



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROBLEMA DE JOSEFO APLICADO AO ENSINO MÉDIO

EDUARDO FONSECA SALES

SALVADOR - BAHIA

JANEIRO DE 2019

PROBLEMA DE JOSEFO APLICADO AO ENSINO MÉDIO

EDUARDO FONSECA SALES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. **Orientador:**

(Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey)

Salvador - Bahia
Janeiro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F. Sales, Eduardo
Problema de Josefo aplicado ao Ensino Médio /
Eduardo F. Sales. -- Salvador, 2019.
75 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em
Matemática) -- Universidade Federal da Bahia,
Instituto de Matemática e Estatística - IME, 2019.

1. Problema de Josefo. 2. Sequência. 3.
Recorrência. I. Yartey, Prof. Dr. Joseph Nee Anyah.
II. Título.

Problema de Josefo aplicado ao Ensino Médio .

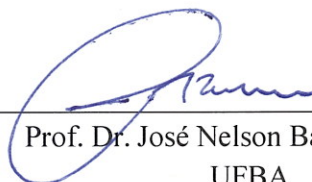
Eduardo Fonseca Sales

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 24/01/2019.

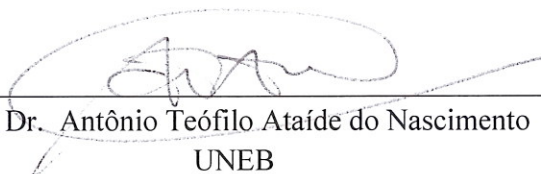
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (orientador)
UFBA



Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa
UFBA



Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento
UNEB

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a minha família por ter dado oportunidade de estudar com todos os esforços que fizeram comigo. Agradeço aos meus irmãos que me puseram em um caminho de sucesso em especial a Val que mostrou que um dia eu podia conseguir o que quisesse com os estudos. Agradeço a Marília que me mostrou que eu podia nas diversas vezes que esmoreci. Agradeço a Victor que rezou por mim e agradeço a minha filha linda que um dia vai entender a importância desse título de mestria.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela".

Albert Einstein

Resumo

Apresentamos uma proposta de solução para problema enunciado pelo matemático Josefo no século I. Conta a lenda que seus colegas de guerrilha, preferindo o suicídio à captura, resolveram, em círculo, matar cada terceira pessoa restante do grupo. Não concordando com a atitude de seus colegas, Josefo, junto com seu amigo, se colocou numa posição adequada para sobreviver. Em busca de uma resposta da posição tomada por ele e seu amigo, construímos aulas com o uso de metodologia ativa, para alunos do Ensino Médio com o propósito de solucionar tal problema, através de investigação, utilizando conceitos matemáticos como: progressão aritméticas, geométricas e noção de recorrência.

Palavras chaves: Problema de Josefo, Relação de Recorrência.

Abstract

We present a proposal for a solution to a problem enunciated by the mathematician Josefo in the first century. Legend has it that his guerrilla colleagues, preferring suicide to capture, decided in a circle to kill every third person remaining in the group. Disagreeing with the attitude of his colleagues, Josefo, together with his friend, put himself in a proper position to survive. In search of an answer of the position taken by him and his friend, we constructed classes with the use of active methodology, for students of High School with the purpose of solving such problem, through investigation, using mathematical concepts such as arithmetic, geometric and notion of recurrence.

Key words: Problem of Josefo, Relation of Recurrence.

Conteúdo

Introdução	1
1 Um Pouco da História	3
2 Generalizando o Problema	6
3 Metodologia	10
3.1 Fundamentação Teórica	12
3.2 A Prática	13
4 Desenvolvimento	16
4.1 Aula 01	16
4.2 Aula 02	20
4.3 Aula 03	25
4.4 Aula 04	27
4.4.1 Progressão Aritmética(PA)	27
4.5 Aula 05	30
4.5.1 Progressão Geométrica(PG)	31
4.6 Aula 06	34
4.6.1 Recorrência: uma abordagem para o Ensino Médio	34
4.7 Aula 07	37
4.7.1 Solução de Problemas Utilizando o Raciocínio Recursivo	37
4.8 Aula 08	41
4.8.1 Solução do Problema de Josefo	41
5 Conclusão	47
A Recorrências	49
A.1 Recorrências Lineares de primeira ordem	49
A.2 Recorrências Lineares de segunda ordem	53
A.2.1 Equação característica	53

A.3	Aplicação de Recorrência	56
A.3.1	Juros Simple	56
A.3.2	Juros Compostos	57
A.3.3	Sequência de Fibonacci	58
A.3.4	Problema de Josefo	59
B	Indução Matemática	61
B.1	Princípio de Indução Matemática	61
B.1.1	Demonstração da Soma dos termos de uma PA por Indução	62
B.1.2	Demonstração por indução da fórmula de Josefo	63

Introdução

A proposta desse trabalho é construir uma solução para o problema de Josefo em etapas. Esta dissertação consiste em desvendar qual foi a estratégia usada por ele para se posicionar adequadamente sobrevivendo em sua façanha. Este trabalho requer muita atenção, pois diversas vezes fui inquietado para mostrar em sala de aula algo que motivasse o ensino da Matemática nos diversos conteúdos trabalhados no Ensino Médio nas escolas públicas.

Relacionamos conceitos matemáticos em algumas etapas, o que me fez feliz na aceitação dessa proposta diante de uma investigação. As etapas surgiram para que os alunos não ficassem sobrecarregados de conteúdos matemáticos essenciais para o desenvolvimento do trabalho. Foram feitos diversos encontros para desenvolvermos as aulas e para isso usamos aprendizagem baseada em problemas; Problem Based Learning, ou PBL, como é geralmente conhecida. Cada aula foi destinada a uma etapa importante e nestas, foi usada a Metodologia Ativa como o método mais importante no processo de ensino aprendizagem.

O método PBL (Problem Based Learning) é uma estratégia pedagógico/didática centrada no aluno. Tem sido aplicada em algumas escolas nos últimos 30 anos e trata-se de um método de eficiência comprovada por inúmeras pesquisas no campo da psicopedagogia e da avaliação de desempenho dos profissionais formados por esse método. Não se trata portanto, de método experimental. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA).

Esses encontros aconteceram com os alunos da Escola Estadual Yêda Barradas Carneiro situado no bairro Alto do Coqueirinho, Itapuã. Os encontros traçavam uma linha de pensamento que os alunos construíram afim de resolver o problema de Josefo proposto para todos.

A Aula 01 foi reservada para apresentação do problema, formando grupos com os alunos com a finalidade de investigar a estrutura matemática daquela situação. Levamos dois encontros para a realização desta aula.

Levamos três encontros para realizar a Aula 02, sendo a mais demorada que a anterior. Em contrapartida, os alunos avançaram muito nas descobertas de padrões matemáticos. Esses padrões foram de extrema importância no desenvolvimento das próximas aulas, o que nos levou para uma brilhante solução. Na Aula 03, organizamos as observações encontradas numa tabela para dar melhor continuidade as investigações. Levamos três encontros para desenvolver a Aula 04 e 05, com a finalidade de discutirmos conteúdos matemáticos relacionados ao problema proposto. Nesses encontros fizemos estudo de sequências aritméticas e geométricas.

O padrão recursivo foi verificado pelos alunos durante a Aula 03 e dada uma atenção especial para este tópico na Aula 06 e esta levamos dois encontros para desenvolvê-la. Recorrência não é um conteúdo de fácil acesso, mesmo trabalhando com conceitos que eles já viram no Ensino Médio como as sequências aritméticas e geométricas estudadas nas aulas anteriores, sem fazer a devida referência para este tópico.

Para reforçar este conteúdo, fizemos mais dois encontros para exemplificar e aplicar Recorrência através da metodologia da aprendizagem baseada em problemas (PBL).

Por fim, chegamos na Aula 08, retomando com todas as observações do problema proposto até o momento. Conjecturamos uma fórmula que permitiu calcular a posição exata que Josefo se posicionou para sobreviver.

Capítulo 1

Um Pouco da História

Josefo¹, de família sacerdotal, nasceu no ano de 37 d.C. na cidade de Jerusalém e viveu até 100 d.C.. Quando ainda jovem ele era envolvido com questões religiosas e políticas e seu grande ideal era também defendido por Roma. Já no fim de sua vida se dedicou à História. Josefo participou de uma grande revolução lutando ao lado dos Judeus contra os romanos e recebeu a nomeação de chefe militar na região da Galileia² pelo seu grande desempenho em sua atuação nas frentes de batalhas.

Frente a muitas batalhas enfrentadas por Josefo, uma delas se destacou, onde hoje ficou muito conhecida como, O problema de Josefo, e por não constar em nenhuma literatura confiável o episódio que vamos relatar em seguida é considerado como uma lenda ocorrida neste período. Para muitos ele foi considerado um traidor.

O Episódio...

Em uma de suas batalhas, depois de participar de vários combates, Josefo e seus quarenta companheiros de guerra foi descoberto, aprisionado e lhes fizeram a proposta de se entregar, garantindo que sua vida seria salva. Num acesso de terror, sacrificou-os traiçoeiramente, com exceção de um só, para salvar a própria pele. Aceitar tal proposta seria uma traição frente aos companheiros de guerra e foi então que ele preferiu o suicídio à captura propondo estrangularem-se reciprocamente segundo uma ordem determinada pela sorte.

O grupo de quarenta e um soldados decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém. Ao final da matança sobrou ele e um amigo. Teria Josefo feito isso com o objetivo de sobreviver traindo seus companheiros de guerra já que era matemático? Ou seria uma mera coincidência?

¹Em latim, ele era conhecido como Josefo. Após ser reconhecido como cidadão romano, passou a ser chamado de Tito Josefo. Originalmente, seu nome judaico era Yosef ben Mattityahu, que significa José, filho de Matias

²Galileia é o nome da região norte da Palestina, um local que aparece com destaque no Novo Testamento e onde se desenvolveu boa parte do ministério terreno de Jesus.

Fatos estes não revelado em relatos contados nos livros da época. Alguns judeus disseram que Josefo, calculou rapidamente onde ele e o amigo deveriam ficar nesse círculo de tal modo que a sobrevivência de ambos fosse garantida. Verdade ou mentira desse fato histórico, originou um dos problemas mais difundido no mundo da Matemática que pode ser relatado da seguinte maneira:



Figura 1.1: Soldados arrumados
Fonte: by Laurent Signac

O problema consistia em definir onde uma pessoa das quarenta e uma ficaria para sobreviver nessa caverna. As quarenta e uma pessoas fizeram um grande círculo e era escolhido uma pessoa para iniciar o processo de suicídio, figura 1.1. Começando com a pessoa escolhida, contamos duas pessoas e a terceira era morta. Sendo a próxima pessoa a primeira, contamos mais duas pessoas e a terceira era novamente morta e assim por diante continuava o processo. Quando o círculo ia completando uma volta as pessoas mortas eram retiradas e processo continuava contando duas pessoas e a terceira era sempre morta como mostra na figura 1.2 na página 5.



Figura 1.2: Soldados arrumados

Fonte: by Laurent Signac

No círculo da figura 1.2, as pessoas de números 3, 6, 9, 12, 15, 18... foram todas retiradas e um novo círculo era criado.

Depois de algum tempo o círculo nesta caverna reduzia, como mostra a figura 1.3.

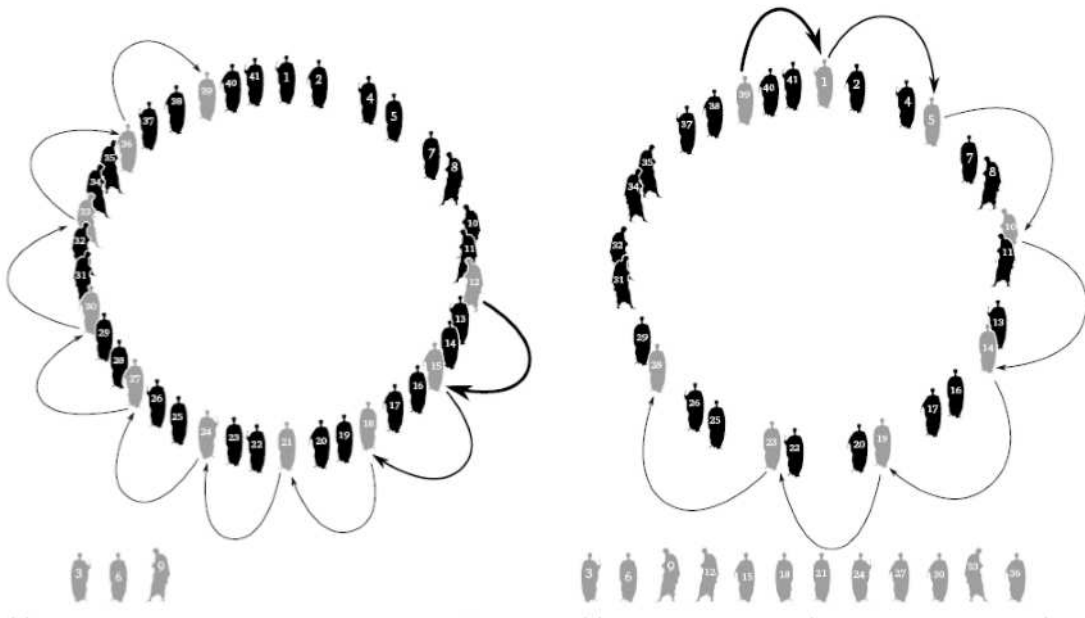


Figura 1.3: Soldados arrumados

Fonte: by Laurent Signac

Capítulo 2

Generalizando o Problema

Neste capítulo será usado a Matemática para solucionar o Problema de Josefo no caso mais geral, ou seja, podemos colocar N pessoas no círculo e eliminar cada M pessoas começando a contar da primeira.

Enunciado do problema.

Os N soldados estão dispostos em um círculo e são numerados de 1 a N (digamos no sentido horário). Começando com o soldado número um e, contando cada soldado ao redor do círculo, todo soldado M° é removido. Depois das eliminações $N-1$, só resta um sobrevivente. Determine a posição do soldado sobrevivente. Denote isso como $P(N, M)$

Usando aritmética modular e equivalência de classes traremos duas soluções.

Solução Recursiva com Módulo N .

A solução que se apresenta é feita recursivamente já que o problema de Josefo se renova a cada rodada de eliminações, onde seus soldados se arrumam em nova posições. Esta solução é feita para soldados arrumados de zero a $N-1$. Esse processo acaba até que apenas um soldado sobreviva. Para chegarmos numa solução recursiva geral vamos fazer alguns exemplos.

Exemplo 1: Vamos resolver o problema para $P(6,4)$. Tenho seis soldados e cada quarto soldado é removido conforme na figura?

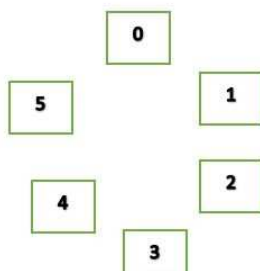


Figura 2.1: Soldados arrumados

Fonte: Fonte própria

Note que a nova posição está relacionada à posição antiga pela fórmula $(novo * + M) \bmod N = (velho *)$. Por exemplo, temos $(3 + 4) \bmod 6 = 1$, $(0 + 4) \bmod 6 = 4$ e $(4 + 4) \bmod 6 = 2$ como mostra a Figura 2.2.

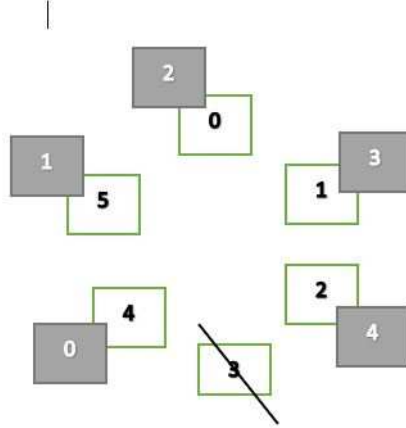


Figura 2.2: Soldados arrumados
Fonte: Fonte própria

Na segunda rodada de eliminação, o novo soldado de posição 3 foi eliminado e os outros com novos números 4, 0, 1 e 2 são renumerados de 0 a 3 como mostra a figura 2.3. Note que N é agora 5. Na Figura abaixo, vemos que $(1 + 4) \bmod 5 = 0$, $(2 + 4) \bmod 5 = 1$ e $(0 + 4) \bmod 5 = 4$. Se continuarmos este padrão, o cavaleiro na quinta posição é o último a permanecer

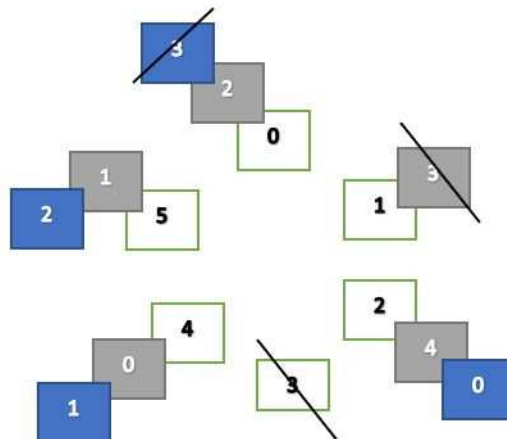


Figura 2.3: Soldados arrumados
Fonte: Fonte própria

Podemos agora resumir a abordagem recursiva $(novo * + M) \bmod N = (velho*)$. Observe que $(novo*)$ pode ser representado por $P(N-1, M)$ e $(velho*)$ pode ser representado por $P(N, M)$. Por substituição no padrão observado, obtemos a seguinte fórmula recursiva quando $N \geq 2$; isto é,

$$(P(N - 1) + M) \bmod N = P(N, M)$$

Assim a solução recursiva é:

$$P(N, M) = 0, \text{ para } N = 1$$

$$P(N, M) = (P(N - 1) + M) \bmod N, \text{ para } N \geq 2$$

Exemplo 2: Se em um círculo com 5 soldados cada terceira pessoa é eliminada percorrendo no sentido horário, qual a posição do sobrevivente?

Solução:

Nesta situação temos $N = 5$ e $M = 3$

Queremos calcular, recursivamente, $P(N, M)$.

$$P(5, 3) = (P(4, 3) + 3) \bmod 5$$

Perceba que dependemos do valor de $P(4, 3)$ que por sua vez depende do valor de $P(3, 3)$ que depende de $P(2, 3)$ e que este também depende de $P(1, 3)$.

Como por definição $P(1, 3) = 0$, então vamos a partir deste encontrar os outros para solucionar recursivamente o problema.

$$P(2, 3) = (P(1, 3) + 3) \bmod 2 = (0 + 3) \bmod 2 = 3 \bmod 2 = 1$$

$$P(3, 3) = (P(2, 3) + 3) \bmod 3 = (1 + 3) \bmod 3 = 4 \bmod 3 = 1$$

$$P(4, 3) = (P(3, 3) + 3) \bmod 4 = (1 + 3) \bmod 4 = 4 \bmod 4 = 0$$

$$P(5, 3) = (P(4, 3) + 3) \bmod 5 = (0 + 3) \bmod 5 = 3 \bmod 5 = 3$$

Como o círculo é construído a partir de zero, por causa da aritmética modular, temos que somar um na solução recursiva, então o soldado sobrevivente é o de posição 4. Daí concluímos que $P(5, 3) = 4$.

Solução usando a Classe de Equivalência.

Este método enfatiza a aritmética modular envolvida no problema, observando a congruência do módulo N . Este método funciona melhor para valores razoáveis de N e M . O procedimento fornece uma visão de porque o módulo N é encontrado na solução recursiva. Para ilustrar, vamos começar com alguns exemplos.

Exemplo 3: Encontrar $P(5, 3)$. Começando em 0, liste os números e corte-os em grupos de 5, para $M = 5$. Isso é:

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ | \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ | \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ | \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ | \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ |$$

Passo 1: Comece a contagem em 0 até N e pare no terceiro soldado. Você deve parar em 2, sublinhar e cruzar. Agora observe que a terceira posição em cada bloco de números dá a você 7, 12, 17, 22, o que é [2] em \mathbb{Z}_5 . Em outras palavras, esses valores são congruentes com 2 mod 5. Risque o restante da classe de equivalência [2] na lista. Isso elimina a terceira posição ou o terceiro soldado.

Passo 2: Comece a contar os números seguindo o sublinhado 2. Você deve parar no 5, sublinhar e cruzar. Observe que os números na primeira posição de cada bloco são 0, 5, 10, 15, 20, ... o que é [5] em \mathbb{Z}_5 . Risque todos os números nesta classe de equivalência para obter:

\emptyset 1 2 3 4 | 5 6 7 8 9 | ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 14 | ~~15~~ 16 ~~17~~ 18 19 | ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 24 |

Note que o sublinhado é feito para manter o controle de onde você parou. Isso também lhe dá uma ordem de quando o soldado naquela posição foi eliminado. O primeiro soldado a ser eliminado estava na posição 3, seguido pelo soldado na posição 1.

Passo 3: Comece a contar no primeiro número restante após o 5 e conte 3. Observe que você pula o 7 desde que foi riscado. Sublinhe o 9 e risque todos os valores de [9] em \mathbb{Z}_5 .

Passo 4: Comece a contar às 11 e pare no 16. Sublinhe o 16 e risque essa classe de equivalência \mathbb{Z}_5 . Você está acabado porque eliminou 4 dos 5 soldados. O valor restante em cada um dos blocos está em [3], que é a quarta posição (lembre-se que começamos em 0). Depois desse passo nós temos:

\emptyset ~~1~~ 2 3 4 | 5 ~~6~~ 7 8 9 | ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ 13 ~~14~~ | ~~15~~ 16 ~~17~~ 18 ~~19~~ | ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ |

Capítulo 3

Metodologia

A metodologia usada na presente dissertação foi construída com a junção da teoria e a prática no desenvolvimento das aulas com o propósito de estabelecer uma conexão entre a problematização e sua solução. Compreender, reter, praticar, disseminar e criar são as cinco importantes etapas no processo de ensino aprendizagem mencionado por Victor Hugo.¹

1. Compreender: é o início, quando a pessoa é exposta ao conhecimento. Entender é importante, mas é só o primeiro passo no trajeto.
2. Retenção: é quando a informação é fixada na mente da pessoa. A partir desse momento o conteúdo pode se tornar algo valioso no futuro, porém apenas saber e gravar não são o suficiente.
3. Praticar: é nesse momento que o conhecimento vai se solidificando. Uma informação sem uso não tem valor - é necessário que ele gere uma ação para que se tenha resultados concretos. Nesta etapa é importante mudar os hábitos antigos antes do aprendizado, aplicando os novos métodos no dia a dia - por isso é fundamental dois elementos nesse estágio: a motivação e cobrança.
4. Disseminar: transmitir o conhecimento assimilado a outros ajuda na retenção das informações, além de contribuir com que esse aprendizado alcance mais pessoas.
5. Criar: é o topo do processo, quando a pessoa passa a gerar novos conhecimentos a partir daquilo que aprendeu inicialmente.

¹Consultor de empresas, professor e palestrante. o que citamos neste trabalho pode ser encontrado no Site: <https://www.ludospro.com.br/blog/etapas-do-processo-de-aprendizagem>

Neste momento, a metodologia que se mais praticava por mim e outros professores era a Metodologia ativa². Nessa metodologia o aluno tem um papel importante na condução do processo de aprendizagem, ou seja, ele é o protagonista deste processo.

Nitidamente, a aula gira em torno do aluno, não do professor. Os estudantes têm o compromisso de assistir aos vídeos e fazer perguntas adequadas. O professor está presente unicamente para prover o feedback especializado. Além disso, os alunos devem recorrer ao professor sempre que precisarem de ajuda para a compreensão dos conceitos. O papel do professor na sala de aula é o de amparar os alunos, não o de transmitir informação. (BERGMANN e SAMS. 2017 p. 14)

Realizamos com os alunos a sala de aula Invertida, onde eles fazem tudo que é feito em sala, em casa e fazem em sala o que se faz em casa. Partindo do pressuposto que todas as informações necessárias para adquirir conceitos de um determinado conteúdo está nas mãos dos nossos alunos, seja pelo avanço tecnológico das informações que chegam até eles de forma mais rápida, ou até mesmo nos livros que possui dentro do ambiente escolar.

A sala de aula invertida, também conhecida como flipped classroom, é considerada uma grande inovação no processo de aprendizagem. Como o próprio nome sugere, é o método de ensino através do qual a lógica da organização de uma sala de aula é de fato invertida por completo (RAFAELA ESPÍNDOLA, Artigo publicado no site <https://www.edools.com/sala-de-aula-invertida/> em 16 de maio de 2018).



Figura 3.1: (<https://Aula Invertida>)

Fonte:<https://www.edools.com/sala-de-aula-invertida/>

²Uma mudança de papéis em que o aluno passa a ser protagonista e o professor vira uma espécie de orientador. Essa é a mudança proposta pelas metodologias ativas de ensino. O modelo tira o aluno da condição de ouvinte e faz com que ele tenha mais participação e interação no processo de aprendizagem. (IGOR REGIS)

3.1 Fundamentação Teórica

Durante todos os encontros foi feita a parte teoria dos conteúdos estudados para a solução do problema.

Essa teoria foi diversificada entre aulas invertidas, momentos de leituras em grupo e debates. Todas as aulas teóricas foram elaboradas através de Metodologias Ativas, trazendo inovações para o ambiente escolar. O aluno, por sua vez, não ficava desmotivado com toda a teoria transmitida para absorção de conceitos mesmo porque o professor fazia uso de recursos tecnológicos para minimizar a falta de interesse.

Como trabalhar a teoria de Recorrência e Sequências Recursivas para alunos do Ensino Médio, sem que eles se sintam desmotivados? Então, a Metodologia Ativa vem suprir essa necessidade com muito cuidado em sua aplicação. Segundo Andrea Ramal.³ A metodologia ativa quebra com um conceito tradicional que nós temos sobre o que é ensinar. O professor passa a dar menos aulas expositivas, e o aluno vai estudar mais conteúdo em casa para poder debater em sala de aula.

Os alunos já vinham com a teoria estudada de casa e no momento com o professor e seus colegas era pra discutir o que eles tinham aprendido sozinhos. Muitas vezes tinha que fazer o papel do mediador para estar o tempo todo fomentando discussões a respeito daquele conteúdo, seja fazendo perguntas ou até mesmo pedindo para que aquele grupo socialize o que entendeu. Na finalização da socialização da teoria dos conteúdos chegava a hora de pôr em prática o que eles aprenderam e fazer daquela teoria o conhecimento.



Figura 3.2: (Estudando a teoria)

Fonte: Portal Educação - <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/nutricao/a-importancia-das-teorias-na-pratica-pedagogica/48753>

³Diretora do GEN Educação.

3.2 A Prática

A hora mais esperada para eles, a parte prática do processo ensino aprendizagem. A estratégia de ensino utilizada para esta parte importante da produção do conhecimento foi a gamificação⁴. Dentre varias tecnologias digitais que se utilizam como ferramenta de aprendizagem, o Kahoot foi o recurso tecnológico que encontrei para fazer o link entre a teoria e a prática e tornar as aulas mais divertida e prazerosa.

Kahoot! é uma ferramenta de avaliação gratuita na Web, que permite o uso de quizzes na sala de aula, e ajuda a ativar e envolver os alunos em discussões. Esta ferramenta é baseada em jogos com perguntas de múltipla escolha, que permite aos educadores e estudantes investigar, criar, colaborar e compartilhar conhecimentos, e funciona em qualquer dispositivo tecnológico conectado à Internet.

O processo educativo do aluno é fruto da constante interação entre os diversos campos em que o sujeito está inserido: a família, a sociedade, o momento histórico, a filosofia e as tecnologias. O avanço cada vez mais acelerado de dispositivos eletrônicos e a democratização do acesso à internet mudaram os fluxos informacionais, a velocidade e o alcance com que as informações são compartilhadas [...]. Sendo assim, a escola tem pela frente um enorme desafio. (SILVA; SALES, 2017, p.783).



Figura 3.3: (<https://Aplicação do Kahoot>)

Fonte:<https://https://www.google.com.br/search?q=figura+aplicacao+de+kahoot>

⁴Uma estratégia de aprendizagem ativa baseada em games.

Eles se sentiam tão motivados por esta ferramenta que pediam em todas as aulas que fosse aplicada. O uso do game na educação não tem que ser o jogo pelo jogo. Temos que ter muito cuidado, pois qualquer aula construída com este tipo de inovação tem que ser feito um planejamento muito mais coerente e estruturado.

A aplicação do método Jigsaw⁵ é feita em três etapas. A Etapa 1 é construída os grupos de base, onde um determinado tópico é discutido pelos alunos de cada grupo. O tópico é subdividido em tantos subtópicos quantos os membros dos grupos. Na Etapa 2, os Grupos de Base são reorganizados e cada aluno estuda e discute juntamente com os membros dos outros grupos a quem foi distribuído o mesmo subtópico, formando assim um grupo de especialista. Por último, a Etapa 3 é organizada com o retorno dos alunos aos Grupos de Base, onde cada aluno apresenta o que aprendeu sobre o seu subtópico aos colegas, de maneira que fiquem reunidos os conhecimentos indispensáveis para a compreensão do tópico em questão.

O método Jigsaw consiste em uma atividade de colaboração em grupo. O professor, previamente, divide a sala em grupos iguais, como mostra a figura 4.10. Em cada grupo, o professor delibera um papel para dois integrantes: redator e relator. O redator colhe as respostas e o relator socializa os resultados para todos na sala de aula.



Figura 3.4: Eliminação do grupo de 2 e 4 pessoas)
 Fonte: <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/quimica/>

⁵Palavra que em inglês significa Quebra-cabeça.

São lançadas 5 questões referentes a um tópico previamente estudado por eles em casa, os alunos trazem uma bagagem de conceitos para discussão sobre o tópico da aula.

Depois de um tempo, onde eles preparam as respostas para discussão, o professor pede para que eles façam uma nova arrumação. Cada grupo tem que ser formado com a mesma numeração, como é ilustrado na figura 4.10, no grupo de especialista. Nessa nova configuração, os alunos que são redatores vão levar as repostas construídas no grupo de base para serem discutidas com a finalidade de validar as respostas e ou modificá-las. No terceiro e último passo, o professor pede para que retornem ao grupo de base e é nesse momento que o aluno relator se pronuncia trazendo para todos em sala o que foi compilado nas soluções das questões.

Capítulo 4

Desenvolvimento

4.1 Aula 01

A primeira aula, destinada para aplicação do problema de Josefo, foi apenas uma pequena introdução com o objetivo de sentir como os alunos iriam reagir ao questionamento. A pedido do professor um aluno fez a leitura do problema que estava exposto na lousa para que todos pudessem entender.

O Problema:

A eliminação de pessoas de um grupo se deu da seguinte maneira:

i) as pessoas são colocadas em círculos com lugares marcados em ordem crescente no sentido horário, (1, 2, 3, ..., n).

ii) este círculo é percorrido no sentido horário tantas vezes quanto necessário. Começando com a pessoa do lugar um, toda segunda pessoa viva nesse sentido é eliminada até que só uma sobreviva.

Onde devo sentar para garantir que sou o único sobrevivente?

Enquanto alguns alunos olhavam de forma perplexa para o problema que estava exposto na lousa, em sala, sem saber como resolver tal problema, outros questionavam que o problema não tinha uma solução e ainda diziam que o problema era muito cansativo em apenas lê-lo.

Observe que as eliminações propostas por este enunciado difere do que foi contado na História do Problema de Josefo. Isso foi feito para facilitar a conjectura de uma fórmula posicional construído pelos alunos.

A intervenção era necessária diante do problema proposto e da falta de entusiasmo para solucioná-lo. A única ferramenta que podia ser usada para trazer os alunos para dentro do problema era o da vivência. Vivenciar um problema matemático é fazer com os alunos adentrem na situação problema e encarem uma estratégia de solução de fundamental importância para a sua solução e assim foi esquematizado.

Foi pedido para os alunos sentar-se em círculos com oito pessoas cada, numeradas de 1 á 8 para que todos pudessem participar da dinâmica. Cada aluno é representado como os 41 soldados que estavam ao lado de Josefo no momento da eliminação.

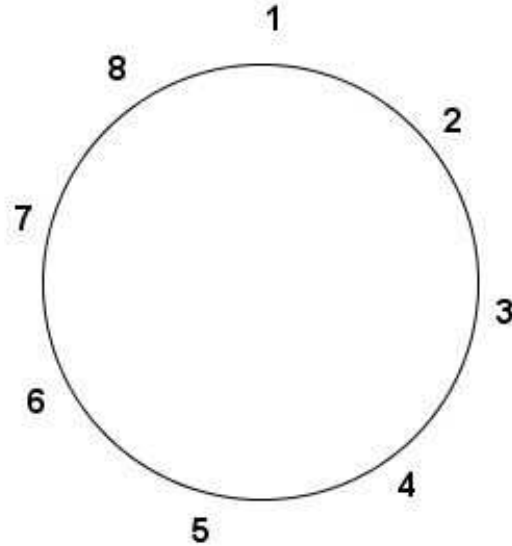


Figura 4.1: Alunos numerados em círculo
Fonte: Própria

O processo de ensinar e aprender acontece numa interligação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital¹. Não são dois mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada que se mescla, hibridiza constantemente.

Feito isso, os alunos estavam mais confiantes em encontrar uma solução para tal problema e a dinâmica segue de forma agradável e tranquila, obedecendo as regras previamente ditas.

Com os alunos em círculo e o problema de Josefo exposto na lousa, eles foram fazendo as eliminações. Repetiram esse processo com a mesma quantidade de vezes, mas sem organizar as ideias para a solução.

¹Permite ao aluno conhecer os recursos tecnológicos no processo de ensino aprendizagem

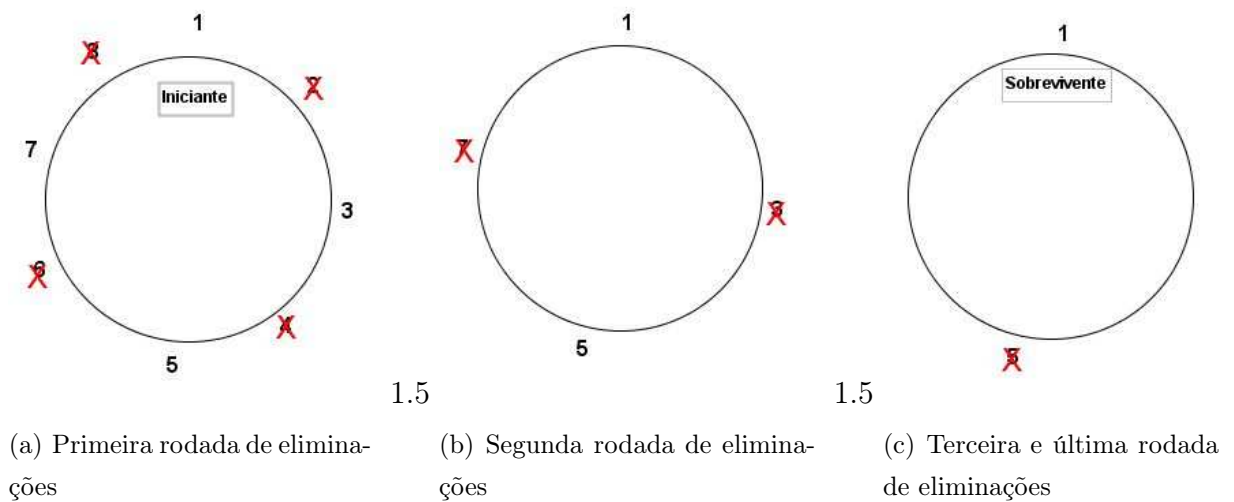


Figura 4.2:

Fonte: Própria

Este pontapé inicial foi importante para a familiarização do problema exposto e em alguns minutos depois começaram a fazer as anotações de quem começava e de quem era o sobrevivente. Observaram que quem começava era sempre o sobrevivente, não importando a pessoa que iniciava. As demais equipes também chegaram nessa mesma conclusão, como mostram as figuras 4.2(a), 4.2(b) e 4.2(c), mas nenhum outro resultado foi indicado pela turma.

Vamos ilustrar o que aconteceria se começássemos pelo aluno de número 5.

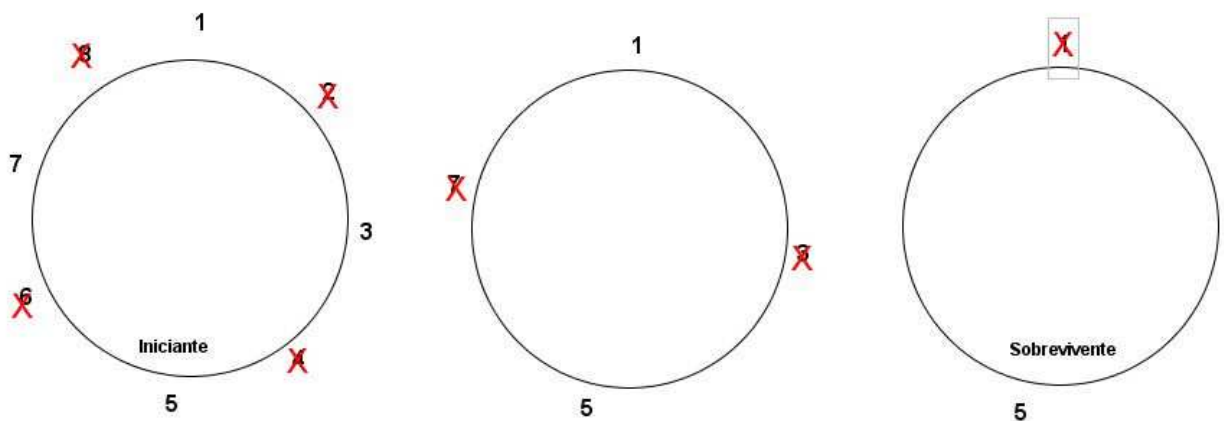


Figura 4.3: Eliminações começando pelo aluno de posição 5

Fonte: Própria

Observe que na figura 4.3 o aluno de número 5 foi o sobrevivente.

Já no final da primeira aula, um aluno fez o seguinte questionamento: E se o número de alunos, nesta roda, fosse diferente de 8, será que o sobrevivente seria o aluno que começa a eliminação? Como a aula estava findando, foi pedido para que este questionamento fosse investigado por ele em casa e trouxesse uma resposta para a discussão no início da próxima aula numa perspectiva de aula invertida.

A metodologia aplicada na Aula 01 é bastante eficaz, pois além dos alunos ficarem antenados ao problema proposto pelo professor, eles vão para casa querendo saber um pouco mais, motivado pelo questionamento feito pelos próprios colegas em sala. O fator motivação da aula aconteceu e isso deixa o professor e o aluno muito engajado e numa situação confortável neste processo de aprendizagem.

4.2 Aula 02

Os alunos chegam para esta aula cheio de ideias e propostas já que pela proposta de aula invertida isso era essencial.

"Vamos fazer círculos com quantidades de pessoas diferentes!!"

"Vamos fazer um único grupo como os 41 soldados"

"Vamos.... vamos...."

Chegou o momento da aplicação do flipped classroom, uma ideia de aula invertida, onde o aluno absorve todo o conteúdo na sua casa por meio virtual. Dessa forma a sala de aula fica para desenvolvermos ações que possibilite mais uma etapa de socialização do tema estudado. A ideia dessa construção é fazer com que os alunos aprendam a tomar decisões sozinhos ao serem questionados com problemas que muitas vezes eles se deparam com situações no seu cotidiano.

Depois que os questionamentos foram feitos e as discussões tomaram rumo importantes para uma possível solução nesta aula, o professor propôs a seguinte arrumação.

Foi pedido para que eles formassem grupos diferentes da seguinte maneira: o primeiro grupo fosse feito com apenas dois participantes, o segundo, com quatro participantes, o terceiro, com oito participantes e o quarto grupo, com 16 participantes. Todos receberam uma numeração e assim começaram novamente a eliminação, pela pessoa de numeração 1, em círculo, no sentido horário em que cada um, de dois alunos, era eliminado, como mostra a figura 4.4.

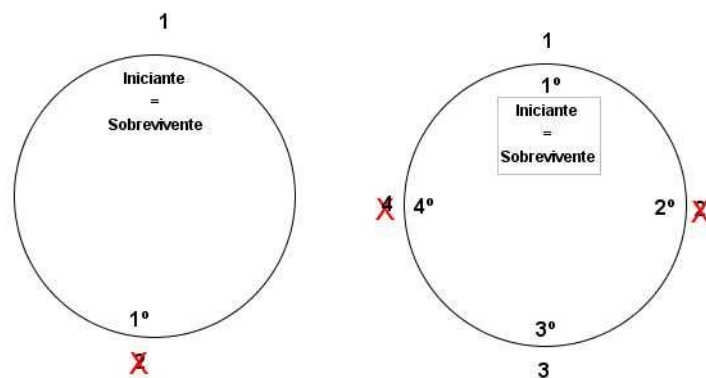


Figura 4.4: Eliminação do grupo de 2 e 4 pessoas)

Fonte: Própria

A observação feita por eles foi a mesma em todas as equipes e chegaram à conclusão de que o padrão, já observado anteriormente, se repetiu, onde o primeiro que começava, independentemente quem fosse a posição deste, era o sobrevivente, mesmo que tenha sido arrumados em grupos com números diferentes de alunos.

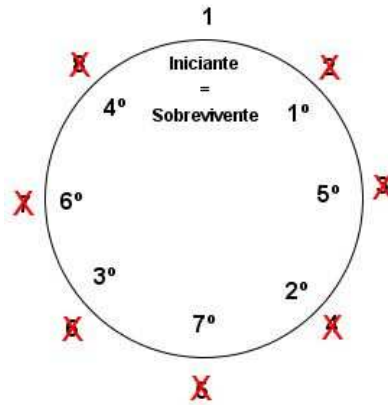


Figura 4.5: Eliminação do grupo de 8 pessoas)
Fonte: Própria

Veja as eliminações ocorridas no grupo com 16 alunos na figura 4.6

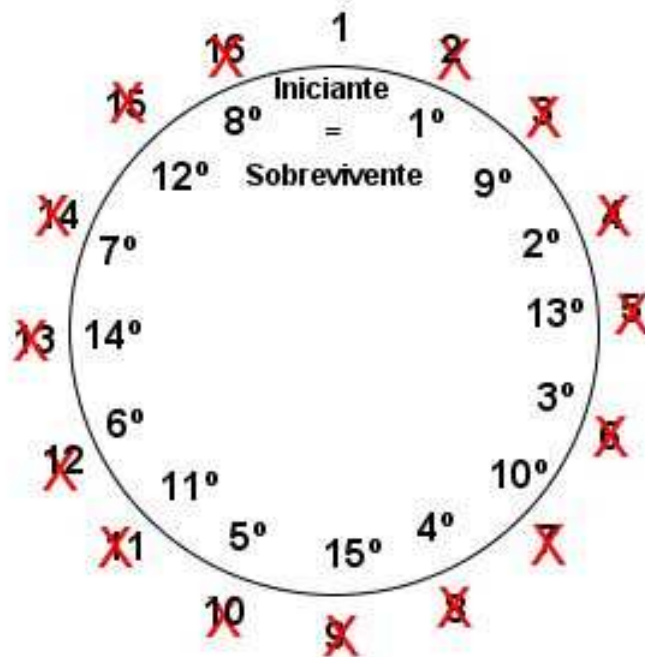


Figura 4.6: Eliminação do grupo de 16 pessoas)
Fonte: Própria

Na figura 4.6, a ordem de eliminação está representada pelos números ordinais que aparecem do lado de dentro desta figura. No final de todas as eliminações o aluno de número um iniciou a rodada e pelo que vimos é que ele foi o sobrevivente.

A equipe que tinha 16 alunos fez uma inferência importante. Eles disseram que todos os grupos foram arrumados em um número par de alunos, mesmo que em quantidades diferentes. Foi questionado pelo professor qual era a característica das quantidades de cada grupo, além de serem pares.

A equipe com quatro alunos disse que todos os grupos foi arrumado em uma potência de dois e ainda completou dizendo que a arrumação antiga também era uma potência de dois. A aula ficava cada vez mais interessante, já que os alunos descobriram um fato importante e norteador para descoberta da solução do problema de Josefo.

Discutimos essas observações feitas pelos alunos da seguinte forma.

Com o enunciado do problema feito até então, a eliminação das pessoas em círculo, contando a primeira pessoa como o número de posição 1, era apenas a de números pares, ou seja, suponhamos que tenha um grupo de 8 pessoas no círculo, figura 4.5, página 21, numeradas de 1 a 8, então começando pelo aluno de número 1, este, por sua vez vai eliminar a pessoa de número dois. A pessoa três eliminará a pessoa quatro, ainda continuando a eliminação, a pessoa cinco eliminará a pessoa seis, e a primeira rodada termina quando a pessoa sete elimina a pessoa de número oito como ilustra a figura 4.2(a) na página 18.

Como os alunos estão sentados em círculo e as pessoas eliminadas vão saindo, um novo círculo é refeito e as eliminações continuam seguindo as mesmas regras anteriores. Neste novo círculo temos as pessoas de número 1, 3, 5 e 7.

Se pensarmos na quantidade que tínhamos antes da primeira rodada e agora, é fácil observar que quatro alunos nessa segunda rodada também é uma potência de dois. Então saímos de um grupo de oito alunos (potência de dois) e fomos para o início da segunda rodada com uma quantidade que também representa uma potência de dois.

Começando mais uma rodada e seguindo as mesmas regras, o aluno de número um elimina o de número três, o de número cinco elimina o aluno sete findando a segunda rodada, como mostra a figura 4.2(b) na página 18 na aula anterior. Observe que dos quatro alunos restaram apenas dois, que é também uma potência de dois.

Repetindo o mesmo processo temos uma terceira rodada, composta por apenas dois alunos sobrevivente da rodada anterior, o aluno de número um elimina o de número cinco restando apenas o aluno de número um como o sobrevivente, como mostra a figura 4.2(c) na página 18. Então podemos dizer que o sobrevivente desse conjunto é o aluno que começou a eliminar. foi observado essa conclusão por parte de outros grupos que começaram por alunos diferentes da numeração um, como podemos ver na figura 4.3 na

página 18 na aula anterior.

Até então sabíamos que se havia uma quantidade de alunos que represente uma potência de dois, a posição do elemento sobrevivente era a de quem sempre começasse com as eliminações.

Ainda nesta aula foi questionado se o número de alunos fosse sete, o que aconteceria com a pessoa sobrevivente? Continuaría com a mesma posição de quem iniciou a eliminação?

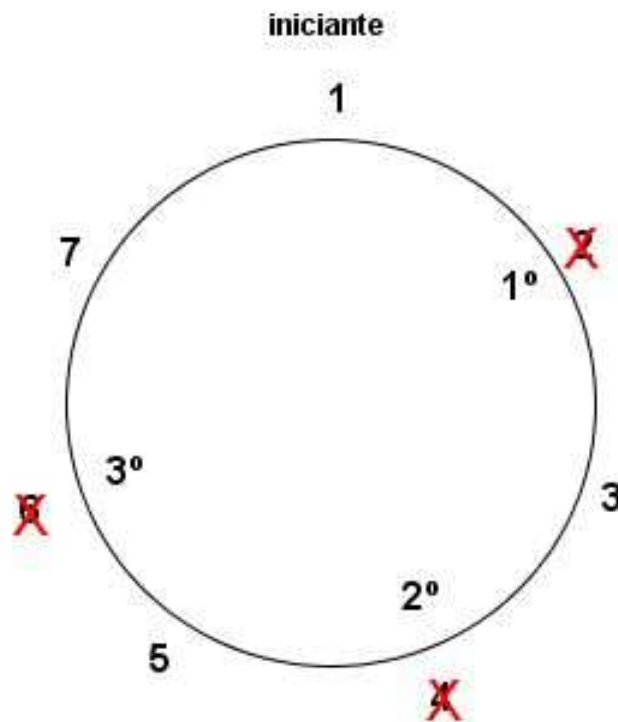


Figura 4.7: Primeira Rodada com 7 alunos)
Fonte: Própria

Agora temos sete alunos como mostra a figura 4.7. As eliminações são feitas da seguinte forma: a pessoa de número um vai eliminar a pessoa de número dois, a pessoa três eliminará a pessoa quatro, ainda continuando a eliminação, a pessoa cinco eliminará a pessoa seis e a primeira rodada termina.

Observe que a segunda rodada começa com o aluno de número sete sendo o primeiro a eliminar o aluno da esquerda, que é o de número um. A pessoa de número três elimina a pessoa 5, onde esta rodada acaba.

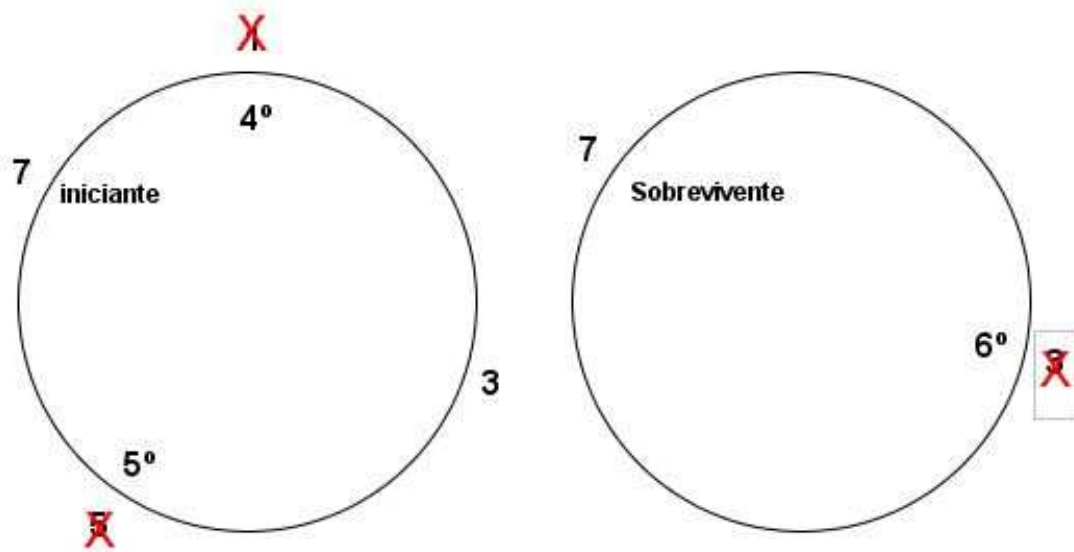


Figura 4.8: Segunda e terceira rodada com 7 alunos)
Fonte: Própria

À terceira rodada começa sendo que novamente a pessoa de número sete inicia eliminando a única pessoa de número 3 resultando na pessoa sobrevivente.

Observe que pessoa sobrevivente estava sentada a direita de quem começou a eliminação. Será que este questionamento é suficiente para determinar uma solução?

E se fossem 9 alunos, a pessoa sobrevivente estaria sentada a direita de quem começou?

O problema parece simples e os alunos acham que estão próximos de uma solução. Não se pode esquecer que haviam 41 soldados naquele dia e fazer uma conjectura com todos esses soldados não é tarefa fácil para eles. O mais recomendado é que seja feita inicialmente essa conjectura com números pequenos de alunos e fossem aumentando gradativamente para serem observados alguns padrões para então chegar numa solução que é identificar onde devo sentar para garantir que sou o único sobrevivente.

Depois de ter construído o problema com sete participantes os alunos não tinham a certeza do sobrevivente. Foi pedido aos alunos para que fossem construídas uma tabela na aula seguinte, onde identificasse apenas duas colunas: uma de números de alunos soldados e outra da posição do sobrevivente.

A parte prática da aula ficou para o encontro seguinte com a construção da referida tabela para socialização com a turma toda e perceber algum padrão com o propósito de solução do Problema de Josefo.

4.3 Aula 03

Cada grupo, inicialmente arrumado, foi socializando suas tabelas como mostra a tabela abaixo.

Reunindo as informações das tabelas construídas pelos alunos nesta aula temos o seguinte resultado em uma única tabela.

números de soldados n	número do lugar do sobrevivente S(n)
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1
9	3
10	5
11	7
12	9

Considere na tabela acima que o aluno de posição um era o que sempre começa as rodadas.

Depois da tabela exposta no quadro por uma equipe a identificação de um padrão ainda estava distante dos alunos. Eles puderam constatar que quando o número era uma potência de dois o sobrevivente estava sempre na posição de quem iniciava a rodada como verificado na tabela acima.

Quando temos um número de participante diferente de uma potência de dois é observado que as posições dos sobreviventes é sempre uma sequência aritmética e esta foi falada por um dos grupos de alunos na sala de aula. A sequência que estamos falando é uma progressão aritmética onde seu primeiro termo é um e seu último termo está sempre na posição anterior quando a quantidade de alunos é uma potência de dois. Este último termo pode ser calculado com:

$$S(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1} - 1$$

Para $n=2$ e $n=3$ temos uma progressão aritmética de razão 2 com dois termos, já que $n=4$ é uma potência de dois. Para $n=4$, $n=5$, $n=6$, $n=7$ também temos uma progressão aritmética de 4 termos com a mesma razão.

O conceito desta sequência, identificada pelos alunos, já foi estudada no ano passado, mas estava na hora de mostrar para eles todas as fórmulas que envolvia este assunto. Uma outra ideia que foi levantada pelos alunos foi repetição. Além desta sequência ter sido trabalhada com eles no ano anterior, a ideia de repetição remetia a recursividade, que não podia ser dado naquele momento pelo grau de complexidade de tal assunto. Mas com essa situação vivenciada por todos até aquele momento, era chegada a hora de explicar pra eles que qualquer sequência configura um tipo de recorrência e que essas recorrências podiam ter sido trabalhado no Ensino Médio.

A ideia de recorrência foi estudada na Aula 06 e 07 para chegarmos na conclusão do Problema de Josefo.

4.4 Aula 04

Esta aula foi reservada para o estudo de sequência que chamamos de Progressão Aritmética (PA).

4.4.1 Progressão Aritmética(PA)

Todo conteúdo estudado nesta aula já foi visto por eles anteriormente para que possamos trabalhar somente com questões lúdicas com o intuito de fazer com que eles aprendam de forma prazerosa e cheguem numa solução do Problema de Josefo muito mais ajustada. Nas próximas aulas veremos noções de Recorrência numa linguagem bastante simples, proporcionando uma visão mais ampla de alguns conceitos de matemática básica, não deixando os alunos assustados, visto que esta abordagem não é vista pela maioria das Escolas de Ensino Médio com este foco.

Trabalharemos com resolução de problemas de interesse deles e aplicados em seu cotidiano para prender a atenção e assim tornar os nossos encontros mais prazerosos.

Iniciamos dizendo que uma progressão aritmética é uma sequência numérica que obedece a algumas propriedades importantes. Este primeiro encontro para abordagem deste assunto foi feito com base na resolução de exercícios retirados do livro [2] A Matemática do Ensino Médio, Volume 2 e as soluções foram construídas com os alunos.

Exemplo 1

Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução

Primeiramente foi exposto na lousa os valores da produção mensal a partir de janeiro que são 400, 430, 460, 490, 520, 550.... Em junho a fábrica produziu 550 veículos. Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando de modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês em cinco meses ela aumenta de $5 \times 30 = 150$ veículos.

Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo. A sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é

chamado de razão de progressão. A razão dessa progressão é igual a 30. Portanto, uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r .

Exemplo 2

As seqüências $(5, 8, 11, \dots)$ e $(7, 5, 3, 1, \dots)$ são progressão aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e -2 .

Este exemplo vem para definirmos uma fórmula para calcular qualquer termo de uma progressão aritmética. Em uma progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, \dots) , para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8.r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13} avançamos oito termos; $a_{12} = a_7 + 5.r$, pois, ao passar de a_7 para a_{12} avançamos cinco termos, de modo geral $a_m = a_n + (m - n).r$, pois ao passar de a_1 para a_n , avançamos $n - 1$ termos.

Como o termo seguinte é encontrado através do antecessor as progressões aritméticas são recorrências. Assim teremos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando as igualdades ficaremos com

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_{n-1} + (n - 1)r$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \tag{4.1}$$

Assim encontramos a fórmula do termo geral de uma PA.

Chegamos então numa formula que nos permite calcular o termo geral em qualquer posição. Lembramos também que este é o propósito desta dissertação que é encontrar uma fórmula que nos permite solucionar o Problema de Josefo.

Um outro exemplo do estudo de Progressão Aritmética (PA) é encontrar uma fórmula para encontrarmos a soma de termos dessa progressão e para isso desenvolvemos

o mesmo raciocínio feito por Carl Friedrich Gauss², no ano de 1787, aos seus 7 anos de idade.

Gauss foi um grande matemático que começou a demonstrar sua genialidade desde criança. Conta a história que a turma de Gauss na escola era bastante inquieta e, certa vez, seu professor decidiu dar-lhes uma atividade que deveria envolvê-los por algum tempo. O professor pediu aos seus alunos que fizessem a soma de todos os números naturais entre 1 e 100. Surpreendentemente, o menino Gauss conseguiu concluir a atividade em poucos minutos. O professor conferiu os cálculos e verificou que Gauss havia acertado. Pediu-lhe então que explicasse como havia feito as contas de forma tão rápida. Gauss prontamente mostrou sua ideia. Vejamos o esquema abaixo para melhor compreensão:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

Ele observou que, ao somarmos o primeiro número da sequência com o último, obtemos o resultado de 101, e que, ao somarmos o segundo número com o penúltimo, também obtemos 101 como resultado e assim por diante.

Observe que as sequências são as mesmas e chamaremos de S . Então:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ vezes}}$$

$$2S = 100 \cdot 101$$

$$2S = 10100$$

$$S = \frac{10100}{2}$$

$$S = 5050$$

Com base nesta solução resolvida por Gauss pedimos para que os alunos conjecturassem a fórmula que nos permite calcular a soma de uma PA. Os alunos chegaram numa seguinte conclusão depois de ter analisado todo raciocínio de Gauss.

O valor 101 é resultado do somatório do primeiro termo com o último termo dessa sequência o que devemos multiplicar por 100, pois é a quantidade de números que existe entre 1 e 100. A divisão por dois se deve ao fato de que foi somado duas sequências. Daí eles chegaram nessa fórmula.

²Gauss é considerado um dos maiores gênios da matemática de todos os tempos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \quad (4.2)$$

Antes de observamos um padrão e conjecturar uma fórmula que permite saber em que posição estará o aluno para que ele sobreviva diante do problema de Josefo, os alunos conheceram uma fórmula já antes estudada por eles, mas nunca tinha sido testado a sua veracidade, ou seja, será que a fórmula que eles acabaram de expor solucionava qualquer soma de termos de uma PA? Pedimos para eles testarem com a sequência numérica que foi colocada na lousa.

Exemplo 3

Qual é a soma dos 5 primeiros termos de uma PA (3,5,7,9,11)?

Muitos somaram os números um a um e encontraram 35 como resposta. Claro que o objetivo não é esse, mas qualquer forma de pensamento na apresentação de uma solução é válida, pois temos sempre que deixar que o aluno construa a sua estratégia de solução, pois ele está usando um conhecimento trazido nos primeiros contatos com a Matemática, quando ele aprendeu a somar.

Pedi então que usasse a fórmula conjecturada por eles até então e foi ai que eles chegaram no mesmo resultado encontrado acima. Veja:

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{(a_1 + a_5).n}{2} \\ S_5 &= \frac{(3 + 11).5}{2} \\ S_5 &= \frac{(14).5}{2} \\ S_5 &= \frac{(70)}{2} \\ S_5 &= 35 \end{aligned}$$

A grande questão agora era fazer eles pensarem se esta fórmula valia para qualquer quantidade e isso foi deixado para a aula de Indução Matemática que será feita nas próximas aulas.

4.5 Aula 05

Esta aula foi reservada para o estudo de sequência que chamamos de Progressão Geométrica (PG).

4.5.1 Progressão Geométrica(PG)

Faremos uma breve revisão sobre os conceitos de progressão geométrica, mas iniciaremos com a resolução de um problema retirado do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, p 23. Este problema é muito interessante e fará com que os alunos percebam a principal diferença entre uma Progressão Aritmética de uma Progressão Geométrica.

Exemplo 1

Uma pessoa começando com $R\$64,00$ faz seis apostas consecutivas em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode se afirmar que ela:

1. ganha dinheiro.
2. não ganha nem perde dinheiro.
3. perde $R\$27,00$.
4. perde $R\$37,00$.
5. ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Em geral os alunos escolhem uma ordem para ver o que acontece, aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela vence as três primeiras apostas e perde as últimas três o seu capital evolui de acordo com o esquema:

$$64 \rightarrow 96 \rightarrow 144 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27$$

Se ela começou com $R\$64,00$ e terminou com $R\$27,00$ ela perdeu $R\$37,00$. Já houve um progresso. Os alunos apontaram neste momento que as possíveis respostas podiam ser o item D) ou E)

Em seguida foi proposto para que os alunos pensassem em uma outra ordem; por exemplo, ganhando e perdendo alternadamente e obtivemos o seguinte resultado.

$$64 \rightarrow 96 \rightarrow 48 \rightarrow 72 \rightarrow 36 \rightarrow 54 \rightarrow 27$$

Nessa ordem a pessoa também perdeu $R\$37,00$

Em seguida os alunos experimentam outra ordem torcendo para que a pessoa não termine com $R\$27,00$, o que permitiria concluir que a resposta seria E. Mais uma vez chegou-se no resultado $R\$27,00$ e com isso permaneceram na dúvida. Neste momento

observa-se que existem mais ordens para se chegar numa solução. Utilizando-se de permutação com repetição, fica inviável construir todas as vinte ordens possíveis para se chegar no resultado, o que nos leva a tentar uma solução de outra maneira.

Depois de feitos todos esses levantamentos de possíveis soluções, a melhor maneira de abordar problemas nos quais há uma grandeza variável, da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar atenção não na taxa de variação da grandeza e sim, no fator de aumento ou decréscimo dessa grandeza.

Vejam os esquemas iniciais.

Cada vez que ganha, o capital aumenta de $\frac{1}{2}$, ou seja 50% e passa a valer:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Cada vez que perde, o capital diminui de $\frac{1}{2}$, ou seja 50% e passa a valer:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pensando assim fica claro que se a pessoa vence as três primeiras e perde as três últimas, a evolução de seu capital se dar de acordo como no esquema abaixo.

$$64 \rightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \rightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Ela termina com $64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 27$ reais.

Um dos alunos observou que a ordem dos produtos das frações não altera o resultado, ou seja, ficou claro para todos que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com $R\$27,00$.

Se ela começou com $R\$64,00$ e terminou $R\$27,00$ ela perdeu $R\$37,00$. A resposta é D).

Com o exemplo anterior fica claro que numa progressão Geométrica cada termo é igual ao anterior multiplicado por uma constante que chamaremos de razão. Esta razão é a taxa de variação que aumenta ou diminui uma certa grandeza.

Definição 1.

Denominamos progressão geométrica, toda sequência (a_n) de termos não nulos, tal que o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante, $\forall n \in \mathbb{N}$.

O quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é chamado de razão e usualmente representada por q de modo que uma vez definido o primeiro termo, todos os outros a partir do segundo são obtidos multiplicando-se a razão ao termo anterior, ou seja:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

que é a expressão do termo geral da progressão geométrica.

Vamos, a seguir, achar uma fórmula para a soma S_n dos n primeiros termos de uma PG.

Vejamos se, animados pelo truque de Gauss, achamos uma solução inteligente para esse problema.

Escreva

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}.$$

Note que

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\ &\quad - a_1 - a_1q - a_1q^2 - \dots - a_1q^{n-1}. \\ &= a_1q^n - a_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_nq - a_1}{q - 1} \quad (4.3)$$

4.6 Aula 06

Esta aula foi reservada para inserir uma noção de Recorrência ou chamada de sequência definida recursivamente, já vista por eles, mas nunca ter sido reportado por este nome. Uma relação de recorrência é quando se determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função do(s) termo(s) anterior(es). Então, neste sentido, as sequências como Progressão Aritmética (PA), Progressão Geométrica (PG), Sequência de Fibonacci e até mesmo cálculos de juros Simples e Compostos podem ser definidas como sequências recursivas.

4.6.1 Recorrência: uma abordagem para o Ensino Médio

Definição 1.

Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores. Uma equação de recorrência na qual cada termo depende exclusivamente dos anteriores é dita homogênea. Se, além dos termos anteriores, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita não homogênea.

Observe ainda que, para que uma sequência seja completamente definida por uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados também os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos. Note que, na recorrência $a_k = 2a_{k-1} + 1$, se o primeiro termo mudar para, digamos, $a_1 = 2$, a sequência torna-se $(a_k) = (2, 5, 11, 23, 47, \dots)$.

Definição 2.

Resolver uma relação ou equação de recorrência, significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_k da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada solução da recorrência.

Exemplo 1.

Para os termos $a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, a_3 = 3^2, a_4 = 4^2$ eles representam os termos de uma sequência dos quadrados perfeito $(a_k)_{k \geq 1}$, denotado por $a_k = k^2$ inteiros. O mais conveniente para uma sequência, quando esta é definida por uma fórmula posicional, é indexar a sequência a partir do zero, ou seja, $(a_k)_{k \geq 0}$. Com este tipo de notação podemos reescrever a sequência dos quadrados perfeitos acima da seguinte forma:

$$a_k = (k + 1)^2 \text{ para } k \geq 0$$

$$a_0 = (0 + 1)^2 = 1^2$$

$$a_1 = (1 + 1)^2 = 2^2$$

$$a_2 = (2 + 1)^2 = 3^2$$

e assim por diante...

Uma outra forma de listar uma sequência definida por formulas posicionais é usar a forma recursiva, ou seja, listar uma sequência posicional por meio de recorrência, onde define-se um ou mais termos iniciais de uma sequência qualquer. De maneira análoga podemos dizer que para listar os termos de uma sequência recorreremos aos termos iniciais já predefinidos.

Exemplo 2.

Considere a sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ definida recursivamente por:

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}; \forall k \geq 1 \quad (4.4)$$

Para $k = 3$, temos $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4$

Para $k = 4$, temos $a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$

Para $k = 5$, temos $a_5 = 2a_4 - a_3 = 2 \cdot 5 - 4 = 10 - 4 = 6$

Perceba que os termos a_3, a_4, a_5 foram obtidos a partir da relação B.1 com os dois termos anteriores, ou seja, relacionamos esses termos com os termos a_1 e a_2 . Essa relação é chamada de Relação de Recorrência, ou simplesmente Recorrência.

Na relação de recorrência B.1 foi preciso saber dois de seus termos anteriores, mas isso não é necessariamente obrigatório.

Se esses dois primeiros termos desta Relação de recorrência fossem alterados i.e., se $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$ e mantivéssemos a mesma relação, então mudaríamos os termos subsequentes da sequência.

Vejamos

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}, \forall k \geq 3 \quad (4.5)$$

Para $k = 3$, temos $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

Para $k = 4$, temos $a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

Para $k = 5$, temos $a_5 = 2a_4 - a_3 = 2 \cdot 7 - 5 = 14 - 5 = 9$

Para $k = 6$, temos $a_6 = 2a_5 - a_4 = 2 \cdot 9 - 7 = 18 - 7 = 11$

Percebemos que a Relação de Recorrência B.2 lista uma sequência de números ímpares.

Ainda existe uma outra forma de escrever uma relação de recorrência. se fizermos $k - 2 = j$ na Relação de Recorrência B.2, obtemos $k = j+2$, e daí

$$a_{j+2} = 2a_{j+1} - a_j, \forall j \geq 1$$

Isso evidencia que podemos reindexar a sequência, isto é, j, k , não é relevante para a sua definição; poderíamos escrevê-la como:

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k, \forall k \geq 1$$

Uma pergunta natural a esta altura é a seguinte: se uma certa sequência está definida recursivamente, como podemos obter uma fórmula posicional para seus termos? Infelizmente tal pergunta não admite uma resposta simples. Discutiremos alguns exemplos simples para posteriormente resolver o problema de Josefo que é o principal objetivo desta dissertação.

Exemplo 3.

Calcule os quatro primeiros termos da sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = a_k^2 + a_k + 1$ e para todo $k \geq 1$

Solução.

Para $k = 1$, temos $a_{1+1} = a_2 = a_1^2 + a_1 + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$

Para $k = 2$, temos $a_{2+1} = a_3 = a_2^2 + a_2 + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$

Para $k = 3$, temos $a_{3+1} = a_4 = a_3^2 + a_3 + 1 = 13^2 + 13 + 1 = 169 + 13 + 1 = 183$

Daí os quatro primeiros elementos da sequência são 1, 3, 13 e 183.

Depois de ter explanado um pouco do conceito de Relação de Recorrência era chegada a hora de trabalharmos com exemplos mais próximos dos alunos e da realidade deles. Sugerimos que a próxima aula fosse reservada para solução de problemas utilizando o raciocínio recursivo e foi pedido para que trouxesse conceitos estudados por eles e aplicações no Ensino Médio. A próxima aula será invertida.

4.7 Aula 07

Iniciou-se a aula com a sala dividida em grupos e cada grupo numerado de 1 à 4. Muito estavam se perguntando qual era o motivo da numeração e a resposta foi logo em seguida. A sala foi dividida em 5 grupos com 4 pessoas e cada um recebeu um número, pois eles participariam de uma dinâmica usando o método Jigsaw.

4.7.1 Solução de Problemas Utilizando o Raciocínio Recursivo

O método Jigsaw, já explicado no Capítulo 3, foi o início da atividade para que todos pudessem resolver os problemas que seguem, onde foi escolhida as melhores soluções aqui apresentadas.

Problema 1:

Escolha a_1 e a_2 números naturais menores do que 12. Em seguida construa uma relação de recorrência cujo termo posterior é a soma dos dois termos anteriores.

Escolhemos uma equipe para fazer a apresentação da solução desta questão. Apresentaram a seguinte solução:

Solução Apresentada:

A equipe apresentou uma relação de recorrência escolhendo $a_1 = 4$ e $a_2 = 8$. Daí eles escreveram na lousa suas respostas:

$$\begin{aligned}a_3 &= a_1 + a_2 = 4 + 8 = 12 \\a_4 &= a_2 + a_3 = 8 + 12 = 20 \\a_5 &= a_3 + a_4 = 12 + 20 = 32 \\a_6 &= a_4 + a_5 = 20 + 32 = 52\end{aligned}$$

Nota-se que para encontrar a_{10} temos que encontrar o a_8 e o a_9 .

Questionamos qual seria a relação de recorrência para encontrarmos qualquer termo n natural.

A mesma equipe trouxe a resposta com a seguinte conjectura:

Se $a_{12} = a_{10} + a_{11}$, então $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Definimos então a primeira relação de recorrência construída pelos alunos em sala. lembramos que essa dissertação não está direcionada para solucionar as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, a proposta dessas atividades é permitir que o aluno conheça como se constroem e como são definidas entendendo seu mecanismos de conjectura.

Resolveremos mais um exemplo usando noções geométricas.

Problema 2

Qual o número máximo de regiões em que 12 retas, distintas e não paralelas, podem dividir um plano?

Solução Apresentada:

Os alunos fizeram o desenho do problema proposto para depois discutirmos a ideia de recursividade.

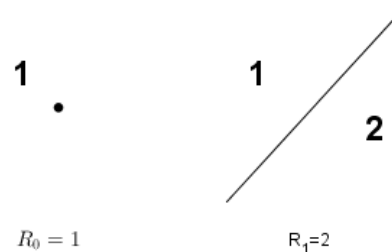


Figura 4.9: Regiões formadas por nenhuma reta e apenas uma reta)

Fonte: Própria

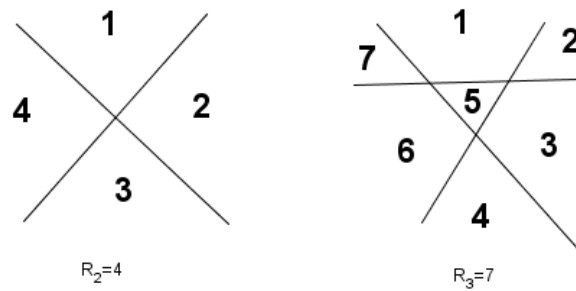


Figura 4.10: Regiões formadas por duas e três retas)
Fonte: Própria

Diante das figuras 4.9 e 4.10, o número de regiões foi listado da seguinte forma:
Sem retas há apenas 1 região

Com 1 reta há 2 regiões

Com 2 retas há 4 regiões

Com 3 retas há 7 regiões

Vamos dar início ao raciocínio recursivo.

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = 2$$

$$R_2 = 4$$

$$R_3 = 7$$

⋮

$$R_n = R_{n-1} + n$$

Definindo R_n , o número de regiões formadas no plano, podemos observar que:

$$R_1 = R_0 + 1$$

$$R_2 = R_1 + 2$$

$$R_3 = R_2 + 3$$

$$R_4 = R_3 + 4$$

⋮

$$R_n = R_{n-1} + n$$

Daí, podemos conjecturar que $R_n = R_{n-1} + n$

No passo seguinte, é feita a soma de todos os valores que se encontram no primeiro membro e no segundo membro das equações. O resultado foi o seguinte:

$$R_1 + \dots + R_n = R_0 + \dots + R_{n-1} + 1 + 2 + \dots + n$$

$$R_n = R_0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Como $R_0 = 1$ temos:

$$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

É fácil observar que R_n é definido pela soma de R_0 com os termos da progressão aritmética que vai de 1 á n , de razão um. Daí, é possível escrever esta soma com a fórmula que permite calcular a soma de termos de uma progressão aritmética. Nesta experiência existiu a participação dos alunos.

$$R_n = 1 + \frac{(n+1)n}{n}$$

$$R_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Para resolver o problema bastava substituir n por 12. Logo $R_{12} = \frac{12^2 + 12 + 2}{2} = 79$ partes

Consequentemente o número máximo de regiões que 12 retas podem dividir o plano são 79.

Observação: Usando a fórmula $R_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ podemos resolver este problema para qualquer quantidade de retas.

4.8 Aula 08

Nesta Aula 08, construiremos uma solução com os alunos diante das observações levantadas no decorrer das aulas.

4.8.1 Solução do Problema de Josefo

Foi feito de início, um painel com as observações levantadas até então. Os alunos lembraram que a observação mais importante foi ter encontrado a presença da potência de dois e de que se a posição que o soldado sentasse fosse ímpar, ele tinha uma maior chance de ser o sobrevivente.

Os questionamentos foram surgindo quando identificaram que a 2ª coluna da tabela apresentada por eles, no início da Aula 03, indicava que a posição dos sobreviventes eram sempre números ímpares. Isso se deve ao fato de que o aluno que iniciava as eliminações era o de posição 1 e com isso o de posição 2 saía, o terceiro eliminava o quarto e assim por diante todos os de posição par eram retirados na primeira rodada.

Os alunos também identificaram na tabela, que existia uma sequência numérica e reconheceram que tal sequência era uma progressão aritmética de razão 2, mas o que mais chamou a atenção deles foi o fato delas sempre estarem recomeçando de uma certa quantidade de um determinado grupo.

Para $n = 2, n = 3$, a sequência é $(1, 3)$.

Para $n = 4, n = 5, n = 6$ e $n = 7$, a sequência é $(1, 3, 5, 7)$.

Para $n = 8, n = 9, n = 10$ e $n = 11$ e $n = 12$ a sequência é $(1, 3, 5, 7, 9)$.

Foi verificado também que a sequência volta a se repetir, quando o número de alunos do grupo é uma potência de dois. Sendo assim, a sequência acima não termina em 9, pois $n = 13$ não é uma potência de dois. Reescrevendo a sequência ela fica da seguinte forma:

Para $n = 8, 9, 10, \dots, 14, 15$ a sequência é $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$.

Até o momento observou-se que:

- O sobrevivente está sempre na posição ímpar.
- Há existência de número especial que é a potência de dois.
- Há uma progressão aritmética que sempre se renova a cada potência e dois.
- Se o número de alunos no grupo é uma potência de dois, então o sobrevivente é sempre o que inicia o ciclo de alimentações.

Como a tabela foi construída levando em consideração que o ciclo começa sempre do aluno de posição 1, e se a quantidade de alunos no grupo for uma potência de dois, então o aluno sobrevivente é o próprio de posição 1.

Um aluno fez o seguinte questionamento. E se começássemos pelo aluno de número 5, ainda que a quantidade de alunos no grupo seja representado por uma potência de dois?

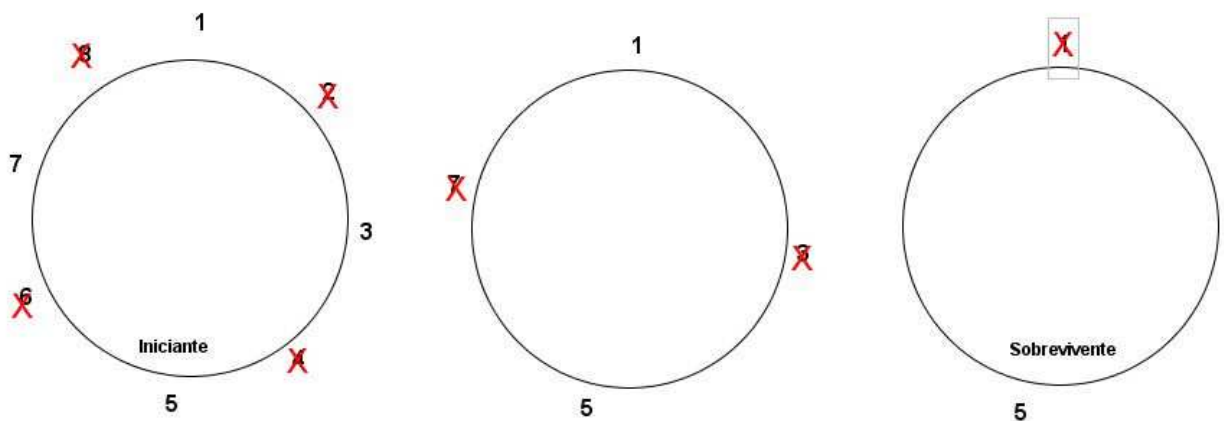


Figura 4.11: Eliminações começando com o aluno de número 5
Fonte: Própria

Desta forma, verifica-se na figura 4.11 que o aluno sobrevivente numa potência de dois é sempre o que iniciou o ciclo.

Vamos adentrar um pouco mais no que foi afirmado até então. Se tivermos uma quantidade de dezesseis alunos no grupo e começamos o primeiro círculo pelo aluno de posição um, já é observado que todos os de posição par são eliminados e um novo ciclo recomeça com uma quantidade de oito alunos, que é uma potência de dois. Esse padrão continua se repetindo ficando com quatro alunos e no passo seguinte, apenas dois, portanto, no último ciclo, o aluno de posição um elimina o outro e ele sobrevive.

Com 32 alunos em círculo o esquema de eliminação fica assim:

Alunos no ciclo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1ª Rodada	1		3		5		7		9		11		13		15		17		19		21		23		25		27		29		31	
2ª Rodada	1				5				9				13				17				21				25				29			
3ª Rodada	1								9								17												29			
4ª Rodada	1																17															
5ª Rodada	1																															

Figura 4.12: Eliminações com 32 alunos

Fonte: Própria

Até aqui sabemos que a solução do problema de Josefo está sempre relacionada com uma potência de dois, ou seja, essa potência é importante no momento de conjecturarmos uma fórmula para identificar a posição que Josefo ficou para sobreviver. Matematicamente podemos escrever qualquer número como a soma da maior potência de dois com mais uma certa quantidade que chamaremos de y . Se n é o número de alunos no ciclo, então.

$$n = 2^x + y, y < 2^x \quad (4.6)$$

Se n for uma potência de dois, então $n = 2^x$ e y é igual a zero, caso contrário, $n = 2^x + y$.

Mas afinal o que podemos dizer sobre a quantidade y , será que ela nos dá a posição do sobrevivente para n diferente de uma potência de dois? Vamos investigar mais um pouco! Para $n = 8, n = 2^3$ Para $n = 9, n = 2^3 + 1$ Para $n = 10, n = 2^3 + 2$ Se reescrevermos os números acima de outra maneira temos:

$$\text{Para } n = 9 \Rightarrow 9 = 2^3 + 1 \Rightarrow 9 - 1 = 2^3 + 1 - 1 \Rightarrow 9 - 1 = 2^3$$

Para $n = 10 \Rightarrow 10 = 2^3 + 2 \Rightarrow 10 - 2 = 2^3 + 2 - 2 \Rightarrow 10 - 2 = 2^3$

Verifica-se que é retirada uma quantidade y de n e o que resta dessa diferença representa uma potência de dois. Seguindo esse raciocínio, pode-se observar que haverá um novo ciclo com exatamente $n - y$ alunos e essa quantidade é uma potência de dois, então o aluno que começa a eliminar neste novo ciclo será o sobrevivente, mas como saber em qual posição ele estará?

Vamos construir um exemplo usando 13 alunos num ciclo e mais uma vez começando a eliminação pelo aluno de posição como se verifica na figura 4.13.

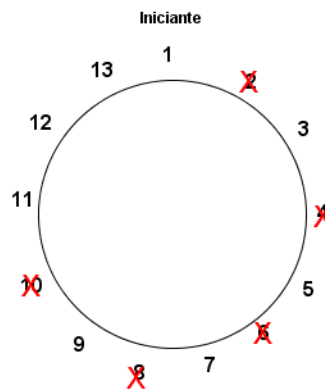


Figura 4.13: Eliminações com 32 alunos
Fonte: Própria

Como $13 = 2^3 + 5$, então devemos retirar 5 alunos na primeira rodada ficando com 8 para a próxima etapa de eliminação ilustrado na figura

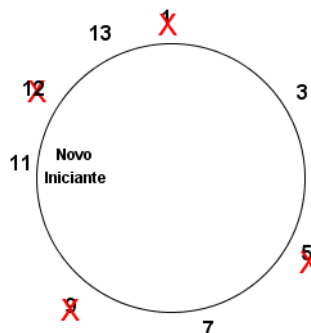


Figura 4.14: Eliminações com 32 alunos
Fonte: Própria

A eliminação acontece de dois em dois e como são cinco alunos a serem eliminados, o último será de posição 10, indicando assim que o de posição 11 começará a nova rodada ilustrada na 4.14 e que mostra ser o sobrevivente na figura 4.15, já que estamos com uma quantidade representada por uma potência de dois.

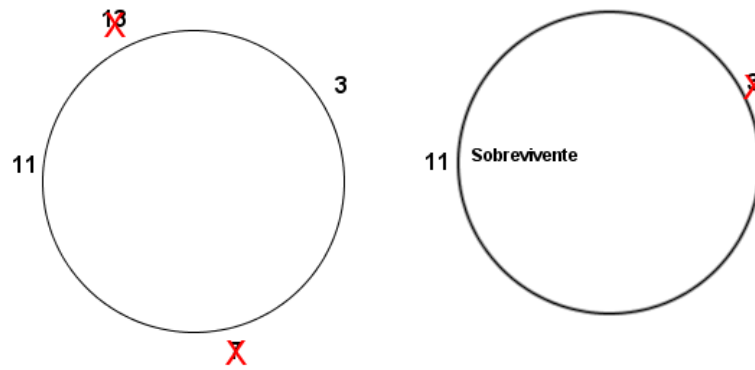


Figura 4.15: Eliminações com 32 alunos
Fonte: Própria

Vamos tentar modelar matematicamente a situação explicada acima. Para qualquer quantidade retirada basta dobrá-la para sabermos em que posição paramos. A essa posição devemos somar mais um para identificar quem irá iniciar o novo ciclo, então essa posição é sempre o de sobrevivente.

Daí concluímos que de n alunos, tiramos y alunos, então a posição do aluno sobrevivente é $2y + 1$.

Matematicamente fica assim:

Se x é o maior inteiro tal que $n = 2^x + y$, com $y < 2^x$, então $w = 2y + 1$

Já temos agora um modelo matemático que permite calcular a posição do sobrevivente, mas ainda este modelo depende de duas variáveis. Fazendo alguns ajustes na fórmula temos:

Como $n = 2^x + y$, então $y = n - 2^x$. Substituindo em $w = 2y + 1$ ficamos com $w = 2(n - 2^x) + 1$. Fazendo $w = S(n, x)$ escrevemos, $S(n, x) = 2(n - 2^x) + 1$ que ainda depende de duas variáveis.

Se 2^x representa a maior potência de dois menor ou igual a n , descrito matematicamente, $[x] = \max \{n \in \mathbb{N}; n \leq x\}$. Assim ficamos com a seguinte fórmula:

$$S(n) = 2(n - 2^{[x]}) + 1$$

Por fim, a fórmula matemática que permite indicar a posição do aluno para sobrevivência.

Os alunos entusiasmados com a conjectura da fórmula, queriam fazer as aplicações e verificar se estava correto.

Testando com 8 alunos:

$$S(n) = 2(n - 2^{\log_2 n}) + 1$$

$$S(8) = 2(8 - 2^{\log_2 8}) + 1$$

$$S(8) = 2(8 - 2^3) + 1$$

$$S(8) = 2(8 - 8) + 1$$

$$S(8) = 2(0) + 1$$

$$S(8) = 1$$

Este resultado é verificado na figura 4.2(c) na página 18.

Testando com 13 alunos:

$$S(13) = 2(13 - 2^{\log_2 13}) + 1$$

Como a parte inteira de $\log_2 13 = 3$, então:

$$S(13) = 2(13 - 2^3) + 1$$

$$S(13) = 2(13 - 8) + 1$$

$$S(13) = 2 \cdot (5) + 1$$

$$S(13) = 10 + 1$$

$$S(13) = 11$$

Como também se verifica na figura 4.15 na página 45.

Testando com 41 alunos:

$$S(41) = 2(41 - 2^{\log_2 41}) + 1$$

Como a parte inteira de $\log_2 41 = 5$, então:

$$S(41) = 2(41 - 2^5) + 1$$

$$S(41) = 2(41 - 32) + 1$$

$$S(41) = 2 \cdot (9) + 1$$

$$S(41) = 18 + 1$$

$$S(41) = 19$$

Questionamos que a aplicação de alguns valores em uma fórmula matemática por si só não garante a validade da mesma, mas deixamos claro que provar tal fórmula para qualquer valor de n não era o objetivo desta dissertação, por causa da complexidade das demonstrações para alunos do Ensino Médio.

Capítulo 5

Conclusão

Durante toda trajetória construída com os alunos neste trabalho de dissertação, usamos a investigação como o combustível para apresentarmos uma solução. Os alunos se mostraram muito motivados pelo convite feito no início dessa proposta para o Problema de Josefo. Nesse sentido, desenvolvemos o processo de aprender com o uso de uma das metodologias mais aplicadas nas Universidades dos Estados Unidos, metodologia ativa. As metodologias ativas aproveitam a problematização como estratégia de ensino/aprendizagem, com o objetivo de alcançar e motivar o aluno, pois diante do problema ele se detém, examina, reflete, relaciona a sua história e passa a ressignificar suas descobertas (BERBEL, 2011).

Depois de feito todas as análises com os alunos em sala de aula sobre problema de Josefo, os conteúdos como, sequências aritmética, geométrica e recorrência puderam ser estudadas, pois estavam relacionados com a solução deste problema.

Quando se chegou numa solução, os alunos se sentiram confiantes e realizados com uma produção feita por eles. Foi fácil observar no rosto de cada um que eles tinham uma grande arma, o pensamento, e estruturado de forma coletiva, produz o conhecimento que é fundamental em sua formação.

Finalizo esta dissertação lembrando da importância da problematização em sala de aula, para introdução de conceitos matemático com a proposta da construção de conhecimento pelos próprios alunos. Ressalto ainda que podemos abordar e aprofundar conceitos nunca vistos no Ensino Médio, com o devido cuidado e sempre numa linguagem simples clara.

Bibliografia

- [1] Dias de Souza, Marcia Erondina. **Uma proposta de abordagem ao problema de Flavio Josefo aplicada ao Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Matemática,PROFMAT, UFSM, 2013, RS. 61p.
- [2] Lima, Elon e Morgado, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 2**. Coleção do professor de Matemática, SBM.
- [3] Marsden, Jerrold e Weinstein, Alan **Calculus I**. 2. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1985. 335p.
- [4] Muniz Neto, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar, Números Reais, Vol. 1**. 2. ed. rio de Janeiro: SBM, 2013. 235p.
- [5] <http://www.morasha.com.br/homens-na-historia/flavio-josefo-traidor-ou-traido.html>, página consultada em 24/08/17
- [6] Marcia E.S.S e Luciane G.T., Uma Solução para o problema de Flávio Josefo. *Ciência e Natura*, Santa maria, V. 37 Ed Especial PROFMAT, 2015, p. 525-531. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
- [7] Rick Regan, Exploring Binary: Powers Of Two In The Josephus Problem
- [8] by Laurent Signac Researcher, Laboratory for Systems Informatics and Automatics (LIAS, EA 1219, University of Poitiers) Lecturer in Computer Science, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP)

Apêndice A

Recorrências

A.1 Recorrências Lineares de primeira ordem

1º Tipo: Homogêneas $a_{n+1} = f(n)a_n$

$$\begin{aligned}a_2 &= f(1)a_1 \\a_3 &= f(2)a_2 \\a_4 &= f(3)a_3 \\&\vdots \\a_n &= f(n-1)a_{n-1}\end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades teremos:

$$a_n = a_1 \prod_{j=1}^{n-1} f(j)$$

Exemplo

Na recorrência definida por $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$. Calcule o valor do centésimo termo, ou seja, x_{100} .

Resolução:

$$\begin{aligned}x_2 &= 1x_1 \\x_3 &= 2x_2 \\x_4 &= 3x_3 \\&\vdots \\x_n &= (n-1)x_{n-1}\end{aligned}$$

Daí, multiplicando, obtemos o $x_n = (n-1)!x_1$. Como $x_1 = 1$ temos de $x_n = (n-1)!$.

Com esta fórmula fica fácil calcular qualquer x_n , como foi pedido o centésimo termo termos que:

$$x_{100} = 99!$$

2º Tipo: Não Homogêneas da forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3)$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + f(n-1)$$

Somando as igualdades ficamos com:

$$a_n = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$$

Exemplo

Qual o vigésimo termo da recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$.

Resolução:

$$x_2 = x_1 + 2^1$$

$$x_3 = x_2 + 2^2$$

$$x_4 = x_3 + 2^3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = x_{n-2} + 2^{n-2}$$

$$x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$$

Somando todas as igualdades teremos $x_n = x_1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$

Como $x_1 = 1$ temos que $x_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$ (soma dos termos de uma PG)

$$\text{Logo: } x_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Consequentemente o vigésimo termo é $2^{20} - 1$.

3º Tipo: Não Homogêneas da forma $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$

Para a resolução deste tipo precisaremos recorrer ao teorema que será apresentado a seguir.

Teorema: Se x_n é solução não nula da recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n$, então a substituição $a_n = x_n y_n$, transforma a recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$.

Demonstração:

Tomando $a_n = x_n y_n$ podemos escrever a equação $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ como $x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$.

Usando $x_{n+1} = g(n)x_n$, pois x_n é solução de $a_{n+1} = g(n)a_n$, iremos transformar a equação $x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$ em $g(n)x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$.

Dividindo a equação por $g(n)x_n$ iremos obter $y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)x_n}$

Exemplo

Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + n \cdot 2^n$.

Resolução:

Usando o teorema acima utilizaremos a substituição $x_n = a_n y_n$, onde a_n é uma solução da equação homogênea.

Vamos resolver a homogênea $a_{n+1} = 2a_n$.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= 2a_2 \\ a_4 &= 2a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= 2a_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades, teremos:

$$a_n = 2^{n-1}a_1$$

Como o objetivo é encontrar uma solução, tomaremos $a_1 = 1$, ficaremos então com $a_n = 2^{n-1}$.

Substituindo a_n em $x_n = a_n y_n$ ficaremos com $x_n = 2^{n-1}y_n$.

Agora substituímos $x_n = 2^{n-1}y_n$ na recorrência inicial, ficaremos com: $2^n y_{n+1} = 2 \cdot (2^{n-1}y_n) +$

$n \cdot 2^n$

Dividindo a equação $2^n y_{n+1} = 2 \cdot (2^{n-1} y_n) + n \cdot 2^n$ por 2^n , em seguida simplificando, iremos obter:

$$y_{n+1} = y_n + n \quad (\text{A.1})$$

Resolvendo (2.1), utilizando o processo visto no 2º tipo, encontraremos $y_n = y_1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2}$

Para finalizar iremos substituir os valores obtidos em a_n e y_n na equação $x_n = a_n y_n$, assim iremos obter:

$$x_n = 2^{n-1} \cdot \left[y_1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} \right]$$

Como $x_1 = 1$ encontramos $y_1 = 1$

Simplificando $x_n = 2^{n-1} \cdot \left[1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} \right]$ ficamos com $x_n = (n^2 + n) \cdot 2^{n-2}$ que é a solução da recorrência.

Caso particular do 3º tipo: Não homogênea da forma $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + t$, com $t \in \mathbb{R}$

Existe uma maneira mais prática e rápida para resolver esses tipos de recorrências, é fazendo a substituição $a_n = y_n + k$, onde k é uma constante que transforma a recorrência inicial numa homogênea.

Vale ressaltar que todas as recorrências desse "caso particular" podem ser resolvidas utilizando os procedimentos vistos no 3º tipo.

Exemplo

Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 2$.

Resolução:

Vamos utilizar a substituição $x_n = y_n + k$ (1) transformando a recorrência inicial em uma recorrência homogênea.

Substituindo teremos $y_{n+1} + k = 2(y_n + k) + 1 \iff y_{n+1} = 2y_n + k + 1$; para que essa recorrência se torne homogênea basta que o $k = -1$, assim a recorrência passa a ser $y_{n+1} = 2y_n$.

Resolvendo $y_{n+1} = 2y_n$ temos:

$$y_2 = 2 \cdot y_1$$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= 2 \cdot y_2 \\
 y_4 &= 2 \cdot y_3 \\
 &\vdots \\
 y_{n-1} &= 2 \cdot y_{n-2} \\
 y_n &= 2 \cdot y_{n-1}
 \end{aligned}$$

multiplicando todas as igualdades ficamos com $y_n = 2^{n-1} \cdot y_1$

Substituindo em (1)

$$x_n = 2^{n-1} \cdot y_1 + k, \text{ como } k = -1$$

$$x_n = 2^{n-1} \cdot y_1 - 1, \text{ como } x_1 = 2 \text{ teremos:}$$

$$2 = 2^0 y_1 - 1$$

$$\text{logo } y_1 = 3$$

Finalizando

$$x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

A.2 Recorrências Lineares de segunda ordem

Definição: Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja, quando $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Uma recorrência linear de segunda ordem é do tipo: $a_n = h(n)a_{n-1} + g(n)a_{n-2} + f(n)$, onde $g(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem. Além disso, se $f(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário será não homogênea.

Exemplo 1: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n - 7$ (recorrência linear de 2ª ordem não homogênea)

Exemplo 2: $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ (recorrência linear de 2ª ordem homogênea)

A.2.1 Equação característica

Inicialmente iremos abordar apenas as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas. Pegaremos $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, não esquecendo que o $q \neq 0$.

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau, $t^2 + pt + q = 0$, chamada equação característica. A nossa suposição preliminar de que $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

Exemplo

Vamos tomar a sequência de Fibonacci¹. Onde $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $n \geq 3$.

A equação característica será $t^2 - t - 1 = 0$

Resolvendo esta equação do 2º grau obtemos como raízes

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Teorema 1. Se t_1 e t_2 são raízes da equação $t^2 - pt - q = 0$, então $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$ é solução da recorrência $a_n - p a_{n-1} - q a_{n-2} = 0$, para quaisquer valores de c_1 e c_2 .

Demonstração:

Como $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$ é solução da recorrência $a_n - p a_{n-1} - q a_{n-2} = 0$, iremos substituir x_n na recorrência.

Assim:

$$c_1 t_1^n + c_2 t_2^n - p(c_1 t_1^{n-1} + c_2 t_2^{n-1}) - q(c_1 t_1^{n-2} + c_2 t_2^{n-2}) =$$

Aplicando a distributiva e agrupando os termos semelhantes

$$c_1 t_1^{n-2}(t_1^2 - p t_1 - q) + c_2 t_2^{n-2}(t_2^2 - p t_2 - q) =$$

Como t_1 e t_2 são raízes, por hipótese

$$c_1 t_1^{n-2} \cdot 0 + c_2 t_2^{n-2} \cdot 0 = 0$$

Então x_n é solução.

¹No ocidente, a sequência de Fibonacci apareceu pela primeira vez no livro *Liber Abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci, embora ela já tivesse sido descrita por gregos e indianos

Teorema 2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Vamos tentar determinar constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Isso é possível pois $r_2 \neq r_1$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Logo $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência para todo n natural.

Exemplo 2

Retomando o exemplo 1, vamos calcular agora as constantes da solução da sequência de Fibonacci.

Vimos que $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ eram as soluções da equação característica, logo pelo teorema 1:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Para calcular C_1 e C_2 , basta usar os primeiros termos da sequência $F_0 = F_1 = 1$ (teorema 2)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$C_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \quad C_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

Substituindo na solução

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ iremos obter:}$$

$$F_n = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Teorema 3. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$. Quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Demonstração

Se as raízes são iguais então $r = -\frac{p}{2}$

Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p) =$$

$$C_1 r^n \cdot 0 + C_2 n r^n \cdot 0 + C_2 r^n r \cdot 0 = 0$$

Logo é solução da recorrência.

A.3 Aplicação de Recorrência

A.3.1 Juros Simple

No regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo capital. Não existe capitalização de juros nesse regime, pois os juros de um determinado período não são incorporados ao capital para que essa soma sirva de base de cálculo dos juros do período seguinte.

Seja C o capital inicial aplicado a uma taxa i e M o montante final, assim:

$$M_1 = C + C \cdot i$$

$$M_2 = M_1 + C \cdot i$$

$$M_3 = M_2 + C \cdot i$$

$$M_4 = M_3 + C \cdot i$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ M_n &= M_{n-1} + C.i \end{aligned}$$

Somando as igualdades teremos

$$M_n = C + n.C.i$$

Exemplo: Qual o montante de R\$ 5 200,00 aplicados por 1 ano a taxa 0,6% ao mês?

Resolução

$$M_{12} = 5200 + 12.5200.0,006$$

$$M_{12} = 5574,40$$

A.3.2 Juros Compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no dia a dia, no sistema financeiro e no cálculo econômico. Neste regime os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Ou seja, o rendimento gerado pela aplicação será incorporado a ela, passando a participar da geração do rendimento no período seguinte; dizemos então, que os juros são capitalizados.

Seja C o capital M o montante e i a taxa,

Assim

$$M_1 = C + J = C + C.i = C(1 + i)$$

Logo

$$\begin{aligned} M_1 &= C(1 + i) \\ M_2 &= M_1(1 + i) \\ M_3 &= M_2(1 + i) \\ & \vdots \\ M_n &= M_{n-1}(1 + i) \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades acima teremos

$$M_n = C(1 + i)^n$$

Exemplo: A juros compostos de 20% ao mês, qual o montante de R\$ 3 500,00 em 8 meses?

Resolução

$$M_8 = 3500(1 + 0,2)^8$$

$$M_8 = 15049,36$$

A.3.3 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci tem origem nos seguintes problema:

Num pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, e que os coelhos não morrem. Ao fim de 6 meses, quantos casais de coelhos estão no pátio?

Vamos observar a figura abaixo e, em seguida, usando recorrência, montar a fórmula que representa o termo geral da sequência de Fibonacci.

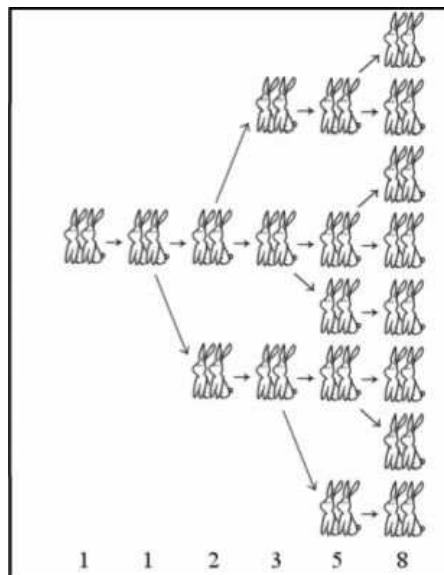


Figura A.1: Coelhos em produção

Fonte: <http://adm.online.unip.br>

Solução: Chamando os termos da sequência de $a_1; a_2; a_3 \dots$ temos:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 2 \text{ (o casal inicial deu origem ao novo casal)}$$

$$a_4 = 3 \text{ (o casal inicial deu origem a 1 novo casal)}$$

$$a_5 = 5 \text{ (o casal nascido em } a_3 \text{ começa a reproduzir)}$$

$$a_6 = 8 \text{ (os casais nascidos em } a_4 \text{ começam a reproduzir)}$$

No fim 6 meses teremos 8 casais

Para escrever os termos geral da sequência, observamos que cada termo a partir do 2º, é a soma de dois anteriores:

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3$$

$$a_5 = a_3 + a_4$$

$$a_6 = a_4 + a_5$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

A.3.4 Problema de Josefo

A solução do problema de Josefo foi o objetivo desta dissertação e foi construída através de investigação junto com os alunos. Como o problema é recursivo, podemos defini-lo com a relação de recorrência:

$$S(1) = 1, S(2k) = 2S(k), S(2k+1) = 2S(k) + 1 \quad (\text{A.2})$$

Para $n=2k$ temos um número par de soldados e $n = 2k+1$, um número ímpar de soldados.

Chegou-se nessa relação A.3.4 a partir dos dados obtidos na tabela:

números de soldados n	número do lugar do sobrevivente S(n)
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1
9	3
10	5
11	7
12	9

Se n for par.

Para $n = 2$, temos $S(2) = S(2 \times 1) = 2S(1) - 1 = 1$ Para $n = 4$, temos $S(4) = S(2 \times 2) = 2S(2) - 1 = 1$ Para $n = 10$, temos $S(10) = S(2 \times 5) = 2S(5) - 1 = 6 - 1 = 5$ Para $n = 20$, temos $S(20) = S(2 \times 10) = 2S(10) - 1 = 10 - 1 = 9$

Se n for ímpar.

Para $n = 3$, temos $S(3) = S(2 \cdot 1 + 1) = 2S(1) + 1 = 3$ Para $n = 5$, temos $S(5) = S(2 \cdot 2 + 1) = 2S(2) + 1 = 3$ Para $n = 11$, temos $S(11) = S(2 \cdot 5 + 1) = 2S(5) + 1 = 6 + 1 = 7$

Para $n = 41$, temos $S(41) = S(2 \times 20 + 1)$. Como o número de soldados é ímpar, segue pela relação de recorrência que $S(2 \times 20 + 1) = 2S(20) + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 19$

Apêndice B

Indução Matemática

B.1 Princípio de Indução Matemática

Princípio de Indução Matemática: Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais \mathbb{N} , tal que 1 pertence a S e sempre que um número n pertence a S , o número $n + 1$ também pertence a S , tem-se que $S = \mathbb{N}$.

Esta simples propriedade fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração em Matemática: a demonstração por indução.

Teorema(Prova por Indução Matemática). Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $S = \mathbb{N}$. Suponha que

(i) $P(1)$ é verdadeira; e

(ii) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n + 1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1

Vejamos como usar esse método para mostrar a validade, para todo natural n , da fórmula

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Observe que $P(1)$ é verdadeira, já que a fórmula é trivialmente válida para $n = 1$. Suponha agora que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira; ou seja, que

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Queremos provar que $P(n + 1)$ é verdadeira. Somando $2n + 1$, que é o próximo número ímpar após $2n - 1$, a ambos os lados da igualdade acima, obtemos a igualdade também verdadeira:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Isso mostra que $P(n + 1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira. Pelo teorema, a fórmula é válida para todo número natural n .

B.1.1 Demonstração da Soma dos termos de uma PA por Indução

Exemplo 2

Neste exemplo, iremos demonstrar a fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros números naturais. Ela foi construída com a participação dos alunos que pode ser vista na Aula 04.

Com base nesta solução resolvida por Gauss chegou-se na fórmula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (\text{B.1})$$

Vamos provar a fórmula utilizando Indução Matemática

Considere a sentença aberta sobre os naturais

$$P(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Note que

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

é verdadeira.

Observe também que

$$P(n) : 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Agora, suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$., tenhamos $P(n)$ verdadeira, isto é, a fórmula B.2 é válida para tal valor de n . Somando $n + 1$ a ambos os lados dessa igualdade, temos que é verdadeira a igualdade

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}, \end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de $P(n + 1)$.

B.1.2 Demonstração por indução da fórmula de Josefo

Iremos demonstrar, por Indução, a fórmula que permite calcular a posição do soldado sobrevivente.

Matematicamente ficou assim:

Se x é o maior inteiro tal que $n = 2^x + y$, com $y < 2^x$, então $w = 2y + 1$

Vamos aplicar o princípio de indução para $n \in \mathbb{N}$

Vamos verificar se $S(2^x) = 1$ é válida para $x \in \mathbb{N}$. Quando $x=0$, temos que a igualdade se verifica, ou seja, $S(2^0) = S(1) = 1$. Então o único soldado encurralado é o próprio sobrevivente.

Por hipótese de indução, suponha que $S(2^x) = 1$, para $x \in \mathbb{N}$. Temos que provar que a fórmula é válida para 2^{x+1} . Usando a definição de relação de recorrência, temos: $S(2^{x+1}) = S(2 \cdot 2^x) = 2S(2^x) - 1$ Por hipótese, $S(2^x) = 1$, então $S(2^{x+1}) = S(2 \cdot 2^x) = 2S(2^x) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Daí, pelo princípio de Indução Matemática, concluímos que para $n = 2^x$, $S(n) = 1$, ou seja, sempre que n representa uma potência de dois, o soldado sobrevivente é o de posição um.

Vamos analisar quando $n \neq 2^x$. Usando a relação de recorrência e observando seu comportamento, chegamos em $S(n)$, tal que $n = 2^x + y$, com $x, y \in \mathbb{N}$.

Analisando a paridade de y que está associada a paridade de n temos:

Se y for par, então

$$S(n) = S(2^x + y) = 2S(2^{x-1} + \frac{y}{2}) - 1.$$

De maneira análoga, se y for ímpar

$$S(n) = S(2^x + y) = 2S(2^{x-1} + \frac{y-1}{2}) + 1.$$

Fazendo alguns casos para $x, y \in \mathbb{N}$ chegamos na fórmula

$$S(n) = S(2^x + y) = 2y + 1, x, y \in \mathbb{N}$$

Esta fórmula foi encontrada com a participação dos alunos na Aula 08.

Vamos usar o princípio de Indução Matemática para mostrar a validade dela sobre $n \in \mathbb{N}$.

Observe que se $x = y = 0$, então $S(1) = S(2^0 + 0) = 2 \times 0 + 1 = 1$, ou seja, se tivermos apenas um soldado, ele próprio é o sobrevivente.

Por hipótese de indução, suponhamos que $S(n) = S(2^x + y) = 2y + 1, x, y \in \mathbb{N}$ para n natural. Vamos mostrar a veracidade desta fórmula para $n+1$ e escrevemos

$$S(n+1) = S(2^x + y + 1) = 2(y+1) + 1$$

Dividindo essa demonstração em dois casos, temos:

1º Caso: $n+1 = 2^x + y + 1$ é par.

$$S(n+1) = S(2^x + y + 1) = 2S(2^{x-1} + \frac{y+1}{2}) - 1$$

Por hipótese de indução

$$S(2^{x-1} + \frac{y+1}{2}) - 1 = 2\frac{y+1}{2} + 1 = (y+1) + 1$$

Daí,

$$S(2^x + y + 1) = 2S(2^{x-1} + \frac{y+1}{2}) - 1 = 2((y+1) + 1) - 1 = 2(y+1) + 1$$

2º Caso: $n+1 = 2^x + y + 1$ é ímpar.

$$S(n+1) = S(2^x + y + 1) = 2S(2^{x-1} + \frac{(y+1)-1}{2}) + 1$$

Por hipótese de indução, temos

$$S(2^{x-1} + \frac{(y+1)-1}{2}) = 2\frac{(y+1)-1}{2} + 1 = (y+1)$$

Daí,

$$S(2^x + y + 1) = 2S(2^{x-1} + \frac{(y+1)-1}{2}) + 1 = 2(y+1) + 1$$

Desta forma, mostramos que a fórmula é válida para $n+1$ e, portanto, pelo princípio de indução Matemática, $S(n) = 2y + 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.