SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EURILANO ALBUQUERUQUER BARBOSA

ARITMÉTICA, A CONTAGEM DO TEMPO, CONGRUÊNCIA NO CALENDÁRIO

PORTO VELHO
2018

EURILANO ALBUQUERUQUER BARBOSA

ARITMÉTICA, A CONTAGEM DO TEMPO, CONGRUÊNCIA NO CALENDÁRIO

Trabalho de conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT no polo da Universidade Federal de Rondônia - UNIR, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática Profissional.

Orientador: Prof. Me. Carlos Maurício de Sousa

PORTO VELHO

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fundação Universidade Federal de Rondônia

Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

A345a Albuquerque, Eurilano.

Aritmética, a contagem do tempo e congruência no calendário / Eurilano Albuquerque. -- Porto Velho, RO, 2018.

62 f. : il.

Orientador(a): Prof. Me. Carlos Maurício de Sousa

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia

1.Calendário. 2.Zeller. 3.Algoritmo de data. 4.Calendário alternativo. 5.Dia da mentira. I. Sousa, Carlos Maurício de. II. Título.

CDU 511

Bibliotecário(a) Cristiane Marina Teixeira Girard CRB 11/897

Eurilano Albuquerque Barbosa

ARITMÉTICA, A CONTAGEM DO TEMPO, CONGRUÊNCIA NO CALENDÁRIO.

Este trabalho foi julgado e aprovado para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT, no Polo da Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR de Porto Velho.

Data da Aprovação: 21/12/2018

Banca examinadora:

Prof. MsC. Carlos Maurício de Souza
Orientador/Presidente
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez
Membro interno. PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Jacson Itikawa
Avaliador Externo. UNIR

“*Os calendários não marcam o tempo do mesmo modo que os relógios. Eles são monumentos de uma consciência histórica.”*

Walter Benjamin

RESUMO

Marcar e prever os acontecimentos relacionados aos ciclos naturais sempre foi um problema de grandes proporções para o homem antigo. Plantar, colher, secas e inundações promoveram uma corrida por vezes tempestuosa para achar alguma forma de encaixar os ritos humanos ao tempo indecifrável. Desde a nossa aurora, olhares se voltaram para o céu na vã esperança de compreender as mudanças que nos cercavam, seus significados e aspirações por tomar dos Deuses para si, o próprio destino. O calendário, como forma de marcação do tempo, foi e é até nossos dias uma ferramenta ímpar na percepção dos fenômenos da natureza; sendo auxiliado de forma magistral pela aritmética modular que se tornou para nosso calendário atual uma espécie de espinha dorsal sem a qual não o teríamos da maneira que o conhecemos; ditando por vezes o nosso ritmo, nossas comemorações, anseios e não exageradamente nossa vida.

Palavras - chave: Aritmética; Função de Zeller; Calendário; Algoritmo de data.

ABSTRAT

Marking and predicting events related to natural cycles has always been a major problem for the ancient man. Planting, harvesting, drought, and flooding led to a sometimes tempestuous run to find some way to fit human rites to indecipherable time. Ever since our dawn, looks have turned to heaven in the vain hope of understanding the changes that surrounded us, their meanings and aspirations to take from the Gods for themselves, destiny itself. The calendar, as a way of marking time, was and still is a unique tool in the perception of the phenomena of nature; being masterfully aided by modular arithmetic that has become for our current calendar a kind of backbone without which we would not have it in the way we know it; phenomena that dictate our rhythm, our celebrations, yearnings and not exaggeratedly our life.

Keywords: Arithmetic; Function of Zeller; Calendar; Date Algorithm.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

Olhando a abóbada celeste, o homem primitivo sempre se deparou com inúmeros padrões, movimentos cíclicos, que puderam ou não ser mensurados. O Sol e Lua foram holofotes aos olhos desse homem, e justamente são esses astros os responsáveis pela abertura da cortina para uma nova era, a era do tempo.

Desde que começou a entender o tempo, o homem sempre procurou observar e procurar padrões principalmente olhando para o céu. Ele criou divisões nos fenômenos conhecidos e classificou esses intervalos, sempre procurando alguma forma de ter um tempo único, um padrão aceitável que fosse eficiente em predizer coisas importantes para a sua época, como tempo de plantar e de colher.

Mas o que é o tempo? Ele realmente existe ou é somente um conceito criado para explicar fenômenos?

Santo Agostinho, em seu Décimo Primeiro livro da coleção Confissões certa vez disse: “O que, então, é o tempo? Se ninguém me fizer essa pergunta, eu sei o que o tempo é, mas se eu desejar explicar a quem me fizer a pergunta, eu não sei mais responder.”

Muitas vezes ele é comparado com o fluir de um rio. Isso era feito na época de Newton, sua correnteza é continua e constante, da nascente à foz, do passado para o futuro, sempre. Um tempo absoluto, verdadeiro e matemático, fluindo uniformemente sem relação com qualquer coisa externa. Assim, é o tempo absoluto de Newton, uma abstração pura.

Já o tempo relativo, aparente e comum é alguma medida de duração perceptível e externa (seja ela exata ou não uniforme) que é obtida através do movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.

Tempo é movimento. É o vai-e-vem de um pêndulo, é o escorrer de grãos de areia, o derretimento de uma vela, é um recipiente que foi furado e perde lentamente seu conteúdo. Medir o tempo é criar padrões confiáveis a partir de movimentos, preferencialmente cíclicos.

Desses movimentos cíclicos observáveis nasce o calendário. E é justamente esse o objetivo desse trabalho, mostrar algumas curiosidades sobre o tempo, alguns calendários, diferentes padrões cronológicos e tentar na medida do possível, através da aritmética modular facilitar e incentivar o cálculo de datas, tornando isso, pela facilidade de exposição uma diversão para as crianças.

Também apresentarei um algoritmo simples, para obtenção do dia da semana de uma data qualquer. Tal algoritmo tem como base os estudos do filósofo alemão Eduard Zeller, e facilitam e instigam a curiosidade de quem a ele for apresentado, gerando questionamentos simples, mas direcionadores tal qual um “como faço isso?”

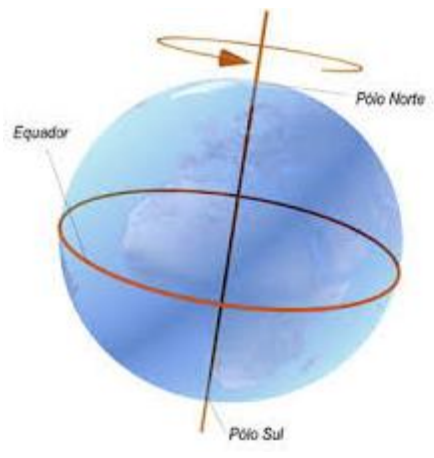
1. DE OLHO NO CÉU

1.1. MOVIMENTOS

1.1.1. A Rotação

Um padrão percebido há milênios pelos antigos, é a rotação terrestre. Ela se dá em torno de um eixo imaginário que liga os polos geográficos da Terra e passa pelo seu centro. Se orientarmos a Terra com o hemisfério Norte para cima (o que é apenas uma convenção antiga), a rotação ocorre da esquerda para a direita; e se pudéssemos olhar a Terra por cima, a partir do polo Norte, veríamos que a rotação da Terra é no o sentido anti-horário (convenção que teve origem nas cátedras setentrionais).

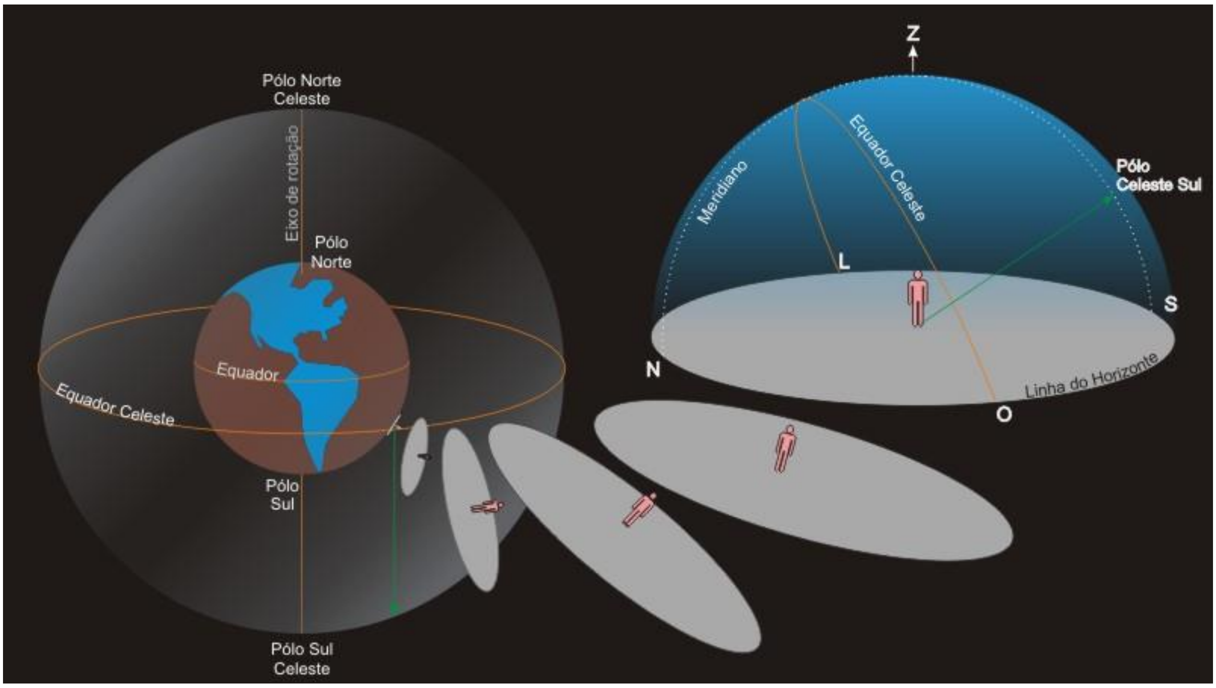
FIGURA 01: Ilustração da rotação da Terra



Fonte: <https://ciencia-hoje.webnode.com.br/_files/200000044-c7395c8332/1_05.jpg>

A rotação é responsável pelo aparente nascer dos astros no horizonte leste (não exatamente no ponto cardeal leste) e pelo ocaso no horizonte oeste. Um ciclo completo do movimento de rotação é chamado, na astronomia, de “dia sideral”. Para ser feita esta contagem de tempo, convém definir uma linha no céu, chamado “meridiano do observador” (ou “meridiano local”). Esta linha é tão somente um semicírculo que contém os pontos cardeais norte e sul, além de um ponto muito especial do céu, o zênite, que em uma explicação simplista nada mais é que o ponto mais alto do céu (o popular “a pino”).

FIGURA 02: Ilustração da abóbada celeste com o equador e o meridiano local



Fonte:<http://astro.if.ufrgs.br/coord/esferaceleste.jpg>

Basta agora escolhermos uma estrela do céu (com exceção do Sol) e medir o tempo que ela leva para cruzar duas vezes seguidas o meridiano local. Este período de rotação é chamado de “dia sideral”. Se fizermos esta mesma experiência com o Sol, definiremos o “dia solar”, que tem duração média de 24 horas.

É claro que nossos antepassados tinham mais facilidade para observar o Sol do que outras estrelas, e é por isso que usamos até hoje o conceito de “dia solar”, e não o de “dia sideral”, muito embora esse “dia solar” aproximado de 24 horas não seja o período de rotação da terra.

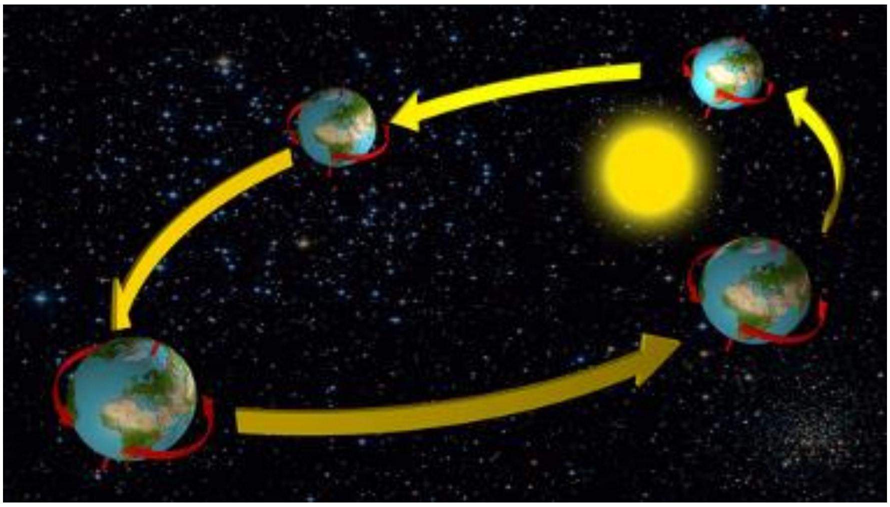
Uma curiosidade sobre a velocidade de rotação do nosso planeta é que ela atinge 1666 km/h no equador. (http://www.siteastronomia.com/planeta-terra).

1.1.2. Revolução

A Revolução e não Translação, nada mais é que o movimento que a Terra realiza em torno do Sol. De um ponto de vista físico, o termo translação está errado, pois Translação, na mecânica (área da física que estuda a movimentação dos corpos), é um movimento paralelo a um determinado eixo. Como a órbita da Terra é uma curva fechada, e obviamente não pode ser paralela a nenhuma reta, fica evidente o motivo de não o utilizar.

A Terra completa uma revolução em aproximadamente 365 dias e 6 horas, com uma velocidade orbital média de 107.200 km/h ou 29,78 km/s. (http://www.siteastronomia.com/planeta-terra)

FIGURA 03: Revolução terrestre

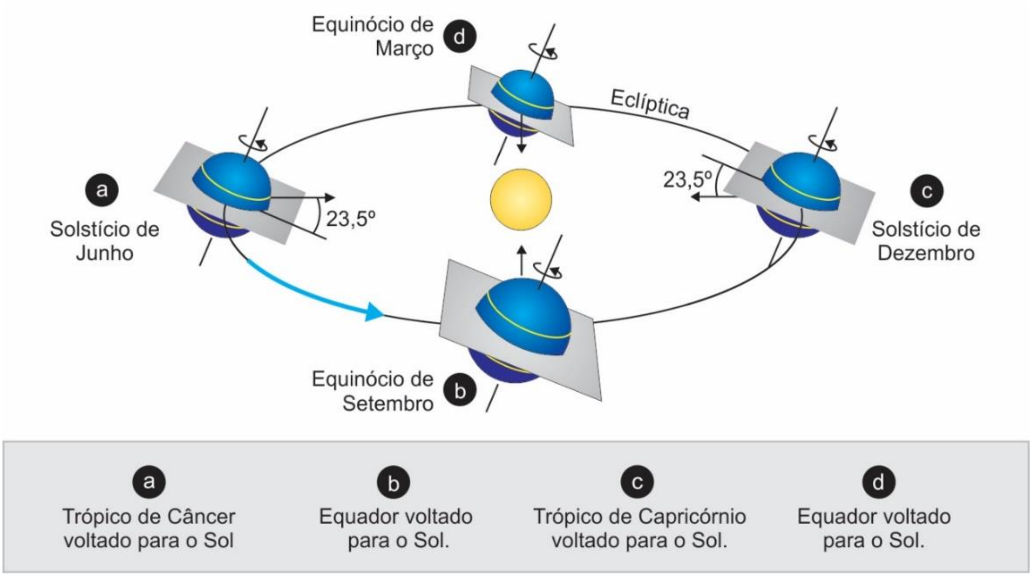


Fonte: <https://s2.static.brasilescola.uol.com.br/img/2014/08/translacao.jpg>

Um ponto relevante que devemos saber é que o eixo da Terra (ao redor do qual nosso planeta realiza sua rotação) é inclinado em relação ao plano de sua órbita em volta do Sol, e essa inclinação é chamada de "obliquidade da eclíptica". Ela tem um valor de 23°27' (http://www.siteastronomia.com/planeta-terra) em relação à direção perpendicular ao plano, e junto ao movimento de revolução, interfere diretamente na quantidade de raios solares recebidos na superfície terrestre. Como resultado, têm-se a existência das estações do ano e uma diferença na duração dos dias e das noites ao longo do ano.

Se observarmos atentamente a posição do Sol durante o ano, verificaremos que em determinadas épocas ele ficará mais “ao sul”, e em outras mais “ao norte”. Aparentemente, durante o ano, o Sol faz um movimento de Sudeste a Noroeste no horizonte terrestre. Mas, na verdade, é somente a forma como a Terra recebe os raios solares. A FIGURA 04 é uma representação das estações no hemisfério sul.

FIGURA 04: Revolução da Terra e Obliquidade da Eclíptica



Fonte: <http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2010/Aula3-132.pdf>

O Solstício de Junho (Sol na vertical com o Trópico de Câncer) marca oficialmente início do Inverno e, é nesse dia que ocorre a maior noite do ano. Esse Solstício sempre acontece por volta do dia 20 ou 21 de junho.

O Equinócio de Setembro (Sol na vertical com o Equador) marca o início da primavera e ocorre nos dias 22 ou 23 de setembro, e nessa data o dia e a noite têm a mesma duração.

Solstício de Dezembro (Sol na vertical com o Trópico de Capricórnio) marca oficialmente o início do verão e temos então o dia mais longo do ano. O solstício de verão acontece nos dias 21 ou 22 de dezembro

O Equinócio de Março (Sol na vertical com o Equador) marca o início do outono e ocorre nos dias 20 ou 21 de março, e nessa data o dia e a noite têm a mesma duração.

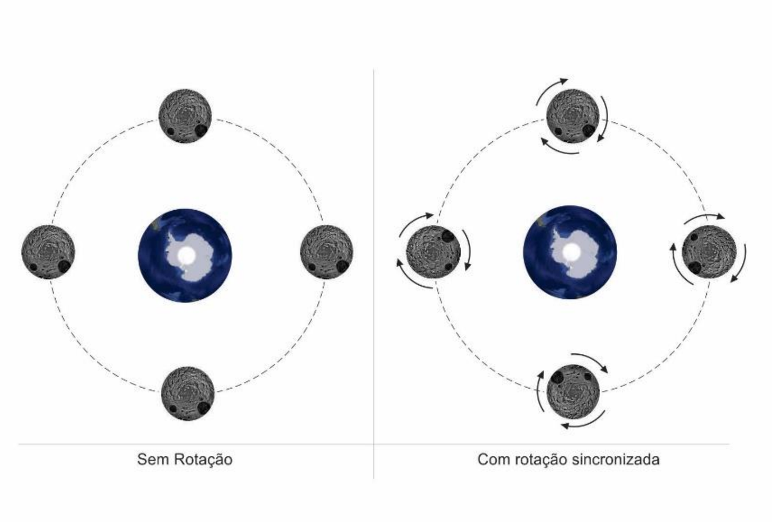
É a “obliquidade da eclíptica” a responsável pelo dia ártico e antártico com duração de 6 meses. Note que de (a) até (c) o hemisfério norte está iluminado e o Sul na penumbra e de (c) para (a) invertem. A duração média da revolução da Terra é de 365 dias e 6 horas.

1.1.3. Lunação

Obviamente, o termo “lunação” se refere a um movimento da Lua, e não da Terra. Mas sua importância na construção do calendário faz com que mereça ser explanado.

A Lua realiza tanto rotação (movimento ao redor do próprio eixo) como a revolução (movimento em torno da Terra). Uma curiosidade sobre ambos, é que eles têm o mesmo período (é um fenômeno chamado de “movimento síncrono”, que não é exclusivo da nossa Lua e é provocado pela conservação do momento angular). A Conservação do Momento Angular acontece quando a grandeza física, também chamada de Quantidade Momento Angular, não varia, ou seja, permanece constante durante o movimento de rotação de um corpo em torno de um eixo.

FIGURA 05: Lua com a mesma face voltada para a Terra

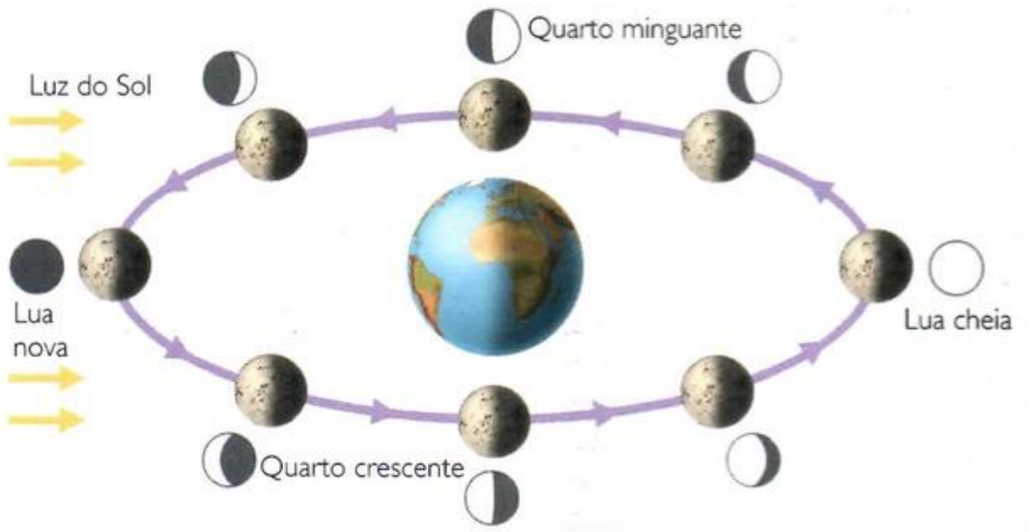


Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/lua/rot-sinc-lua3.jpg>

O movimento síncrono é a razão pela qual só vemos a mesma face do nosso satélite. Já a revolução da Lua ao redor da Terra faz com que, ao longo desse percurso, vejamos nosso satélite de formas distintas. Cada aspecto diferente da Lua é chamado de “fase”. Como o movimento da Lua é contínuo, a cada instante sua orientação em relação ao Sol (que a ilumina) muda. Há, portanto, infinitas fases da

Lua. Mas são apenas quatro que têm nome próprio: Lua nova, quarto crescente, cheia e quarto minguante.

FIGURA 06: Fase da Lua



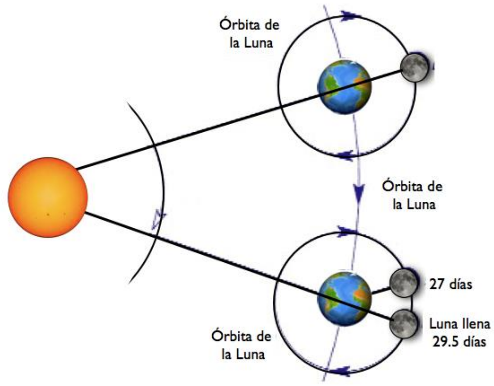
Fonte: <http://tudo-mais.hi7.co/tudo-mais/tudo-mais-570734398b22a.jpg>

Como é mais fácil ser acompanhada as fases lunares, é conveniente definir o período entre uma fase e outra, igual e consecutiva. Este período é chamado de lunação (ou “mês sinódico”).

A lunação é um intervalo temporal compreendido entre duas conjunções consecutivas entre a Lua e o nosso Sol, não apresenta um valor constante variando entre 29 dias e 6 horas e 29 dias e 20 horas. Seu valor médio é de 29 dias, 12 horas e 44 minutos. É do período da revolução sinódica da Lua que origina os calendários lunares cujos meses alternam 29 dias e 30 dias e o seu valor médio difere 44 minutos do mês sinódico.

A razão da diferença de duração entre o mês sideral (período que a Lua demora a dar uma volta completa em torno da Terra) e o mês sinódico pode ser entendida melhor observando a FIGURA 07. É bem simples o seu entendimento, pois ao mesmo tempo em que a Lua gira em torno da Terra, a Terra também gira em torno do Sol. Dessa forma, embora já tenha realizado uma volta completa ao redor da Terra, a Lua terá que avançar um pouco mais para ocupar a mesma posição relativa à Terra e ao Sol, perfazendo um total de 29,530589 dias, que é o valor do mês sinódico

FIGURA 07: Lunação



Fonte: < https://otlana.files.wordpress.com/2012/08/luna-blog-001-001.jpg>

1.2. IDEALIZANDO PADRÕES DE TEMPO

Um calendário nada mais é do que uma teoria astronômica simplificada que permite fazer uma medição cronológica do tempo, organizando todos os acontecimentos numa escala temporal. Mas uma escala temporal precisa de uma unidade e de uma origem. A unidade básica dos calendários é o dia solar médio, expressa por seus múltiplos e submúltiplos. Já a sua origem é um acontecimento escolhido arbitrariamente, normalmente proléptico, o que significa que é anterior à data definida como a origem.

O grande problema na construção de um sistema de contagem de tempo é a incomensurabilidade. Este termo descreve a propriedade que certas grandezas têm de não serem múltiplas entre si (ou seja, não podem ser medidas em uma mesma unidade e, portanto, não podem ser comensuradas).

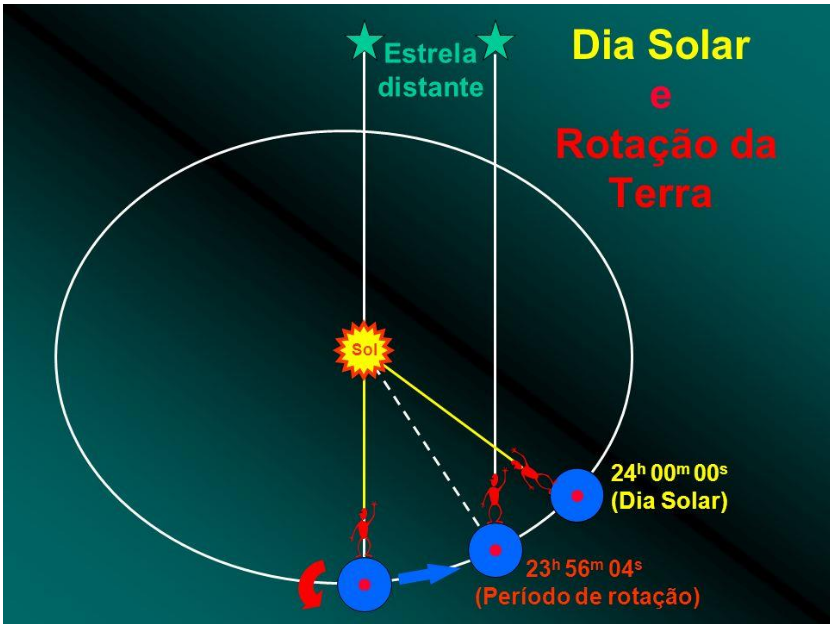
Como vimos os movimentos astronômicos que nos servem de base na criação do calendário são a rotação (que nos dá a unidade de medida de tempo chamada dia), a lunação (mês) e a revolução (ano).

1.2.1. O dia

É definido como dia solar ao intervalo temporal entre duas passagens consecutivas do nosso Sol pelo meridiano de um determinado lugar, e esse valor varia entre 23 horas 59 minutos 39 segundos e 24 horas e 30 segundos. Tais variações são ocasionadas pelas desigualdades que afetam a ascensão reta do Sol, obrigando-nos pela utilização do dia civil com uma duração de 24 horas. Este dia, começa à meia-noite e termina à meia-noite seguinte e é definido em função do dia solar médio. Já dia que toma como referência uma estrela fixa é o dia sideral e dura 23 horas e 56 minutos aproximadamente.

O dia solar é o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano de um lugar, varia entre 23 horas 59 minutos 39 segundos e 24 horas e 30 segundos. Estas variações, devidas às desigualdades que afetam a ascensão reta do Sol, obrigam-nos pela utilização de um dia civil, com a duração de 24 horas. Este dia, definido em função do dia solar médio, começa à meia-noite e termina à meia-noite seguinte. Já Dia sideral, toma como referência uma estrela fixa e dura 23h56m aproximadamente.

FIGURA 08: Dia solar e dia sideral

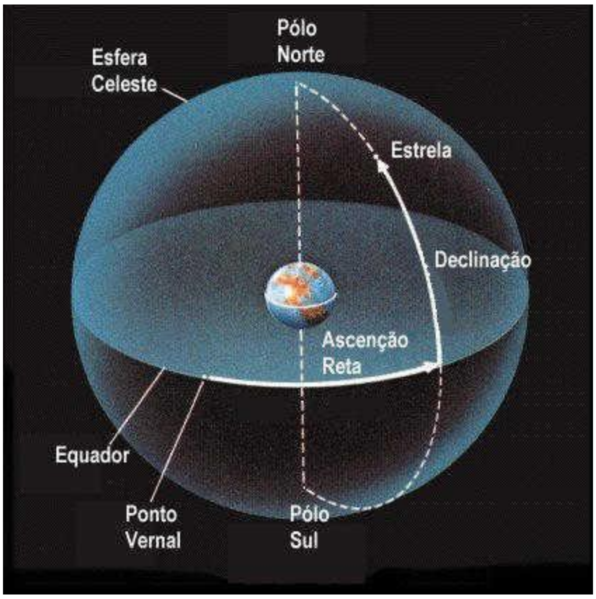


Fonte: <https://4.bp.blogspot.com/-qG_HxFKzfJ4/V4D9ex6xz-I/AAAAAAACwIw/MbziFhdBaU8ZcPpULR8QbEcbNIxlxiVoACLcB/s1600/2%2Bd%25C3%25ADa%2Bsolar.jpg>

Para se localizar um ponto na Terra usamos latitude e longitude. Na Terra, a latitude é à distância ao Equador medida ao longo do meridiano de Greenwich. Esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0º e 90º para Norte (N) ou para Sul (S). A longitude é à distância ao meridiano de Greenwich medida ao longo do Equador. Esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0º e 180º para Leste (E) ou para Oeste (W). O sistema de coordenadas celestes funciona da maneira análoga, mas a latitude e longitude são chamadas de declinação e ascensão reta respectivamente.

A Declinação é o ângulo medido entre um ponto na esfera celeste e o equador celeste. Assim como a longitude de um ponto na Terra é medir o ângulo entre o meridiano do lugar e um meridiano de referência, a ascensão reta de uma estrela no céu se calcula medindo o ângulo entre o Ponto Vernal e o meridiano da estrela medido sobre o equador celeste, no sentido para o leste. O ponto zero na Terra é a intersecção do meridiano de Greenwich e o equador que é o ponto de origem para a longitude terrestre. Já o ponto de origem para a ascensão reta é chamado de equinócio vernal. Este é um dos dois pontos onde o equador celeste e a eclíptica se cruzam. O equinócio vernal é o equinócio de março (início da primavera no hemisfério norte e no outono no hemisfério sul).

FIGURA 09: Ascenção Reta e Declinação



Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/ardec.jpg>

1.2.2. O Ano

O período de revolução da Terra em torno do Sol é igual a 365 dias, 6 horas, 9 minutos e 9,8 segundos para sermos mais exatos e é chamado de ano sideral.

Já o tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do Sol médio pelo ponto vernal é chamado de ano trópico e seu valor é atualmente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 45 segundos aproximadamente, sendo mais curto que o ano sideral devido a precessão dos equinócios. É justamente esse ano trópico que nos permite reconhecer o retorno das estações e que intervém nos calendários solares.

Há também os calendários lunissolar, que procuram harmonizar a lunações e a revolução trópica.

1.2.3. A semana

Segundo Manuel Nunes Marques em “Origem e Evolução do Nosso Calendário”, são quatro as grandes unidades de tempo usadas em nosso dia-a-dia. O ano e o dia vêm dos movimentos da Terra (revolução e rotação, respectivamente). O mês é originado pelo período de lunação. Falta então explicar a semana, que também tem origem astronômica, embora menos direta que as outras três unidades de medida de tempo.

Vimos que a Lua tem infinitas fases, uma a cada instante de tempo. Mas, na maioria dos idiomas, apenas quatro delas possuem nomes próprios (Lua nova, quarto crescente, Lua cheia e quarto minguante). É bastante comum nos referirmos às “quatro fases da Lua”, como se só estas existissem. Não é isso, mas como são as únicas com nome próprio, são estas que mais chamam nossa atenção.

São necessários aproximadamente sete dias para a Lua ir de uma fase a outra (fases que tem nome) e parece que isso transforma o período de sete dias em algo que merece ser contabilizado. Uma unidade de tempo composta por sete dias consecutivos era, ainda na Antiguidade, quase universal.

Além disso, eram conhecidos sete objetos celestes que mudavam de posição em relação às estrelas (os planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, além do Sol e da Lua). Os babilônios foram os primeiros a nomear os dias deste curto período lunar (entre uma fase e outra) em homenagem a tais objetos.

Esta prática foi adotada pelos romanos e por outros povos europeus influenciados por eles. Além disso, os romanos também batizaram este período de “sete manhãs”, “*Septmana*” em latim. Na tabela abaixo, vemos os dias da semana em alguns dos principais idiomas.

FIGURA 10: Dias da Semana em Algumas Línguas

Latim eclesiástico	Português	Castelhano	Catalão	Francês	Italiano	Latim vulgar	Deus Romano
Feria secunda	Segunda-feira	Lunes	Diluns	Lundi	Lunedi	Dies Lunae	Lua
Feria tertia	Terça-feira	Martes	Dimarts	Mardi	Martedi	Dies Martis	Marte
Feria quarta	Quarta-feira	Miércoles	Dimecres	Mercredi	Mercolodì	Dies Mercurii	Mercúrio
Feria quinta	Quinta-feira	Jueves	Dijous	Jeudi	Geovedì	Dies Jovis	Júpiter
Feria sexta	Sexta-feira	Viernes	Divendres	Vendredi	Venerdì	Dies Veneris	Vénus
Sabbatum	Sábado	Sábado	Dissabate	Samedi	Sabato	Dies Saturni	Saturno
Dominica Dies	Domingo	Domingo	Diumenge	Dimanche	Domenica	Dies Solis	Sol

Fonte: <https://idzero.files.wordpress.com/2009/06/tabela-dias-da-semana10.jpg>

A língua portuguesa não dividiu os dias segundo o nome dos planetas porque no começo do cristianismo a Páscoa durava uma semana, período em que o trabalho era reduzido ao mínimo possível e o tempo era destinado exclusivamente a orações. Esses dias eram os “*feriaes*”, ou seja, feriados. Para enumerar os “*feriaes*”, começou-se pelo sábado, assim como os hebreus faziam. O dia seguinte ao sábado seria “*feria-prima*” (domingo), depois seria o “*segunda-feria”* (segunda-feira) e assim por diante. O sábado tem sua origem em “*Shabbath*”, dia do descanso para os hebreus.

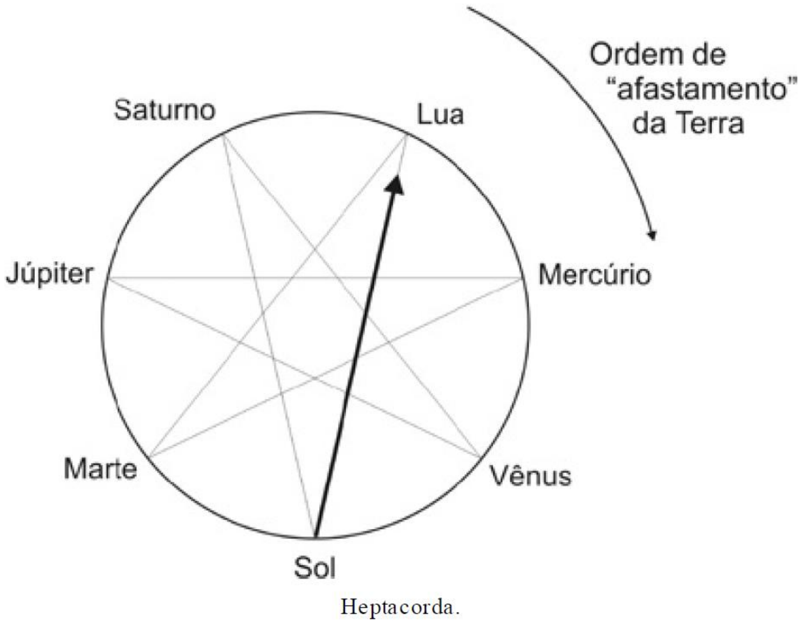
Os dias da semana estão ordenados da seguinte maneira: dia do Sol, dia da Lua, dia de Marte, dia de Mercúrio, dia de Júpiter, dia de Vênus e dia de Saturno. Aparentemente esta ordem não tem nenhum sentido.

No sistema aristotélico, a ordem de afastamento dos “planetas” em relação à Terra era: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Esta ordem foi corretamente deduzida pela velocidade destes astros na esfera celeste.

Na Antiguidade, dedicava-se cada hora a um planeta que a influenciaria. Os planetas eram ordenados do mais afastado para o mais próximo; aquele que, acreditava-se, influenciava a primeira hora do dia era também o planeta daquele dia.

A primeira hora do primeiro dia era dedicada ao Sol, o mais importante astro da esfera celeste. Este dia era, portanto, o "dia do Sol". Seguindo o ordenamento aristotélico, mais próximo do que o Sol está Vênus. Então a hora seguinte era dedicada a ele. A terceira hora era de Mercúrio; a quarta, da Lua; a quinta, de Saturno; a sexta, de Júpiter; e a sétima, de Marte. A partir da oitava hora, o ciclo era repetido.
Para saber qual seria a primeira hora (e as seguintes) do dia, e por consequência o "planeta do dia", usava-se a "estrela dos magos", ou heptacorda, uma figura cabalística.

FIGURA 11: Heptacorda



Fonte: <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSUkYy2CTwaO6zWZVC37thMctHICYmVEERpeqUFMWm48NrX3bDg>

Foi o imperador Flávio Constantino (280-337), que após se converter ao cristianismo, substituiu a denominação de "*Dies Solis*" ou "*Feria-prima*" para "*Dominica"* (dia do Senhor), que por sua vez foi adotada pelos povos latinos.

A semana é cíclica e seu período é de 7 dias. Podemos então representar tais dias no conjunto dos restos positivos de 7, e por conveniência e semelhança de nomes temos de acordo com o resto: (1) domingo, (2) segunda-feira, (3) terça-feira, (4) quarta-feira, (5) quinta-feira, (6) sexta-feira e (0) sábado.

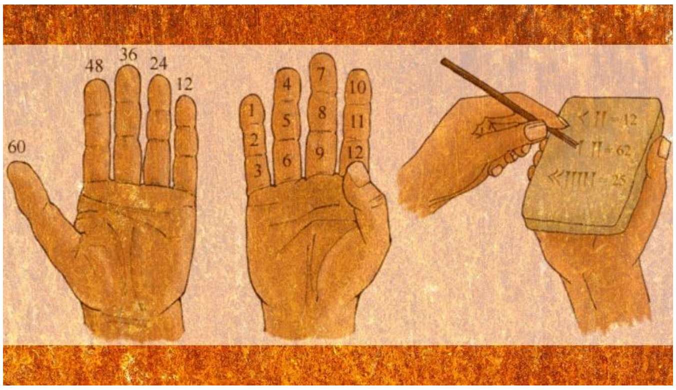
1.2.4. O número 12

Em nossa contagem atual de tempo encontramos vários múltiplos do 12. São 12 meses em um ano, 24 horas num dia, 60 minutos em uma hora, 60 segundos num minuto. Mas porque a importância do número 12?

As primeiras teorias tentando elucidar esse fato estão relacionadas diretamente com a Lua. Em um ano, a Lua fica cheia 12 vezes, e seria natural dividirmos um ano em 12 pedaços (os meses). Mas isso não é exatamente correto. A incomensurabilidade, sobre a qual falamos, nos garante que haverá anos com 12 luas cheias e anos com 13 luas cheias gerando uma pequena discrepância.

Já o historiador da matemática Georges Ifrah apresenta uma tese interessante. Ele argumenta que os sumérios (reconhecidamente a primeira civilização a estudar os céus para fins práticos) usavam uma inusitada forma de contar os números por meio dos dedos.

FIGURA 12: Sistema de Contagem Sumério



Fonte: <https://www.terraoculta.com.br/images/Media/Artigos/Geometria_Sagrada/mao_base_60.jpg>

As mãos dos sumérios formavam um ábaco improvisado, que marcava, sem muito esforço, qualquer número de 1 a 60. Com uma aritmética posicional de base 12, não é por acaso que as divisões arbitrárias que inventaram para a contagem do tempo sejam múltiplas deste número.

2. CALENDÁRIOS ANTIGOS

2.1. CHINÊS

O calendário chinês é conhecido atualmente como o calendário mais antigo que se tem registro na história da humanidade. Ele foi o inspirador de diversos calendários orientais e é diferente do nosso, pois enquanto o nosso é baseado no movimento do sol, o chinês é baseado no movimento solar e no lunar, sendo, portanto, considerado como um calendário lunissolar e astronômico. Para a sua elaboração, era necessário conhecer os momentos em que acontecem certos fenômenos astronômicos, ou seja, este calendário necessita de um calendário auxiliar.

O calendário chinês surgiu com o terceiro herói cultural, Huang-ti, o Senhor Amarelo ou Senhor Augusto. Ele foi introduzido em 2.637 a.C., baseado nas fases da lua e, posteriormente, no ano lunissolar de 12 meses. Cada mês pode ter 29 ou 30 dias e o ano tem 354 ou 355 dias.

Comporta dois ciclos: um de 12 anos (354 ou 355 dias, ou 12 meses lunares) e um de sete anos (com anos de 383 ou 384 dias, ou 13 meses). Os chineses inserem meses adicionais em intervalos fixos para resolver a diferença entre o ano solar (365 dias) e o ano lunar (354 dias). O ano novo começa sempre em uma lua nova, entre 21 de Janeiro e 20 de Fevereiro. No ano de 2017, por exemplo, o ano novo chinês foi celebrado em 28 de janeiro e nesse ano de 2018, o seu início se deu em 16 de fevereiro.

Os meses do calendário chinês começam no dia em que ocorre a Lua Nova astronômica e os dias têm início à meia-noite. Para se conseguir estabilizar as estações neste calendário, é intercalado, ocasionalmente, um décimo terceiro mês, pelo que os anos normais têm 12 meses e os anos abundantes ou embolísmicos que têm 13 meses, ou seja, 13 lunações.

E com esse o calendário, onde cada ano recebe o nome de um dos 12 animais: galo, cão, porco, rato, búfalo, tigre, gato, dragão, serpente, cavalo, cobra e macaco, surgiu o horóscopo chinês, os 12 signos animais ou subdivisões do mundo (que formam o Astral Chinês).

Os anos do Dragão repetem-se a cada 12 anos. O ano do Dragão Dourado ocorre uma vez a cada 3000 anos (ocorreu no nosso ano 2000) e é suposto trazer a harmonia completa dos cinco elementos da filosofia chinesa (metal, madeira, água, fogo e terra), se refletindo em um sentimento de felicidade para todos.

Uma curiosidade, é que diferentemente da maioria dos outros calendários, o calendário chinês não conta os anos em uma sequência infinita. Ao invés disso, os anos têm nomes que se repetem a cada 60 anos.

2.2. HEBREU E EGÍPCIO

Os calendários mais antigos do velho continente são o hebreu e o egípcio, ambos com anos de 360 dias, diferindo do “ano lunar”, período de 12 lunações existentes no ano trópico, desconhecido na época.

Não se sabe como os hebreus dividiam o ano, mas é sabido que eles já utilizavam o conceito de semana. Já os egípcios dividiam o ano em 12 meses de 30 dias. Com a insatisfação com o ano de 360 dias, eles aperfeiçoaram o seu calendário seguindo caminhos divergentes. Os hebreus voltaram-se para o sistema lunissolar e ajustaram os meses com o movimento sinódico da Lua coordenando o ano com o ciclo das estações, caminho diferente seguiu os egípcios, que abandonaram o sistema lunar para seguir unicamente o ciclo das estações.

Depois de muitas reformas, por volta do ano 5000 a.C., os egípcios estabeleceram um ano civil invariável de 365 dias, conservando a tradicional divisão em 12 meses de 30 dias e 5 dias adicionais no fim de cada ano.

O atraso aproximado de 6 horas por ano em relação ao ano trópico motivou que, lentamente, as estações egípcias se fossem atrasando, originando uma rotação destas por todos os meses do ano. Por esse motivo, os egípcios começaram uma cuidadosa observação no ano 2783 a. C., comprovando que em 1323, também a.C., as estações voltavam a coincidir nas mesmas datas do calendário. A este período de 1461 anos egípcios e que corresponde a 1460 anos julianos, deu-se o nome de período “sotíaco”, de “Sothis” (Sirius em Grego), em cujo nascimento helíaco, se basearam as observações.

O nascer helíaco de um corpo celeste é o momento em que este torna-se visível no horizonte imediatamente antes do nascer do Sol.

Apesar desta comprovação, os egípcios não fizeram qualquer correção no seu ano e um segundo período “sotíaco” seria iniciado em 1323 a.C. Porém, no ano 238 a.C., houve uma tentativa para reformar o calendário egípcio e colocar o mesmo de acordo com o ciclo das estações, mas sem êxito, devido à oposição de determinadas classes sacerdotais. Só no ano 25 a.C. foi adotada a reforma juliana, introduzindo, de 4 em 4 anos, 6 dias adicionais em vez de 5.

2.3. GREGO

Os gregos através de observações definem um ano lunar contendo 354 dias e esse ano foi dividido em 12 meses de 29 e 30 dias. Esse ano grego tinha 11 dias e 6 horas a menos se comparado ao ano trópico.

Em 432 a.C. aproximadamente, um astrônomo chamado Méton descobre que a cada 19 anos as mesmas fases lunares acontecem nos mesmos dias do ano. Esse ciclo de 19 anos ficou conhecido como ciclo metônico em sua homenagem. De acordo com esse ciclo, os anos 3, 6, 9, 11, 14, 17 e 19 têm 13 meses e os demais 12 meses, o que permitiu uma concordância lunissolar sem precedentes até então

2.4. ROMANO

O antigo calendário romano tinha 304 dias que eram divididos em 10 meses.

TABELA 01: Meses do Ano, Calendário Primitivo

MÊS	NOME	CARACTERÍSTICA
1	MARTIUS	31 dias, dedicado a Marte
2	APRILIS	30 dias, dedicado a Apolo
3	MAIUS	31 dias, dedicado a Júpiter
4	JUNIUS	30 dias, dedicado a Juno
5	QUINTILIS	31 dias (n.º ordinal)
6	SEXTILIS	30 dias
7	SEPTEMBER	30 dias
8	OCTOBER	31 dias
9	NOVEMBER	30 dias
10	DECEMBER	30 dias

É um calendário sem base astronômica pois não existia nenhuma relação com os movimentos solar ou lunar o que ocasionou no tempo de Rômulo algumas intercalações no calendário para que esse coincidisse com os períodos astronômicos. Ele foi reformulado por Numa Pompílio, que, mudou a duração do ano para 12 meses, dedicando a “Jano”, deus da mitologia romana que tem sua figura associada a portas, transições, inícios, o primeiro mês do ano que foi chamado de “Januarius”, e em último lugar o mês de “Februarius”, dedicado à Deusa Juno Februata ou Juno Februa. A Sua festa era celebrada a 14 de fevereiro. Ela era a Deusa da “febre” de amor tanto quanto das mulheres e do casamento. Na sua festa, os homens solteiros participavam dum sorteio tirando bilhetinhos de papel de dentro dum recipiente. Nesses bilhetes estavam escritos os nomes das mulheres solteiras da comunidade. O par mantinha uma relação temporária durante os jogos eróticos que tinham lugar durante o festival, permanecendo juntos durante os doze meses seguintes. Estas práticas davam por vezes lugar a relações duradouras. Curiosamente, a denominação “Februa”, “Februlis”, “Februta” ou “Februalis” referem-se à Deusa Juno no seu aspeto “Purificadora”, num sentido diametralmente oposto àquele dado posteriormente pelo Cristianismo. Este foi o motivo por que o mês de “Februarius” ser colocado no fim.

Numa Pompílio modificou também a duração dos meses, deixando o calendário de uma forma estranha na distribuição dos dias devido à superstição dos romanos que tomavam por nefastos os números pares.

TABELA 02: Calendário de Numa Pompílio

MÊS	NOME	DIAS
1	JANUARIUS	29
2	MARTIUS	31
3	APRILIS	29
4	MAIUS	31
5	JUNIUS	29
6	QUINTILIS	31
7	SEXTILIS	29
8	SEPTEMBER	29
9	OCTOBER	31
10	NOVEMBER	29
11	DECEMBER	29
12	FEBRUARIUS	27
	TOTAL	354

Devido a essa superstição, eles aumentaram a duração do ano para 355 dias atribuindo o dia extra a Februarius que passou então a ter 28 dias.

Nessa época, os romanos sentiram também a necessidade de coordenar o seu ano lunar com o ciclo das estações e estabeleceram um rudimentar sistema lunissolar, introduzindo no seu calendário, a cada dois anos, um novo mês: “Mercedonius”, chamado dessa forma por ser introduzido no calendário na época em que eram outorgadas mercês aos escravos (que nada mais era que uma gratificação voluntária pelos serviços prestados). Tinha uma duração alternada de 22 ou 23 dias, intercalava-se entre 23 e 24 de Februarius.

O grande problema é que essas intercalações começaram a serem feitas de acordo com vontades de particulares e políticos, o ano era alongado ou encurtado sem critérios de tal modo que o ano já havia adiantado em 3 meses se comparado ao ciclo das estações.

2.5. JULIANO

Ao chegar no poder Júlio César encontrou um calendário que representava a desordem. Como precisava organizar a marcação do tempo para que seus feitos fossem registrados corretamente ele então chamou o astrônomo grego Sosígenes, membro da escola de Alexandria para que criasse um calendário melhor.

Sosígenes observou que o calendário romano já estava adiantado em 67 dias em relação ao ciclo das estações. Foi então que Júlio César ordenou que naquele ano (708 de Roma, ou 46 a.C.), além do Mercedonius de 23 dias, fossem adicionados mais dois meses entre November e December, um de 33 dias, outro de 34 dias. Esse ano teve 445 dias foi o maior de todos os tempos e ficou conhecido como o “Ano da confusão”, pois, devido as distâncias nos domínios de Roma, em alguns lugares a ordem chegou com tanto atraso que já se havia começado um novo ano.

Ficou estabelecido que em ciclos de 4 em 4 anos teríamos 3 anos de 365 dias e um de 366 dias para compensar as quase 6 horas de diferença para o ano trópico. Foi suprimido o Mercedonius e Februarius passou a ser o segundo mês do ano.

TABELA 03: Calendário Juliano

MÊS	NOME	DIAS
1	JANUARIUS	31
2	FEBRUARIUS	29 ou 30
3	MARTIUS	31
4	APRILIS	30
5	MAIUS	31
6	JUNIUS	30
7	QUINTILIS	31
8	SEXTILIS	30
9	SEPTEMBER	31
10	OCTOBER	30
11	NOVEMBER	31
12	DECEMBER	30

A distribuição dos dias dos meses ficou alternado entre 30 e 31 dias, de acordo de que o mês fosse par ou ímpar, e nos anos bissextos Februarius ficaria com 30 dias e com 29 dias nos demais anos. Posteriormente foi reconhecido a importância da reforma do calendário por Júlio César e o sétimo mês, Quintilis, passou a ser chamado Julius. Algum tempo depois o Senado romano decretou que o oitavo mês, Sextilis, fosse chamado de Augustus, e para que o mês dedicado a César Augusto não tivesse menos dias do que o dedicado a Júlio César, o mês de Augustus passou a ter 31 dias. Este dia foi retirado de Februarius. Foi também reduzido para 30 dias os meses de September e November para que não tivessem tantos meses seguidos de 31 dias e October e December passaram a ter 31 dias.

TABELA 04: Calendário Juliano Reformado

MÊS	NOME	DIAS
1	JANEIRO	31
2	FEVEREIRO	28 ou 29
3	MARÇO	31
4	ABRIL	30
5	MAIO	31
6	JUNHO	30
7	JULHO	31
8	AGOSTO	31
9	SETEMBRO	30
10	OUTUBRO	31
11	NOVEMBRO	30
12	DEZEMBRO	31

O dia extra de Februarius, que acontecia nos anos bissextos, era intercalado, como era feito com o mês Mercedonius, sempre entre os dias 23 e 24. Mas uma vez que Februarius começou a ter 28 dias nos anos comuns, o seu 23º dia era o 6º dia antes das calendas de março, logo, o dia seguinte, que era intercalado de 4 em 4 anos, passou a ser chamado de “bissextocalendas” (*bissextus dies ante calendas Martii*). Daí vem o nome dia bissexto e hoje de 4 em 4 anos o ano bissexto.

Inicialmente, o calendário juliano conservou as letras “nundinais”, e a divisão dos meses pelas calendas, nonas e idos e a nomenclatura ordinal dos dias.

Se o fato de o calendário romano não estar em pleno acordo com o ciclo sazonal já nos traz problemas, a própria maneira como os romanos contavam os dias num determinado mês pode ser um complicador adicional para nossas mentes modernas. De forma distinta das nossas contagens numéricas (o mês começa no dia 1º, sendo seguido pelo dia 2, depois pelo 3 e assim por diante), os romanos dividiram os meses em três períodos específicos e faziam as contagens dos dias em relação ao início de cada um destes períodos.

A primeira parte de um mês chamava-se "calendas". (Não por acaso, o dispositivo de contagem de tempo acabou ganhando o nome popular de "calendário", ou seja, uma coleção de calendas.) Das três seções que compunham o mês romano, esta era a mais longa. Originalmente, ela começava no dia seguinte à Lua cheia e se estendia até depois da Lua nova.

A Lua nova, por sua vez, marcava o início de um novo mês, e o dia em que ela ocorria era chamado de "dia de calendas". Parece confuso, uma vez que o "dia de calendas" é o primeiro dia de um mês, mas na verdade anunciava o último dia do período de calendas do mês anterior.

Quando a neomênia era avistada (primeiro filete de Lua crescente, logo após a Lua nova), começava a segunda parte do mês: as nonas. (Na verdade, as nonas eram a primeira parte do mês, pois as calendas se referiam ao mês anterior) O nome é autoexplicativo, e refere-se ao nono dia do mês.

Assim como nas calendas, o "dia de nonas" não representava o início deste período.

O "dia de nonas" corresponde ao quarto crescente da Lua; ao avistar a neomênia no céu, o pontífice fazia alguns cálculos para tentar prever quantos dias faltavam para o quarto crescente. Se o sacerdote, por exemplo, acreditasse que após a neomênia ainda haveria seis dias até o quarto crescente, o dia inicial das nonas passava a ser chamado de "sexto dia antes do dia de nonas" (daquele determinado mês). Em latim e tomando o exemplo de Martius, esse dia seria "VI antediem nonus Martii". (O dia seguinte seria "V antediem nonus Martii", e assim por diante). Eles usavam contagem regressiva para registrar os meses.

A última seção que compunha um mês era chamada de idos. O “dia de idos” correspondia ao dia da Lua cheia (que era quando começavam as calendas, respeitando o método da contagem regressiva).

Em resumo: o mês começava no “dia de calendas”, Lua nova. Os dias seguintes eram chamados de “dias antes de nonos”, sendo o “dia de nonos” o dia do quarto crescente. Após o “dia de nonos”, os dias passavam a ser chamados de “dias antes de idos”, e culminavam no “dia de idos”, a Lua fica cheia. Depois da Lua cheia vinham os “dias antes das calendas”, que fechavam o mês corrente e davam início a um novo mês em um novo “dia de calendas”, novamente Lua nova.

Mas, o ano de 365,25 dias do calendário juliano é 11 minutos e 14 segundos mais longo do que o ano trópico. Esse acúmulo desses minutos e segundos equivale a um dia em 128 anos e aproximadamente de três dias em 400 anos.

2.6. GREGORIANO

O acumulo desses minutos no calendário juliano fez com que o equinócio de primavera ocorresse no dia 25 de março fazendo-se necessário uma nova reforma do calendário, sendo essa chamada de reforma gregoriana. Tinha por finalidade fazer regressar o equinócio da primavera a 21 de março e corrigir um erro de 10 dias existente devido a esse acumulo. Para isso, foi instituído que o dia imediato à quinta-feira 4 de outubro de 1582 fosse uma sexta-feira 15 de outubro de 1582.

Com a adoção desse calendário, os anos divisíveis por 100 não são bissextos; os anos divisíveis por 400 são bissextos, de modo que os anos tivessem 365 dias, 5 horas, 49 minutos e 12 segundos, um tempo quase idêntico ao do ano solar que é de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 45s. O acumulo desses 27 segundos representará um dia a cada 3000 anos, motivo esse irrelevante nos dias atuais.

3. ARITMÉTICA MODULAR

Uma das ferramentas mais importantes na teoria dos números é a aritmética modular, que envolve o conceito de congruência. Uma congruência é a relação entre dois números que, divididos por um terceiro, que é chamado módulo de congruência, deixam o mesmo resto. Um exemplo, é o número 9 que é congruente ao número 2, módulo 7, pois ambos deixam resto 2, ao serem divididos por 7. Representamos essa congruência do exemplo por $9 \equiv 2\,(mod 7)$, onde $(\equiv)$ representa o símbolo matemático para a congruência e (mod7) significa módulo 7. Foi Johann Carl Friedrich Gauss, um matemático, astrônomo e físico alemão que observou que usávamos com muita frequência frases do tipo "a dá o mesmo resto que b quando divididos por m" e que essa relação tinha um comportamento semelhante à igualdade. Foi Gauss então que introduziu uma notação específica para este fato e que denominou de "congruência".

Seja m um número natural e $m \neq 0$. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de suas divisões euclidianas por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m escreve-se:

$$a \equiv b \text{ mod } m$$

Quando a relação $a \equiv b$ mod m for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso:

$$a \not\equiv b \text{ mod } m.$$

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b$ mod 1, isso torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, consideraremos sempre $m > 1$.

Para verificar se dois números são congruentes não é preciso efetuar a divisão euclidiana e comparar os restos, temos que aplicar a seguinte proposição.

Proposição 2.1. Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$. Dizemos que $a \equiv b$ mod m se, e somente se, $m|(b - a)$.

Demonstração: Efetuando a divisão euclidiana de a e b por m temos:

$a = qm + r,$ com $0 < r < m$ (1)

$b = q_1 m + r_1,$ com $0 < r_1 < m$ (2)

Fazendo (2) – (1) teremos:

$$b - a = (q_1 - q)m + (r_1 - r)$$

Assim, podemos concluir que $a \equiv b$ mod m se, e somente se,

$$r_1 - r = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = r$$

O que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m|b - a$.

Proposição 2.2. Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b\ e\ c \in \mathbb{Z}$, são válidos os seguintes itens:

(i) $a \equiv a$ (mod m), (Reflexiva)

(ii) se $a \equiv b$ (mod m), então $b \equiv a$ (mod m), (Simétrica)

(iii) se $a \equiv b$ (mod m) e $b \equiv c$ (mod m), então $a \equiv c$ (mod m). (Transitiva)

Demonstração:

(i) Sabemos que,

$m|0 \Rightarrow m|a - a \Rightarrow a \equiv a$ (mod m)

(ii) Temos que

$$m|b - a \;\Longrightarrow\; b - a = km \;\Longrightarrow\; -(a - b) = km \;\Longrightarrow a - b = (-k)m \;\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\; b \equiv a\ (mod\ m).$$

(iii) se $a \equiv b$ (mod m) e $b \equiv c$ (mod m), temos que

$m|b - a \quad b - a = km$ e $c - b = k_1 m$

Somando as equações teremos,

$(b - a) + (c - b) = (k + k_1)m \;\Longrightarrow\; c - a = (k + k_1)m \;\Longrightarrow\; a \equiv c$ (mod m).

Decorre, imediatamente, das propriedades acima, que a congruência, módulo um inteiro fixado m, é uma relação de equivalência.

Dizemos que um número inteiro é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um número $r \in r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$. Além disso, dados $x, y \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$, com $x \neq y$, x e y não são congruentes módulo m. Desse modo, para determinar o resto da divisão de um número x por m, basta encontrar o número natural $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ que seja congruente a x módulo m.

Dado R um sistema completo de resíduos módulo m, a divisão euclidiana pode ser enunciada de forma generalizada como segue abaixo:

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existem $q, r \in \mathbb{Z}$ univocamente determinados tais que

$a = bq + r$ com $r \in R$.

Esse enunciado trata-se da divisão com resto em R.

Chamaremos de sistema completo de resíduos módulo m a todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números $(0,1, \dots, m-1)$, sem repetições e numa ordem qualquer. Portanto, um sistema completo de resíduos módulo m possui m elementos.

Definição 2.1: O conjunto dos inteiros $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ é um sistema completo de resíduos módulo m se

$r_i \not\equiv r_j$ mod m para $i \neq j$

Para todo inteiro n existe um r_i tal que $n \equiv r_i$ mod m.

É claro que, se $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ são m números inteiros, dois a dois não congruentes módulo m, então eles formam um sistema completo de resíduos módulo m. De fato, os restos da divisão dos a_i por m são dois a dois distintos, o que implica que são os números $(0, 1, \dots, m-1)$ em alguma ordem.

A congruência é uma ferramenta muito poderosa da aritmética pelo fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição multiplicação de números inteiros, como segue na proposição.

Proposição 2.3. Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.

Se $a \equiv b$ mod m e $c \equiv d$ mod m, então $a + c \equiv b + d$ mod m.

Se $a \equiv b$ mod m e $c \equiv d$ mod m, então $ac \equiv bd$ mod m.

Demonstração:

Do fato de que $a \equiv b$ mod m e $c \equiv d$ mod m, temos que $m|b-a$ e $m|d-c$.

Por definição de divisão temos que $m|(b-a)+(d-c) \Rightarrow m|(b+d)-(a+c) \Rightarrow a+c \equiv b+d$ mod m.

Desenvolvendo $bd - ac = bd - ad + ad - ac = d(b-a) + a(d-c)$ o que implica que $ac \equiv bd$ mod m.

Corolário 2.3.1 Para todos $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b$ mod m, então tem-se que $a^n \equiv b^n$ mod m.

Demonstração: Usando a seguinte identidade

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Como $a \equiv b$ mod $m \Rightarrow m|(a-b)$, implica que $m|(a^n - b^n) \Rightarrow a^n \equiv b^n$ mod m.

Proposição 2.4. Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que

$a + c \equiv b + c$ mod $m \Leftrightarrow a \equiv b$ mod m.

Demonstração: Se $a \equiv b$ mod m, segue-se imediatamente da proposição 2.3 que $a + c \equiv b + c$ mod m, pois $c \equiv c$ mod m.

Reciprocamente, se $a + c \equiv b + c \mod m$, então $m|b + c - (a + c)$, o que implica que $m|b - a$ e, consequentemente, $a \equiv b \mod m$.

A proposição acima mostra que é válido o cancelamento com relação à adição. No entanto, não vale para multiplicação, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. Como $6 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 24$ e $8|24$, temos que $6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5 \mod 8$, e, no entanto, $9 \not\equiv 5 \mod 8$.

O cancelamento para multiplicação é apresentado na seguinte proposição.

Proposição 2.5. Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Temos que

$ac \equiv bc \mod m \Leftrightarrow a \equiv b \mod \frac{m}{mdc(c,m)}$.

Demonstração:

Como $\frac{m}{mdc(c,m)}$ e $\frac{c}{mdc(c,m)}$ são primos entre si, ou seja $mdc(\frac{m}{mdc(c,m)}, \frac{c}{mdc(c,m)}) = 1$, temos que $ac \equiv bc \mod m \Leftrightarrow m\Big|(b - a)c \Leftrightarrow \frac{m}{mdc(c,m)}\Big|(b - a)\frac{c}{mdc(c,m)} \Leftrightarrow \frac{m}{mdc(c,m)}|b - a \Leftrightarrow a \equiv b \mod \frac{m}{mdc(c,m)}$.

Corolário 2.5.1 Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $mdc(c, m) = 1$. Temos que $ac \equiv bc \mod m \Leftrightarrow a \equiv b \mod m$.

Proposição 2.6. Sejam $a, k, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $mdc(k, m) = 1$. Se $a_1, \dots, a_m$ é um sistema completo de resíduos módulo m, então $a + ka_1, \dots, a + ka_m$ também é um sistema completo de resíduos módulo m.

Demonstração: Do corolário acima, para $i, j = 0, \dots, m - 1$, temos que $a + ka_i \equiv a + ka_j \mod m \Leftrightarrow ka_i \equiv ka_j \mod m \Leftrightarrow a_i \equiv a_j \mod m \Leftrightarrow i = j$.

Isso mostra que $a + ka_1, \dots, a + ka_m$ são, dois a dois, não congruentes módulo m e, portanto, formam um sistema completo de resíduos módulo m.

A seguir serão enunciadas algumas propriedades de congruências relacionadas com a multiplicação.

Proposição 2.7. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m, n, m_1, \dots, m_r$ inteiros maiores do que 1. Temos que

Se $a \equiv b \mod m$ e $n|m$, então $a \equiv b \mod n$;

$a \equiv b \mod mi$, $\forall\, i = 1, \dots, r \Leftrightarrow a \equiv b \mod mmc(m_1, \dots, m_r)$;

Se $a \equiv b \mod m$, então $mdc(a, m) = mdc(b, m)$.

Demonstração:

(i) Se $a \equiv b$ mod m, então $m|b - a$. Como $n|m$ e $m|b - a$, segue-se que $n|b - a$, o que implica que $a \equiv b$ mod n.

(ii), se $a \equiv b$ mod m_i, $i = 1, \dots, r$, então $m_i|b - a$, para todo i. Com isso $b - a$ é um múltiplo de cada m_i, segue-se que o $mmc(m_1, \dots, m_r)|b - a$, provando que $a \equiv b$ mod $mmc(m_1, \dots, m_r)$. A recíproca decorre do item (i).

(iii) Se $a \equiv b$ mod m, então $m|b - a$ e, portanto, $b = a + tm$ com $t \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo lema de Euclides, temos que $mdc(a, m) = mdc(a + tm, m) = (b, m)$.

As propriedades acima são de extrema importância para a compreensão da aritmética dos restos.

3.1. ARTMÉTICA MODULAR USO PRÁTICO

Muitas vezes, precisamos verificar um número, como um CPF, CNPJ ou ISBN. Por curiosidade, ISBN (International Standard Book Number), é o sistema internacional de identificação de livros e softwares que utiliza números para classificá-los por título, autor, país, editora e edição.

Por mais atentos que sejamos, não teríamos como perceber a troca de um número em um simples olhar. Para isso e para minimizar fraudes, foram criados os chamados dígitos de controle ou verificação. Tais dígitos são normalmente baseados na noção de congruência que mostramos anteriormente.

3.1.1. CPF (Cadastro de Pessoa Física)

O número de CPF de uma pessoa, no Brasil, é constituído de 11 dígitos, sendo um primeiro bloco com 9 algarismos e um segundo, com mais dois algarismos, que são, dígitos de controle ou de verificação. A determinação desses dois dígitos de controle é um caso de aplicação da noção de congruência.

No caso do CPF, o décimo dígito (que é o primeiro dígito verificador) é o resultado de uma congruência, módulo 11 de um número obtido por uma operação dos primeiros nove algarismos.

Seja uma sequência formada pelos primeiros 9 dígitos $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9)$, vamos então multiplicar, nessa ordem, pela base $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e somar o produto obtido. O dígito que está faltando, que vamos representar por n_{10} deve ser tal que ao ser subtraído da soma obtida, deve gerar um múltiplo de 11, isto é, se a soma obtida é S, o número S subtraído de n_{10} deve ser múltiplo de 11 ou seja, $(S - n_{10}) \equiv 0\ (mod 11)$. Note que tal número será o próprio resto da divisão por 11 da soma obtida.

Vamos imaginar um CPF que tenha os 9 primeiros algarismos 987.654.321, então o primeiro dígito de controle será assim obtido:

TABELA 05: Verificação do 1º dígito de controle do CPF

A	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	9	16	21	24	25	24	21	16	9

Onde:

A: Representa os 9 primeiros números do CPF

B: Base

C: É o produto de A e B

O somatório dos valores de C é 165. Como $165 \equiv 0\ (mod 11)$, então o primeiro dígito de controle será o algarismo 0.

A determinação do segundo dígito de controle é feita de modo similar, sendo que agora acrescentamos o décimo dígito (que é o que acabamos de calcular) e usamos uma base de multiplicação $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

TABELA 06: Verificação do 2º dígito de controle do CPF

A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	0	8	14	18	20	20	18	14	8	0

A sua soma é 120. Como $120 \equiv 10\ (mod 11)$, então o segundo dígito de controle também é 0.

Quando o resto for 10, consideraremos o 0.

Logo o digito verificador é o (00).

3.1.2. Calendário

Já no que diz respeito ao calendário, a aritmética modular é o que se pode chamar literalmente de mão na roda. Sabendo da ciclicidade dos dias, meses, anos, fases lunares etc., fica evidente a sua utilização para cálculos mais rápidos e precisos.

Um exemplo interessante é o seguinte: O ano de 2018 começou no dia da semana que corresponde a uma segunda-feira, então que dia será 31 de dezembro desse mesmo ano?

Bom, sabemos que 2018 não é bissexto pois não é divisível por 4, logo ele tem 365 dias.

Aplicando aritmética modular, temos que $365 \equiv 1\ (mod 7)$. Logo temos 52 ciclos completos de 7 dias, ou seja, 52 semanas e ainda sobra 1 dia. Como o ano começou numa segunda-feira, fica evidente que ele também terminará numa segunda-feira. Como iniciamos nesse exemplo a contagem a partir da segunda-feira, convencionando que segunda-feira seria nesse exemplo o 1º termo da sequência de dias da semana, logo 1 = segunda-feira.

Fica mais claro nessa tabela:

TABELA 07: Dias da semana começo do ano 2018

1	$segunda-feira$
2	$terça-feira$
3	$quarta-feira$
4	$quinta-feira$
5	$sexta-feira$
6	$sábado$
0	$domingo$

E se o ano é bissexto?

Podemos exemplificar isso com o ano de 2016 que começou numa sexta-feira. Como ele é bissexto, temos um ano de 366 dias. Mas $366 \equiv 2\ (mod7)$. Temos então 52 ciclos completos mais dois dias. Logo fica evidente que o dia 31 de dezembro de 2016 será um sábado. Verificando uma tabela semelhante a anterior.

TABELA 08: Dias da semana começo do ano 2016

1	$sexta - feira$
2	$sábado$
3	$domingo$
4	$segunda - feira$
5	$terça - feira$
6	$quarta - feira$
0	$quinta - feira$

Atentemos ao detalhe que o número "1" está relacionado em cada um dos exemplos ao primeiro dia do referido ano.

Resumidamente, um ano começa e termina sempre no mesmo dia e caso ele seja bissexto começara no dia posterior ao seu início.

Demonstração: Seja "A" um ano qualquer não bissexto e "d" a representação do dia 1º de janeiro desse ano. Desse modo, o dia 2 de janeiro será representado por "$d + 1$", dia 3 por "$d + 2$", ..., dia 7 por "$d + 6$" e dia 8 por "$d + 7$". Sabendo que $(d + 7) \equiv d\ (mod7)$ e como "A" não é bissexto, ele tem 365 dias. Mas após 365 dias houve a passagem de 52 ciclos completos de 7 dias ou 364 dias. Sabendo que $364 \equiv 0\ (mod7)$, o 364º dia desse ano "A" é côngruo com o 7 de janeiro. Acrescentando mais um dia para completar o ano temos então que o "1". Como o ano começou pelo dia "d", representando o primeiro dia do ano, dia 1, logo "d" será também o último dia desse ano.

De maneira análoga, para um ano bissexto concluiremos que ele começa em um dia "d" e termina em um dia "$d + 1$".

3.1.3. Alguns Conceitos

Para utilização da aritmética modular para obtenção de algum algoritmo que nos permita facilmente obter o dia da semana de uma data qualquer, é necessário relembrar e ilustrar algumas informações.

- Um ano é bissexto se ele é múltiplo de 4, não é múltiplo de 100 e é múltiplo de 400.
- Designaremos dia, mês e ano por (d, m, A)
- Os dias da semana serão relacionados da seguinte forma:

TABELA 09: Dias da semana

1	$domingo$
2	$segunda - feira$
3	$terça - feira$
4	$quarta - feira$
5	$quinta - feira$
6	$sexta - feira$
0	$sábado$

- $\left[\frac{n}{k}\right]$ indica a parte inteira da divisão “n” por “k”, sendo “n” e “k” números inteiros. Por exemplo, temos que $\left[\frac{100}{7}\right] = 14$.

Como já vimos, o calendário gregoriano foi implementado em 1582, mais precisamente no dia 15 de outubro, onde as datas até o dia 4 de outubro daquele ano eram regidas pelo calendário juliano e a partir do dia subsequente a essa quinta-feira dia 4, tivemos a sexta-feira dia 15. Os dias entre 4 e 15 daquele ano foram suprimidos para adequação do então novo calendário com as estações do ano.

Por esse motivo, considerando “A” como indicador de um ano qualquer, consideraremos a contagem dos anos de modo que “A”>1582.

4. ALGORÍTIMO DE DATA

Seja $A > 1582$, em que 1582 é o ano de implementação do calendário Gregoriano. Temos entre o ano de 1582 e o ano A:

a) O número de anos bissextos múltiplos de 4.

$$\left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{1582}{4}\right]$$

$$\left[\frac{A}{4}\right] - 395$$

b) O número de anos não bissextos múltiplos de 100.

$$\left[\frac{A}{100}\right] - \left[\frac{1582}{100}\right]$$

$$\left[\frac{A}{100}\right] - 15$$

c) O número de anos bissextos múltiplos de 400.

$$\left[\frac{A}{400}\right] - \left[\frac{1582}{400}\right]$$

$$\left[\frac{A}{400}\right] - 3$$

Obtendo os anos bissextos subtraindo os anos não bissextos:

$$\left[\frac{A}{4}\right] - 395 + \left[\frac{A}{400}\right] - 3 - \left[\left[\frac{A}{100}\right] - 15\right]$$

$$\left[\frac{A}{4}\right] - 395 + \left[\frac{A}{400}\right] - 3 - \left[\frac{A}{100}\right] + 15$$

$$\left[\frac{A}{4}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] - 395 - 3 + 15$$

$$\left[\frac{A}{4}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] - 383$$

Logo, se considerarmos “B” a quantidade de anos bissextos de 1582 até o ano “A”:

$$B \equiv \left(\left[\frac{A}{4}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] - 383\right)(mod7)$$

Como $-383 \equiv -5 \equiv 2\ (mod7)$, temos:

$$B \equiv \left(\left[\frac{A}{4}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + 2\right)(mod7)$$

Denotando por “d” como o dia da semana correspondente a 1º de março de 1582, um ano não bissexto, verificamos que existem 365 dias entre o 1º de março de 1582 e 1º de março de 1583.

Como $365 \equiv 1\ (mod7)$, o dia 1º de março de 1583 será $(d+1)\ (mod7)$.

Para próximo ano, 1583, que também não é bissexto, também existem 365 dias entre o 1º de março de 1583 e 1º de março de 1584.

Como $365 \equiv 1\ (mod7)$, o dia 1º de março de 1584 será $(d+1+1)\ (mod7)$.

Agora, 1584 é um ano bissexto, logo existem 366 dias entre o 1º de março de 1584 e 1º de março de 1585.

Como $366 \equiv 2\ (mod7)$, o dia 1º de março de 1585 será $(d+1+1+2)\ (mod7)$.

Resumindo, sempre que o ano não é bissexto, acrescenta-se 1 dia ao 1º de março do ano subsequente, e caso o ano seja bissexto, acrescenta-se 2 dias.

Para facilitar, vamos empregar a seguinte notação:

(d, m, A)

Onde “d” é dia da semana, “m” é o mês e “A” é o ano.

4.1. A FUNÇÃO DE ZELLER

Para os meses temos um problema quanto a padronização, pois olhando um calendário é fácil perceber que os meses não tem todos o mesmo tamanho, oscilando entre 30 dias e 31 dias com exceção de fevereiro que tem 28 dias e em alguns anos 29 dias. Esse motivo explica porque numeramos os meses começando em março e terminando em fevereiro.

TABELA 10: Enumeração dos meses

1	*Março*
2	*Abril*
3	*Maio*
4	*Junho*
5	*Julho*
6	*Agosto*
7	*Setembro*
8	*Outubro*
9	*Novembro*
10	*Dezembro*
11	*Janeiro*
12	*Fevereiro*

Para obter o 1º dia da semana de um mês “m” de um ano “A” devemos somar o número de dias desse mês “m” ao seu 1º dia da semana.

Considerando que o mês número 1 (março) tenha como o 1º dia da semana um dia “d” então temos:

Para o dia 1º de abril desse ano “A”, devemos somar 31 dias ao 1º de março. Como $31 \equiv 3\ (mod 7)$, temos então:

$$(1,2,A) = (3 + (1,1,A))$$
$$(1,2,A) = (3 + d)$$
$$(1,2,A) = (d + 3)$$

Para o dia 1º de maio desse ano "A", devemos somar 30 dias ao 1º de abril. Como $30 \equiv 2\ (mod7)$. Temos:

$(1,3,A) = (2 + (1,2,A))$
$(1,3,A) = (2 + d + 3)$
$(1,3,A) = (d + 5)$

Para o dia 1º de junho desse ano "A", devemos somar 31 dias ao 1º de maio. Já vimos anteriormente que $31 \equiv 3\ (mod7)$. Teríamos então:

$(1,4,A) = (3 + (1,2,A))$
$(1,4,A) = (3 + d + 5)$
$(1,4,A) = (d + 8)$

É de fácil observação que, com exceção de fevereiro, os meses são ou 30 dias ou 31 dias. Ora, $30 \equiv 2\ (mod7)$ e $31 \equiv 3(mod7)$. Sendo "d" o 1º de março, temos que o 1º de abril será "$d + 3$" e o 1º de maio será "$d + 3 + 2$" e assim sucessivamente. Abaixo fica mais claro essa exposição.

TABELA 11: Implementos dos dias

$Mês$	$Dias$	$Dias\ (mod7)$	$Incremento$
$Março - Abril$	31	3	3
$Abril - Maio$	30	2	5
$Maio - Junho$	31	3	8
$Junho - Julho$	30	2	10
$Julho - Agosto$	31	3	13
$Agosto - Setembro$	31	3	16
$Setembro - Outubro$	30	2	18
$Outubro - Novembro$	31	3	21
$Novembro - Dezembro$	30	2	23
$Dezembro - Janeiro$	31	3	26
$Janeiro - Fevereiro$	31	3	29

Temos então, 11 incrementos num total de 29 dias. É agora necessário encontrar uma função que dê para cada mês o incremento que lhe corresponde.

Foi o filósofo alemão Eduard Zeller que encontrou a função que leva seu nome "$[2{,}6.m - 0{,}2] - 2$", por um processo de tentativas e erros em que "m" representa o número do mês. Trabalhando um pouco com a função de Zeller, temos que:

$$[2{,}6m - 0{,}2] - 2$$

$$\left[\frac{26}{10}m - \frac{2}{10}\right] - 2$$

$$\left[\frac{2}{10}(13m - 1)\right] - 2$$

$$\left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2$$

Logo, em um ano A, teremos então para uma data $(1, 1, A)$, a implementação de $A\ dias\ (mod 7)$ somados aos dias da função de Zeller

Implementando a função de Zeller aos anos bissextos (B), temos:

$$(1, m, A) \equiv \left(\left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2 + B\right)(mod 7)$$

$$(1, m, A) \equiv \left(\left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2 + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] + 2\right)(mod 7)$$

Devemos também acrescentar ao 1º de março de 1582 "A" dias correspondentes aos "A" anos de 1582 até um ano "A".

$$(1, m, A) \equiv \left(\left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2 + A + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] + 2\right)(mod 7)$$

Acrescentando “d” para o dia do mês, temos:

$$(d, m, A) \equiv \left(d + \left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2 + A + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] + 2\right)(mod 7)$$

Mas, como queremos contar do dia corrente, devemos acrescentar uma unidade aos dias. Assim sendo, temos:

$$(1, m, A) \equiv \left(d + 1 + \left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2 + A + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] + 2\right)(mod 7)$$

$$(1, m, A) \equiv \left(d + 1 + \left[\frac{13m - 1}{5}\right] + A + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right]\right)(mod 7)$$

Acontece que a função de Zeller considerando o mês de março como o primeiro mês não é muito conveniente para a maneira que estamos acostumados. Podemos então encontrar uma equivalente que nos forneça um valor para o mês de março sendo esse o terceiro mês.

Como o mês de março é representado pelo número “1” e desejamos que ele seja representado pelo número “3”, percebemos que cada mês será nesse cálculo com a numeração do mês convencional, 2 unidades a mais que como considerado por Zeller. Chamando o mês com a numeração convencional de “M”, temos que $M = m + 2$, logo temos que $m = M - 2$. Substituindo na função de Zeller que denotaremos por (z), temos:

$$Z \equiv \left(\left[\frac{13m - 1}{5}\right] - 2\right)(mod 7)$$

Posso aproveitar e somar 1 unidade na função de Zeller, para quando substituir na função para encontrar uma data específica, não precise ficar somando uma unidade ao dia. Logo:

$$Z \equiv \left(\left[\frac{13m-1}{5}\right] - 2 + 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(\left[\frac{13m-1}{5}\right] - 1\right)(mod7)$$

Mas como "$m = M - 2$"

$$Z \equiv \left(\left[\frac{13(M-2)-1}{5}\right] - 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(\left[\frac{13M-26-1}{5}\right] - 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(\left[\frac{10M+3M-27}{5}\right] - 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(\left[\frac{10M}{5} + \frac{3M}{5} - \frac{25}{5} - \frac{2}{5}\right] - 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3M}{5} - \frac{2}{5}\right] - 5 - 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3M-2+5-5}{5}\right] - 6\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3M+3-5}{5}\right] - 6\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3M+3}{5} - \frac{5}{5}\right] - 6\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3M+3}{5}\right] - 6 - 1\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3(M+1)}{5}\right] - 7\right)(mod7)$$

$$Z \equiv \left(2M + \left[\frac{3(M+1)}{5}\right]\right)(mod7)$$

Ficamos assim com

$$(d, M, A) \equiv \left(d + 2M + \left[\frac{3(M+1)}{5}\right] + A + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] + 2\right)(mod7)$$

Essa fórmula não é prática para o uso diário, mas após algumas observações é de fácil verificação sobre um número constante associado a um mês específico, uma vez que os meses não tem qualquer variação desse número para qualquer ano. Fazendo $N\ (mod7)$ um número associado a um mês, começando por março (3), temos:

$$N \equiv \left(2M + \left[\frac{3(M+1)}{5}\right]\right)(mod7)$$

Março

$$N \equiv \left(2.3 + \left[\frac{3(3+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (6+2)(mod7) \Rightarrow N \equiv 1\ (mod7)$$

Abril

$$N \equiv \left(2.4 + \left[\frac{3(4+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (8+3)(mod7) \Rightarrow N \equiv 11\ \equiv\ 4(mod7)$$

Maio

$$N \equiv \left(2.5 + \left[\frac{3(5+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (10+3)(mod7) \Rightarrow N \equiv 13\ \equiv\ 6(mod7)$$

Junho

$$N \equiv \left(2.6 + \left[\frac{3(6+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (12+4)(mod7) \Rightarrow N \equiv 16 \ \equiv \ 2(mod7)$$

Julho

$$N \equiv \left(2.7 + \left[\frac{3(7+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (14+4)(mod7) \Rightarrow N \equiv 18 \ \equiv \ 4(mod7)$$

Agosto

$$N \equiv \left(2.8 + \left[\frac{3(8+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (16+5)(mod7) \Rightarrow N \equiv 21 \ \equiv \ 0(mod7)$$

Setembro

$$N \equiv \left(2.9 + \left[\frac{3(9+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (18+6)(mod7) \Rightarrow N \equiv 24 \ \equiv \ 3(mod7)$$

Outubro

$$N \equiv \left(2.10 + \left[\frac{3(10+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (18+6)(mod7) \Rightarrow N \equiv 26 \ \equiv 5(mod7)$$

Novembro

$$N \equiv \left(2.11 + \left[\frac{3(11+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (22+7)(mod7) \Rightarrow N \equiv 29 \ \equiv \ 1(mod7)$$

Dezembro

$$N \equiv \left(2.12 + \left[\frac{3(12+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (22+7)(mod7) \Rightarrow N \equiv 31 \ \equiv \ 3(mod7)$$

Janeiro

$$N \equiv \left(2.13 + \left[\frac{3(13+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N \equiv (26+8)(mod7) \Rightarrow N \equiv 34 \ \equiv 6(mod7)$$

Fevereiro

$$N \equiv \left(2.14 + \left[\frac{3(14+1)}{5}\right]\right)(mod7) \Rightarrow N = (28+9)(mod7) \Rightarrow N = 37 \ \equiv 2(mod7)$$

Temos assim um número fixo associado a cada mês, sendo isso um facilitador quando queremos saber uma data específica.

Considerando P como o ano, temos que:

$$P \equiv \left(A + \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right] + 2\right)(mod7)$$

Resolvendo P em função de A temos:

$$P \equiv \left(A + 2 + \left[\frac{A}{4} - \frac{A}{100} + \frac{A}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv \left(A + 2 + \left[\frac{100A - 4A + A}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv \left(A + 2 + \left[\frac{97A}{400}\right]\right)(mod7)$$

Importante salientar que os meses de janeiro e fevereiro são considerados sempre do ano anterior. Lembre-se que conforme foi visto na função de “Zeller” o primeiro mês do ano era março, logo, janeiro e fevereiro são os últimos meses do ano.

Em uma sala de aula, para estimular os alunos a gostarem da matemática poderíamos fazer brincadeiras de verificação de um dia da semana de determinado mês e determinado ano, bastando para isso que o aluno decore a sequência como se fosse um número de telefone.

$\mathbf{6214 - 6240 - 3513}$

A partir desse ponto, utilizando aritmética modular, é possível encontrar o dia da semana de uma data específica utilizando:

$$Dia \equiv (d + N + P)(mod7)$$

Exemplo 1: Que dia da semana caiu 27/02/2016?

Como 2016 é bissexto, usaremos o ano de 2015, pois janeiro é o penúltimo mês desse ano.

$$Dia \equiv (d + N + P)(mod7)$$

Achando o valor de P

$$P \equiv \left(A + 2 + \left[\frac{97A}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv \left(2015 + 2 + \left[\frac{97.2015}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv \left(2017 + \left[\frac{195455}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv (2017 + 488)(mod7)$$

$$P \equiv 2505 \ \equiv \ 6\ (mod7)$$

Verificando que para o mês fevereiro o número fixo associado é o 2, logo:

$$Dia \equiv (27 + 2 + 6)(mod7)$$

$$Dia \equiv (35 \ \equiv \ 0)(mod7)$$

Logo foi um sábado.

Exemplo 2: Que dia da semana caiu 27/03/2017?

Como 2017 não é bissexto, usamos o próprio ano de 2017

$Dia \equiv (d + N + P)(mod7)$

Achando o valor de P

$$P \equiv \left(A + 2 + \left[\frac{97A}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv \left(2017 + 2 + \left[\frac{97.2017}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv \left(2019 + \left[\frac{195649}{400}\right]\right)(mod7)$$

$$P \equiv (2019 + 489)(mod7)$$

$$P \equiv 2508 \equiv 2(mod7)$$

Verificando que para o mês março o número fixo associado é o 1, logo:

$$Dia \equiv (27 + 1 + 2)(mod7)$$

$$Dia \equiv (30 \ \equiv 2)(mod7)$$

Logo foi uma segunda-feira.

4.2. NÚMERO DE CALENDÁRIOS

Uma pergunta interessante sobre o nosso atual calendário, é saber quantos calendários anuais diferentes existem. Para isso será montado uma tabela representando todos os calendários possíveis

Já vimos que um ano sempre começa e sempre termina em um mesmo dia, salvo o caso em que ele seja bissexto, quanto termina em um dia a mais do que quando começou.

Considerando um ano comum, então ele começa em um dia “d” e termina em um dia “d”. Caso ele seja bissexto, começa em um dia “d” e termina em um dia “d+1”.

A partir da TABELA 12, fica mais claro esse entendimento.

TABELA 12: Calendários

ANO	$INÍCIO$	$(MOD\ 7)$	FIM
1	d	d	d
2	$d+1$	$d+1$	$d+1$
3	$d+2$	$d+2$	$d+2$
4	$d+3$	$d+3$	$d+4$
5	$d+5$	$d+5$	$d+5$
6	$d+6$	$d+6$	$d+6$
7	$d+7$	d	d
8	$d+8$	$d+1$	$d+2$
9	$d+10$	$d+3$	$d+3$
10	$d+11$	$d+4$	$d+4$
11	$d+12$	$d+5$	$d+5$
12	$d+13$	$d+6$	d
13	$d+15$	$d+1$	$d+1$
14	$d+16$	$d+2$	$d+2$
15	$d+17$	$d+3$	$d+3$
16	$d+18$	$d+4$	$d+5$
17	$d+20$	$d+6$	$d+6$
18	$d+21$	d	d
19	$d+22$	$d+1$	$d+1$
20	$d+23$	$d+2$	$d+3$
21	$d+25$	$d+4$	$d+4$
22	$d+26$	$d+5$	$d+5$
23	$d+27$	$d+6$	$d+6$
24	$d+28$	d	$d+1$
25	$d+30$	$d+2$	$d+2$
26	$d+31$	$d+3$	$d+3$
27	$d+32$	$d+4$	$d+4$
28	$d+33$	$d+5$	$d+6$
29	$d+35$	d	d
30	$d+36$	$d+1$	$d+1$
31	$d+37$	$d+2$	$d+2$

É fácil observar que o 29º ano é uma repetição do 1º ano quanto ao dia de início e fim. O 30º ano é uma repetição do 2º ano e assim sucessivamente.

Outra maneira de calcular seria através do MMC (mínimo múltiplo comum). Como existe uma repetição de eventos procederemos da seguinte forma: Sendo o ano bissexto cíclicos em 4 períodos e a semana também cíclica de 7 períodos, e como os números “4” e “7” são coprimos, temos então que o MMC entre dois ou mais números primos entre se é dado pelo seu produto. Assim sendo, o MMC entre os números “4” e “7” é 4 x 7 = 28.

Logo existem 28 calendários diferentes.

5. O DIA DA MENTIRA

Apesar de o início do ano civil ter sido transferido, já na Roma Antiga, para o dia 1º de janeiro, o começo do ano litúrgico da Igreja católica permaneceu em 25 de março, próximo ao equinócio de primavera do hemisfério Norte. Os estudiosos, tanto das religiões como dos calendários, chamam isso de “estilo da Anunciação”, pois nessa data a Virgem Maria teria recebido a visita do anjo Gabriel anunciando que ela seria a mãe do filho de Deus.

Outros estilos menos usados para o início do ano em diferentes partes da Europa foram o “estilo da Páscoa”, no qual o ano começava sempre no domingo de Páscoa (que, como já vimos, é uma data móvel em nosso calendário solar e, portanto, trazia um complicador desnecessário à população), e o “estilo da Natividade”, em que o ano começava no Natal.

A reforma gregoriana de 1582 oficializou o início do ano eclesiástico em 1º de janeiro, concordando com o ano civil, no que é conhecido como “estilo da Circuncisão”, pois segundo as tradições judaicas, um bebê do sexo masculino deveria ser circuncidado uma semana depois de seu nascimento. Nunca é demais lembrar que Jesus era judeu…

Antes do papa Gregório XIII, em 1564, o rei Carlos IX, da França, decretou que seus súditos deveriam respeitar o início do ano juliano como prescrito por Júlio César, em 1º de janeiro. Os católicos protestaram, uma vez que o calendário eclesiástico ainda se iniciava em 25 de março. Para marcar sua posição, passaram a celebrar de maneira ostensiva a chegada do Ano-Novo. As comemorações duravam uma semana, fazendo com que o primeiro dia útil do ano fosse, de fato, o dia 1º de abril.

Os súditos mais fiéis do rei francês, que passaram a celebrar o Ano-Novo em 1º de janeiro, hostilizavam os católicos que insistiam em usar o “estilo da Anunciação”. Com o passar do tempo, as hostilidades deram origem a brincadeiras e “pegadinhas”. Logo depois, o calendário gregoriano foi concebido e todos passaram a adotar o dia 1º de janeiro como o primeiro do ano.

Mas a tradição das pegadinhas já havia se formado e acabou sendo exportada para o resto do mundo. Desde então, o dia 1º de abril é conhecido como o “dia da mentira”.

6. UM CALENDÁRIO ALTERNATIVO

Está parado há mais de 50 anos na ONU o projeto de um calendário em que todos os meses começariam em domingo e terminariam em sábado. Cada dia de cada mês cairia sempre no mesmo dia da semana. Teria 13 meses de 28 dias. O novo mês teria o nome de Sol e seria intercalado entre junho e julho.

Já em 1849, o filósofo positivista francês Auguste Comte (1798-1857) lançou uma proposta de reforma do calendário com 13 meses de 28 dias cada mês. Propôs, inclusive, alteração do nome dos meses para os de importantes personagens da religião, literatura, ciências, filosofia e política: Moisés, Homero, Aristóteles, Arquimedes, César, São Paulo, Carlos Magno, Dante, Gutenberg, Shakespeare, Descartes, Frederico II e Bichat.

Um detalhe essencial sobre o Calendário Positivista é que se trata de um calendário fixo. Quer dizer que o 365º dia do ano, que seria correspondente ao dia 29 do 13º mês, não cairia nem em um domingo, nem na segunda, terça, quarta, quinta, sexta-feira e nem no sábado. Seria uma data fora da contagem dos 7 dias da semana. Teria o "dia fora do calendário". Nos anos bissextos, a data que corresponderia a 29 de junho também seria um dia fora da contagem dos 7 dias da semana. Nesses anos teria outro "dia fora do calendário". A proposta do Calendário Positivista de Comte, por ser de calendário fixo, também não conseguiu avanços no âmbito, inicialmente da Liga das Nações e posteriormente, a partir de 1945, com a criação da Organização das Nações Unidas (ONU).

Alguns religiosos têm o 13 como o número da "rebelião" e do "anticristo" e não aprovariam o novo calendário.

TABELA 13: Calendário Fixo de 13 meses

JANEIRO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

FEVEREIRO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

MARÇO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

ABRIL						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

MAIO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

JUNHO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
DU						

CENTRAL						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

JULHO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

AGOSTO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

SETEMBRO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

OUTUBRO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

NOVEMBRO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

DEZEMBRO						
D	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
DU						

DU = Dia Universal

7. CONCLUSÃO

Exibir padrões da passagem do tempo sempre foi a principal função de um calendário, seja ele solar, lunar ou lunissolar. Encontrar esses padrões é o que sempre manteve e mantem o homem numa busca incessante pelo calendário perfeito, que como uma engrenagem, vinculasse os dias humanos aos dias celestes. Mas tal empreitada, numa analogia grosseira, seria como tentar construir um círculo que tenha uma área igual a de um quadrado, e isso usando apenas números inteiros, tarefa essa até hoje impossível.

Criamos calendários que nos ajudam a marcar o tempo, que ajudam a tornar menos caótico um fluir inexorável de algo tão vago e pálido. Criamos calendários para inflar nosso ego e ter uma falsa sensação de controle sobre o meio, pois com um calendário sabemos se é tempo de plantar ou colher, somos deuses. Sua importância hoje, na nossa era moderna é inquestionável. Tudo tem um tempo. São relógios incansáveis em seus “tic” “tacs” governando um mundo e ditando quando cada ato desse palco caótico deve ser iniciado e terminado.

Falar sobre alguns calendários apenas é aranhar a longa estrada humana que teve início quando o primeiro homem olhou para o céu e entendeu que as estrelas obedeciam a ciclos, que o sol tinha seu tempo e que as chuvas não eram tão caóticas quanto se pensava. Nascia com esse indivíduo a era do tempo, a era dos senhores do tempo, a aurora do conhecimento.

8. BIBLIOGRAFIA

BLOG ADEUSANOCORACAODAMULHER, **O mês de fevereiro**, http://adeusanocoracaodamulher.blogspot.com/2012/02/juno-februa-honrar-e-celebrar-o-amor.html, 25/10/2018

BLOG APRENDENDOPORAI, **Calendário de 13 meses**, http://aprendendoporai.blogspot.com/2011/08/projeto-de-calendario-com-13-meses-de.html, 20/10/2018.

BRASIL, RPM, Revista do Professor de Matemática. Volumes 12 e 45. Sociedade Brasileira de Matemática.

CHERMAN, Alexandre; VIEIRA, Fernando. O Tempo que o Tempo tem. Zahar, 2013.

DANTAS, Tiago. **A páscoa**, https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/pascoa/, 25/10/2018

DUNCAN, David Edwing. Calendário, a epopeia da Humanidade para determinar o ano verdadeiro. Ediouro, 1999.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira, **Sistemas de Coordenadas**, http://astro.if.ufrgs.br/coord.htm, 25/10/2018

HEFEZ, Abramo. Aritmética. Coleção PROFMAT. – Rio de Janeiro: SBM, 2014.

IFRAH, Georges. História Universal dos Algarismos, Editora Nova Fronteira. Rio de Janeiro, 1997

MARQUES, Manuel Nunes, Origem e Evolução do Nosso Calendário, http://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/H01orige.htm, 12/09/2018.

PAUGGER, Johanna; THOMAS, Poppe, **O Uso do Calendário Lunar na Vida Diária**. Editora Mandras, 2003.

QUOOS, João Henrique. Latitude e longitude, http://coral.ufsm.br/cartografia/index.php?option=com_content&view=article&id=43&Itemid=39. 12/09/2018

SITE ASTRONOO, **Declinação e Ascenção Reta.** http://www.astronoo.com/pt/artigos/declinacao-ascensao-reta.html. 15/10/2018

SITE CALENDDARIO.INFO, **Calendário Judaico**, http://www.cdcc.usp.br/cda/aprendendo-basico/esfera-celeste/coordenada-celeste/coordenada-estelar-gra.htm, 26/10/2018

SITE CDCC.USP, **Coordenadas Celestes**, http://www.cdcc.usp.br/cda/aprendendo-basico/esfera-celeste/coordenada-celeste/coordenada-estelar-gra.htm, 25/10/2018

SITE CONCERTOETERNO, **Mês sinódico e mês sideral.** http://www3.concertoeterno.com/estudos/cronologia/estudo_03/estudo_03_09.htm. 20/10/2018

SITE ON, **Solstício e equinócio,** http://www.on.br/index.php/pt-br/ultimas-noticias/408-solsticio-inverno-2018.html, 23/10/2018

SITE WEMYSTIC, **Calendário Chinês,** http://www.wemystic.com.br/artigos/calendario-chines-o-calendario-milenar-que-deu-origem-ao-horoscopo-chines/, 26/10/2018.