



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mayara Beatriz Ferreira Drumond

**Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de
Li-Yorke: Uma Aplicação do Teorema do Valor
Intermediário**

Ouro Preto

2018

MAYARA BEATRIZ FERREIRA DRUMOND

Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de Li-Yorke: Uma Aplicação do Teorema do Valor Intermediário

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.

Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.

**Ouro Preto
2018**

D845o

Drumond, Mayara Beatriz Ferreira.

Órbitas periódicas de funções e o Teorema de Li-Yorke [manuscrito]: uma aplicação do teorema do valor intermediário / Mayara Beatriz Ferreira Drumond. - 2018.

49f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.

Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Funções contínuas. 2. Teorema do valor intermediário. I. Ferreira, Wenderson Marques. II. Martins, Eder Marinho. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 510:37



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT



Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de Li-Yorke: Uma Aplicação do Teorema do Valor Intermediário

Autor(a): Mayara Beatriz Ferreira Drumond

Dissertação defendida e aprovada, em **19 de Dezembro de 2018**, pela banca examinadora constituída pelos professores:


Wenderson Marques Ferreira - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto


Eder Marinho Martins - Coorientador
Universidade Federal de Ouro Preto

PARTICIPACÃO POR VÍDEO CONFERÊNCIA -

Márcio Fialho Chaves
Universidade Federal de Lavras


Geraldo César Gonçalves Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

Mas Jesus, tendo ouvido o que falaram, disse ao chefe da sinagoga: "Não tenha medo. Apenas creia."

Mc 5:36

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por me dar essa oportunidade de viver e lutar por todos os meus sonhos todos os dias.

À minha mãe, pelo apoio incondicional as minhas decisões.

Ao Murilo, por toda paciência e compreensão nessa fase de tantas mudanças na minha vida.

Às minhas irmãs, Anna Beatriz e Karolayne, por não me deixarem desistir.

À minha família, por entender que, sem estudos não somos nada na vida.

Ao meu orientador Dr. Wenderson Marques Ferreira por toda paciência e ensinamentos.

E aos meu grandes amigos nessa jornada de mestrado: Gilberto e Marília, por todas as horas de loucuras e estudos juntos!

Aos professores do Mestrado que contribuíram com cada semente plantada de novos conhecimentos.

E a todos que participaram dessa trajetória direta e indiretamente, fica aqui o meu imenso muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho estudaremos um resultado sobre funções contínuas em uma variável: o Teorema de Li-Yorke, que estabelece que, se uma função real para a qual a imagem do intervalo $[a, b]$ é aplicada em si mesmo possui um ponto de período três, então possuirá pontos periódicos de qualquer período inteiro positivo. Na demonstração, utilizaremos fortemente o Teorema do Valor Intermediário. No decorrer do trabalho, exploraremos, sempre que possível, a geometria dos resultados utilizados e apresentaremos exemplos que os ilustrem. Também apresentaremos uma atividade sobre rotações de um ponto numa circunferência, feita com o software GeoGebra, que pode ser feita com alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Pontos Periódicos, Órbitas Periódicas, Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Li-Yorke.

Abstract

In this work we will study a result about continuous functions of a single variable: the Li-Yorke Theorem, which establishes that, if a real valued continuous function on $[a, b]$, whose range is contained in $[a, b]$, has a 3-periodic point, then has n -periodic points for all positive integers n . The Intermediate Value Theorem will be fundamental in our demonstration. We will explore, always than possible, the geometry of the results and present some examples that illustrate them. We will also present an activity about rotations of a circle, using GeoGebra, which can be done with high school students.

Keywords: Periodic Point, Periodic Orbit, Intermediate Value Theorem, Li-Yorke Theorem.

Sumário

1	Introdução	10
2	Resultados Preliminares	12
3	Pontos Periódicos e Órbitas	18
3.1	Estudos de Rotações com Uso do GeoGebra	26
4	Sobre Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de Li-Yorke	33
4.1	A Localização dos Pontos Periódicos de Ordem Ímpar	34
4.2	A Existência de Pontos n -periódicos Para Qualquer $n \in \mathbb{N}$	44
5	Considerações Finais	48
6	Apêndice	49

1 Introdução

O objetivo geral deste trabalho é o estudo de órbitas periódicas de funções, apresentando conceitos que vão além daqueles vistos no Ensino Médio. Grandes matemáticos como Newton (1642 – 1727), Leibniz (1646 – 1716), e Euler (1707 – 1783) têm estudos sobre esse campo, para mais detalhes, ver [4]. Após as definições e resultados preliminares, abordaremos o Teorema de Li-Yorke o qual garante que sob certas hipóteses, a existência de um ponto de período três para uma função contínua, assegura a existência de pontos n -periódicos para qualquer n inteiro positivo. Esse último resultado, é uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário, cuja visualização geométrica é simples e será aprofundada ao longo do texto. O Teorema leva o nome dos pesquisadores T. Li e J. A. Yorke que, em 1975, publicaram o artigo: *Period Three Implies Chaos* na revista *American Mathematical Monthly*.

No segundo capítulo, denominado Resultados Preliminares, abordaremos algumas definições como ponto fixo e alguns teoremas, como o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que serão essenciais ao longo de todo o trabalho. Sempre que possível, tentaremos explorar a geometria desses resultados.

No terceiro capítulo, denominado Pontos Periódicos e Órbitas, estabeleceremos precisamente as definições de Pontos Periódicos e Órbita Periódica de uma função contínua. Nesse capítulo, muitos exemplos serão apresentados ilustrando as definições apresentadas. Tais exemplos quase sempre corresponderão as funções estudadas no Ensino Médio, com gráficos simples e cálculos que envolvem os conceitos de trigonometria, matrizes e composição de funções. Além dos resultados teóricos implementaremos, com auxílio do software GeoGebra, uma atividade que pode ser desenvolvida em sala de aula com recursos computacionais. Essa atividade, conduzida pelo professor, pode ser construída pelos alunos dando mais dinamismo às aulas, possibilitando a exploração geométrica do processo de rotações sucessivas de um ponto no círculo. Atividades como essas deixam as aulas mais dinâmicas pois o professor desperta no aluno a curiosidade e o próprio aluno faz as descobertas acerca do assunto estudado. O professor leva o aluno a pensar, a investigar, a ser mais participativo em aula e não só receber o conteúdo estudado. Assim, a aprendizagem ganha um significado muito mais forte comparado com aqueles que não tiveram o esforço da descoberta.

No quarto capítulo, denominado Sobre Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de Li-Yorke, apresentaremos duas proposições que são de extrema importância para a demonstração do teorema principal do trabalho. A primeira proposição é uma generalização do Teorema do Valor Intermediário, e a segunda nos diz que, sob certas condições, uma órbita ímpar tem seus pontos se alternando à esquerda e à direita de um ponto central. Este último resultado é interessante por si só, e sua demonstração é bastante engenhosa e construtiva, ocupando

a maior parte do capítulo. Demonstrando esses resultados, obtemos facilmente o Teorema de Li-Yorke. Duas observação são apresentadas ao final do capítulo para mostrar a importância das hipóteses do Teorema de Li-Yorke. Apresentaremos exemplos simples que ilustram a necessidade das hipóteses envolvidas.

2 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e definições que serão vistos no decorrer do trabalho. Nos basearemos principalmente nas obras: [5] e [6].

As funções consideradas são de domínios reais e contradomínios reais. Vamos iniciar pela definição de função contínua: considere um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente "próximo" a a . A noção precisa de "próximo" pode ser posta de forma rigorosa do seguinte modo:

Definição 2.1. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos determinar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Para mais detalhes sobre essa abordagem rigorosa, ver em [5],

Vejamos agora o Lema de Permanência de Sinal que pode ser visto com mais detalhes em [6]. Tal lema nos garante que se a função f for contínua e se $f(x_0)$ for não nula, então existe uma vizinhança de x_0 tal que a imagem de todos os seus pontos tem o mesmo sinal de $f(x_0)$.

Lema 2.1 (Lema de Permanência do Sinal). *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_0 \in I$ for tal que $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$), existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\left(\text{resp. } f(x) < -\frac{f(x_0)}{2} \right).$$

Em particular, f ainda é positiva (resp. negativa) em $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x_0) > 0$, $x_0 \in I$. Consequentemente $\frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Seja $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Então existe $\delta > 0$, tal que,

$$|x - x_0| < \delta, x \in I \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

De modo equivalente temos

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2},$$

que corresponde a

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2}f(x_0).$$

Daí, temos

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

para todo $x \in I$ tal que $|x - x_0| < \delta$, ou seja, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$.

Analogamente, é mostrado o caso $f(x_0) < 0$. □

Outro teorema clássico da Matemática é o Teorema do Valor Intermediário que apresentaremos a seguir.

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Provaremos o caso para $f(a) < d < f(b)$. O caso $f(b) < d < f(a)$ é análogo.

Demonstração. Considere o conjunto $P = \{x \in [a, b], \text{ tal que } f(x) < d\}$. Como $f(a) < d$ segue-se que $a \in P$ e portanto $P \neq \emptyset$.

Consideramos um elemento $m \in P$. Neste caso, $f(m) < d$. Como f é contínua em todos seus pontos, será contínua em m . Pela Definição 2.1, dado $\varepsilon = d - f(m) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (m, m + \delta)$ tem-se $f(x) < f(m) + \varepsilon = d$. Daí, todo elemento de $(m, m + \delta)$ pertence a P e, em consequência disso, não há maior elemento em P .

Seja $c = \sup P$. Claramente $c < b$ pois $f(b) > d$ e segue-se do Lema de Permanência do Sinal que existe $\lambda_b > 0$ tal que $f(x) \notin P$ se $x \in (b - \lambda_b, b)$. Para $c > a$, existe $\lambda_a > 0$ tal que $f(x) < d$ para todo $x \in [a, a + \lambda_a]$.

Considere uma sequência $(y_n) \in P, y_n \rightarrow c$. Daí $f(c) = \lim f(y_n) \leq d$. Ver Apêndice, Teorema 6.1.

Como P não possui maior elemento, $c \notin P$ (já que do contrário teríamos $c + \varepsilon \in P$ para ε suficientemente pequeno). Daí $f(c)$ não pode ser menor que d , e somos levados a concluir que $f(c) = d$. □

Corolário 2.1 (Teorema de Bolzano). *Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, isto é, se*

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ ou } f(b) < 0 < f(a),$$

então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

Demonstração. Basta considerar $d = 0$ no Teorema do Valor Intermediário e obtemos nosso resultado. □

A seguir veremos um corolário que será muito importante nos próximos passos do trabalho. Antes de enunciá-lo, vejamos a definição de Ponto Fixo pode ser encontrada em [8].

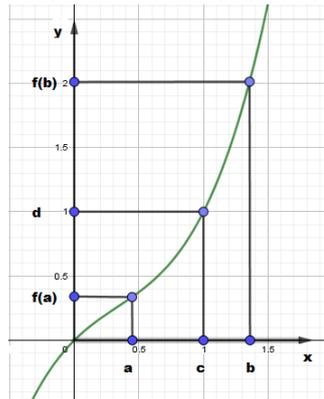


Figura 2.1: Ilustração do Teorema do Valor Intermediário. Observe que cada $d \in [f(a), f(b)]$ possui pré imagem por f em algum $c \in [a, b]$.

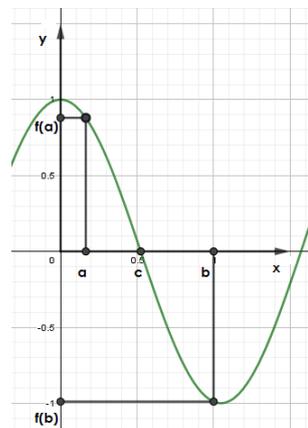


Figura 2.2: Nesse caso, $f(b) < 0 < f(a)$ e $c \in (a, b)$ é uma raiz de $f(x)$.

Definição 2.2 (Ponto Fixo). *Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \rightarrow X$ uma função dada. Dizemos que um elemento $x_0 \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.*

Corolário 2.2. *Seja $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ intervalos fechados, $I \subset J$ e f uma função contínua. Se $f(I) \supset J$, então f tem um ponto fixo em I .*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, já temos um ponto fixo. Caso contrário, considere a função contínua $h(x) = f(x) - x$. Daí, como $I \subset J$ e $f(I) \supset J$ (logo, contém os pontos a e b), existe um $x_1 > a$, $x_1 \in I$ tal que $f(x_1) = a$ e existe um $x_2 < b$, $x_2 \in I$ tal que $f(x_2) = b$. Segue-se então

$$h(x_1) = f(x_1) - x_1 = a - x_1 < 0$$

e

$$h(x_2) = f(x_2) - x_2 = b - x_2 > 0.$$

Segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $x \in I$ tal que $h(x) = 0$, ou seja $f(x) = x$. Portanto f é uma função que tem ponto fixo. \square

Geometricamente uma função real possui ponto fixo quando seu gráfico tem intersecção com o da função de domínio real $g(x) = x$ e é imediato que nem toda função possui ponto fixo. Vejamos exemplos de funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com um, dois e três pontos fixos.

Exemplo 2.1. Exemplo de funções com um, dois e três pontos fixos:

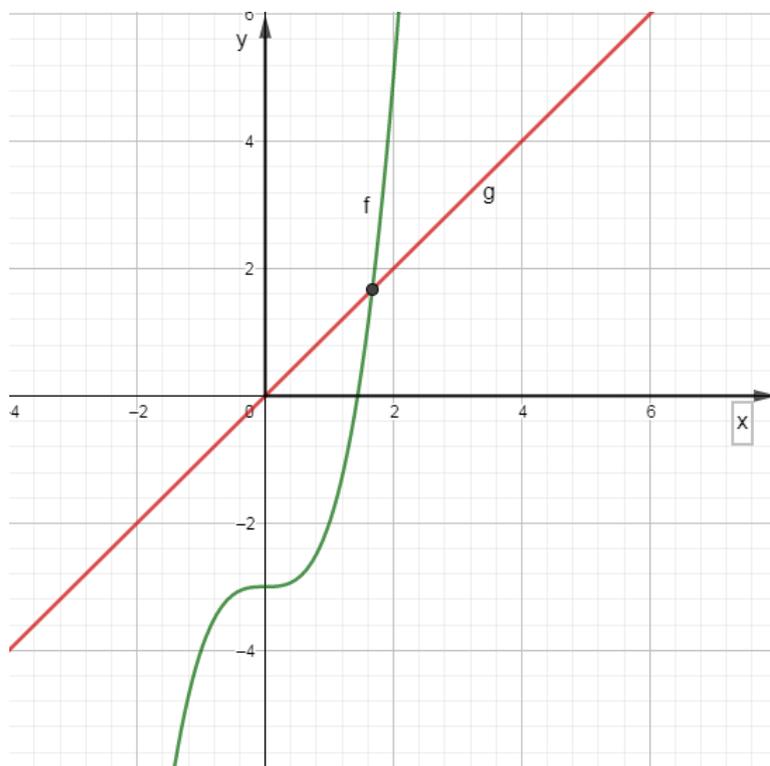


Figura 2.3: A função $f(x) = x^3 - 3$ possui apenas um ponto fixo no intervalo do domínio $[1, 2]$.

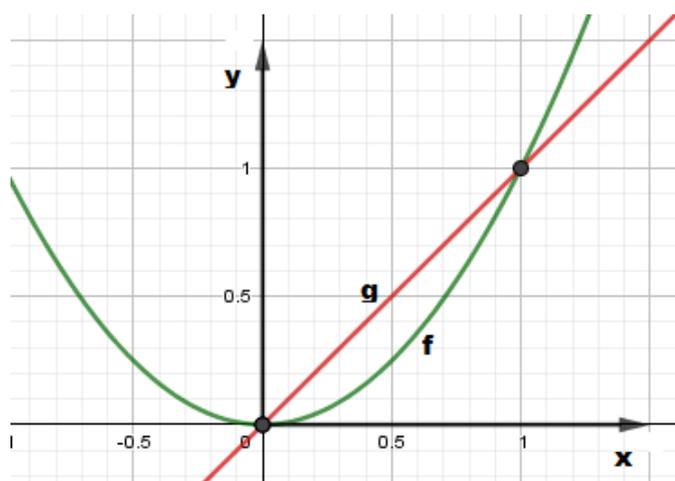


Figura 2.4: A função $f(x) = x^2$ possui dois pontos fixos no intervalo do domínio $[0, 1]$.

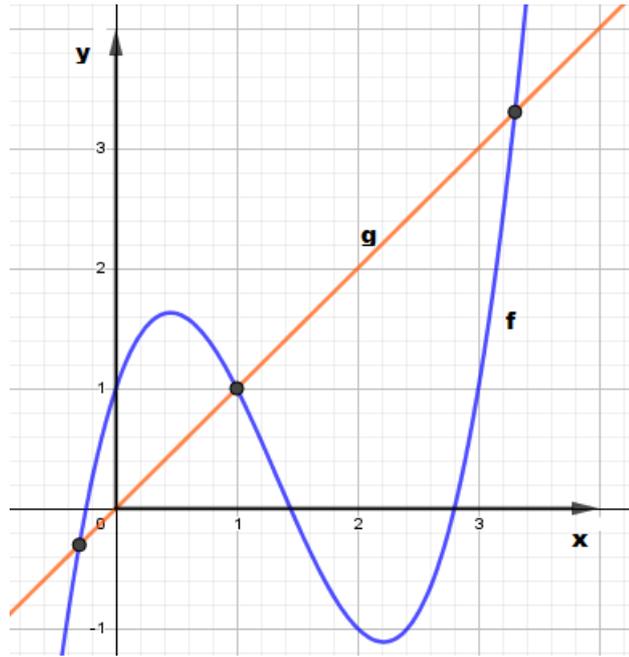


Figura 2.5: A função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ possui três pontos fixos no intervalo $[-1, 4]$.

Um dos mais importantes e conhecidos teorema sobre pontos fixos é o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que veremos a seguir.

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer será fundamental em algumas demonstrações da sequência do trabalho.

Teorema 2.2 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Então f possui ao menos um ponto ponto fixo.*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o resultado está provado. Considere, sem perda de generalidade, $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Seja $g(x) = f(x) - x$. Como f é contínua, temos que g é uma função contínua. Temos, além disso,

$$g(a) = f(a) - a > 0$$

e

$$g(b) = f(b) - b < 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$g(x_0) = 0$$

ou seja,

$$f(x_0) = x_0$$

e provamos o teorema. □

Na verdade, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é equivalente ao Teorema do Valor Intermediário. A primeira parte da equivalência já foi demonstrada, o Teorema do Valor Intermediário implica no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A outra equivalência, o teorema do Ponto Fixo de Brouwer implicar no Teorema do Valor intermediário pode ser vista em [7].

Antes de prosseguirmos, vejamos alguns exemplos.

O exemplo a seguir pode ser visto também em [7].

Exemplo 2.2. A função $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = x^3$ possui três pontos fixos: -1 , 0 e 1 .

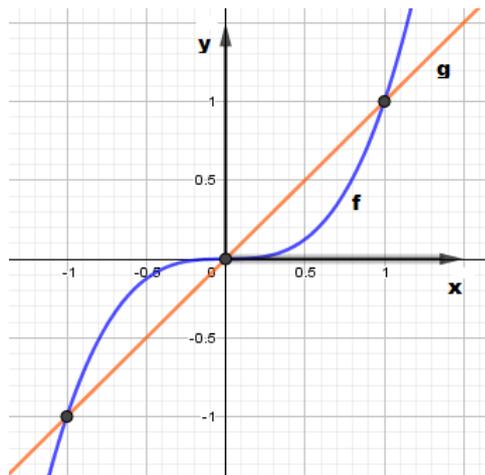


Figura 2.6: O função $f(x) = x^3$ possui três pontos fixos no intervalo do domínio $[-1, 1]$.

O exemplo a seguir pode ser encontrado em [1].

Exemplo 2.3. Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$, que possui um ponto fixo. Com auxílio do GeoGebra¹, para análise dos gráficos, encontramos esse ponto, que ocorre em aproximadamente $x \approx 0,739$.

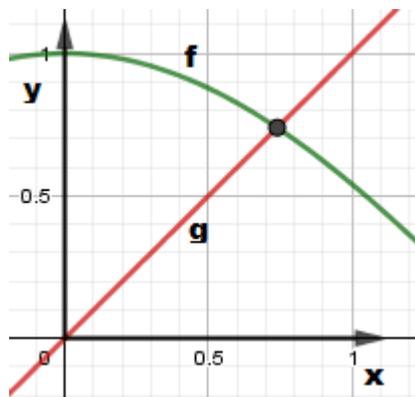


Figura 2.7: O gráfico de $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dado por $f(x) = \cos x$ intercepta o gráfico de $g(x) = x$ em somente um ponto, aproximadamente em $x \approx 0.739$.

¹Software matemático, versão 6.0 utilizada

3 Pontos Periódicos e Órbitas

Neste Capítulo abordaremos a noção de pontos periódicos de uma função f , dos quais os pontos fixos, definidos no capítulo anterior, são um caso particular. Definiremos também órbitas periódicas e apresentaremos uma série de exemplos relativos aos conceitos apresentados. Grande parte dos exemplos que apresentaremos envolvem funções estudadas no Ensino Médio. A nossa principal referência para esta seção é o artigo [4].

De agora em diante, utilizaremos a notação

$$f^n(x) = \begin{cases} x, & \text{se } n = 0, \\ f(x), & \text{se } n = 1, \\ f(f^{n-1}(x)), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. Se considerarmos $f(x) = x + 5$ e $x = 1$. Temos a sequência de imagens

$$f^0(1) = 1, f^1(1) = 6, f^2(1) = f(f^1(1)) = f(6) = 11, f^3(1) = f(f^2(1)) = f(11) = 16,$$

e assim sucessivamente. As imagens de 1 pelas funções f^n , $n \in \mathbb{N}$ formam uma progressão aritmética de razão 5 e termo inicial 1.

Definição 3.1 (Ponto Periódico). Se x_0 satisfizer

$$\begin{cases} f^n(x_0) = x_0, \\ f^k(x_0) \neq x_0 \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases}$$

então x_0 é chamado ponto n -periódico de f .

O menor valor de n que satisfaz a condição anterior é denominado período de x_0 . Observe que se x_0 for um ponto de período n então $f^{kn}(x_0) = x_0$ para k inteiro positivo.

Uma função f pode possuir pontos de diversos períodos. Nosso principal objetivo neste trabalho será mostrar o seguinte fato: se uma função possuir um ponto de período três, então possuirá pontos de quaisquer períodos inteiros positivos. Esse resultado será visto em detalhes no Capítulo 4.

Claramente os pontos fixos são pontos 1–periódicos.

Definição 3.2 (Órbita periódica de f). Se x_0 for um ponto n -periódico de f , chamamos de órbita periódica da função f o conjunto $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$.

Teorema 3.1. Seja I um intervalo de \mathbb{R} . Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e possuir um ponto de período $k > 1$, então possuirá também um ponto de período 1.

Demonstração. Isso segue do Teorema do Valor Intermediário. Seja f uma função contínua e x_0 um de seus pontos de período k , com $f^i(x_0)$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1$ sendo os pontos da órbita de x_0 .

Inicialmente escrevemos os pontos $x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)$ em uma sequência crescente e a renomeamos como

$$z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{k-1}.$$

Considere a função contínua $h(x) = f(x) - x$. Como f é uma função de período k , temos

$$h(z_0) = f(z_0) - z_0 = z_i - z_0 > 0, \text{ para algum } i = 1, 2, \dots, k-1,$$

e

$$h(z_{k-1}) = f(z_{k-1}) - z_{k-1} = z_i - z_{k-1} < 0, \text{ para algum } i = 0, 1, 2, \dots, k-2.$$

Então, como h é contínua, existe $c \in [z_0, z_{k-1}]$ tal que $h(c) = 0$. Logo $f(c) = c$, o que nos dá um ponto fixo para f . \square

Aplicando a contrapositiva ao resultado anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *Seja I um intervalo. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e não possui ponto fixo, então f não possui ponto de período k , $k > 1$.*

Vejamos agora alguns exemplos de pontos periódicos e órbitas. Mais detalhes do exemplo que podem ser vistos em [1].

Exemplo 3.2. *A função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tem dois pontos fixos, ou seja, dois pontos de período um. De fato, resolvendo a equação $x^2 - 2x + 1 = x$ encontramos as raízes*

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = x$ estão indicados na Figura 3.1.

Ainda considerando a função f , temos $x = 0$ ponto de período dois e sua órbita é $\{0, 1\}$.
Cálculo da órbita do ponto $x = 0$

$$f^0(0) = 0, f^1(0) = 1 \text{ e } f^2(0) = 0.$$

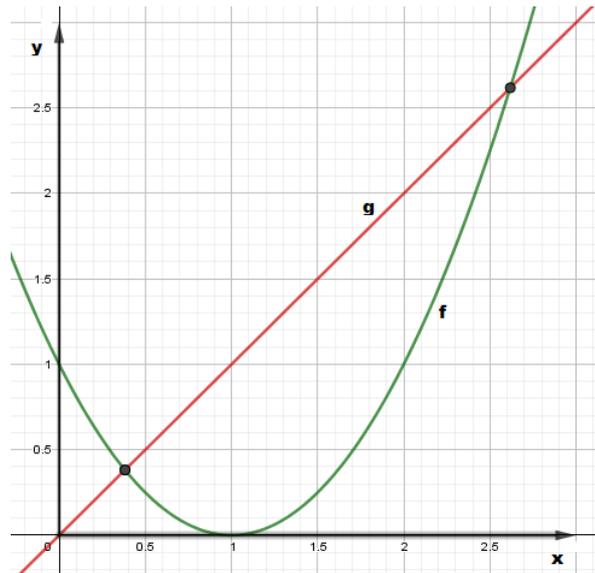


Figura 3.1: O função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ possui dois pontos fixos no intervalo $[0, 3]$.

O exemplo a seguir pode ser visto também em [4] e em [1].

Exemplo 3.3. Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

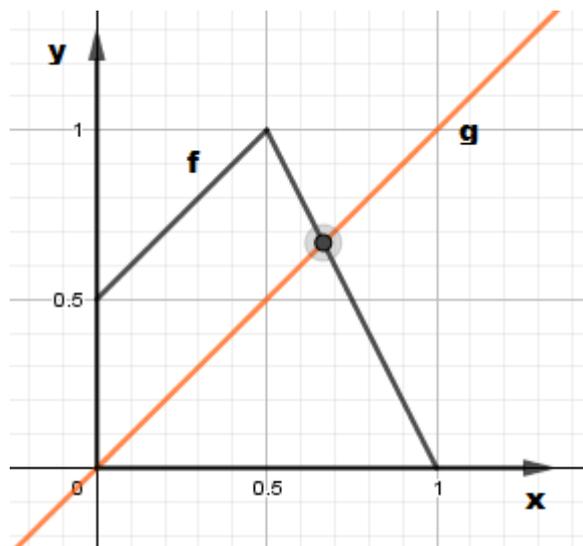


Figura 3.2: O função $f(x)$ do Exemplo 3.3 possui um ponto fixo no intervalo $[0, 1]$.

Observando os gráficos de $f(x)$ e $g(x) = x$ na Figura 3.2, vemos uma única intersecção. Resolvendo algebricamente temos

$$x + \frac{1}{2} = x,$$

para valores de x entre $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, não obtemos solução. Resolvendo

$$2 - 2x = x$$

para valores de x compreendidos em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, encontramos a solução

$$x = \frac{2}{3}$$

que é o ponto fixo de f . A existência desse ponto já era esperada como consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Temos também que $x = \frac{1}{3}$ é ponto de período dois de f e sua órbita é $\left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right\}$. De fato,

$$f^0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, f^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}, f^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Ainda considerando a função f , temos $x = 0$ é ponto de período três de f e sua órbita é $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. De fato,

$$f^0(0) = 0, f^1(0) = \frac{1}{2}, f^2(0) = 1, f^3(0) = 0.$$

Exemplo 3.4. A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 6 - 2x, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases}$$

tem pontos fixos em

$$x = 0 \text{ e } 2$$

e possui um ponto de período dois.

De fato, calculando os pontos fixos da função, observamos que a equação

$$2x = x$$

tem solução única para $x = 0$. Então há um ponto fixo para $x \leq \frac{3}{2}$. Já resolvendo a equação

$$6 - 2x = x,$$

encontramos o valor

$$x = 2$$

o qual respeita a condição $x > \frac{3}{2}$. Portanto, a função f tem dois pontos fixos.

Além disso, $x = \frac{12}{5}$ é um ponto de período dois e sua órbita é $\left\{ \frac{12}{5}, \frac{6}{5} \right\}$. De fato,

$$f^0\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}, f^1\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{6}{5}, f^2\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}.$$

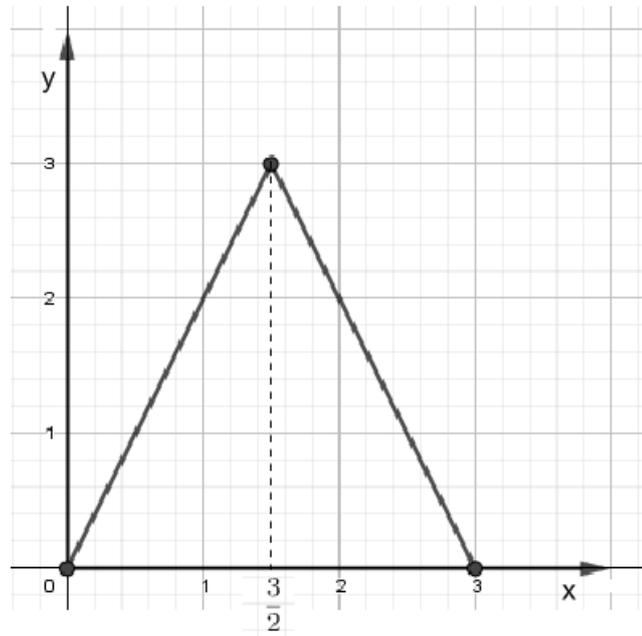


Figura 3.3: Gráfico da função f definida no Exemplo 3.4.

A ideia para o exemplo a seguir pode ser encontrada em [3] e em [1].

Vamos considerar o conjunto $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}$.

Exemplo 3.5. Considere $h(x, y) : S^1 \rightarrow S^1$ dada por

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Tal $h(x, y)$ corresponde à função de rotação do círculo do ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ no sentido anti-horário e h não possui pontos fixos, já que a equação matricial

$$\begin{bmatrix} -\frac{x_0}{2} - \frac{y_0\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x_0\sqrt{3}}{2} - \frac{y_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

não possui solução em S^1 . Para verificar esse fato, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} -\frac{x_0}{2} - \frac{y_0\sqrt{3}}{2} = x_0, \\ \frac{x_0\sqrt{3}}{2} - \frac{y_0}{2} = y_0. \end{cases}$$

Qualquer ponto $(x_0, y_0) \in S^1$ possui período três em h , já que $h^3(x, y)$ é a função identidade. Abaixo está a composição da função para obter o resultado. Para um ponto $(x_0, y_0) \in S^1$, temos

$$\begin{aligned} h^0(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \\ h^1(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_0}{2} - \frac{y_0\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x_0\sqrt{3}}{2} - \frac{y_0}{2} \end{bmatrix}, \\ h^2(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x_0}{2} - \frac{y_0\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x_0\sqrt{3}}{2} - \frac{y_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_0}{2} + \frac{y_0\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{x_0\sqrt{3}}{2} - \frac{y_0}{2} \end{bmatrix}, \\ h^3(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x_0}{2} + \frac{y_0\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{x_0\sqrt{3}}{2} - \frac{y_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja, pela rotação do círculo, retornamos ao ponto inicial x_0 após três interações e qualquer ponto do domínio de h é periódico de período três.

Para obter uma função $h : S^1 \rightarrow S^1$ com todos os pontos de período 4, basta trocarmos o ângulo de rotação, com raciocínio semelhante para a função (3.1), trocando o período da função de $\frac{2\pi}{3}$ para $\frac{\pi}{2}$,

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Observe a Figura 3.5.

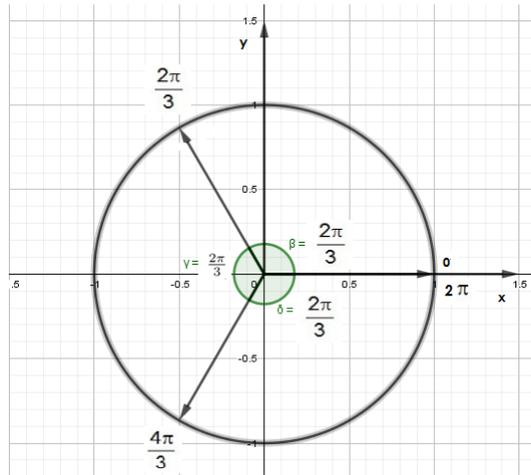


Figura 3.4: Função h de rotação do Exemplo 3.5 com todos os pontos de período três e $(x_0, y_0) = (m, 0), m > 0$.

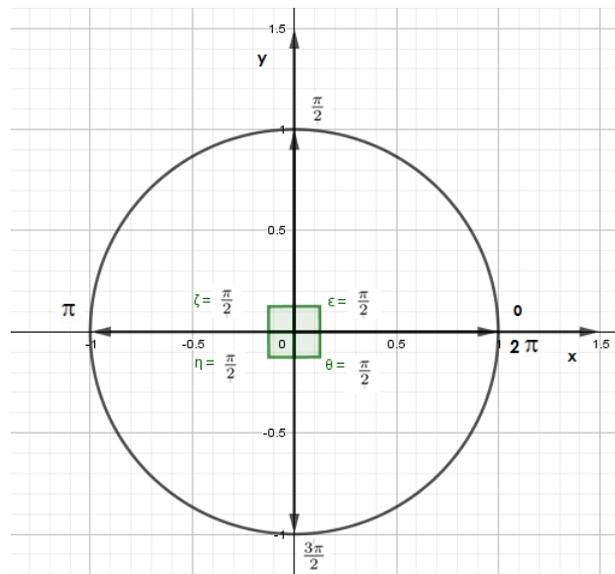


Figura 3.5: Função h de rotação do Exemplo 3.5 com todos os pontos de período quatro e $(x_0, y_0) = (m, 0), mk > 0$.

Repetindo o processo, e considerando um ponto (x, y) arbitrário, conseguimos construir funções de rotação nos quais todos os pontos do em S^1 são n -periódicos, bastando considerar $\frac{2\pi}{n}$ como ângulo de rotação. De forma genérica,

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

é uma função nos quais todos os pontos do em S^1 são n -periódicos.

Para mostrarmos que essa conjectura é válida para todo $k \in \mathbb{N}$ vamos prová-la por Indução Finita. Vamos considerar pontos na circunferência de raio r e vamos iniciar as rotações de um ponto arbitrário de S^1 . Seja θ o ângulo inicial do ponto a ser rotacionado. Neste caso, suas coordenadas são $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Vamos fazer uma primeira rotação desse ponto de um ângulo de $\frac{2\pi}{n}$

$$h^1(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação das matrizes e organizando os resultados, temos

$$h^1(x, y) = \begin{bmatrix} r \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1}{n} + \theta\right) \\ r \sin\left(\frac{2\pi \cdot 1}{n} + \theta\right) \end{bmatrix}.$$

Mostramos que é válida para $k = 1$. Suponhamos que a afirmação é válida para um valor inteiro positivo k , mostraremos que é válido para $k + 1$. Por hipótese,

$$h^k(x, y) = \begin{bmatrix} r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \theta\right) \\ r \sin\left(\frac{2\pi k}{n} + \theta\right) \end{bmatrix}$$

é válida para todo k natural. Então, faremos mais uma rotação de (x, y) de um ângulo de $\frac{2\pi}{n}$ depois de já termos feitos k rotações:

$$h^{k+1}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \theta\right) \\ r \sin\left(\frac{2\pi k}{n} + \theta\right) \end{bmatrix}.$$

Utilizando duas transformações trigonométricas: $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$ e $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$, obtemos

$$h^{k+1}(x, y) = \begin{bmatrix} r \cos\left(\frac{2\pi(k+1)}{n} + \theta\right) \\ r \sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n} + \theta\right) \end{bmatrix},$$

como queríamos demonstrar. Portanto, como $\cos(\theta) = \cos(2\pi + \theta)$ e $\sin(\theta) = \sin(2\pi + \theta)$,

$$h^k(x, y) = \begin{bmatrix} r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \theta\right) \\ r \sin\left(\frac{2\pi k}{n} + \theta\right) \end{bmatrix}$$

é uma função na qual qualquer ponto de seu domínio é n periódico.

Para esse exemplo, uma atenção especial será dada. Iremos propor uma atividade para ser implementada com uso do GeoGebra (já utilizado no Exemplo 2.3), com a descrição dos comandos para fazer a rotação de um ponto em uma circunferência tendo a periodicidade escolhida.

3.1 Estudos de Rotações com Uso do GeoGebra

A atividade proposta, mostra como podemos trabalhar com as rotações de pontos sobre uma circunferência arbitrária, centrada na origem no GeoGebra, com turmas do Ensino Médio. Na implementação, alguns conteúdos são essenciais para o entendimento e compreensão da atividade, como a composição de funções, o conhecimento das funções seno e cossenos, de transformações trigonométricas e de matrizes.

Antes de iniciarmos a implementação no GeoGebra, vamos começar uma discussão com os alunos.

Para a atividade em sala de aula, faremos um breve roteiro. Inicialmente, coloque os alunos para trabalharem em duplas. Defina um tempo para que os alunos manipulem o software GeoGebra.

- A- Discuta as expressões "no sentido horário" e "no sentido anti-horário" e certifique-se de que os alunos tenham uma compreensão desses termos;
- B- Peça aos alunos que imaginem e desenhem numa folha como será uma rotação de 90° graus no sentido anti-horário de um ponto numa circunferência. Quantas rotações serão necessárias para que o ponto retorne à posição inicial? E para um ângulo de 60° ?

- C- Peça aos alunos que imaginem e desenhem numa folha como será uma rotação de 90° graus no sentido horário de um ponto numa circunferência (mesma do item anterior). Quantas rotações serão necessárias para que o ponto retorne à posição inicial? E para um ângulo de 60° ?
- D- Monitore as respostas dos alunos durante a fase de ensino desta lição para avaliar o domínio dos conceitos explorados.

Levamos os alunos a concluir que é importante ter o ponto original a ser rotacionado, o ângulo de rotação e o número de rotações necessárias para voltar com o ponto para o local original. Vamos aos passos de implementação no GeoGebra.

Ao iniciarmos o GeoGebra, faremos os seguintes passos:

- 1- Criamos quatro controles deslizantes: a, b, N e K e desativamos a malha. As coordenadas do ponto na circunferência que iremos rotacionar (essas coordenadas nos darão o raio da circunferência) serão os valores de a e b , esses valores podem ser quaisquer reais, N que será o período do ponto considerado, que pode variar de 1 a qualquer valor inteiro positivo e K , um número inteiro positivo que varia de 1 a N e indicará quantas composições sucessivas da função de rotação foram feitas;

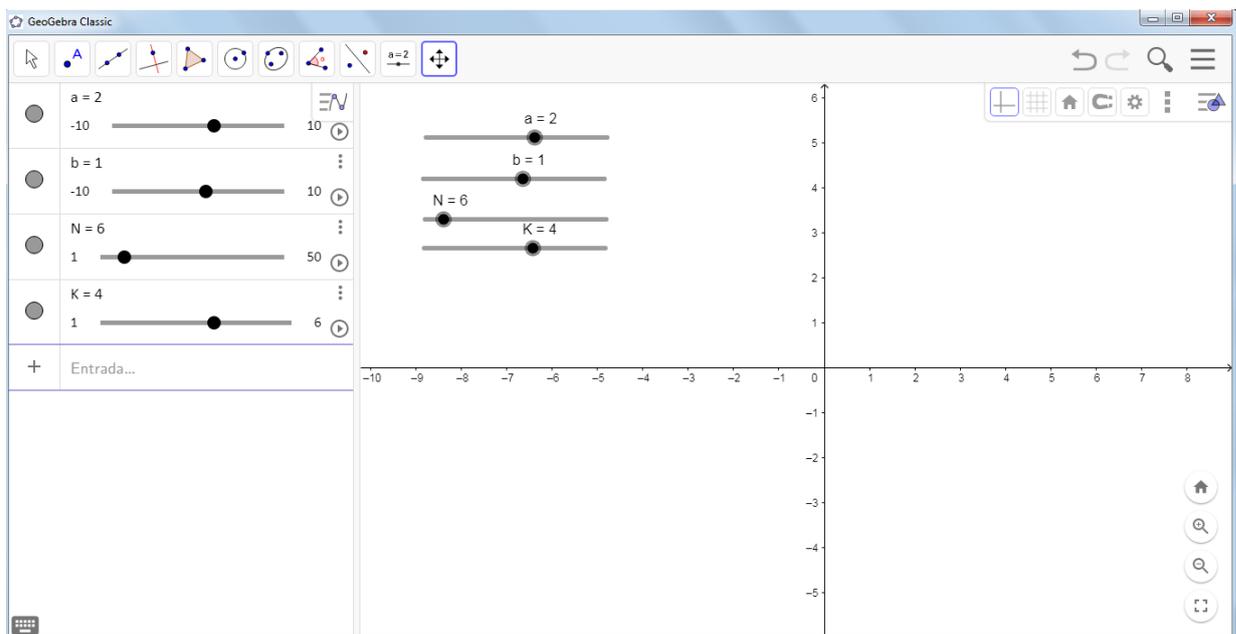


Figura 3.6: Criado os quatro comandos deslizantes a, b, N e K .

2- Definimos o ponto $A = (a, b)$, em que a e b já foram definidos pelo controle deslizante;

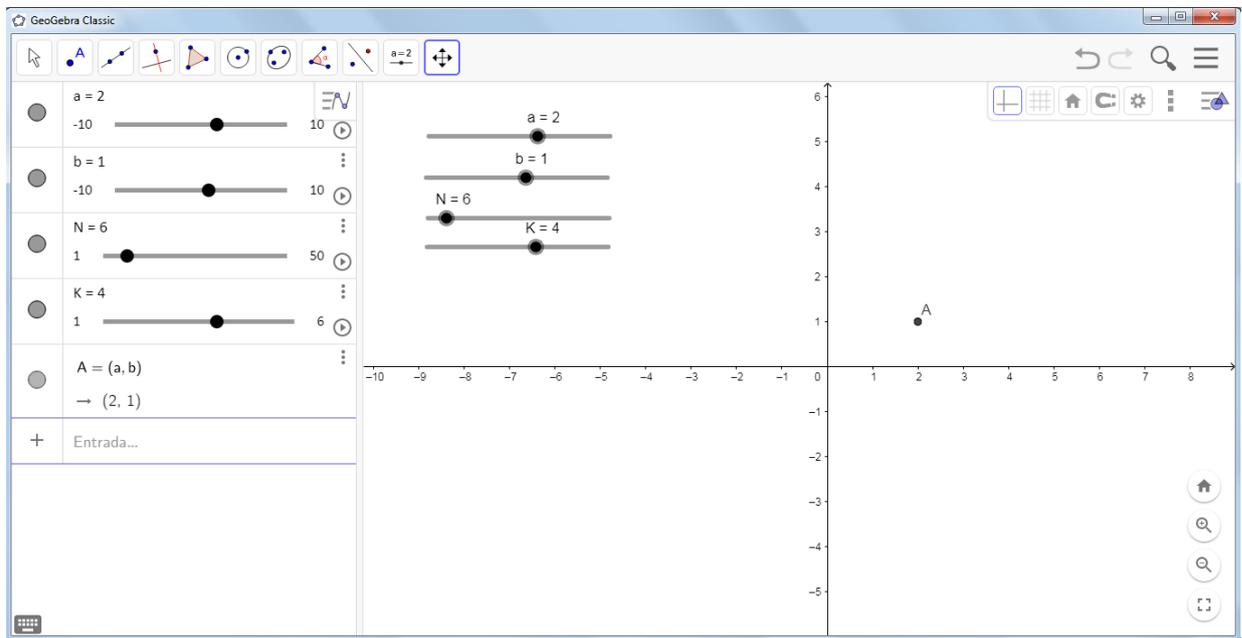


Figura 3.7: Criado o ponto $A = (a, b)$.

3- Definimos o raio da circunferência sobre a qual o ponto A irá rotacionar como $r = \sqrt{a^2 + b^2}$;

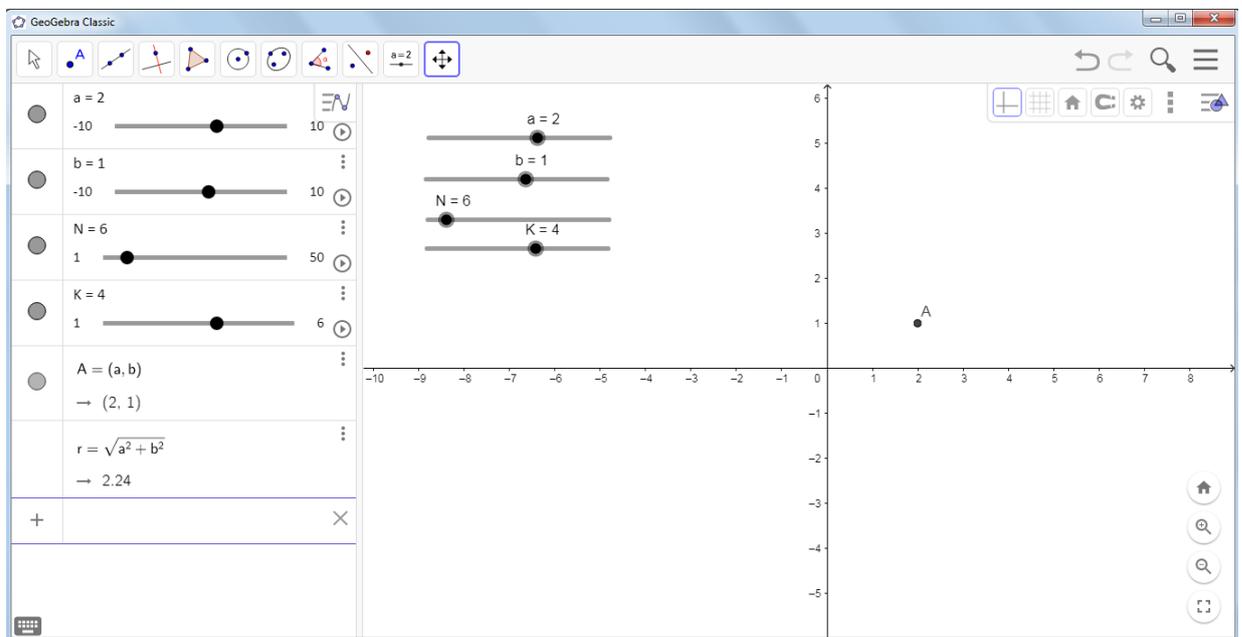


Figura 3.8: Criado $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4- O centro da circunferência será o ponto $O = (0,0)$;

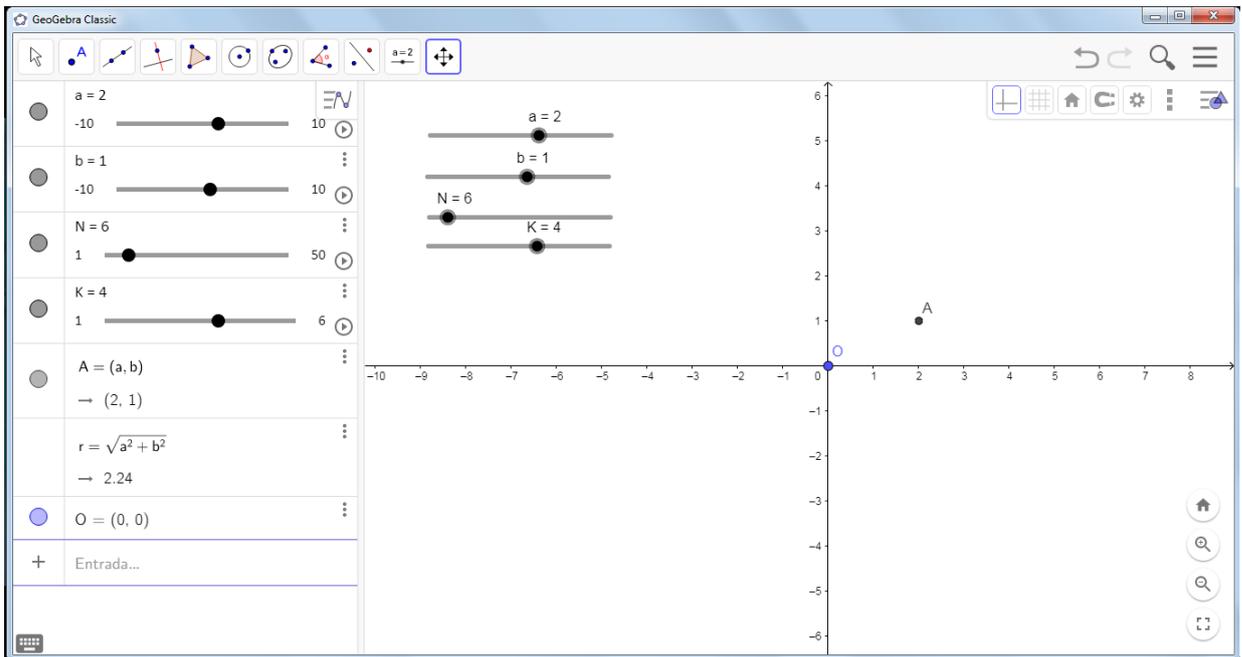


Figura 3.9: Criado o ponto $O = (0,0)$.

5- O ponto auxiliar $B = (1,0)$ será utilizado para determinar o ângulo BOA entre o eixo X e OA (sentido anti-horário);

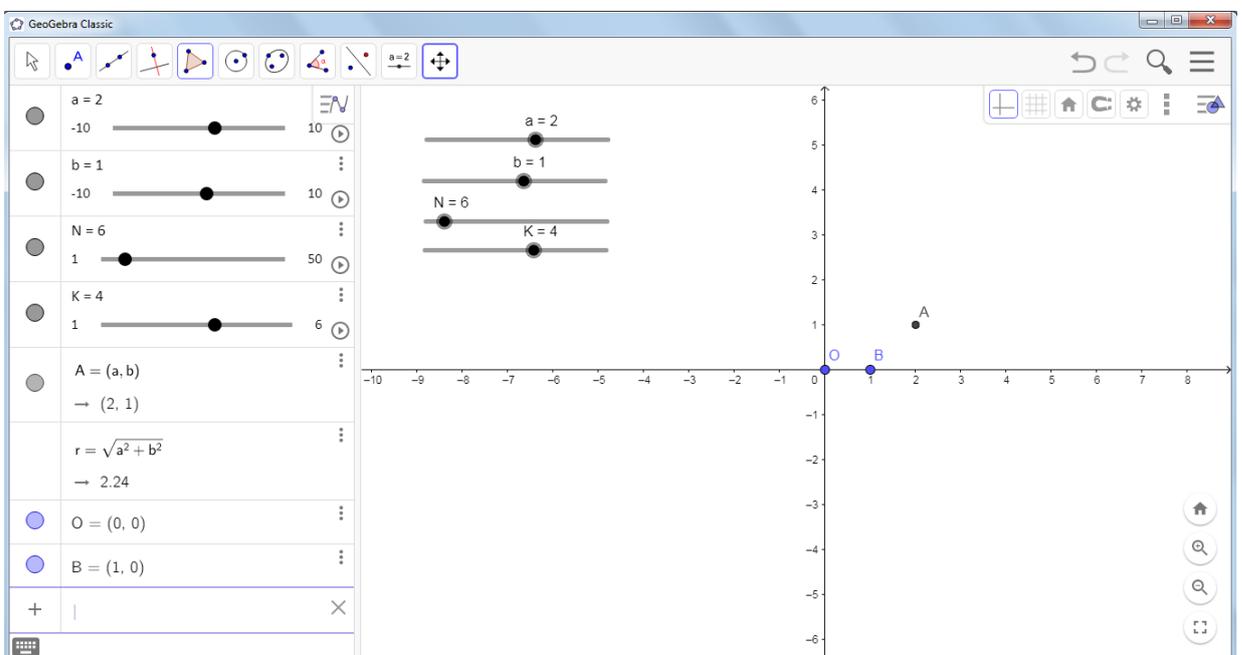


Figura 3.10: Criado o ponto $B = (1,0)$.

- 6- O ângulo inicial do ponto A será definido como $\theta = \text{ângulo}(B, O, A)$ e em seguida ocultaremos o ponto B para melhor visualização do ângulo θ ;

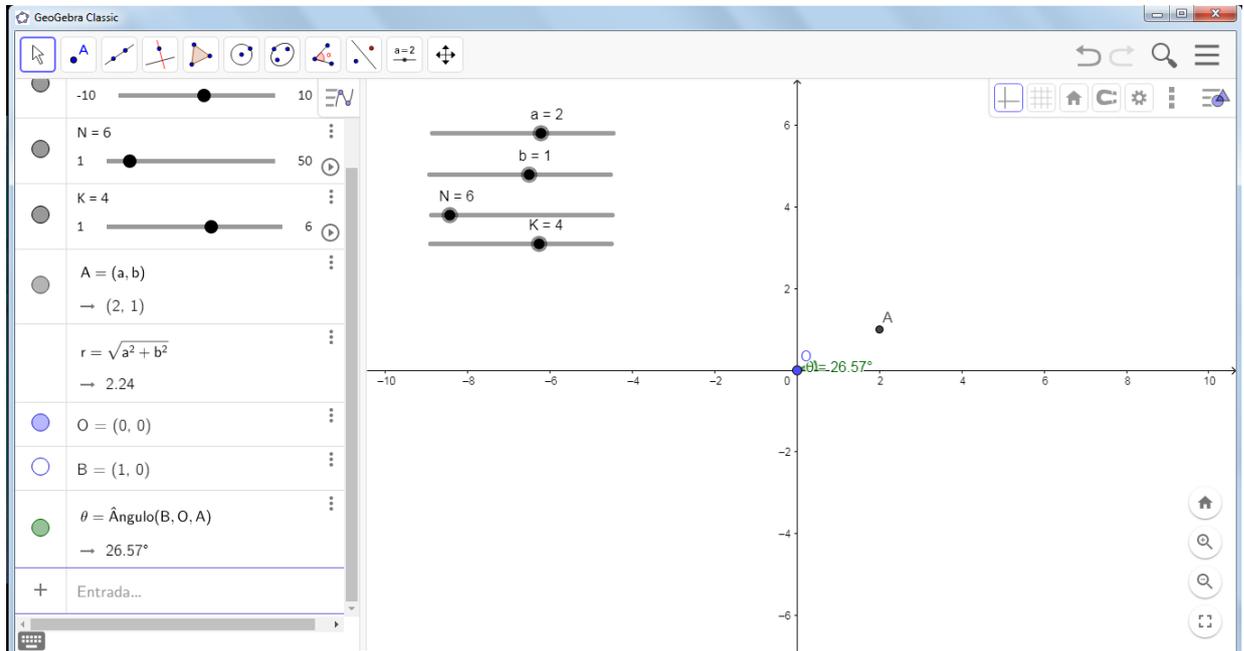


Figura 3.11: Criado o ângulo $\theta = \text{ângulo}(B, O, A)$.

- 7- Definimos a circunferência $D = (O, r)$, de centro O e raio r . Para melhor identificação da circunferência, trocaremos sua cor para, por exemplo, laranja;

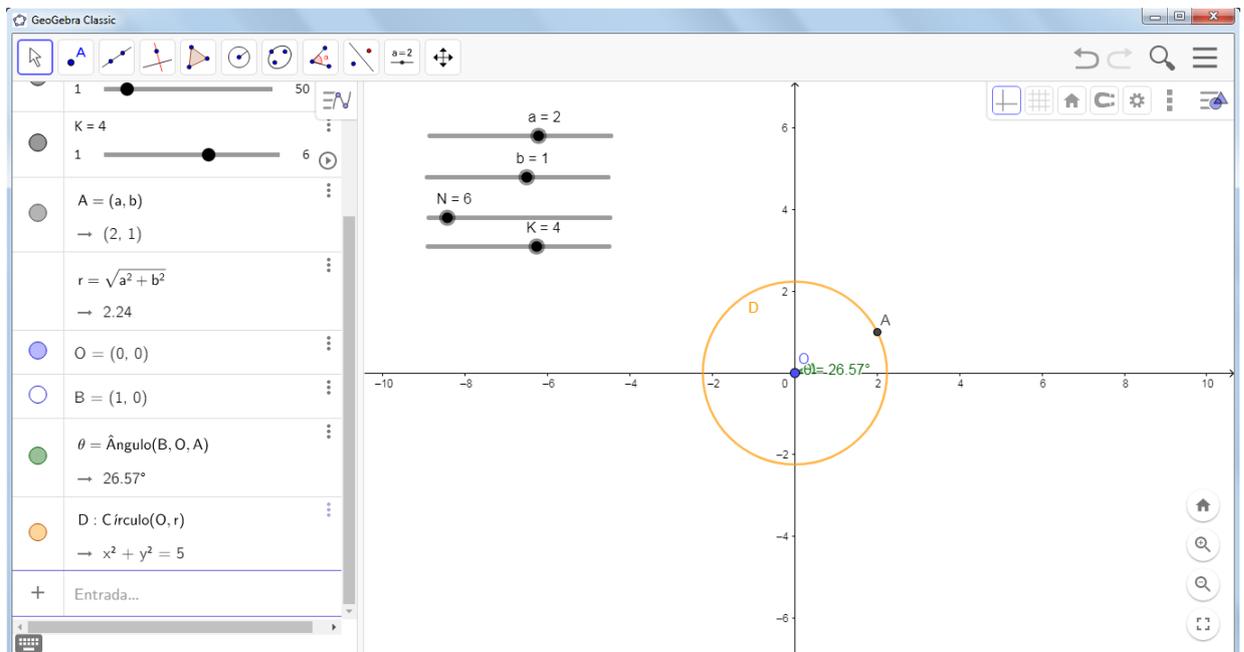


Figura 3.12: Criado a circunferência $D = (O, r)$.

- 8- Vamos transformar as medidas dos ângulos de graus para radianos definindo o novo ângulo como $\theta_{rad} = \frac{\pi\theta}{180^\circ}$;

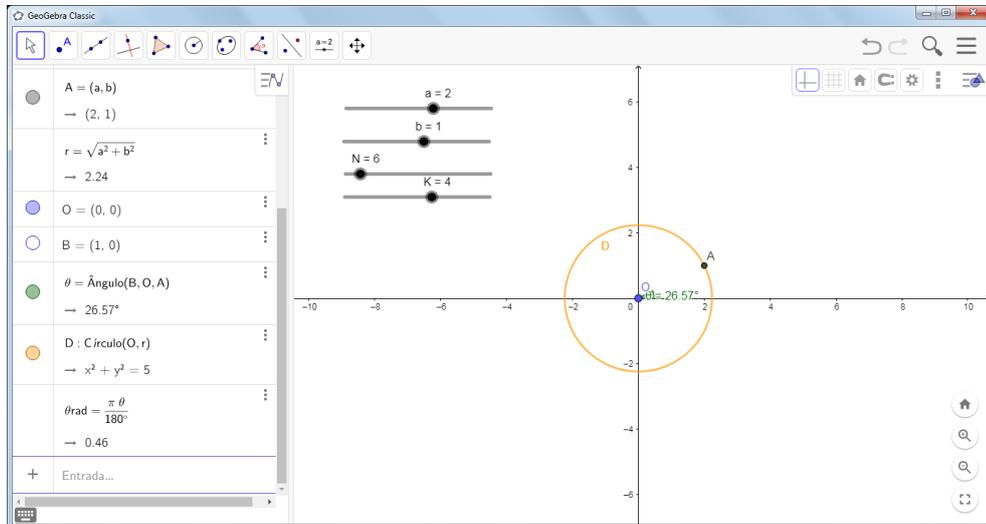


Figura 3.13: Definindo θ_{rad} .

- 9- Após cada rotação de A do ângulo θ_{rad} definimos as coordenadas no ponto $C = (X, Y)$ que corresponde à imagem obtida. As coordenadas da abscissa de C são

$$X = r \cos\left(\frac{2\pi K}{N} + \theta_{rad}\right)$$

e da ordenada são

$$Y = r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi K}{N} + \theta_{rad}\right).$$

Para melhor visualização de C , alteraremos o estilo do ponto para 9 e trocaremos a cor do ponto, por exemplo para vermelho.

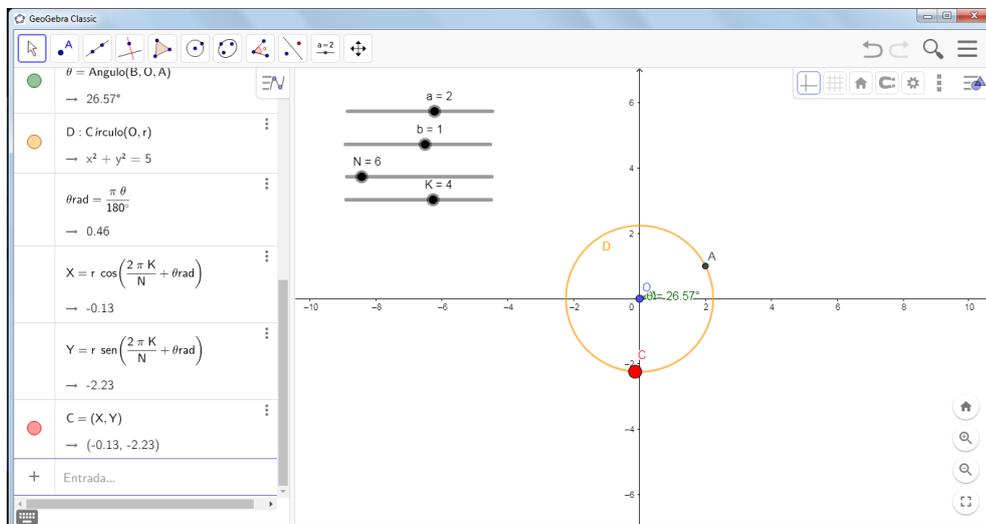


Figura 3.14: Definindo $C = (X, Y)$.

Após a implementação concluída, peça para os alunos fazerem a implementação do item B no GeoGebra.

Após feita e observado os resultados, vamos à segunda atividade. Os alunos devem fazer primeiramente, usando a matriz de rotação (3.2) numa folha, a rotação do ponto $(4, 0)$ de tal forma que o ponto tenha período 12. Qual valor de θ nesse caso? Faça o desenho do ponto e o desenho de uma rotação do ponto no papel e depois no GeoGebra. Compare as respostas encontradas.

Encerramento: Nos últimos 5 a 10 minutos de aula, dê aos alunos uma folha de papel e peça-lhes que respondam às perguntas a seguir.

- Quais são as coordenadas da imagem do ponto $(0, 2)$ após ser girado 90° no sentido anti-horário? Isso seria equivalente a uma rotação de quantos graus no sentido horário?
- Qual é o valor do período do ponto $(0, 2)$ na rotação de 90° no sentido anti-horário?
- Quais são as coordenadas da imagem de um ponto $(0, b)$ que é girado 90° no sentido horário?

Confira e compare as repostas no GeoGebra.

As respostas esperadas seriam:

Utilizando a matriz de rotação temos

$$h(2, 0) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Essa rotação equivaleria uma rotação de 270° no sentido horário.

O período do ponto $(0, 2)$ é quatro.

As coordenadas do ponto $(0, b)$ girado 90° no sentido horário é $(-b, 0)$.

Atenção com os alunos

À medida que os alunos trabalham com os questionamentos, o professor deve circular e dar *feedback* individual aos alunos. Após cada questionamento, o professor pode permitir que os alunos compartilhem suas soluções com a turma, intervindo se necessário.

Observação

A mesma construção feita nessa atividade pode ser utilizada para explorar o conceito de polígonos regulares inscritos numa circunferência e raízes n -ésimas de números complexos.

4 Sobre Órbitas Periódicas de Funções e o Teorema de Li-Yorke

Neste Capítulo, vamos apresentar o principal resultado do presente trabalho: o Teorema de Li-Yorke. Esse teorema garante que se f for contínua e contiver um ponto de período três então conterá um ponto de qualquer período inteiro. Antes de demonstrá-lo, vamos ver alguns resultados que nos fornecem informações sobre as órbitas de funções reais que possuem um número ímpar de pontos periódicos.

Nossa principal referência nas demonstrações e definições será [4] e pretendemos detalhar as demonstrações, justificando as principais passagens e explicitando os argumentos utilizados.

A Proposição a seguir é uma generalização do Teorema do Valor Intermediário, visto no Capítulo anterior, e será fundamental para a sequência do texto.

Na Proposição a seguir, bem como na sequência do texto utilizaremos a

Notação 4.1. $f(I_j) \supset I_{j+1}$ significa que a imagem de I_j por f contém I_{j+1} . De uma maneira geral, consideraremos

$$I_i \rightarrow I_j \text{ ou } I_j \leftarrow I_i$$

se $f(I_i) \supset I_j$ ($f(I_i)$ contém I_j). Quando ocorrer $f(I_i) \supset I_i$, denotaremos por $\curvearrowright I_i$.

Proposição 4.1. Sejam f uma função contínua em $[a, b]$ e I_0, I_1, \dots, I_{n-1} intervalos fechados contidos em $[a, b]$. Se

$$\begin{aligned} f(I_k) \supset I_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \\ f(I_{n-1}) \supset I_0, \end{aligned}$$

então a equação

$$f^n(x) = x$$

tem pelo menos uma solução $x = x_0 \in I_k$ tal que

$$f^k(x_0) \in I_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demonstração. Se $n = 1$, temos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que já foi demonstrado. Sabemos que a imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo. Como $f(I_{n-1}) \supset I_0$, existe $I_{n-1}^* \subset I_{n-1}$ tal que $f(I_{n-1}^*) = I_0$.

Do mesmo modo, existe $I_{n-2}^* \subset I_{n-2}$ tal que $f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*$.

Repetindo $n-1$ vezes esse raciocínio obtemos uma sequência de subintervalos $I_k^* \subset I_k$ tais que

$$f(I_k^*) = I_{k+1}^*, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \text{ e } f(I_{n-1}^*) = I_0.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 f(I_0^*) &= I_1^*, \\
 f^2(I_0^*) &= f(I_1^*) = I_2^*, \\
 f^3(I_0^*) &= f(I_2^*) = I_3^*, \\
 &\vdots \\
 f^{n-2}(I_0^*) &= f(I_{n-3}^*) = I_{n-2}^*, \\
 f^{n-1}(I_0^*) &= f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*, \\
 f^n(I_0^*) &= f(I_{n-1}^*) = I_0 \supset I_0^*.
 \end{aligned}$$

Portanto, como f^n é contínua e I_0^* é fechado e limitado, existe $x_0 \in I_0^*$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Além disso, $f^k(x_0) \in I_k^* \subset I_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

□

Geometricamente falando, $f^k(x_0) \in I_k$ significa que, aplicando-se f a x_0 e, em seguida, aplicando f sucessivamente às imagens obtidas, obteremos uma sequência de pontos, cada um deles pertencente a um dos conjuntos I_1, I_2, \dots, I_{n-1} , e voltaremos a assumir o valor inicial x_0 na n -ésima aplicação de f . Vale ressaltar que a obtenção do próprio x_0 após a n -ésima aplicação de f é garantida pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o que não significa que seja fácil ou possível exibí-lo.

4.1 A Localização dos Pontos Periódicos de Ordem Ímpar

O resultado da Proposição 4.1 é interessante por si só, mas será também fundamental para estabelecermos a prova da próxima proposição. Tal proposição estabelece que, sob certas condições, uma órbita ímpar (órbita com número ímpar de pontos) tem seus pontos se alternando à esquerda e à direita de um ponto central. A demonstração é grande e para melhor compreensão, vamos apresentá-la através da prova de uma sequência de afirmações que culminarão na obtenção do resultado apresentado. Vejamos seu enunciado.

Proposição 4.2. *Seja I um intervalo. Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua, e suponha que f tenha uma órbita $(2n+1)$ -periódica $\{x_k = f^k(x_0), k = 0, 1, \dots, 2n\}$ e que f não possua uma órbita $(2m+1)$ -periódica para $1 \leq m < n$. Suponha também que, escrevendo a sequência ordenada dos x'_i s em ordem crescente, x_0 seja seu termo central. Então uma das duas permutações¹*

$$i) \ x_{2n} < x_{2n-2} < \dots < x_2 < x_0 < x_1 < \dots < x_{2n-3} < x_{2n-1},$$

$$ii) \ x_{2n-1} < x_{2n-3} < \dots < x_1 < x_0 < x_2 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n},$$

¹Os ciclos desse tipo são denominados Ciclos de Stefan - ver [2].

é válida.

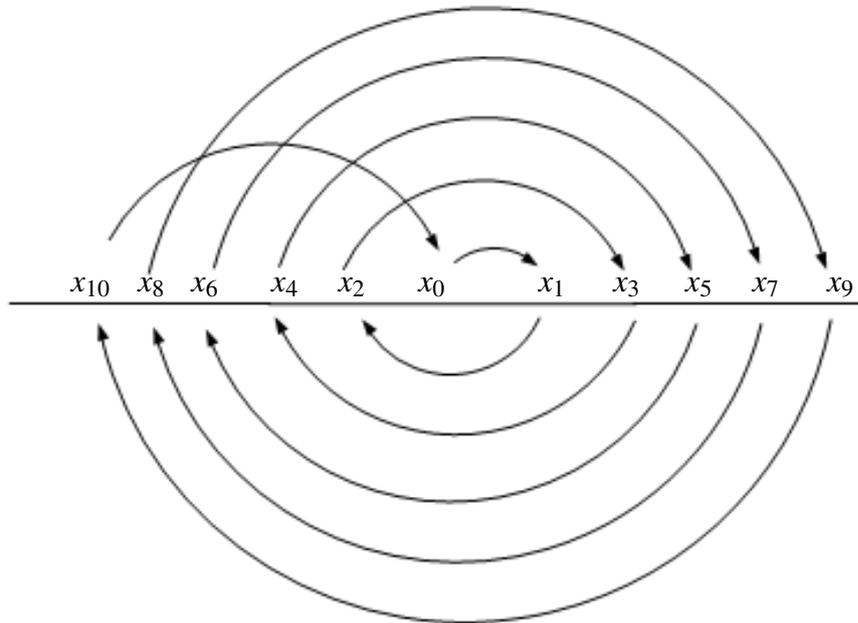


Figura 4.1: Representação esquemática da primeira permutação da Proposição 4.2.

Demonstração. Se $n = 1$ o resultado é imediato. De fato, sendo x_1, x_2 e x_3 os pontos da órbita e supondo $x_1 < x_2 < x_3$, temos a seguinte situação: $f(x_2) \neq x_2$ já que, por hipótese, não existe ponto de período um. Portanto ou $f(x_2) = x_1$ ou $f(x_2) = x_3$. Se $f(x_2) = x_1$, então $f(x_1)$ só pode ser x_3 já que, do contrário, a órbita seria menor do que três. Pelo mesmo motivo, $f(x_3) = x_2$ e concluímos nosso resultado. O caso de $f(x_2) = x_3$ é análogo.

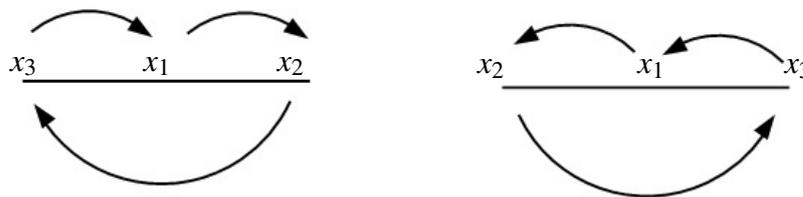


Figura 4.2: As possíveis configurações para o caso em que há 3 pontos na órbita.

Suponha $n > 1$. Reorganizando os x_i , $i = 0, 1, \dots, 2n$ como

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{2n+1}$$

temos $2n + 1$ elementos em ordem crescente. Vamos denotar tal sequência por z .

Considere o conjunto

$$X = \{i \in \mathbb{N}, f(z_i) > z_i\}.$$

Tal conjunto, é não vazio pois $1 \in X$. Além disso, $2n - 1 \notin X$ pois a imagem de z_{2n+1} deve ser menor do que ele próprio, ou seja

$$f(z_{2n+1}) < z_{2n+1}.$$

Logo, X tem no máximo $2n$ elementos, sendo um conjunto limitado de pontos e no qual é possível estabelecer uma ordenação. Pelo Princípio da Boa Ordenação (ver Apêndice, Teorema 6.2), existe o maior elemento de X , o qual denotamos por m , com $z_m \neq z_{2n+1}$. Neste caso,

$$f(z_k) < z_k, \text{ se } k > m.$$

Ainda não sabemos se cada $f(z_i)$ é maior ou menor que o próprio z_i para $i = 2, \dots, m - 1$. Considerando z_m e seu sucessor z_{m+1} , segue-se que

$$f(z_m) > z_m \text{ e } f(z_{m+1}) < z_{m+1}.$$

Seja $S_{kl} = \{z_i, k \leq i \leq l\}$ um subconjunto da sequência crescente definida anteriormente.

Consideramos

$$z_i^{kl} = \min\{f(z_i) : z_i \in S_{kl}\},$$

$$z_j^{kl} = \max\{f(z_i) : z_i \in S_{kl}\}.$$

Para não carregar a notação, denotaremos z_i^{kl} e z_j^{kl} simplesmente por z_i e z_j quando estiver claro a qual S_{kl} estamos nos referindo.

Definamos a função f^* , com domínio S_{kl} como²

$$f^*(S_{kl}) = S_{ij}.$$

Usando a Notação 4.1 temos que $S_{kl} \rightarrow S_{ij}$ denota $f^*(S_{kl}) \supset S_{ij}$. Escolhendo S_1 como $\{z_m, z_{m+1}\}$ e definindo

$$S_2 = f^*(S_1), \dots, S_{i+1} = f^*(S_i),$$

vamos provar que $S_{i+1} \setminus S_i$ é um conjunto unitário e

$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{2n},$$

$$S_1 \subset S_2 \cdots \subset S_{2n-1} \not\supset S_{2n}.$$

Para tal prova, mostraremos que é possível construir uma sequência de $2n$ subconjuntos de pontos da sequência z , encaixados e distintos, sendo que o primeiro deles contém dois elementos. Como a sequência z possui $2n + 1$ elementos, obrigatoriamente teremos que $S_{i+1} \setminus S_i$

²Por exemplo, se $S_{35} = \{z_3, z_4, z_5\}$ e $f(z_3) = z_5$, $f(z_4) = z_7$, $f(z_5) = z_6$, então $f^*(S_{35}) = S_{57}$, e $z_i^{kl} = z_5^{35} = z_5$ e $z_j^{kl} = z_7^{35} = z_7$.

corresponderá a um único elemento para $i = 1, 2, \dots, 2n$.

Afirmção 1: $S_1 \subset S_2$ são conjuntos encaixados e distintos.

Como m é o maior elemento do conjunto X , então $f(z_m) \geq z_{m+1}$ ou $f(z_{m+1}) \leq z_m$. Como estamos considerando uma órbita $2n + 1$ -periódica, não há elementos de ordem dois, não podendo ocorrer $f(z_m) = z_{m+1}$ e $f(z_{m+1}) = z_m$ simultaneamente. Seja $f(z_m) = z_{l_2}$ e $f(z_{m+1}) = z_{k_2}$, temos três opções

1- $z_{k_2} < z_m < z_{m+1} < z_{l_2}$ ou

2- $z_{k_2} = z_m < z_{m+1} < z_{l_2}$ ou

3- $z_{k_2} < z_m < z_{m+1} = z_{l_2}$.

Em qualquer uma das opções, teremos

$$S_1 \subset S_{k_2, l_2} := S_2$$

(para $i > 1$, representaremos $S_{k_i, l_i} = S_i$). Observe que S_1 e S_2 são conjuntos encaixados e distintos.

Afirmção 2: Existe um par de elementos consecutivos, z_l, z_{l+1} , cujas imagens satisfazem $f(z_l) \leq z_m$ e $f(z_{l+1}) \geq z_{m+1}$ ou $f(z_l) \geq z_{m+1}$ e $f(z_{l+1}) \leq z_m$.

Notamos inicialmente que o conjunto $A = \{z_1, \dots, z_m\}$ tem $m - 1 + 1 = m$ elementos e definindo o conjunto B como os outros elementos da sequência z_1, \dots, z_{2n+1} , ou seja, $B = \{z_{m+1}, \dots, z_{2n+1}\}$, temos que B possui $2n + 1 - m - 1 + 1 = 2n - m + 1$ elementos.

Percebemos que os conjuntos A e B têm quantidades diferentes de elementos, pois se tivéssemos

$$2n - m + 1 = m, \quad (4.1)$$

então

$$2n + 1 = 2m. \quad (4.2)$$

Mas temos um número ímpar à esquerda da igualdade, representado por $2n + 1$, e do lado direito da mesma igualdade, um número par, representado por $2m$, o que é um absurdo. Portanto, os conjuntos A e B possuem quantidades diferentes de elementos.

Observe que f é injetiva quando restrita aos pontos da órbita e o número de elementos de A é diferente do número de elementos de B . Se o número de elementos de A for maior que o número de elementos de B , a injetividade impede que todos os pontos de A sejam aplicados em B . Daí, há pontos de A aplicados em A , por f . Além disso, todos os pontos de A não podem

ser aplicados no próprio A ou a órbita formada pelos elementos de z não teria tamanho $2n + 1$. Então, há pontos consecutivos de A aplicados um em A e outro em B . Escolha um desses pontos para ser z_l . Análogo para quando o número de elementos de A menor que número de elementos de B .

Afirmção 3: Podemos tomar $z_l \neq z_m$.

Para provar tal fato, suponha a existência de um conjunto $K \subset \{z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}\}$ tal que $z_l \in K$ se $f(z_l) \in A$ e $f(z_{l+1}) \in B$, ou $f(z_l) \in B$ e $f(z_{l+1}) \in A$.

Temos $z_m \in K$ pois $f(z_m) \in B$ e $f(z_{m+1}) \in A$. Logo K é um conjunto não vazio. Suponha que z_m seja o único elemento de K .

Nesse caso, todos os elementos de $A \setminus \{z_m\}$ seriam aplicados em um mesmo conjunto, o B . Todos os elemento de $B \setminus \{z_{m+1}\}$ são aplicados em A . Porém a cardinalidade de A menos um elemento é diferente da cardinalidade de B menos um elemento, pois sabemos que um desses valores é par e o outro ímpar. O que nos leva a uma contradição. Logo existe pelo menos um $z_l \in K$ diferente de z_m . Concluímos, portanto a prova da **Afirmção 3**.

Afirmção 4: O conjunto S_i possui no mínimo $i + 1$ elementos da sequência z .

De fato, o conjunto S_2 possui $l_1 - k_1 + 1$ elementos (em que l_1 é o índice do maior elemento do conjunto $\{f(z_i) : z_i \in S_1\}$ e k_1 é o índice do menor elemento do mesmo conjunto). Como os elementos $z_m, z_{m+1} \in S_1$ e não podemos ter $f(z_m) = z_{m+1}$ e $f(z_{m+1}) = z_m$ (ou teríamos uma órbita de período dois), segue-se que S_2 possui pelo menos três elementos. S_3 possuirá pelo menos quatro elementos, pois pelo menos uma das imagens dos elementos de S_2 não poderá pertencer a S_2 , ou teríamos uma órbita menor que $2n + 1$. Podemos concluir nossa afirmação aplicando sucessivamente o mesmo argumento.

A justificativa da **Afirmção 4** e a definição de f^* nos mostram que o conjunto S_{i+1} é obtidos a partir do conjunto S_i , com o acréscimo de pelo menos um elemento. Como S_1 contém dois elementos e a órbita contém $2n + 1$ elementos, é possível obter no máximo $2n$ conjuntos distintos $S_1 \subset S_2 \subset \dots$

Mostraremos na sequência que é possível obter uma sequência de $2n$ conjuntos encaixados satisfazendo

$$\begin{cases} S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_{2n}, \\ S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{2n-1} \not\subset S_{2n}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Para tal, voltemos a considerar os conjuntos A e B e os elementos z_l e z_{l+1} da **Afirmção**

2.

Suponha que o conjunto A possua mais elementos que o conjunto B . Como os conjuntos S_i são encaixados e distintos, em algum momento, algum S_i contém

$$S_{t^*} := S_{l,l+1} = \{z_l, z_{l+1}\}.$$

Considere $t - 1$ o menor índice tal que $S_{t-1} \rightarrow \{z_l, z_{l+1}\}$, ou seja, $S_t = f^*(S_{t-1}) \supset \{z_l, z_{l+1}\}$. (Note que S_{t^*} não teve a mesma lei de formação dos demais $S_i, i = 1, 2, \dots$, não estando na sequência encaixada obtida anteriormente). Em outras palavras, como $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$, existirá algum índice a partir do qual $\{z_l, z_{l+1}\}$ estará em algum S_i . Denotamos tal índice por t .

A **Afirmção 4** indica que S_{t-1} possui no mínimo t pontos. Mas S_{t-1} não contém $S_{t^*} = \{z_l, z_{l+1}\}$. Portanto, $t < 2n + 1$, ou seja, $t \leq 2n$.

Afirmção 5: Sendo t o menor índice tal que $S_t \supset S_{t^*}$, temos $t = 2n$.

Suponha, por absurdo, que $t < 2n$.

Para utilizarmos a Proposição 4.1, assumiremos que I_i é o menor intervalo fechado que contém S_i , e que I_{t^*} é o menor intervalo fechado que contém S_{t^*} , então

$$\begin{aligned} I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_{t-1} \not\subset I_{t^*} \\ I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{t^*} \rightarrow I_1. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} J_0 = J_1 = \dots = J_{2n-t-1} = I_1, \\ J_{2n-t} &= I_2, \\ J_{2n-t+1} &= I_3, \\ J_{2n-t+2} &= I_4, \\ &\vdots \\ J_{2n-3} &= I_{t-1} \\ J_{2n-2} &= I_{t^*}. \end{aligned}$$

Temos $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_{2n-2} \rightarrow J_0$. Note que por construção, $f(I_{t^*}) \supset I_1$.

Pela Proposição 4.1, existe $x_0^* \in J_0$ tal que

$$f^{2n-1}(x_0^*) = x_0^* \text{ e } f^k(x_0^*) \in J_k, \text{ para } k = 0, 1, \dots, 2n-2. \quad (4.4)$$

Observe que, para utilizarmos a proposição, foi necessário definirmos os J'_i s como conjuntos fechados e limitados da reta.

Afirmamos que $x_0^*, f(x_0^*), \dots, f^{2n-2}(x_0^*)$ são distintos pois, caso contrário,

$$f^{2n-2}(x_0^*) \in \{x_0^*, f(x_0^*), \dots, f^{2n-3}(x_0^*)\}$$

e concluiríamos que $f^{2n-2}(x_0^*)$ pertenceria a um dos conjuntos J_k , com $k = 0, \dots, 2n - 3$. Por (4.4), teríamos

- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = x_0^*$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_0 = I_{t^*} \cap I_1 = \emptyset$;
- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = f(x_0^*)$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_1 = I_{t^*} \cap I_1 = \emptyset$;
- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = f^2(x_0^*)$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_2 = I_{t^*} \cap I_1 = \emptyset$;

⋮

- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = f^{2n-t-1}(x_0^*)$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_{2n-t-1} = I_{t^*} \cap I_1 = \emptyset$;
- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = f^{2n-t}(x_0^*)$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_{2n-t} = I_{t^*} \cap I_2 = \emptyset$;
- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = f^{2n-t+1}(x_0^*)$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_{2n-t+1} = I_{t^*} \cap I_3 = \emptyset$;

⋮

- Se $f^{2n-2}(x_0^*) = f^{2n-4}(x_0^*)$, então $f^{2n-2}(x_0^*) \in J_{2n-2} \cap J_{2n-4} = I_{t^*} \cap I_{t-2} = \emptyset$;

e finalmente, se tivermos $f^{2n-2}(x_0^*) = f^{2n-3}(x_0^*)$, então aplicamos f aos dois lados da igualdade e para obter

$$x_0^* = f^{2n-1}(x_0^*) = f^{2n-2}(x_0^*) \quad (4.5)$$

o que não pode ocorrer pois $x_0^* \in I_1$, $f^{2n-2}(x_0^*) \in I_{t^*}$ e $I_1 \cap I_{t^*} = \emptyset$.

Portanto, $x_0^*, f(x_0^*), \dots, f^{2n-2}(x_0^*)$ são todos distintos como afirmado. Desta forma, x_0 é um ponto de período $2n - 1$, ou seja, um ponto $[2(n - 1) + 1]$ -periódico. Considerando m exatamente igual a $n - 1 < n$, temos uma contradição, pela hipótese da Proposição 4.2 que afirma que f possui uma órbita de período $2n + 1$ e não possui nenhuma órbita de período $2m + 1$ para $1 \leq m < n$. Tal contradição ocorreu, pois supusemos que $t < 2n$. Logo $t = 2n$ e obtemos (4.3), provando a **Afirmção 5**.

Pela **Afirmção 4**, S_{i+1} e S_i são distintos (a menos que contenham todos os $2n + 1$ pontos) e $S_{i+1} \setminus S_i$ contém pelo menos um ponto. Logo S_{2n} contém no mínimo $2n + 1$ pontos (ou seja, contém todos os pontos da órbita). Mas pela **Afirmção 5**, S_{2n} é o primeiro conjunto que contém o $S_{t^*} = \{z_l, z_{l+1}\}$. Portanto, necessariamente temos que $\underbrace{S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{2n-1}}_{2n \text{ conjuntos}}$ são todos distintos e o maior deles tem, no máximo $2n$ elementos (já que não contém S_{t^*}). Isso nos leva a concluir que $S_{i+1} \setminus S_i$ contém exatamente um único elemento $i = 1, 2, \dots, 2n - 2$. Como $S_{2n} \setminus S_{2n-1}$ tem um único elemento, (4.3) é válida.

Façamos agora a prova de que apenas os casos *i*) e *ii*) da Proposição 4.2 podem ocorrer. Antes de começarmos a demonstração, vejamos os casos $n = 1$ e $n = 2$ para clarear as ideias. Se tivermos $n = 1$, o resultado é imediato já que teremos apenas três pontos na órbita e obrigatoriamente devemos ter uma das configurações indicadas na Figura 4.3:

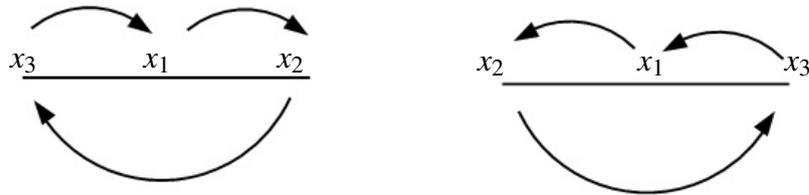


Figura 4.3: As possíveis configurações para o caso em que há três pontos na órbita.

Ao analisarmos os demais casos, posicionamos os elementos da órbita na reta real e faremos o caso em que a imagem do termo central da sequência de pontos é aplicada em um termo à sua direita. O outro caso tem demonstração análoga.

O resultado que pretendemos provar estabelece uma bijeção entre termos situados à esquerda e os termos situados à direita do termo central. Na notação que utilizamos, nossa demonstração nos permitirá concluir que x_0 corresponde ao termo z_m da órbita já que é o maior elemento da sequência ordenada de pontos da órbita cuja imagem por f está à sua direita.

De modo geral, vimos que, partindo de $S_1 = \{z_m, z_{m+1}\}$, obtemos a sequência

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots,$$

sendo que $S_{i+1} \setminus S_i$ contém apenas um elemento (já que são necessários $2n$ etapas para que todos os elementos da órbita estejam contidos em algum S_n).

Para termos uma ideia do que ocorre no caso geral, vejamos o caso $n = 2$, no qual temos cinco termos na sequência $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e o termo central é o terceiro deles.

Supondo que o termo central corresponda a z_m , devemos ter $f(x_3) = x_4$ (já que x_3 é o maior elemento cuja imagem está à sua direita), $f(x_4) = x_2$ (já que x_4 não pode ser aplicado em elementos à sua direita e que a cada passagem acrescentamos apenas um termo ao conjunto S_i , só nos resta a possibilidade de a imagem de x_4 por f ser x_2) e, neste caso, $S_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$. Temos então duas possibilidades para a imagem de x_2 por f : ou tal imagem é x_1 ou tal imagem é x_5 . Afirmamos que $f(x_2) = x_5$. De fato, se $f(x_2) = x_1$ teríamos a seguinte situação

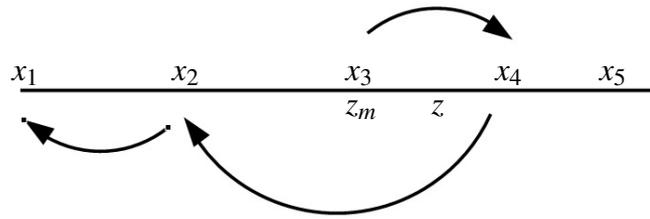


Figura 4.4: Uma possível configuração para o caso em que há cinco pontos na órbita.

Como $f(x_3) > x_3$ e $f(x_4) < x_4$, uma aplicação do Teorema 2.1 garante que existe $z \in (x_3, x_4)$ tal que $f(z) = z$. Neste caso,

$$f([x_3, z]) \supset [z, x_4], f([z, x_4]) \supset [x_2, z] \supset [x_2, x_3], f([x_2, x_3]) \supset [x_1, x_4] \supset [x_3, z],$$

e concluímos pela Proposição 4.1 que f possui um ponto de ordem três, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $f(x_2) = x_5$ e conseqüentemente devemos ter $f(x_5) = x_1$ e $f(x_1) = x_3$, fechando a órbita.

Ainda utilizando o caso $n = 2$ para clarear as ideias, temos

$$S_1 = \{x_3, x_4\}, S_2 = \{x_2, x_3, x_4\}, S_3 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, S_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

e se definirmos

$$A_i = S_{i+1} \setminus S_i,$$

temos

$$A_2 = x_2, A_3 = x_5, A_4 = x_1.$$

E naturalmente consideramos

$$A_0 = x_3, A_1 = x_4.$$

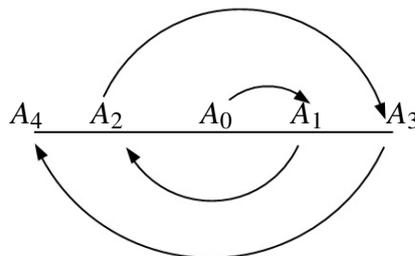


Figura 4.5: Uma possível configuração para o caso em que há cinco pontos na órbita.

Observamos que $f(A_l) = A_{l+1}$, $l = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$.

De modo geral, podemos generalizar a propriedade anterior já que A_l é o único ponto de S_l não pertencente a A_{l-1} e, conseqüentemente, é o único elemento cuja imagem não está predeterminada pelo passo anterior. Sua imagem só pode ser, portanto, o novo elemento a ser adicionado ao conjunto ao aplicarmos f a S_l , ou seja, sua imagem deve ser A_{l+1} (se tivéssemos $f(A_l)$ igual a um dos pontos já presentes na seqüência, não teríamos uma órbita de tamanho $2n + 1$). Sendo assim,

$$f(A_{k-1}) = A_k, k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Outra informação que obtemos pela maneira como construímos a seqüência $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ é que os extremos de S_k são dados por A_k e A_{k-1} . Como $f(A_{k-1}) = A_k$, nos resta apenas provar que A_{k-1} está entre A_k e $f(A_k) = A_{k+1}$ para cada S_k . Suponhamos que, para algum $k < 2n$ não valha tal situação e tenhamos, sem perda de generalidade, A_{k-1} à esquerda de A_k (note que, sabemos que são o maior e o menor valor dentre os termos de S_k , mas não sabemos qual dos dois é maior). Temos então um esquema do tipo no qual $f(A_{k-3}) = A_{k-2}$ (pois todos os outros elementos do conjunto S_{k-3} já possuem imagem definida na etapa anterior e portanto A_{k-3} deve ser aplicado no único elemento de $S_{k-2} \setminus S_{k-3}$), $f(A_{k-2}) = A_{k-1}$ (pois todos os outros elementos do conjunto S_{k-2} já possuem imagem definida e portanto A_{k-2} deve ser aplicado no único elemento de $S_{k-1} \setminus S_{k-2}$), $f(A_{k-1}) = A_k$ (mesma justificativa anterior). Como estamos supondo que tal propriedade não vale no passo k , temos que A_k e $f(A_k) = A_{k+1}$ se situam à direita de A_{k-1} .

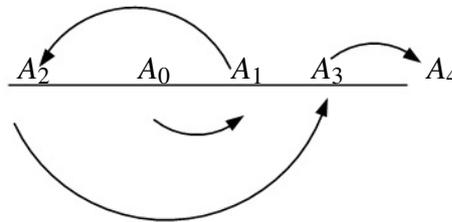


Figura 4.6: Uma possível configuração para o caso em que há cinco pontos na órbita.

Temos portanto, considerando $[A_2, A_4]$ o menor intervalo fechado que contenha os pontos $A_0 < A_1 < \dots < A_4$, temos para $k = 3$

1. $f([A_1, A_3]) \supset [A_2, A_4] \supset [A_1, A_3]$;
2. $f([A_1, A_3]) \supset [A_2, A_4] \supset [A_2, A_0]$;
3. $f([A_2, A_0]) \supset [A_1, A_3]$.

O que pode ser descrito em uma notação como

$$\curvearrowright [A_1, A_3] \Leftrightarrow [A_2, A_0]$$

(o símbolo \curvearrowright indica que o conjunto é aplicado em si mesmo por f .)

Para k arbitrário temos

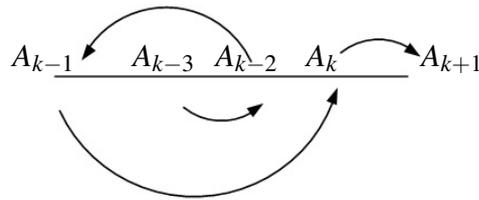


Figura 4.7: Uma possível configuração para o caso em que há 5 pontos na órbita.

1. $f([A_{k-2}, A_k]) \supset [A_{k-1}, A_{k+1}] \supset [A_{k-2}, A_k]$,
2. $f([A_{k-2}, A_k]) \supset [A_{k-1}, A_{k+1}] \supset [A_{k-1}, A_{k-3}]$,
3. $f([A_{k-1}, A_{k-3}]) \supset [A_{k-2}, A_k]$,

que seria representada como

$$\curvearrowright [A_{k-2}, A_k] \Leftrightarrow [A_{k-1}, A_{k-3}].$$

Portanto, aplicando a Proposição 4.1 com $I_0 = [A_{k-2}, A_k]$, $I_1 = [A_{k-1}, A_{k-3}]$,

1. $f(I_0) \supset I_0$;
2. $f(I_0) \supset I_1$;
3. $f(I_1) \supset I_0$.

Segue-se que existe um ponto periódico z , de ordem 3, para f , com $f^k(z) \in I_k, k = 0, 1, 2$, contradizendo a hipótese de não haver órbita periódica ímpar de ordem menor que $(2n + 1)$.

Portanto, concluímos a prova do resultado. \square

Observação 4.1. *Pelo que acabamos de demonstrar, o termo central da sequência ordenada dos elementos da órbita é o termo z_m , na notação que utilizamos. De fato, se isso não ocorresse, teríamos, por exemplo, mais elementos à esquerda de z_m que elementos à sua direita. Dessa forma, como $S_{i+1} \setminus S_i$ contém um único elemento, teríamos, em algum momento, $f(x_k) = x_{k-1}$, de modo que obteríamos uma situação semelhante a da Figura 4.1 e teríamos uma contradição (obtida com a mesma construção anterior).*

4.2 A Existência de Pontos n -periódicos Para Qualquer $n \in \mathbb{N}$

Nesta seção, veremos que a existência de um ponto de período 3 para uma função contínua que deixe um intervalo $[a, b]$ fechado invariante implica na existência de pontos n -periódicos para qualquer n natural. Este é o conhecido Teorema de Li-Yorke que veremos a seguir.

Teorema 4.1. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$, com $f([a, b]) \subset [a, b]$. Se a função f possui um ponto 3-periódico, então ela possui um ponto n -periódico para todo inteiro positivo n .*

Demonstração. Sejam x_0, x_1 e x_2 pontos de uma órbita 3-periódica de f tal que $x_0 < x_1 < x_2$. Mostraremos que f possui um ponto n -periódico para todo inteiro positivo n .

Começaremos mostrando que f possui um ponto fixo. Existem duas possibilidades para o valor de $f(x_1)$: $f(x_1) = x_0$ ou $f(x_1) = x_2$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $f(x_1) = x_0$. Então $f(x_0) = x_2, f(x_2) = x_1$, com isso, $f(x_1) = x_0 < x_1$ e $f(x_0) = x_2 > x_0$. Defina a função $g(x) = f(x) - x$. Temos que $g(x_1) < 0$ e $g(x_0) > 0$. Como g é contínua, segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que $g(c) = 0$. Tal ponto é o ponto fixo de f que procuramos.

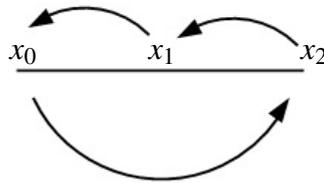


Figura 4.8: Representação da órbita de período três tal que $f(x_0) = x_2, f(x_2) = x_1$ e $f(x_1) = x_0$.

Passemos agora à demonstração da existência de pontos periódicos de ordem maior que 1. O caso $n = 3$ é válido por hipótese. Os demais casos serão demonstrados com a mesma construção, utilizando fortemente a Proposição 3.1.

Considere os conjuntos $I_0^* = [x_0, x_1], I_1^* = [x_1, x_2]$.

Pela continuidade de f em $[a, b]$, segue-se que f é contínua em cada subintervalo desse conjunto. Daí temos

1. $f([x_0, x_1]) \supset [x_0, x_2] \supset [x_0, x_1]$;
2. $f([x_0, x_1]) \supset [x_0, x_2] \supset [x_1, x_2]$
3. $f([x_1, x_2]) \supset [x_0, x_2] \supset [x_0, x_1]$;

Ou seja,

1. $f(I_0^*) \supset I_0^*$,
2. $f(I_0^*) \supset I_1^*$,
3. $f(I_1^*) \supset I_0^*$,

e usando a notação que temos adotado,

$$I_0^* \rightarrow I_0^* \rightarrow I_1^* \rightarrow I_0^*.$$

que também pode ser indicada por

$$\curvearrowright I_0^* \rightleftarrows I_1^*.$$

Considere os conjuntos

$$I_0 = I_1 = \cdots = I_{n-2} = I_0^*$$

$$I_{n-1} = I_1^*.$$

Pela Proposição 4.1, existe $x_0^* \in I_0^*$ tal que $f^n(x_0^*) = x_0^*$ para n inteiro positivo e

$$f^k(x_0^*) \in I_0^*, \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^*.$$

Utilizando o mesmo argumento usado na página 40, $x_0^*, f(x_0^*), \dots, f^{n-1}(x_0^*)$ são todos distintos. De fato, se não forem, $f^{n-1}(x_0^*)$ deverá ser um dos $f^k(x_0^*)$, $k = 0, 1, \dots, n-2$. Então,

- Se $f^{n-1}(x_0^*) = x_0^*$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = x_1$;
- Se $f^{n-1}(x_0^*) = f(x_0^*)$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = x_1$;
- Se $f^{n-1}(x_0^*) = f^2(x_0^*)$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = x_1$;

⋮

- Se $f^{n-1}(x_0^*) = f^{n-2}(x_0^*)$, então $f^{n-1}(x_0^*) \in I_1^* \cap I_0^* = x_1$;

Em todos os casos teríamos

$$f^{n-1}(x_0^*) = x_1.$$

Aplicando f na igualdade acima, obteríamos

$$f^n(x_0^*) = f(x_1),$$

Como x_0^* é um ponto fixo de f^n , segue-se que

$$f^n(x_0^*) = x_0^*.$$

Além disso, do lado direito da penúltima igualdade,

$$f(x_1) = x_0.$$

Das duas últimas identidades, temos

$$x_0^* = x_0.$$

Aplicando novamente f , temos

$$f(x_0^*) = f(x_0).$$

Por construção, $f(x_0^*) \in I_0^*$, mas, $f(x_0) = x_2 \in I_1^*$, e $x_2 \notin I_0^*$. De modo que temos um absurdo. Portanto todos os elementos $x_0^*, f(x_0^*), \dots, f^{n-1}(x_0^*)$ são distintos. A prova do teorema 4.1 está completa. \square

Observe a importância de se ter um intervalo fechado no domínio da função do Teorema 4.1. No Exemplo 3.5, a função é contínua, o domínio é um conjunto fechado, porém não é um

intervalo. Não temos todas as hipóteses do teorema. Note que a função, não possui pontos fixos.

Observe agora a importância da continuidade da função do Teorema 4.1. Vejamos um exemplo na qual a função não é contínua, não possui pontos fixos, mas possui pontos de período 3. O exemplo pode ser visto em [10].

Exemplo 4.1. Considere a função f cujo domínio são números racionais $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x_1, & \text{se } x = x_0, \\ x_2, & \text{se } x = x_1, \\ x_0, & \text{se } x = x_2, \\ x_{n+1}, & \text{se } x = x_n, n \geq 3, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

O domínio da função f é um subconjunto do conjunto dos números racionais. O conjunto dos números racionais é enumerável (ver Apêndice, Corolário 6.1). Então existe uma enumeração da forma

$$\{f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_0, f(x_3) = x_4, \dots, f(x_k) = x_{k+1}, \dots\}$$

para os pontos dessa função. O período de x_0, x_1 e x_2 é três pois

$$f(x_0) = x_1, f^2(x_0) = x_2, f^3(x_0) = x_0,$$

$$f(x_1) = x_2, f^2(x_1) = x_0, f^3(x_1) = x_1 \text{ e}$$

$$f(x_2) = x_0, f^2(x_2) = x_1, f^3(x_2) = x_2.$$

No entanto, nenhum dos outros pontos é periódico.

Portanto f é uma função com três pontos 3-periódicos e nenhum ponto fixo.

5 Considerações Finais

O estudo de pontos periódicos de funções reais como apresentado no trabalho possui uma grande visualização geométrica quando consideramos o período 1 mas perde essa visão quando se tem um ponto n -periódico, $n > 1$.

Durante a elaboração do trabalho tínhamos em mente que seriam necessários alguns resultados de Matemática superior para justificar formalmente os resultados, em especial no Capítulo 4. O conceito de continuidade das funções de uma variável real perpassa todo o trabalho, sendo condição fundamental para que se obtenham resultados como o Teorema de Li-Yorke.

O Teorema do Valor Intermediário, embora de enunciado e visualização simples foi a chave para a obtenção de grande parte dos resultados de nosso trabalho.

Procuramos explorar a visualização geométrica, e, muitos dos exemplos que apresentamos, utilizam conceitos matemáticos vistos no Ensino Médio como funções, gráficos de funções, composição de funções, matrizes e trigonometria. Todos esses conceitos são utilizados no estudo de rotação feito no Capítulo 3. Tal estudo pode ser desenvolvido nos anos finais do Ensino Médio e, sempre que possível, pode ser explorado com o uso do software GeoGebra.

Na atividade didática proposta, exploramos o conceito de ponto periódico sem o formalismo apresentado no texto, aprofundando o conhecimento dos alunos em temas que, via de regra, não são vistos no Ensino Básico. Essa atividade pode corresponder a uma aplicação de Recurso Computacionais em sala como ferramenta de investigação e não apenas como ferramenta de cálculo. Desta forma, consideramos que a aprendizagem ganha um significado mais dinâmico e consolidado.

6 Apêndice

Resultados importantes que são utilizados ao longo do trabalho estão nesse capítulo, e suas demonstrações se encontram nas suas referências. O objetivo aqui, é facilitar a consulta desses teoremas sem uma necessidade imediata de consulta aos livros na qual foram pesquisados. A demonstração desses teoremas fica a cargo da referência utilizada.

Alguns resultados importantes utilizados foram obtidos em [6]:

Teorema 6.1. *Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e só se, a seguinte condição for satisfeita: para todo $a \in I$ e toda sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ de elementos de I , temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em [9].

Teorema 6.2 (Princípio da Boa Ordenação). *Seja $S \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não-vazio e limitado inferiormente. Então S possui um menor elemento.*

O teorema a seguir é uma consequência direta do Teorema do Valor Intermediário e sua demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 6.3. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

O teorema a seguir nos fornece uma importante corolário, que pode ser encontrado também em [5].

Teorema 6.4. *Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Corolário 6.1. *O conjunto dos \mathbb{Q} dos números racionais é enumerável.*

Referências Bibliográficas

- [1] BRÁS, J. C. T. ***Dinâmica de funções contínuas na reta***. Universidade da Beira Interior. Covilhã - Portugal, 2013. Disponível em: <<https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/1875/1/Relat%C3%B3rio%20de%20Est%C3%A1gio%20-%20Jo%C3%A3o%20Br%C3%A1s.pdf>>. Acessado em 3 ago 2018.
- [2] BURNS, K. and HASSELBLATT, B. ***The Sharkovsky's Theorem: A Natural Direct Proof***. Disponível em: <<http://emerald.tufts.edu/as/math/Preprints/BurnsHasselblattShort.pdf>>. Acessado em 15 nov 2018.
- [3] DEVANEY, R.L. ***A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment***. Avalon Publishing, 1992.
- [4] HUANG, X. ***From Intermediate Value Theorem To Chaos***. n. 2, v. 65, Mathematics Magazine, JSTOR, 1992.
- [5] LIMA, E. L. ***Curso de análise- Vol. 1***. Rio de Janeiro - Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1981.
- [6] MUNIZ NETO, A. C. ***Fundamentos de Cálculo: coleção PROFMAT***. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2014.
- [7] PEREIRA, R. O, FERREIRA, W. M. MARTINS E. M. ***A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário***. v. 1, Ouro Preto - Brasil: Revista de Matemática de Ouro Preto, 2018. Disponível em: <<https://www.periodicos.ufop.br/pp/index.php/rmat/article/view/1320>>. Acessado em 21 set 2018.
- [8] SANTOS, M. A. ***Os Teoremas das Panquecas e a divisão de figuras planas em regiões de mesma área***. Ouro Preto - Brasil: PROFMAT, 2017 Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/8694/1/DISSERTACAO_TeoremaPanquecasDivisao.pdf>. Acesso em 31 ago 2018.
- [9] VIDIGAL, A. et al. ***Fundamentos de Álgebra***. Belo Horizonte- Brasil: Editora UFMG, 2005.
- [10] user43901 . ***Dynamical Systems problem – a function of ONLY period 3***. Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/q/346212/dynamical-systems-problem-a-function-of-only-period-3>>. Acessado em 17 ago 2018.