Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Universidade Federal do Acre - UFAC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Ismael Dourado de Assis

Elementos ortogonais

Fevereiro

2019

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Universidade Federal do Acre - UFAC
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Elementos Ortogonais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na cidade de Rio Branco, Acre, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Fevereiro
2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

As76e Assis, Ismael Dourado de, 1987 -

Elementos Ortogonais / Ismael Dourado de Assis; orientador: Dr. José Ivan da Silva Ramos. – 2019.

56 f.: il. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco, 2019.

Inclui referências bibliográficas.

1. Vetores ortogonais. 2. Conjunto C. 3. Elemento ortogonal. I. Ramos, José Ivan da Silva (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Elementos ortogonais

Autor (a): Ismael Dourado de Assis
Orientador (a): Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PROFMAT/UFAC, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Examinado (a) por:

....
Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos
Orientador e Presidente da Banca - UFAC

....
Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior
Membro Interno – UFAC

....
Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Membro Externo - UNIR

Rio Branco, Acre
Fevereiro de 2019

DEDICATÓRIA

Em especial à minha mãe, Tereza Montefusco Dourado; à minha família, aos meus amigos e aos meus professores.

AGRADECIMENTOS

À minha família: mãe, pela dedicação e ensinamentos, os quais levo comigo, em especial o valor pelo trabalho, por tudo(!); aos meus irmãos (sem distinção) e pai, pelo apoio, principalmente o financeiro, quando muito precisei.

Ao meu orientador, professor e amigo, José Ivan da Silva Ramos, pelo apoio e força. Pelos conselhos, pela cobrança, não somente nas questões acadêmicas, mas nas questões do dia-a-dia e também no tocante à minha presença quando por vezes Eu passo dias sem aparecer. Por desde a graduação, ser muito prestativo quando Eu desanimava com algumas disciplinas. Por ser um dos grandes responsáveis pelo meu interesse pela matemática pura juntamente com o professor Sérgio Brazil Junior.

Ao professor Sérgio Brazil Junior, por quem também tenho muita admiração e respeito, por ter sido meu professor na graduação e no mestrado, colaborando com o meu crescimento acadêmico. Meu muito obrigado pelo apoio e bom direcionamento na disciplina de aritmética.

Ao professor Geirto de Souza, por ter sido meu professor na graduação e também no mestrado, com bom direcionamento na disciplina de geometria.

Ao professor Isaac Dayan Bastos da Silva, por ter sido meu orientador de iniciação científica, ligada ao projeto Integrando a Amazônia (SBM) e por ter contribuído, no mestrado com a disciplina de cálculo.

Aos demais professores que compõem o corpo docente do PROFMAT.

Aos colegas de mestrado, pelos quais sempre estive e estarei a torcer pelo sucesso dos mesmos (na qualificação).

Aos demais amigos, no sentido restrito da palavra, os quais reservo-me no direito de não citar para não cometer injustiça, tendo em vista a possibilidade de esquecer algum nome.

Resumo

Vetores ortogonais podem aparecer formando as colunas de uma matriz motivando alguns autores a estabelecerem a definição de *elemento ortogonal* em $M_n(\mathbb{R})$. Isso se traduz pela igualdade $AA^t = I_n$. Examinando o caso $n = 2$ mostramos que esse conceito pode ser estendido para o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Palavras-chave: Isomorfismos, operadores lineares, matrizes e elementos ortogonais.

Abstract

Orthogonal vectors may appear to form the columns of a matrix motivating some authors to establish the *orthogonal element* definition in $M_n(\mathbb{R})$. This is translated by the equation $AA^t = I_n$. Examining the case $n = 2$ we show that this concept can be extended to the set $\mathbb{C}$ of the complex numbers.

Key words: Isomorphisms, linear operators, matrices and orthogonal elements.

SUMÁRIO

Lista de Símbolos

$<$: menor do que,

$>$: maior do que

$\leq$: menor do que ou igual a

$\geq$: maior do que ou igual a

$\equiv$: identificador por

$\neq$: diferente

$\simeq$: isomorfo a

$\lesssim$: imerso em

$\forall$: para todo, qualquer que seja

$\Rightarrow$: então, implica

$\Leftrightarrow$: equivalente, se e somente se, se e só se

∞: infinito (não é um número)

$/$ (ou ;): tal que

$\exists$: existe

$\nexists$: não existe

$\in$: pertence a

$\notin$: não pertence a

$\subset$: está contido,

$\not\subset$: não está contido

$\cup$: união

$\cap$: interseção

X e Y : conjuntos abstratos

$\#X$: número de elementos do conjunto X

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

$\mathbb{M}_{m\times n}(K)$: o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ sobre um corpo K

Introdução

O Mestrado Profissional

Embora o mestrado profissional em Matemática - PROTMAT seja na modalidade de um mestrado semipresencial e visto com certa desconfiança por alguns da comunidade da matemática, ele é muito bem avaliado pela CAPES e o diploma que ele concede aos estudantes também é bem valorizado.

É bastante claro o objetivo do PROFMAT em aprofundar alguns conhecimentos de Matemática básica, oportunizando ao professor uma formação mais sólida, que pode obter maior confiança no exercício dessa bela profissão de ensinar.

Depois de conhecer as particularidades do PROFMAT e conversar com alguns colegas, egressos desse curso ou que ainda estavam estudando, percebi que todos falavam positivamente do mestrado e aí eu vi a oportunidade de estar trabalhando e estudando perto da família e amigos, participando efetivamente de um programa de estudo que me garantirá boas oportunidades profissionais no futuro e ainda me permitirá ser um professor melhor qualificado.

No PROFMAT pude reforçar alguns conteúdos que tive na graduação; já que as disciplinas: Números e Funções, Matemática Discreta, Geometria e Aritmética, que compõe a base da prova do exame nacional de qualificação (ENQ), nos proporcionam fazer uma revisão bastante significativa dos conteúdos de Matemática da educação básica. Isso me deu mais certeza de que fiz a escolha certa ao optar por essa área do conhecimento e eu destaco a Aritmética e a Álgebra Linear como as disciplinas que guardam os conteúdos que Eu, depois de concluir mais essa etapa de estudos, passarei a dedicar mais do meu tempo para fazer novas investigações.

A escolha do tema

Com relação ao tema a ser apresentado no Trabalho de Conclusão de Curso - TCC, meu orientador e eu vínhamos conversando sobre fazermos algo na Teoria dos Números, sobre a reciprocidade quadrática de Gauss, porém, percebemos que além de já existirem outras dissertações levaríamos muito tempo para fazer algo diferente e de significação sobre esse tema. Então, em meios às longas conversas que tínhamos surgiu uma pergunta feita pelo meu colega de classe Leonézio Ponce: o que motiva a definição de matrizes ortogonais? A discussão girou em torno do fato de que ortogonalidade é uma relação 2 testável em um espaço de vetores, no qual está definido um produto interno. O meu colega havia percebido um pequeno exercício em [4]; página 106, pedindo para concluir que matrizes ortogonais possuem determinantes igual a ± 1.

Com o passar dos dias algumas considerações foram sendo feitas sem que olhássemos o que, de fato, motivou a denominação de ortogonal: matriz ortogonal é todo matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^t = I_n$. Mais em frente, sabendo que o conjunto dos números complexos está imerso no anel de matrizes quadradas de ordem 2, via um isomorfismo, pensamos em como definir um elemento ortogonal em $\mathbb{C}$. Assim, investigamos como o conjunto dos elementos ortogonais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ se relacionavam com as imagens diretas desse isomorfismo, para depois, de volta em $\mathbb{C}$, tentar estabelecer esse conceito.

A estrutura deste TCC

Nosso primeiro capítulo, de noções preliminares, relembra o conjunto das matrizes com as suas operações e propriedades usuais, onde fizemos uma breve descrição da estrutura de anel à qual o conjunto $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ se encaixa. Através de isomorfismo, encerrando essa parte do trabalho, mostramos que podemos encontrar uma cópia de $\mathbb{C}$ dentro dessa estrutura algébrica. A parte final deste capítulo, que trata de espaço vetorial, mostra que o conceito de elemento ortogonal em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ realmente é motivado pelo fato de que vetores ortogonais podem formar as colunas de uma matriz. Mostra também, e isso não é novo, que podemos chamar de ortogonal determinadas funções definidas em $\mathbb{R}^2$.

No capítulo dois estabelecemos o conceito de elemento ortogonal em $\mathbb{C}$, mostrando que esse conceito está diretamente ligado ao conceito de conjugado de um número complexo e, portanto, longe do que motivou essa definição em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$; o que pode dar certa valorização para a nossa pesquisa.

No capítulo três fazemos algumas considerações a respeito do nosso trabalho.

Revisão bibliográfica

Afim de respondermos a uma pergunta sobre o que tratam os assuntos que motivaram a definição de matrizes ortogonais, passamos a investigar alguns livros de álgebra linear usados, em geral, nos cursos de matemática na graduação. Rapidamente encontramos uma boa resposta para essa pergunta. Por exemplo, no livro de Steinbruch, nossa referência [7], ele faz a definição de operador ortogonal, na página143. Seguindo, na página 145, ele mostra que a igualdade $AA^t = I_n$ aparece naturalmente, como uma propriedade, usando o fato de que o operador ortogonal preserva a norma. Assim, o autor chama de matriz ortogonal a toda matriz A que satisfaz a igualdade $AA^t = I_n$.

Em nossa referência [2], na página 254, o autor define matriz ortogonal e, usando o fato de que matriz ortogonal é composta por linhas ou colunas que são vetores dois a dois ortogonais e unitários, define, na página 258, operador ortogonal. Isso é feito da mesma maneira, na página 389 de nossa referência [1].

Por fim, em [6], na página 286, Seymour define operador ortogonal para os caso real e complexo. Em seguida, na página 287, ele define matriz ortogonal como consequência do teorema 13.10B, a saber: A matriz A com entradas reais representa um operador T (relativo a uma base ortonormal) se, e somente se, $A^t = A^{-1}$.

Na página 285, existe uma tabela na qual o autor faz uma interessante analogia entre a aplicação adjunta $T \longrightarrow T^*$ e a aplicação de conjugação $z \longrightarrow \bar{z}$, em $\mathbb{C}$, conforme a tabela 1.

Tabela 1: Analogia entre aplicação adjunta e a conjugação nos complexos

Classe de Números Complexos	Comportamento pela Conjugação	Classe de operadores de A(V)	Comportamento pela aplicação adjunta
Círculo unitário ($\lvert z \rvert = 1$)	$\bar{z} = \frac{1}{z}$	Operador ortogonal (caso real) ou unitário (caso complexo)	$T^* = T^{-1}$
Eixo real	$\bar{z} = z$	Operador autoadjunto (caso real) ou hermitiano (caso complexo)	$T^* = T$
Eixo imaginário	$\bar{z} = -z$	Operador antiadjunto (caso real) ou antihermitiano (caso complexo)	$T^* = -T$
Eixo positivo $(0, \infty)$	$\bar{z} = \bar{w}w, w \neq 0$	Operadores positivos	$T = S^*S$ com S não singular

Fonte: [6], página 285

A tabela mostra o comportamento, pela conjugação, dos números complexos que têm módulos iguais a 1. Esses são os mesmos elementos que definimos como ortogonais. Reforçamos que a nossa sugestão é definir números complexos ortogonais, sem que tivéssemos conhecimentos prévio dessa tabela. Isso foi feito olhando para a equação $z\bar{z} = 1$, depois de analisar a imagem inversa de uma matriz ortogonal que também representa a imagem direta de um número complexo, através de um isomorfismo. (Ver a definição em 2.3.1).

Capítulo 1 - Uma representação dos números complexos dentro de um anel de matrizes

Este primeiro capítulo, de noções preliminares, será uma base na qual apoiaremos discursões breves sobre o conjunto das matrizes, relembrando as definições usuais das operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação.

Também relembraremos a definição de anéis, dando ênfase ao anel das matrizes quadradas de ordem 2. Em seguida, faremos uma breve descrição dos números complexos, mostrando que dentro do anel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ existe uma cópia de $\mathbb{C}$.

1.1 Definições e operações

A presente seção será dedicada ao conjunto das matrizes. Começaremos relembrando a seguinte

1.1.1. Definição: Digamos que m e n sejam dois números naturais não nulos. Definimos, assim, *matriz* de ordem m por n $(m \times n)$, a qualquer tabela de m linhas e n colunas, formada por números, os quais chamamos de *entradas da matriz.*

1.1.2. Exemplo: A tabela $[5]_{1\times 1}$ é uma matriz de ordem 1×1, enquanto que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

é uma matriz de ordem 3×2, onde as entradas da primeira linha são os números 1 e 4 e as entradas da segunda e terceira linhas são, respectivamente, os números 2 e 5 e 3 e 6.

É usual escrevemos uma matriz A de ordem $m \times n$ por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ou, ainda, por $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, onde a entrada a_{ij} refere-se ao elemento da linha i e coluna j. Se a ordem da matriz já estiver subentendida escrevemos apenas $A = \left[a_{ij}\right]$.

Vejamos, agora, como são denominadas algumas matrizes quando consideramos suas ordens.

1.1.3. Exemplo: A matriz de ordem 3×2 do exemplo em 1.1.2 é chamada de retangular. Do mesmo modo a matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

é uma *matriz retangular*. Isto é, toda matriz de ordem $m \times n$, com $m \neq n$, é dita uma matriz retangular. As matrizes retangulares de ordens $1 \times n$ e $m \times 1$, com $m \neq 1$, são chamadas de *matriz linha* e *matriz coluna*, respectivamente. Por exemplo, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 4} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

são matrizes linha e coluna de ordens 1×4 e 4×1.

Quando ocorrer de a ordem de uma matriz ser $m \times n$ com $m = n$, diremos que essa matriz é uma *quadrada* de ordem n (ou m). Assim, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

é uma matriz quadrada de ordem 2.

Se uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ todas as entradas a_{ij}'s iguais a zero, quando $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$, então será denominada de *matriz diagonal*. Como exemplo, a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Dentre as matrizes diagonais, podemos destacar $I_n = [a_{ij}]_{n\times n}$; onde $a_{ij} = 1$, se $i = j$ e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Essa matriz é denominada de *identidade* de ordem n.

Esse nome para I_n é sugerido pelo fato de que essa matriz é o elemento neutro da multiplicação de matrizes que estabeleceremos na proposição em 1.1.8. Particularmente,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Denominamos de matriz *triangular superior (inferior)*, a matriz $A = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 0$ se $i > j$ ($a_{ij} = 0$ se $i < j$). Como exemplo, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4},$$

são, respectivamente, uma matriz triangular superior e uma matriz triangular inferior.

Matriz nula, é definida como sendo uma matriz cujas entradas são todas iguais a zero. Ela é o elemento neutro da adição que definiremos em 1.1.5.

A matriz

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3},$$

é a matriz nula de ordem 3. Também é uma matriz diagonal, triangular inferior e triangular superior.

Duas *matrizes* são *iguais* se, e somente se, têm a mesma ordem e entradas correspondentes iguais. Vejamos no seguinte

1.1.4. Exemplo: As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $\begin{bmatrix} 1 & y \\ x & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ só ocorrem de serem iguais se tivermos $x = 5$ e $y = 3$.

Na definição seguinte mostraremos como a adição de matrizes muito se assemelha a adição dos números reais, no que diz respeito às propriedades que essa operação possui.

1.1.5. Definição: Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ de mesma ordem, definimos a *adição* de A e B, representada por $A + B$, como sendo a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Decorre dessa definição propriedades que são de imediata verificação.

1.1.6. Proposição: Suponha que A, B e C sejam matrizes de mesma ordem. Então valem:

$\boldsymbol{A_1}$: $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade da adição);

$\boldsymbol{A_2}$: $A + B = B + A$ (Comutatividade da adição);

$\boldsymbol{A_3}$: $A + O = O + A = A$ (Existência de elemento neutro, onde O é a matriz nula);

$\boldsymbol{A_4}$: $A + (-A) = -A + A = O$ (Existência de inverso aditivo).

Demonstração: Tomemos matrizes quaisquer $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, de mesma ordem. Então, temos que $A + (B + C) = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = (A + B) + C$. Portanto, vale A_1.

Agora, vale que $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$, e assim, vale A_2.

Omitiremos a demonstração das propriedades A_3 e A_4, que também não é difícil perceber, decorrem imediatamente das propriedades dos números reais.

1.1.7. Definição: Sejam α um número real e $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$. Definimos a *multiplicação de A pelo escalar* α à matriz $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

1.1.8. Proposição: Sejam A e B matrizes de mesma ordem, α e λ números reais. Então, valem e são de imediata verificação, as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{E_1}$: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

$\boldsymbol{E_2}$: $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$;

$\boldsymbol{E_3}$: $\alpha(\lambda A) = (\alpha\lambda)A$;

$\boldsymbol{E_4}$: $1A = A$.

Demonstração: Consideremos $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrizes quaisquer de mesma ordem e α um número real. Temos que $\alpha(A + B) = \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha([a_{ij} + b_{ij}]) = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B$. Portanto, vale E_1.

Os outros fatos não serão verificados. Mas, também são decorrentes das propriedades dos números reais.

1.1.9. Definição: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times l}$ e $B = [b_{ij}]_{l\times n}$ duas matrizes. Definimos a multiplicação de A por B, nessa ordem, a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, como sendo de ordem $m \times n$, tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

1.1.10. Exemplo: Em geral, não vale a igualdade $AB = BA$. Notemos que

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

isto é, essa operação não é comutativa.

Vejamos as propriedades da multiplicação de matrizes na seguinte

1.1.11. Proposição: Sejam A, B e C matrizes tais que os produtos indicados abaixo são possíveis de serem calculados. Então, valem:

$\boldsymbol{M_1}$: $A(B + C) = AB + AC$ (Distributiva à esquerda em relação à adição);

$\boldsymbol{M_2}$: $(A + B)C = AC + BC$ (Distributiva à direita em relação à adição);

$\boldsymbol{M_3}$: $A(BC) = (AB)C$ (Associatividade da multiplicação);

$\boldsymbol{M_4}$: Se A é uma matriz quadrada de ordem, então $AI_n = I_nA = A$ (Existência de elemento neutro da multiplicação).

Demonstração: Mostraremos apenas M_1. As outras propriedades decorrem igualmente da definição de multiplicação de matrizes. Temos
$A(B + C) = [a_{ik}]([b_{kj}] + [c_{kj}]) = [a_{ik}]([b_{kj} + c_{kj}]) = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\,] =$
$[\sum_{k=1}^{l}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})] = [\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}] + [\sum_{k=1}^{l} a_{ik}c_{kj}] = AB + AC$, com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Portanto, vale M_1.

1.1.12. Exemplo: Acontece às vezes de o produto entre duas matrizes não nulas resultar na matriz nula. Veja,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Fazendo uma analogia com o conjunto dos números, onde um produto é nulo se, e somente se, um dos fatores é nulo, vemos que em um conjunto de matrizes podem existir divisores de zero.

Mais uma operação que podemos considerar é apresentada na seguinte

1.1.13. Definição: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, dizemos que a matriz $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$ é a *transposta* da matriz A.

Em particular, a matriz $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ de ordem 2×3 é a transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ de ordem 3×2.

Se acontecer de $A^t = A$ dizemos que a matriz A é uma *matriz simétrica*. Se tivermos que $A^t = -A$ dizemos que a matriz A é uma *matriz antissimétrica*.

1.1.14. Proposição: Para toda matriz $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ e todo número real α, desde que a multiplicação e a adição possam ser calculadas, vale que:

$\boldsymbol{T_1}$: $(A^t)^t = A$;

$\boldsymbol{T_2}$: $(A + B)^t = A^t + B^t$;

$\boldsymbol{T_3}$: $(AB)^t = B^t A^t$;

$\boldsymbol{T_4}$: $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Demonstração: Temos

$\boldsymbol{T_1}$: $(A^t)^t = \left([a_{ij}]^t\right)^t = [a_{ji}]^t = [a_{ij}] = A$;

$\boldsymbol{T_2}$: $(A + B)^t = \left([a_{ij}] + [b_{ij}]\right)^t = \left([a_{ij} + b_{ij}]\right)^t = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}]^t + [b_{ji}]^t = A^t + B^t$;

$\boldsymbol{T_3}$: $(AB)^t = \left([a_{ij}][b_{ij}]\right)^t = \left([\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}]\right)^t = [\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{jk}] = [\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, a_{ki}] =$ $[b_{ji}][a_{ji}] = B^t A^t$;

$\boldsymbol{T_4}$: $(\alpha A)^t = \left(\alpha[a_{ij}]\right)^t = \left([\alpha a_{ij}]\right)^t = [\alpha a_{ji}] = \alpha[a_{ji}] = \alpha A^t$.

1.1.15. Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, dizemos que a matriz B é a inversa da matriz A se tivermos que

$$AB = BA = I_n.$$

Nesse caso, denotamos por $B = A^{-1}$ a inversa de A. Claro que a ordem de B é a mesma de A. Além disso, $A = B^{-1}$.

Uma matriz é dita *inversível* quando admite inversa.

1.1.16. Exemplo: Em particular, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

são tais que $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$; logo, a matriz B é a inversa de A, e vice-versa.

1.1.17. Proposição: A inversa de uma matriz, quando existir, é única.

Demonstração: Suponha que A seja uma matriz inversível e que B é uma inversa de A, isto é, $AB = BA = I_n$. Se houver uma matriz C para a qual também seja válida a igualdade $AC = CA = I_n$, então afirmarmos que $C = B$.

Realmente, se $AC = I_n$ temos $BAC = BI_n$, isso implica que $C = B$. Portanto, a inversa de uma matriz, quando existe, é mesmo única.

Vejamos algumas propriedades ligadas à inversão de matrizes.

1.1.18. Proposição: Consideremos A e B matrizes quadradas de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Temos que:

$\boldsymbol{S}$: Se A é inversível, então A^{-1} é também inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$;

$\boldsymbol{S_2}$: Se A e B são inversíveis, então AB também é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

$\boldsymbol{S_3}$: Se A é inversível, então A^t também é inversível, e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;

Demonstração: Ora, A^{-1} é inversível se podemos encontrar uma matriz X para a qual $A^{-1}X = XA^{-1} = I_n$. Porém, sendo A inversível, temos que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$; ou seja, $X = A$. Como a inversa é única só resta que $(A^{-1})^{-1} = A$. Portanto, vale S_1.

Temos que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Isto é, AB é inversível e, como possui uma única inversa, concluímos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e vale S_2.

Por fim, temos que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, o que implica que $(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n$; isto é, $(A^{-1})^tA^t = A^t(A^{-1})^t = I_n$. Portanto, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ e vale S_3.

1.1.19. Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \in \mathbb{N}$ dizemos que A é *ortogonal* se, e somente se, for satisfeita a seguinte condição:

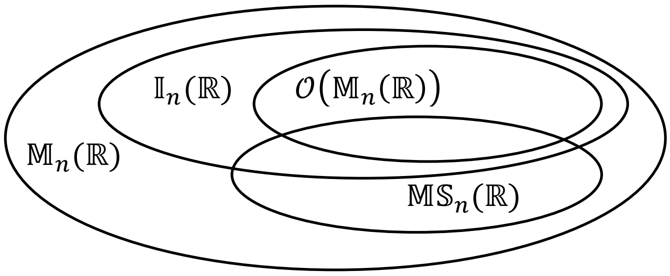
$$AA^t = A^tA = I_n.$$

1.1.20. Exemplo: As matrizes $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}_{2\times2}$ e $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ são ortogonais.

Vale que:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} cos^2\theta + sen^2\theta & 0 \\ 0 & cos^2\theta + sen^2\theta \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}.$$

Na referência [6] de nossa bibliografia, o autor, na página 254, define matrizes simétricas e matrizes ortogonais. Comenta ainda que as matrizes ortogonais formam um conjunto de matrizes que são inversíveis e, que a relação entre matrizes inversíveis, simétricas e ortogonais é indicada conforme o diagrama abaixo:



$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: Matrizes

$\mathbb{I}_n(\mathbb{R})$: Matrizes inversíveis

$\mathcal{O}(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$: Matrizes ortogonais

$\mathbb{MS}_n(\mathbb{R})$: Matrizes simétricas

Observamos que a matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é simultaneamente simétrica e inversível, mas não é ortogonal. Enquanto que, a matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{0{,}81} & \sqrt{0{,}9} \\ -\sqrt{0{,}9} & \sqrt{0{,}81} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é ortogonal e inversível, mas não é simétrica.

Observação 1.1.21: O produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Demonstração: De fato, sejam M_1 e M_2 matrizes ortogonais $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Como já sabemos que $M_1 M_1^t = M_2 M_2^t = I_n$. Temos que,

$$(M_1 \cdot M_2) \cdot (M_1 \cdot M_2)^t = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_2^t) \cdot M_2 = M_1 \cdot I \cdot M_2 = M_1 \cdot M_2 = I_n,$$

o que mostra que $M_1 M_2$ é uma matriz ortogonal.

1.2 O anel das matrizes quadradas de ordem 2

A identificação de um número complexo com uma matriz quadrada de ordem 2 será feita, por meio de isomorfismo depois de descrevermos a estrutura de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Começamos com a seguinte

1.2.1 Definição: Digamos que A seja um conjunto não vazio, no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação. Se, além disso, para quaisquer $a, b, c \in A$, valer que:

$\boldsymbol{A_1}$: $a + (b + c) = (a + b) + c$;

$\boldsymbol{A_2}$: $a + b = b + a$;

$\boldsymbol{A_3}$: existe $0 \in \mathrm{A}$ tal que $0 + a = a + 0 = a$;

$\boldsymbol{A_4}$: existe $-a = (-1)a \in A$ tal que $a + (-a) = -a + a = 0$;

$\boldsymbol{A_5}$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

$\boldsymbol{A_6}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$,

diremos que $(A, +, \cdot)$ é um anel.

1.2.2. Definição: Se $(A, +, \cdot)$ é um anel e para quaisquer $a, b \in A$, valer que $ab = ba$ dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo.

1.2.3. Definição: Se $(A, +, \cdot)$ é um anel e existir $1 \in A$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um anel com unidade.

1.2.4. Definição: Se $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade e para quaisquer $a, b \in A$, com $a \cdot b = 0$, implicar que $a = 0$ ou $b = 0$, diremos que $(A, +, \cdot)$ é um domínio (ou anel) de integridade, o que significa dizer que não existem divisores de zero no anel $(A, +, \cdot)$.

1.2.5. Definição: Se $(A, +, \cdot)$ é um domínio de integridade e para todo $a \neq 0 \in A$, existir $a^{-1} \in A$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um corpo.

1.2.6. Exemplo: Seja $D \neq \{0\}$ um domínio de integridade. Então, se a função

$$\begin{aligned} \Psi: D &\longrightarrow D \\ x &\longmapsto \Psi(x) = ax, \end{aligned}$$

para todo $a \in D \backslash \{0\}$, for sobrejetiva, D é um corpo.

Realmente, para todo elemento $a \neq 0$ em D, definindo Ψ como acima, o fato dela ser sobrejetiva garante que, para a identidade 1 em $D = CD(\Psi)$, existe $b \in D = D(\Psi)$ tal que $\Psi(b) = 1$; ou seja, $a \cdot b = 1$ e a é inversível. Portanto, pela generalidade de a, concluímos que D é um corpo.

1.2.7. Exemplos: Consoante às definições vistas nesta unidade, podemos perceber que o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2,

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

é um anel não comutativo, com unidade e que admite divisores de zero.

De fato, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ são elementos em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e temos que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

A matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é a unidade de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, pois para uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$ qualquer em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, vale que $I_2 \cdot M = M \cdot I_2 = M$.

Ademais, se b e b' são dois números reais quaisquer, as matrizes $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{bmatrix}_{2\times 2}$ são tais que $B \cdot B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

1.2.8. Observação: Se A é um anel, para todo $a \in A$, vale que $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$.

Demonstração: Usando a propriedade A_3 da definição em 1.2.1 e escrevendo $0 = 0 + 0$, temos as seguintes equivalências: $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \overset{A_6}{\Leftrightarrow} a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ $\overset{A_4}{\Leftrightarrow} (-a) \cdot 0 + a \cdot 0 = (-a) \cdot 0 + (a \cdot 0 + a \cdot 0) \overset{A_1, A_4}{\Longleftrightarrow} 0 = \big((-a) \cdot 0 + a \cdot 0\big) + a \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0 + a \cdot 0$. Usando a propriedade A_3, da definição em 1.2.1, concluímos que $a \cdot 0 = 0$.

1.2.9. Observação: Em um anel comutativo com unidade, a existência de inverso multiplicativo implica na não existência de divisores de zero.

Demonstração: Considere A um anel comutativo com unidade e $a, b \in$ A com $a \cdot b = 0$. Suponhamos que $a \neq 0$. Por hipótese, existe $a^{-1} \in A$ tal que $a^{-1} \cdot a = 1$. Daí, vemos que $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a)b = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Analogamente, suponhamos que $b \neq 0$. Como, por hipótese, existe b^{-1} em A tal que $b^{-1} \cdot b = 1$, vale que $ab = 0 \Leftrightarrow (ab)b^{-1} = 0 \cdot a^{-1} \Leftrightarrow a(bb^{-1}) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

1.2.10. Observação: Em um domínio de integridade, a equação $x^2 = x$ tem como únicas soluções 0 e 1.

Demonstração: De fato, $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 1) = 0$. Como em um domínio de integridade não existem divisores de zero, só nos resta a conclusão de que $x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

A próxima observação que faremos toca diretamente na “regra dos sinais” da adição e multiplicação de números inteiros; já que $\mathbb{Z}$ possui a estrutura de um anel.

1.2.11. Observação: Sejam A um anel com unidade e x e, y elementos em A. Então, valem:

a) $(-1) \cdot x = -x$;

b) $-(-x) = x$;

c) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -xy$;

d) $(-x) \cdot (-y) = xy$.

Demonstração: a) Veja $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)] \cdot x = 0 \cdot x = 0$ concluímos que $(-1) \cdot x = -x$;

b) Temos que $-(-x)$ é o inverso aditivo do inverso aditivo de x. Como pelo item a) vale a igualdade $x + (-x) = x + (-1) \cdot x$, podemos perceber que também é verdadeira a igualdade $1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)] \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Isso mostra que $x = -(-x)$;

c) Ora, $(-x) \cdot y = [(-1) \cdot x] \cdot y = (-1) \cdot (x \cdot y)$. De a) vem que $(-x) \cdot y = -x \cdot y$. De maneira semelhante, obtemos que $x \cdot (-y) = -x \cdot y$;

d) Vejamos que $(-x) \cdot (-y) = [(-1) \cdot x] \cdot [(-1) \cdot y] = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot y$. Assim, por termos da multiplicação ser comutativa, vemos que: $(-x) \cdot (-y) = (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot y = (-1) \cdot [(-1) \cdot x \cdot y] = (-1) \cdot [(-1)(x \cdot y)] = (-1) \cdot (-x \cdot y) = -(-x \cdot y) = x \cdot y$. E essas últimas igualdades decorrem de a) e b).

1.2.12. Definição: Sejam A um anel e B um subconjunto de A. Dizemos que B é um subanel de A se, e somente se, B é um anel com respeito às operações de adição e multiplicação definidas em A.

1.2.13. Exemplo: O conjunto dos múltiplos de 3, $3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$ é um subanel de $\mathbb{Z}$. Enquanto que $\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$.

Claro que $3\mathbb{Z}$ não possui unidade e $\mathbb{Q}$, na verdade, é mais do que um anel, é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

1.2.14. Observação (Caracterização de um subanel): Seja A um anel. Então, B é um subanel de A se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:

$a)$ $0 \in B$ (o elemento neutro de A pertence B);

$b)$ $x - y \in B$, para todo $x, y \in B$;

$c)$ $x \cdot y \in B$, para todo $x, y \in B$.

Demonstração: Ver referência [3]; página 43.

1.2.15. Exemplo: Considere o subconjunto $C = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ do anel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Temos que $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \in C$.

Além disso, para $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $Y = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2\times 2}$ em $\mathcal{C}$, vale que $X - Y = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ -(b-d) & a-c \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $X \cdot Y = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{bmatrix}_{2\times 2}$ pertencem a $\mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é um subanel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Esse conjunto $\mathcal{C}$ será muito importante para as definições que pretendemos estabelecer. No final, mostraremos que ele é, na verdade, uma cópia do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos que descrevemos a seguir.

1.3 O corpo dos números complexos

Os números complexos, historicamente, existem por duas razões principais, a saber: uma de natureza algébrica com a resolução da equação $x^2 + 1 = 0$, quando na Europa discutia-se as "soluções impossíveis" de uma equação em torno dos números negativos e irracionais. Outra, com o desejo de criar um análogo aritmético do conceito de vetor, que surgiu dentro da Geometria e da Física, onde os números complexos aparecem como candidatos perfeitos para representar e permitir operar com vetores no plano.

Em $\mathbb{C} = \{z = x + yi; x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}, \text{onde } i^2 = -1\}$, estão bem definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação. Para todos $z = a + bi$ e $h = c + di$; definimos:
$(+)$: $z + h = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$;
$(\cdot)$: $z \cdot h = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i \in \mathbb{C}$.

Claro que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, já que para todo $r \in \mathbb{R}$, podemos escrever $r = r + 0i$.

1.3.1 Observação: Para essas operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades, para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:
$\boldsymbol{A_1}$: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (associativa da adição);
$\boldsymbol{A_2}$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (comutativa da adição);
$\boldsymbol{A_3}$: existe $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que $0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1$ (existência de elemento neutro da adição);
$\boldsymbol{A_4}$: para $z_1 = a + bi, \exists -z_1 = -a + (-b)i \in \mathbb{C}$ em que $z_1 + (-z_1) = -z_1 + z_1 = 0$ (existência de inverso aditivo);

$\boldsymbol{M_1}$: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (associativa da multiplicação);

$\boldsymbol{M_2}$: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (comutativa da multiplicação);

$\boldsymbol{M_3}$: existe $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que $1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1$ (existência de elemento neutro da multiplicação);

$\boldsymbol{M_4}$: para todo $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ (existência de inverso multiplicativo);

$\boldsymbol{D}$: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1 = (z_2 + z_3) \cdot z_1$ (distributividade da multiplicação em relação à adição);

$\boldsymbol{C}$: Se $z_1 \cdot z_2 = 0$, então $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ (em $\mathbb{C}$ não existem divisores de zero).

Demonstração: A propriedade M_4 será provada em frente na observação 1.3.3. Provaremos, aqui, somente a validade da propriedade C: admitindo a validade de M_4, se $z_1 \cdot z_2 = 0$ e $z_1 \neq 0$, temos que existe $z_1^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$. Daí, temos $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1^{-1} \cdot (z_1 \cdot z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 \overset{M_1}{\Leftrightarrow} (z_1^{-1} \cdot z_1) \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$.

Analogamente, se $z_2 \neq 0$, podemos concluir que $z_1 = 0$, o que completa a prova da validade de C.

1.3.2. Definição: Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ elementos em $\mathbb{C}$. Então:

a) dizemos que o número complexo $i = 0 + i$ é a *unidade imaginária*;

b) os números reais $a = \mathrm{Re}(z_1)$ e $b = \mathrm{Im}(z_1)$ são, respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginaria* do número complexo z_1. A parte imaginária é a que acompanha a unidade imaginária i;

c) definimos $\overline{z_1} = a - bi$ como sendo o *conjugado* do número complexo z_1;

d) Diremos que os números complexos z_1 e z_2 são iguais, se e somente se, tivermos que $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ e $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

1.3.3. Observação: Seja $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$. Então $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ é o inverso multiplicativo de z.

Demonstração: Seja $z^{-1} = x + yi$. Então, vale a condição $z^{-1} \cdot z = 1 = 1 + 0i$. Usando a definição de multiplicação em $\mathbb{C}$, obtemos

$$z^{-1} \cdot z = (x + yi) \cdot (a + bi) = (ax - by) + (bx + ay)i = 1 = 1 + 0i.$$

Pela igualdade definida no item d) de 1.3.2, vem que $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ é um sistema linear nas variáveis x e y. Esse sistema é equivalente ao sistema $\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + bay = 0 \end{cases}$. Somando essas equações, obtemos $(a^2 + b^2)x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2}$. Substituindo esse valor na 2ª equação, vemos que $\frac{b^2a}{a^2+b^2} + bay = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{b^2a}{a^2+b^2}\frac{1}{ba} = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Portanto, vale que, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$ é o inverso multiplicativo de $z = a + bi$.

1.3.4. Exemplo: O inverso do número complexo $w = 4 - 7i$ é igual $w^{-1} = \frac{4}{65} + \frac{7}{65}i$.

1.4 Isomorfismos - cópias do corpo dos números complexos

Nesta seção vamos apresentar versões concretas dos números complexos. Uma como um par de números reais, outra como uma matriz de ordem 2. Antes definiremos as funções especiais que permitem que façamos essas identificação.

1.4.1. Definição: Uma função f de X em Y é uma lei que associa a cada elemento do conjunto X um elemento do conjunto Y. Comumente, escrevemos

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

para denotar uma função de X em Y. Também é comum chamar uma função de transformação ou aplicação.

Na definição acima $X = D(f)$ é o *domínio* e $Y = CD(f)$ é o *contradomínio* da função f. Por $Im(f) = f(X) = \{f(x): x \in X\}$ denotamos o *conjunto imagem* da função f, formado pelas transformadas de f.

Algumas funções recebem nomes especiais devido a forma como atuam nos seus domínios. Vejamos isso na seguinte

1.4.2. Definição: Seja f uma função de X em Y.

a) Dizemos que f é *sobrejetiva* se, e somente se, $f(X) = CD(f) = Y$.

b) Dizemos que f é *injetiva* se, e somente se, $f(x) \neq f(y)$, sempre que $x, y \in X$ e $x \neq y$ se, e somente se, sempre que $f(x) = f(y)$ para $x, y \in X$ temos $x = y$.

c) Se g é uma função de Z em W, dizemos que f é *igual* a g se, e somente se, temos que $X = Z, Y = W$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X = Z$.
d) Dizemos que f é *bijetiva* se, e somente se, for injetiva e sobrejetiva.
e) Se $A \subset X$, a função

$$\begin{aligned} f/_A : A &\longrightarrow Y \\ a &\longmapsto f/_A(a) = f(a), \end{aligned}$$

é denominada de *função restrição* de f ao subconjunto A de X.

1.4.3. Exemplo: A função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow 2\mathbb{N} \\ n &\longmapsto f(n) = 2n, \end{aligned}$$

que associa a cada número natural o seu dobro, é bijetiva.

1.4.4. Definição: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Suponha que $*$ é uma operação bem definida em X e $\square$ é uma operação bem definida em Y. Uma função

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \varphi(x), \end{aligned}$$

é dita um *homomorfismo* se, e somente se, para todo $a, b \in X$, valer que $\varphi(a * b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$.

Um homomorfismo injetivo é denominado *monomorfismo*. Se for sobrejetivo é denominado *epimorfismo*. Se for bijetivo é denominado *isomorfismo*.

É fácil ver que, se φ é um isomorfismo de X em Y, então φ^{-1} é um isomorfismo de Y em X.

1.4.5. Observação: Se φ é um isomorfismo de X em Y, valem as seguintes propriedades:
a) Se e é o elemento neutro para uma operação $*$ definida em X, e' o elemento neutro para uma operação $\square$ definida em Y e, em Y, valem as leis do cancelamento para essa operação, então, $\varphi(e) = e'$.
b) Se x^{-1} é o inverso de um elemento x em X, então $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.
Demonstração: Primeiramente, temos que $e * e = e$. Daí vale que

$$e' \square \varphi(e) = \varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e) \square \varphi(e);$$

já que φ é um homomorfismo. Cancelando $\varphi(e)$ em ambos os membros da igualdade, vemos que $\varphi(e) = e'$.

Agora, de $x * x^{-1} = e$, obtemos $\varphi(x * x^{-1}) = \varphi(e)$. Como φ é um homomorfismo, conforme o que provamos anteriormente, $\varphi(e) = e'$, vem que $\varphi(x)\square\varphi(x^{-1}) = e'$. Isso mostra que $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

1.4.6. Definição: Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b)\ /a,b \in \mathbb{R}\}$. Podemos definir as seguintes operações de adição e multiplicação para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$:

$(+)$: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$

$(\cdot)$: $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$.

Valem as mesmas propriedades da adição e da multiplicação, A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4, D e C, exibidas em 1.3.1, com $(1, 0)$ sendo o elemento neutro da multiplicação.

Além disso, podemos identificar cada número complexo com um único par ordenado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, como mostra a observação seguinte.

1.4.7. Observação: A aplicação

$$\begin{aligned} \delta: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = a + bi &\longmapsto \delta(z) = (a,b), \end{aligned}$$

é um isomorfismo; isto é, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Demonstração: De fato, sejam $z_1 = p + qi$ e $z_2 = r + si$ dois número complexos. Para a adição e a multiplicação definidas na observação em 1.4.6, temos que $\delta(z_1 + z_2) = \delta\big((p + qi) + (r + si)\big) = \delta\big((p + r) + (q + s)i\big) = (p + r, q + s) = (p,q) + (r,s) = \delta(z_1) + \delta(z_2)$ e $\delta(z_1 \cdot z_2) = \delta\big((p + qi) \cdot (r + si)\big) = \delta\big((pr - qs) + (ps + qr)i\big) = (pr - qs, ps + qr) = (p,q) \cdot (r,s) = \delta(z_1) \cdot \delta(z_2)$. Mais do que isso, vemos que a igualdade $\delta(p + qi) = \delta(r + si)$ implica em $(p,q) = (r,s)$; isto é, $p = r$ e $q = s$. Logo, δ é injetiva. Agora, para todo par $(t,u) \in \mathbb{R}^2$ temos que existe $z = t + ui \in \mathbb{C}$ tal que $\delta(t + ui) = (t,u)$, ou seja, δ é sobrejetiva. Portanto, δ é bijetiva; logo, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos.

1.4.8. Definição: Sejam $z = a + bi$ um número complexo não nulo e o par (a,b) que o representa no plano, conforme a correspondência estabelecida em 1.4.7.

Usando o triângulo retângulo da figura da página a seguir temos as relações:

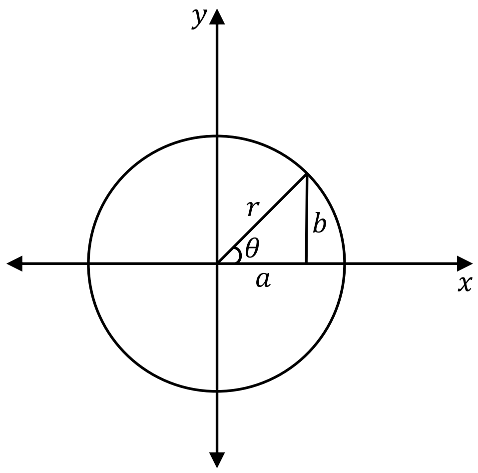
1) $a = rcos\theta$;

2) $b = rsen\theta$,

e de 1 e 2, temos:

3) $(a, b) = (rcos\theta, rsen\theta)$.

4) $z = a + bi = rcos\theta + irsen\theta = r(cos\theta + isen\theta)$.



Nesse caso, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ significa, na norma euclidiana, a distância do ponto $P = (a, b)$ ao ponto $O = (0, 0)$, obtida através do teorema de Pitágoras, e θ é o ângulo que o segmento OP faz com o eixo horizontal do plano cartesiano, no sentido anti-horário.

Considerando essas relações, definimos que:

(1): $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ é a *representação polar* do número complexo z.

(2): O ângulo θ, considerado no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, é denominado de *argumento* do número complexo z, comumente denotado por $\arg(z)$.

Olhando sobre o círculo trigonométrico, vemos que $\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

1.4.9. Observação: Sejam $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ e $w = |w|(cos\gamma + isen\gamma)$ dois números complexos na forma polar. Então, a representação polar do número zw é dada pela fórmula $zw = |z||w|\big(cos(\theta + \gamma) + isen(\theta + \gamma)\big)$.

Demonstração: De fato, temos que $zw = \big(|z|(cos\theta + isen\theta)\big)\big(|w|(cos\gamma + isen\gamma)\big) = |z||w|(cos\theta + isen\theta)(cos\gamma + isen\gamma)$. Como esse resultado equivale a igualdade: $|z||w|\big(cos\theta cos\gamma - sen\theta sen\gamma + i(cos\theta sen\gamma + sen\theta cos\gamma)\big)$, concluímos facilmente que $|z||w|\big(\cos(\theta + \gamma) + isen(\theta + \gamma)\big)$.

Mais geral é o conhecido

1.4.10. Lema de De Moivre: Consideremos o número complexo $z = |z|(cos\,\theta + isen\,\theta)$. Então, para todo inteiro positivo n, vale que

$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)$$

Demonstração: Vamos usar indução sobre o inteiro n.

É claro que se $n = 0$ ou $n = 1$, não há nada a ser mostrado. Se $n = 2$, é o caso mostrado na observação em 1.4.9.

Agora, vamos supor que $z^k = |z|^k(cos\ k\theta + isen\ k\theta)$; para todo $2 < k \in \mathbb{N}$. Provaremos com isso que, $z^{k+1} = |z|^{k+1}(cos\ (k+1)\theta + isen\ (k+1)\theta)$.

Realmente, temos que $z^{k+1} = z \cdot z^k = (|z|(cos\theta + isen\theta))(|z|^k(cosk\theta + isenk\theta)) = |z||z|^k(cos\theta + isen\theta)(cosk\theta + isenk\theta)$. Por sua vez, essa igualdade nos conduz a $|z||z|^k(cos\theta cosk\theta - sen\theta senk\theta) + i(cos\theta senk\theta + sen\theta cosk\theta)$, que nada mais é do que $|z|^{k+1}(cos(\theta + k\theta) + isen(\theta + k\theta) = |\ z|^{k+1}(cos(k+1)\ \theta + isen(k+1)\theta)$. Portanto, podemos concluir a veracidade de que $z^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A fórmula $z^n = |z|^n(cos\ n\theta + isen\ n\theta)$, contida no lema acima, é conhecida como a **fórmula de De Moivre**.

Esse lema permite calcularmos de maneira prática e precisa as raízes de um dado número complexo.

1.4.11. Observação: Seja $w = |w|(cos\ \alpha + isen\ \alpha)$ um número complexo não nulo. Então, as enésimas raízes de w são dadas pela fórmula

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\ \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\ \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], k = 0, \dots, n-1.$$

Demonstração: Ver [5], página 190.

O isomorfismo que apresentaremos a seguir mostra que o conjunto $\mathbb{C}$ pode ser identificado como um subconjunto do conjunto das matrizes quadradas de ordem 2.

1.4.12. Observação: Seja φ a função que associa a cada número complexo uma matriz quadrada de ordem 2, definida por

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ z = x + yi &\longmapsto \varphi(z) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2}; \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2} / \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$ é o conjunto do exemplo em 1.2.15. Então, φ é um isomorfismo.

Demonstração: Realmente; sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois elementos quaisquer em $\mathbb{C}$. Então valem:

i) para $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$, temos $\varphi(z_1 + z_2) = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2\times 2} = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$.

ii) para $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, temos $\varphi(z_1 \cdot z_2) = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2\times 2} = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)$

Além disso,

iii) φ é injetiva, pois vemos que valem as seguintes implicações: $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}_{2\times 2} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d \Leftrightarrow z_1 = z_2$.

iv) φ é sobrejetiva, pois para toda matriz $M = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2} \in \mathcal{C}$ existe $z = x + yi \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) = M$.

O conjunto $\mathcal{C}$ acima é uma cópia de $\mathbb{C}$ dentro do anel das matrizes quadradas de ordem 2. Portanto, tem a mesma estrutura de $\mathbb{C}$; é um corpo dentro de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Usando o item b) de 1.4.5, podemos determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem 2 de uma maneira diferente.

1.4.13. Exemplo: Podemos calcular a inversa da matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ sem recorrer aos determinantes ou outro método comumente empregado. Basta fazer o seguinte: temos que $E = \varphi(z = 1 - 4i)$. Agora, como visivelmente $z^{-1} = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}i$ é o inverso de z. Pelo item b) de 1.4.5, concluímos que

$$\varphi(z^{-1}) = \varphi(z)^{-1} = E^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{17} & \dfrac{4}{17} \\ -\dfrac{4}{17} & \dfrac{1}{17} \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Claramente, temos

$$\varphi(z) \cdot \varphi(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{17} & \dfrac{4}{17} \\ -\dfrac{4}{17} & \dfrac{1}{17} \end{bmatrix}_{2\times 2} = I_2 = E \cdot E^{-1}.$$

1.5 Espaços vetoriais

Apresentaremos nesta seção alguns conceitos e propriedades referentes a estrutura algébrica dos espaços vetoriais.

1.5.1. Definição: Seja V um conjunto não vazio em que está definida uma operação de adição tal que $\forall\, u, v \in V$, tem-se $u + v \in V$, e uma operação de multiplicação por escalar onde $\forall\, \lambda \in K$ e $\forall\, v \in V$, tem-se $\lambda\, v \in V$.

Suponhamos que para quaisquer u, v, w elementos em V e quaisquer α, λ elementos num corpo K, valem:

$\boldsymbol{A_1}$: $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Associatividade da adição);

$\boldsymbol{A_2}$: $u + v = v + u$ (Comutatividade da adição);

$\boldsymbol{A_3}$: existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = 0 + u$ (Existência de elemento neutro da adição);

$\boldsymbol{A_4}$: existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = -x + x = 0$ (Existência de inverso aditivo);

$\boldsymbol{M_1}$: $(\alpha\lambda)u = \alpha(\lambda u)$;

$\boldsymbol{M_2}$: $(\alpha + \lambda)u = \alpha u + \lambda u$;

$\boldsymbol{M_3}$: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

$\boldsymbol{M_4}$: $1 \cdot u = u$.

Nessas condições dizemos que V é um espaço vetorial sobre o corpo K, que denotamos por $V(K)$.

1.5.2. Observação: Se V é um espaço vetorial sobre um corpo K, valem

i) $\lambda 0 = 0, \forall \lambda \in K$;

ii) $(-1)v = -v, \forall v \in V$.

Demonstração: Para i), temos que $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$, o que implica que $0 = \lambda 0$, ou seja, $\lambda 0 = 0$. Agora, para ii), temos que $0 = 0v = \big(1 + (-1)\big)v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$; o que implica que $(-1)v = -v$.

1.5.3. Exemplo: O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\, f \text{ é função}\}$ de todas as funções reais, munido das operações de adição e da multiplicação por escalar definidas da seguinte forma: $\forall\, f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\forall\, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
(+): f + g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\cdot): \lambda f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x),
\end{aligned}
$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Como a operação de adição em $\mathbb{R}$ é associativa vale que: $\big(f(x) + g(x)\big) + h(x) = f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$ para cada x, logo $(f + g) + h = f + (g + h)$ e vale A_1.

Como a adição em $\mathbb{R}$ é comutativa; vale que $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ para cada x, logo $f + g = g + f$ e vale A_2.

O "vetor" nulo é a função

$$
\begin{aligned}
o: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto o(x) = 0.
\end{aligned}
$$

A função

$$
\begin{aligned}
-f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (-f)(x) = -f(x)
\end{aligned}
$$

é o inverso aditivo de f.

Temos também que $[(\alpha\lambda)f](x) = (\alpha\lambda)f(x) = \alpha[\lambda f(x)] = \alpha(\lambda f)(x)$, ou seja, que vale M_1. Que $[(\alpha + \lambda)f](x) = (\alpha + \lambda)f(x) = \alpha f(x) + \lambda f(x) = (\alpha f)(x) + (\lambda f)(x) = (\alpha f + \lambda f)(x)$ e, vale M_2. Mais ainda, $[\lambda(f + g)](x) = \lambda[(f + g)(x)] = \lambda[f(x) + g(x)] = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda)$ e, vale M_3.

Por fim, a função

$$
\begin{aligned}
1f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (1f)(x) = 1f(x) = f(x);
\end{aligned}
$$

mostra que, $1f = f$ e, vale M_4.

Essas verificações dependem do conceito de igualdade de funções e das propriedades da adição e multiplicação de números.

1.5.4. Definição: Um vetor v é dito uma *combinação linear* dos vetores $v_1, \dots, v_n$ em V se existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ em K tais que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

1.5.5. Definição: Dizemos que o conjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ gera um espaço vetorial V se todo vetor em V puder ser escrito como combinação linear dos vetores de β.

1.5.6. Definição: Sejam V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto de V. Dizemos que β é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LI, se a equação

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

implicar $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. No caso em que existe algum $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1,2, \dots, n$, dizemos que β é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LD.

1.5.7. Observação: Sejam $v_1, \dots v_n$ vetores em V. Se $v_1, \dots v_n$ são LI's então a combinação linear $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ é unicamente determinada pelos escalares reis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Demonstração: De fato, considere que exista outra combinação linear com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Então vale que

$$(\alpha_1 - \lambda_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \lambda_n) v_n = 0.$$

Como $v_1, \dots, v_n$ são LI's, resta que $\alpha_1 = \lambda_1, \dots, \alpha_n = \lambda_n$.

1.5.8. Definição: Seja n um número natural. Dizemos que um subconjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é uma base desse espaço se, e somente se:

i) β gera V;

ii) β é um conjunto LI.

1.5.9. Proposição: Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ordenada do espaço vetorial V, cada vetor em V pode ser expresso de maneira única como combinação linear dos vetores de β.

Demonstração: Sabemos que β gera V, logo um vetor arbitrário v em V pode ser expresso como combinação linear dos vetores de β. Suponhamos que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \text{ e } v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Daí, obtemos

$$0 = v - v = (\alpha_1 - \lambda_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \lambda_n) v_n.$$

Como $v_1, \dots, v_n$ são LI's concluímos que $\alpha_1 = \lambda_1, \dots, \alpha_n = \lambda_n$.

1.5.10. Definição: Seja n um número natural. Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, dizemos que V tem dimensão finita n (ou que V é n-dimensional). O espaço constituído do vetor nulo tem dimensão zero. Indicaremos por $\dim(V)$ a dimensão de V.

Muitos resultados à respeito de um espaço vetorial podem ser vistos nas referências [1], [2], [3], [4] e [5]. Os que incluímos aqui é para dar significado aos conjuntos que investigaremos. Facilmente, podemos reconhecer que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ são também espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. O conjunto $\beta = \{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ e o conjunto $\gamma = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}\right\}$ é uma base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$; isto é, $\dim(\mathbb{C}) = 2$ e $\dim\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big) = 4$.

O conjunto $\mathcal{C}$ é dois gerado; já que $\xi = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}, \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}\right\}$ é uma de suas bases. Além disso, vale que $\dim(\mathcal{C}) = 2$, o que não pode ser uma novidade, pois por 1.4.12, vale que $\mathbb{C} \cong \mathcal{C}$.

1.6 Transformações lineares

Nesta seção relacionaremos alguns resultados sobre transformações lineares, que são funções especiais cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais sobre um corpo K. O objetivo principal é estabelecer que essas funções podem ser representadas por matrizes.

1.6.1. Definição: Sejam V e Wespaços vetoriais sobre um corpo K. Diremos que uma *transformação* T de V em W é *linear* se, e somente se,

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$;

ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$,

onde u e v são vetores arbitrários em V e λ é um escalar arbitrário em K.

1.6.2. Exemplo: Se V é um espaço vetorial, a transformação identidade I_V, definida por $I_V(u) = u$, para todo $u \in V$, é linear. Do mesmo modo a transformação nula, definida por $O(u) = 0$, para todo $u \in V$.

Note que se $\lambda = 0$ em ii), por 1.5.2, temos que $T(0) = 0$; isto é, toda transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo. Observemos que o contrário não vale, isto é, se T é uma transformação linear, temos que $T(0) = 0$ não implica que T é linear, pois $T(x) = |x|$ não é linear.

1.6.3. Proposição: Uma transformação $T: V \longrightarrow W$ é linear se, e somente se, $\forall u, v \in V(K)$ e $\forall\, \lambda \in K$ tivermos que $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$.

Demonstração: Se T é linear, temos $T(\lambda u + v) = T(\lambda u) + T(v) = \lambda T(u) + T(v)$.

Equivalentemente, pondo $\lambda = 1$, temos $T(u + v) = T(1u + v) = T(1u) + T(v) = 1T(u) + T(v) = T(u) + T(v)$

E, usando que $T(0) = 0$, temos $T(\lambda u) = T(\lambda u + 0) = T(\lambda u) + T(0) = \lambda T(u) + 0 = \lambda T(u)$.

1.6.4. Exemplo: Seja A é uma matriz de ordem $m \times n$ sobre o corpo $\mathbb{R}$. A matriz A determina a "transformação matricial" $T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(X) = AX$, para todo X em $\mathbb{R}^n$. (Aqui os vetores de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ são escritos como matrizes coluna). Essa transformação é linear, pois para qualquer $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $T_A(\lambda X_1 + X_2) = A(\lambda X_1 + X_2) = A(\lambda X_1) + A(X_2) = \lambda A X_1 + A X_2 = \lambda T_A(X_1) + T_A(X_2)$.

1.6.5. Proposição: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ for uma base ordenada de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ um conjunto de vetores, não necessariamente distintos, em W, existe uma única transformação linear $T: V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Ver [6]; página 135.

1.6.6. Proposição: Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e as aplicações lineares $T: V \longrightarrow W$ e $T': V \longrightarrow W$. Então $T + T'$ e λT definidas por:

$$(T + T')(v) = T(v) + T'(v) \text{ e } (\lambda T)(v) = \lambda T(v)$$

são transformações lineares de V em W.

Demonstração: Ver [5]; página 128.

1.6.7. Proposição: Sejam V, W e Z espaços vetoriais sobre um corpo K, $T: V \longrightarrow W$ e $T': W \longrightarrow Z$ transformações lineares. Então, a composta $T' \circ T: V \longrightarrow Z$, definida por $(T' \circ T)(v) = T'\big(T(v)\big)$ é uma transformação linear.

Demonstração: Ver [4], página 124.

1.6.8. Exemplo: Vemos que

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad L: \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$(x,y) \longmapsto (1f)(x) = 1f(x) = f(x) \quad \text{e} \quad z = x + yi \longmapsto L(z) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

são aplicações lineares, e

$$L \circ T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$(x,y) \longmapsto (L \circ T)\big((x,y)\big) = L\Big(T\big((x,y)\big)\Big) = L(x + yi) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

1.6.9. Definição: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K com bases $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ fixadas, respectivamente, e seja $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear. A matriz de T em relação às bases β e β', indicada por $[T]_{\beta'}^{\beta}$, é a única matriz cuja j-ésima coluna é a matriz coordenada do vetor $T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_j$ na base β'. Então,

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},$$

é a matriz que representa a transformação T, a qual notamos ser a matriz transposta da matriz dos coeficientes de

$$(*) \begin{cases} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T(v_n) = a_{1n}w_2 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{cases},$$

que obtemos escrevendo as imagens dos vetores da base β como combinação linear dos vetores da base β'.

Note que a unicidade da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é garantida pela proposição em 1.5.7.

1.6.10. Exemplo: Seja L a aplicação do exemplo em 1.6.8. Temos que

$$L(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$L(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Então, temos que $[L]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

1.6.11. Definição: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Uma aplicação linear de V em V será denominado de *operador linear*.

Em se tratando da representação matricial de um operador linear $T: V \longrightarrow V$, é mais conveniente usarmos a mesma base ordenada de V. Nesse caso $[T]_\beta^\beta \equiv [T]_\beta$ será denominada simplesmente de matriz de T em relação a base ordenada β.

1.6.12. Exemplo: Consideremos o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T\big((x, y)\big) = (x + ky, y)$. Para $k \in \mathbb{R}$ e $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, vamos determinar $[T]_\beta$. Temos

$$T\big((1,0)\big) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$
$$T\big((0,1)\big) = (k,1) = k(1,0) + 1(0,1),$$

então, $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Notemos que, se $\beta \neq \{(1,0), (0,1)\}$ então, $[T]_\beta \neq \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$; ou seja, para cada base ordenada β há uma única matriz $[T]_\beta$ que representa o operador linear T.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $1 \leq n \in \mathbb{N}$ sobre um corpo K. Conforme o exemplo em 1.5.4 e a observação em 1.6.6, podemos considerar o conjunto $\mathcal{F}(V) = \{f: V \longrightarrow V / f \text{ é uma função}\}$. Dentro desse conjunto, um espaço vetorial sobre o corpo K, é o conjunto $\mathcal{L}(V) = \{T: V \longrightarrow V / T \text{ é uma aplicação linear}\}$ dos operadores lineares de V em V. Cada elemento de $\mathcal{L}(V)$, fixada uma base β, pode ser representado por uma matriz de $\mathbb{M}_n(K)$.

1.6.13. Proposição: Se V é um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{R}$ com uma base ordenada $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ fixada, existe uma bijeção entre o conjunto $\mathcal{L}(V)$ dos operadores lineares T de V em V e o conjunto $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Demonstração: Consideremos a função $\mathfrak{F}$ que associa a cada operador linear T em $\mathcal{L}(V)$ uma matriz quadrada em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ definida por

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}: \mathcal{L}(V) &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto \mathfrak{F}(T) = [T]_\beta: \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad X \longmapsto [T]_\beta X \end{aligned}$$

Ora, já sabemos, pela definição em 1.6.9, que a cada transformação linear, está associada a uma matriz e, em particular, ao operador linear T está associada uma matriz de ordem $n \times n$ fixada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de seu domínio. Isto é, se $[T_1]_\beta$ e $[T_2]_\beta$ são matrizes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, que representam os operadores lineares T_1 e T_2 em $\mathcal{L}(V)$, respectivamente, e se $[T_1] = [T_2]$; então ocorre que $T_1 = T_2$. Logo, $\mathfrak{F}$ é injetiva. Já para toda matriz

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),$$

existe um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\mathfrak{F}(T) = [T]_\beta$, o que mostra que $\mathfrak{F}$ é sobrejetiva. Portanto, $\mathfrak{F}$ é uma bijeção de $\mathcal{L}(V)$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

1.6.14. Proposição: Sejam v um elemento do espaço vetorial V e T um operador linear sobre V. Se $[v]_\beta$ e $[T(v)]_\beta$ indicam, respectivamente, as matrizes coordenadas de v e $T(v)$ numa base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V, então

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta [v]_\beta.$$

Demonstração: Se $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ é um elemento de V,

então

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(v_j).$$

Como as imagens dos vetores da base pertencem a V, podemos escrever

$$T(v_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} v_k \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

Daí,

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{k=1}^{n} c_{kj} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj} c_j\right) v_k.$$

Consequentemente, a matriz coordenada de $T(v)$ na base β é

$$[T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

Isto é,

$$[T(v)] = [T]_\beta [v]_\beta.$$

1.6.15. Exemplo: Se $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é a matriz da transformação do exemplo em 1.6.11 e $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$ a matriz coordenada de um vetor v qualquer do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, então $[T]_\beta[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$ é a matriz coordenada da imagem de $T\big((x,y)\big) = (x + ky, y)$.

1.6.16. Proposição: Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Sejam T e T' operadores lineares sobre V. Se $[T]_\beta = A$ e $[T']_\beta = B$, então $[T \circ T']_\beta = AB$ (nessa ordem).

Demonstração: Seja $C = [T \circ T']_\beta$ e sejam $A = [T]_\beta$ e $B = [T']_\beta$. É fácil ver que $C = AB$, pois se v é um vetor qualquer de V, temos $[T(v)]_\beta = A[v]_\beta$ *e* $\big[T\big(T'(v)\big)\big]_\beta = A[T'(v)]$, então $[(T \circ T')(v)]_\beta = AB[v]_\beta$. Logo, por definição e pela unicidade da matriz que representa um operador linear fixada uma base β, temos necessariamente que $C = AB$.

Capítulo 2 - Elementos ortogonais

Neste capítulo, depois de definirmos o conjunto das matrizes ortogonais de ordem 2, faremos a intersecção com o conjunto $\mathcal{C}$ do exemplo em 1.2.15, mostrando que o conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, dos elementos ortogonais de $\mathcal{C}$, está contido propriamente nesse conjunto. Por isomorfismo, constataremos que $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ tem uma pré imagem em $\mathbb{C}$, que coincide com $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z \cdot \bar{z} = 1\}$. Esse conjunto $\mathcal{Z} = \mathcal{O}(\mathbb{C})$ será denominado de conjunto dos elementos ortogonais de $\mathbb{C}$.

2.1 Os elementos ortogonais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

É comum, que a partir de conjuntos conhecidos e de conjuntos que possuem elementos de mesma natureza, construamos o conjunto intersecção, o conjunto união, o conjunto soma ou produto cartesiano. Assim, foi que, olhando, simultaneamente, em $\mathcal{C}$ e no conjunto de todas as matrizes ortogonais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ pudemos chegar aos elementos ortogonais de $\mathbb{C}$.

Primeiramente, note que, se $M = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}_{2\times 2} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, a igualdade

$$M \cdot M^t = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} m & p \\ n & q \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

impõe as seguintes relações: $m^2 + n^2 = p^2 + q^2 = 1$ e $mp + nq = 0$. Portanto, vamos definir por $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big) = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \; e \; a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0\} = \{M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\; M \cdot M^t = I_2\}$ o conjunto das matrizes ortogonais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Obviamente, $\mathcal{C}$ não coincide com $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$. Isso fica claro se observamos que a matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é um elemento de $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$; pois $M \cdot M^t = I_2$. Porém, sendo $m_{11} \neq m_{22}$, temos que $M \notin \mathcal{C}$ e isso mostra que $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big) \not\subset \mathcal{C}$.

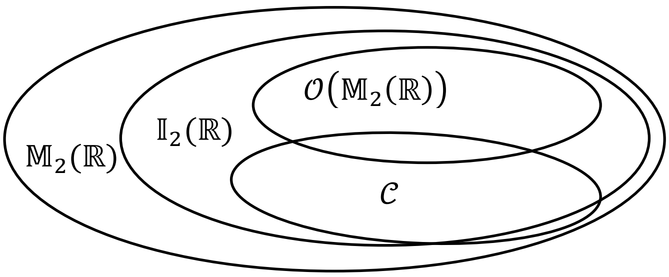
Por outro lado, é claro que a matriz $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ está em $\mathcal{C}$ e não está em $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$; já que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$; o que mostra que $N \notin \mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$ e, assim, $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$.

Agora, pelo fato de que $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$; já que esse conjunto contém I_2, faz sentido investigarmos os elementos dessa intersecção que, na verdade, são formas concretas de números complexos, via isomorfismo.

A análise é a seguinte: um elemento de $\mathcal{C}$, digamos $M = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2}$, está em $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$ se, e somente se, tivermos $M \cdot M^t = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} x^2+y^2 & xy-xy \\ xy-xy & x^2+y^2 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$; de onde obtemos a igualdade $x^2 + y^2 = 1$, que por sua vez, fornece $y = x \pm \sqrt{1-x^2}$, com $-1 \leq x \leq 1$. Isso mostra que as matrizes ortogonais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dentro de $\mathcal{C}$ formam o conjunto

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & \left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) \\ -\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) & x \end{bmatrix}_{2\times 2} ;\ x \in \mathbb{R} \text{ e } -1 \leq x \leq 1 \right\} = \mathcal{O}(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}.$$

Assim, como na página 20, vemos que existe estreita relação entre o conjunto das matrizes, das matrizes inversíveis, das matrizes ortogonais e ordem 2 e as matrizes de $\mathcal{C}$. Veja o seguinte diagrama:



$\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$: Matrizes

$\mathbb{I}_2(\mathbb{R})$: Matrizes inversíveis

$\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$: Matrizes ortogonais

$\mathcal{C}$: Matrizes de $\mathbb{C}$

2.2 As $\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ - imagens dos elementos ortogonais de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$

Na observação em 1.4.12 vimos que a função φ é bijetiva. Evidentemente, podemos definir a função φ^{-1}, bijetiva, inversa de φ, que associa a cada elemento em $\mathcal{C}$, um único elemento em $\mathbb{C}$. Investigaremos como se comportam as imagens dos elementos de $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ no conjunto dos números complexos.

Veremos que tais investigações, nos levam a um interessante subconjunto de $\mathbb{C}$, que assim como o conjunto das matrizes ortogonais, cujos elementos inversos se destacam por serem as matrizes transpostas, tal conjunto de números complexos pode também ser destacado a partir uma particular característica relacionada aos seus inversos.

2.2.1. Definição: Definimos por

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ M &\longmapsto \varphi^{-1}(M) \end{aligned}$$

a função que associa a cada matriz em $\mathcal{C}$ um único número complexo. Assim, a função $\varphi^{-1}/_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}$, restrição da função φ^{-1} ao conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, fornece, através desse isomorfismo inverso, o subconjunto de números complexos

$$\mathcal{Z} = \left\{x \pm \sqrt{1-x^2}i;\, i = \sqrt{-1}, \text{com } i^2 = -1 \text{ e } x \in \mathbb{R} \text{ com } -1 \leq x \leq 1\right\}.$$

2.2.2. Observação: Seja $\mathcal{Z} = \left\{x \pm \sqrt{1-x^2}i;\, i = \sqrt{-1}, \text{com } i^2 = -1 \text{ e } x \in \mathbb{R} \text{ com } -1 \leq x \leq 1\right\}$. Então, valem:

i) Todo elemento de $\mathcal{Z}$ tem módulo igual a 1, ou seja, no plano complexo, todo elemento de $\mathcal{Z}$ está sobre uma circunferência de raio 1 e centro na origem;

ii) $w \cdot \overline{w} = 1$, para todo $w \in \mathcal{Z}$;

iii) Se $w^{-1} = \overline{w}$; vale que $\varphi(w^{-1}) = \left(\varphi(w)\right)^{-1} = \left(\varphi(w)\right)^{t}$, para todo $w \in \mathcal{Z}$.

Demonstração: Seja $w = x \pm \sqrt{1-x^2}i$ um elemento de $\mathcal{Z}$. Temos, então, que $|w| = \sqrt{x^2 + \left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x^2)} = \sqrt{1} = 1$. Portanto, vale i).

Temos, ainda, que

$w \cdot \overline{w} = \left(x + \sqrt{1-x^2}i\right) \cdot \left(x - \sqrt{1-x^2}i\right) = \left(x - \sqrt{1-x^2}i\right) \cdot \left(x + \sqrt{1-x^2}i\right) = x^2 - (1-x^2)i^2 = x^2 + (1-x^2) = 1$, o que mostra a validade de ii).

Por fim, se $w = x + \sqrt{1-x^2}i$, sabendo que $\varphi(w) = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix}_{2\times 2}$, vemos que $\varphi(w^{-1}) = \begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix}_{2\times 2} = \left(\varphi(w)\right)^{t}$ ou, se $w = x - \sqrt{1-x^2}i$ e, sabendo que $\varphi(w) = \begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix}_{2\times 2}$, percebemos que se verifica a igualdade $\varphi(w^{-1}) = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix}_{2\times 2} = \left(\varphi(w)\right)^{t}$, o que mostra que vale iii).

2.2.3. Exemplo: Veja que para $w = 0{,}4 + \sqrt{0{,}84}i$ e $\overline{w} = 0{,}4 - \sqrt{0{,}84}i$, temos a seguinte igualdade $\varphi(w) = \begin{bmatrix} 0{,}4 & \sqrt{0{,}84} \\ -\sqrt{0{,}84} & 0{,}4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é verificada e, portanto, concluímos que $\varphi(w^{-1}) = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -\sqrt{0{,}84} \\ \sqrt{0{,}84} & 0{,}4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \left(\varphi(w)\right)^t$.

2.3 Uma razoável definição para elementos ortogonais em $\mathbb{C}$

Da equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de raio 1 centrada na origem, vemos, claramente, que essa pode ser reescrita como segue abaixa:

$$x^2 + y^2 = x^2 - (-y^2) = x^2 - i^2y^2 = x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = (x + yi)(x - yi) = 1.$$

Percebemos, assim, que a igualdade $x^2 + y^2 = 1$ ocorre em $\mathbb{C}$ quando um número complexo $z = x + yi$ é multiplicado pelo seu conjugado $\bar{z} = x - yi$. Isto é, o conjunto $\mathcal{Z}$ é conjunto dos números complexos que tem a característica do seu conjugado ser o seu inverso multiplicativo.

2.3.1. Definição: Dizemos que um número complexo z é ortogonal se, e somente, se a igualdade $z \cdot \bar{z} = 1$ ocorrer. Por $\mathcal{O}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}; z \cdot \bar{z} = 1\}$ denotaremos o conjunto dos *números complexos ortogonais*. Ressaltamos, e é fácil perceber que o conjunto $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ é exatamente $\mathcal{Z} = \{x \pm \sqrt{1 - x^2}i; i = \sqrt{-1}$ com $i^2 = -1$ e $x \in \mathbb{R}$ com $-1 \leq x \leq 1\}$.

2.3.2. Exemplo: O número complexo $z = 0{,}6 + 0{,}8i$ é ortogonal, pois

$$z \cdot \bar{z} = (0{,}6 + 0{,}8i) \cdot (0{,}6 - 0{,}8i) = 0{,}36 + 0{,}64 = 1.$$

Ademais, sendo φ o isomorfismo em 1.4.12, a matriz $\varphi(z) = M = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é ortogonal, já que $M \cdot M^t = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

É claro que para encontrar um número complexo ortogonal $z = x + yi$ bastar encontrar dois números reais x e y satisfazendo a igualdade $x^2 + y^2 = 1$ e pertencentes ao intervalo $[-1{,}1]$.

Fazendo um parelelo a observação em 1.1.21 temos o seguinte fechamento para a multiplicação em $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

2.3.3. Observação: O produto de dois números complexos ortogonais é ainda ortogonal.

Demonstração: Realmente, sejam z_1 e z_2 dois números complexos ortogonais, temos

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{(z_1)} \cdot \overline{(z_2)} = z_1 \cdot \overline{(z_1)} \cdot z_2 \cdot \overline{(z_2)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

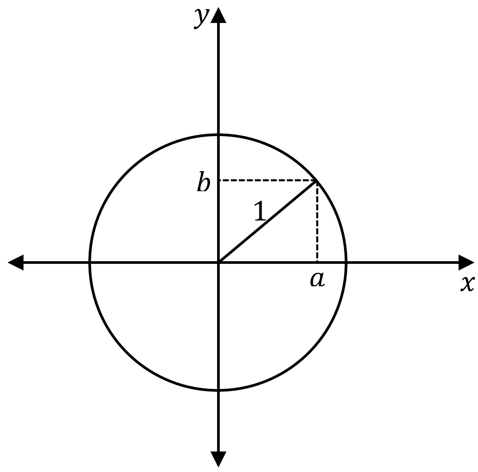
2.3.4. Observação: O produto entre números complexos ortogonais permanece na circunferência unitária centrada na origem.

Demonstração: De fato, sejam z_1 e z_2 dois números complexos ortogonais. Digamos que θ_1 e θ_2 sejam os argumentos de z_1 e z_2, respectivamente. Como o módulo de z_1 e z_2 são ambos iguais a 1, temos

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2),$$

de onde obtemos

$$|z_1 \cdot z_2| = |\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)| = 1.$$



2.3.5. Observação: A potência de um número complexo ortogonal permanece sobre a circunferência unitária centrada na origem.

Demonstração: Pela formula de De Moivre, temos

$$z^n = (cos\, n\theta + isen\, n\theta),$$

pois o módulo de z é igual a 1. Como $|cos\, n\theta + isen\, n\theta| = \sqrt{(cos\, n\theta)^2 + (sen\, n\theta)^2} = 1$, vemos que a potência de um número complexo ortogonal realmente permanece sobre a circunferência de raio 1.

2.3.6. Observação: A n-ésima raiz de um número complexo ortogonal permanece sobre a circunferência de raio 1.

Demonstração: De fato, temos que o módulo de um número complexo é igual a 1. Assim,

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], k = 0, \dots, n-1,$$

equivale a

$$w_k = \left[cos\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], k = 0, \dots, n-1.$$

Como

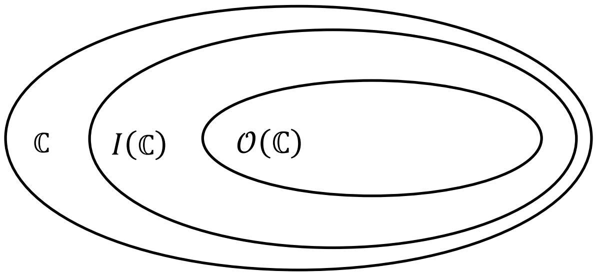
$$\left|cos\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right| = 1$$

verificamos esse fato.

2.3.7. Observação: O número complexo i é ortogonal.

Demonstração: Realmente, $(0+i)\cdot(0-i) = -i^2 = -(-1) = 1$.

Podemos ter uma visão geral do comportamento dos números complexos, dos números complexos inversíveis e dos números complexos ortogonais no diagrama logo abaixo.



$\mathbb{C}$: Números complexos

$I(\mathbb{C})$: Números complexos não nulos

$\mathcal{O}(\mathbb{C})$: Números complexos ortogonais

2.4 Os elementos ortogonais de $\mathbb{R}^2$

Nesta seção, brevemente, consideraremos o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, que são imagens dos elementos de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ pela função δ, definida em 1.4.7.

Temos

$$\begin{array}{rcl} \delta/_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}: \mathcal{O}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z = x \pm \sqrt{1-x^2}\,i & \longmapsto & \delta/_{\mathcal{O}(C)}(z) = \delta(z) = \left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right), \end{array}$$

restrição da função δ e, conforme a definição de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, vale que $-1 \leq x \leq 1$.

Verifiquemos o comportamento dessas imagens com respeito à multiplicação definida em 1.4.6: $\forall\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)$. Antes, vejamos, primeiramente, que $Im(\delta/_{\mathcal{O}(\mathbb{C})})$, o conjunto imagem da função $\delta/_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$, é exatamente o conjunto $\mathfrak{Z} = \{\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \text{ com } -1 \leq x \leq 1\}$.

Para $x = 1$, temos que $(1,0) \in \mathfrak{Z}$. Além disso, se $\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right) \in \mathfrak{Z}$, usando o isomorfismo δ e o fato de que, em $\mathbb{C}$, o inverso de $\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right) = x \pm \sqrt{1-x^2}\,i$, é o número complexo $\left(x \pm \sqrt{1-x^2}\,i\right)^{-1} = x - \left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)i$, de volta em $\mathfrak{Z}$, temos que $\delta\left(\left(x \pm \sqrt{1-x^2}\,i\right)^{-1}\right) = \delta\left(x - \left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)i\right) = \left(x, -\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)\right) = \left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} \in \mathfrak{Z}$.

É natural definirmos $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2/(a,b)(a,-b) = (1,0)\}$, pelo isomorfismo δ, como sendo o *conjunto dos elementos ortogonais de* $\mathbb{R}^2$. Esse conjunto coincide com $Im(\delta/_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}) = \mathfrak{Z} = \{(x, \pm\sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{R}^2/x \in \mathbb{R} \text{ com } -1 \leq x \leq 1\}$.

Os elemento de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2) = \{(x, \pm\sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{R}^2/x \in \mathbb{R} \text{ com } -1 \leq x \leq 1\}$ são todos inversíveis, no entanto, $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$, o conjunto dos elementos inversíveis de $\mathbb{R}^2$, é maior do que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Por exemplo, $(2,0) \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ mas, $(2,0) \notin \mathfrak{Z}$. Já o par ordenado $\left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right)$ é ortogonal, pois conforme a definição acima, temos que $\left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right)\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = (1,0)$.

2.4.1. Observação: Todo elemento de $\mathfrak{Z}$ pode ser representado como um ponto na circunferência unitária.

Demonstração: Como o número complexo $z = x \pm \sqrt{1-x^2}i$ está na circunferência unitária, pelo item i) da observação em 2.2.2, e como cada número complexo representa um par ordenado, conforme a função δ definida em 1.4.7, temos que $(x, \pm\sqrt{1-x^2})$ está na circunferência unitária.

2.4.2. Observação: O produto de dois pares ordenados ortogonais é ortogonal.

Demonstração: Sejam $(a, \pm\sqrt{1-a^2})$ e $(b, \pm\sqrt{1-b^2})$ dois elementos de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Temos $(a, \pm\sqrt{1-a^2})(b, \pm\sqrt{1-b^2}) = \left(ab - \left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right), a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right) + b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right)$. E, o produto desse elemento por $\left(ab - \left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right), -\left(a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right) + b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right)\right)$ fornece $\left(\left(ab - \left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\right)^2 - \left(a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right) + b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right)\left(-\left(a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right) + b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right)\right), 0\right)$

$= \left(\left(ab - \left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\right)^2 + \left(a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right) + b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right)\left(a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right) + b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right), 0\right)$

$= \left(\left(ab - \left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\right)^2 + \left(a\left(\pm\sqrt{1-b^2}\right)\right)^2 + 2ab\left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right) + \left(b\left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)\right)^2, 0\right)$

$= \left(a^2b^2 - 2ab\left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right) + (1-a^2)(1-b^2) + a^2(1-b^2) + 2ab\left(\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right) + b^2(1-a^2), 0\right)$

$= (a^2b^2 + (1-a^2)(1-b^2) + a^2(1-b^2) + b^2(1-a^2), 0) = (a^2b^2 + 1 - b^2 - a^2 + a^2b^2 + a^2 - a^2b^2 + b^2 - a^2b^2, 0)$

$= (1,0)$. Isso mostra que $(a, \pm\sqrt{1-a^2})(b, \pm\sqrt{1-b^2}) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

2.4.3. Observação: Seja $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ o conjunto dos elementos ortogonais de $\mathbb{R}^2$. Então:

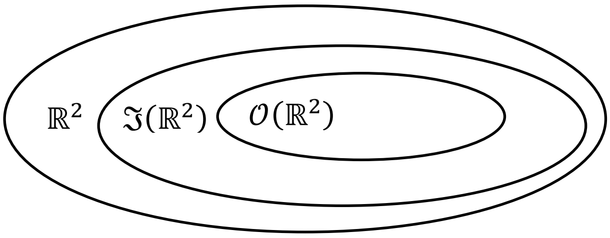
i) se $z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, vale que $\delta(z^{-1}) = \big(\delta(z)\big)^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$

ii) para um qualquer elemento $\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)$ em $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, vale que $\overline{\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right)} = \left(\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right)^{-1}$.

Demonstração: i) Para $z = x \pm \sqrt{1-x^2}\,i$, vale que $\delta(z) = \left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)$. Daí, temos $\delta(z^{-1}) = \delta(\bar{z}) = \left(x, -\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)\right) = \left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} = \big(\delta(z)\big)^{-1}$.

ii) Considere δ^{-1}, a função inversa de δ da observação em 1.4.7. Então, temos que $\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Como, pela definição em 2.3.1, vale que $\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right)\overline{\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right)} = 1$, temos, portanto, que $\overline{\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right)} = \left(\delta^{-1}\left(\left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right)^{-1}$.

Podemos ver o comportamento dos pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$ e $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ conforme o seguinte diagrama.



$\mathbb{R}^2$: Pares ordenados

$\mathfrak{I}(\mathbb{R}^2)$: Pares ordenados inversíveis

$\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$: Pares ordenados ortogonais

2.5 Os elementos ortogonais de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^2)$

Conforme a observação em 1.6.13, dentro das funções que agem de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, podemos considerar o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \{T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;/\; T$ é uma aplicação linear$\}$. Mais ainda, existe uma bijeção entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ e o conjunto $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas em $\mathbb{R}$.

Dentro de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ vamos considerar o conjunto

$\text{ƻ} = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) / \,T\big((x,y)\big) = (mx + ny, px + qy)$; com $m^2 + n^2 = p^2 + q^2 = 1 \;e\; mp + nq = 0\}$.

Isso permite que formulemos o seguinte resultado.

2.5.1. Observação: Seja ψ a aplicação que associa a cada matriz ortogonal um operador linear definida como abaixo

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big) &\longrightarrow \mathcal{Z} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ M &\longmapsto \mathfrak{F}\psi(M) = T: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ &\qquad\qquad (x,y) \longmapsto \big((x,y)\big) = (mx+ny, px+qy), \end{aligned}$$

com $m^2 + n^2 = p^2 + q^2 = 1$ e $mp + nq = 0$, então ψ é um isomorfismo.

Demonstração: Já sabemos que o produto de duas matrizes ortogonal é ortogonal. (Ver 1.1.21). Assim, sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ operadores lineares em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, temos que $\psi(M_1 \cdot M_2) = T_1 \cdot T_2 = T_1 \circ T_2 = \psi(M_1) \circ \psi(M_2)$. (Ver 1.6.16).

Agora, como pela proposição em 1.6.12 a função $\mathfrak{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma bijeção e em particular, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{O}(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, temos que ψ como definida acima também é uma bijeção e, portanto, um isomorfismo.

O isomorfismo definido na observação acima induz à seguinte definição.

2.5.2. Definição: Uma *aplicação linear* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ é *ortogonal* se, e somente se, fixada uma base β de $\mathbb{R}^2$, a matriz de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ que representa T é ortogonal, ou seja, a matriz $[T]_\beta = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}_{2\times 2}$; onde $m^2 + n^2 = p^2 + q^2 = 1$ e $mp + nq = 0$.

2.5.3. Exemplo: O operador $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T\big((x,y)\big) = (xcos\theta + ysen\theta, -xsen\theta + ycos\theta)$$

é um operador ortogonal.

De fato, consideremos $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Temos que

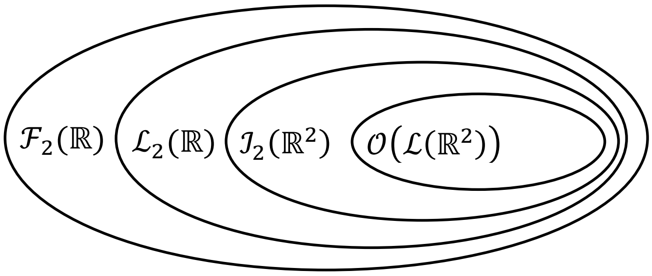
$$\begin{aligned} T\big((1,0)\big) &= (cos\theta, -sen\theta) = cos\theta(1,0) - sen\theta(0,1) \\ T\big((0,1)\big) &= (sen\theta, cos\theta) = sen\theta(1,0) + cos\theta(0,1), \end{aligned}$$

o que implica que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$. Ademais, são satisfeitas as condições $(cos\theta)^2 + (sen\theta)^2 = (cos\theta)^2 + (-sen\theta)^2 = 1$ e $\big(cos\theta \cdot (-sen\theta)\big) + (sen\theta \cdot cos\theta) = 0$.

Obviamente, conforme a definição acima, o conjunto de todos os operados ortogonais $\mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$ de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ é o conjunto $\mathcal{Z}$, isto é:

$\mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big) = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \,/\, T\big((x,y)\big) = (mx+ny, px+qy)\}$; com a condição de que se verifiquem as igualdades $m^2 + n^2 = p^2 + q^2 = 1$ e $mp + nq = 0$.

Podemos verificar a relação entre as aplicações lineares, os operadores lineares, os operadores inversíveis e os operados ortogonais em $\mathbb{R}^2$, no seguinte diagrama:



$\mathcal{F}_2(\mathbb{R}^2)$: Operadores
$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$: Operadores lineares
$\mathcal{I}_2(\mathbb{R}^2)$: Operadores inversíveis
$\mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$: Operadores ortogonais

2.5.4. Observação: Sejam T_1 e T_2 elementos de $\mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$. Então, vale que $T_1T_2 \equiv T_1 \circ T_2$ também é um elemento de $\mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$.

Demonstração: Pela definição em 2.4.2, vemos que cada operador ortogonal está representado por uma matriz ortogonal. Assim, fixada uma base β de $\mathbb{R}^2$, sejam $[T_1]_\beta$ e $[T_2]_\beta$ as matrizes que representam os operadores T_1 e T_2, respectivamente. Pela observação em 1.1.21, temos que $[T_1]_\beta[T_2]_\beta$ é ortogonal. Pela observação em 1.6.16, temos que $[T_1]_\beta[T_2]_\beta$ representa o operador $T_1 \circ T_2$. Então, pela definição em 2.2.2, vemos que $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$

2.5.5. Observação: Sejam $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ o conjunto dos operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e β uma base fixa de $\mathbb{R}^2$. Então, são equivalentes:

i) $T \in \mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$;

ii) $[T]_\beta \in \mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$.

Demonstração: Pela definição em 2.4.2, $T \in \mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$ se, e somente se, $[T]_\beta \in \mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$.

2.5.6. Observação: Sejam $T \in \mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$ e $[T]_\beta$ a matriz que representa T em relação a uma base β de $\mathbb{R}^2$. Então, são equivalentes:

i) $[T]_\beta \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) = \mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big) \cap \mathcal{C} \subset \varphi(\mathbb{C})$;

ii) $\overline{\varphi^{-1}\big([T]_\beta\big)} = \Big(\varphi^{-1}\big([T]_\beta\big)\Big)^{-1}$, onde φ é o isomorfismo da observação em 1.4.12.

Demonstração: Consideremos i). Vemos que $\varphi^{-1}\big([T]_\beta\big) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Então, pelo item ii) da observação em 2.2.2, só podemos acreditar que $\overline{\varphi^{-1}\big([T]_\beta\big)} = \Big(\varphi^{-1}\big([T]_\beta\big)\Big)^{-1}$, pois

$\varphi^{-1}([T]_\beta)\overline{\varphi^{-1}([T]_\beta)} = 1$. Agora, se considerarmos ii), temos pelo item iii) da observação em 2.2.2, que $\varphi\left(\left(\varphi^{-1}([T]_\beta)\right)^{-1}\right) = \left(\varphi\left(\varphi^{-1}([T]_\beta)\right)\right)^{-1} = [T]_\beta{}^{-1} = [T]_\beta{}^{t}$ e, $[T]_\beta \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Considerando o isomorfismo φ^{-1}, inversa de φ, definida em 1.4.12, temos a seguinte demonstração alternativa: a função restrição

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}/_{\mathcal{O}(\mathcal{C})} : \mathcal{O}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathcal{Z} \subset \mathbb{C} \\ X &\longmapsto \varphi^{-1}/_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}(X) = \varphi^{-1}(X) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Consequentemente, temos que: $[T]_\beta \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ se, somente se, $\varphi^{-1}/_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}([T]_\beta) = \varphi^{-1}([T]_\beta) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ se, e somente se, $\left(\varphi^{-1}([T]_\beta)\right)^{-1} = \overline{\varphi^{-1}([T]_\beta)}$.

Capítulo 3 - Considerações finais

A respeito de um grupo G

Nossas discussões permeiam algumas estruturas algébricas, pois os conjuntos abordados se encaixam em algumas delas.

3.1 Definição: Um *grupo multiplicativo* $(G, \cdot)$ é um conjunto não vazio, no qual está defina uma operação "·" de multiplicação que possui as seguintes propriedades: $\forall\, x, y, z \in G$, vale que,

G_1: $x(yz) = (xy)z$;

G_2: $\exists\, e \in G$ tal que $xe = ex = x$;

G_3: $\exists\, x^{-1} \in G$ tal que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$;

Se, além dessas propriedades, tivermos

G_4: $xy = yx$;

dizemos que G é um *grupo abeliano*.

O leitor deve perceber que os conjuntos $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ e $\mathbb{R}^2$, munidos de suas particulares multiplicações, são todos grupos multiplicativos abelianos. Reduzindo nossas considerações aos conjuntos $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, todos isomorfos entre si. Também, que $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (ver 1.6.6) são espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $\mathcal{O}\big(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\big)$ e $\mathcal{O}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)$ são isomorfos.

Uma generalização do conceito de ortogonalidade, longe daquele que provém de um *produto interno*, definido em um *espaço vetorial*, conhecidamente uma propriedade *dois testável*, pode ser dado como a seguir.

3.2 Definição: Seja $(G, \cdot)$ um grupo multiplicativo. Então, se existe um isomorfismo ξ de $\mathbb{C}$ (ou $\mathcal{C}$ ou $\mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$) para G , diremos que *em G existem elementos ortogonais*. Mais especificamente, diremos que $\xi(z) = g$ é um *elemento ortogonal de G* se, e somente se

i) g^{-1}, o inverso multiplicativo de g, é a imagem direta do conjugado de um número complexo z tal que $\bar{z} = z^{-1}$; ou

ii) g^{-1}, o inverso multiplicativo de g, é a imagem direta da transposta de uma matriz ortogonal, que é imagem direta, pelo isomorfismo φ, do conjugado de um número complexo z tal que $\bar{z} = z^{-1}$; ou

iii) g^{-1}, o inverso multiplicativo de g, é a imagem direta, pelo isomorfismo δ, do conjugado de um número complexo z tal que $\bar{z} = z^{-1}$; ou
iv) g^{-1}, o inverso multiplicativo de g, é a imagem direta de um operador linear, que é imagem direta, pelo isomorfismo ψ, da transposta de uma matriz ortogonal, que é imagem direta, pelo isomorfismo φ, do conjugado de um número complexo z tal que $\bar{z} = z^{-1}$.

Note que a sequência que apresentamos os itens i), ii), iii) e iv) pode ser alterada para ii), iv), i) e iii), olhando primeiramente para o produto interno de cada par de vetores coluna de uma matriz quadrada, seus comprimentos, reduzindo esse entendimento para matrizes quadradas de ordem 2 que, por construção representam operadores lineares. Depois, olhando para a natural representação "concreta" de um número complexo como um vetor de $\mathbb{R}^2$.

Estabelecida a representação matricial de um operador linear T, agindo sobre um espaço vetorial V de dimensão finita $1 \leq n \in \mathbb{N}$, sobre um corpo K, a definição de operador ortogonal está ligada ao fato das colunas dessa matriz serem duas a duas vetores ortogonais. Se considerarmos o caso $n = 2$, os elementos de $\mathcal{L}(V)$, definido no parágrafo 1.6, seriam representados por matrizes quadradas de ordem 2. Se o espaço vetorial V for definido sobre um corpo K, cada elemento de $\mathcal{L}(V)$ pode ser reconhecido com uma matriz de $\mathbb{M}_2(K)$. Isso pode induzir uma generalização do estudo que fizemos no parágrafo 2.5 e, nesse caso, poderíamos estabelecer que os elementos ortogonais de $\mathcal{L}(V)$ seriam determinados pela representação matricial em $\mathbb{M}_2(K)$, onde essas matrizes deveriam ter pares de colunas como vetores ortogonais.

No entanto, reconhecer os elementos ortogonais de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ como matrizes quadradas de ordem 2, cujas inversas são suas transpostas é tecnicamente visível e possibilita, ainda, que relacionemos esses operadores com os elementos ortogonais de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}^2$.

Substituir em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, o conjunto $\mathbb{R}^2$ por $D_2(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes diagonais de ordem 2 ou por $P_1(t)$, o conjunto dos polinômio de grau no máximo 1, juntamente com o polinômio identicamente nulo nos levaria a definir os elementos ortogonais de $\mathcal{L}\big(D_2(\mathbb{R})\big)$ ou $\mathcal{L}\big(P_1(t)\big)$ como em 2.5.2. Consequentemente, resultados análogos aos das observações em 2.5.1, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5 e 2.5.6 seriam obtidos.

A respeito dos nossos estudos

Neste TCC, no capítulo 1, desenvolvemos alguns tópicos da matemática básica, como o estudo das matrizes e, em particular o estudo da estrutura do conjunto das matrizes quadradas e ordem 2 e o conjunto dos números complexos.

Destacamos ainda os isomorfismos δ e φ definidos nas observações 1.4.7 e 1.4.12, respectivamente. Tais funções merecem destaque porque permitem estender os conceitos que elaboramos, de uma matriz quadrada de ordem 2 para um número complexo, e desse, para um par ordenado em $\mathbb{R}^2$.

Não menos importante, foi o estudo das transformações lineares, das quais destacamos os operadores lineares na definição em 1.6.11, e a proposição em 1.6.13, que faz associar a cada operador linear de $\mathcal{L}(V)$, onde V é um espaço vetorial n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{R}$, uma única matriz quadrada em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

O capítulo 2 é o capítulo que julgamos mais relevante de nosso trabalho, pois é nele que definimos os elementos ortogonais de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$. Em primeiro lugar, ao encontro da definição em 1.1.19, explicitamos o conjunto dos elementos ortogonais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, que denotamos por $\mathcal{O}(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$. Em seguida, intersectamos $\mathcal{O}(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$ com o conjunto das imagens de $\mathbb{C}$ pela função φ, que denotamos por $\mathcal{C}$, e obtivemos o conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{C})$. O conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, mandamos de volta para $\mathbb{C}$ pela função restrição $\varphi^{-1}/_{\mathcal{O}(\mathcal{C})}$, obtendo o conjunto $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ dos números complexos ortogonais.

Dentro de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ vimos que existe o fechamento para a multiplicação, fato que comprovamos na observação em 2.3.3. Mais ainda, na observação em 2.3.4, confirmamos que a multiplicação de quaisquer dois números complexos ortogonais sempre permanece na circunferência unitária e, do mesmo modo a potência e a raiz, pelas observações 2.3.5 e 2.3.6, respectivamente.

Em relação a $\mathbb{R}^2$, definimos par ordenado ortogonal em 2.4.1 e o conjunto desses elementos denotamos por $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, que por sua vez, são as imagens dos elementos de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ pela função restrição $\delta/_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$. Destacamos as observação 2.4.3 e 2.4.4, como consequência da definição de número complexo ortogonal em 2.3.1, cujas demonstrações revelam o poder do isomorfismo δ.

Finalizamos o capítulo 2, explorando o conjunto $\mathcal{O}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ dos operados ortogonais, definidos em 2.5.2. Vale ressaltar que, a definição em 2.5.2, não tem o caráter da definição de operadores ortogonais que encontramos, por exemplo, em nossa referência [2], página 143, já que aqui não consideramos o produto interno entre vetores, mas a definição dada em 1.1.19, como mostram a abordagem que fizemos nas observações em 2.5.4 e 2.5.5.

Embora o tema tratado aqui não seja difícil de acessar, acreditamos que as definições e relações que estabelecemos mereçam alguma atenção de quem se dedicar ao estudo dos vetores de $\mathbb{R}^2$ e da Álgebra das Matrizes.

Bibliografia

[1] ANTON, Howard. Álgebra linear com aplicações. 10.ed. Bookman. Porto Alegre, 2012.

[2] BOLDRINI, José Luiz. Álgebra linear. 3ed. Harbra & Row do Brasil. SãoPaulo, 1980.

[3] GONÇALVES, Adilson. Introdução à Álgebra. 5 ed., Rio de Janeiro-RJ; IMPA (2008)

[4] GONÇALVEZ, Adilson e SOUZA, Rita M.L de. Introdução à Álgebra linear. Ed. Bücher LTDA, São Paulo, 1977.

[5] HEFEZ, Abramo. Curso de Álgebra; vol. 1. 2 ed. Rio de Janeiro; IMPA (1993).

[6] LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra linear. McGraw-Hill, 1968.

[7] STEINBRUCH, Alfredo. Álgebra linear. 3ed. McGraw-Hill, São Paulo, 1990.