PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Produto de números negativos: estratégias para tratar um obstáculo epistemológico

por

Carlos Eurico Galvão Rosa

Preprint PROFMAT 2 (2013) 11 de abril, 2013

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Produto de números negativos: estratégias para tratar um obstáculo epistemológico

Carlos Eurico Galvão Rosa
Curitiba, PR Brasil
cegalvao@gmail.com

11 de abril de 2013

Resumo

Esse trabalho representa a parte de um artigo maior tratando de números negativos, obstáculos e estratégias de ensino. O que se pretende aqui é apresentar a exploração de estratégias para a facilitação do ensino da multiplicação entre números negativos com o intuito de facilitar a compreensão, pelos alunos, da multiplicação entre números negativos.
Palavras-chave: Números negativos; Estratégias de Ensino; Regra de Sinais

Nos processos didático-pedagógicos muitos obstáculos necessitam ser ultrapassados. Debruçando-se sobre a história dos números negativos, observa-se que o processo de consolidação do conceito de número negativo foi lento e muito marcante. As dificuldades encontradas por séculos de tentativas para demonstrações de operações com números negativos, em especial o produto entre eles, traduzem-se em obstáculo didático na prática docente. Sabe-se que, através do modelo metafórico, o aluno consegue compreender que se ele possui dez reais $(+10)$ e deve sete reais (-7), ao pagar o que deve, restarão três reais $(+3)$. Todavia, será difícil convencê-lo que $(-1) \times (-1) = +1$. De que forma uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? Diante desse obstáculo didático e motivador para a pesquisa e para o estudo de estratégias de ensino que venham melhorar as práticas pedagógicas do professor, são apresentadas nesse excerto[1] estratégias de ensino para a transposição didática da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$ com o objetivo de melhorar a compreensão da multiplicação entre números negativos pelos alunos.

[1] Arquivo completo disponível online em http://www.mat.ufpr.br/departamento/ensino.html

1 Estratégias para ensinar $(-1) \times (-1) = +1$

Lima [3] inicia a seção sobre produto de inteiros contando a seguinte história sobre seu aprendizado:

> "Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial, as "regras de sinal" para a multiplicação de números relativos da seguinte maneira:
>
> 1^a) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, $(+)\,(+) = +$;
>
> 2^a) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, $(+)\,(-) = -$;
>
> 3^a) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, $(-)\,(+) = -$ e;
>
> 4^a) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, logo, $(-)\,(-) = +$.
>
> Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si)."

Segundo Lima [3] após a explicação das regras de sinais resta, na cabeça das pessoas mais inquisidoras, uma sensação de "*magister dixit*", de regra outorgarda pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível demonstrar, em vez de impor, que $(-1) \times (-1) = +1$? Existem, como os trabalhos de Crowley em [1] ou o de Hankel citado em [2], apresentados acima, demonstrações para as regras de sinais. O que se busca aqui são estratégias para a transposição didática deste fato matematicamente demonstrado para uma linguagem acessível ao estudante de ensino fundamental, como fez o professor do autor do artigo em [3].

Peterson em [4] ressalta ser comum que os professores, ao planejarem suas aulas, normalmente dispõem de poucas estratégias para abordar este tema. A fim de contribuir com o docente, ele apresenta 14 estratégias para responder a seguinte pergunta: "Por que o produto de um número negativo por outro número negativo resulta em um número positivo?". A seguir, analisa-se cada uma dessas estratégias adaptando-as à realidade tecnológica quando possivel.

1.1 Reta numerada

Esta é uma estratégia popular para ensinar as quatro operações básicas com inteiros. São colocadas duas interpretações para os sinais "$+$" e "$-$": como direção de segmentos orientados na reta, sendo positivo à direita da origem, ou ainda como alteração do sentido destes segmentos orientados na reta, podendo estes serem reversos ("$-$") ou não ("$+$"). Desta forma, pela primeira interpretação, "$+4$" pode ser representado por 4 segmentos de tamanho unitário, orientados para direita, justapostos desde a origem. Já "-3" seria representado por 3 segmentos de tamanho unitário, orientados para a esquerda, justapostos desde a origem, entendendo aqui "justaposição" como o processo de colocar o início de um segmento orientado na seta que representa o final do segmento anterior.

Combinando estas interpretações, tem-se o seguinte significado para $a \cdot b = c$:

1. O tamanho de b é a quantidade de segmentos (unitários) que representam b;
2. O sinal de b indica o sentido para onde os segmentos de b apontam: direita ("$+$") ou esquerda ("$-$");
3. O valor absoluto de a indica quantas setas de tamanho b serão justapostas desde a origem;
4. O sinal de a indica se o sentido das setas que representam b será mantido ("$+$") ou revertido ("$-$");
5. O "Vetor Produto" obtido será a reunião de a segmentos orientados de tamanho b. O tamanho deste será o módulo de c e o sinal será determinado pelo seu sentido em relação à origem.

Por exemplo, $(-3) \times (-2)$ será tratado da seguinte forma: Toma-se 3 segmentos de tamanho 2 que apontam para a esquerda. Temos um segmento de tamanho 6 apontando para a esquerda. Como o sinal do primeiro fator é "$-$", o sentido do resultado será invertido, obtendo-se um segmento de tamanho 6 apontando para a direita, que representa $+6$.

1.2 Viagem em uma rodovia

Esta pode ser considerada uma variação da estratégia anterior. Supondo um ponto de partida em uma rodovia de sentido leste-oeste, por exemplo uma casa, podemos pensar neste ponto de partida como a origem da reta numerada, sendo os pontos à direita desta casa representados por coordenadas positivas e pontos à esquerda por coordenadas negativas. Viagens à leste são consideradas de sentido positivo e viagens à oeste de sentido negativo. Também considera-se tempo futuro como positivo, tempo atual igual a zero e tempo passado negativo.

Desta forma, pode-se dizer que $(+80) \times (+2) = +160$ significa que uma viagem para leste à 80 km/h por 2 horas partindo da origem resulta em um deslocamento a leste de 160 km. $(+80) \times (-2) = -160$ significa que uma viagem para leste à 80 km/h iniciada 2 horas atrás, chegando na origem resulta em uma partida a 160 km a oeste. $(-80) \times (+2) = -160$ significa que uma viagem para oeste à 80 km/h por 2 horas partindo da origem resulta em um deslocamento a oeste de 160 km. Por fim, $(-80) \times (-2) = +160$ significa que uma viagem para oeste à 80 km/h iniciada 2 horas atrás, chegando na origem resulta em uma partida a 160 km a leste.

1.3 Elevadores

Neste caso, a reta numerada é representada por um grande edifício, com muitos andares acima e abaixo do térreo. Os andares acima do térreo são denotados por números positivos, o andar térreo pelo zero e os andares abaixo do térreo por números negativos.

O prédio contém dois conjuntos de elevadores. Todos os elevadores sobem e descem, entretanto alguns elevadores sobem vazios e transportam as pessoas apenas para baixo (indicados por $-$). Outros transportam pessoas somente para cima e descem vazios (indicados por $+$). As seguintes regras regem o funcionamento dos elevadores:

1. Alguns dos elevadores param em todos os andares, outros a cada dois andares, outros de três em três andares, e assim por diante.

2. Se um elevador que desce parar em cada andar, será designado por "-1". Se ele parar a cada dois andares, será indicado por "-2", e assim por diante. Se um elevador que sobe parar em cada andar, será denotado por "$+1$". Se ele parar em cada dois andares, será indicado por "$+2$", e assim por diante.

3. Cada elevador deve retornar para o andar térreo (zero) após cada viagem.

4. Quando um elevador que sobe está transportando pessoas, está indo na direção positiva e o número de paradas que faz é indicado por um número positivo. Se este elevador deixa o térreo para recolher passageiros num piso abaixo do térreo que desejam subir, o elevador vai para baixo – um sentido negativo – e o número de paradas que o elevador faz é indicado por um número negativo.

5. Quando um elevador que desce está transportando pessoas, está indo em uma direção negativa e o número de paradas que faz é indicado por um número negativo. Se um elevador que desce deixa o térreo para pegar passageiros em um piso acima do térreo que desejam descer, o elevador sobe – uma direção positiva – e o número de paradas que o elevador faz é indicado por um número positivo.

Por exemplo, $(+2) \times (+3)$ é ilustrado pelo seguinte problema: Suponha que uma pessoa embarque em um elevador $+3$ no térreo e desembarque na segunda parada. Em que andar esta pessoa sairá? No andar $+6$ pois o elevador $+3$ fará $+2$ paradas, sendo sinal das paradas "$+$" por levar passageiros para cima.

Uma ilustração de "$(-2) \times (-3)$" é o seguinte: Suponha que um elevador -3 saia do térreo e suba duas paradas para pegar passageiros. Em que andar estão esses passageiros? No andar $+6$, pois o elevador -3 fará -2 paradas, sendo o sinal das paradas "$-$" por levar passageiros para baixo.

1.4 Office boy

Usando "histórias de office boy" para, intuitivamente, introduzir o produto de números negativos. Suponha que o office boy entregue e colete para uma empresa créditos (cheques, por exemplo) ou dívidas (boletos). O primeiro fator do produto será a quantidade trazida (+) ou levada (−) pelo office boy. O segundo fator do produto será o valor dos créditos (+) ou dívidas (−) da entrega.

Por exemplo, a interpretação de $(+2) \times (+300)$ é ilustrada a seguir: O office boy coletou para a empresa dois cheques de R\$300,00 cada. Como resultado disso, a empresa está "no lucro" de R\$600,00, e portanto $(+2) \times (+300) = +600$. Isso eventualmente conduz à situação onde o office boy entrega duas (-2) dívidas de R\$300,00 (-300) cada. Temos $(-2) \times (-300)$. Como resultado, a empresa revisa para cima (+) sua estimativa de recursos disponíveis. $(-2) \times (-300) = +600$. Observe que o caso em que o office boy recolhe duas dívidas, de R\$300,00 cada, levando à $(+2) \times (-300) = -600$ é bastante natural. De fato as duas dívidas podem ter sido entregues erroneamente e, nesse caso, a empresa volta a ter a dívida de R\$600,00.

1.5 Filmagens

1.5.1 Tanque de água

Considere um projetor de cinema que exiba para frente (+) ou para trás (−) e uma bomba que pode por (+) ou tirar (−) água de um tanque com paredes de vidro. A bomba opera a uma taxa de 30 litros por minuto. Uma filmadora apontada para o tanque é ligada ao mesmo tempo que a bomba. Após gravar a ação da bomba por dois minutos, ambas são paradas. O filme é então projetado em uma tela. Qual mudança no volume de água será observada na tela? Se a água estava entrando no tanque (+) e se o filme é exibido normalmente (+) a mudança observada na tela é um aumento (+) de 60 litros. Retirando água do tanque (−) e exibindo normalmente o filme (+) observa-se uma diminuição (−) de 60 litros, assim como a bomba colocando água no tanque (+) e exibindo o filme em sentido contrário (−). Finalmente, bombeando água para fora do tanque (−) e exibindo o filme em sentido contrário (−) resulta em um efeito de aumento de 60 litros.

1.5.2 Caminhando

Um refinamento da ideia acima é filmar alguém andando para a frente (+) ou para trás (−) a uma velocidade constante. Exibindo o filme normalmente (+) ou no sentido contrário (−) permite aos alunos conjecturar o resultado que se mostrará na tela: a pessoa andando em frente (+) ou para trás (−). Com filmadoras baratas (celulares) disponíveis, este caso pode ser realizado muito facilmente por professores em sala de aula. Ao exibir o filme para a frente ou para trás, os alunos são capazes de verificar visualmente as suas conjecturas.

1.6 Bloquinho animado (*"flip book"*)

São dados a cada aluno dois blocos de papel, tipo *post-it*. No primeiro bloco, os alunos desenham um carro no canto inferior esquerdo da primeira página. Na página seguinte o carro é desenhado alguns milímetros à direita do que estava na página anterior, procedendo assim até que a última página tenha o carro desenhado no canto inferior direito. Assim, este bloco mostrará o carro indo em frente. Este será o nosso bloco positivo $(+)$.

O segundo bloco será feito de modo semelhante, porém, com a primeira página tendo o carro no canto inferior direito e as páginas seguintes tendo o carro desenhado um pouco à esquerda da página anterior, tendo a última folha deste bloco o carro no canto inferior esquerdo. Assim, este bloco mostrará o carro retornando. Este será o nosso bloco negativo $(-)$.

Folhear um dos blocos para frente $(+)$ significa ir da primeira à ultima página do bloco com o polegar. Folhear um dos blocos para trás $(-)$ significa ir da última para a primeira página do bloco.

Folhear o bloco positivo $(+)$ para frente $(+)$ resulta no carro se deslocando para frente $(+)$. Folhear o bloco positivo $(+)$ para trás $(-)$, ou então folhear o bloco negativo $(-)$ para frente $(+)$ resulta no carro se deslocando para trás $(-)$. Enfim, folhear o bloco negativo $(-)$ para trás $(-)$ resulta no carro se deslocando para frente $(+)$.

Essa estratégia indica apenas o sinal do produto, não fornecendo seu valor.

1.7 Reconhecimento de padrões

Esta estratégia utiliza padrões, tais como os seguintes, para "prever" o produto:

$$\begin{array}{llllll} \text{A.} & +3 & \times & +2 & = & +6 \\ & +3 & \times & +1 & = & +3 \\ & +3 & \times & 0 & = & 0 \\ & +3 & \times & -1 & = & ? \\ & +3 & \times & -2 & = & ? \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \text{B.} & -3 & \times & +2 & = & -6 \\ & -3 & \times & +1 & = & -3 \\ & -3 & \times & 0 & = & 0 \\ & -3 & \times & -1 & = & ? \\ & -3 & \times & -2 & = & ? \end{array}$$

É necessário contar com um "pensamento indutivo" dos alunos. Ou seja, que os sucessivos valores dos produtos indicados irá diminuir em três unidades no exemplo A e aumentar em três unidades no exemplo B.

1.8 Gráficos

A estratégia de gráficos usa o plano cartesiano e "retas multiplicadoras". A fim de encontrar o produto $(+3) \times (+2)$ primeiro localizamos a reta "multiplicadora por +2". Para isso, localizamos o número 1 no eixo x, medimos duas unidades verticalmente para cima (pois queremos multiplicar por +2) e marcamos o ponto P. Traçando a reta que passa pela origem e por este ponto P temos a reta "multiplicadora por +2". Rotulamos esta reta como +2.

Agora, a fim de resolver $(+3) \times (+2)$, localizamos +3 no eixo x e desenhamos uma perpendicular ao eixo x por +3 de modo a intersectar a reta +2 no ponto T. Passando por T, traçamos uma paralela ao eixo x que intersecta o eixo y em +6, que é o produto desejado. Usando a reta +2 novamente, é possível determinar que $(-4) \times (+2) = (-8)$.

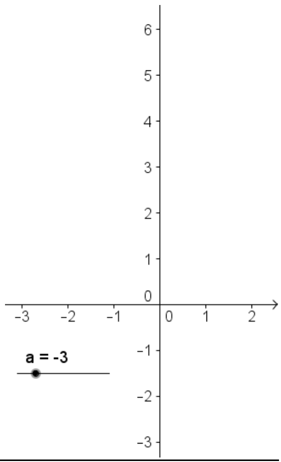
A solução de $(-3) \times (-2)$ requer uma reta "multiplicadora por -2". Esta é determinada marcando Q medindo-se verticalmente para baixo $(-)$ duas unidades a partir de 1 localizado sobre o eixo x. Desenhando a reta determinada por este ponto Q e a origem temos a reta -2. Para calcular $(-3) \times (-2)$, localizamos -3 sobre o eixo x e desenhamos a perpendicular ao eixo x por -3. Se esta perpendicular intersecta a reta -2 em R, então a reta paralela ao eixo x passando por R intersecta o eixo y em +6, que é a solução desejada.

O nível de sofisticação usado com este método independe dos alunos, pois não é necessário que os estudantes tenham uma compreensão de coordenadas cartesianas.

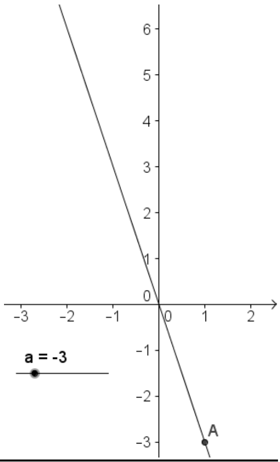
1.8.1 Usando *Geogebra* na estratégia dos gráficos

O software *Geogebra* se mostra uma poderosa ferramenta na aplicação deste método. A seguir, tem-se os comandos a serem digitados no *Geogebra* em fonte **destacada**. Para construir um gráfico com uma "reta multiplicadora genérica", que calculará $a \times b$ procede-se da seguinte forma:

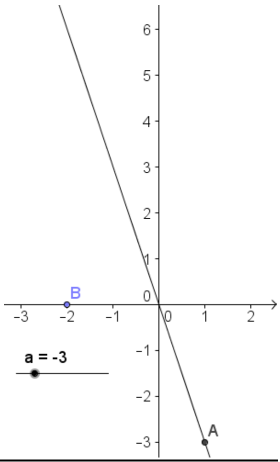
- Insira um controle deslizante, chamado **a**. Neste controle se definirá o valor da reta multiplicadora, que é a primeira parcela do produto.



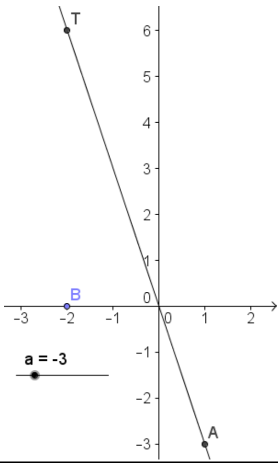
• Defina o ponto **A=(1,a)** e a "reta multiplicadora por **a**" será a reta que passa por **A** e pela origem $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.



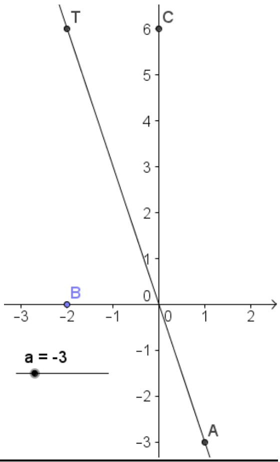
• Defina o ponto **B** no eixo x, escrevendo **B=Ponto[y=0]**. Posicione **B** no número **b** do eixo x, o valor que se quer multiplicar por **a**.



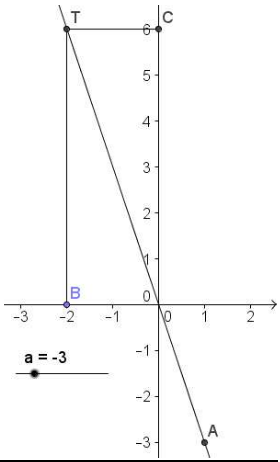
• Pela estratégia acima, marque **T** como interseção da "reta multiplicadora" com uma perpendicular ao eixo x passando por **B**. Para isso, digite o comando **T=Interseção[Reta[A,(0,0)],Perpendicular[B,y=0]]**.



• Marque **C** como o ponto de interseção entre o eixo y e a reta paralela ao eixo x que passa por **T**. Digite no campo de entrada **C=Interseção[Reta[T,y=0],x=0]**. A ordenada de **C** será o resultado da multiplicação de **a** por **b**.



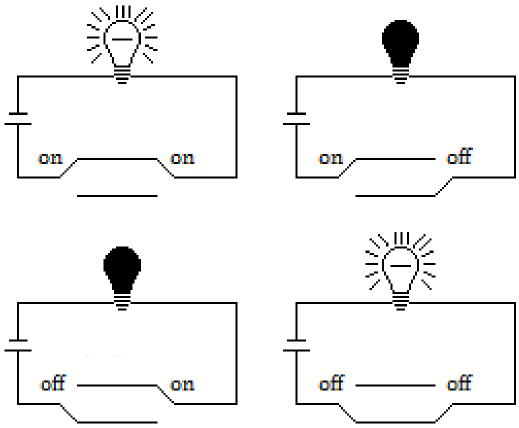
• A fim de facilitar a visualização, defina os segmentos **BT** e **CT**, digitando **BT=Segmento[B,T]** e **CT=Segmento[C,T]**.



1.9 Circuitos elétricos

Sabe-se que circuitos elétricos são muito utilizados para o ensino de lógica. A maioria dos alunos percebe que a resposta para o problema $(-3) \times (-2)$ é $+6$ ou -6. A estratégia de circuito elétrico pode ser usada para indicar qual é a resposta correta.

Muitas casas estão equipadas com lâmpadas elétricas controladas por duas chaves. Se ambas as chaves estão na posição "on", a luz estará acesa, se ambas as chaves estão na posição "off", a luz também estará acesa. Se uma chave está "off" e a outra está "on", então a luz estará apagada. Isto é feito por meio de duas chaves de três vias como no diagrama da figura.

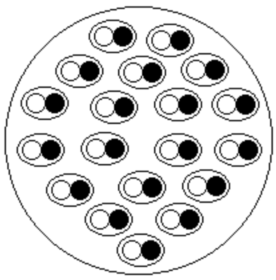


Possíveis posições dos interruptores

Note-se que esta estratégia, tal como a estratégia do Bloquinho Animado, dá apenas o sinal do produto e não seu valor.

1.10 Partículas carregadas

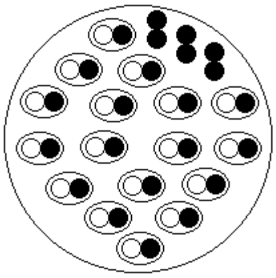
A estratégia das "Partículas Carregadas" depende de algum conhecimento de física. São necessários para esta estratégia um campo (representado por uma região circular) e partículas positivas (círculo cheio ●) e negativas (círculo vazado ○). Cada carga negativa atrai uma carga positiva e elas se neutralizam. Cada carga neutra é representada por um pequeno círculo com uma partícula positiva e uma negativa dentro do círculo. O campo usado para a multiplicação sempre deve ter uma carga total igual a zero. Isto deverá ser ilustrado por um campo contendo várias partículas neutralizadas, como na figura abaixo.



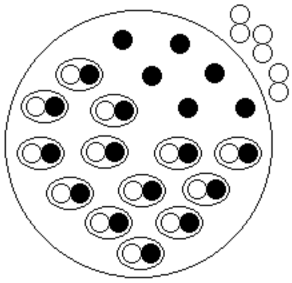
Circuito neutro

O primeiro fator do produto indica quantos grupos de partículas foram adicionados (+) ou subtraídos (−). O segundo fator indica quantas partículas positivas (+) ou negativas (−) estão em cada grupo.

Por exemplo, $(+3) \times (+2)$ é ilustrada pela adição de três grupos de duas partículas positivas cada. Feito isto no desenho, ilustrado abaixo, indica-se que o campo agora tem uma carga de $+6$.



$(+3) \times (+2) = 6$



$(-3) \times (-2) = 6$

Adicionar três grupos de duas cargas negativas cada é a representação de $(+3) \times (-2)$ e $(-3) \times (+2)$ refere-se a subtrair (ou remover) três grupos de duas cargas positivas cada. Finalmente, $(-3) \times (-2)$ representa subtrair três grupos de duas cargas negativas cada. A carga resultante do campo é $+6$ e assim $(-3) \times (-2) = +6$.

1.11 Propriedade distributiva

Este método depende da suposição de que a propriedade distributiva da multiplicação sobre a subtração se comporta da mesma forma no conjunto dos números inteiros como no conjunto dos números naturais. Assim,

$$(+3) \times (+2) = (+3) \times [(+5) - (+3)] = [(+3) \times (+5)] - [(+3) \times (+3)] \, .$$

Com esta hipótese, pode ser estabelecido que

$$\begin{aligned}(+3) \times (-2) = (+3) \times [(+2) - (+4)] &= [(+3) \times (+2)] - [(+3) \times (+4)] \\ &= (+6) - (+12) = -6.\end{aligned}$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que o $(-3) \times (+2) = -6$. Finalmente, pode-se demonstrar que o produto de dois números inteiros negativos é um número inteiro positivo. Por exemplo,

$$(-3) \times (-2) = (-3) \times [(+2) - (+4)] = [(-3) \times (+2)] - [(-3) \times (+4)] = -6 - (-12)$$

Observe que -12 é o oposto de 12, sendo $-(-12)$ o oposto de -12, que é o próprio 12. Conclui-se que

$$(-3) \times (-2) = -6 - (-12) = -6 + 12 = 6$$

.

1.12 Processo dedutivo

A abordagem dedutiva é provavelmente a estratégia mais sofisticada. Embora seja semelhante à distributiva, as suas diferenças são suficientes para que esta seja considerada uma estratégia diferente. Um exemplo específico para $(-3) \times (-2)$ é o seguinte:

a) $(-3) \times (0) = 0$ — Elemento neutro da multiplicação

b) $(-3) \times (+2 - 2) = 0$ — Substituição e Elemento Oposto da Adição

c) $((-3) \times (+2)) + ((-3) \times (-2)) = 0$ — Distributiva

d) $-6 + (-3) \times (-2) = 0$ — Substituição

e) $-6 + 6 = 0$ — Elemento Oposto da Adição

f) $(-3) \times (-2) = 6$ — Unicidade do Elemento Oposto da Adição

1.13 Definições

Cada uma das estratégias anteriores são usadas para estimular nos alunos uma compreensão da multiplicação com números inteiros. Como resultado desta compreensão, eles deverão ser capazes de gerar sua própria definição de multiplicação de inteiros ou aceitar prontamente uma definição dada no livro didático ou pelo professor. Também é possível (talvez não muito indicado no ensino fundamental) começar com uma definição de multiplicação de números inteiros sem ter sido utilizada uma (ou mais) das estratégias aqui citadas. Uma abordagem diferente é considerar números inteiros como pares ordenados e definir multiplicação de pares ordenados. O número inteiro $+2$ é definido como equivalente ao conjunto de pares ordenados (a, b) com $a - b = 2$, a e $b \in \mathbb{N}$. Assim, $+2 = (2, 0) = (3, 1) = (4, 2) = \ldots$. Esta definição representa -5 por pares ordenados tais como $(0, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 7)$, e assim por diante.

A multiplicação é definida por $(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$. Assim,

$$(+3) \times (+2) = (4, 1) \times (5, 3) = ((4 \times 5) + (1 \times 3), (4 \times 3)(1 \times 5))$$

$$= (20 + 3, 12 + 5) = (23, 17) = 6$$

e

$$(-3) \times (-2) = (1, 4) \times (3, 5) = ((1 \times 3) + (4 \times 5), (1 \times 5) + (4 \times 3))$$
$$= (3 + 20, 5 + 12) = (23, 17) = 6$$

Essas estratégias apresentam caminhos possíveis que deverão ser preparados e detalhados para uso em sala de aula de acordo com as necessidades específicas de cada turma.

2 Considerações Finais

São perfeitamente justificáveis as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com as operações matemáticas envolvendo os números negativos. Historicamente, foram necessários séculos para que os números negativos fossem aceitos e totalmente compreendidos pela sociedade matemática, ultrapassando dessa forma, esse obstáculo epistemológico. Ainda assim, é exigida dos alunos a total compreensão desse conteúdo em poucos meses.

Com relação à adição e a subtração de números negativos, verifica-se que os livros didáticos, na maioria das vezes utilizam as mesmas táticas, bem como os professores em sala de aula. Com exemplos ilustrativos, usam a reta enumerada, a temperatura de algumas cidades (frias e quentes) e movimentação numa conta bancária fictícia, onde se debitam e creditam dinheiro.

O maior problema acontece quando o assunto passa a ser a multiplicação de números negativos, com a famosa "regra dos sinais". Verificamos que, realizar a operação $(-1) \times (-1) = +1$ não é tão simples assim, e por isso a maioria dos professores, talvez influenciados por livros mais antigos, optam por simplesmente fazer com que os seus alunos decorem a regra. Contudo, o ensino puramente expositivo destas regras, ao causar a sensação de regra outorgada pela força, cria dificuldades para a compreensão e aplicação correta nas operações. Como resultado, observa-se que os alunos chegam ao ensino médio ainda apresentando dificuldades em trabalhar com números inteiros, embora tenham decorado a "regra dos sinais".

O uso de estratégias ou artifícios simples e compreensíveis que ilustrem as regras de sinais contribui com a assimilação do conceito e dão significado a ele, sendo superado este obstáculo epistemológico-didático que costumeiramente impede a progressão dos alunos no aprofundamento na disciplina. Não que seja impossível conseguir resultados favoráveis de compreensão do conhecimento da multiplicação entre números negativos em tão pouco tempo, mas devemos sempre estar atentos para o fato de que trabalhar com esses tipos de números não é algo natural para a maioria dos alunos. Portanto, é papel do professor estar de posse do maior número de estratégias para facilitar a compreensão do conteúdo por todos os alunos.

Referências

[1] M.L. Crowley and K.A. Dunn. On multiplying negative numbers. *Mathematics Teacher*, 78(4):252–256, 1985.

[2] G. Glaeser. Epistemologia dos números relativos. *Boletim do GEPEM*, 17:29–124, 1985.

[3] E.L. Lima. Conceitos e controvérsias: Por que (-1)(-1)=1? *Revista do Professor de Matemática*, 1(1):5–8, 1982.

[4] J.C. Peterson. Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1)(-1) = +1. *The Arithmetic Teacher*, 19(5):396–403, 1972.