



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Marília Gomes Criste

**Curvas Planas de Largura Constante:
Teorema de Barbier e a Função Sombra**

Ouro Preto

2018

MARÍLIA GOMES CRISTE

Curvas Planas de Largura Constante: Teorema de Barbier e a Função Sombra

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.

Co-Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.

**Ouro Preto
2018**

C868c

Criste, Marília Gomes.

Curvas planas de largura constante [manuscrito]: teorema de Barbier e a função sombra / Marília Gomes Criste. - 2018.

77f.:

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.

Coorientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Curvas. 2. Triângulo. 3. Geometria diferencial. 4. Sombras e sombreados. I. Souza, Gil Fidelix de. II. Ferreira, Geraldo César Gonçalves. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 514.7



UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT



Curvas de Largura Constante: Teorema de Barbier e a Função Sombra

Autor(a): Marília Gomes Criste

Dissertação defendida e aprovada, em **31 de Agosto de 2018**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Gil Fidelix de Souza - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Geraldo César Gonçalves Ferreira Coorientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Marcelo Oliveira Veloso
Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba

Eder Marinho Martins
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedico este trabalho aos meus familiares que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

A Deus, razão do meu existir, por me dar forças para seguir sempre em frente.

Aos meus pais José Crispim e Terezinha, a educação, o apoio e o incentivo. Por serem sempre o meu ponto de apoio.

Aos meus irmãos Luciana, Juliana e Thiago a paciência, carinho e por me incentivarem a nunca desistir dos meus objetivos.

Aos meus sobrinhos Mateus, Geovana e Luiza o enorme carinho.

Ao meu grande amor Paulo.

Aos colegas do mestrado o companheirismo, em especial, à Mayara e ao Gilberto pelas diversas vezes que desesperadamente eu os procurei e sempre fui atendida.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação.

Ao professor Dr. Geraldo César a proposta do tema de pesquisa e todas as sugestões que enriqueceram esse trabalho.

Ao professor Dr. Gil Fidelix o conhecimento compartilhado, a paciência, a dedicação e o apoio, sem ele esse trabalho jamais teria se concretizado.

Aos colegas da Escola Estadual Ordem e Progresso, a paciência e o companheirismo, em especial, à Lorena que pacientemente fez correções necessárias ao texto.

Este trabalho só se concretizou porque muitas pessoas fizeram parte dele, direta ou indiretamente, me apoiando e incentivando em cada etapa.

A todos, o meu sincero agradecimento.

Resumo

Já imaginou uma bicicleta cujas rodas não tivessem o formato de um círculo? Neste trabalho estudaremos os conjuntos convexos, mais especificamente conjuntos que possuem a mesma característica do círculo, largura constante. Mostraremos que existem diversas curvas que podem substituir o círculo em algumas situações, por exemplo, em uma roda de bicicleta. Os conjuntos de largura constante estão presentes em várias áreas da engenharia, na arquitetura e no design de diversos produtos. O Triângulo de Reuleaux é o mais comum desses, um exemplo de sua aplicação é uma broca que gera um “furo quadrado”. Ao longo do trabalho demonstraremos, de duas formas diferentes, o Teorema de Barbier o qual afirma que todo conjunto de largura constante m tem perímetro πm , e veremos que a área destes conjuntos será sempre maior que a do Triângulo de Reuleaux e menor que a do círculo. Buscamos conhecer o formato dos conjuntos convexos através da sombra gerada por eles. A sombra, aqui considerada, é gerada por um foco de luz, distante o suficiente para que os raios de luz viajem na mesma direção. Baseamo-nos nas ideias de Charles L. Epstein [10] sobre reconstrução de imagens médicas, como no raio X, que nada mais é do que a reconstrução de um objeto através da sombra gerada por ele. O objetivo principal deste trabalho é chegar à função sombra e verificar se podemos utilizá-la para reconstruir o objeto que a gerou. Algo nada intuitivo é mostrar que curvas de largura constante determinam funções sombra diferentes, mas que na reconstrução não determinam exatamente a mesma curva de origem. Para isso conceitos importantes da Geometria Diferencial, como a parametrização e a curvatura de curvas planas, serviram de base para os estudos deste trabalho.

Palavras-chave: Curvas, Largura Constante, Triângulo de Reuleaux, Raio X, Sombra, Geometria Diferencial.

Abstract

Have you ever imagined a bicycle whose wheels did not have the shape of a circle? In this work we will study convex sets, more specifically sets that have the same characteristic of the circle, constant width. We will show that there are several curves that can replace the circle in some situations, for example in a bicycle wheel. Constant width sets are present in many areas of engineering, architecture and the designer of various products. The Reuleaux Triangle is the most common of them, an example of its application is a drill that generates a "square hole". Throughout the paper we will demonstrate, in two different ways, Barbier's Theorem, which states that every set of constant width m has perimeter πm , and we will see that among these sets, the circle is the one with the largest area and the triangle of Reuleaux has the smallest area. We wish to know the shape of convex sets through shadow generated by them. The shadow, here considered, is generated by a spotlight, distant enough that the rays of light travel in the same direction. We are based on the ideas of Charles L. Epstein [10] about reconstruction of medical images, as in X-ray, which is nothing more than the reconstruction of an object through the shadow generated by it. The main goal of this work is to reach the shadow function and verify if we can use it to reconstruct the object that generates it. Something not intuitive is to show that curves of constant width determine different shadow functions, but that in the reconstruction do not determine exactly the same curve of origin. For this, important concepts of Differential Geometry, such as parameterization and curvature of flat curves, served as a basis for the studies of this work.

Keywords: Curves, Constant Width, Reuleaux Triangle, X-Ray, Shadow, Differential Geometry.

Conteúdo

1. Introdução	10
2. Conjuntos de Largura Constante	11
2.1. Conjuntos Compactos	11
2.2. Largura de um Conjunto	12
2.3. Teorema de Barbier	15
3. Curvas de Largura Constante	21
3.1. Curvas de Largura Constante	21
3.1.1. Círculo	22
3.1.2. Triângulo de Reuleaux	23
3.1.3. Polígonos de Reuleaux	24
3.1.4. Curvas Paralelas aos Polígonos de Reuleaux	27
3.1.5. Curva Formada por Retas Concorrentes	29
3.2. Comparando a Área	32
3.3. Aplicações do Triângulo de Reuleaux	33
4. Função Sombra	38
4.1. Retas Orientadas	39
4.2. Equação da Sombra	41
4.3. Reconstruções Aproximadas: A Matemática dos Raios X	44
5. Conclusão	48
A. Fundamentação Teórica	50
A.1. Vetores no Plano	50
A.2. Função Vetorial	52
A.3. Parametrização de Curvas	53
A.4. Campo de Vetores	58
A.5. Curvatura	59
A.6. Teorema de Barbier	62
B. Construções no GeoGebra	65
B.1. Triângulo de Reuleaux	65
B.2. Polígono de Reuleaux	66
B.3. Curvas Paralelas aos Polígonos de Reuleaux	68
B.4. Curva Formada por Retas Concorrentes	70
B.5. Furo Quarado	72
B.6. Sombra - Retas Suportes ao Triângulo de Reuleaux	75
Referências Bibliográficas	78

1 Introdução

O objetivo de estudo deste trabalho são os conjuntos convexos, mais especificamente os de largura constante. O exemplo mais comum desse tipo de curva é o círculo. Mas será que o círculo é a única curva a apresentar essa característica? Veremos que existem infinitas curvas que, assim como o círculo, possuem a largura constante. A mais conhecida entre elas é o Triângulo de Reuleaux, curva construída a partir de um triângulo equilátero, que leva esse nome em homenagem ao físico alemão Franz Reuleaux.

O capítulo 2 trará, inicialmente, alguns conceitos importantes como a área e o perímetro de conjuntos compactos e demonstrará a partir de polígonos circunscritos e inscritos o Teorema de Barbier o qual afirma que todos os conjuntos de largura constante m possuem o mesmo comprimento do círculo, isto é, comprimento igual a πm .

O capítulo 3 descreverá a construção de algumas curvas de largura constante, demonstrando a validade do Teorema de Barbier por meio de cálculos do perímetro de cada curva. Ainda por meio da medida da área dessas curvas, chegaremos a uma explicação mais precisa ao Teorema que afirma que dentre todas as curvas de largura constante m a de maior área é o círculo e a de menor área é o Triângulo de Reuleaux. Por fim, esse capítulo mostrará algumas aplicações do Triângulo de Reuleaux na arquitetura, designer de produtos e nas engenharias civis e mecânica.

Um breve estudo sobre retas orientadas é feito no capítulo 4 que tem como objetivo o estudo da sombra de regiões estritamente convexas. A sombra, aqui considerada, é gerada por um foco de luz distante o suficiente para que os raios de luz viajem em uma mesma direção. Determinamos, também nesse capítulo, a função sombra e ressaltamos a distinção entre curvas de largura constante por meio dessa mesma função, algo nada intuitivo, pois se elas têm a mesma largura, como podem possuir sombras diferentes? E por fim, uma reconstrução aproximada da curva nos fez deparar com um problema que, ocasionado por erro em algumas medições da sombra, resultou na descoberta de regiões diferentes da original, mas com a mesma largura.

Alguns conceitos da Geometria Diferencial, como a parametrização e a curvatura de curvas planas e uma outra prova para o Teorema de Barbier são apresentados no Apêndice A. As figuras apresentadas ao longo do trabalho foram construídas com a ajuda do software GeoGebra, o passo a passo de algumas estão disponíveis no Apêndice B.

2 Conjuntos de Largura Constante

Neste capítulo abordaremos conceitos essenciais de conjuntos, como área e perímetro, e demonstraremos Teoremas importantes como o de Barbier o qual afirma que todo conjunto de largura constante m , como o círculo, tem perímetro πm . As definições e as demonstrações usadas aqui podem ser encontradas nos capítulos 1 e 5 de [19].

Algumas definições iniciais, como conjunto limitado, conjunto fechado e conjunto convexo, são de extrema importância para que se compreenda o significado de conjuntos compactos de largura constante, sendo assim abordadas primeiramente neste capítulo.

2.1. Conjuntos Compactos

O estudo de conjuntos, neste trabalho, será voltado para o plano, embora alguns resultados possam ser generalizados para \mathbb{R}^n . A distância entre os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ no plano, é o número

$$d(A, B) = \|A - B\| = \|B - A\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Para definirmos se um ponto pertence ou não a um determinado conjunto, usamos o conceito de disco aberto e disco fechado.

Definição 2.1 (Disco Aberto/Fechado). *Para qualquer ponto $X \in \mathbb{R}^2$ e dado o número real $\delta > 0$ o disco aberto $D(X, \delta)$, com centro em X e raio δ , é o conjunto de pontos*

$$D(X, \delta) \equiv \{Y \in \mathbb{R}^2 : d(X, Y) < \delta\}.$$

Um disco fechado é o conjunto de pontos $\bar{D}(X, \delta) \equiv \{Y \in \mathbb{R}^2 : d(X, Y) \leq \delta\}$.

Assim dizemos que um ponto X é ponto no interior de um conjunto C se houver um $\delta > 0$ tal que $D(X, \delta) \subset C$. Um conjunto C é dito *aberto* se todos os seus pontos estiverem no interior de C e será *fechado* se o seu complemento C é aberto, ou seja, $\bar{C} = \mathbb{R}^2 - C = \{x : x \in \mathbb{R}^2 \text{ e } x \notin C\}$.

Definição 2.2 (Conjunto Limitado). *Seja O a origem do plano, então um conjunto C é dito limitado se $C \subset D(O, \delta)$, para algum $\delta > 0$.*

A união de todos os conjuntos abertos contidos em C formam o seu interior, já um *conjunto fechado* C é formado pela intersecção de todos os conjuntos fechados que o contém.

Definição 2.3 (Conjunto Compacto). *Um subconjunto do plano fechado e limitado é dito compacto.*

Exemplo 2.1. *Os conjuntos A , B e C (FIG. 2.1) são, respectivamente:*

$A = \{(x, y) : -1 \leq x < 2 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$ *é limitado, mas não é aberto e nem fechado.*

$B = \{(x, y) : (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$ *é um disco, centrado em $(-1, 1)$ com raio 2, fechado e limitado, portanto é um conjunto compacto.*

$C = \{(x, y) : x - y > 1\}$ *é aberto e não limitado.*

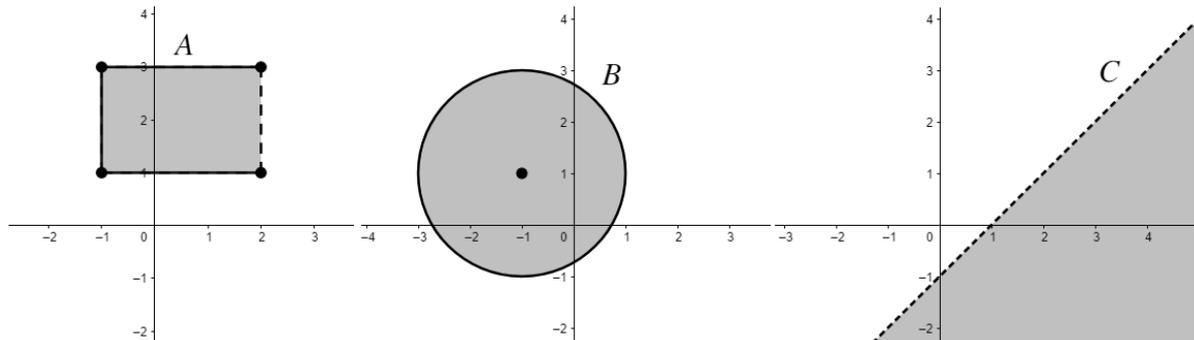


Figura 2.1.

2.2. Largura de um Conjunto

Dado um conjunto fechado C , Lübeck [13] define *reta suporte* como uma reta t que toca C , garantindo que C está em um dos semiplanos definidos por t . Em cada direção, existem duas retas suportes para C , que são paralelas (FIG. 2.2).

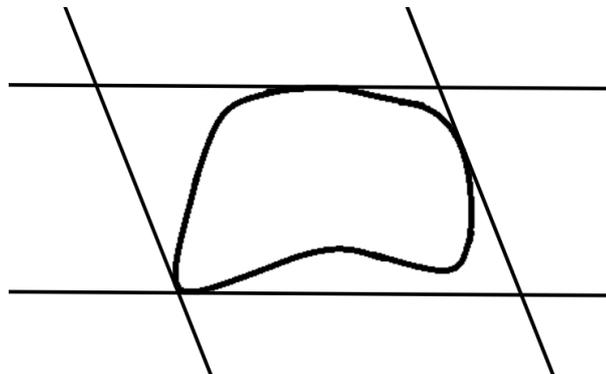


Figura 2.2.

Definição 2.4 (Largura). *A largura de um conjunto compacto C , em uma determinada direção, é dada pela distância entre as retas suportes paralelas.*

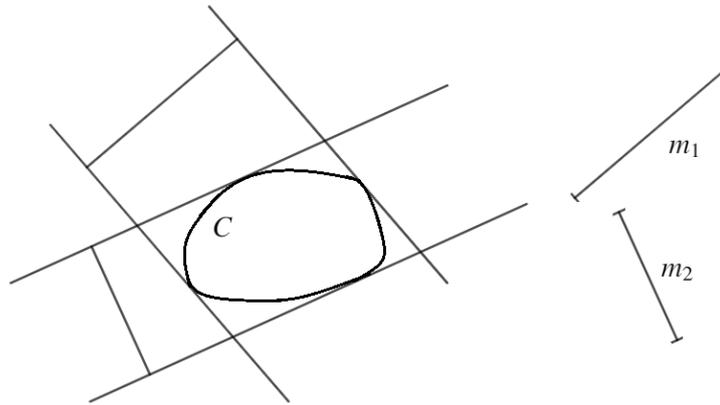


Figura 2.3.: m_1 e m_2 são as larguras do conjunto C em direções diferentes.

O diâmetro de C é o número $d \equiv \sup\{\|X - Y\| : X, Y \in C\}$. O seguinte Teorema mostra a relação entre diâmetro e largura.

Teorema 2.1. *A largura máxima de um conjunto compacto C é o diâmetro de C .*

Demonstração. Seja m a largura máxima de C e considere t_1 e t_2 retas suportes que estão na direção da largura máxima, sendo $X = t_1 \cap C$ e $Y = t_2 \cap C$, então podemos afirmar que $m = \|X - Y\|$. De fato se o segmento \overline{XY} for perpendicular às retas t_1 e t_2 , então $m = \|X - Y\|$ é verdade. Suponhamos que o segmento \overline{XY} não seja perpendicular às retas t_1 e t_2 , então existem as retas paralelas t_3 e t_4 suportes a C e perpendiculares à reta que contém o segmento \overline{XY} (FIG. 2.4).

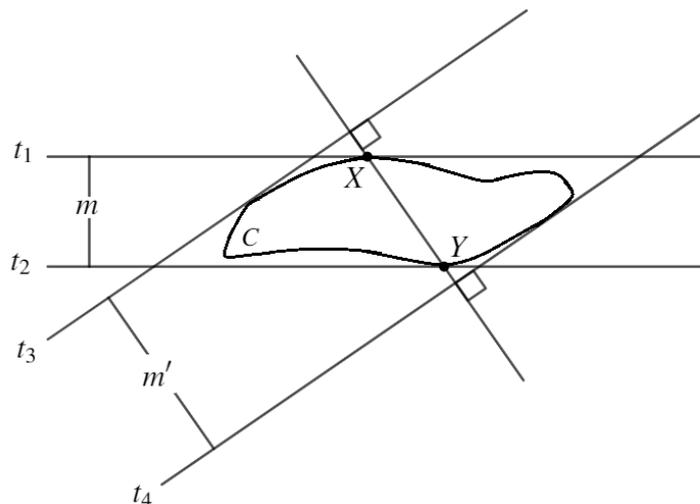


Figura 2.4.

Seja m' a distância entre as retas t_3 e t_4 , assim

$$m < \|X - Y\| \leq m'.$$

Mas isso contradiz o fato de m ser a largura máxima de C , logo o segmento \overline{XY} é perpendicular às retas t_1 e t_2 .

Sejam P e Q pontos quaisquer de C e w a largura de C na direção de \overline{PQ} , então

$$\|X - Y\| = m \geq w \geq \|P - Q\|.$$

Portanto, m é o diâmetro. □

Corolário 2.1. *Seja C um conjunto compacto e t_1 e t_2 retas suportes paralelas em uma direção de largura máxima.*

- i. *Se X é um ponto de C , de modo que $X = C \cap t_1$ e l é uma reta perpendicular à t_1 passando por X , então l intersecta t_2 em Y , de modo que $Y \in C$.*
- ii. *t_1 e t_2 intersectam C nos pontos X e Y , respectivamente, e a reta que contém esses pontos é perpendicular à t_1 e t_2 .*

Demonstração.

- i. Se l é perpendicular à t_1 , então existe um ponto de t_2 onde l o intersecta perpendicularmente, seja Y esse ponto, assim podemos afirmar que a largura máxima de C é dada por $m = \|X - Y\|$. Suponhamos que $Y \notin C$, então existe $Z \in C$ de modo que Z também pertence à t_2 (FIG. 2.5). Os pontos X , Y e Z formam um triângulo retângulo em Y , então podemos concluir que $\|X - Z\| > \|X - Y\| = m$, mas isso contradiz a hipótese de m ser a largura máxima de C . Portanto, $Y \in C$.

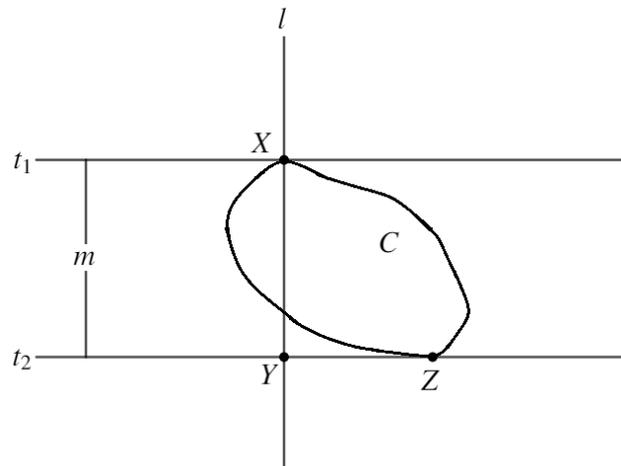


Figura 2.5.

- ii. Suponhamos agora que t_2 toca C em pelo menos dois pontos, Y e W . Como \overline{XY} é perpendicular à t_2 , pelo item anterior, temos um triângulo XYW retângulo em Y , assim $\|X - W\| > \|X - Y\|$, mas novamente temos uma contradição, pois $\|X - Y\|$ é a largura máxima de C , portanto, t_2 toca C em um único ponto. De modo análogo, t_1 intersecta C em um único ponto. Suponhamos então que t_1 e t_2 tocam C respectivamente nos pontos X e Y e que o segmento

\overline{XY} não é perpendicular às retas t_1 e t_2 . Como, por hipótese, a distância entre as retas t_1 e t_2 é m , largura máxima de C , temos $\|X - Y\| > m$, novamente um absurdo, portanto o segmento \overline{XY} é perpendicular às retas t_1 e t_2 . \square

Definição 2.5 (Conjunto Convexo). *Uma região C é dita convexa se para quaisquer dois pontos X e Y o segmento $\overline{XY} \subset C$.*

Definição 2.6 (Conjunto Estritamente Convexo). *Um conjunto convexo, fechado e não vazio C é estritamente convexo se, dados dois pontos X e $Y \in C$, o segmento \overline{XY} está no interior de C .*

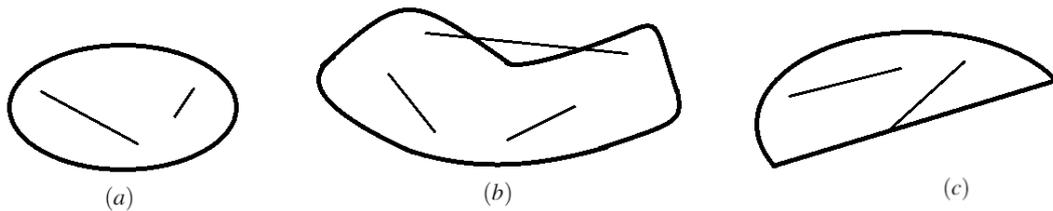


Figura 2.6.: (a) é um conjunto estritamente convexo, (b) é um conjunto não convexo e (c) é um conjunto convexo

Definição 2.7 (Conjunto de Largura Constante). *C é um conjunto de largura constante se a sua largura é a mesma em todas as direções.*

O círculo e o Triângulo de Reuleaux são os casos mais comuns de conjuntos de largura constante, inicialmente, definiremos círculo, os demais conjuntos serão apresentados no capítulo 3.

Definição 2.8 (Círculo). *O círculo de centro O e raio R é o conjunto de todos os pontos X tais que $d(O, X) = \|X - O\| = R$.*

Observação 2.1. *No caso em que C é uma curva de largura constante, segue do Corolário 2.1 que, se $C \cap t_1$ e $C \cap t_2$ e t_1 e t_2 são retas suportes paralelas, então o segmento \overline{XY} é ortogonal às retas t_1 e t_2 . E, se t é uma reta suporte a C , então $t \cap C$ consiste de um único ponto, ou seja, C é estritamente convexa [23].*

2.3. Teorema de Barbier

As definições de *perímetro* e *área* não são nada fáceis quando se trata de conjuntos convencionais. A área e o perímetro de conjuntos convexas se aproximam à do polígono regular inscrito ou circunscrito à medida que o tamanho do lado diminui e o número de lados aumenta (FIG. 2.7).

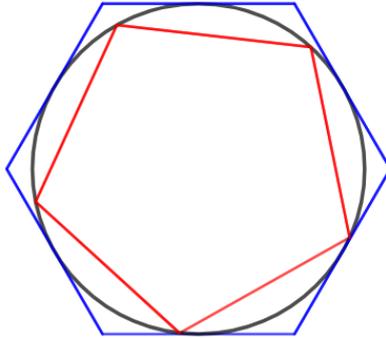


Figura 2.7.: Círculo inscrito em um hexágono e circunscrito à um pentágono

Definição 2.9 (Perímetro). *O perímetro de um conjunto compacto convexo não vazio é o comprimento de sua borda e é igual ao supremo (ínfimo) dos perímetros de todos os polígonos convexos inscritos (circunscritos).*

Definição 2.10 (Área). *A área de um conjunto compacto convexo não vazio é igual ao supremo (ínfimo) das áreas de todos os polígonos convexos inscritos (circunscritos).*

O método de exaustão, que é uma aplicação das definições acima, será usado para a demonstração do Lema a seguir, para saber mais sobre esse método verifique em [5].

Lema 2.1. *O perímetro do círculo de raio R é $2\pi R$.*

Demonstração. Faremos uma comparação entre polígonos regulares inscritos e circunscritos, para isso usaremos polígonos com 2^n lados, sendo n inteiro e $n \geq 2$. Consideremos um círculo de raio R e p_n o polígono regular inscrito com lado l_n e perímetro c_n . Para mudarmos de p_n para p_{n+1} usamos o ponto médio dos arcos formados pelos vértices do polígono p_n (FIG. 2.8).

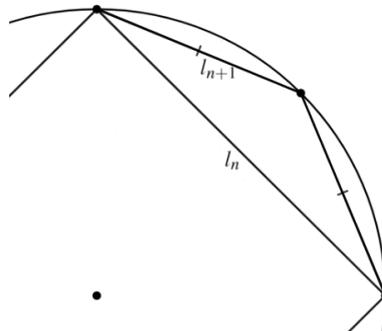


Figura 2.8.

Pela desigualdade triangular, podemos afirmar que $l_n < 2l_{n+1}$, para todo $n \geq 2$, então

$$c_n = 2^n l_n < 2^n 2l_{n+1} = 2^{n+1} l_{n+1} = c_{n+1}$$

que nos garante que a sequência $\{c_n\}$ é positiva e crescente.

Consideremos então P_n o polígono circunscrito de 2^n lados sendo C_n o seu perímetro e L_n o seu lado, do mesmo modo que $\{c_n\}$ é crescente concluímos que $\{C_n\}$ é decrescente. Para $n = 2$ temos $C_2 = 8R > c_n$ (FIG. 2.9), então a sequência $\{c_n\}$ é limitada, logo podemos definir o perímetro do círculo como $l(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

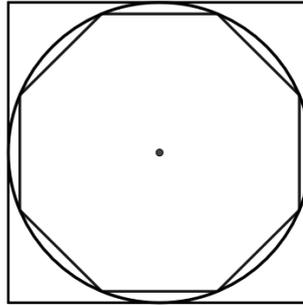


Figura 2.9.

Usando as relações trigonométricas no triângulo ABC isósceles (FIG. 2.10) obtemos

$$\text{sen}(\pi/2^n) = \frac{l_n/2}{R}, \text{ logo } l_n = 2R \text{sen}(\pi/2^n).$$

Assim,

$$l(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n 2R \text{sen}(\pi/2^n) = 2R \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \text{sen}(\pi/2^n). \quad (2.1)$$

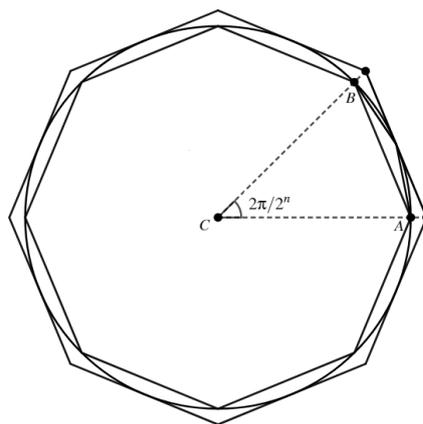


Figura 2.10.

Se tomarmos os diferentes raios R_1 e R_2 temos, pela equação (2.1), que

$$\frac{l(c_1)}{2R_1} = \frac{l(c_2)}{2R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \text{sen}(\pi/2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{\pi \text{sen}(\pi/2^n)}{(\pi/2^n)} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(\pi/2^n)}{(\pi/2^n)} = \pi \cdot 1 = \pi,$$

ou seja, para qualquer valor de R a razão $\frac{l(c)}{2R}$ será sempre π . Portanto, da equação (2.1) concluímos que

$$l(c) = 2\pi R.$$

□

O Teorema de Barbier estabelece que um Triângulo de Reuleaux, assim como qualquer outro conjunto de largura constante m , também possui perímetro πm . Para demonstração precisamos do Lema a seguir.

Lema 2.2. *Seja $ABCD$ um losango e duas cordas \overline{MN} e \overline{PQ} , perpendiculares à diagonal \overline{BD} , cuja distância entre elas é m , em semiplanos distintos em relação a \overline{AC} . Então o perímetro do hexágono $APQCNM$ não depende da posição de \overline{MN} e \overline{PQ} .*

Demonstração. O perímetro P do hexágono $APQCNM$ é dado por

$$P = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QC} + \overline{CN} + \overline{NM} + \overline{MA}. \quad (2.2)$$

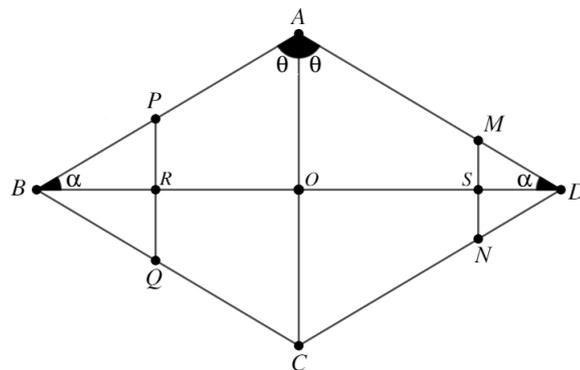


Figura 2.11.

Consideremos os triângulos QBP , CBA , CDA e NDM semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo-Ângulo (AAA) (FIG. 2.11), seja x a medida dos lados do losango, $y = \overline{PB} = \overline{BQ}$, $z = \overline{ND} = \overline{DM}$, $m = \overline{RS}$ e $w = \overline{RO}$, então, dos triângulos isósceles PBQ , NDM e $ABC \equiv CDA$, existem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\overline{PQ}}{2}}{y} &= \text{sen } \alpha, & \text{logo } \overline{PQ} &= 2y \text{sen } (\alpha), \\ \frac{\frac{\overline{NM}}{2}}{z} &= \text{sen } \alpha, & \text{logo } \overline{NM} &= 2z \text{sen } (\alpha), \\ \frac{\overline{BO}}{x} &= \frac{\overline{OD}}{x} = \text{sen } \alpha, & \text{logo } \overline{BO} &= \overline{OD} = x \text{cos } (\alpha). \end{aligned}$$

Os triângulos QBP e NDA são semelhantes aos triângulos CBA e CDA , respectivamente, pelo caso AAA, então

$$\frac{y}{x} = \frac{x \cos(\alpha) - w}{x \cos(\alpha)}, \quad \text{logo} \quad y = \frac{x \cos(\alpha) - w}{\cos(\alpha)},$$

$$\frac{z}{x} = \frac{x \cos(\alpha) - (m - w)}{x \cos(\alpha)}, \quad \text{logo} \quad z = \frac{x \cos(\alpha) - m + w}{\cos(\alpha)}.$$

Então $y + z = \frac{2x \cos(\alpha) - m}{\cos(\alpha)}$, substituindo estes resultados na equação (2.2), temos

$$\begin{aligned} P &= (x - y) + 2y \sin(\alpha) + (x - y) + (x - z) + 2z \sin(\alpha) + (x - z) \\ &= 4x + 2(y + z)[\sin(\alpha) - 1] \\ &= 4x + 2 \left(2x - \frac{m}{\cos(\alpha)} \right) (\sin(\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do hexágono depende apenas de três fatores: a distância m entre as cordas, um dos ângulos e a medida do lado do losango. \square

Teorema 2.2 (Barbier). *Seja C um conjunto de largura constante m , então o perímetro de C é πm .*

Demonstração. Sejam O um círculo de diâmetro m e C um conjunto de largura constante m . Aplicaremos o método da indução finita para mostrar que O e C podem ser circunscritos por polígonos equiangulares (ângulos iguais) de 2^n lados e de mesmo perímetro.

Hipótese de Indução: polígonos equiangulares de 2^n lados, circunscritos em O e C , possuem perímetros iguais.

Caso básico: $n = 2$, O e C são circunscritos por quadrados de mesmo perímetro (FIG. 2.12).

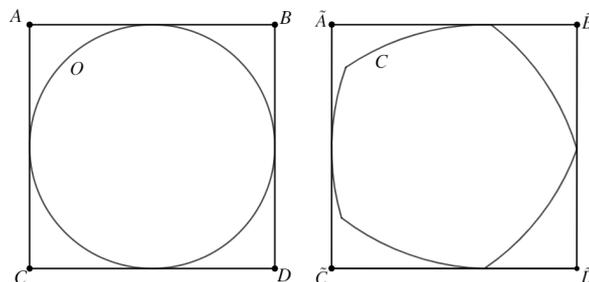


Figura 2.12.

Sejam $ABCD$ e $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ quadriláteros equiangulares que circunscvem, respectivamente, os conjuntos O e C , os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos, assim como \overline{AC} e \overline{BD} , com distância m entre eles, pois os lados são segmentos de retas suportes a O . O mesmo vale para o polígono $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$, como os quadriláteros possuem a mesma altura, então eles são quadrados

equivalentes.

Por hipótese, polígonos equiangulares de 2^n lados, circunscritos em O e C , possuem perímetros iguais, então consideremos os lados adjacentes \overline{BE} e \overline{BF} opostos à \overline{DH} e \overline{DG} , respectivamente (FIG. 2.13 - adaptada de [19]). Prolongando esses lados obtemos o losango $ABCD$, que será congruente ao losango $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ obtido pelo prolongamento de $\tilde{B}\tilde{E}$, $\tilde{B}\tilde{F}$, $\tilde{D}\tilde{G}$ e $\tilde{D}\tilde{H}$, isso é possível porque os ângulos \hat{D} , \hat{B} , $\hat{\tilde{D}}$ e $\hat{\tilde{B}}$ são congruentes por hipótese, e a distância entre os lados \overline{AD} e \overline{BC} , e \overline{AB} e \overline{DC} são iguais a largura da círculo O , do mesmo modo a distância entre os lados $\tilde{A}\tilde{D}$ e $\tilde{B}\tilde{C}$ e $\tilde{A}\tilde{B}$ e $\tilde{D}\tilde{C}$ são iguais a largura da curva C .

Traçamos então as retas \overline{PQ} e \overline{MN} suportes a O , perpendiculares a diagonal \overline{DB} , cuja distância entre elas é m , formando o hexágono $AMNCPQ$. De modo análogo temos as retas $\tilde{P}\tilde{Q}$ e $\tilde{M}\tilde{N}$ formando o hexágono $\tilde{A}\tilde{M}\tilde{N}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q}$, que, conforme o Lema 2.2, possui o mesmo perímetro de $AMNCPQ$. Do polígono inicial, trocamos os vértices D e B pelos vértices Q , P , M e N , respectivamente, (\tilde{D} e \tilde{B} pelos vértices \tilde{Q} , \tilde{P} , \tilde{M} e \tilde{N}), se refizemos esse processo em todos os vértices dos dois polígonos, o número de vértices irá dobrar e assim, passaremos a ter polígonos equiangulares de 2^{n+1} lados com perímetros iguais.

Concluimos, pelo princípio da indução finita, que polígonos equiangulares de 2^n lados, com n natural e maior do que 1, de mesmo perímetro, podem circunscrever a O e C . Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, o perímetro de C será igual a πm , que é igual ao perímetro do círculo O .

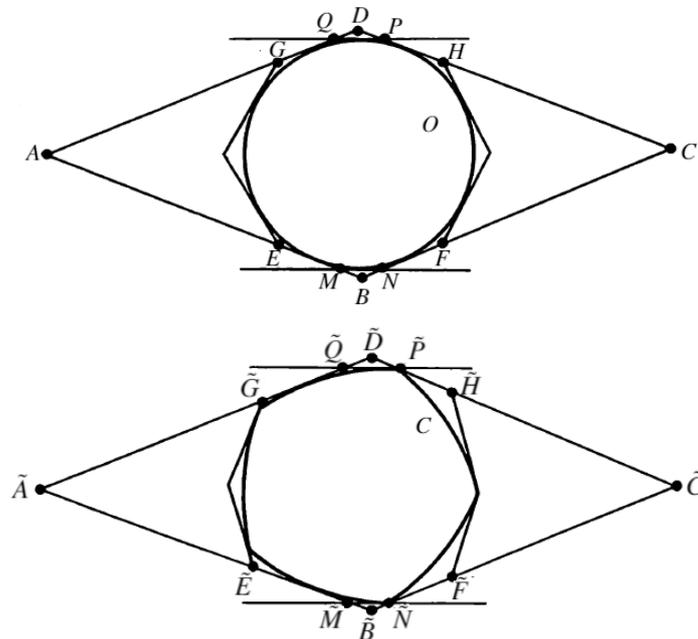


Figura 2.13.

□

3 Curvas de Largura Constante

Este capítulo é dedicado à descrição, construção e aplicação de curvas de largura constante, mais especificamente do Triângulo de Reuleaux. As referências utilizadas para esse capítulo são [15], [18] e [21].

3.1. Curvas de Largura Constante

Uma curva é dita de largura constante, como vimos no capítulo 2, se em todas as direções ela possuir sempre a mesma largura. Quando falamos de curvas de largura constante, logo pensamos no círculo, por ser o mais comum.

Os sólidos com secções circulares, por exemplo, o cilindro, são utilizados como base para transportar blocos desde a antiguidade, pois eles conservam a distância entre o chão e o bloco sempre constante (FIG. 3.1).

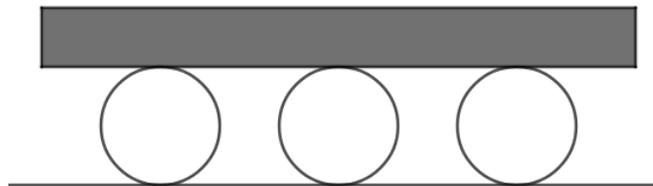


Figura 3.1.

A tampa do bueiro encontrada pelas ruas das cidades é circular, pois, independente da forma que ela girar, sempre se encaixará e nunca cairá no buraco, simplesmente por ser uma curva de largura constante. Outro exemplo são as moedas que, em sua maioria, são circulares, para que possam entrar com facilidade em máquinas de caça níqueis.

O *Triângulo de Reuleaux* foi usado pelo físico alemão Franz Reuleaux que desenvolveu mecanismos envolvendo uma curva plana construída a partir de um triângulo equilátero no século XIX. Formado pela união de três arcos de raio m e ângulo $\pi/3$ rad, centrados nos

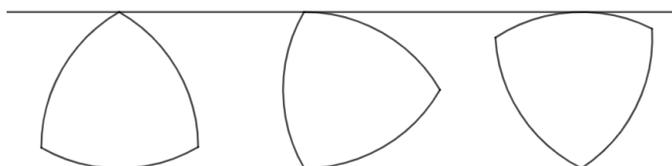


Figura 3.2.

vértices de um triângulo equilátero, o Triângulo de Reuleaux (FIG. 3.2) é uma curva de largura contante, assim como o círculo. Apesar de pouco conhecida tem sido encontrada em diversas áreas como na arquitetura e em algumas engenharias.

Existem infinitos tipos de curvas de largura constante, então um bloco pode ser transportado usando cilindros cuja as secções não sejam circulares (FIG. 3.3).

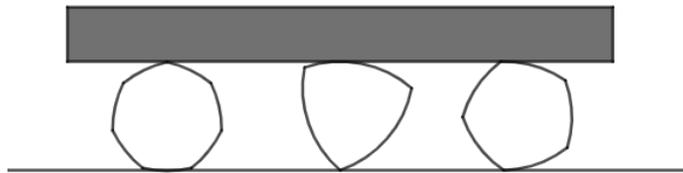


Figura 3.3.

Serão desenvolvidos, nessa seção, alguns exemplos de curvas de largura constante. O perímetro dessas curvas, independente de seu formato, é igual ao perímetro do círculo de mesma largura, como já é conhecido pelo Teorema de Barbier, mas, mesmo assim, esse fato será deduzido junto com a fórmula para cálculo da área da região englobada pela curva.

3.1.1. Círculo

O *círculo*, como definido no capítulo 2, é o conjunto de pontos X equidistantes a um ponto dado O , denominado centro. Para construí-lo é preciso apenas determinar a posição do centro e o tamanho do raio $R = d(X, O)$ (FIG. 3.4).

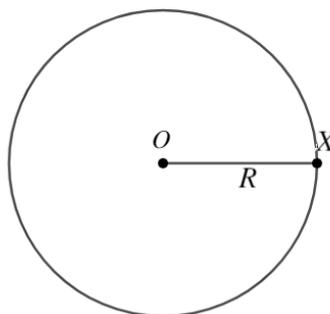


Figura 3.4.

A largura m de um círculo de raio R é o número $m = 2R$. Para calcular o perímetro P e a área A de um círculo de largura m usamos as fórmulas já conhecidas

$$P = 2\pi R = 2\pi \frac{m}{2} = \pi m,$$

$$A = \pi R^2 = \pi \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{\pi m^2}{4}.$$

3.1.2. Triângulo de Reuleaux

O *Triângulo de Reuleaux* é uma curva plana construída a partir de um triângulo equilátero, mas pode ser visto também como a união de três arcos de raio m e ângulo $\pi/3$ rad. Sua construção é muito simples e pode ser feita de duas formas diferentes. Uma forma é, a partir de um triângulo equilátero de vértices A , B e C , traçarmos um arco com centro em A e extremidades nos outros dois vértices, depois repetimos o processo com os vértices B e C (FIG. 3.5). Nesse caso temos uma curva de largura constante m , onde m é a medida dos lados do triângulo usado como base para a construção.

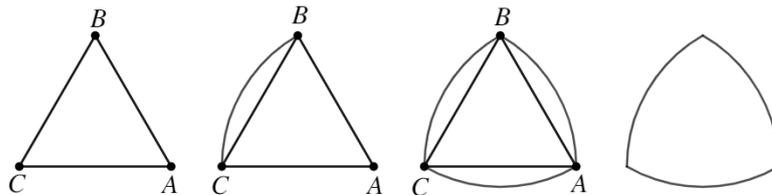


Figura 3.5.

Uma outra forma de construir o Triângulo de Reuleaux é a partir da interseção de três círculos de mesmo raio. A partir de dois pontos dados A e B , traçamos três círculos de raio \overline{AB} , sendo O_1 centrado em A , O_2 em B e O_3 com centro em $C = O_1 \cap O_2$ (FIG. 3.6). Percebemos facilmente que os pontos A , B e C formam um triângulo equilátero.

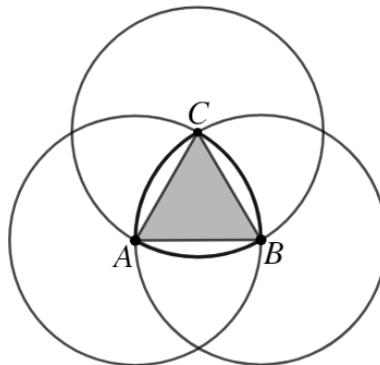


Figura 3.6.

O perímetro dessa curva pode ser obtido pela soma do comprimento de três arcos de ângulo $\pi/3 \text{ rad}$ e raio m , isto é,

$$P = 3 \cdot \frac{\pi m}{3} = \pi m,$$

conforme foi provado no Teorema de Barbier é igual ao comprimento do círculo de largura m .

A área pode ser obtida ao somarmos a área dos três segmentos circulares formados ao redor do triângulo, que é a área do setor menos a área do triângulo, isto é

$$A_{\text{seg. circular}} = \frac{\pi m^2}{6} - \frac{m^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{m^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

com a área do triângulo equilátero de lado m com a

$$A = 3 \frac{m^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} + \frac{m^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{m^2(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Ou com a soma das áreas dos três setores circulares, subtraindo duas vezes a área do triângulo equilátero de lado m

$$A = 3 \frac{\pi m^2}{6} - 2 \frac{m^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{m^2(\pi - \sqrt{3})}{2}. \quad (3.1)$$

3.1.3. Polígonos de Reuleaux

Qualquer polígono regular com uma quantidade ímpar de lados pode originar uma curva de largura constante, conhecida como *Polígonos de Reuleaux*. A construção é semelhante à do Triângulo de Reuleaux, os arcos são construídos usando os vértices como centro e extremidades nos lados oposto (FIG. 3.7).

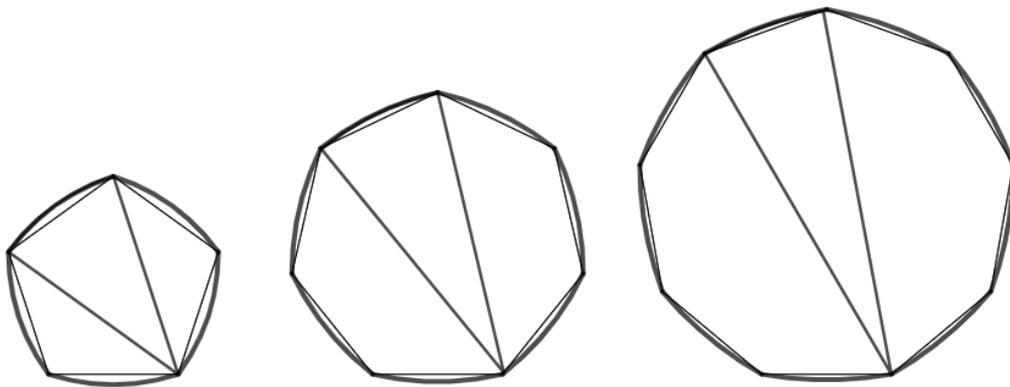


Figura 3.7.: Polígonos de Reuleaux construídos a partir de polígonos equiláteros, de 5, 7 e 9 lados, respectivamente

Apenas polígonos com uma quantidade ímpar de lados podem originar curvas de largura constante, pois se o número de lados for par os vértices não são opostos a lados, mas sim a outros vértices, com isso não é possível formar arcos com extremidades nos vértices (FIG. 3.8).

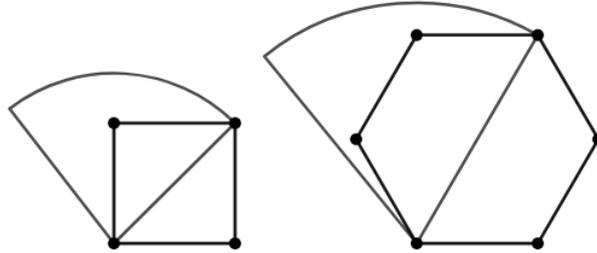


Figura 3.8.

Para chegarmos ao perímetro e à área de um Polígono de Reuleaux consideremos n o número de lados do polígono regular, m a medida da diagonal, c a medida do lado e π/n rad o ângulo de cada setor (FIG. 3.9).

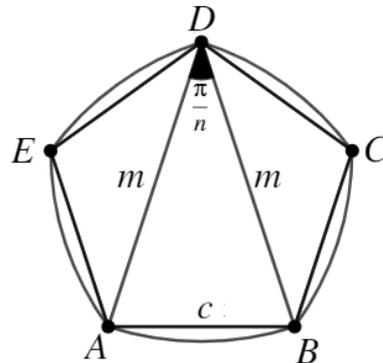


Figura 3.9.

O perímetro é a soma dos n arcos de raio m e ângulo π/n rad, então, como já é esperado, temos

$$P = n \frac{\pi m}{n} = \pi m.$$

Para a fórmula da área é preciso relembrar algumas relações importantes, seja h a medida da altura do triângulo ABD e a o apótema do polígono. Usando relações trigonométricas chegamos a $c = 2m \operatorname{sen}(\pi/2n)$ e $A_{\Delta ABC} = \frac{m^2 \operatorname{sen}(\pi/n)}{2}$, com isso podemos escrever a área do segmento circular como a área do setor menos a área do triângulo, isto é

$$A_{\text{seg. circular}} = \frac{\pi m^2}{2n} - \frac{m^2 \operatorname{sen}(\pi/n)}{2} = \frac{m^2}{2} \left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right]. \quad (3.2)$$

O apótema a é a medida do raio do círculo inscrito no polígono (FIG. 3.10), e pode ser dado por

$$\tan(\pi/n) = \frac{c/2}{a} \implies a = \frac{c/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{2m \operatorname{sen}(\pi/2n) \cos(\pi/n)}{2 \operatorname{sen}(\pi/n)} = \frac{m \cos(\pi/n)}{2 \cos(\pi/2n)}.$$

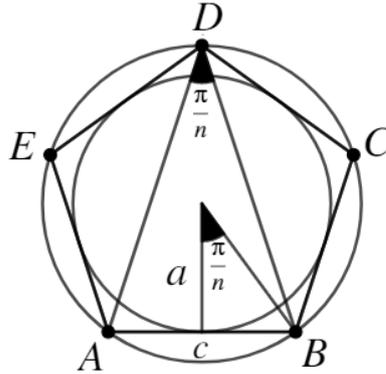


Figura 3.10.

Assim, considerando p como o perímetro do polígono, temos

$$\begin{aligned} A_{pol. regular} &= \frac{pa}{2} = n \cdot 2m \operatorname{sen}(\pi/2n) \cdot \frac{m \cos(\pi/n)}{2 \cos(\pi/2n)} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{n m^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Enfim, a área de um Polígono de Reuleaux de n lados e largura m é a soma dos n segmentos circulares obtidos em (3.2) com a área do polígono (3.3), isto é,

$$\begin{aligned} A &= \frac{n m^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)} + n \frac{m^2}{2} \left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right] \\ &= \frac{n m^2}{2} \left[\frac{\cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)} + \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nos Polígonos de Reuleaux, existem pontos em que é possível traçar retas suportes em direções diferentes, isto é, no mesmo ponto existe mais de uma reta suporte, esses pontos são os vértices do polígono que dão origem à curva, (FIG. 3.11). Para confirmar que os Polígonos de Reuleaux são curvas de largura constante, observamos que a distância entre as retas suportes é dada pelo segmento que une os pontos de intersecção entre as retas e a curva, isto é, o raio dos arcos.

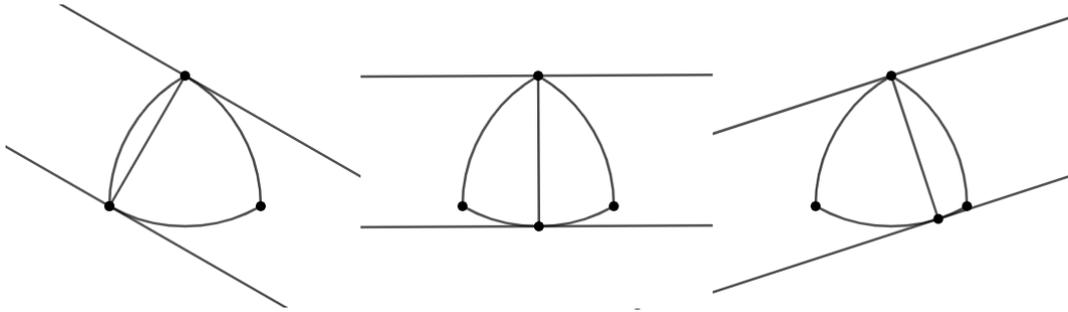


Figura 3.11.

3.1.4. Curvas Paralelas aos Polígonos de Reuleaux

Um outro tipo de curva de largura constante, semelhante aos Polígonos de Reuleaux, pode ser construída usando como base polígonos regulares com um número ímpar de lados. Faremos, ao longo do capítulo, uma construção para o triângulo e outra para o pentágono, mas a última servirá para qualquer polígono com mais de três lados.

Iniciamos prolongando os lados do triângulo. Em um dos vértices, traçamos um círculo de raio r qualquer e marcamos os pontos A' e A'' , formados pelas interseções do círculo com os lados \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente (FIG. 3.12). Em seguida construímos um arco com centro em A e extremidades em A' e A'' .

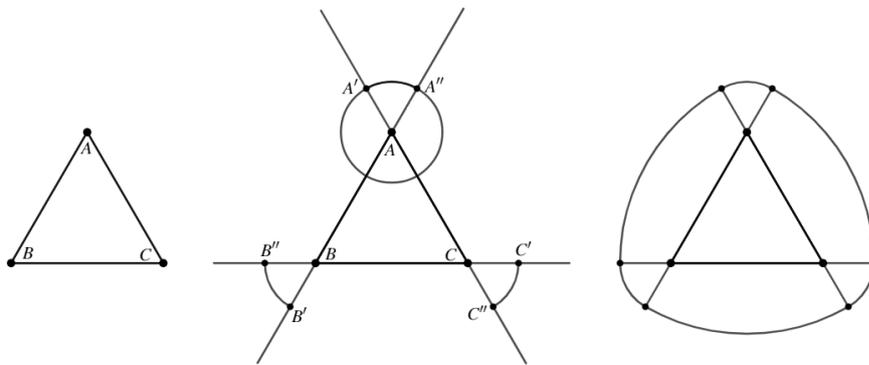


Figura 3.12.

Repetimos o processo nos vértices B e C , usando o mesmo raio r . Para finalizar construímos os arcos centrados em A e extremidades em B' e C'' , repetindo igualmente nos vértices B e C . Esta curva terá largura igual a soma do lado l do triângulo com duas vezes o raio r do círculo, isto é, $m = l + 2r$. Um procedimento semelhante pode ser realizado em qualquer polígono regular com uma quantidade ímpar de lados, mas, ao invés de prolongarmos os lados, devemos prolongar as diagonais (FIG. 3.13). A largura dessas curvas também é $m = l + 2r$.

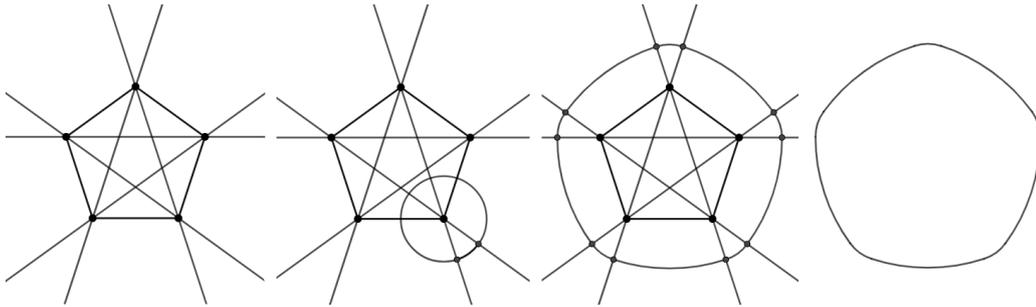


Figura 3.13.

Sabendo as medidas l e r (FIG. 3.14), o perímetro será a soma dos n arcos de raio $l+r$ com os n arcos de raio r , isto é,

$$P = n \left(\frac{\pi(l+r)}{n} + \frac{\pi r}{n} \right) = \pi(l+2r) = \pi m.$$

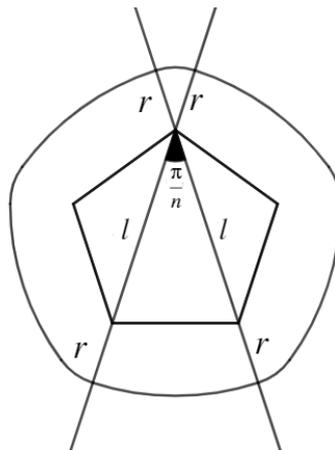


Figura 3.14.

Para a área, somamos a área do polígono cuja diagonal mede l ,

$$A_{pol. \text{ regular}} = \frac{n l^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)}$$

com a área dos n arcos de raio r e das n regiões circulares, formado pela diferença entre o segmento circular de raio $l+r$ e o triângulo isósceles de dois lados medindo l , assim obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{n l^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)} + n \left[\frac{\pi r^2}{2n} + \left(\frac{\pi(l+r)^2}{2n} - \frac{l^2 \operatorname{sen}(\pi/n)}{2} \right) \right] \\ &= \frac{n l^2}{2} \left[\frac{\cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right] + \frac{\pi}{2} [r^2 + (r+l)^2]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Diferente dos Polígonos de Reuleaux, nessa curva cada ponto possui apenas uma reta suporte, pois os vértices do polígono não fazem parte da curva. Ela recebe esse nome por possuir tangentes paralelas ao Polígono de Reuleaux (FIG. 3.15).

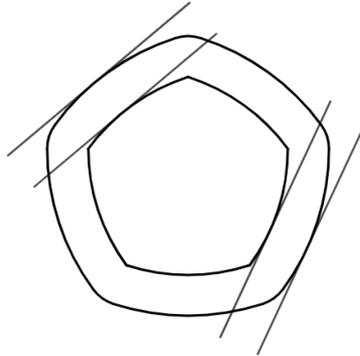


Figura 3.15.

A distância entre as retas suportes dessa curva é dada pelo segmento \overline{XY} que é soma do raio de dois arcos, isso acontece porque, pelo corolário 2.1, o segmento \overline{XY} é perpendicular às retas suportes e, como sabemos, toda reta perpendicular a uma reta tangente, no ponto de tangência, de um círculo passa pelo seu centro (FIG. 3.16).

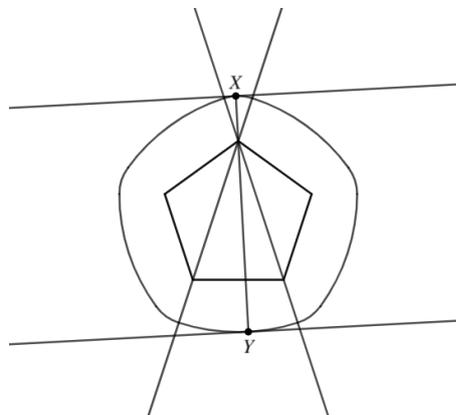


Figura 3.16.

3.1.5. Curva Formada por Retas Concorrentes

Essas curvas são construídas a partir de retas, todas concorrentes entre si (FIG. B.12). Inicialmente escolhemos uma das interseções entre as retas, o ponto escolhido será o centro de um círculo de raio qualquer. Começando então pelo ponto A temos, G e H interseções entre o círculo e as retas que passam por A . O arco GH , centrado em A , é o primeiro arco da curva. O próximo arco tem centro em E e raio \overline{EH} , observe que E é ponto de interseção entre as retas

que dão origem ao novo arco. Continuando o processo, temos os arcos centrado em D , C , A , E , D e C e raios \overline{DI} , \overline{CJ} , \overline{AK} , \overline{EL} , \overline{DM} e \overline{CN} , respectivamente.

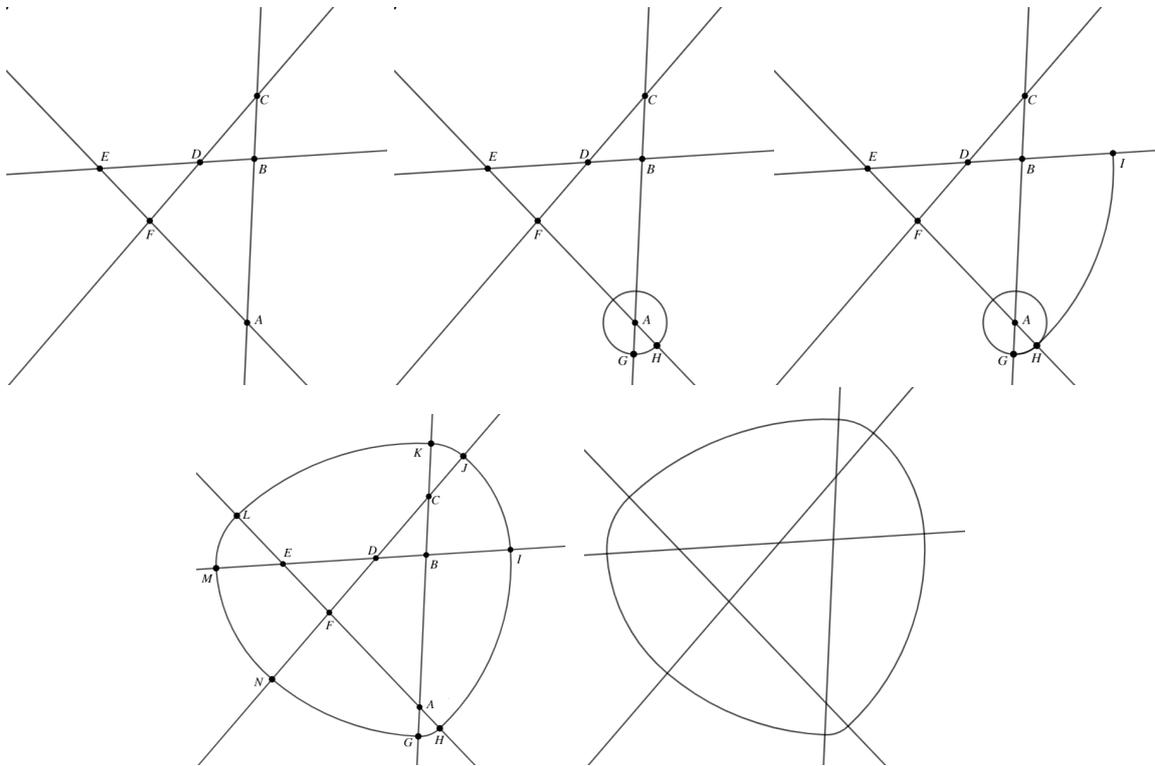


Figura 3.17.

Observe que os pontos B e F não foram utilizados como centro de nenhum arco, caso eles fossem escolhidos teríamos um círculo (FIG. 3.18).

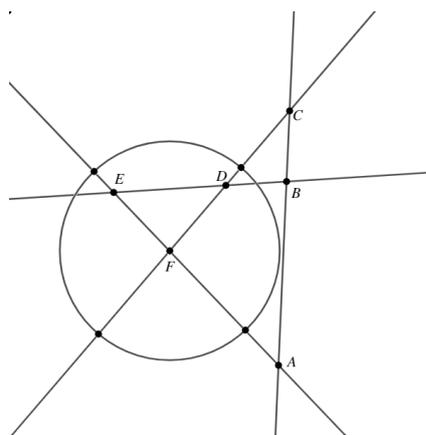


Figura 3.18.

A largura dessa curva é dada pela distância entre pontos extremos de arcos em uma mesma reta, ou seja, a largura será igual a media dos segmentos $\overline{LH} = \overline{MI} = \overline{NJ} = \overline{GK}$.

É fácil perceber que esses segmentos são congruentes (FIG. 3.19-a), as equações a seguir são verdadeiras, pois são segmentos que pertencem ao mesmo arco

$$b + c + d = e + f + g \quad (3.6)$$

$$a + b = m + l \quad (3.7)$$

$$c + d = k + j \quad (3.8)$$

$$m + l + k = g + h + i. \quad (3.9)$$

Somando a na equação (3.6) garantimos que os segmentos \overline{LH} e \overline{MI} são iguais, da mesma forma, somando j na equação (3.9) temos que $\overline{NJ} = \overline{GK}$. Por fim, se somarmos as equações (3.7) e (3.8) temos que $\overline{MI} = \overline{NJ}$, portanto

$$\overline{LH} = \overline{MI} = \overline{NJ} = \overline{GK}.$$

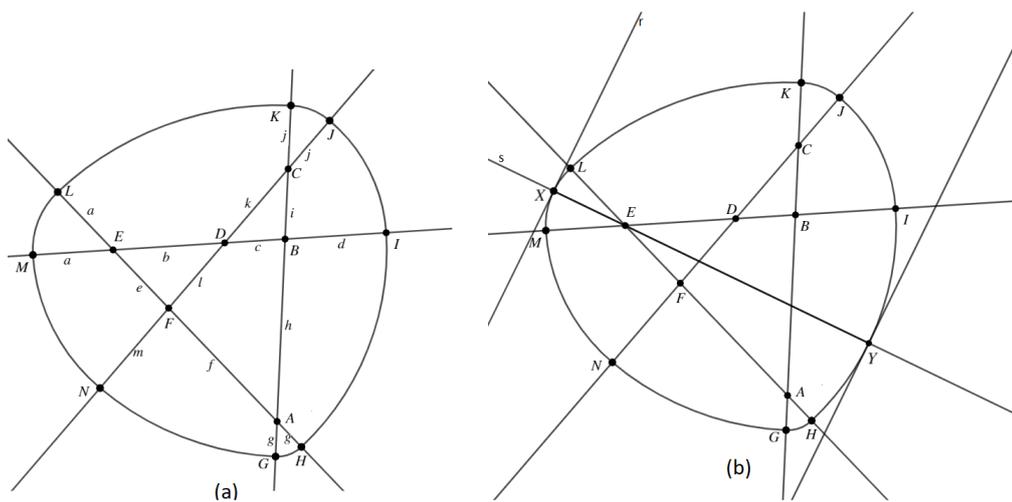


Figura 3.19.

Podemos considerar a largura da curva na direção de qualquer outra reta (FIG. 3.19-b), considere X um ponto do arco ML e r a reta suporte nesse ponto, s é perpendicular a reta r em X , então $E \in s$ e s toca o arco HI em Y , a reta t é suporte à curva em Y , logo as retas t e s são perpendiculares. Assim, a distância entre as retas r e t é dada por $\|X - Y\|$ que é igual ao raio dos ML e IH , ou seja, igual ao segmento \overline{MI} , portanto a largura dessa curva será sempre constante.

Para esse tipo de curva, também é possível calcular perímetro e área, porém é necessário saber a medida dos ângulos entre as retas e a medida do raio de cada setor.

3.2. Comparando a Área

Já sabemos que independente da forma de construção das curvas de largura constante m elas sempre terão comprimento πm , como foi provado no Teorema de Barbier e comprovado com os cálculos feitos acima. Para a área dessas curvas, existe uma relação muito importante a qual diz que dentre todas as curvas de largura constante m a de menor área é o Triângulo de Reuleaux e a de maior área é o círculo.

Quando pensamos nos Polígonos de Reuleaux é intuitivo entender que a curva de maior área é o círculo e a de menor é o Triângulo de Reuleaux, afinal eles foram construídos a partir de polígonos regulares que por sua vez podem ser inscritos num círculo. Mostraremos que para os Polígonos de Reuleaux e para as curvas paralelas a eles isso é verdade.

A equação da área (3.4) para os Polígonos de Reuleaux de largura m é uma sequência monótona e crescente, assim, quando $n = 3$ o polígono de menor área será o Triângulo de Reuleaux e quando $n \rightarrow \infty$ a área tende para $\frac{\pi m^2}{4}$, isto é, para a área do círculo de raio $\frac{m}{2}$, vejamos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n m^2}{2} \left[\frac{\cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)} + \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right] \\ &= \frac{m^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/2n)} \operatorname{sen}(\pi/2n) \frac{(\pi/2n)}{(\pi/2n)} + n \frac{\pi}{n} - n \operatorname{sen}(\pi/n) \frac{(\pi/n)}{(\pi/n)} \right] \\ &= \frac{m^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{\pi \cos(\pi/n)}{2n \cos(\pi/2n)} \frac{\operatorname{sen}(\pi/2n)}{(\pi/2n)} + \pi - n \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi/n)}{n (\pi/n)} \right] \\ &= \frac{m^2}{2} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \pi - \pi \cdot 1 \right) \right] = \frac{m^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi m^2}{4}. \end{aligned}$$

Se fizermos esse procedimento para a área das curvas paralelas aos Polígonos de Reuleaux de largura m , encontrada em (3.5), também chegaremos a área do círculo.

Vamos então comparar a menor curva paralela ao Polígono de Reuleaux com Triângulo de Reuleaux, ambos com a mesma largura m (FIG. 3.20). A área da curva paralela ao Triângulo de Reuleaux, de largura $m = l + 2r$, é dada pela equação (3.5) quando $n = 3$, ou seja,

$$A = \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} + \pi r(r + l).$$

Ao substituir $m = l + 2r$ na equação (3.1) da área do Triângulo de Reuleaux de largura m , temos

$$\begin{aligned} \frac{m^2(\pi - \sqrt{3})}{2} &= \frac{(l + 2r)^2(\pi - \sqrt{3})}{2} \\ &= \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} + \pi r(r + l) - (r^2 + lr)(2\sqrt{3} - \pi) \\ &< \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} + \pi r(r + l). \end{aligned}$$

Portanto a área do Triângulo de Reuleaux é menor.

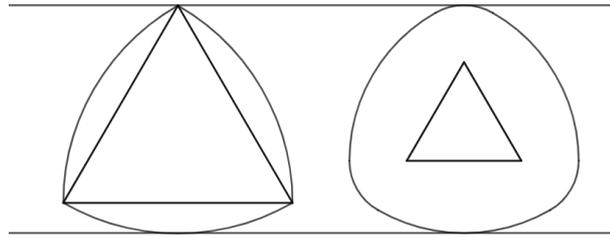


Figura 3.20.

O Teorema a seguir mostra que o círculo possui a maior área e o Triângulo de Reuleaux a menor, independentemente da curva, desde que tenham todas a mesma largura m . A demonstração desse Teorema será omitida, pois vai além dos objetivos deste estudo, ela está disponível na página 250 de [24].

Teorema 3.1. *Entre todos os conjuntos de largura constante m , o que possui a maior área é o círculo e o triângulo de Reuleaux a menor.*

3.3. Aplicações do Triângulo de Reuleaux

Algumas imagens na obra *Codex Madrid* de Leonardo da Vinci, no século XV, mostram alguns triângulos curvos. A janela da *Catedral de Notre Dame* do século XIII em Bruges na Bélgica (Fig. 3.21) e algumas referências que nos levam a Leonard Euler no século XVIII são registros que evidenciam a presença de triângulos curvos, mas o primeiro a estudar e fazer uso dessa curva foi Franz Reuleaux (1829-1905).



Figura 3.21.: Janela da Catedral de Notre Dame [12]

O Triângulo de Reuleaux é utilizado em várias áreas, por exemplo, nas engenharias mecânica e civil, na arquitetura e no designer de diversos produtos (Fig. 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27).



Figura 3.22.: Tampa de esgoto San Francisco [8]



Figura 3.23.: Moedas de Libras [25]



Figura 3.24.: Lápis [25]

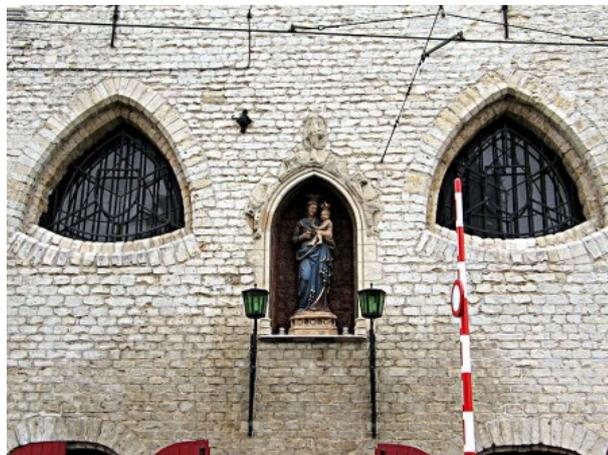


Figura 3.25.: Groot Vleeshuis (Gante, Bélgica) [25]



Figura 3.26.: Lixeira [25]



Figura 3.27.: Guan Baihua e sua bicicleta especial (China, 2009) [25]

Se colocarmos um Triângulo de Reuleaux de largura m para girar dentro de um quadrado de lado medindo m , observamos que a trajetória percorrida pelo Triângulo de Reuleaux se assemelha ao quadrado, porém com os vértices arredondados (FIG. 3.28).

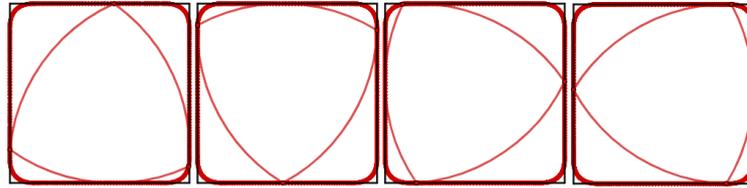


Figura 3.28.

Devido a esta especificidade, fazer "furos quadrados", o Triângulo de Reuleaux é muito utilizado na engenharia mecânica. Harry James Watts, em 1914, produziu uma broca inspirada no Triângulo de Reuleaux (FIG. 3.29), para produzir furos com formato aproximado de um quadrado.

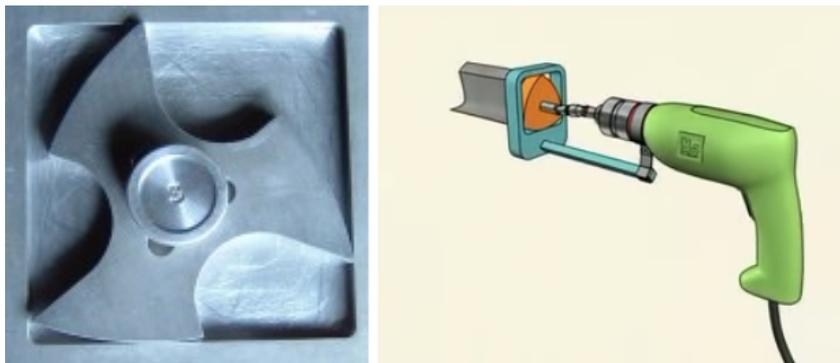


Figura 3.29.: Broca para "furo quadrado" [14] e [9]

O Triângulo de Reuleaux também é utilizado na produção de motores, como o Motor de Wankel (FIG. 3.30), que não faz uso dos pistões usuais, garantindo assim um motor menor e mais silencioso [14].

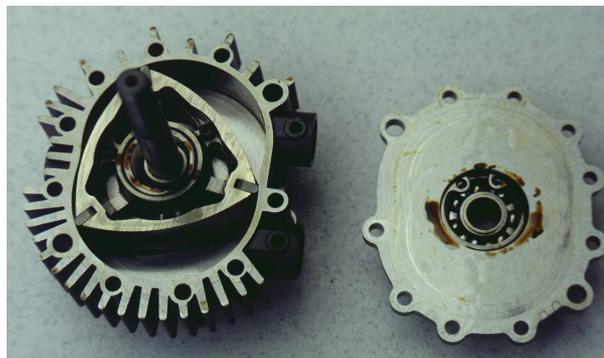


Figura 3.30.: Motor de Wankel [14]

4 Função Sombra

O objetivo deste capítulo é obter uma forma de distinguir regiões convexas, mais especificamente de largura constante, por meio da equação da sombra gerada por elas. Uma ideia nada intuitiva, afinal, se as curvas têm a mesma largura então não deveriam apresentar a mesma sombra? Charles L. Epstein [10] em *"Introduction to the Mathematics of Medical Imaging"* desenvolve essa ideia baseado na reconstrução de imagens médicas, por exemplo, o raio X, que nada mais é do que a reconstrução de um objeto através da sombra gerada por ele.

Consideremos uma região convexa C e uma fonte de luz em sua direção, supomos que a distância dessa fonte é grande o suficiente para que os raios de luz possam ser vistos como uma coleção de retas paralelas. Parte dessas retas são bloqueadas pela região C , formando uma sombra. Para medir essa sombra, imagine uma tela posicionada perpendicularmente aos raios de luz, do outro lado de C , assim a sombra será determinada pelas retas que tangenciam C (FIG. 4.1).

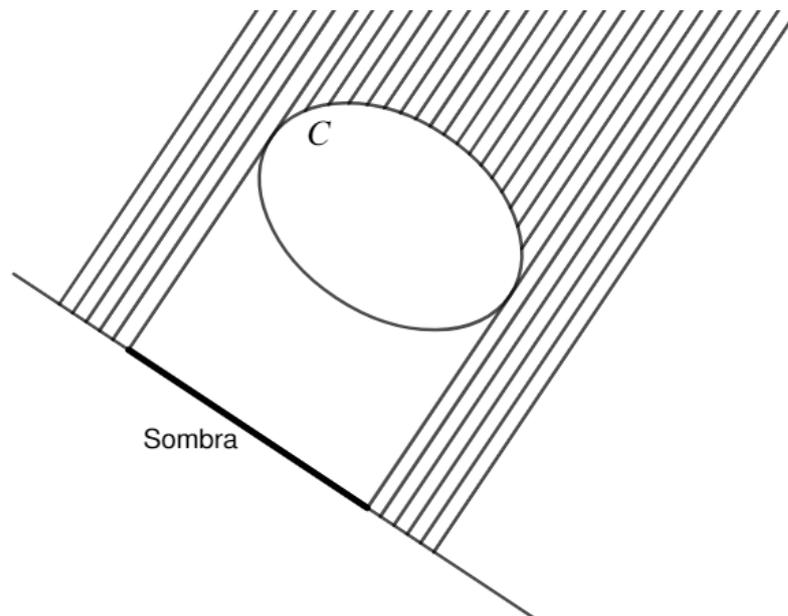


Figura 4.1.: Sombra de uma elipse

Como vimos na imagem, a sombra é determinada pela distância entre as retas que tangenciam a curva, logo para reconstruirmos uma imagem através de sua sombra, precisamos determinar esse par de retas. Para isso, vamos definir o espaço de todas as retas no plano.

4.1. Retas Orientadas

Uma reta r no plano é um conjunto de pontos que satisfazem a seguinte equação

$$ax + by = c,$$

os coeficientes a , b e c são números reais com a e b não simultaneamente nulos. O vetor $v = (-b, a)$ é vetor *diretor* da reta, pois possui a mesma direção de r , e o vetor $u = (-b, a)$ é perpendicular a r e é denominado vetor *normal* à reta.

Visto que $a^2 + b^2 \neq 0$, podemos reescrever a equação da reta da seguinte forma

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

assim $\omega = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ é um ponto no círculo unitário centrado na origem e $k = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ uma constante. Como vimos acima, uma reta no plano pode ser definida por um vetor $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ e um parâmetro k , denominada $r_{(k, \omega)}$, e descrita como um produto escalar, isto é,

$$r_{(k, \omega)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), \omega \rangle = x\omega_1 + y\omega_2 = k\}. \quad (4.1)$$

Observe que a reta não será alterada se trocarmos (k, ω) por $(-k, -\omega)$, isto é, $r_{(k, \omega)} = r_{(-k, -\omega)}$.

A parametrização de um ponto no círculo unitário centralizado na origem, conforme exemplo A.2, é

$$\omega(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

com $t \in [0, 2\pi]$, onde os pontos $\omega(t)$ e $\omega(t + 2\pi)$ são iguais, já que as funções seno e cosseno são periódicas e assim, definimos $r_{(k, t)} = r_{(k, \omega(t))}$ como o conjunto de soluções para

$$x \cos(t) + y \sin(t) = k.$$

Os vetores $\hat{\omega}(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ e $\omega(t) = (\cos(t), \sin(t))$ são perpendiculares, então para qualquer $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle \omega, (k\omega + s\hat{\omega}) \rangle = k,$$

portanto a reta r pode ser reescrita como

$$r_{(k, \omega)} = \{k\omega + s\hat{\omega} \mid s \in \mathbb{R}\}. \quad (4.2)$$

O vetor $-\hat{\omega}(t)$ também é perpendicular a ω , sendo $\hat{\omega}$ determinado de modo que a matriz quadrada $(\omega \hat{\omega})$ tenha determinante igual 1, isto é,

$$\begin{vmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 1,$$

então para qualquer $s \in \mathbb{R}$, o par (k, ω) determina uma reta orientada, e o vetor $\hat{\omega}$ determina uma direção positiva ao longo de $r_{(k, \omega)}$. O vetor ω é perpendicular à reta r e k é o parâmetro afim.

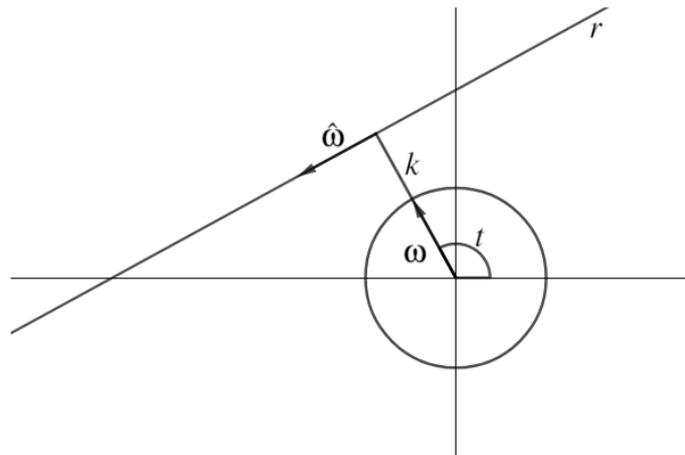


Figura 4.2.: Reta orientada pelo par (k, ω)

Lema 4.1 (Distância entre reta e ponto). *Seja r uma reta cuja equação geral é $ax + by + c = 0$ e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de \mathbb{R}^2 , a distância entre r e P é dada por*

$$d(r, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Usando esse lema cuja demonstração está disponível na página 84 de [11] e a equação da reta (4.1), concluímos que a distância entre a reta r e a origem do sistema é

$$d(r, O) = \frac{|0\omega_1 + 0\omega_2 - k|}{\sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}} = |k|.$$

Uma reta r qualquer determina dois semiplanos

$$H_{(k, \omega)}^+ = \{(x, y) \mid \langle (x, y), \omega \rangle > k\} \quad e \quad H_{(k, \omega)}^- = \{(x, y) \mid \langle (x, y), \omega \rangle < k\},$$

sendo que $H_{(k, \omega)}^-$ é o semiplano à esquerda de r na direção determinada por $\hat{\omega}$.

4.2. Equação da Sombra

A sombra de uma região é determinada pelo par de retas paralelas, suporte à região (FIG. 4.3), sejam r_0 e r_1 tais retas e o tamanho dessa sombra é dado por $|k_1 - k_0|$.

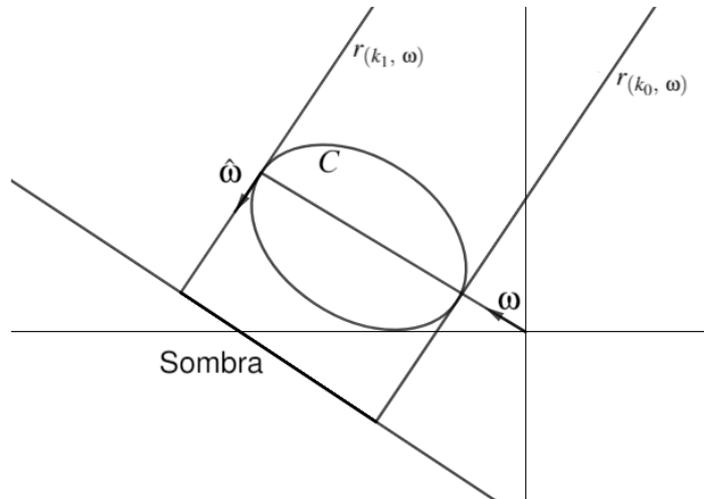


Figura 4.3.

Para chegarmos à equação da sombra precisamos determinar uma orientação para o bordo da região. Optaremos pela orientação positiva, que é o sentido anti-horário, ou seja, quando a região fica à esquerda da curva, nesse mesmo sentido fixamos a direção de $\omega(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Em um conjunto de retas paralelas existem duas que são tangentes a C , $r(k_0, \omega)$ e $r(k_1, \omega)$. Sendo $k_0 < k_1$, elas possuem orientações inversas, de acordo com a orientação dada para a curva, o que nos motiva a definir o parâmetro k como sendo a função sombra da curva.

Definição 4.1 (Função Sombra). *Seja C uma região estritamente convexa em \mathbb{R}^2 e $\omega(t) = (\cos(t), \sin(t))$ com $t \in [0, 2\pi]$. Para cada t , seja $r(k, \omega)$ a reta suporte definida por $\omega(t)$, a função sombra $h_C(t)$ da região C é $h_C(t) = k(t)$.*

Nesse caso a constante k depende diretamente do ângulo t , e pela equação (4.2) obtemos

$$r_{(h_C(t), \omega)} = \{h_C(t)\omega(t) + s\hat{\omega}(t) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 4.1 (Função Sombra do Círculo). *Considere um círculo O de raio $R = \sqrt{3}/2$ e centro $(0, 0)$, parametrizado por $\alpha(t) = (\sqrt{3}/2 \cos(t), \sqrt{3}/2 \sin(t))$, com $t \in [0, 2\pi]$, então a função sombra para o círculo será*

$$\begin{aligned} h_O(t) &= \left\langle \left(\sqrt{3}/2 \cos(t), \sqrt{3}/2 \sin(t) \right), (\cos(t), \sin(t)) \right\rangle \\ &= \sqrt{3}/2 \cos^2(t) + \sqrt{3}/2 \sin^2(t) = \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

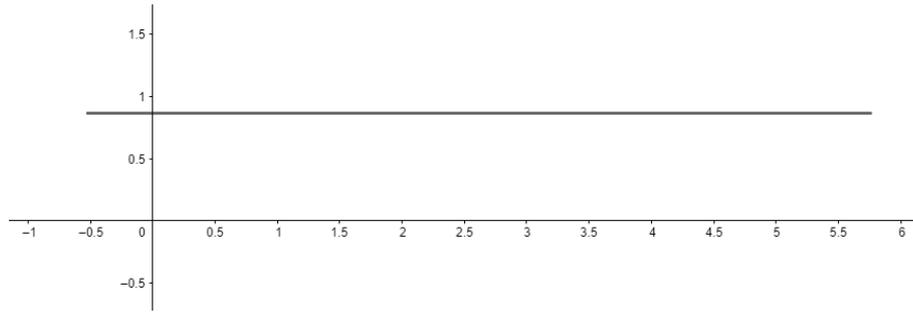


Figura 4.4.

O círculo é uma curva de largura e curvatura constante, e como já era de se esperar, a função sombra também será uma constante, nesse caso será a medida do raio, isto é, a metade da medida de sua largura (FIG.4.4).

Exemplo 4.2 (Função sombra do Triângulo de Reuleaux). *A função sombra do Triângulo de Reuleaux T , cuja parametrização foi feita no exemplo A.3, é*

$$h_T(t) = \begin{cases} \cos(t), & \text{se } t \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]; \\ \sqrt{3} - \frac{\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)}{2}, & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \frac{\sqrt{3}\sin(t) - \cos(t)}{2}, & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]; \\ \sqrt{3} + \cos(t), & \text{se } t \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]; \\ -\frac{\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)}{2}, & \text{se } t \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]; \\ \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}\sin(t) - \cos(t)}{2}, & \text{se } t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right]. \end{cases}$$

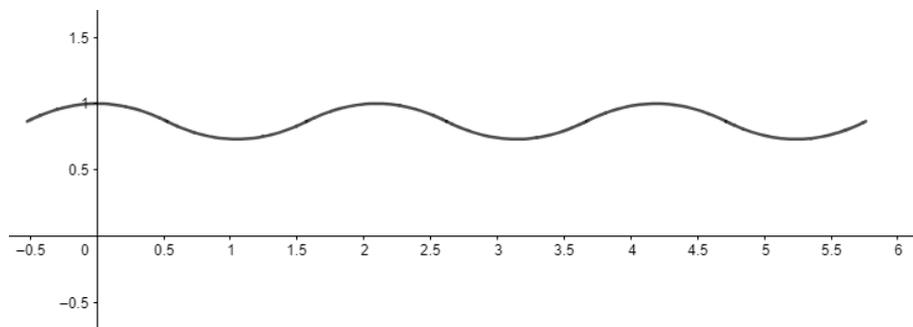


Figura 4.5.: Gráfico da Função Sombra do Triângulo de Reuleaux

A Proposição a seguir nos dá uma parametrização para o bordo de uma região em relação à reta tangente.

Proposição 4.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ a parametrização do bordo de C em relação à direção das retas tangentes, então*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = h_C(t)\omega(t) + h'_C(t)\hat{\omega}(t). \quad (4.3)$$

Demonstração. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ a parametrização do bordo de C dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in I = [0, 2\pi]$, sabemos que, para cada $t \in I$, temos um ponto de tangência de r com $\alpha(t)$, ou seja, $r_{(h_C(t), \omega)} \cap \alpha(t) = (x(t), y(t))$, então

$$(x(t), y(t)) = h_C(t)\omega(t) + s\hat{\omega}(t), \quad (4.4)$$

assim podemos encontrar uma função $s(t)$ para cada t . Para isso, lembramos que a direção da reta tangente de uma curva, parametrizada por $(x(t), y(t))$ em t_0 , é dada por $\alpha'(t_0)$ e que a derivada de ω é $\hat{\omega}$, então derivando a equação (4.4), temos

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t)) &= h'_C(t)\omega(t) + h_C(t)\hat{\omega}(t) + s'(t)\hat{\omega}(t) + s(t)(-\omega)(t) \\ &= (h'_C(t) - s(t))\omega(t) + (h_C(t) + s'(t))\hat{\omega}(t). \end{aligned}$$

Como a reta tangente a C é paralela a $\hat{\omega}$, temos que $h'_C(t) - s(t) = 0$, assim a equação (4.4) passa a ser

$$(x(t), y(t)) = h_C(t)\omega(t) + h'_C(t)\hat{\omega}(t),$$

que é uma representação paramétrica para a curva em relação a sua direção tangente. \square

Sendo C uma região convexa e h_C uma função sombra, então $C \rightarrow h_C$ é um mapeamento de regiões convexas para funções de período 2π . No caso em que $h_C(t)$ é duas vezes diferenciável, podemos escrever o vetor tangente a curva dada por $(x(t), y(t)) = h_C(t)\omega + h'_C(t)\hat{\omega}$, como

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t)) &= h'_C(t)\omega(t) + h_C(t)\hat{\omega}(t) + h''_C(t)\hat{\omega}(t) + h'_C(t)(-\omega)(t) \\ &= (h''_C(t) + h_C(t))\hat{\omega}(t). \end{aligned}$$

De acordo com a construção da função sombra, os vetores $(x'(t), y'(t))$ e $\hat{\omega}$ apontam na mesma direção, então $h''_C(t) + h_C(t) > 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Isso nos dá uma condição necessária para que uma função duas vezes diferenciável seja a função sombra de uma região estritamente convexa, tudo isso é uma suposição matemática que, para algum contexto, pode ser muito restrito.

Por fim, da equação (4.3), concluímos que

$$\langle \alpha(t), \omega(t) \rangle = \langle (h_C(t)\omega(t) + h'_C(t)\hat{\omega}(t)), \omega(t) \rangle = h_C(t).$$

No exemplo a seguir vamos mostrar uma relação entre a função sombra e a curvatura de uma curva estritamente convexa.

Exemplo 4.3. *Sejam $\alpha(t)$ parametrizada na direção das retas tangentes e h_C uma função de classe C^3 , então,*

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= h_C(t)\omega(t) + h'_C(t)\hat{\omega}(t), \\ \alpha'(t) = T(t) &= (h_C(t) + h''_C(t))\hat{\omega}(t), \\ \alpha''(t) = T'(t) &= -(h_C(t) + h''_C(t))\omega(t) + (h'_C(t) + h'''_C(t))\hat{\omega}(t), \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(h_C(t) + h''_C(t))^2 \sin^2(t) + (h_C(t) + h''_C(t))^2 \cos^2(t)} = h_C(t) + h''_C(t).\end{aligned}$$

Sendo $T(t) = (h_C(t) + h''_C(t))\hat{\omega}(t)$ então,

$$N(t) = \frac{(h_C(t) + h''_C(t))(-\cos(t), -\sin(t))}{\|(h_C(t) + h''_C(t))(-\cos(t), -\sin(t))\|^2} = -\omega(t).$$

Portanto, a curvatura de C será

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \langle T'(t), N(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{-(h_C(t) + h''_C(t))\omega(t) + (h'_C(t) + h'''_C(t))\hat{\omega}(t)}{(h_C(t) + h''_C(t))^2}, -\omega(t) \right\rangle \\ &= \frac{h_C(t) + h''_C(t)}{(h_C(t) + h''_C(t))^2} = \frac{1}{h_C(t) + h''_C(t)}.\end{aligned}$$

Observação 4.1. *Dada uma função $h(t)$ periódica e duas vezes diferenciável tal que $h''(t) + h(t) > 0$, segue de (4.3) que a curva*

$$\alpha(t) = h(t)\omega(t) + h'(t)\hat{\omega}(t)$$

é o bordo de uma região estritamente convexa C cuja função sombra é justamente $h(t)$.

Observação 4.2. *Sejam C e \tilde{C} bordas de duas regiões estritamente convexas, sendo h_C e $h_{\tilde{C}}$ as funções sombra dessas regiões, respectivamente. Se $h_C = h_{\tilde{C}}$ então segue da equação (4.3) que C e \tilde{C} são iguais.*

4.3. Reconstruções Aproximadas: A Matemática dos Raios X

O objetivo desta seção é reconstruir a curva a partir da função sombra gerada por ela, mas isso é possível? Na verdade não, mas chegaremos bem perto através de algumas aproximações.

Sabemos que uma curva convexa está sempre localizada em um dos semiplanos definidos pela reta suporte a ela. Como as bordas da curva C e da reta suporte $r_{(h(t), \omega(t))}$ possuem a mesma direção temos que C pertence ao semiplano $H_{(h(t), \omega(t))}^- = \{(x, y) \mid \langle (x, y), \omega \rangle < k\}$.

A função sombra de uma curva é calculada em um conjunto de ângulos $\{h_C(t_1), h_C(t_2), h_C(t_3) \cdots, h_C(t_m)\}$, assim podemos concluir que C está contida no polígono convexo P_m gerado pela interseção dos semiplanos $H_{(h(t_j), \omega(t_j))}^-$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, isto é, C está contido em

$$P_m = \bigcap_{j=1}^m H_{(h(t_j), \omega(t_j))}^-.$$

Isso nos dá uma boa aproximação da curva. Usaremos a equação (4.3) para a reconstrução exata da curva, mas aqui nos depararemos com um problema, pois nem todas as funções sombra possuem derivada, isto é, nem sempre $h'_C(t)$ existe. Nesses casos podemos usar aproximações finitas para a derivada e assim determinamos um conjunto finito de pontos próximos ao limite de C com a seguinte equação

$$(x(t_j), y(t_j)) = h_C(t_j)\omega(t_j) + \frac{h_C(t_j) - h_C(t_{j+1})}{t_j + t_{j+1}}\hat{\omega}(t_j).$$

Uma aproximação do Triângulo de Reuleaux pode ser obtida por meio da função sombra gerada no exemplo 4.2, usando $|\theta_j - \theta_{j+1}| = \pi/3$ (FIG. 4.6).

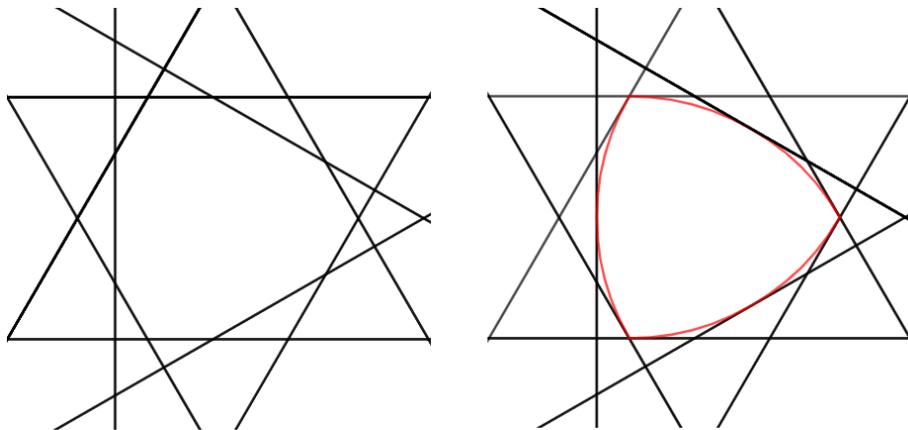


Figura 4.6.

Isso significa que quanto menor o intervalo $|\theta_j - \theta_{j+1}|$ melhor será a aproximação, fazendo com que os vértices do polígono P_m fiquem próximos aos pontos da curva. Com uma aproximação exata, teremos os vértices de P_m exatamente iguais aos da curva e assim o polígono P_m é que estaria contido em C . Uma melhor aproximação para a curva do Triângulo de Reuleaux é dada quando fazemos $|\theta_j - \theta_{j+1}| = \pi/180$ (FIG. 4.7).

Consideremos $m_C(t)$ a largura da sombra de uma curva C em uma determinada direção, então

$$m_C(t) = h_C(t) + h_C(t + \pi).$$

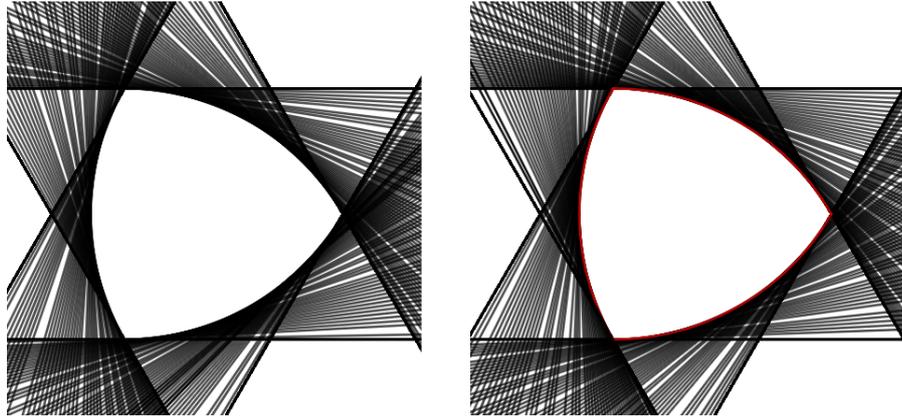


Figura 4.7.

A função sombra $h_C(t)$, dada a partir de uma série de ângulos, possui erro em sua medição, ao qual chamaremos de $e(t)$. Sabemos que a função h_C de uma região estritamente convexa possui duas derivadas e que $h_C'' + h_C > 0$.

Se tivermos uma função suave tal que

$$h_C'' + h_C + e'' + e > 0,$$

então a função $h_C + e$ também representa a sombra de uma região estritamente convexa. Nos casos em que $e(t) \neq 0$ e $e(t) + e(t + \pi) = 0$, a função $h_C(t) + e(t)$ representa uma região \tilde{C} com a mesma largura de C , ou seja,

$$m_C(t) = (h_C(t) + e(t)) + (h_C(t + \pi) + e(t + \pi)) = m_{\tilde{C}}(t).$$

Nos casos em que as curvas são de largura constante o problema do erro da medição fica evidente, pois existem inúmeras curvas de largura constante e com as mesmas medições. Se reduzirmos as medições feitas anteriormente, usando agora $|\theta_j - \theta_{j+1}| = 2\pi/3$ (FIG. 4.8), obteremos um polígono de seis lados que circunscreve duas curvas com a mesma largura.

Aí fica a pergunta, como faremos para diferenciá-las? A resposta para essa pergunta utiliza conceitos matemáticos mais avançados os quais fogem dos objetivos desse trabalho que é apresentar a matemática do raio X por meio de um modelo simplificado mais acessível.

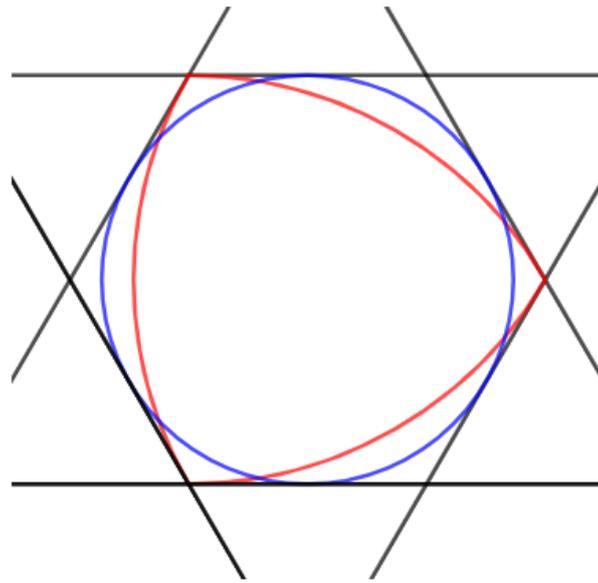


Figura 4.8.

5 Conclusão

O objetivo desse trabalho foi apresentar uma aplicação matemática, mais especificamente da geometria, que possibilitasse seu emprego em algum campo da ciência, como no modelo simplificado para a descrição de objetos através do raio X.

Esse trabalho teve como inspiração o texto *“Curves of constant width and their shadows”*, de Lucie Paciotte, [17] que faz um estudo sobre a sombra de regiões de largura constante e que nos direcionou para o texto *“Introduction to the Mathematics of Medical Imaging”*, de Charles L. Epstein, [10] que trata da reconstrução de imagens a partir da sombra gerada por elas.

Inicialmente realizamos um estudo acerca das curvas de largura constante que, apesar de serem pouco conhecidas, estão presente em vários objetos já alguns séculos e provamos de duas formas diferentes que as curvas de largura constante não podem ser diferenciadas pelo comprimento de seu perímetro.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, fizemos um estudo sobre regiões planas o qual gerou um capítulo inteiro voltado para o estudo da Geometria Diferencial e que poderá servir de referência para outras pesquisas. O software GeoGebra também foi um importante instrumento utilizado durante toda a pesquisa, pois possibilitou várias construções geométricas, primordiais para o entendimento dos conceitos pesquisados.

Para chegarmos à função sombra, primeiramente, foi preciso entender o que seria essa sombra, para isso consideramos um foco de luz distante o suficiente de modo que os raios viajem em linha reta. A sombra de um objeto é então determinada pelos raios tangentes a ele. Num contexto geométrico, a sombra aqui considerada, é a projeção ortogonal de um objeto em um determinado plano. Logo a sombra de uma região é determinada pelas retas tangentes a ela. Assim a função sombra, de regiões estritamente convexas, é dada pela distância das retas tangentes que são parametrizadas pelo ângulo de um círculo unitário centrado na origem do plano cartesiano.

Percebemos que regiões diferentes possuem função sombra diferentes, mesmo que possuam a mesma largura, como vimos nos exemplos (4.1) e (4.2) onde calculamos a função sombra do círculo e do Triângulo de Reuleaux, respectivamente.

Dada a função sombra de uma região estritamente convexa, é possível determinar a equação paramétrica dessa região? Se a função sombra for diferenciável sim, caso contrário devemos fazer aproximações e determinar polígonos que circunscrevem a região e que se aproximam muito de sua borda. Nesse caso, como fazer para diferenciar regiões de largura constante? Para responder a essa pergunta seria necessário um estudo de técnicas mais avançadas que deixaremos aqui como proposta para novos trabalhos. Logo, é importante ressaltar

que o término desse trabalho não esgota as possibilidades de investigações que podem ser exploradas em pesquisas futuras.

A Fundamentação Teórica

Faremos um breve estudo de parametrização de curvas de largura constante, mas revisaremos, primeiramente, alguns conceitos importantes de curvas planas, um dos vários tópicos de Geometria Diferencial cujo estudo foi fundamentado nas obras [3], [13] e [23]. Faremos também um resumo sobre vetores, com definições, operações e propriedades, conceito de grande importância relacionado ao conhecimento de parametrização, para saber mais buscar em [1], [4], [11] e [22].

A.1. Vetores no Plano

Dados dois pontos A e B em \mathbb{R}^2 definimos \overline{AB} como um *segmento orientado* de extremidades A e B partindo de A para B . Sendo assim, o segmento \overline{BA} terá sentido oposto ao de \overline{AB} . Se dois segmentos orientados \overline{AB} e \overline{CD} possuem o mesmo comprimento, são colineares ou paralelos e possuem o mesmo sentido, então eles são ditos *segmentos equipolentes* e representados por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (FIG. A.1).

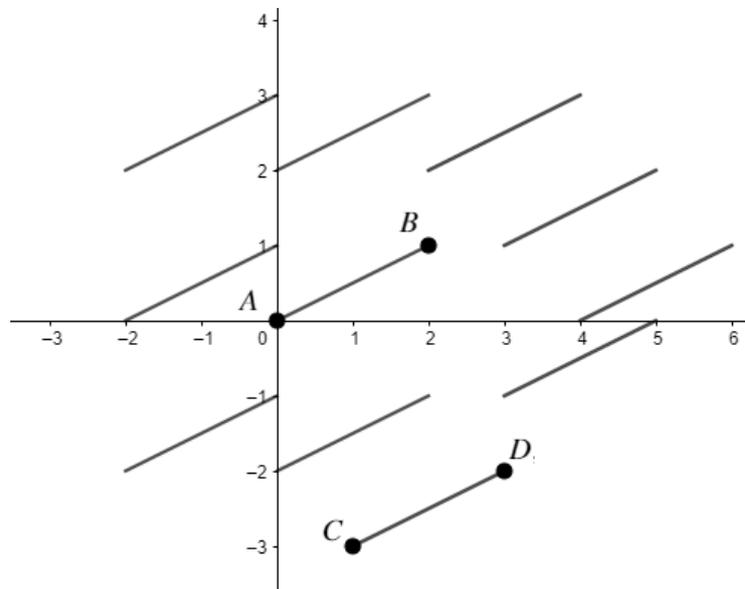


Figura A.1.

Definição A.1 (Vetor). *Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos de \mathbb{R}^2 , o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a \overline{AB} cujas coordenadas são*

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Se $A = B$ temos um *vetor nulo* $\vec{v} = \vec{0}$ de coordenadas $\vec{v} = (0, 0)$. A operação *soma dos vetores* é a operação que associa os vetores $\vec{v} = \vec{AB}$ e $\vec{u} = \vec{BC}$ ao vetor \vec{AC} , ou seja, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Em termos de coordenadas, considere $\vec{v} = (x_1, y_1)$, $\vec{u} = (x_2, y_2)$, então $\vec{v} + \vec{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Para a operação soma valem as propriedades comutativa, associativa, e a existência de um elemento neutro ($\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$) e de um inverso ($\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$).

A *multiplicação por escalar* é o produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\vec{v} = (x, y)$, ou seja, $\lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y)$. Geometricamente, trata-se de uma mudança no tamanho do vetor que pode aumentar se $|\lambda| > 1$, diminuir $|\lambda| < 1$ ou permanecer o mesmo se $|\lambda| = 1$ e mantendo o mesmo sentido se $\lambda > 0$ ou com sentido invertido se $\lambda < 0$. Valem as propriedades associativa, distributiva e existência de um elemento neutro ($1 \vec{v} = \vec{v}$).

Um vetor é *múltiplo* do outro se existir algum $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Se $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, então \vec{v} é uma *combinação linear* dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Caso não exista nenhum $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, então, qualquer vetor \vec{w} pode ser escrito, de forma única, como combinação linear de \vec{v} e \vec{u} , ou seja, existem λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{u}$, assim os vetores \vec{v} e \vec{u} são denominados *linearmente independentes (LI)*, caso contrário, são *linearmente dependentes (LD)*.

Seja $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ um conjunto formado por vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^2 , então V é uma *base* de \mathbb{R}^2 se todos os vetores do espaço podem ser escritos como uma combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . O conjunto $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ é denominado *Base Canônica* de \mathbb{R}^2 .

Definição A.2 (Norma). *Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, o comprimento (ou norma) do vetor, $\vec{v} = \vec{AB}$ é a distância entre os pontos A e B , isto é,*

$$\|\vec{v}\| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Um vetor é dito *unitário* se $\|\vec{v}\| = 1$. Se $\vec{v} \neq 0$ então $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor *normalizado* do vetor \vec{v} , mantendo a mesma direção e o mesmo sentido e comprimento de \vec{v} , de modo que $\left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = 1$.

O menor ângulo entre os segmentos representantes dos vetores \vec{v} e \vec{u} é considerado como o *ângulo entre os vetores* \vec{v} e \vec{u} cuja representação será $\theta = \angle(\vec{v}, \vec{u})$.

Definição A.3 (Produto Escalar). *Dado os vetores $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\vec{u} = (x_2, y_2)$, definimos produto escalar (ou produto interno) como sendo o número:*

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Dados \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 vetores de \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades

i. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = \|\vec{v}_1\|^2$;

- ii. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle$;
- iii. $\langle \lambda \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \lambda \vec{v}_2 \rangle = \lambda \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$;
- iv. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$;
- v. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \geq 0$;
- vi. $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \vec{0}$;
- vii. $|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle| \leq \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|$.

A última propriedade, denominada *desigualdade de Cauchy-Schwarz* se iguala apenas se \vec{v}_1 e \vec{v}_2 forem linearmente dependentes.

O produto escalar dos vetores \vec{v} e \vec{u} , também pode ser assim relacionados

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \theta; \quad \theta = \angle(\vec{v}, \vec{u}).$$

Os vetores \vec{v} e \vec{u} são ditos *ortogonais* se $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$, ou seja, se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\theta = \pi/2$ rad. Uma base formada por vetores unitários e ortogonais é dita *base ortonormal* ou *referencial ortonormal*.

A.2. Função Vetorial

Definição A.4 (Função Vetorial). Uma função vetorial $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é representada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

onde $x, y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas *funções coordenadas de α* .

Se α e β são funções vetoriais, definidas em I e f uma função real, então, para todo $t \in I$, temos

- i. $(\alpha + \beta)(t) = \alpha(t) + \beta(t)$;
- ii. $(f\alpha)(t) = f(t)\alpha(t)$;
- iii. $\langle \alpha, \beta \rangle(t) = \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$.

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $L = (l_1, l_2)$, o *limite* de uma função vetorial $\alpha(t)$ existe se, e somente se, existir o limite das funções coordenadas, isto é, se $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = l_1$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = l_2$ então,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L.$$

Uma função vetorial α é dita *contínua* se, para todo $t_0 \in I$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0)$. A *derivada* de uma função vetorial é definida em $t_0 \in I$ como

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}.$$

A função $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é diferenciável se as funções coordenadas forem diferenciáveis para todo $t \in I$, isto é,

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Seja α e β funções vetoriais, λ um escalar e f uma função real, então

- i. $(\alpha(t) + \beta(t))' = \alpha'(t) + \beta'(t)$;
- ii. $(f(t)\alpha(t))' = f(t)\alpha'(t) + f'(t)\alpha(t)$;
- iii. $\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle' = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$;
- iv. *Regra da Cadeia* $(\alpha(f(t)))' = \alpha'(f(t))f'(t)$.

A.3. Parametrização de Curvas

Alencar e Santos [1] definem curva, de forma intuitiva, como sendo uma deformação contínua de um intervalo, por exemplo, "figuras desenhadas com um único traço, sem tirar o lápis do papel", ou ainda, a trajetória de um deslocamento contínuo, sem interrupções, de uma partícula no plano. Uma curva no plano, do ponto de vista da Geometria Analítica, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação $F(x, y) = 0$, um exemplo é a equação do círculo, de raio 1 e centro na origem, definida por $x^2 + y^2 = 1$, onde $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

A Geometria Diferencial, por sua vez, leva em consideração a trajetória contínua de uma partícula no plano. Consideremos $\alpha(t)$ a posição de uma partícula, em um movimento contínuo, e t o tempo variando em um intervalo I , assim a curva C é dada por $\{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2, t \in I\}$. Parametrizar uma curva é o mesmo que descrevê-la por uma função vetorial, isto é, descrever cada ponto em função de uma variável.

Para esse trabalho, faremos uso da abordagem usada na Geometria Diferencial, para isso considere I um intervalo de \mathbb{R} , que pode ser aberto, fechado ou semiaberto. Dizemos que uma curva contínua no plano é uma aplicação contínua, definida em I por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Definição A.5 (Parametrização). *O conjunto imagem C da aplicação α , dado por*

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)); t \in I\},$$

é chamado de traço de α e α é dita uma parametrização de C onde denominamos t como o parâmetro da curva α [1].

Exemplo A.1 (Parametrização da Reta). *Sejam A e $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tais que $A = (x_0, y_0)$ um ponto e $\vec{v} = (a, b)$ um vetor, com $a^2 + b^2 \neq 0$. A equação da reta r que passa por A na direção de \vec{v} é*

$$r : \alpha(t) = (x, y) = A + t\vec{v} = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso o vetor \vec{v} é paralelo a reta r e por isso recebe o nome de *vetor diretor* da reta.

Exemplo A.2 (Parametrização do Círculo). *Seja O um círculo de centro (x_0, y_0) e raio R (FIG. A.2), e uma função $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, a parametrização de O por α é dada por*

$$\alpha(t) = (x_0, y_0) + R(\cos(t), \sin(t)) = \begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ y = y_0 + R\sin(t) \end{cases} ; t \in [0, 2\pi].$$

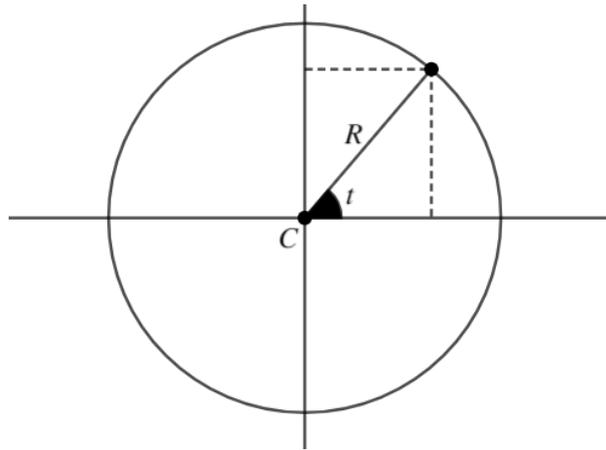


Figura A.2.

Exemplo A.3 (Parametrização do Triângulo de Reuleaux). *Seja T um Triângulo de Reuleaux de largura $m = \sqrt{3}$, cujos vértices são $A = (1, 0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e uma função $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (FIG. A.3).*

A parametrização de T por α é dada por

$$\alpha(t) = (x, y) = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } t \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]; \\ \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cos(t), -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin(t)\right), & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]; \\ \left(1 + \sqrt{3}\cos(t), 0 + \sqrt{3}\sin(t)\right), & \text{se } t \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]; \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), & \text{se } t \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]; \\ \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cos(t), \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin(t)\right), & \text{se } t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right]. \end{cases}$$

Nos exemplos A.2 e A.3 o parâmetro t é o ângulo de um círculo unitário centrado na origem do plano cartesiano.

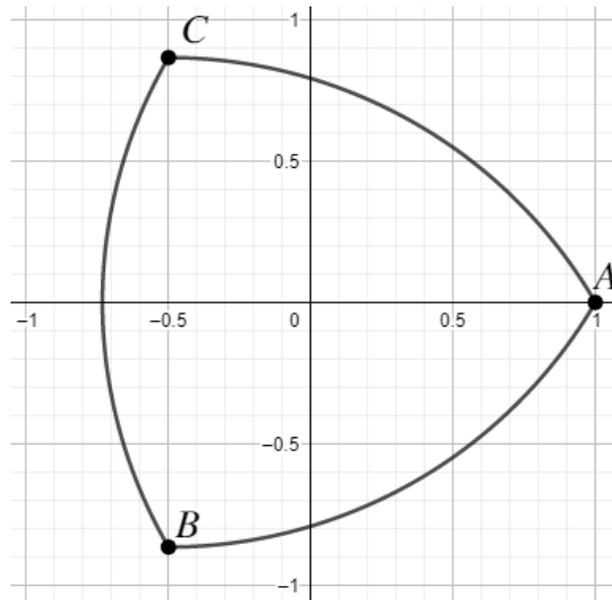


Figura A.3.

Seja C uma curva parametrizada de classe C^k , dizemos que C é k vezes diferenciável, mas se a classe de C for C^∞ , Biezuner [3] a classifica com uma *curva parametrizada suave*. Pelos exemplos acima citados, percebemos que a reta e o círculo são curvas cuja parametrização é suave enquanto o Triângulo de Reuleaux não, pois apresenta três pontos em que a derivada não existe, pois possuem limites laterais diferentes.

Definição A.6 (Curva Regular). *Seja C uma curva parametrizada suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $t \in I$*

$$\alpha'(t) \neq 0,$$

então C é dita curva regular.

Uma curva regular é diferenciável em todo o seu intervalo, ou seja, a reta tangente está bem definida em qualquer ponto $\alpha(t)$ e possui direção do vetor $\alpha'(t)$, isso significa que a curva não possui cantos ou quinas [3].

Definição A.7 (Reta tangente). [22] *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ na direção de $\alpha'(t_0)$.*

Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos então escrever a equação da reta tangente da seguinte forma

$$r_\lambda(t_0) = \alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0).$$

Definição A.8 (Reparametrização). [1] *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada de modo que, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $h : J \rightarrow I$ uma função injetiva, de classe C^∞ . Então a função bijetora $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, é uma reparametrização de α*

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)).$$

Para curvas reparametrizadas, usa-se a regra da cadeia para calcular a derivada, isto é,

$$\beta'(s) = (x'(h(s))h'(s), y'(h(s))h'(s)),$$

ou

$$\beta'(s) = (\alpha \circ h)'(s) = \alpha'(h(s))h'(s).$$

No capítulo 3, vimos que o perímetro ou comprimento de um conjunto compacto e convexo pode ser comparado ao de um polígono inscrito ou circunscrito nele, mas se tivermos a parametrização desse conjunto, podemos chegar a esse valor fazendo alguns cálculos. Seja C uma curva parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $t_0, t_1 \in I$, tais que $t_0 < t_1$. Dizemos que o comprimento s da curva C de t_0 a t_1 é dado por

$$s_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(u)\| du.$$

Definimos assim a função $S_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$ como a função comprimento do arco

α a partir de t_0 . Uma vez que $\|\alpha'(t)\|$ é uma função contínua, e de classe C^1 então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$S'_\alpha = \|\alpha'(t)\|.$$

Exemplo A.4 (Comprimento do Círculo). *Seja O um círculo de raio R e centro (x_0, y_0) , definido pela parametrização $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\alpha(t) = (x_0, y_0) + R(\cos(t), \sin(t))$, como $\alpha'(t) = R(-\sin(t), \cos(t))$ e*

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-R\sin(t))^2 + (R\cos(t))^2} = \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = R,$$

então, o comprimento de O é

$$S_\alpha = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R ds = 2\pi R.$$

A parametrização de uma curva pode ser comparada com uma função posição em relação ao tempo t , ou também como a posição em relação a distância t percorrida, neste último caso, dizemos que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

Definição A.9 (Parametrização por Comprimento de Arco). [22] *Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada t_0 e $t_1 \in I$, com $t_0 < t_1$, o comprimento do arco da curva de α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(u)\| du = t_1 - t_0.$$

Proposição A.1. *Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$.*

Demonstração. [3] Suponhamos que $\|\alpha'(t)\| = 1$, então

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t du = t - t_0.$$

Para a recíproca se

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0.$$

então, para todo $t_0, t \in I$

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = 1.$$

Mas pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \|\alpha'(t)\| = 1.$$

□

Seja α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in (a, b)$, a curva $\beta(-s)$, definida no intervalo $(-b, -a)$ é tal que $\beta(-\alpha) = \alpha(s)$, isto é, essas curvas possuem o mesmo traço e se diferem apenas por uma *mudança de direção* [4].

Exemplo A.5 (Reparametrização do Círculo pelo Comprimento de Arco). [1] *Considere um círculo de raio R e centro $(0, 0)$ cuja parametrização é $\alpha(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$. Fazendo*

$t_0 = 0$ e $t \in [0, 2\pi]$ a função comprimento de arco a partir de $t_0 = 0$ será $s = Rt$, então a reparametrização de α pelo comprimento de arco dada por $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que,

$$\beta(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right).$$

Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *simples* se tem $\alpha(t_0) \neq \alpha(t_1)$, para todo $t_0 \neq t_1 \in [a, b]$, logo C não possui auto-interseções, ou seja, C é injetiva. Se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ então a curva é *fechada*. Uma curva é *simples e fechada* se o seu único ponto duplo acontecer nos extremos do intervalo $[a, b]$, ou seja, se $\alpha(t_0) \neq \alpha(t_1)$ para todo $t_0 \neq t_1 \in [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$.

A.4. Campo de Vetores

Definição A.10 (Campo de Vetores). [1] Um campo de vetores de classe C^p ao longo de α é uma aplicação $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^p .

De modo geral um campo de vetores X é uma aplicação que associa, para cada $t \in I$, um vetor $\alpha(t)$, com origem em $\alpha(t)$ e extremidade em $X(t)$ (FIG. A.4).

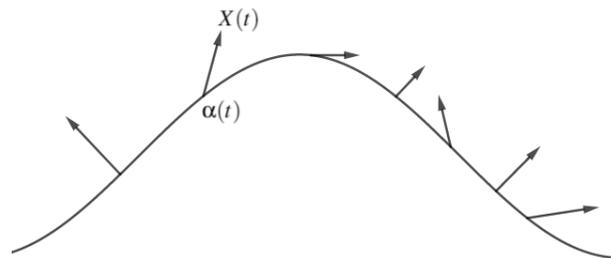


Figura A.4.

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada e regular, o *campo tangente* a curva será $\alpha'(t) = T(t) = (x'(t), y'(t))$, se α está parametrizada pelo comprimento de arco, então $T(t)$ é unitário. O *campo normal* $N(t) = (-y'(t), x'(t))$, também será unitário se α for parametrizada pelo comprimento de arco. Para todo $t \in I$, temos

$$\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0,$$

então $T(t)$ e $N(t)$ são ortogonais e formam uma base de \mathbb{R}^2 que possui a mesma orientação da base canônica $\{e_1, e_2\}$. A reta tangente a α em t é a reta suporte r e terá a direção do vetor $T(t)$.

Sejam X e Y campos vetoriais quaisquer e f uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, todos de classe C^p , então definimos os campos $X + Y$ e fX , também de classe C^p , isto é,

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t), \quad (fX)(t) = f(t)X(t).$$

Seja $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ um campo de vetores de classe C^p com $p \geq 1$, a derivada de $X(t)$ é $X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t))$ será de classe C^{p-1} e admite as seguintes relações

$$(X + Y)' = X' + Y', \quad (fX)' = f'X + fX', \quad \langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle.$$

Proposição A.2. *Seja X um campo vetorial qualquer tal que, $\|X(t)\|$ é uma constante, então $X'(t)$ é perpendicular a $X(t)$, ou seja,*

$$\langle X, X' \rangle = 0.$$

Seja X e Y perpendiculares para todo $t \in I$, temos

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle.$$

Demonstração. Se derivarmos a equação $\langle X, X \rangle = \text{constante}$, obtemos

$$\langle X', X \rangle + \langle X, X' \rangle = 2\langle X', X \rangle = 0. \quad \text{Assim} \quad \langle X', X \rangle = 0.$$

Como X e Y são perpendiculares, temos $\langle X, Y \rangle = 0$, que ao derivarmos chegamos a

$$0 = \langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle. \quad \text{Logo} \quad \langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle.$$

□

A.5. Curvatura

Considerando $\alpha(s)$ a parametrização de α pelo comprimento de arco s , da Proposição A.2 temos que $T(s)$ e $T'(s)$ são ortogonais, então $T'(s)$ é paralelo ao vetor $N(s)$, e de forma análoga $N'(s)$ é paralelo a $T(s)$. Os vetores $T(s)$ e $N(s)$ formam o *referencial de Frenet* de α em s e os vetores $T'(s)$ e $N'(s)$ podem ser escritos como uma combinação linear de $N(s)$ e $T(s)$, respectivamente, assim, para cada $s \in I$, existe uma função $\kappa(s)$ de modo que

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) \end{cases},$$

tais equações são chamadas de *Equações de Frenet*.

Definição A.11 (Curvatura). *A função $\kappa(s)$ é denominada curvatura de α em $s \in I$.*

A curvatura determina o quanto uma curva é diferente de uma reta (FIG. A.5). A função $\kappa(s)$ pode ser dada por

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle T(s), N'(s) \rangle.$$

O que nos garante que a função $\kappa(s)$ será de classe C^∞ se $\alpha(s)$ também for. É possível chegar a curvatura de uma curva sem, necessariamente, que ela esteja parametrizada pelo comprimento de arco, como mostra a Proposição a seguir.

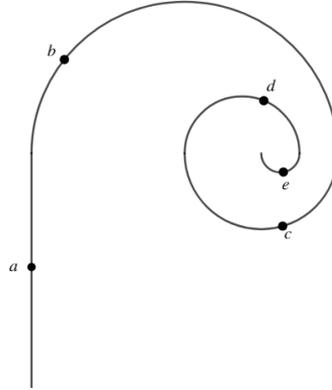


Figura A.5.: $\kappa(a) = 0$ e $\kappa(b) < \kappa(c) < \kappa(d) < \kappa(e)$

Proposição A.3. Sendo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então, para todo $t \in I$ temos

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Demonstração. Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\beta(s(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma reparametrização positiva de α pelo comprimento de arco ($\beta = \alpha \circ s^{-1}$). Sabendo que $\kappa(t) = \kappa(s(t)) = \langle T'(s(t)), N(s(t)) \rangle = \langle \beta''(s(t)), N(s(t)) \rangle$ e usando a regra da cadeia, temos

$$\alpha'(t) = \beta'(s(t))s'(t) = \beta'(s(t))\|\alpha'(t)\| \implies \beta'(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha''(t) = \beta''(s(t))\|\alpha'(t)\|^2 + \beta'(s(t)) \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (\text{A.2})$$

de (A.1) e (A.2) obtemos

$$\beta''(s(t)) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4} \alpha'(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \left\langle \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}, N(t) \right\rangle \\ \kappa(t) &= \left\langle \frac{(x''(t), y''(t))}{\|\alpha'(t)\|^2}, \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle \\ \kappa(t) &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}. \end{aligned}$$

□

Exemplo A.6 (Curvatura do Círculo). Se $\alpha(t) = (x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t))$ um círculo de raio R e centro (x_0, y_0) , tal que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= R(-\sin(t), \cos(t)), \\ \alpha''(t) &= R(-\cos(t), -\sin(t)), \\ \|\alpha'(t)\| &= R,\end{aligned}$$

então

$$\kappa(t) = \frac{R^2 [(-\sin(t))^2 + (-\cos(t))^2]}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Como vimos, o círculo possui curvatura constante e quanto maior o raio, menor será curvatura. Nesse exemplo, a parametrização do círculo foi feita no sentido anti-horário, se fizessemos ao contrário (no sentido horário) teríamos $\alpha(t) = (x_0 + R \cos(t), y_0 - R \sin(t))$ e desse modo a curvatura seria $\kappa(t) = -\frac{1}{R}$. Percebemos assim que o sinal da curvatura depende apenas da orientação escolhida para o parâmetro [3].

Lema A.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de largura constante m , então, para todo $t \in I$, temos

$$\kappa(t) \geq \frac{1}{m}.$$

Demonstração. Sejam as retas suportes r_1 e r_2 paralelas cujo pontos de interseção com α são, respectivamente, X e Y . Considere um círculo O centrado em X e de raio m (FIG. A.6), caso exista um ponto $Z \in \alpha$ fora do círculo, teríamos $d(Y, Z) > m$, um absurdo, já que α é uma curva de largura constante.

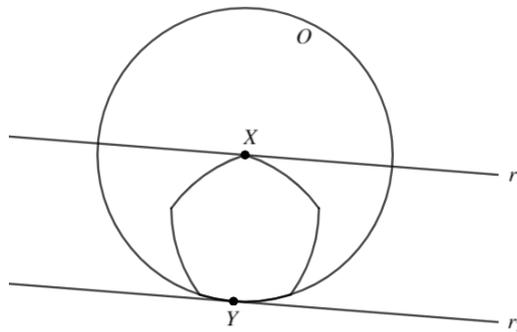


Figura A.6.

Desta forma temos que $\alpha \subset O$, como vimos no exemplo anterior, a curvatura no ponto Y será maior ou igual do que a curvatura do círculo, portanto $\kappa(t) \geq \frac{1}{m}$. □

A.6. Teorema de Barbier

Nesta seção iremos apresentar uma demonstração do Teorema de Barbier no contexto diferenciável, para isso, precisaremos calcular a integral da curvatura de uma curva fechada, disponível na página 42 de [4].

Seja $\alpha(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, consideremos $\theta(s)$, com $s \in [0, l]$ como o ângulo entre o vetor $T(s)$ e o eixo Ox (FIG. A.7), assim temos $x'(s) = \cos(\theta(s))$ e $y'(s) = \sin(\theta(s))$, logo

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right), \quad \theta(s) \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta(s) \neq \frac{3\pi}{2}. \quad (\text{A.3})$$

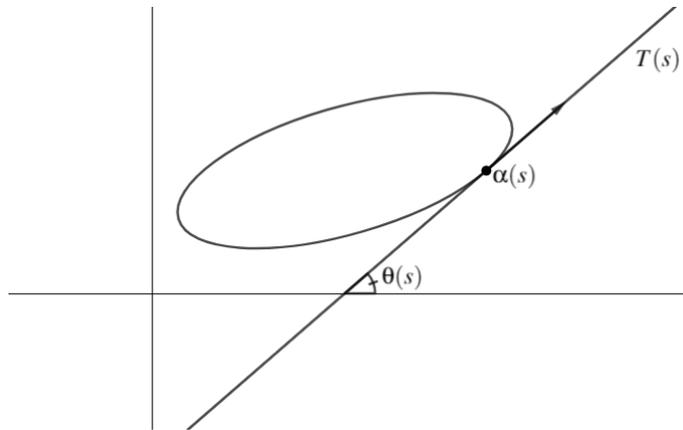


Figura A.7.

Sabendo que $[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1$ e derivando a equação (A.3) obtemos

$$\begin{aligned} \theta'(s) &= \left(\arctan\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right) \right)' \\ &= \frac{1}{1 + \left[\frac{y'(s)}{x'(s)}\right]^2} \frac{y''(s)x'(s) - x''(s)y'(s)}{[x'(s)]^2} \\ &= \frac{[x'(s)]^2}{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2} \frac{y''(s)x'(s) - x''(s)y'(s)}{[x'(s)]^2} \\ &= x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = \kappa(s). \end{aligned}$$

Então podemos descrever a função diferenciável $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(s) ds.$$

Seja $\alpha(s)$ uma curva fechada de comprimento l , o ângulo será um múltiplo inteiro λ de 2π , isto é,

$$\int_0^l \kappa(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi\lambda.$$

Se α for uma curva simples e fechada teremos $\lambda = 1$.

Teorema A.1 (Barbier). *Uma curva de largura constante m tem comprimento πm .*

Demonstração. Seja α uma curva de largura constante m , r_1 e r_2 são retas suportes paralelas de α , e $X = r_1 \cap \alpha$ e $Y = r_2 \cap \alpha$ (Fig. A.8). Fazendo $X = \alpha(s)$ e $Y = \alpha(\tilde{s})$ e pondo $\tilde{s} = \varphi(s)$, fica definida uma função para todo s , relacionado os pontos X e Y , em retas suportes paralelas, assim

$$T(\tilde{s}) = T(\varphi(s)) = -T(s),$$

$$N(\tilde{s}) = N(\varphi(s)) = -N(s).$$

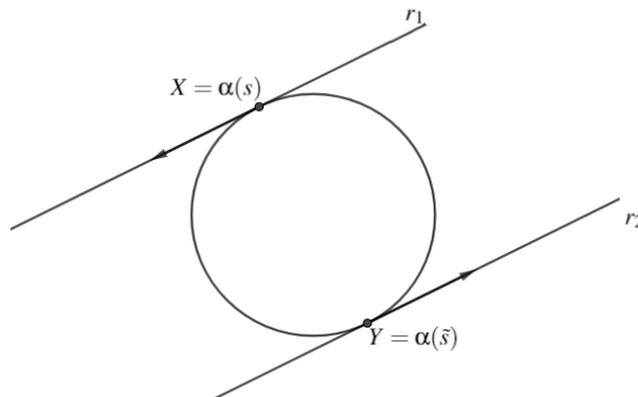


Figura A.8.

Sabendo que $|Y - X| = m$, podemos escrever $\alpha(\tilde{s}) = \alpha(\varphi(s)) = \alpha(s) + mN(s)$, derivando $\alpha(\varphi(s))$ e como $N'(s) = -\kappa(s)T(s)$ temos:

$$\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s) = \alpha'(s) + mN'(s) \Rightarrow$$

$$T(\tilde{s})\varphi'(s) = T(s) + m(-\kappa(s)T(s)) \Rightarrow$$

$$-T(s)\varphi'(s) = T(s)(1 - m\kappa(s)) \Rightarrow$$

$$\varphi'(s) = m\kappa(s) - 1.$$

Enfim, fazendo $s \mapsto \alpha(\varphi(s))$ uma reparametrização de α , obtemos

$$L_\alpha = \int_0^{L_\alpha} \|\alpha'(\varphi(s))\| ds = \int_0^{L_\alpha} \|\varphi'(s)\| ds = \int_0^{L_\alpha} |m\kappa(s) - 1| ds.$$

Do Lema A.1 temos que $m\kappa(s) \geq 1$, então

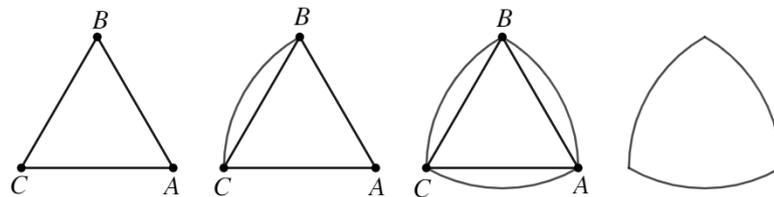
$$L_\alpha = \int_0^{L_\alpha} (m\kappa(s) - 1) ds = m \int_0^{L_\alpha} \kappa(s) ds - \int_0^{L_\alpha} ds = 2\pi m - L_\alpha.$$

Portanto, sendo $L_\alpha = 2\pi m - L_\alpha$, temos $L_\alpha = \pi m$, como queríamos demonstrar. \square

B Construções no GeoGebra

Propomos aqui um passo a passo para a construção de algumas figuras apresentadas nesse trabalho. Essas e outras construções estão disponíveis na minha página GeoGebra [6], onde é possível fazer o download do software GeoGebra. A versão utilizada para as construções é o GeoGebra Clássico 6.

B.1. Triângulo de Reuleaux



1. Construa um triângulo equilátero usando o ícone "Polígono Regular" na barra de ferramentas (Fig. B.1).

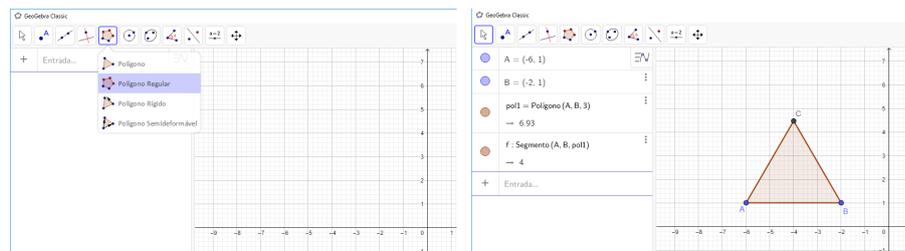


Figura B.1.

2. Centrado em um dos vértices do triângulo, construa um arco com a extremidade do vértice que forma o lado oposto. O raio desse arco será a medida do lado do triângulo. Use o ícone "Arco Circular" na barra de ferramentas (Fig. B.2).

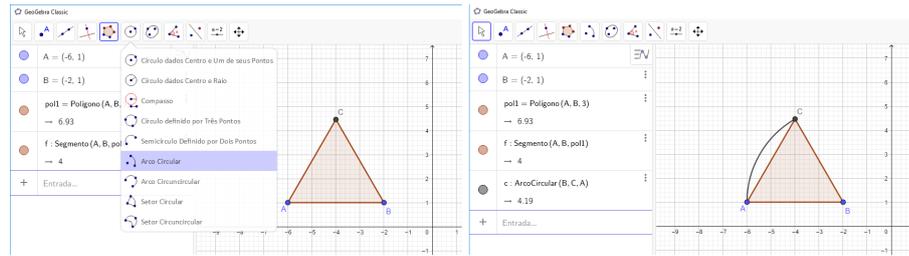


Figura B.2.

3. Repita o passo anterior nos outros dois vértices (Fig. B.3).

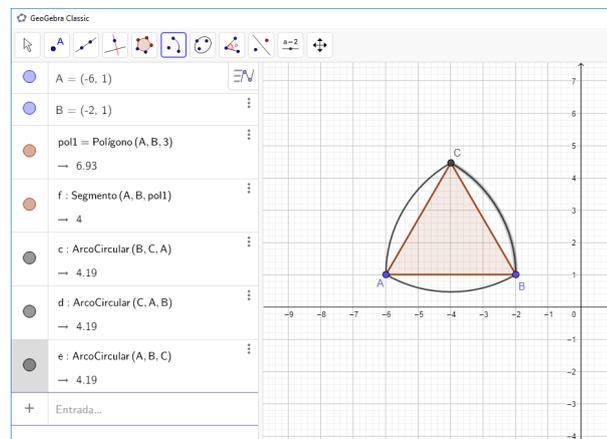
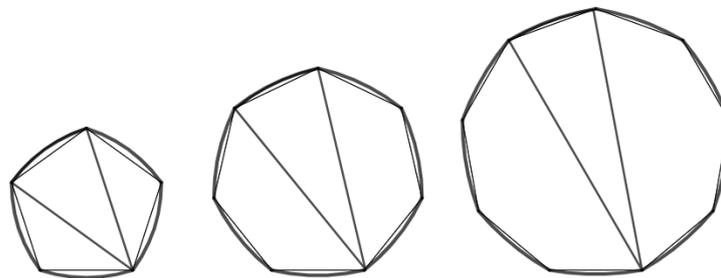


Figura B.3.

B.2. Polígono de Reuluaux



1. Construa um polígono regular de n lados, com n ímpar, usando o ícone "Polígono Regular" na barra de ferramentas (Fig. B.4).

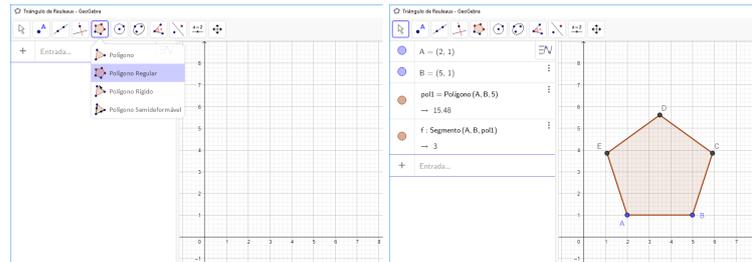


Figura B.4.

2. Centrado em um dos vértices do polígono, construa um arco com a extremidade do vértice que forma o lado oposto. O raio desse arco será a medida da maior diagonal do polígono. Use o ícone "Arco Circular" na barra de ferramentas (Fig. B.5).

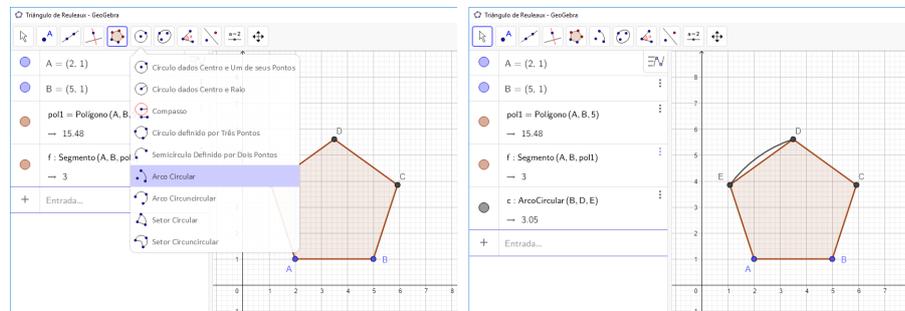


Figura B.5.

3. Repita o passo anterior em todos os outros vértices (Fig. B.6).

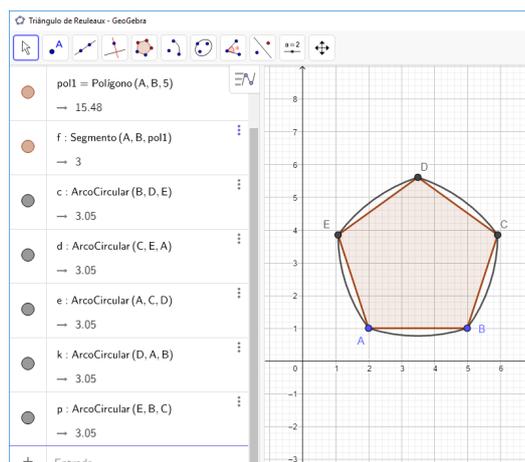
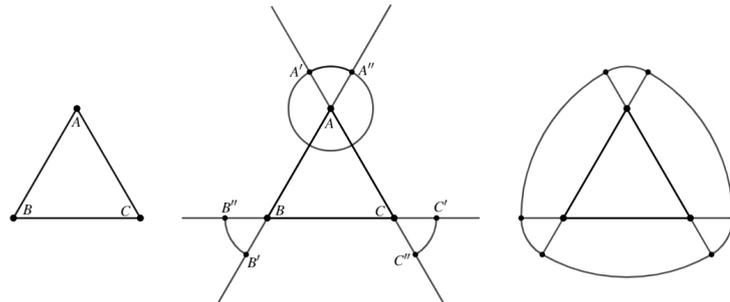


Figura B.6.

B.3. Curvas Paralelas aos Polígonos de Reuleaux



1. Construa um triângulo equilátero usando o ícone "Polígono Regular" na barra de ferramentas (Fig. B.1).
2. Prolongue os lados do triângulo usando o ícone "Reta" na barra de ferramentas (Fig. B.7).

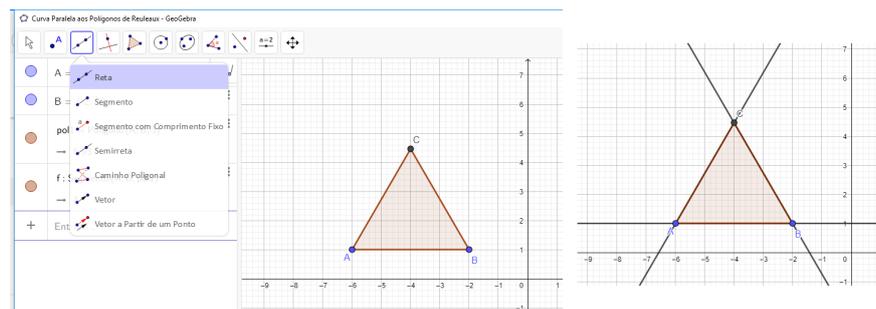


Figura B.7.

3. Construa três círculos de mesmo raio r , com $r \in \mathbb{R}$ qualquer, centrados nos vértices do triângulo, para isso use o ícone "Círculo dados Centro e Raio" na barra de ferramentas (Fig. B.8).

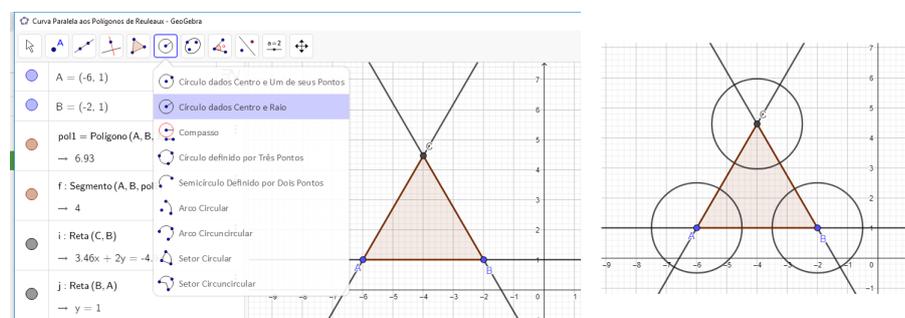


Figura B.8.

4. Marque as interseções das retas com os círculos, use o ícone "Interseção de Dois Objetos" na barra de ferramentas (Fig. B.9). Depois, com o botão direito do mouse, clique em cada círculo e desmarque a opção "Exibir Objeto".

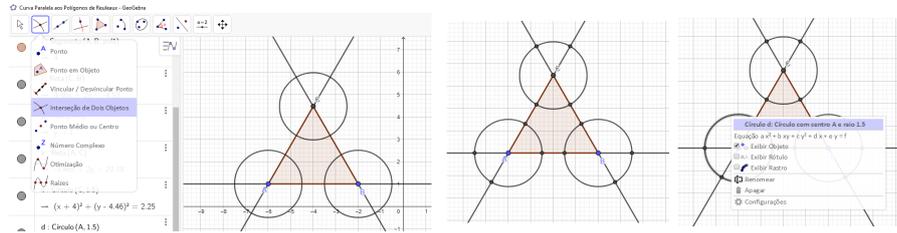


Figura B.9.

5. Centrado em cada um dos vértices de cada triângulo, construa arcos com as extremidades nos pontos de interseção externos ao triângulo (Fig. B.10).

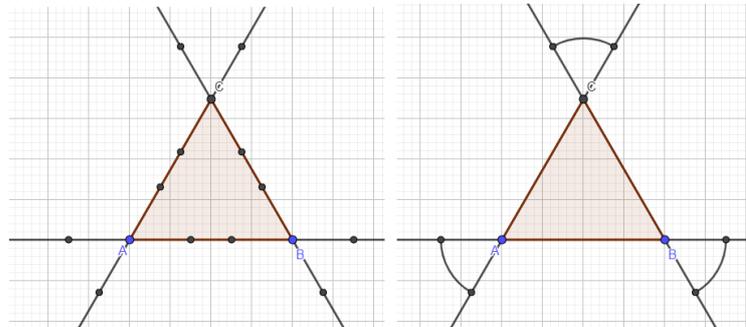


Figura B.10.

6. Construa arcos centrados no vértice de cada triângulo e opostos aos arcos construídos anteriormente, com raio igual a soma da medida do lado do triângulo com o raio r , usado na construção dos círculos do item 3 (Fig. B.11).

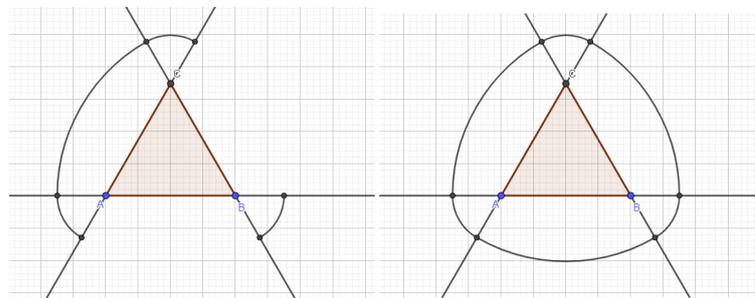


Figura B.11.

B.4. Curva Formada por Retas Concorrentes

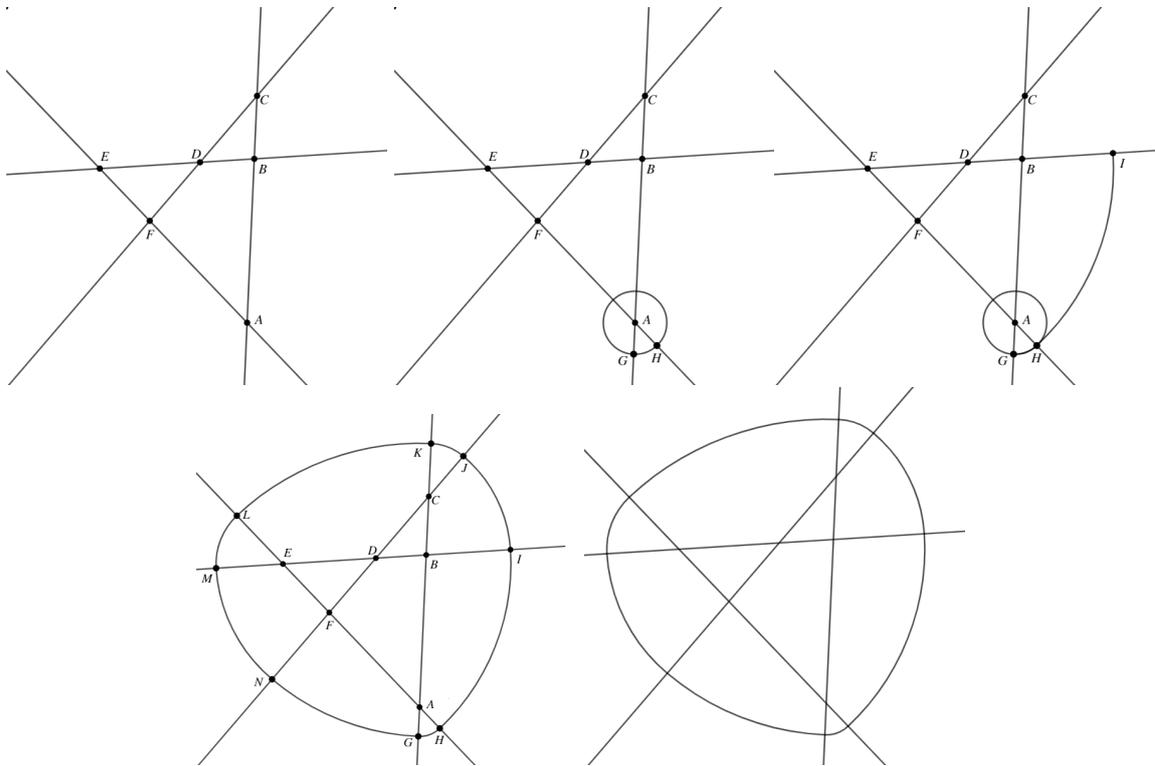


Figura B.12.

1. Construa retas, no mínimo 3, concorrentes entre si usando o ícone "Reta" na barra de ferramentas. Marque os pontos de interseção com o ícone "Interseção de Dois Objetos", localizados também na barra de ferramentas (Fig. B.13).

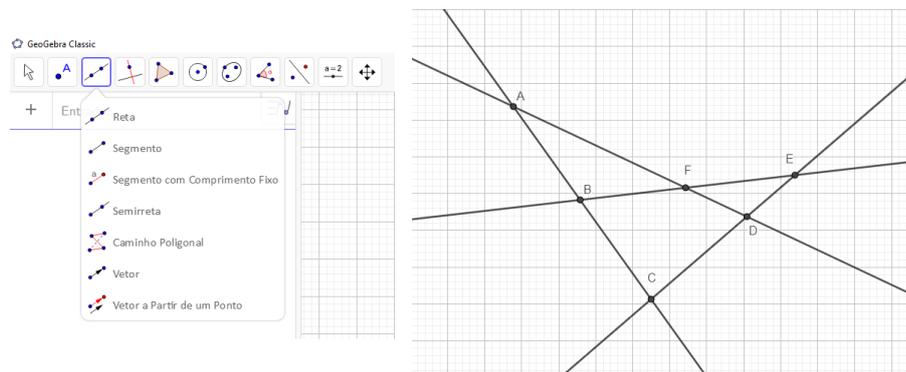


Figura B.13.

2. Em um dos vértices A , C ou E , construa um círculo de raio r qualquer, use o ícone "Círculo dado Centro e Raio" na barra de ferramentas. Marque os pontos G e H de interseção entre a reta e o círculo construído. Em seguida, construa um arco

centrado no ponto A e extremidades nos pontos G e H , use o ícone "Arco Circular" na barra de ferramenta (Fig. B.14).

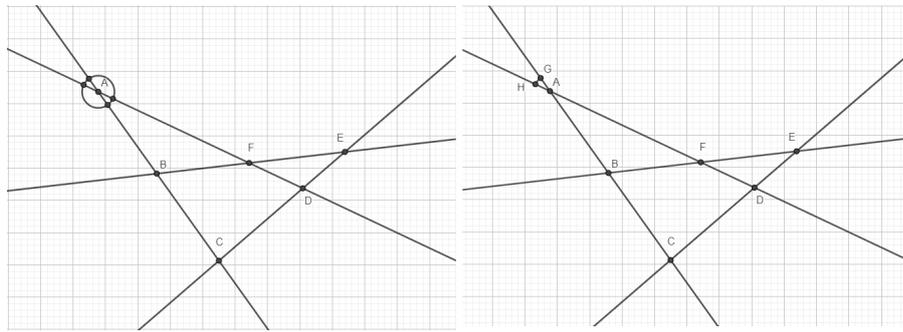


Figura B.14.

3. Construa o arco centrado em F de raio \overline{FH} e extremidade nas retas que passam por F . Repita o processo: arco centrado em E de raio \overline{EI} ; arco centrado em C de raio \overline{CI} ; arco centrado em A de raio \overline{AK} ; arco centrado em F de raio \overline{FL} ; arco centrado em E de raio \overline{EM} ; arco centrado em C de raio \overline{CN} (Fig. B.15).

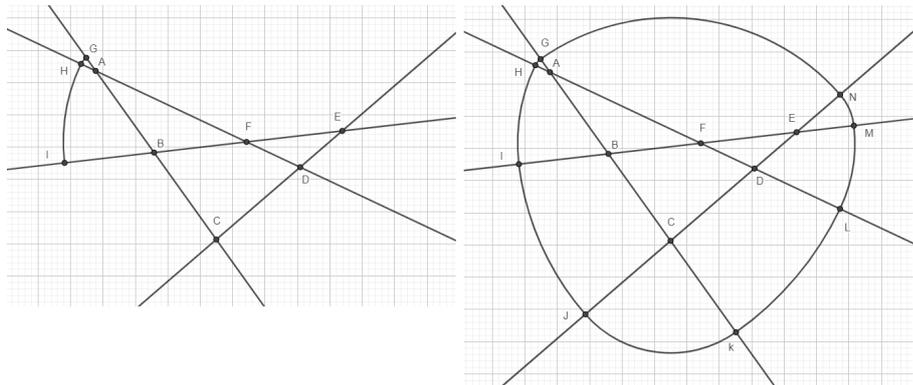


Figura B.15.

B.5. Furo Quarado

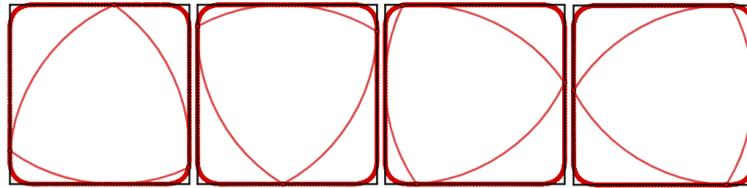


Figura B.16.

Esta construção foi adaptada de [2].

1. Usando o ícone "Ponto" na barra de ferramentas, criar o ponto $A = (0, 0)$. Em seguida, usando o ícone "Círculo dado Centro e Raio", construa um círculo c centrado em A e raio 1 (Fig. B.17).

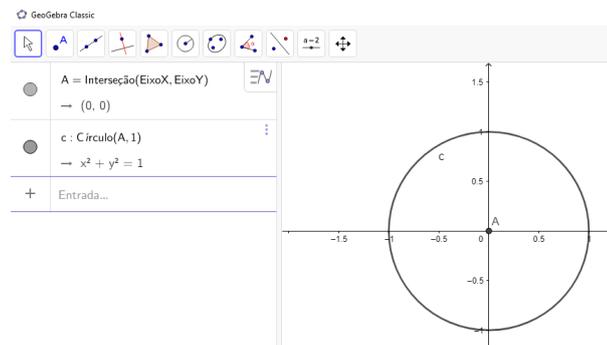


Figura B.17.

2. Usando o ícone "Ponto em Objeto" na barra de ferramentas, criar o ponto B no círculo C . Em seguida, na barra de entrada, usando o comando: "Girar (< Objeto >, < Ângulo >)", crie os pontos $B' = (B, 120^\circ)$ e $B'' = (B', 120^\circ)$ (Fig. B.18).

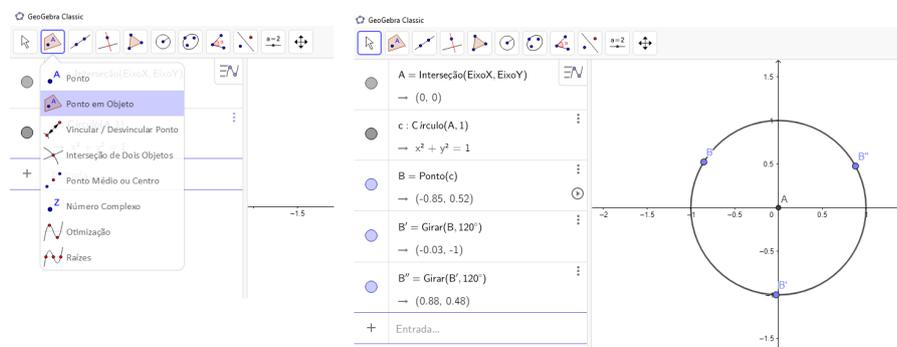


Figura B.18.

3. Usando o ícone "Polígono" na barra de ferramentas, construa o triângulo com vértices nos pontos B , B' e B'' . Construa também 3 arcos, centrados em B , B' e B'' e extremidades em $B'B''$, BB'' e BB' , respectivamente (Fig. B.19).

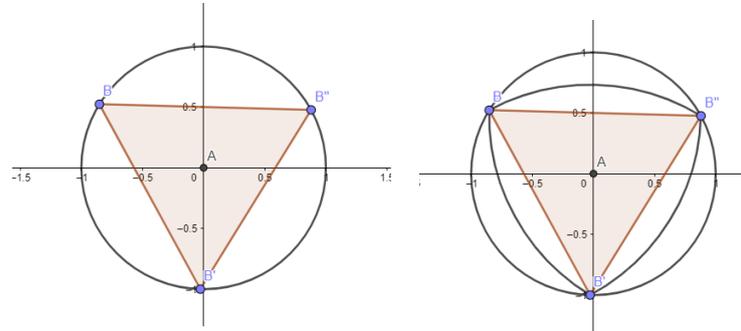


Figura B.19.

4. Na barra de entrada, crie os números usando os comandos "Máximo (< Lista >)" e "Mínimo (< Lista >)":

$$Mx = \text{Máximo}(\{x(B), x(B'), x(B'')\}), \quad My = \text{Máximo}(\{y(B), y(B'), y(B'')\}),$$

$$mx = \text{Mínimo}(\{x(B), x(B'), x(B'')\}), \quad my = \text{Mínimo}(\{y(B), y(B'), y(B'')\}).$$

5. Na barra de entrada, crie os pontos P e Q usando o comando "Se (< Condição >, <Então>, <Senão>)":

$$P = \left(\text{Se} (mx^2 < 0.75, Mx - \sqrt{3}, mx), \text{Se} (my^2 < 0.75, My - \sqrt{3}, my) \right),$$

$$Q = \left(\text{Se} (Mx^2 < 0.75, mx + \sqrt{3}, Mx), \text{Se} (My^2 < 0.75, my + \sqrt{3}, My) \right).$$

6. Construa as retas (Fig. B.20) digitando na barra de entrada os comandos:

$$x = x(P), \quad x = x(Q), \quad y = y(P) \text{ e } y = y(Q).$$

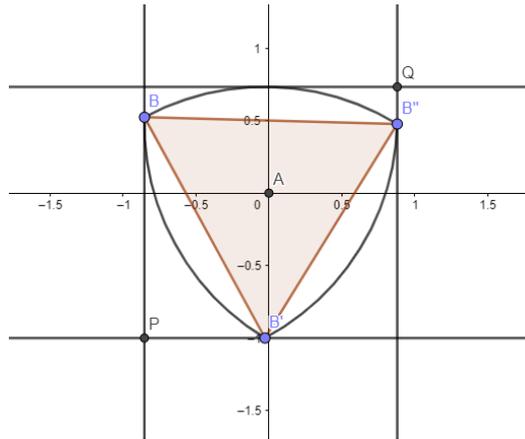


Figura B.20.

7. Abra uma segunda janela de visualização e nela construa os pontos C , C' e C'' , digitando na barra de entrada, $C = B - P$, $C' = B' - P$ e $C'' = B'' - P$. Em seguida, construa 3 os arcos centrados em C , C' e C'' com extremidades em $C'C''$, CC'' e CC' , respectivamente (Fig. B.21).

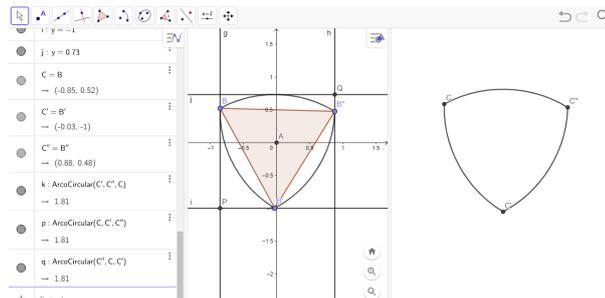


Figura B.21.

8. Crie o ponto G digitando na barra de entrada: $G = \frac{C + C' + C''}{3}$. Com o botão direito, nos pontos C , C' , C'' e G , selecione a opção "Exibir Rastro" e, em seguida, no ponto B ative a opção "Animação" (Fig. B.22).

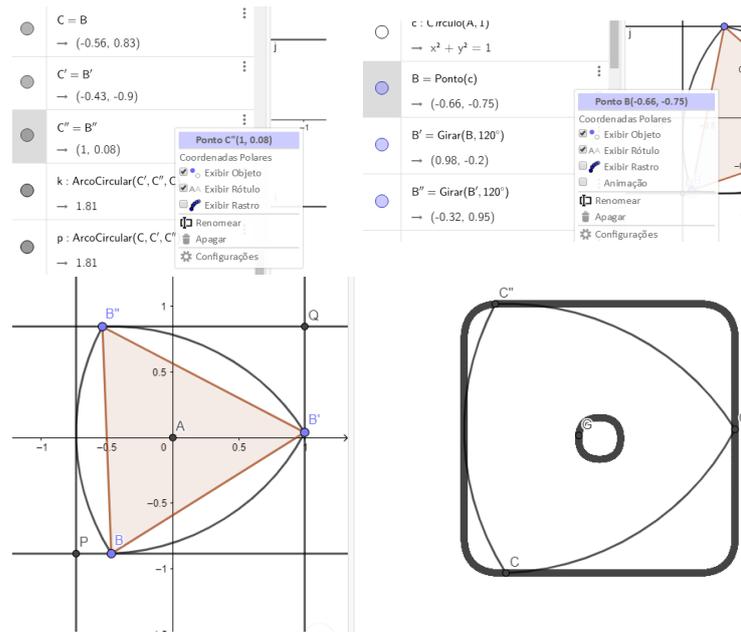


Figura B.22.

B.6. Sombra - Retas Suportes ao Triângulo de Reuleaux

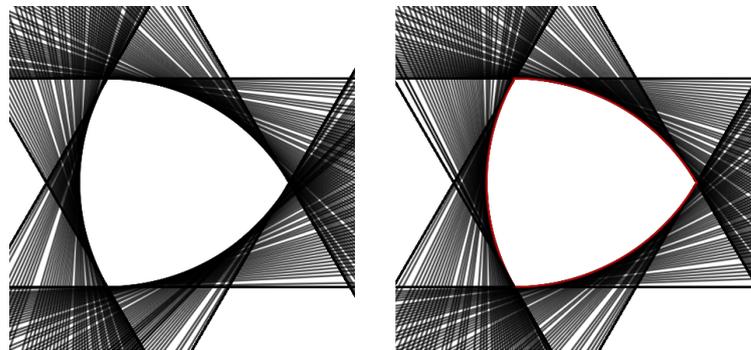


Figura B.23.

1. Crie os pontos $A = (1, 0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ usando a barra de entrada. Em seguida, construa 3 arcos (Fig. B.24).

4. Usando o ícone "Reta Tangente" na barra de ferramentas, crie uma reta tangente aos 3 arcos passando pelo ponto P . (Fig. B.26).

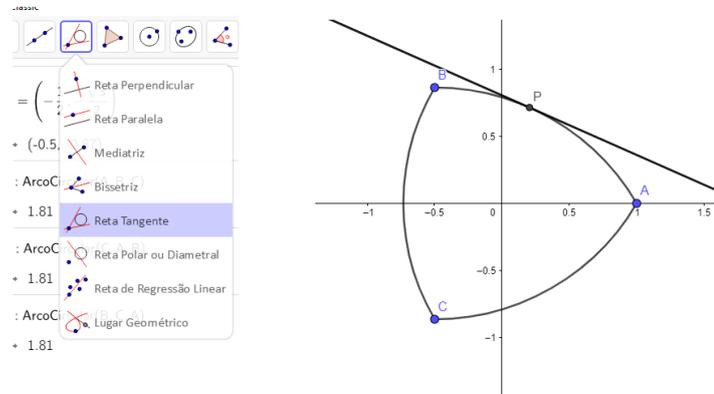


Figura B.26.

5. Com o botão direito do mouse sobre o ângulo, selecione a opção "Animar". Sobre as retas tangentes criadas anteriormente, marque a opção "Deixar Rastro". (Fig. B.27).

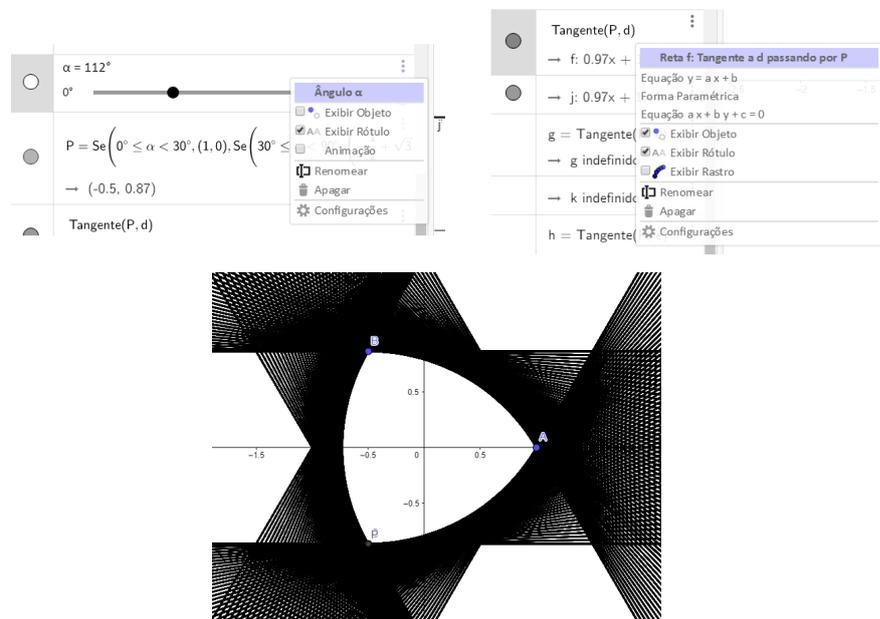


Figura B.27.

Bibliografia

- [1] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. IMPA, 2013. Disponível em: <<http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/index.php/livros>>. Acesso em: 5 ago. 2018.
- [2] BALLINGER, Brad. **GeoGebra**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/aZa7Dknw>>. Acesso em: 20 ago. 2018.
- [3] BIEZUNER, Rodney Josué. **Notas de Aula: Geometria Diferencial**. Belo Horizonte: UFMG, 2015. Disponível em: <<https://bit.ly/2tFwxkl>>. Acesso em: 2 fev. 2018.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: IMPA, 2^a Ed., 2005.
- [5] CARVALHO, Sônia Pinto de. **A área e o perímetro de um círculo**. Belo Horizonte: UFMG, 1^o Colóquio da Região Sudeste, 2011. Disponível em: <<http://emis.ams.org/journals/em/docs/coloquios/SE-1.02.pdf>>. Acesso em: 5 mai. 2018.
- [6] CRISTE, Marília Gomes. **GeoGebra**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/u/marilia.g.criste>>. Acesso em: 20 mai. 2018.
- [7] DANTAS, Sérgio. **Triângulo de Reuleaux**. Disponível em: <<http://ogeogebra.com.br/arquivos/reuleaux.pdf>>. Acesso em: 7 mar. 2018.
- [8] DIVULGADORES.COM. **Triângulos de Reuleaux y otras curvas de ancho constante**. Disponível em: <<https://divulgadores.com/poligonos-de-reuleaux/#more-1200>>. Acesso em: 15 jan. 2018.
- [9] ENGENHARIA em Movimento. **Entenda a ciência por trás do furo quadrado**. Disponível em: <<http://www.engenhariadomovimento.com.br/2014/12/entenda-ciencia-por-tras-do-furo.html>>. Acesso em: 15 mar. 2018.
- [10] EPSTEIN, Charles L. **Introduction to the Mathematics of Medical Imaging**. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [11] GÓMEZ, Joaquim Jorge Delgado; FRENSEL, Katia Rosensvald; CRISSALFF, Lhaylla dos Santos. **Geometria Analítica. Coleção Profmat**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [12] KINEMATIC Models for Design - Digital Library. **Reuleaux Triangle**. Disponível em: <<http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>>. Acesso em: 12 fev. 2018.
- [13] LÜBECK, Kelly Roberta Mazzutti. **Curvas de Largura Constante e suas Generalizações**. Synergismus scyentifica UTFPR. Vol. 4, n^o 2. Disponível em: <<http://revistas.utfpr.edu.br/pb/index.php/SysScy/article/view/689/393>>. Acesso em: 10 jan. 2018.
- [14] MATY, una profesora muy particular. **No todo es lo que parece**. Disponível em: <<https://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/poligonos-de-reuleaux/>>. Acesso em: fev. 2018.

- [15] MELO, José Luiz Pastore. **Polígonos de Reuleaux e a generalização de π** . Revista do Professor de Matemática, nº 81, 2º Quadrimestre de 2013, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [16] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [17] PACIOTTI, Lucie. **Curves of constant width and their shadows**. Whitman Senior Project, 2010.
- [18] RODRIGUES, André Soares. **Polígonos de Reuleaux**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - UFPB, João Pessoa, 2015. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=115>. Acesso em: 12 fev. 2018.
- [19] STEVEN, R. Lay. **Convex sets and their applications**. New York: John Wiley & Sons, 1982.
- [20] STEWART, James. **Calculo: volume 2**. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- [21] TARUMOTO, Celso Itsuo. **Polígonos de Reuleaux e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - UFGD, Dourados, 2014. Disponível em: <https://sca.proformatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=60435>. Acesso em: 12 fev. 2018.
- [22] TENENBLAT, K. **Introdução a geometria diferencial**. São Paulo: Blucher, 2ª Ed., 2008.
- [23] VOLOCH, J. F. Curvas de Largura Constante. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, nº 5, 1987, p. 69-75. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo05.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2018.
- [24] YAGLOM, I. M.; BOLTANSKII, V. G.. **Convex Figures**. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1961.
- [25] ZTFNEWS.ORG. **Franz Reuleaux, sus triángulos y sus mecanismos**. Disponível em: <<https://ztfnews.wordpress.com/2014/09/30/franz-reuleaux-sus-triangulos-y-sus-mecanismos/>>. Acesso em: fev. 2018.