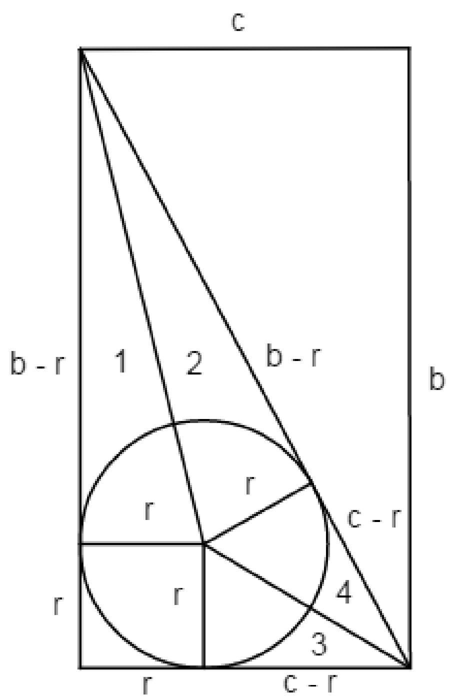


Figura 33: Triângulo retângulo com círculo inscrito.

Assim, usando cálculo de área, podemos fazer a seguinte comparação $p \cdot r = p \cdot (p - a) = \frac{bc}{2}$, que resulta em

$$(c + b + a) \cdot (c + b - a) = 2bc.$$

Utilizando produto da soma pela diferença temos, $(b + c)^2 - a^2 = 2bc$ e finalmente $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, portanto $b^2 + c^2 = a^2$.

4.10 Demosntração usando o teorema das cordas

Desenhe um círculo de raio a e centro C e um triângulo retângulo de lados a, b e c, como na Figura 34.

Usando o Teoremas das Cordas, que pode ser visto em [5], sabemos que

$$AB \cdot AD = AF \cdot AE.$$

Observe que $AB = AD = c$, $AF = a + b$ e $AE = a - b$, assim temos,

$$c \cdot c = (a + b) \cdot (a - b).$$

Portanto, $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos provar.

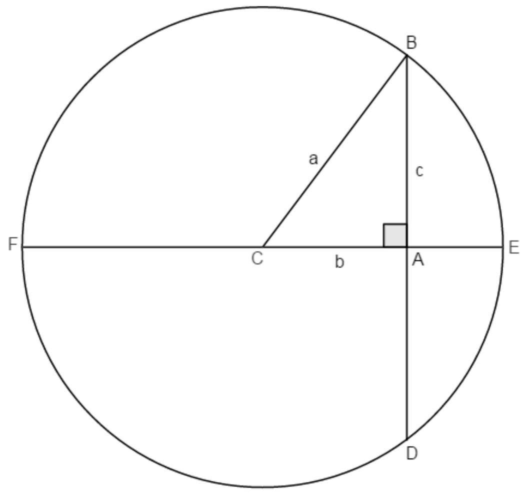


Figura 34: Círculo com duas cordas.

5 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

As demonstrações apresentadas nesse capítulo podem ser encontradas em [1], [4] e [8].

O enunciado do Teorema de Pitágoras nos diz que: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Nesta seção veremos que esse resultado é válido para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, de modo a obter uma generalização do Teorema de Pitágoras.

Sejam A, B e C as figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo como na Figura 35.

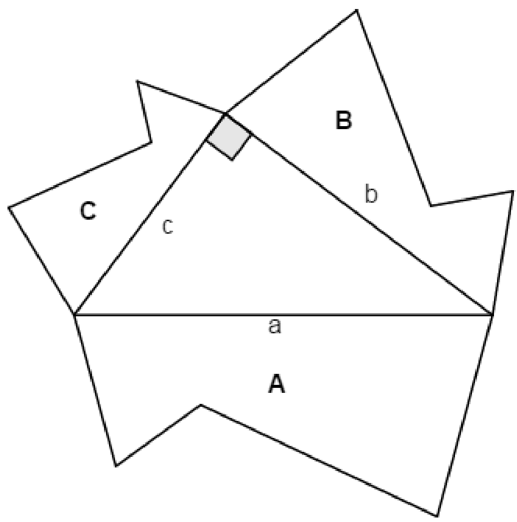


Figura 35: Triângulo retângulo com figuras quaisquer construídas a partir de seus lados.

Sabemos que a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim:

$$\frac{area(A)}{area(B)} = \frac{a^2}{b^2} \text{ e } \frac{area(A)}{area(C)} = \frac{a^2}{c^2},$$

ou seja,

$$\frac{area(A)}{a^2} = \frac{area(B)}{b^2} \text{ e } \frac{area(A)}{a^2} = \frac{area(C)}{c^2}.$$

Podemos concluir que

$$\frac{area(A)}{a^2} = \frac{area(B)}{b^2} = \frac{area(C)}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções temos

$$\frac{area(B)}{b^2} = \frac{area(C)}{c^2} = \frac{area(B) + area(C)}{b^2 + c^2}.$$

Portanto

$$\frac{area(A)}{a^2} = \frac{area(B) + area(C)}{b^2 + c^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, segue então que

$$area(A) = area(B) + area(C).$$

Portanto, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

5.1 Demonstração de Pólya

Geoge Pólya nasceu na Hungria e começou seus estudos em Direito. Entretanto, logo achou as ciências enfadonhas, mudando seus estudos para literatura e filosofia. E para entender com mais amplitude os conceitos filosóficos acabou mudando novamente de curso, recebendo seu doutorado em matemática no ano de 1912.

Figura 36: George Pólya.

Fonte: [1]

Pólya atuou na Europa por muito tempo trabalhando em várias áreas da matemática como teoria dos números, probabilidade e astronomia. Por volta de 1914, Pólya foi convocado para a guerra, algo que ele não aceitou, pois havia adotado a doutrina filosófico-pacifista de Russell. Temendo ser preso por anti-patriotismo, Pólya se muda para os Estados Unidos.

Na América ele publica o seu mais famoso livro: "How to solve it". Nesse livro Pólya trata sobre estratégia de resolução de problemas. Os quatro passos de Pólya para a solução de um problema são:

1. **Entender o problema**: Checar a possibilidade de solução, Poder explicar o problema.

2. **Elaborar um plano de ataque**: Ja viu o problema antes? Ja viu uma versão modificada do problema? Conhece um problema similar? Existe um problema similar já resolvido? Esta solução se aplica ao problema atual? O problema pode ser parcialmente resolvido?

3. **Implementar o plano de ataque**: Checar a consistência lógica dos passos envolvidos no ataque.

4. **Rever o que foi feito**: Fazer um retrospecto da solução, tentar aplicar a estratégia usada em outros problemas e generalizar.

Entre outros problemas resolvidos por Pólya, a prova do Teorema de Pitágoras é a que nos interessa nesta seção, Pólya faz uma demonstração generalizando esse teorema. Esta demonstração pode ser encontrada em [1].

Vamos supor que seja possível construir, sobre os lados de um triângulo retângulo, figuras semelhantes A, B e C, de modo que area(A) = area(B) + area(C), como na Figura 35.

Sendo A, B e C figuras semelhantes temos

$$\frac{area(A)}{area(B)} = \frac{a^2}{b^2}, \frac{area(A)}{area(C)} = \frac{a^2}{c^2} \text{ e } \frac{area(B)}{area(C)} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Suponha agora que A', B' e C' são quaisquer outras figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c do mesmo triângulo retângulo. Assim temos,

$$\frac{area(A')}{area(B')} = \frac{a^2}{b^2}, \frac{area(A')}{area(C')} = \frac{a^2}{c^2} \text{ e } \frac{area(B')}{area(C')} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Observando as igualdades acima podemos concluir que

$$\frac{area(A')}{area(A)} = \frac{area(B')}{area(B)} = \frac{area(C')}{area(C)} = k.$$

Isso nos mostra que $area(A') = k \cdot area(A)$, $area(B') = k \cdot area(B)$ e $area(C') = k \cdot area(C)$. Assim,

$$\text{area } (A') = k\cdot\text{area}(A) = k\cdot(\text{area}(B)+\text{area}(C)) =$$

$$= k\cdot\text{area}(B) + k\cdot\text{area}(C) = \text{area}(B')+\text{area}(C').$$

Concluimos então que area(A') = area(B') + area(C').

Isso nos garante que se existirem figuras semelhantes particulares A, B e C, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, que satisfaça a condição

$$\text{area}(A) = \text{area}(B) + \text{area}(C),$$

então, quaisquer que sejam outras figuras semelhantes A', B' e C', construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c do mesmo triângulo retângulo, temos que

$$\text{area}(A') = \text{area}(B') + \text{area}(C').$$

No caso do triângulo retângulo ABC de altura AD (Figura 37), podemos ver claramente que os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes e mais,

$$\text{area}(ABC) = \text{area}(DBA) + \text{area}(DAC).$$

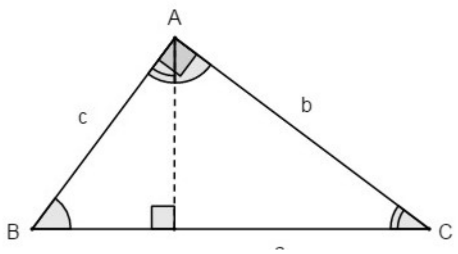


Figura 37: Triângulo retângulo

Neste caso, considere o triângulo ABC, como na Figura 37, construído sobre a hipotenusa a, DAC construído sobre o cateto b e DBA construído sobre o cateto c.

Considere agora os quadrados Q, Q' e Q'', construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c do triângulo ABC (Figura 38).

Uma vez que Q, Q' e Q'' são figuras semelhantes, podemos concluir que

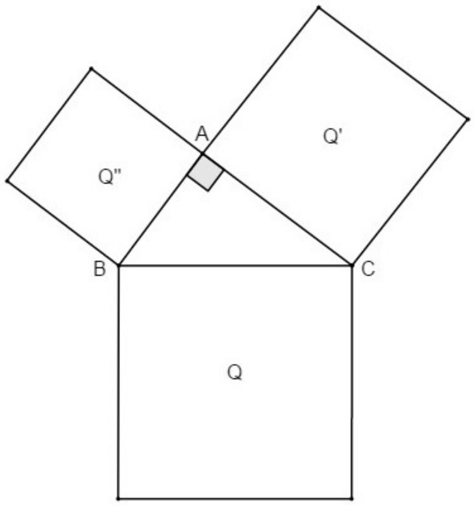


Figura 38: Triângulo retângulo

$$\text{area}(Q) = \text{area}(Q') + \text{area}(Q''),$$

Portanto $a^2 = b^2 + c^2$.

5.2 Dois casos específicos de generalização do Teorema de Pitágoras

Nesta seção mostramos que o enunciado do Teorema de Pitágoras é válido para hexágonos regulares e semicírculos, dois casos particulares entre muitos outros. Já provamos no início da Seção 5 que quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo satisfazem a relação entre áreas descrita pelo Teorema de Pitágoras. Abaixo apresentamos a demonstração de dois casos que serão apresentados como atividade na seção 6.

Exemplo 1. *A área do semicírculo cujo diâmetro é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos semicírculos cujos diâmetros são os catetos.*

Sejam S_a, S_b e S_c as áreas dos semicírculos cujos diâmetros são os lados de um triângulo retângulo (Figura 39). Temos

$$S_a = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{8},\ S_b = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{b}{2})^2 = \frac{\pi b^2}{8} \text{ e } S_c = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{c}{2})^2 = \frac{\pi c^2}{8}.$$

Portanto,

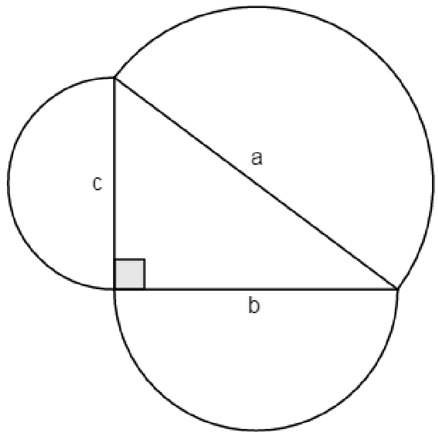


Figura 39: Semicírculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

$$S_b + S_c = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi a^2}{8} = S_a.$$

Exemplo 2. *A área de hexágono regular construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos hexágonos regulares construídos sobre seus catetos.*

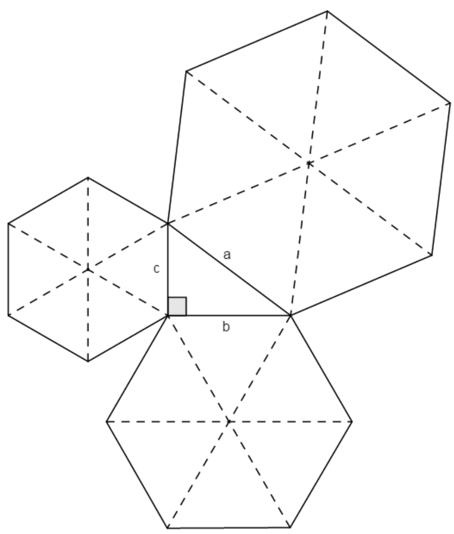


Figura 40: Hexágonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

Vamos considerar que H_a, H_b *e* H_c *são as áreas dos hexágonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Observe na Figura 40 que um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros, assim podemos escrever que* $H_a = 6T_a$,

$H_b = 6T_b$ e $H_c = 6T_c$, onde T_a, T_b e T_c representam a área de qualquer um dos triângulos da divisão de cada hexágono. Façamos

$$H_b + H_c = 6 \cdot (T_b + T_c) = 6 \cdot (\frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}) = \frac{6\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2).$$

Como

$$b^2 + c^2 = a^2 \ e \ H_a = 6T_a = \frac{6\sqrt{3}}{4} \cdot a^2,$$

concluímos que $H_a = H_b + H_c$.

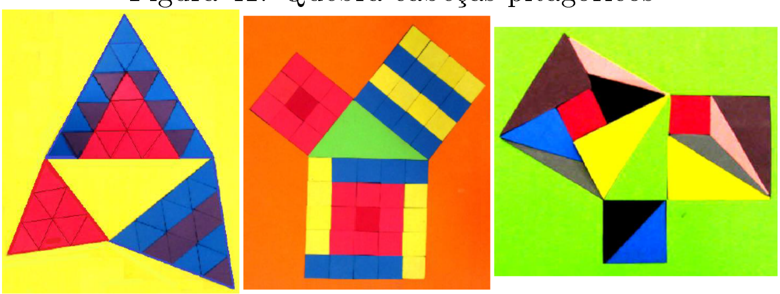
6 ATIVIDADES SUGERIDAS

A aprendizagem deve processar-se do concreto para o abstrato. Toda atividade feita com material concreto pode ser repetida, de diversas formas, graficamente. É o primeiro processo de abstração (ROSA NETO, 1987, p. 45).

Nesta seção, as atividades 1, 2, 3 e 4 são baseadas em quebra-cabeças pitagóricos. Essas atividades tem o objetivo de demonstrar na prática o enunciado original do Teorema de Pitágoras.

Os quebra-cabeças pitagóricos combinam de forma lúdica o estudo de polígonos, as suas propriedades e combinações para a formação de outras figuras planas e ainda são recursos manipuláveis importantes para o estudo, a compreensão, verificação e a elaboração das demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Figura 41: Quebra-cabeças pitagóricos



Fonte: [9]

Fazendo uso dos quebra-cabeças pitagóricos os alunos podem sobrepor a figura construída a partir da hipotenusa com as peças obtidas de repartições das figuras construídas a partir dos catetos, fazendo com que o aluno compreenda melhor a demonstração do Teorema de Pitágoras.

6.1 Atividade 1

Quaisquer dois quadrados podem ser cortados em 5 pedaços de tal forma que estes 5 pedaços podem ser organizados para formar um novo quadrado. Na Figura 42 podemos observar o modelo de como este corte deve ser feito.

Para a realização dessa atividade siga os passos abaixo:

1. Recorte, na linha pontilhada, a Figura 43, obtendo 5 peças.

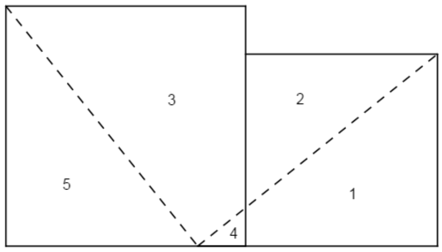


Figura 42: Modelo de como as peças devem ser recortadas na atividade 2.

2. Tente encaixá-las para formar um quadrado.

3. Tente identificar qual deve ser o critério para desenhar as linhas pontilhadas.

4. Identifique de que maneira este quebra cabeça pode fornecer uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

5. Construa dois quadrados quaisquer como na Figura 43, recorte e monte um novo quadrado com as peças.

Na página seguinte, Figura 43, está o molde para ser recortado e utilizado na atividade 2.

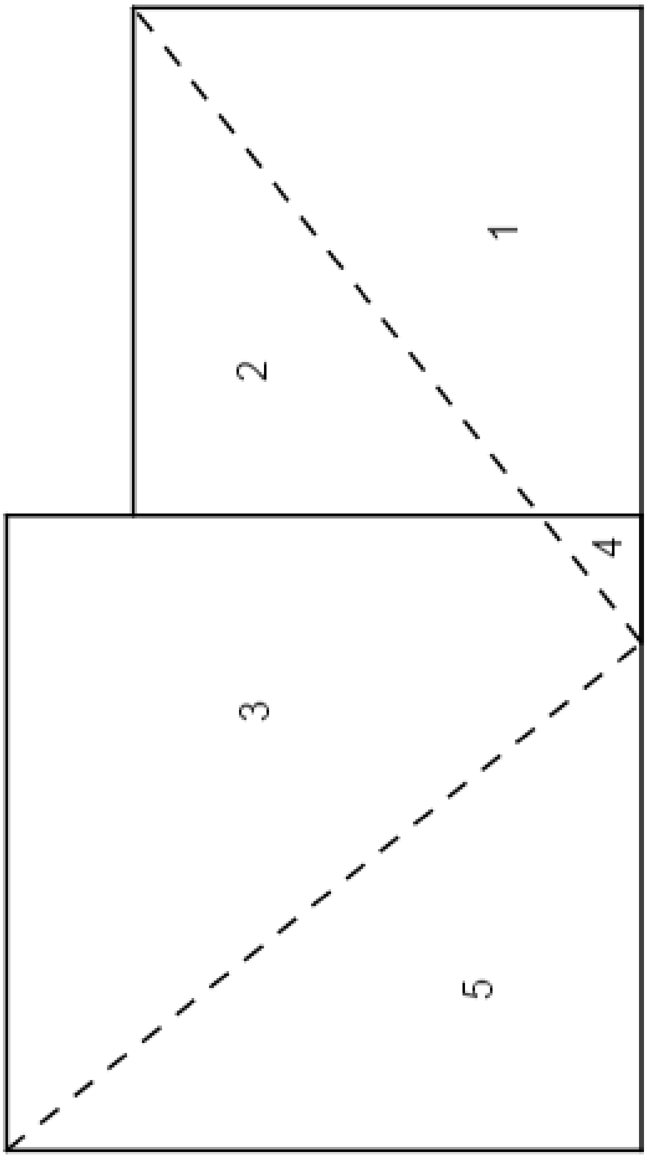


Figura 43: Molde para a atividade 1.

6.2 Atividade 2

Na Figura 44, a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo é igual a área de um quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo, como afirma o Teorema de Pitágoras.

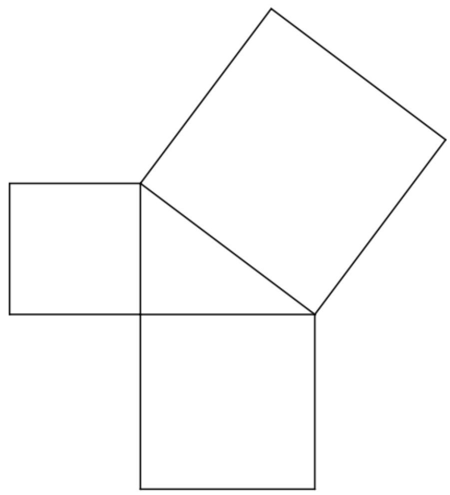


Figura 44: Triângulo retângulo com quadrados construídos sobre seus lados.

Uma forma prática de mostrar esse fato é dividir os dois quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo em peças que podem ser reorganizadas para formar o quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo. Observe que este mesmo recorte foi feito na Atividade 1.

A Figura 45 mostra uma maneira de dividir os quadrados construídos sobre os catetos em 5 peças que podem ser encaixadas sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo.

Para a realização desta atividade siga os passos abaixo:

1. Recorte, na linha pontilhada, a Figura 46, obtendo 5 peças.

2. Tente encaixar as peças recortadas sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.

3. Tente identificar qual deve ser o critério para desenhar as linhas pontilhadas.

4. Identifique de que maneira este quebra cabeça pode fornecer uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

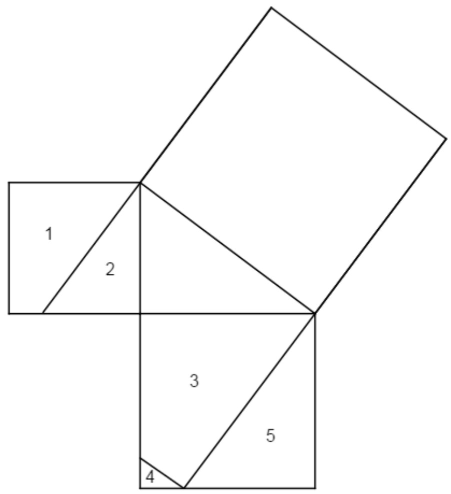


Figura 45: Modelo de como as peças devem ser recortadas.

5. A partir de um triângulo retângulo qualquer construa quadrados sobre seus lados, como na Figura 46, recorte e tente encaixar as peças sobre o quadrado construído a partir da hipotenusa.

Na Seção 4.7 temos a demonstração de que as peças se encaixam perfeitamente no quadrado maior.

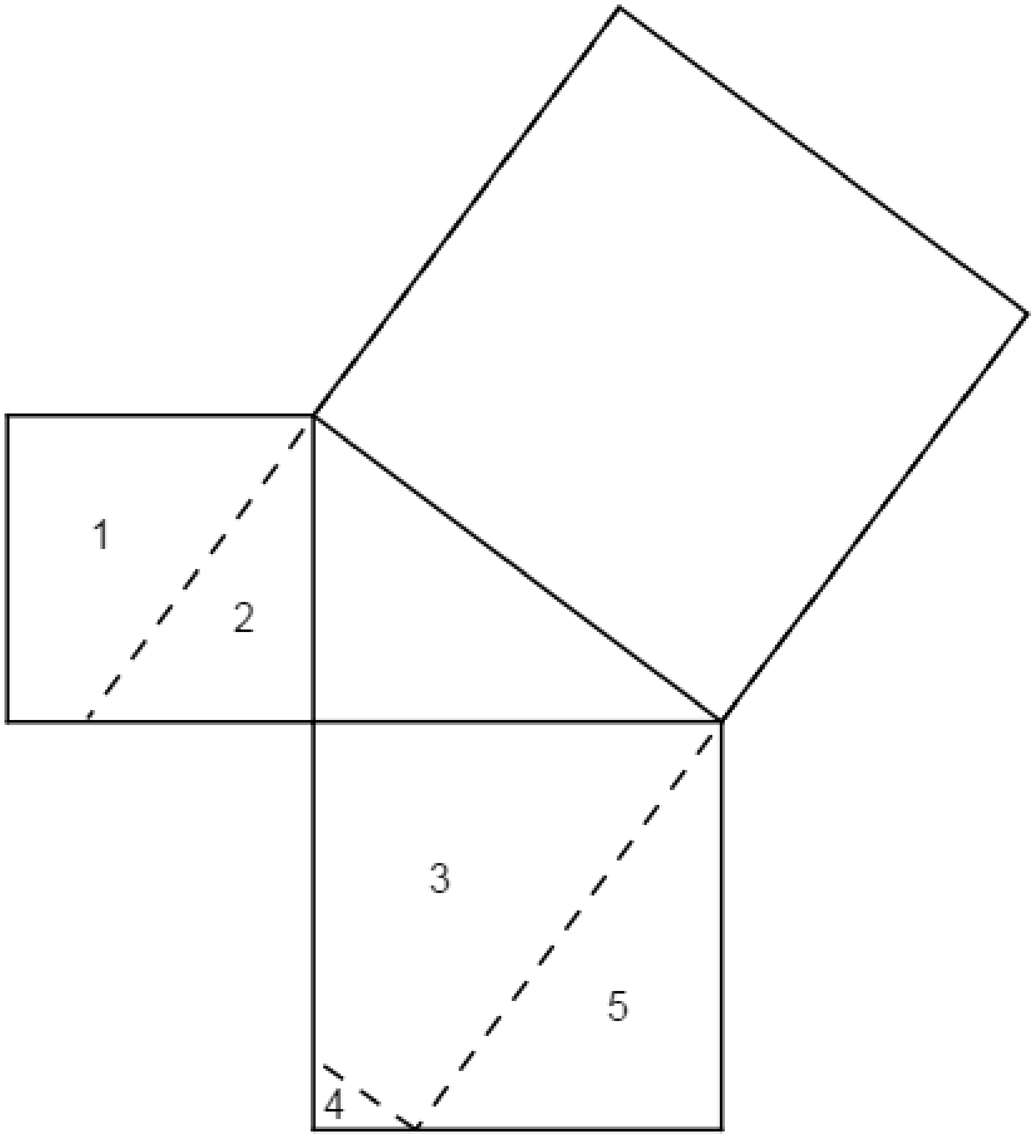


Figura 46: Molde para a Atividade 2.

6.3 Atividade 3

Considere um triângulo retângulo com quadrados construídos sobre seus lados como na figura 47 abaixo. Podemos recortar os dois quadrados construídos sobre os catetos de modo que estas peças podem ser encaixadas sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa.

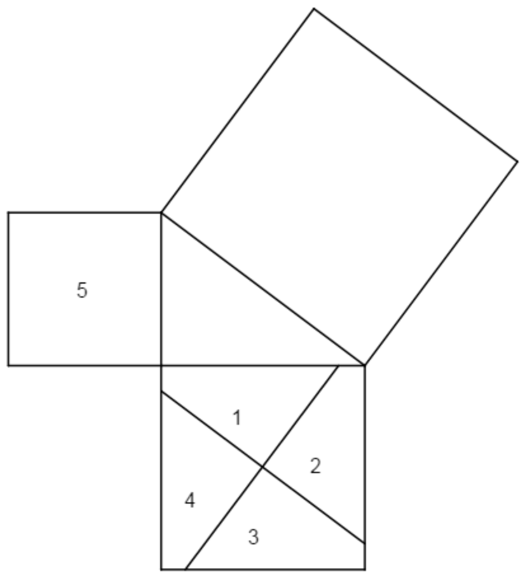


Figura 47: Modelo de como as peças devem ser recortadas na atividade 3.

Para a realização desta atividade siga os passos abaixo:

1. Recorte a Figura 48, obtendo assim 5 peças.

2. Tentar encaixar as peças no quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.

3. Tente identificar qual deve ser o critério para desenhar as linhas pontilhadas.

4. Identifique de que maneira este quebra-cabeça pode fornecer uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

5. A partir de um triângulo retângulo qualquer construa quadrados sobre seus lados, como na Figura 48, recorte e tente encaixar as peças sobre o quadrado construído a partir da hipotenusa.

Na Seção 3.6 temos a demonstração de que as peças se encaixam perfeitamente no quadrado maior.

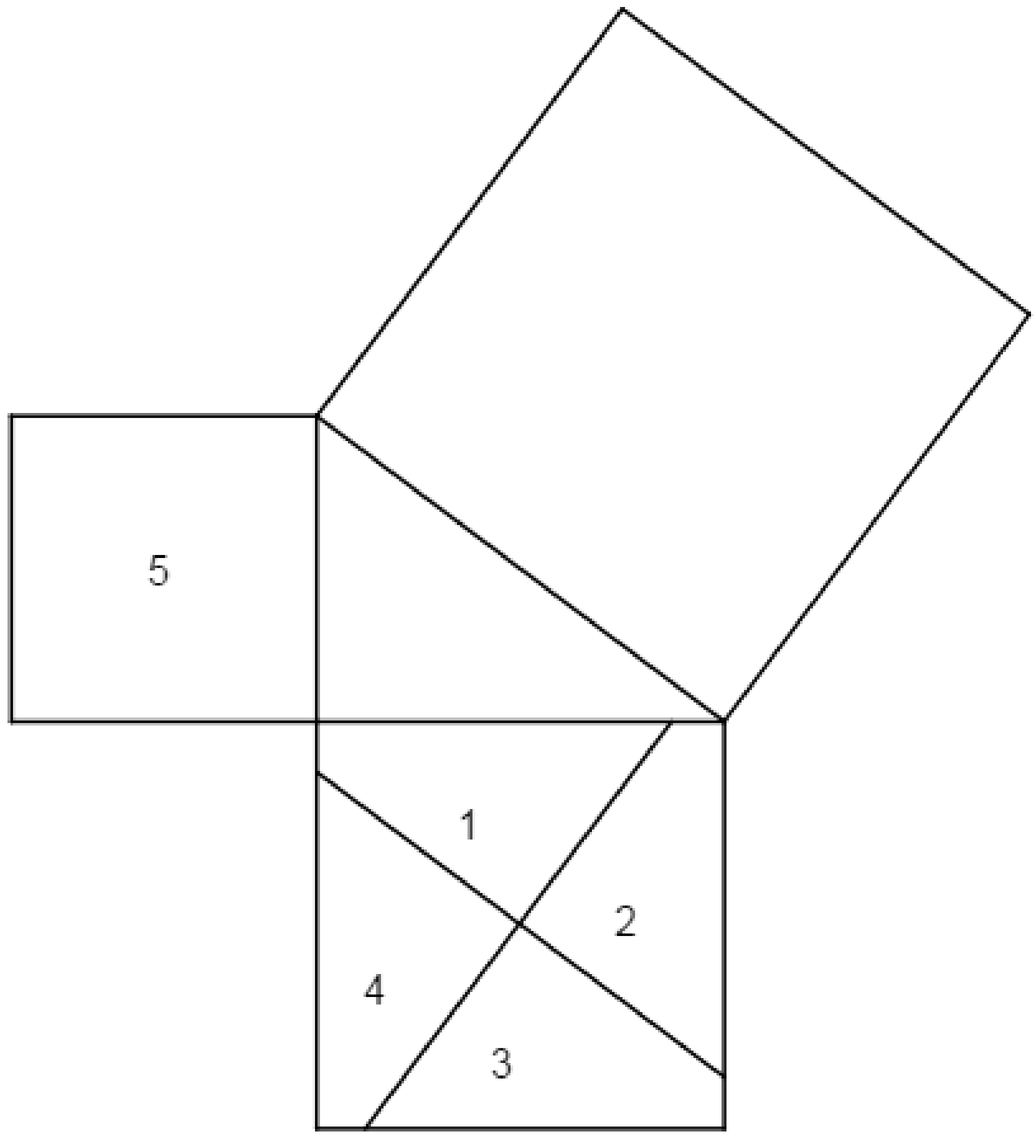


Figura 48: Molde para a Atividade 3

6.4 Atividade 4

Aqui apresentamos mais uma atividade baseada em quebra cabeças pitágóricos, sugerimos ao professor que utilize todos eles para que os alunos conheçam as várias formas de recortes e montagens para a demonstração do Teorema de Pitágoras.

Para a realização desta atividade siga os passos abaixo:

1. Recorte, na linha pontilhada, a Figura 49, obtendo assim 7 peças.

2. Tentar encaixar as peças no quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.

3. Tente identificar qual deve ser o critério para desenhar as linhas pontilhadas.

4. Identifique de que maneira este quebra-cabeça pode fornecer uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

5. A partir de um triângulo retângulo qualquer construa quadrados sobre seus lados, como na Figura 49, recorte e tente encaixar as peças sobre o quadrado construído a partir da hipotenusa.

Na Seção 4.8 temos a demonstração de que as peças se encaixam perfeitamente no quadrado maior.

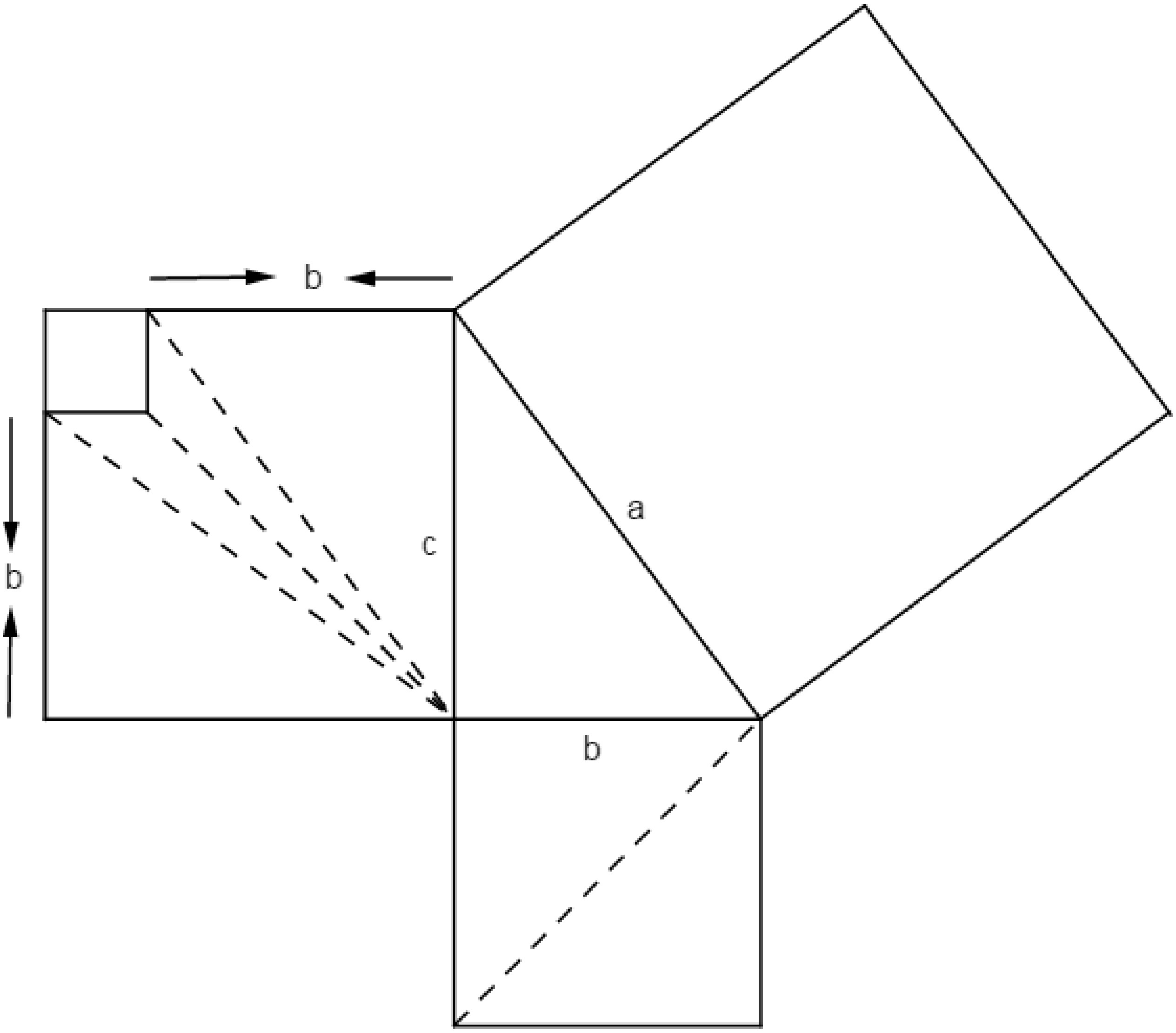


Figura 49: Molde para a Atividade 4

6.5 Atividade 5

O objetivo desta atividade é mostrar para o aluno que o enunciado original do Teorema de Pitágoras pode se estender para outras figuras planas alem de quadrados.

Para a realização desta atividade siga os passo abaixo:

1. Primeiro deve-se relembrar com o aluno a forma de se calcular área de hexágono e círculo.
2. Com o auxílio de uma régua, o aluno deve tirar as medidas necessárias para o cálculo das áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo.
3. Agora, com o valor de cada área em mãos, peça para o aluno verificar se a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos e igual a área construída sobre a hipotenusa.
4. Estimule o aluno a identificar de que maneira ele pode provar que esta relação entre as áreas existe para qualquer semicírculo ou hexágono. Esta demonstração pode ser vista na seção 5.2.

As Figuras 50 e 51 apresentam moldes que podem ser usados em sala de aula para a realização desta atividade.

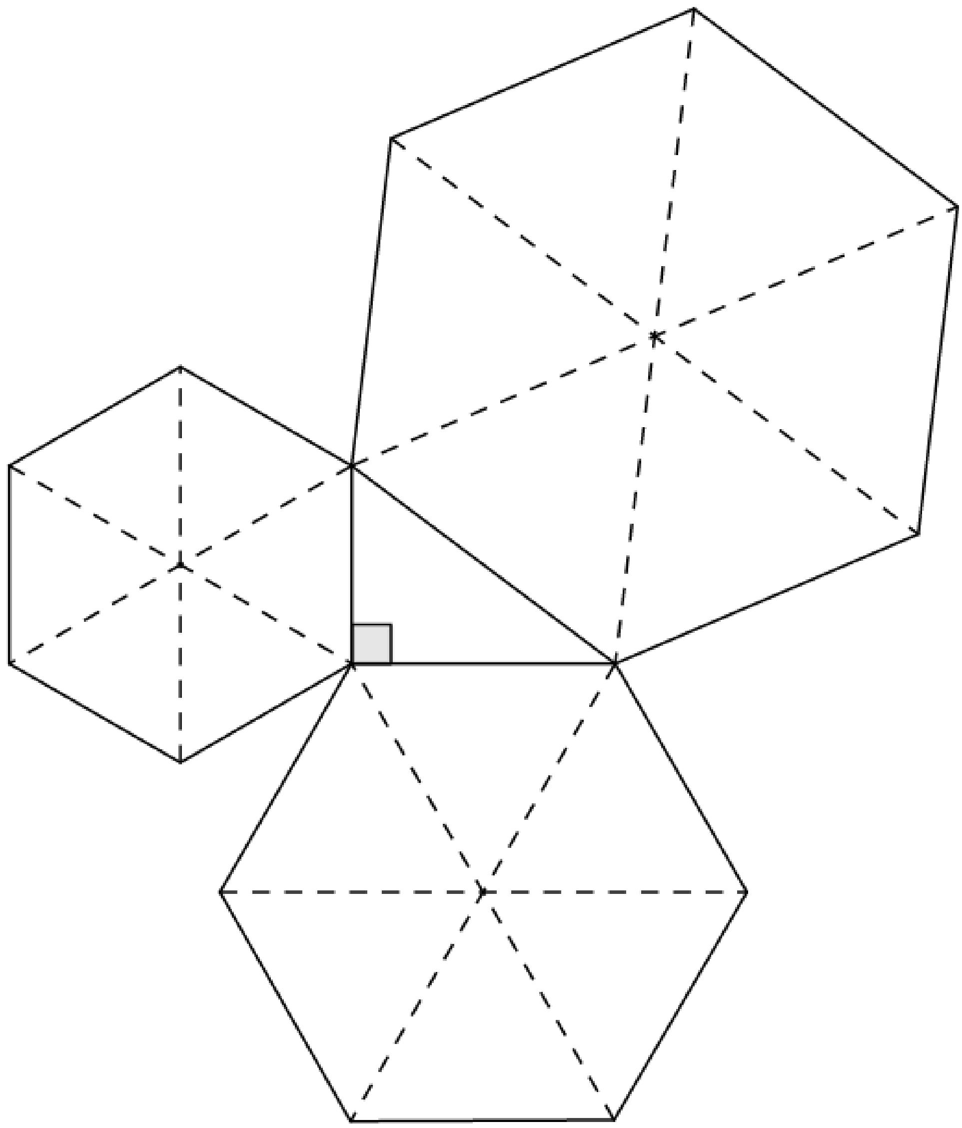


Figura 50: Molde para a Atividade 5

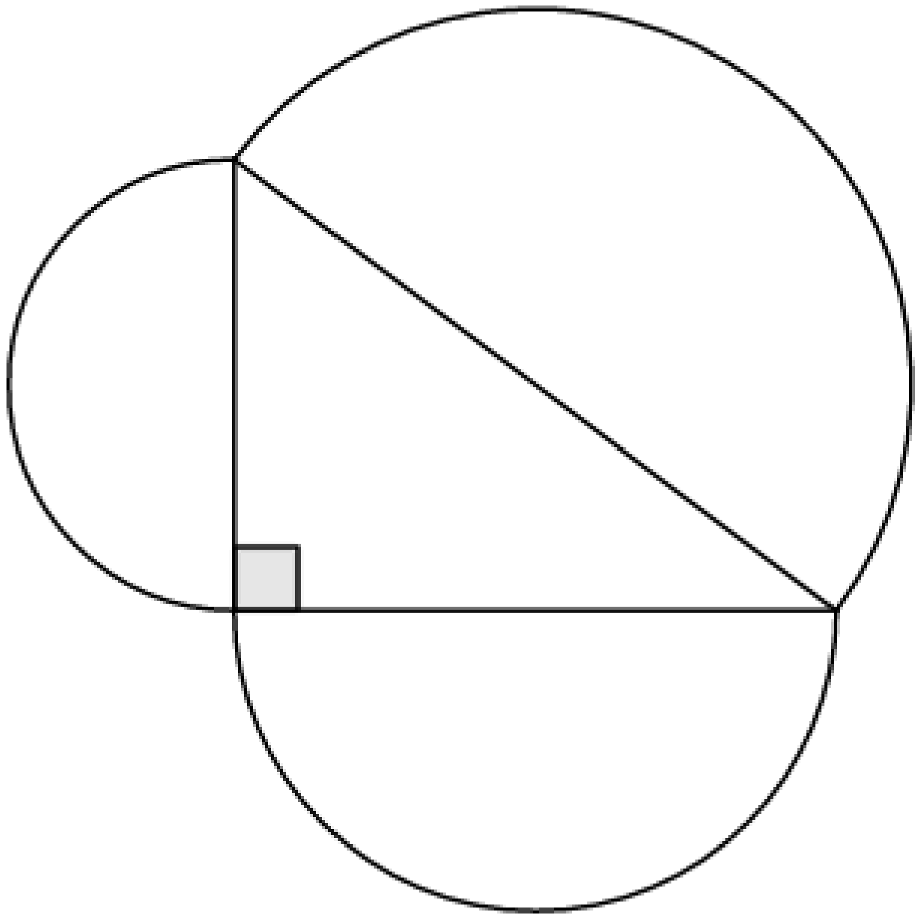


Figura 51: Molde para a atividade 5

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes da Geometria Plana, muitos matemáticos famosos e amadores o demonstraram de diversas formas. Todas essas demonstrações envolvem muitos conhecimentos em matemática, então por que não trazê-las para a sala de aula?

Divulgar essas demonstrações e estimular o professor a apresentá-las em sala de aula é muito importante para desenvolver o lado crítico dos alunos. Este trabalho foi conduzido com o objetivo de contribuir com a melhoria do ensino de matemática e para que sirva como fonte de consulta para atividades educacionais.

Referências

[1] Cintra, c. de o.; Cintra, r. j. de s., *O Teorema de Pitágoras*, 1 ed. Recife: O Autor, 2003.

[2] Dolce, o.; Pompeo, j. n., *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 9*, São Paulo: Atual. 1993.

[3] Eves, h. w., *Introdução à história da matemática.* 2 ed. São Paulo: Editora UNICAMP, 2004.

[4] Loomis, e.s., *The Pythagorean Proposition*, Publication of the National Council of Teachers, 2nd printing 1972.

[5] Neto, a.c.m., *Geometria*, coleção PROFMAT, SBM, 2013.

[6] Neto, e.r., *Didática da Matemática*, São Paulo: Ática, 1987.

[7] Ribeiro, v. v. s. m., *Revisitando o Teorema de Pitágoras.* Dissertação ProfMat - Mestrado Profissional em Rede Nacional, Viçosa - MG, 2013.

[8] Silva, j. e. b.; Fanti, e. l. c.; Pedroso, H. A., *Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações.* Dissertação ProfMat - Mestrado Profissional em Rede Nacional, São José do Rio Preto: Unesp, 2016.

[9] http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/08QUEBRA-CABECAS-PITGORICOS.pdf