UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Christiano Otávio de Rezende Sena

Demonstrações no Ensino Médio.

Ouro Preto

2018

CHRISTIANO OTÁVIO DE REZENDE SENA

Demonstrações no Ensino Médio.

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira.

Ouro Preto
2018

S474d Sena, Christiano Otávio.
Demonstrações no Ensino Médio [manuscrito] / Christiano Otávio Sena. - 2018.
88f.:

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Oliveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Demonstração. 2. Ensino Médio. 3. Aprendizagem. I. Oliveira, Edney Augusto. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 510:374:004

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

Demonstrações no Ensino Médio.

Autor: Christiano Otávio de Rezende Sena

Dissertação defendida e aprovada, em **12 de Dezembro de 2018**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Edney Augusto Jesus de Oliveira

Edney Augusto Jesus de Oliveira - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Juliano Soares Amaral Dias Membro Interno
Universidade Federal de Ouro Preto

Alexandre A. Rocha.

Alexandre Alvarenga Rocha
Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

Marcelo Henrique Simões Moreira

Marcelo Henrique Simões Moreira
Escola Estadual Dom Pedro II

Esse trabalho é dedicado à minha esposa Camila, meus filhos, Letícia e Vinícius, minha mãe Maria Raimunda, minha irmã Lysia e a minha avó, Margarida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo e particularmente, por essa realização.

Aos meus familiares, por toda dedicação e apoio.

Aos professores do PROFMAT da UFOP, com quem tive a honra de aprender.

Ao professor Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira, por sua orientação.

Resumo

Esse trabalho é um estudo sobre as demonstrações de teoremas presentes no currículo do Ensino Médio. Revisamos os fundamentos da lógica matemática necessários para a construção de uma demonstração, bem como apresentamos alguns métodos utilizados. Além disso, fazemos um fichamento das demonstrações realizadas em três coleções de livros didáticos e finalizamos o trabalho com a apresentação de alguns teoremas tratados no Ensino Médio com suas respectivas demonstrações.

Palavras-chave: Demonstração; Ensino Médio; Aprendizagem

Abstract

This work is a study related to demonstrations of theorems there are in curriculum of High School level. We analyze the fundamentals on logic mathematics that required to construct a demonstration and present some methods was used. Besides that, we did a listing of all demonstrations identified in three collections of textbooks and finalize this work presenting some theorems, with their respective demonstrations, are teaching in High School.

Keywords: Demonstration; High School; Learning

Conteúdo

1 Introdução

A Matemática é uma ciência de natureza bastante peculiar. Ao mesmo tempo que apresenta conceitos absolutamente abstratos, também nos proporciona ferramentas que auxiliam nossa compreensão da realidade. A conexão de suas teorias e a beleza do raciocínio dedutivo faz dela uma arte. Entre as várias ciências, a força de suas verdades a torna única. Apenas na Matemática não há modificação ou correção de suas descobertas ao longo de seu desenvolvimento, mas somente acréscimos. O método dedutivo elaborado pelos gregos será válido para todo sempre. Os teoremas afirmados por Euclides foram estendidos, mas não corrigidos. São válidos ainda hoje e o serão eternamente. Assim, a Matemática é uma das mais puras manifestações do pensamento.

Tudo isso indica que a transmissão do conhecimento matemático pelo processo de ensino e aprendizagem seja de uma enorme responsabilidade, pois ela é um dos pilares para o progresso da humanidade. E se mostra um enorme desafio, pois se trata de um sistema delicado, repleto de variáveis que envolvem sujeitos, práticas, métodos, conteúdos e muitos outros elementos. Entretanto, de acordo com Elon, em [4], é possível elencar três itens fundamentais na organização do ensino de Matemática: Conceituação, Manipulação e Aplicações. Da dosagem adequada de cada componente resulta uma harmonia que simplifica e favorece o desenvolvimento da aprendizagem.

De forma simplificada, a conceituação integra a parte de elaboração das definições matemáticas e do raciocínio dedutivo. A manipulação representa a habilidade e a perícia no manuseio das ferramentas, como equações, fórmulas e construções geométricas. E as aplicações se caracterizam como o uso das teorias da Matemática como instrumento de obtenção e previsão de resultados nas diversas áreas da ciência.

A discussão presente nesse trabalho, sobre as demonstrações matemáticas no ensino médio, está portanto na componente *conceituação*. Partimos do pressuposto que as demonstrações devem naturalmente participar do processo de ensino, não apenas por serem parte da natureza intrínseca da Matemática, como pelo seu significado na construção do conhecimento. O valor de uma demonstração para um aluno do ensino básico está tanto na experiência do convencimento pela razão, como pelo aprendizado do rigor científico que a Matemática exige.

Há vinte anos lecionando tive oportunidade de atuar nos mais variados segmentos: ensinos fundamental, médio, superior, ensino profissional, cursos preparatórios e educação de jovens e adultos. Durante essa trajetória, um cuidado permanente sempre foi o de preparar boas aulas, que fossem claras, objetivas e sem perder o rigor que a Matemática demanda. Para isso, naturalmente era necessário que me cercasse de bons textos sobre os assuntos lecionados. E assim, pensando nas extensas buscas de materiais didáticos para preparação das aulas, tive a ideia de elaborar essa dissertação sobre demonstrações matemáticas como um texto de apoio a colegas professores e alunos de licenciatura.

Como dito anteriormente, entendemos que as demonstrações devem ser parte integrante no processo de aprendizagem, pois legitimam as verdades enunciadas e contribuem para maturidade do desenvolvimento matemático do estudante. Assim, com a ideia de elaborar um material de apoio para todos que pretendam utilizar de demonstrações matemáticas, particularmente no ensino básico, essa dissertação foi estruturada de forma que no Capítulo 2 serão revisados os fundamentados na lógica matemática, requisitos indispensáveis nas demonstrações. Assim, serão apresentados seus princípios básicos, bem como a ideia de argumentação e formação de conjecturas, finalizando com a apresentação de alguns dos métodos de demonstração.

O Capítulo 3 apresenta um fichamento de três coleções de livros didáticos, totalizando nove volumes, no qual descrevemos como são abordadas as demonstrações matemáticas no desenvolvimento dos conteúdos em cada volume, citando em algumas situações ausências de demonstrações pertinentes ao conteúdo relacionado. Os livros foram escolhidos dentre os selecionados no último *Guia de livros didáticos* do *Plano Nacional do Livro Didático*.

No Capítulo 4 são enunciados e demonstrados alguns dos teoremas matemáticos presentes no currículo do Ensino Médio. É verdade que nem todo teorema pode ser demonstrado apenas com o conhecimento básico em Matemática, estando assim fora de alcance do entendimento dos alunos de Ensino Médio. Mas a grande maioria dos teoremas tratados nesse nível requer apenas um conhecimento elementar de Matemática e desse modo, foram escolhidos alguns desses teoremas cujas demonstrações são apresentadas na sequência dos enunciados. E ainda, para auxiliar algumas demonstrações e enunciados de teoremas, também são dadas algumas definições relacionadas.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos as considerações finais, fazendo um apontamento do que foi proposto como também sugerindo opções de possíveis acréscimos que podem ser realizados com o objetivo de encorajar a continuidade desse trabalho.

2 Fundamentos da Lógica Matemática

Neste capítulo iremos abordar os assuntos necessários para fundamentar o estudo de demonstrações matemáticas, e com isso, fornecer uma base teórica rigorosa para uma melhor compreensão das demonstrações apresentadas no próximo capítulo. Um dos principais temas que iremos abordar é a lógica matemática, no qual iremos apresentar uma introdução detalhada na seção a seguir.

2.1 Noções de Lógica

De modo simplificado, podemos dizer que Lógica é a ciência do raciocínio. É uma parte da filosofia onde são estruturadas e discutidas as operações que visam a análise sobre a veracidade de uma declaração. Nessa seção iremos discorrer sobre alguns elementos da lógica, tomando como base [7], estruturando os passos básicos de uma demonstração matemática.

2.1.1 Proposições

Definição 2.1.1. *Denominamos de **proposição** uma frase que atende as seguintes condições:*

- Possui sujeito e predicado.
- É declarativa, ou seja, não é interrogativa nem exclamativa.
- É necessariamente verdadeira ou falsa, não sendo possível uma terceira possibilidade (princípio do terceiro excluído), tampouco ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa (princípio da não contradição).

As classificações *verdadeiro* ou *falso* em uma proposição são denominadas, cada uma, de *valor lógico* da proposição.

Exemplo 1. *Como exemplos de proposições, temos:*

(i) $8 \times 7 = 56$.

(ii) Em um triângulo retângulo, a medida do quadrado da hipotenusa é igual a soma das medidas dos quadrados dos catetos.

(iii) Para todo $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$, temos $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iv) Todo retângulo é um quadrado.

Das proposições listadas acima, (i), (ii) e (iii) são verdadeiras e (iv) é falsa.

As referências às proposições serão feitas por letras minúsculas. Assim, denotaremos proposições por exemplo por p, q, r, s e etc. É ainda possível criar novas proposições a partir de proposições dadas por meio de operadores, como a *negação*, os conectivos *conjunção, disjunção* e *condicional*.

Em relação ao princípio da não contradição, uma proposição p não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente. Entretanto, para que esse princípio seja corretamente aplicado, o tempo precisa ser explicitamente determinado para não haver ambiguidade, pois p pode ser verdadeiro num tempo e falso em outro. Como exemplo, considere a proposição

p: *O time de Sertãozinho nunca ganhou o campeonato local de futebol.*

A proposição é verdadeira até o dia em que o time do sertãozinho for campeão e a partir daí torna-se falsa.

2.1.2 Negação

Dada uma proposição p qualquer, sempre existe uma proposição que se opõe a p, denominada de **negação de p** e simbolizada por $\sim p$ (lê-se *não p*). As proposições p e $\sim p$ são sempre contrárias em relação ao valor lógico, ou seja, se p é verdadeira, então $\sim p$ é falsa e vice versa. Temos ainda que $\sim (\sim p) = p$.

Como exemplos de proposições e suas respectivas negações, temos:

Exemplo 2.

(i) p: *Todas as plantas são verdes.*
$\sim p$: *Existe pelo menos uma planta que não é verde.*

(ii) p: $4+3=9$.
$\sim p$: $4+3 \neq 9$.

(iii) p: *A Matemática é uma ciência exata.*
$\sim p$: *A Matemática não é uma ciência exata.*

Quando relacionamos proposições opostas p e $\sim p$, é importante perceber que negar uma proposição associada ao quantificador universal, ou seja, proposições do tipo "Para todo ...", não significa escrever algo do tipo "Nenhum ...". Tomando o item (i) do exemplo 2, seria como escrever que a negação de p: *Todas as plantas são verdes* fosse a proposição $\sim p$: *Nenhuma planta é verde*. Nesse caso, a relação está incorreta. Mas é bastante razoável de ocorrer tal erro, pois as expressões *nenhum* e *para todo* são antônimos na nossa língua. Mas isso não significa que sirvam de negações uma do outra quando analisamos do ponto de vista lógico.

Uma regra importante na lógica matemática é o denominado *Princípio da não contradição*, que numa formulação simples, diz que duas afirmações contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras sob o mesmo aspecto. Dessa forma, as proposições p e $\sim p$ são mutualmente excludentes, ou seja, sendo uma verdadeira a outra é necessariamente falsa.

2.1.3 Quantificadores e sentenças abertas

Em muitas proposições é possível utilizar os chamados *quantificadores*, que são símbolos matemáticos usados para substituir algumas expressões relacionadas a quantidades. No caso, o símbolo $\forall$, chamado de $quantificador\ universal$ substitui expressões do tipo *para todo, qualquer que seja, para cada* e o símbolo $\exists$, denominado *quantificador existencial*, substitui expressões do tipo *existe, existe um, existe pelo menos um*. Uma variação do quantificador $\exists$ é $\exists!$ que significa *existe um único*.

Uma frase que possui uma ou mais variáveis é denominada de *sentença aberta* e caso não seja atribuída a mesma algum quantificador ou valor as variáveis, a sentença aberta não será uma proposição, pois não poderá ser classificada como *verdadeiro* ou *falso*. Por exemplo, $3x-1=5$ é uma sentença aberta, pois não há como dizer seu valor lógico. Entretanto, se dissermos $3x-1=5$ *para* $x=1$ ou $\exists x \in \mathbb{R}$ *tal que* $3x-1=5$ ou ainda $3x-1=5, \forall x \in \mathbb{R}$, então as sentenças são proposições, pois nesses casos temos os respectivos valores lógicos *falso*, *verdadeiro* e *falso* para as sentenças.

2.1.4 Conectivos

Podemos obter proposições novas a partir de proposições dadas por meio do emprego de operações lógicas denominadas de *conectivos lógicos* (ou simplesmente *conectivos*). Dois desses conectivos são a *conjunção* e a *disjunção*, simbolizadas respectivamente por $\wedge$ e $\vee$. A conjunção de p e q é a proposição $p \wedge q$, que é lida como "p *e* q". Já a disjunção de p e q, gera a proposição $p \vee q$, lida como "p *ou* q". Os valores lógicos de $p \wedge q$ e $p \vee q$ dependem dos valores lógicos de p e de q de acordo com os seguintes critérios:

- A conjunção $p \wedge q$ será verdadeira apenas no caso de p e q serem ambas verdadeiras. Se pelo menos umas delas for falsa, então $p \wedge q$ será falsa.
- A disjunção $p \vee q$ será falsa apenas no caso de p e q serem ambas falsas. Se pelo menos umas delas for verdadeira, então $p \vee q$ será verdadeira.

Os critérios descritos acima podem ser apresentados na chamada *tabela-verdade*, que nada mais é do que um modo prático de exibir os valores lógicos de $p \wedge q$ e $p \vee q$ de acordo com os valores lógicos de p e q. Na tabela-verdade a seguir temos os valores lógicos *verdadeiro* (V) ou *falso* (F) para as proposições p, q, $p \wedge q$ e $p \vee q$:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Tabela 2.1: Tabela-verdade da conjunção e disjunção.

Exemplo 3. *Considere as seguintes proposições:*

p : *O mês de janeiro tem 31 dias.*
q : *O mês de fevereiro tem 31 dias.*

Utilizando os conectivos $\wedge$ e $\vee$ construímos as seguintes proposições:

$p \wedge q$: *O mês de janeiro tem 31 dias e o mês de fevereiro tem 31 dias.*
$p \vee q$: *O mês de fevereiro tem 31 dias ou o mês de fevereiro tem 31 dias.*

Sabemos que p é verdadeira e q é falsa. Sendo assim, as proposições $p \wedge q$ e $q \vee q$ são, respectivamente, falsa e verdadeira.

Convém ressaltar que há uma diferença no significado de quando empregamos a palavra *ou* como um conectivo lógico numa sentença e quando a utilizamos na linguagem coloquial. No uso cotidiano, o emprego do *ou* ocorre em um sentido excludente, como na frase: *Renato ou Caio será escolhido.* A frase impõe um sentido de exclusão no uso do *ou*, deixando implícito que não podem ser ambos escolhidos. Entretanto, o uso do *ou* na perspectiva da lógica é diferente. Dizer que a disjunção $p \vee q$ é verdadeira significa dizer que *pelo menos* uma das proposições p ou q é verdadeira, o que não exclui a possibilidades de ambas serem verdadeiras. Assim, quando se diz *Renato será escolhido ou Caio será escolhido*, para que a sentença seja verdadeira, pelo aspecto lógico, é admissível que ambas sejam verdadeiras, ou seja, que os dois sejam escolhidos. Como outro exemplo, em relação as proposições:

p : o ano de 2017 teve 365 dias.
q : o dia da semana após o sábado é o domingo.

Sabemos que ambas são verdadeiras. Assim, construindo a disjunção $p \vee q$: *o ano de 2017 teve 365 dias ou o dia da semana após o sábado é o domingo*, do ponto de vista lógico (por mais estranho que a frase possa soar), temos uma proposição verdadeira.

2.1.5 Condicionais

Existem ainda outras operações lógicas, denominados de *condicionais*, que também permitem obter novas proposições a partir de proposições dadas. Temos o condicional *"se... então..."*, representado por $\rightarrow$ e o bicondicional *"...se, e somente se,..."*, representado por $\leftrightarrow$. Assim, dadas as proposições p e q, podemos construir a proposição $p \rightarrow q$, onde lemos *se* p, *então* q e a proposição $p \leftrightarrow q$, lida como p *se, e somente se,* q. Os significados desses condicionais são extremamente úteis na demonstração de diversos teoremas.

Quando supomos $p \rightarrow q$ como sendo verdadeiro, significa dizer que sempre que p for verdadeiro, então q necessariamente também será. Por isso, a condicional $p \rightarrow q$ pode ser lida como *p é condição suficiente para q* ou ainda *q é condição necessária para p*.

Seu valor lógico depende dos valores lógicos de p e q de acordo com o seguinte critério: $p \rightarrow q$ é falso apenas quando p é verdadeira e q é falsa. Em qualquer outra situação temos a proposição $p \rightarrow q$ verdadeira.

A tabela-verdade a seguir apresenta os valores lógicos de $p \rightarrow q$, de acordo com os valores lógicos de p e q:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 2.2: Tabela-verdade de $p \rightarrow q$.

Cabe aqui uma observação oportuna, complementando o que foi dito anteriormente. Vimos que supondo a condicional $p \rightarrow q$ verdadeira, temos q necessariamente verdadeira sempre que p for verdadeira. Mas caso p seja falsa, nada pode ser afirmado sobre a veracidade de q, podendo ser tanto verdadeira quanto falsa.

Uma tentativa de conciliar a definição da condicional $p \rightarrow q$ da linguagem cotidiana pode ser vista na proposição *Se chover vou ao trabalho de carro*. Tal proposição é verdadeira se chover e o transporte utilizado for o carro e falsa se chover e o transporte não for o carro. Porém, como determinar o valor verdade se não chover? Na impossibilidade de afirmar que é falsa somos obrigados a considerá-la verdadeira.

Exemplo 4. *Considere as proposições:*

p : *Guilherme é médico.*
q : *Daniel é professor.*

Combinando as proposições pela condicional $\rightarrow$ *temos*

$p \to q$: Se Guilherme é médico, então Daniel é professor.

Observe que, se a proposição $p \to q$ for falsa, temos a seguinte situação: p é verdadeira e q é falsa, ou seja, Guilherme é médico e Daniel não é professor.

No caso de $p \leftrightarrow q$ temos, além do exposto, também a validade de sua recíproca, ou seja, sempre que q for verdadeiro, então p também será. A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira apenas quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, ou seja, se p e q possuem o mesmo valor lógico. Em qualquer outra situação temos a proposição $p \leftrightarrow q$ falsa. Assim, de acordo com tal critério, os valores lógicos de $p \leftrightarrow q$ podem ser apresentados na tabela-verdade, de acordo com os valores lógicos de p e q:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 2.3: Tabela-verdade de $p \leftrightarrow q$.

2.1.6 Relações de implicação e equivalência

Dadas as proposições p e q, se o condicional $p \to q$ for verdadeiro, dizemos que "p *implica* q" e simbolizamos por $p \Rightarrow q$. Assim, temos três situações possíveis nessa relação: p e q, ambos verdadeiros, p falso e q verdadeiro ou ambos falsos. A relação de implicação é de suma importância nesse trabalho, pois um teorema ou é do tipo ou pode ser reduzido em resultados menores do tipo

$$\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese}.$$

Dessa forma, um modo de demonstrar um teorema do tipo *hipótese* $\Rightarrow$ *tese* é mostrar que não ocorre o caso da proposição *hipótese* ser verdadeira e a proposição *tese* ser falsa.

Dadas as proposições p e q, a proposição $q \to p$ é denominada *recíproca* de $p \to q$. Uma proposição pode ser verdadeira sem que sua recíproca seja. Por exemplo, na proposição *Se um número termina em zero, então é par* (que é verdadeira), sua recíproca *Se um número é par, então termina em zero.* é falsa. Quando uma condicional e sua recíproca são verdadeiras temos uma *relação de equivalência* entre as proposições. Isso ocorre quando a bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira. Nesse caso, dizemos que p *é equivalente a* q e simbolizamos $p \Leftrightarrow q$.

Assim, sobre os símbolos $\to$ e $\Rightarrow$, é importante destacar as seguintes observações:

- A condicional $\to$ é utilizado como uma operação da lógica de sentenças, cujo foco é o resultado da condicional, se é verdadeiro ou falso, ou seja, utilizamos $\to$ quando o objetivo é analisar a veracidade da frase *se p então q* a partir da veracidade (ou não) de p e q.

- O símbolo $\Rightarrow$ é utilizado na implicação de sentenças, no qual o foco da proposição não se encontra na determinação de seu valor lógico, mas na relação entre as proposições. Desse modo, *p implica q* tem como objetivo verificar a veracidade de q a partir da veracidade de p.

2.1.7 Argumentos

Quando uma proposição é obtida a partir de outras por meio de dedução, então essas proposições constituem um *argumento*. Em um argumento, uma das proposições é a conclusão e as demais são as premissas. Dizemos que um argumento é *válido* se, assumindo as premissas como sendo verdadeiras, a conclusão resultante das premissas é também verdadeira. Desse modo, a verdade da conclusão deve ser consequência da verdade das premissas. Quando isso não ocorre, ou seja, se um argumento não é válido, dizemos então que é uma *falácia* ou um *sofisma*.

Exemplo 5. *Considere os argumentos I, II e III, onde a proposição r é deduzida por consequência de p e q, onde p, q e r são as proposições dadas abaixo:*

Argumento I.

p : *Todos os números múltiplos de 10 terminam em 0.*
q : *Todos os números que terminam em 0 são pares.*
r : *Logo, todos os múltiplos de 10 são pares.*

Observe que o argumento I é válido, pois r é uma conclusão verdadeira obtida por consequência de p e q, também verdadeiras.

Argumento II.

p : *20 é divisível por 4.*
q : *20 é um número de dois algarismos.*
r : *Logo, todo número de dois algarismos é divisível por 4.*

O argumento II não é válido, porque a conclusão r não é verdadeira apesar da veracidade de p e de q.

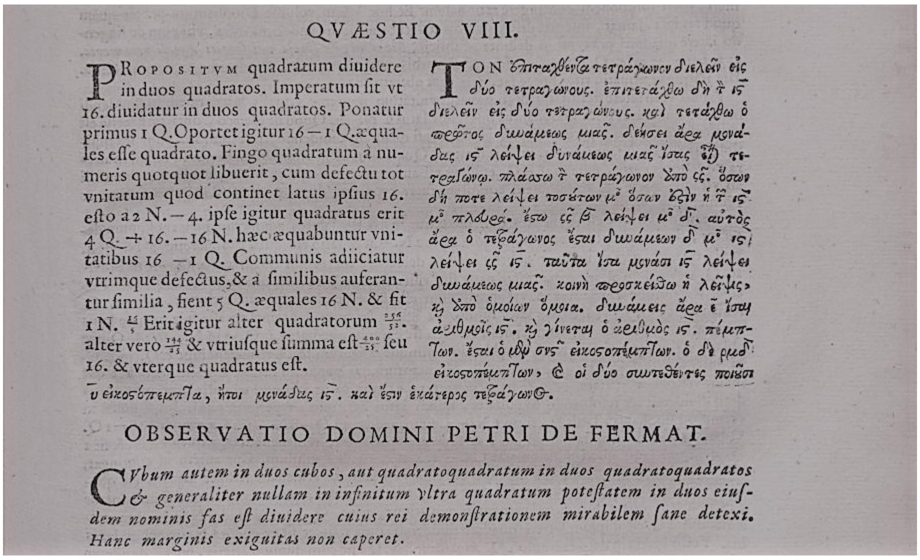
Argumento III.

p : *5 é um número ímpar.*
q : *Todo número primo maior que 2 é ímpar.*
r : *Logo, 16 é um quadrado perfeito.*

O argumento III não é válido pois, apesar da conclusão r ser verdadeira, não decorre das premissas p e q, que também são ambas verdadeiras.

2.1.8 Conjecturas e teoremas

Considere o seguinte problema: encontre dois números inteiros positivos que sejam quadrados perfeitos cuja soma também seja um quadrado perfeito. Por inspeção, podemos encontrar algumas soluções, como 9 e 16, cuja soma é 25 ou 25 e 144, cuja soma é 169. Esse problema, denominado de *diofantino*[1], admite uma infinidade de soluções. Agora, pense no mesmo problema trocando os quadrados por cubos, ou seja, encontre dois números inteiros positivos que sejam cubos perfeitos cuja soma também seja um cubo perfeito. *Fermat*[2], usando um método que denominou de *descida infinita*, como indicado em [1], mostrou que o problema com cubos não possui solução, isto é, que não existem x, y e z, inteiros positivos, tais que $x^3 + y^3 = z^3$. Seguindo adiante, Fermat propôs uma generalização dessa ideia, enunciando que, para n inteiro maior que dois não existem inteiros positivos x, y e z tais que $x^n + y^n = z^n$. Fermat escreveu na margem de um exemplar do livro *Arithmetica* de Diofanto uma nota marginal com o título *Observação do mestre Pierre de Fermat* contendo os seguintes dizeres: "É impossível dividir um cubo em dois cubos ou uma quarta potência em duas quartas potências, ou, em geral, uma potência maior que a segunda em duas potências iguais. Descobri uma prova disso realmente maravilhosa, que essa margem é estreita demais para conter". A Figura 2.1 ilustra essa nota marginal de Fermat.



QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum ſit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales eſſe quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipſius 16. eſto à 2 N. − 4. ipſe igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à ſimilibus auferantur ſimilia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5 Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter verò 144/25 & vtriuſque ſumma eſt 400/25 ſeu 16. & vterque quadratus eſt.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum poteſtatem in duos eiuſdem nominis fas eſt diuidere cuius rei demonſtrationem mirabilem ſane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Figura 2.1: Figura de domínio público, acessada em `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=533640`, em 19/11/2018.

Nunca foi encontrado qualquer documento que comprovasse essa demonstração e esse enunciado ficou conhecido como o *Último teorema de Fermat*, causando uma pertubação

---

[1] Em referência a Diofanto de Alexandria (nascido entre 201 e 214 — falecido entre 284 e 298), um matemático grego.

[2] Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, nascido na primeira década do século XVII—Castres, 12 de janeiro de 1665) foi um magistrado, entusiasta matemático e cientista francês.

nos matemáticos pelos 350 anos seguintes, partindo de um problema de simples enunciado, de fácil entendimento, mas de elevado nível de complexidade.

Até que a prova desse enunciado fosse finalmente desvendada, o que ocorreu em 1994 por *Andrew Wiles*[3], tal afirmação era meramente uma *conjectura* e não um *teorema*. Uma conjectura matemática é uma afirmação no qual não há uma demonstração conhecida, isto é, supõe-se que seja verdadeira por convicção, com bases intuitivas. Já um teorema é uma proposição verdadeira, cuja validade é atestada por uma demonstração rigorosa, ou seja, é uma afirmação cuja prova é conhecida pela comunidade matemática. Entretanto, a demonstração de um teorema deve ser fundamentada a partir de algum conhecimento prévio e esse encadeamento lógico deve ter um ponto de partida. Assim, para construirmos os teoremas partimos de um conjunto de regras básicas, denominadas de *axiomas* ou *postulados*, que não são definições e são aceitas como válidas, sem a necessidade de serem demonstradas. E desse modo, denominamos de *modelo axiomático* um conjunto de axiomas que servem de construção para uma teoria matemática. Temos, por exemplo, os conhecidos *Axiomas de Euclides* e os *Axiomas de Peano*, que fundamentam, respectivamente, a Geometria Euclidiana e a Teoria dos Números.

Em muitas situações a denominação teorema é substituída para que não haja um excesso no uso dessa expressão. Desse modo, um teorema é chamado de *lema* quando o seu resultado é utilizado na demonstração de outro. Por isso, podemos dizer que um lema é um teorema auxiliar. Por outro lado, quando um teorema é consequência de outro, então o denominamos de *corolário*. E finalmente, em alguns casos, quando o teorema tem importância reduzida num contexto, é comum ser chamado de *proposição*.

2.2 Métodos de demonstração

2.2.1 Demonstração direta

Uma das técnicas mais comuns de demonstração é a denominada *demonstração direta*. Por esse método, para provar uma proposição $p \Rightarrow q$, supomos que p seja verdadeira e por meio de um argumento válido, deduzimos *diretamente* a proposição q. E assim temos o chamado *método dedutivo*. Os argumentos que constituem o caminho que resultam em uma prova são bastante diversos, podendo ser utilizados recursos geométricos, aritméticos, algébricos, analíticos, argumentos combinatórios, dentre outros.

[3]Andrew John Wiles (Cambridge, 11 de abril de 1953) é um matemático britânico, professor na Universidade de Princenton.

No exemplo a seguir, assumimos como conhecido que, se $k \in \mathbb{Z}$, então $2k$ é um número par e $2k+1$, ímpar. E ainda que, sendo n um número par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$ e sendo n um número ímpar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k+1$.

Exemplo 6.

Teorema 2.2.1. *A soma de dois números ímpares é um número par.*

Demonstração. Sejam m e n naturais ímpares. Assim, existem k e q naturais tais que $m = 2k+1$ e $n = 2q+1$. Assim, temos:
$m+n = (2k+1)+(2q+1) = 2k+2q+2 = 2(k+q+1)$. Logo, $m+n$ é par. □

Observação 1. Note que na demonstração do exemplo 6 partimos das informações dadas nas hipóteses (m e n ímpares) e a partir delas, através de uma manipulação algébrica, obtemos a tese (ímpar+ímpar=par). Esse tipo de estratégia exemplifica o que chamamos anteriormente de demonstração direta.

2.2.2 Demonstração por absurdo

Para demonstrar uma proposição do tipo $p \Rightarrow q$, podemos proceder da seguinte forma: supomos que p e $\sim q$ ocorram. Com essa suposição, devemos deduzir uma contradição, chamada de *absurdo*.

Um esquema básico para aplicação desse método pode ser:

1. queremos mostrar que a proposição q é verdadeira;
2. sabemos que a proposição p é verdadeira;
3. supomos que $\sim q$ seja verdadeira;
4. demonstramos que $\sim q \rightarrow \sim p$ é verdadeira;
5. concluímos, assim, que p e $\sim p$ são verdadeiras, chegando a uma contradição;
6. deduzimos então, que $\sim q$ é falsa, e logo, q é verdadeira.

Essa sequência de ações constituem um modo de demonstração denominado *demonstração por absurdo*, também chamado de *redução ao absurdo*. Para exemplificar o uso desse método, considere o lema e o teorema a seguir.

Exemplo 7.

Lema 2.2.1. *Se n^2 é par então n é par.*

Demonstração. Para realizar a demonstração, vamos seguir o roteiro apresentado do método de redução ao absurdo.

Consideremos assim as proposições

$$p : n^2 \text{ é par.}$$
$$q : n \text{ é par.}$$

Queremos provar que $p \Rightarrow q$. Desse modo começamos pelo item 1, ou seja, queremos mostrar que a proposição q é verdadeira e, para isso, assumimos que a proposição p é verdadeira (item 2), supondo que n^2 seja par. Pelo item 3, supomos que $\sim q$ seja verdadeira, isto é, supomos que n seja ímpar. E assim, vamos demonstrar que $\sim q \Rightarrow \sim p$ é verdadeira (item 4):

Sendo n ímpar, então $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k+1$ e desse modo, temos

$$n^2 = n \cdot n = (2k+1)(2k+1) = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar.}$$

Dessa forma, concluímos que p e $\sim p$ são verdadeiras, chegando a uma contradição (item 5) e, logo, deduzimos que $\sim q$ é falsa, e logo, q é verdadeira (item 6), ou seja, n é par. $\square$

No próximo exemplo, a demonstração do teorema seguirá o mesmo roteiro, porém sem usar as referências aos itens.

Exemplo 8.

Teorema 2.2.2. *A raiz quadrada do número 2 não é racional, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Para a demonstração desse teorema, supomos conhecida a definição de número racional.

Demonstração. Suponha que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, por hipótese, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. Sem perda de generalidade, consideremos m e n primos entre si. Dessa forma, temos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ é par} \Rightarrow \text{m é par.}$$

Assim, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$ e dessa forma temos:

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par.}$$

Logo, $2 \mid m$ e $2 \mid n$, contradizendo assim a hipótese de m e n primos entre si e daí concluímos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

2.2.3 Demonstração por contrapositiva

Contrapositiva de uma proposição

Dada uma proposição condicional do tipo $p \to q$, isto é, *Se p, então q*, a proposição $\sim q \to \sim p$ é denominada *contrapositiva* da proposição $p \to q$.
Observando mais uma vez a demonstração do exemplo 7, para provar a implicação $p \Rightarrow q$, usamos o método de redução ao absurdo e provamos que $\sim q \Rightarrow \sim p$. Dessa forma, escrevendo as sentenças na forma implicativa, provamos o seguinte:

$$(n^2 \text{ é ímpar} \Rightarrow n \text{ é ímpar}) \Rightarrow (n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}).$$

É possível provar que a recíproca também é verdadeira e que esse fato é válido para quaisquer proposições p e q, constituindo o denominado *Princípio da contrapositividade*, que pode ser enunciado da seguinte forma:

Para duas proposições quaisquer p e q, temos

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p).$$

Portanto, é correto dizer que uma proposição e sua contrapositiva são logicamente equivalentes, ou seja, são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Exemplo 9. *A proposição*

Se um número é múltiplo de 4, então é par

tem como contrapositiva a proposição

Se um número não é par, então não é múltiplo de 4.

A seguir vamos analisar como a equivalência lógica de uma sentença e sua contrapositiva pode ser usada na demonstração de teoremas.

A demonstração por contrapositiva

A contrapositiva de uma proposição pode ser usada para demonstrar um teorema. Quando queremos provar que

Hipótese $\Rightarrow$ Tese

é suficiente provar sua contrapositiva

$$\sim \text{(Tese)} \Rightarrow \sim \text{(Hipótese)},$$

uma vez que elas são logicamente equivalentes. E em muitas situações, demonstrar a contrapositiva de uma proposição é mais simples que demonstrar a proposição.

Exemplo 10. *Prove que para todo natural n, se n^2 é par, então n é par.*

Demonstração. A implicação

Se n^2 é par, então n é par.

é logicamente equivalente a sua contrapositiva

Se n não é par, então n^2 não é par.

Por conseguinte, é suficiente provar a segunda. Assim, supomos que n não seja par, isto é, $n = 2k+1$ para algum k natural. Desse modo, temos:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

portanto, não é par.

Logo, demonstrada a proposição *Se n não é par, então n^2 não é par* está demonstrado, por equivalência, que *se n^2 é par, então n é par.* □

2.2.4 Argumentos combinatórios

Para demonstrações de certos teoremas relacionados a métodos de contagem, será importante a definição de *número binomial* a seguir.

Definição 2.2.1. *Dados $n, k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, denominamos de* número binomial *o símbolo $\binom{n}{k}$, dado por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Assumimos aqui que o número binomial determina o número de *combinações* de n objetos tomados k a k, ou seja, determina de quantas formas podemos escolher k objetos distintos dentre n objetos distintos, como pode ser observado em [8].

O método de demonstração por *argumento combinatório* consiste na ideia de mostrar que, se conseguirmos realizar a contagem de uma mesma configuração de duas formas distintas, então essas contagens devem coincidir.

No exemplo a seguir, vamos realizar duas demonstrações distintas para efeito de comparação. Uma prova por argumento combinatório e em seguida uma demonstração direta com uso de manipulação algébrica.

Exemplo 11. *Dados $n,k \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq k \leq n$, prove a identidade*

$$k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}$$

1. Prova por argumento combinatório:

Demonstração. A partir de um conjunto com n elementos, vamos formar uma lista com k elementos, sendo dois deles ordenados e os demais $k-2$ não ordenados. Primeiramente, faremos a contagem de listas escolhendo os k elementos que constituirão a lista, o que pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Escolhidos os elementos da lista, determinamos os dois que serão ordenados. Assim, para o primeiro elemento ordenado temos um total de k maneiras e, para cada uma dessas possiblidades, temos $k-1$ maneiras de determnar o segundo. Portanto, o número de maneiras de montar tal lista é dado por

$$k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k}$$

Uma segunda maneira de contar as listas é escolhendo os dois elementos que serão ordenados a partir do conjunto de n elementos. Dessa forma, temos um total de n possibilidades de escolhas para o primeiro elemento ordenado e $n-1$ possibilidades para o segundo. Dos $n-2$ elementos restantes, escolhemos agora os $k-2$ elementos que se juntarão aos dois ordenados e formarão a lista. Temos assim $\binom{n-2}{k-2}$ modos de fazer essas escolhas. Então, a quantidade de listas que podem ser formadas é, portanto, igual a

$$n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}$$

Como nos dois casos estamos fazendo a contagem de uma mesma lista, concluímos então que

$$k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}$$

□

2. Demonstração algébrica:

Demonstração. Sendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, temos:

$$\begin{aligned}
k\cdot(k-1)\cdot\binom{n}{k} &= k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = k\cdot(k-1)\cdot\frac{n!}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)!\cdot(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-2)!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\
&= n\cdot(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k+2-2)!} \\
&= n\cdot(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} = n\cdot(n-1)\cdot\binom{n-2}{k-2}.
\end{aligned}$$

□

2.2.5 O Princípio da Indução Finita

Considere a função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+x+41$. A partir dessa função determinamos os valores $f(0)=41,\ f(1)=43,\ f(2)=47,\ f(3)=53,\ \ldots,\ f(38)=1523$ e $f(39)=1681$, onde é possível verificar que são todos primos!

Para muitas pessoas, o fato de cada uma das quarenta primeiras imagens de f serem números primos pode ser condição suficiente para inferir que todas as imagens da função também sejam, ou seja, estabelecer uma regra geral a partir da análise de casos particulares. Mas tal conjectura, de que todas as imagens de f sejam números primos é falsa e para provar basta um contraexemplo, que pode ser obtido em $f(40)=1681=41^2$.

Quando temos uma proposição verdadeira para vários casos particulares e não é possível analisar todos os casos, como podemos confirmar a validade geral da proposição? A passagem do particular para o geral deve ser feita de modo rigoroso e um método que permite demonstrar essa passagem com autoridade, para números inteiros a partir de algum $q\in\mathbb{Z}$ é denominado de *Princípio da Indução Finita* ou *Princípio da Indução Matemática*. Tal método é aplicado em teoremas aritméticos referentes as propriedades gerais dos números naturais e pode ser esquematizado do seguinte modo:

Uma proposição $Q(n)$ é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ se:

(i) $Q(n_0)$ é verdadeira, ou seja, a proposição é válida para $n=n_0$.

(ii) admitindo sua validade para um número natural qualquer k, é possível deduzir sua validade para $k+1$.

O item (i) é chamado de *caso base* e o item (ii), *passo de indução*. A fórmula que será demonstrada, quando aplicada no passo de indução, é chamada de *hipótese de indução*.

Vale destacar que o Princípio da Indução Finita apresentado acima é um *teorema*, cuja prova pode ser consultada em [3]. A prova deste teorema será omitida neste texto, pois requer conhecimentos que fogem do escopo do objetivo deste trabalho.

Exemplo 12. *A soma de n números quaisquer, digamos $a_1, a_2, \dots\ a_n \in \mathbb{R}$ é comumente denotada por*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_1.$$

Nessa notação, é intuitivo afirmar que o

$$S_n = S_{n-1} + a_n, \;\; n > 1 \tag{2.1}$$

mas mesmo essa simples afirmação requer uma demonstração matemática, e ela será feita por indução.

Solução. Para tal prova, considere a proposição

$$Q(n) : S_n = S_{n-1} + a_n.$$

Para $n = 2$ temos

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2, \text{ (note que} S_1 = a_1)$$

provando a veracidade de $Q(2)$. Supondo $Q(k)$ verdadeiro, ou seja, que existe um natural $k > 1$ tal que $S_k = S_{k-1} + a_k$, note que

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = S_k + a_{k+1},$$

ou seja, $Q(k+1)$ é verdadeiro, e pelo principio de indução, segue que $Q(n)$ é verdadeiro para todo $n \geqslant 2$.

Note que na demonstração realizada não foi necessário aplicar a hipótese de indução, uma vez que foi utilizada a definição de somatório.

Exemplo 13. *Mostre que, se $a_i = \dfrac{1}{i \cdot (i+1)}$, então com a notação do Exemplo 12*

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Solução. Considere a proposição
$$Q(n) : S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Temos $Q(1)$ verdadeiro, pois $S_1 = \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{1+1} = a_1$, verificando assim o caso base para $n = 1$.

Aplicando o passo de indução, vamos supor que $Q(k)$ seja válido, ou seja:

$$S_k = \frac{k}{k+1}$$

válido para algum $k \in \mathbb{N}$.

Assim, verificamos a proposição $Q(k+1)$ pela hipótese de indução.

$$\begin{aligned} S_{k+1} = &\ S_k + a_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k\cdot(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)} \\ = &\ \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \\ = &\ \frac{(k+1)}{(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Confirmando então o passo de indução, pelo Princípio da Indução Finita, demonstramos que igualdade dada pela proposição $Q(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

A seguir vamos pontuar algumas observações que consideramos pertinentes relativas ao Princípio da Indução Finita.

Observação 2*.* Ocorre em algumas situações certa confusão entre uma dedução intuitiva e a demonstração formal. Verificamos um exemplo desse fato no estudos das progressões, no ensino médio. Em uma progressão aritmética de primeiro termo a e razão r, temos o segundo termo $a_2 = a + r$, o terceiro termo $a_3 = a + 2r$, o quarto termo $a_4 = a + 3r$ e assim por diante. Logo, *deduzimos* que o termo geral é $a_n = a + (n-1)\cdot r$. Na verdade, o que temos é uma conjectura e não uma afirmação baseada em critérios rigorosos. Vamos então deduzir corretamente a validade da conjectura.

Exemplo 14*. Dada uma progressão aritmética de primeiro termo a e razão r, mostre que o termo geral a_n é dado por*
$$a_n = a + (n-1)\cdot r$$

Solução. Aplicando o princípio da indução, fazemos $n = 1$:

$$a_1 = a + (1-1)\cdot r = a.$$

Verificado o caso base, empregamos o passo de indução, supondo, pela hipótese de indução, que

$$a_k = a + (k-1) \cdot r$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e assim, temos:

$$a_{k+1} = a_k + r = [a + (k-1) \cdot r] + r = a + kr - r + r = a + kr = a + ((k+1) - 1) \cdot r.$$

Portanto, confirmada a validade do passo de indução, podemos atestar que

$$a_n = a + (n-1) \cdot r$$

é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3. É importante ressaltar a importância do caso base, pois a manipulação algébrica que normalmente é realizada no passo de indução, em geral mais complexa do que a conta que é realizada no caso base, pode encobrir a importância de legitimar o valor inicial. O exemplo a seguir, conhecido como *Paradoxo do cavalo*, ilustra a importância do caso base.

Exemplo 15. *Usando o Princípio da Indução Finita, vamos provar que todos os cavalos tem a mesma cor.*

Solução. Considere a proposição $Q(n)$: Em um conjunto com n cavalos, todos tem a mesma cor.

Demonstraremos, pelo Princípio da Indução Finita, que essa sentença é verdadeira para todo natural n. Inicialmente constatamos que $Q(1)$ é obviamente verdadeira.

Pela hipótese de indução, suponhamos que $Q(k)$ seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja, supomos a sentença válida para um conjunto de k cavalos.

Vamos verificar que $Q(k+1)$ é verdadeiro. Considere então c_1, c_2, c_3, ... cavalos e o conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k, c_{k+1}\}$ com $k+1$ cavalos. Fazendo $A = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\}$ e $B = \{c_2, c_3, ..., c_k, c_{k+1}\}$, temos A e B conjuntos com k cavalos e, pela hipótese de indução, os cavalos de A tem todos a mesma cor e o mesmo ocorrendo em B. Observando ainda que $c_2 \in A \cap B$, então os cavalos do conjunto A tem a mesma cor dos cavalos do conjunto B. Finalmente, como $C = A \cup B = \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\} \cup \{c_2, c_3, ..., c_k, c_{k+1}\}$, concluímos que todos os cavalos de C tem a mesma cor, validando assim a proposição $Q(k+1)$. Logo, concluímos que $Q(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entretanto, sabemos que evidentemente a proposição $Q(n)$ não pode ser verdadeira e sendo assim, onde se encontra o erro dessa "demonstração"? Observe que o caso base não poderia ser aplicado considerando $n = 1$, pois não faz sentido comparar a cor de cavalos quando se tem somente um cavalo. Desse modo, o caso base deveria ser iniciado por $n = 2$, no que evidentemente falha, já que não podemos garantir que dois cavalos quaisquer tem sempre a mesma cor, ou seja, $Q(2)$ não é verdadeiro.

Uma analogia que podemos fazer para compreender melhor a ideia do Princípio da Indução Finita é o *efeito dominó*. Imagine a situação onde temos uma fileira de peças de dominós, todas em pé. Ao derrubar uma peça, considere que a peça seguinte seja derrubada, que por sua vez derruba a próxima e assim por diante. Logo, todas as peças cairão a partir da primeira peça derrubada.

Por comparação, considere os números naturais como as peças enfileiradas, com o número 1 sendo a primeira peça, o 2 a segunda e assim por diante. Agora pense na derrubada de uma peça como uma propriedade. Uma peça derrubada significa que o número correspondente à peça satisfaz tal propriedade. Assim, o caso base do Princípio da Indução Finita equivale a derrubar alguma peça e a garantia de que uma peça derrubada assegura a queda da próxima peça é o passo de indução. Desse modo, a certeza de que todas as peças cairão é a certeza de que tal propriedade será válida para todos os números naturais a partir do primeiro número verificado.

2.2.6 Força bruta e ignorância

Na Matemática, *força bruta e ignorância* consiste em um método de demonstração, no qual são testadas todos os casos possíveis de uma hipótese. Esse método é também chamado de demonstração por exaustão. Para ilustrar esse método de demonstração, considere as definições e o exemplo a seguir.

Definição 2.2.2. *Dado um conjunto finito e não vazio A, uma **permutação** dos elementos de A é qualquer sequência obtida pela ordenação de todos seus elementos.*

Definição 2.2.3. *Uma permutação de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ é denominada* caótica *quando nenhum dos $a_{i's}$ está em sua posição original, ou seja, na i-ésima posição.*

Exemplo 16. *Mostre que o número de permutações caóticas de 4 objetos distintos é igual a 9.*

Solução. Um caminho para realizar essa demonstração seria provar o caso geral, dado por

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}$$

onde d_n é o número de permutações caóticas e n o número de posições. A prova do caso geral pode ser feita pelo princípio da indução finita, como pode ser verificado em [10]. Entretanto, como o enunciado se refere especificamente a quatro objetos, podemos denominá-los de a_1, a_2, a_3 e a_4 e, inicialmente, listamos todas as $4! = 24$ permutações possíveis, obtendo

$a_1a_2a_3a_4$	$a_2a_1a_3a_4$	$a_3a_1a_2a_4$	$a_4a_1a_2a_3$
$a_1a_2a_4a_3$	$a_2a_1a_4a_3$	$a_3a_1a_4a_2$	$a_4a_1a_3a_2$
$a_1a_3a_2a_4$	$a_2a_3a_1a_4$	$a_3a_2a_1a_4$	$a_4a_2a_1a_3$
$a_1a_3a_4a_2$	$a_2a_3a_4a_1$	$a_3a_2a_4a_1$	$a_4a_2a_3a_1$
$a_1a_4a_2a_3$	$a_2a_4a_1a_3$	$a_3a_4a_1a_2$	$a_4a_3a_1a_2$
$a_1a_4a_3a_2$	$a_2a_4a_3a_1$	$a_3a_4a_2a_1$	$a_4a_3a_2a_1$

Em seguida, descartamos as permutações não caóticas, ou seja, permutações onde há algum a_i na *i-ésima* posição.

$\cancel{a_1a_2a_3a_4}$	$\cancel{a_2a_1a_3a_4}$	$\cancel{a_3a_1a_2a_4}$	$a_4a_1a_2a_3$
$\cancel{a_1a_2a_4a_3}$	$a_2a_1a_4a_3$	$a_3a_1a_4a_2$	$\cancel{a_4a_1a_3a_2}$
$\cancel{a_1a_3a_2a_4}$	$\cancel{a_2a_3a_1a_4}$	$\cancel{a_3a_2a_1a_4}$	$\cancel{a_4a_2a_1a_3}$
$\cancel{a_1a_3a_4a_2}$	$a_2a_3a_4a_1$	$\cancel{a_3a_2a_4a_1}$	$\cancel{a_4a_2a_3a_1}$
$\cancel{a_1a_4a_2a_3}$	$a_2a_4a_1a_3$	$a_3a_4a_1a_2$	$a_4a_3a_1a_2$
$\cancel{a_1a_4a_3a_2}$	$\cancel{a_2a_4a_3a_1}$	$a_3a_4a_2a_1$	$a_4a_3a_2a_1$

Restando, dessa forma, as 9 permutações caóticas possíveis. E assim, provamos o que foi pedido.

2.2.7 Demonstração por contraexemplo

Quando estamos diante de uma conjectura, a única forma de termos certeza de sua validade é provando a afirmação, transformando-a em um teorema. Quando a conjectura se trata de uma asserção sobre uma coleção finita, então ela pode ser demonstrada verificando todos os casos possíveis, como foi visto na seção anterior. Entretanto, a demonstração por exaustão não pode ser aplicada quando há uma infinidade de casos.

Ocorre que, em qualquer situação, quando queremos contradizer uma conjectura, ou seja, mostrar que é falsa, basta exibir um único exemplo que contraria a afirmação sendo que o exemplo utilizada para negar a asserção é denominado de *contraexemplo*.

Para ilustrar, considere a implicação

$$p, q \notin \mathbb{Q} \text{ e } p \neq q \Rightarrow p+q \notin \mathbb{Q}.$$

A afirmação de que p e q são números irracionais distintos, então $p+q$ é um número irracional não é verdadeira e para demonstrar que é falsa basta que seja apresentado um contraexemplo qualquer. No caso podemos observar que $p = 1+\sqrt{2}$ e $q = 5-\sqrt{2}$ é um contraexemplo válido, pois $p+q = (1+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2}) = 6 \in \mathbb{Q}$.

Porém, encontrar um contraexemplo pode não ser uma tarefa simples. Podemos observar isso na afirmação de que *qualquer número par maior que 2 pode ser representado pela soma de dois números primos*. Esse é um dos problemas não resolvidos mais importantes e antigos da Matemática, denominada de *conjectura de Goldbach*[4]. Testes realizados por computador já verificaram que a conjectura é verdadeira para números até da ordem de 10^{18}. Porém, como já foi discutido, isso não prova que é válida para todos os números naturais e além disso, ninguém nunca conseguiu apresentar um contraexemplo para contradizer a conjectura, que foi apresentada há mais de 250 anos.

Ainda a respeito da conjectura de Goldbach, vale ressaltar que em 2013 o matemático Harald Hekfgott demonstrou uma versão fraca da Conjectura de Goldbach que é enunciada do seguinte modo: Se n é um número ímpar maior ou igual a 7, então n pode ser escrito como a soma de três números primos [14].

[4]Em referência a Christian Goldbach (Königsberg, Brandemburgo-Prússia, 18 de março de 1690 — Moscou, 20 de novembro de 1764) foi um matemático prussiano.

3 Análise de livros

Como o principal objetivo deste trabalho é apresentar e fundamentar o uso de demonstrações matemáticas no segmento do Ensino Médio, iremos nesse capítulo fazer um fichamento de alguns livros didáticos, dando enfoque no aspecto da demonstração e analisando-os na perspectiva dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) [2].

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

Em 1998, o governo federal, após uma série de debates com setores organizados da sociedade civil e especialistas na área educacional, institui por meio da Resolução CEB n^{o}3, de 26 de junho de 1998, os PCNEM, que representam as diretrizes curriculares para o ensino médio, orientando a educação nesse segmento de ensino. Em 2002, uma nova proposta foi elaborada incluindo a formação do professor. O propósito dos PCNEM não é o de fornecer um currículo engessado para as disciplinas do Ensino Médio, mas servir como orientação para as escolas na elaboração de seu programa curricular levando em consideração seu projeto político pedagógico.

Relativo à Matemática, os PCNEM destacam que o ensino de Matemática se mostra bastante improdutivo quando se resume a repetição de procedimentos e acumulação de informações, sugerindo que os conteúdos sejam entendidos como instrumentos para o desenvolvimento de habilidades e competências, valorizando a precisão da linguagem e as demonstrações matemáticas,

> [...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o cárater formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (p.252).

3.2 Programa Nacional do Livro Didático

De acordo com o portal do Ministério da Educação[1], o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi instituído pelo governo federal com o objetivo de analisar e disponibilizar

[1]Disponível em `http://portal.mec.gov.br`. Acesso em 27/10/2018.

para alunos e professores das escolas públicas, de forma universal e gratuita, livros didáticos de qualidade para contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Desde 1996, a avaliação dos livros submetidos pelas editoras representa uma das etapas obrigatórias do PNLD, no qual comissões integradas por especialistas analisam os livros de acordo com critérios preestabelecidos em edital, que por sua vez são baseados nos PCNEM. Posteriormente a essa etapa é redigido um documento, denominado *Guia de Livros Didáticos*, enviado às escolas, contendo os livros aprovados pela comissão examinadora e ainda sugestões de pontos a serem considerados na escolha dos livros. Assim, as obras são submetidas ao julgamento dos professores de cada escola, determinando assim a escolha dos livros a serem adotados no intervalo de três anos.

3.3 Análises de obras

Essa seção contém análises de nove volumes, que constituem três coleções de livros didáticos de Matemática presentes no Guia de Livros Didáticos do Ministério da Educação, na edição do PNLD de 2015. As obras analisadas foram *Novo Olhar, Matemática* do autor Joamir Roberto de Souza [11], *Matemática: Ensino Médio* da autora Kátia Stocco Smole [12] e *Matemática Paiva*, do autor Manoel Paiva [13].

Foi verificado como cada livro trata as demonstrações matemáticas, se há omissões de demonstrações e quais as técnicas empregadas em cada caso.

Vamos começar as análises de livros pela coleção **Matemática, Ensino Médio**.

No volume 1, o capítulo inicial sobre conjuntos define as operações mas não faz qualquer menção da propriedade distributiva da união relativa a interseção (e vice-versa), sequer cita o conjunto vazio, assim como o complementar de um conjunto e ainda omite a relação entre as quantidades de elementos e subconjuntos de um conjunto finito. Dessa forma, infelizmente o capítulo não realiza demonstrações de importantes propriedades da teoria de conjuntos. Nos capítulo sobre função afim, a única demonstração presente é a de que o gráfico desse tipo de função se trata de uma reta, omitindo por exemplo a constatação e por consequência a demonstração de que a taxa de variação de uma função afim é constante. Na função quadrática é notável a ausência da demonstração sobre o valor mínimo ou máximo desse tipo de função. Quando são discutidas as operações entre funções, em particular a composição de funções, não há sequer um simples contraexemplo para demonstrar que em geral, dadas duas funções f e g, que $f \circ g \neq g \circ f$.

Sobre progressões, as fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos de progressões aritméticas e geométricas não são demonstradas, mas deduzidas intuitivamente.

Em relação aos logaritmos, o livro utiliza as propriedades da potenciação para demonstrar as propriedades operatórias de logaritmos utilizando manipulação algébrica, assim como a fórmula da mudança de base.

O livro finaliza com o capítulo de introdução à Trigonometria, fazendo uma revisão da trigonometria no triângulo retângulo e nessa parte demonstra as razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60° e também as leis do seno e do cosseno para triângulos acutângulos, utilizando a demonstração direta por meio das propriedades das figuras.

O volume 2 tem início com a Trigonometria, apresentando e demonstrando a identidade fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Quando apresenta as funções trigonométricas, não demonstra que as funções são periódicas, limitando-se a informar que se tratam de funções periódicas e que isso pode ser observado. Nas fórmulas de adição e diferença de arcos ($\operatorname{sen}(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$ e $\operatorname{tg}(x \pm y)$) são realizadas todas as demonstrações de maneira direta com uso de propriedades geométricas.

O capítulo sobre Análise Combinatória se restringe a apresentar a definição de fatorial de um número natural e as fórmulas de arranjos, combinações e permutações simples. Assim, há uma completa ausência sobre qualquer propriedade de números binomiais (sequer é definido) e não é mencionado do que se trata um argumento combinatório. Enfim, não há nenhuma demonstração combinatória.

No capítulo sobre sólidos geométricos, o livro define a unidade de volume, apresenta o princípio de Cavalieri, mas contraditoriamente define o volume V de um bloco retangular de dimensões a, b e c por $V = abc$. Posteriormente utiliza o Princípio de Cavalieri para demonstrar a fórmula do volume de um prisma qualquer. No caso das pirâmides, exibe a separação de um prisma triangular em três pirâmides triangulares de bases e alturas equivalentes, provando ainda que tem o mesmo volume. Em relação a cones e cilindros, o livro faz a opção de simplesmente dizer que é possível provar as fórmulas de volume pelo princípio de Cavalieri. Finalizando com a esfera, o livro cita que Arquimedes provou que o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone de raio e altura equivalentes ao raio da esfera, mas não mostra como ele chegou a essa conclusão. Assim, é feita uma retórica para convencer, sem provar nada.

O segundo volume finaliza com os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Inicialmente apresenta os sistemas lineares de duas e três equações, com duas e três incógnitas, apresentando a discussão quanto as soluções (determinado, indeterminado ou impossível), com justificativa apenas o caso de sistemas de duas equações e duas incógnitas, por meio dos gráficos correspondentes às equações. Sobre matrizes, as propriedades operatórias são apresentadas, mas nenhuma é justificada. O produto de matrizes é definido e infelizmente não há sequer um contraexemplo para demonstrar que o produto não é comutativo. Sobre determinantes, são definidas as fórmulas para matrizes quadradas de ordens 2 e 3 e não há qualquer menção a respeito das propriedades dos determinantes. A regra de Cramer para a solução de sistemas determinados é justificada para sistemas $2x2$ e é apenas informado que continua válida para sistemas de qualquer ordem, sem ao menos dizer como (e que é possível) calcular determinantes de ordem superior a 3. Desse modo, é encerrado o capítulo sem que as demonstrações tivessem algum protagonismo no desenvolvimento dos conteúdos.

No volume 3 dessa coleção, o capítulo inicial de geometria analítica é desenvolvido com diversas demonstrações, a determinação das coordenadas do ponto médio de um segmento, das coordenadas do baricentro de um triângulo e da distância entre dois pontos, são demonstrados aplicando as propriedades de geometria plana, como o teorema de Tales e Teorema de Pitágoras. A fórmula que expressa a área de um triângulo por meio das coordenadas dos vértices é justificada usando semelhança de triângulos e a definição de determinantes, assim como é demonstrada a condição de alinhamento de três pontos.

O estudo da reta também é realizado com o cuidado de demonstrar a equação da reta e a relação entre as inclinações de duas retas paralelas e perpendiculares. No estudo da circunferência, é justificada a determinação da equação. Na seção referente as cônicas, são dadas as definições das cônicas e daí são deduzidas suas equações pelas propriedades das curvas.

No capítulo sobre polinômios, o quociente entre dois polinômios é feito com a prudência de provar que o grau do quociente é dado pela diferença dos graus do dividendo e do divisor. Também é demonstrado que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x-a$ é dado por $P(a)$.

No estudo dos números complexos, inicialmente é demonstrado que uma potência do tipo i^n, sendo i a unidade imaginária e n um número natural é equivalente a i^r, sendo r o resto da divisão de n por 4. Após a construção da forma polar de um número complexo, o livro demonstra que para multiplicar dois complexos, basta multiplicar os módulos e somar os argumentos, assim como para realizar a divisão é suficiente dividir os módulos e subtrair os argumentos. A potência z^n de um número complexo z na forma polar é demonstrada para o caso de n inteiro, como também é provada a fórmula da radiciação de um complexo.
Sobre equações algébricas do tipo $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=0, n\in\mathbb{N}$, são demonstradas as relações entre coeficientes e raízes (relações de Girard) para as equações de segundo, terceiro e quarto graus. É citada mas não demonstrada a propriedade de que se um complexo z é raiz de uma equação de coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z}$ também é raiz da mesma equação. O livro demonstra ainda que sendo inteiros os coeficientes da equação, então se a fração irredutível $\dfrac{p}{q}$ for raiz da equação, com p e q inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Analisaremos agora a coleção **Matemática Paiva**.

O volume 1 inicia pelo capítulo de conjuntos, no qual após algumas definições, demonstra por absurdo, que para todo conjunto A, temos $\varnothing\subset A$. Porém na sequência, enuncia e não prova que $A\subset A$ para todo conjunto A. Em seguida, são enunciadas as propriedades distributivas da interseção em relação a união e da união em relação a interseção, mas nenhuma é justificada. A noção de inclusão entre conjuntos é relacionada com a implicação lógica. O texto explica o significado do símbolo de equivalência $\Leftrightarrow$, mas não do símbolo de implicação $\Rightarrow$.

Há dois capítulos dedicados a revisar parte de geometria plana. Quando é dada a fórmula para determinar a medida de um ângulo inscrito numa circunferência, é demonstrado apenas o caso onde um dos lados do ângulo passa pelo centro. Os outros casos tem a demonstração omitida. Quando é dada a fórmula do comprimento de uma circunferência, o texto não demonstra mas ilustra como o comprimento pode ser aproximado por medidas de perímetros de polígonos inscritos e circunscritos. As fórmulas de área são demonstradas a partir da definição de unidade de área, mas algumas demonstrações são restritas como, por exemplo, no caso da área de um retângulo, a expressão que determina a área é demonstrada apenas no caso de seus lados terem medidas inteiras. A área do círculo é deduzida intuitivamente por aproximação, novamente fazendo polígonos inscritos e circunscritos.

Na sequência, após explicar a noção de funções reais, como elementos e características sobre funções em dois capítulos, há uma injustificada omissão da demonstração de certas propriedades. Por exemplo, há uma explicação detalhada sobre taxa de variação de funções, porém o livro não utiliza o fato da taxa de variação de uma função afim ser constante para justificar que seu gráfico é sempre uma reta. Na continuação, apresenta o gráfico da função quadrática como sendo uma parábola e posteriormente deduz as expressões das coordenadas do vértice desse gráfico, associando as coordenadas aos valores ao mínimo ou máximo da função.

Outro exemplo de desconexão do desenvolvimento do conteúdo com as justificativas das propriedades das funções ocorre no estudo da função exponencial. Após discutir nos primeiros capítulos sobre monotonicidade de funções, o livro cita que uma função exponencial $y = a^x$ é crescente se $a > 1$, no lugar de demonstrar tal fato. No estudo dos logaritmos, as propriedades operatórias e a mudança de base são todas demonstradas diretamente, por manipulação algébrica. E assim, como na função exponencial a monotonicidade é apenas informada e não provada.

No capítulo referente as progressões, são demonstradas por manipulação algébrica algumas propriedades das progressões aritmética e geométrica, como por exemplo que em toda progressão aritmética a soma de dois termos equidistantes dos extremos é constante. Entretanto, as principais fórmulas, do termo geral e da soma dos termos, são deduzidas intuitivamente e não por uma prova rigorosa. É digno de nota que o livro dá o caráter de demonstração à dedução intuitiva das fórmulas da soma dos n primeiros termos das progressões aritmética e geométrica.

O segundo volume dessa coleção começa com uma revisão de trigonometria no triângulo retângulo, onde são demonstradas por argumentos geométricos algumas relações, como por exemplo a igualdade $\operatorname{sen}\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, para $0 < \alpha < 90^\circ$.

No capítulo seguinte, onde é introduzida a trigonometria no ciclo trigonométrico, a primeira demonstração ocorre para a identidade $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, porém a demonstração é realizada apenas para α pertencente ao primeiro quadrante. Assim como quando são apresentadas as fórmulas de adição de arcos, o desenvolvimento de $\operatorname{sen}(a+b)$ é demonstrado apenas para $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$. Na sequência, com uso de manipulação algébrica, são demonstrados os desenvolvimentos de $\operatorname{tg}(a+b)$ e $\operatorname{tg}(a-b)$. No estudo das funções trigonométricas, é demonstrado o valor do período das funções seno e cosseno. O capítulo finaliza com as leis do seno e do cosseno devidamente demonstradas por argumentos geométricos e manipulação algébrica.

No capítulo sobre matrizes, após a definição das operações entre duas matrizes, o livro omite que o produto não é comutativo, que poderia ser demonstrado com um contraexemplo. No capítulo sobre sobre sistemas lineares, há uma justificativa, por argumentos geométricos, de que há apenas três possibilidades quanto ao número de soluções do sistema. Entretanto, se restringe a sistemas de duas equações e duas incógnitas, o que é bastante razoável, considerando que se trata do Ensino Médio. Sobre determinantes, não há qualquer menção sobre suas propriedades e após definir o cálculo de determinantes de ordem 2 e 3, são utilizados para discutir e resolver um sistema, sem as devidas justificativas.

Em análise combinatória, a fórmula de arranjos simples é deduzida intuitivamente e depois utilizada na dedução das fórmulas de combinações e permutações simples. A quantidade de permutações com elementos nem todos distintos é generalizada a partir de um exemplo. Assim como a expansão $(x+a)^n$, para um natural n qualquer, é generalizada a partir do exemplo de $(x+a)^5$.

No estudo das probabilidades, são demonstradas algumas propriedades elementares, como a probabilidade de um evento impossível ser igual a zero ou de um evento certo ser igual a um, por meio de propriedades sobre conjuntos e alguma manipulação algébrica.

No capítulo sobre geometria espacial, a propriedade que relaciona vértices, faces e arestas de poliedros, a relação de Euler, é apresentada mas sua demonstração é omitida, também nesse caso justificada por se tratar do Ensino Médio. Assim, é feita apenas uma verificação da relação para alguns poliedros. Em relação as fórmulas de volumes dos sólidos geométricos, o do paralelepípedo retangular é demonstrado apenas para medidas inteiras das arestas, cujo resultado é usado para o cálculo do volume de um cubo qualquer. O princípio de Cavalieri é apresentado e utilizado para a demonstração do volume de prismas, pirâmides, cones e cilindros, assim como da esfera. A expressão que determina a área da superfície de uma esfera é apresentada dizendo que *"demonstra-se que"*, sem no entanto dizer como é realizada a demonstração.

O volume 3 inicia com noções de estatística, apresentado apenas definições e exemplos para algumas medidas de tendência central, sem discutir qualquer propriedade das mesmas, portanto sem demonstrações. O capítulo seguinte discorre sobre geometria analítica. No estudo da reta, justifica a equação de uma reta por argumentos geométricos e algébricos.

Quando analisa as posições relativas entre duas retas, define a relação de igualdade entre os coeficientes angulares em vez de demonstrar que são iguais. No caso das retas serem perpendiculares a demonstração de que os coeficientes são tais que seu produto é igual a -1 é devidamente apresentada com o cuidado de eliminar a situação de uma reta ser vertical e a outra horizontal. A expressão que representa a distância entre um ponto e uma reta é apresentado como a generalização de um exemplo, da mesma forma que a expressão que determina a área de um triângulo pelas coordenadas de seu vértice.

No estudo da circunferência, sua equação é deduzida pelo argumento geométrico. É ainda apresentada a equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ e as condições para que esta represente uma circunferência, porém sem qualquer justificativa. Já no estudo das cônicas, as propriedades da parábola, elipse e hipérbole são utilizadas para que suas equações sejam apresentadas (não deduzidas). Após um exemplo numérico, o caso geral é enunciado.

No capítulo sobre números complexos, quando é apresentada a multiplicação de números na forma polar, a estratégia de generalização a partir de um exemplo concreto é utilizada em mais de um momento. A divisão é devidamente demonstrada, por manipulação algébrica. A potência de um número complexo dado é obtida por meio de uma dedução intuitiva, considerando apenas o caso de expoente inteiro positivo. A radiciação é omitida no livro.

No estudo dos polinômios e das equações polinomiais, o livro afirma que um polinômio $P(x)$ é divisível por $x-a$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$. Em seguida demonstra a ida e ignora a volta. Posteriormente cita o Teorema Fundamental da Álgebra, dizendo que a demonstração vai além do escopo do livro. Ainda sobre raízes de equações algébricas, o livro diz mas não prova que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz de uma equação de coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z}$ também é raiz da mesma equação. Como também diz mas não demonstra que numa equação algébrica $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$, $n \in \mathbb{N}$, de coeficientes inteiros, se a fração irredutível $\frac{p}{q}$ for raiz da equação, com p e q inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Por fim, analisaremos a coleção **Novo Olhar, Matemática**.

O primeiro volume, como de costume nas demais coleções, inicia pelo capítulo de conjuntos. Após a definição de conjunto vazio, é demonstrado por redução ao absurdo que $\varnothing \subset A$ qualquer que seja o conjunto A. Entretanto, apresenta e não demonstra que também para qualquer conjunto A, temos $A \subset A$. Das obras analisadas é a única que menciona o conjunto das partes e enuncia a relação entre a quantidade de elementos e subconjuntos, porém não demonstra tal relação. Cita também a propriedade distributiva da união em relação a interseção e vice-versa, mas novamente se abstém de justificar tais propriedades. Assim, quase nada é demonstrado nesse capítulo.

O capítulo seguinte é dedicado ao estudo das funções. Quando é apresentada a composição de funções o livro perde a oportunidade de demonstrar que, em geral, para duas funções f e g, temos $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. No estudo da função afim, é realizada a demonstração de que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax + b$ é sempre uma reta, utilizando de manipulação algébrica e propriedades da geometria plana. Também demonstra diretamente por manipulação algébrica que se o coeficiente a for positivo a função é crescente como ainda se tivermos $a < 0$, então a função é decrescente.

Sobre a função quadrática, o texto cita a parábola como gráfico de funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, por definição. Percebe-se pelo texto que o livro pressupõe que o leitor não conhece a curva: *"O gráfico de f é uma curva denominada parábola"*. Faz ainda referência a existência do eixo de simetria dessa curva mas não prova que de fato ela possui. Analisando a influência dos coeficientes a, b e c no gráfico de uma função quadrática, o livro esboça o gráfico de $f(x) = x^2 + 2$ por uma tabela com 5 pares ordenados e diz: *"Note que a parábola tem concavidade voltada para cima e o coeficiente a é maior que zero."* É realizada ainda uma situação análoga para $a < 0$. Ou seja, não há qualquer preocupação em justificar as relações. Posteriormente o mesmo ocorre para o coeficiente b. O caso do coeficiente c é justificado naturalmente pelo fato de que $f(0) = c$. E ainda sobre a parábola, os valores das coordenadas do vértice são justificados utilizando manipulação algébrica.

No estudo da função exponencial, nenhuma propriedade é demonstrada. Sobre logaritmos, são demonstradas diretamente por manipulação algébrica as propriedades operatórias e a mudança de base. Na função logarítmica, o texto relaciona a monotonicidade da função à base do logaritmo, mas não prova a relação. Sobre o gráfico, o texto justifica que a curva é tal pois *"...como a função exponencial e a função logarítmica são inversas..."*, entretanto não mostra tampouco prova que tais funções são inversas.

No capítulo sobre progressões, no estudo das progressões aritméticas, o texto demonstra que numa progressão (a_n), temos $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$. A partir desse exemplo, o texto deduz que $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ para todo natural $n \geq 2$. As fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos são deduzidas intuitivamente. De modo bastante similar é realizado o estudo das progressões geométricas. O texto prova que numa sequência geométrica (a_n), temos $a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$ e salta para a generalização, sem demonstrar, que $a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$ para todo natural $n \geq 2$. Também as fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos são deduzidas intuitivamente. Sobre a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o livro faz uma demonstração da fórmula, por meio de limite, sem que esse tenha sido definido.

O primeiro volume é finalizado com uma introdução à trigonometria, com uma revisão do ensino fundamental, como o teorema de Tales, o qual é demonstrado para segmentos comensuráveis, mas sem qualquer menção quando se trata de segmentos incomensuráveis. Também são revisadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo onde são demonstradas, por propriedades geométricas, as razões envolvendo os ângulos de 30°, 45° e 60°. Após isso, sem que seja apresentado o ciclo trigonométrico, o texto apresenta como definição, que para um ângulo agudo α, temos $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$ e $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. Isso é feito possivelmente para justificar as leis do seno e do cosseno que são apresentadas posteriormente. Entretanto, as demonstrações de tais teoremas são realizadas apenas para triângulos acutângulos.

O segundo volume inicia com a trigonometria no ciclo trigonométrico, onde é notável a ausência da identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. A identidade $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ e $k \in \mathbb{Z}$ é dada mas não justificada. No estudo das funções trigonométricas, o livro não define o que é uma função periódica e cita, sem provar, que $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções periódicas de período 2π. Também cita, sem demonstrar, que $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar e $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par. As fórmulas de adição de arcos, $\operatorname{sen}(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ e $\operatorname{tg}(a \pm b)$ são dadas sem qualquer justificativa. O texto diz que *"Essas fórmulas podem ser demonstradas..."*.

O capítulo seguinte trata da Matemática Financeira, iniciando com uma revisão de porcentagem, reajustes e descontos percentuais. As fórmulas de juros e montante nos regimes de juros simples e compostos são deduzidas intuitivamente após exemplos numéricos. Os sistemas de amortização SAC (sistema de amortização constante) e o sistema Price são apresentados e as fórmulas de cálculo dos valores das prestações são dadas por definição.

No capítulo sobre estatística temos a apresentação das diferentes formas de organização de dados (gráficos e tabelas) e as medidas de tendência central, moda, média aritmética e mediana, sem que as fórmulas da média e mediana sejam justificadas e sim definidas como tais.

O próximo capítulo trata de matrizes, determinantes e sistemas lineares. No estudo das matrizes, após a definição da multiplicação de duas matrizes são apresentadas várias propriedades, como a associativa, a existência do elemento neutro, a transposta do produto e nenhuma delas é justificada. É citado que o produto não é comutativo, mas novamente é notável a ausência de uma justificativa, que poderia ser realizada com um simples contraexemplo. No estudo dos sistemas lineares e determinantes, algumas propriedades são enunciadas, mas nenhuma é justificada.

O capítulo seguinte faz uma revisão de geometria plana sobre as fórmulas de área de algumas figuras planas. Todas as fórmulas apresentadas são justificadas por argumentos geométricos, inclusive a área do círculo, no qual é realizada uma dedução intuitiva, decompondo o círculo em setores, os quais são rearranjados formando uma figura que é comparada a um paralelogramo, utilizado para aproximar o valor da área do círculo.

No estudo dos problemas de contagem, sobre análise combinatória, a expressão que representa o número de arranjos simples é deduzida intuitivamente para conjecturar a fórmula, mas sem uma demonstração rigorosa. Tal expressão é utilizada para mostrar o número de permutações simples e combinações simples. A quantidade de permutações com objetos nem todos distintos é generalizada a partir de um exemplo numérico. O triângulo de Pascal é apresentado e algumas de suas propriedades são listadas, mas nenhuma é justificada. A expressão que representa o termo geral do desenvolvimento de $(x+y)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ é conjecturada a partir do padrão apresentado na exemplificação de alguns casos, mas não é demonstrada.

O segundo volume encerra com o estudo das probabilidades. Usando propriedades de conjuntos e alguma manipulação algébrica o livro realiza a demonstração de algumas propriedades básicas. Os cálculos de probabilidade em eventos independentes e probabilidade binomial são enunciados sem demonstração.

O terceiro volume inicia com uma revisão das medidas de tendência central estudadas no primeiro volume e continua com as medidas de dispersão, sendo que nenhuma propriedade sobre esses valores é analisada.

O capítulo seguinte trata de geometria espacial e nele é apresentada a relação de Euler para poliedros convexos, sem uma demonstração, o que é natural pois a prova foge do escopo do Ensino Médio. O princípio de Cavalieri é apresentado e, a partir dele, todas as fórmulas que representam os volumes dos sólidos estudados são demonstradas. Uma dedução intuitiva é realizada para conjecturar a expressão para a área da superfície esférica.

No capítulo que segue temos a geometria analítica, com o estudo das retas, circunferências e cônicas. Inicialmente, há uma demonstração para o cálculo das coordenadas do baricentro de um triângulo cujos vértices são dados sendo que, para tanto, são utilizados a manipulação algébrica e propriedades de geometria plana. Da mesma forma é justificada a condição de alinhamento de três pontos. No estudo da reta, é demonstrada a relação entre os coeficientes de duas retas que são paralelas e que são perpendiculares, essa última usando propriedades trigonométricas. Também é demonstrado o cálculo da tangente do ângulo entre duas retas cujas inclinações são dadas. A expressão que representa a distância entre um ponto e uma reta dados é apresentada sem qualquer justificativa.

No estudo da circunferência, sua equação é deduzida a partir de sua propriedade geométrica. No caso das cônicas, as equações da elipse, hipérbole e da parábola são apresentadas com a indicação de que podem ser deduzidas por meio das propriedades das respectivas curvas, mas tal desenvolvimento não é realizado.

O capítulo seguinte trata dos números complexos, onde a primeira demonstração é realizada para a determinação da potência i^n, sendo i a unidade imaginária e n um númeno natural qualquer. A multiplicação de complexos na forma polar é demonstrada algebricamente e a divisão é apenas apresentada. O raciocínio do produto é usado para conjecturar uma potência de um complexo com expoente natural, ou seja, é feita uma dedução intuitiva.

O último capítulo trata dos polinômios e das equações polinomiais. Inicialmente, é demonstrado o teorema do resto, cujo resultado é utilizado para justificar o teorema de D'Alembert. O livro cita o Teorema Fundamental da Álgebra, dizendo que será considerado verdadeiro sem demonstração. As relações de Girard para as equações polinomiais são demonstradas para os casos particulares de equações de segundo e terceiro grau. O caso geral é apenas apresentado. A propriedade de equações com coeficientes reais de que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz da equação, então o conjugado $\overline{z}$ também será é enunciada sem qualquer justificativa. Assim como também não é justificada a pesquisa sobre raízes racionais numa equação de coeficientes inteiros.

3.3.1 Conclusões gerais sobre as obras

Após a análise dos nove volumes correspondentes as três obras identificadas, notamos que o modo como são os apresentados os teoremas bem como suas respectivas demonstrações não diferem muito entre os livros considerados. A expressão teorema raramente é utilizada e é descrita apenas em situações em que o nome é uma expressão já consagrada, como o *teorema de Pitágoras* ou *teorema de Tales*. Expressões como *lema, proposição* e *corolário* não fazem parte do vocabulário de textos matemáticos no Ensino Médio, o que, em nossa análise é um prejuízo para os estudantes, pois teriam nesse caso a oportunidade de compreender que determinados resultados servem de suporte para outros, assim como alguns são consequências de outros. E que desse modo em grande parte é estruturado o raciocínio matemático.

Consideramos ainda que nos livros didáticos analisados a demonstração não representa papel de relevo, pois é notável que são omitidas demonstrações simples em várias oportunidades, como por exemplo para mostrar que não são comutativos o produto de matrizes ou a composição de funções, sendo suficiente apenas um contraexemplo nesses casos e constatamos que nenhuma das obras analisadas fez uso desse expediente para fins de convencimento do leitor, entre várias outras situações.

Apesar do recurso da demonstração ser subutilizado como ferramenta de ensino, notamos que nas três obras analisadas, o volume 3 de cada obra utiliza mais de demonstrações que os demais volumes, em especial no capítulo de geometria analítica onde várias propriedades são demonstradas utilizando manipulação algébrica e recursos da geometria plana. sobre os métodos de demonstração, observamos que o método da redução ao absurdo é utilizado apenas nas propriedades iniciais sobre conjuntos, o argumento combinatório não foi utilizado, nem mencionado uma vez sequer em nenhuma obra, assim como o princípio da indução finita. Compreendemos que tais métodos são totalmente acessíveis ao nível do Ensino Médio e poderiam contribuir bastante no ensino de Matemática.

4 Demonstrações de teoremas

Nesse capítulo vamos utilizar as operações da lógica e técnicas de demonstração vistas no segundo capítulo para provar alguns teoremas empregados no Ensino Médio. Os teoremas estão divididos por seções, cada qual tratando de um conteúdo da Matemática. Antes de alguns teoremas enunciamos, quando necessário, definições que serão necessárias para uma melhor compreensão tanto dos teoremas como das respectivas demonstrações.

4.1 Teoremas sobre conjuntos

Em geral, os livros didáticos de Ensino Médio iniciam pelo capítulo de Introdução à Teoria dos Conjuntos, dada a sua importância especialmente no papel de sua notação e linguagem, utilizadas praticamente em todas as áreas da Matemática. Por esse motivo, iniciamos o capítulo de demonstrações de Teoremas por esse conteúdo.

Definição 4.1.1. *O conjunto que não possui qualquer elemento é denominado conjunto vazio. O símbolo adotado para o conjunto vazio é $\varnothing$.*

Definição 4.1.2. *O conjunto segundo o qual pertencem todos os elementos de um dado contexto é denominado* conjunto universo. *O símbolo adotado para o conjunto universo nesse texto será a letra grega Ω (ômega).*

Definição 4.1.3. *Um conjunto A é denominado subconjunto de um conjunto B, se todo elemento pertencente a A pertence também a B. Em símbolos, denotamos que A é subconjunto de B por $A \subset B$. No caso em que $A \subset B$ e $A \neq B$, dizemos que A é um suconjunto próprio de B. No caso de A não ser subconjunto de B, podemos escrever $A \not\subset B$.*

Definição 4.1.4. *Dois conjuntos A e B são iguais, ou seja, $A = B$ se $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Assumimos aqui que o conceito de função seja conhecido pelos alunos, já que seu estudo tem início no Ensino fundamental.

Definição 4.1.5. *Uma função $f : A \to B$ é injetiva se, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para todo $x_1, x_2 \in A$.*

Definição 4.1.6. *Uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva se, para todo $y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $y = f(x)$.*

Definição 4.1.7. *Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se é injetiva e sobrejetiva. Nesse caso, dizemos que f é uma bijeção.*

A seguir vamos definir conjuntos finitos e infinitos e, para isso, denotaremos por I_k o conjunto dos números naturais de 1 até k, ou seja, $I_k = \{1,2,3,...,k\}$. E ainda, como a Introdução à Teoria dos Conjuntos tem início ainda no Ensino Fundamental, consideramos que sejam conhecidos os conjuntos numéricos $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Definição 4.1.8. *Um conjunto A é denominado* finito *se A é vazio ou se existe, para algum número natural k, uma bijeção $f : I_k \to A$.*

Se A for vazio, então dizemos que tem *zero* elementos. No caso de existir uma bijeção $f : I_k \to A$, dizemos que $k \in \mathbb{N}$ é o número de elementos de A e nos dois casos, indicamos essa quantidade de elementos do conjunto A por $|A|$.

Definição 4.1.9. *Um conjunto A é denominado* infinito *se A não é vazio e para qualquer $k \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_k \to A$.*

Uma definição alternativa de conjunto infinito pode ser feita usando a ideia de *equivalência* de conjuntos, dada a seguir.

Definição 4.1.10. *Dois conjuntos A e B são ditos equivalentes se existe uma bijeção $f : A \to B$.*

Teorema 4.1.1. *Um conjunto é* infinito *se é equivalente a algum de seus subconjuntos próprios.*

A demonstração desse teorema será omitida por fugir do escopo desse trabalho.

Definição 4.1.11. *Dado um subconjunto X de um conjunto universo Ω, o* complementar de X em relação a Ω *é o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem a X. O símbolo X^c será usado nesse trabalho para expressar o complementar do conjunto X em relação ao conjunto universo.*

Definição 4.1.12. *Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, temos*

- $A \cup B = \{x; x \in A$ *ou* $x \in B\}$;
- $A \cap B = \{x; x \in A$ *e* $x \in B\}$; *e*
- $A - B = \{x; x \in A$ *e* $x \notin B\}$

A seguir, enunciamos e demonstramos alguns teoremas sobre conjuntos.

Teorema 4.1.2. *Para todo conjunto A, temos $\varnothing \subset A$.*

Demonstração. Para essa prova, utilizaremos a demonstração por redução ao absurdo. Assim, suponha que $\varnothing \not\subset A$. Isso significa que $\exists x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$. Absurdo, pois tal elemento não pode existir já que o conjunto vazio, por definição, não possui qualquer elemento. Logo, podemos concluir que não pode ocorrer que $\varnothing \not\subset A$, e portanto temos $\varnothing \subset A$. $\square$

Teorema 4.1.3. *Para todo conjunto A, temos $A \subset A$.*

Demonstração. A prova será dada por redução ao absurdo. Suponha que $A \not\subset A$. Desse modo, existe $x \in A$ tal que $x \notin A$. Absurdo, logo não pode ocorrer $A \not\subset A$, o que nos leva a concluir que, necessariamente, $A \subset A$. □

Teorema 4.1.4. *Seja A um conjunto tal que $|A| = n$. Assim, a quantidade de subconjuntos de A é igual a 2^n.*

Demonstração. Para provar esse teorema será utilizado o Princípio da Indução Finita. Assim, como A é um conjunto arbitrário de n elementos, seja a proposição

$P(n)$: Todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos.

Desse modo, temos:

(i). $P(0)$ é verdadeira, já que o conjunto vazio possui $2^0 = 1$ subconjunto, que é o próprio vazio.

(ii). Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, estamos admitindo que um conjunto A tal que $|A| = n$, possui 2^n subconjuntos.
Acrescentando um elemento x_0 ao conjunto A, temos então um conjunto $B = A \cup \{x_0\}$ com $n+1$ elementos. Todos os 2^n subconjuntos de A são também subconjuntos de B e cada um desses subconjuntos de A produz mais um subconjunto de B com o acréscimo de x_0. Portanto, a quantidade de subconjuntos de B é igual a $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
Logo, provamos que se $P(n)$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, então $P(n+1)$ também é verdadeira, concluindo assim que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Posteriormente, será utilizada como estratégia de ensino, visando a fixação de idéias e resultados (que não é a demonstração) a relação entre conjuntos por meio de figuras. Assim, dados dois conjuntos A e B, podemos representá-los por meio do Diagrama de *Venn*[1]:

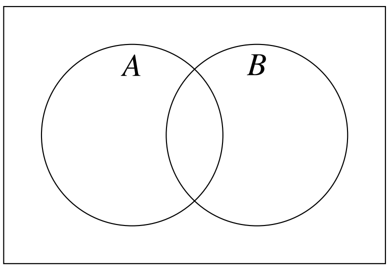


Figura 4.1: Conjuntos A e B.

O conjunto universo Ω é representado pelo retângulo.

[1] Jonh Venn (1834-1923) foi um matemático inglês.

Utilizando o diagrama de Venn, os conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$ ficam representados pelas regiões sombreadas nas figuras a seguir.

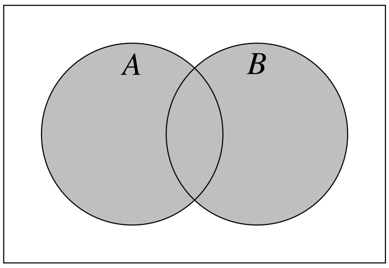


Figura 4.2: Conjunto $A \cup B$.

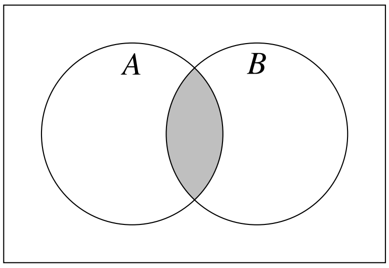


Figura 4.3: Conjunto $A \cap B$.

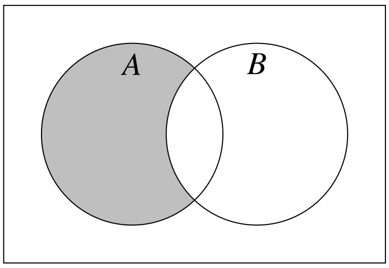


Figura 4.4: Conjunto $A - B$.

Teorema 4.1.5. *Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, então $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (Propriedade distributiva da interseção em relação à união)*

Demonstração. Para provar a igualdade, devemos mostrar que

(i). $(A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))$, e
(ii). $((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subset (A \cap (B \cup C))$.

Considere $x \in A \cap (B \cup C)$. Assim, $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Analisamos dessa forma as possibilidades $x \in C$ ou $x \in B$.

Se $x \in C$, então $x \in A \cap C$. Logo, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. O caso $x \in B$ é análogo.

Desse modo, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Em contrapartida, considere $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Assim, $y \in A \cap B$ ou $y \in A \cap C$, ou seja, $y \in A$ e $y \in B$ ou $y \in A$ e $y \in C$. Portanto, de toda forma temos $y \in A$ e, necessariamente, $y \in B$ ou $y \in C$. Então, $y \in A \cap (B \cup C)$ e, desse modo, temos $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Logo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, o que conclui a prova. □

Comentário: Ainda que o presente trabalho pretenda contribuir com o ensino e aprendizagem na Matemática do Ensino Médio, sustentando a demonstração de teoremas como importante ferramenta nesse processo, entendemos que não é necessário e nem razoável demonstrar tudo o que for possível para os alunos. No Ensino Médio, a demonstração é útil (também) como forma de convencimento com base na razão, no lugar da aceitação por decreto. Desse modo, não há motivo para demonstrar aquilo que é intuitivamente evidente e ainda consideramos que outras formas de convencimento podem ser também válidas.

Como exemplo, em relação a essa última demonstração, um modo bastante interessante de convencimento pode ser obtido por meio do diagrama de Venn desses conjuntos, ainda que não seja considerada uma demonstração formal.

Sejam A, B e C conjuntos representados a seguir:

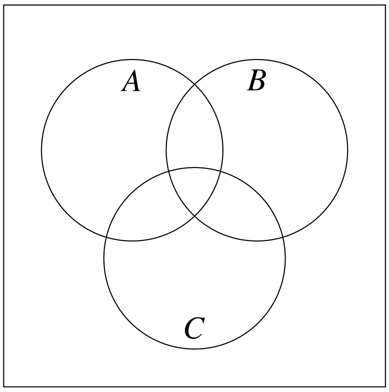


Figura 4.5: Conjuntos A, B e C.

Temos assim sombreado o conjunto $B \cup C$:

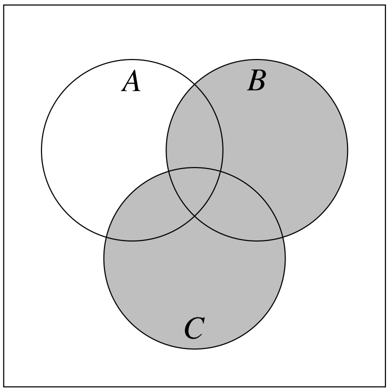


Figura 4.6: Conjunto $B \cup C$.

Na sequência, o conjunto $A \cap (B \cup C)$ é representado pela região sombreada:

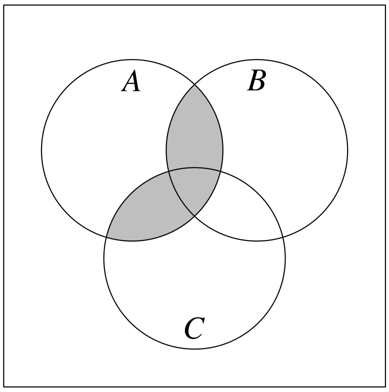


Figura 4.7: Conjunto $A \cap (B \cup C)$.

Por outro lado, temos o conjunto $A \cap B$ sombreado:

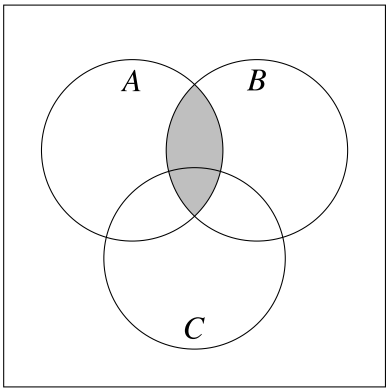


Figura 4.8: Conjunto $A \cap B$.

E ainda $A \cap C$ representado:

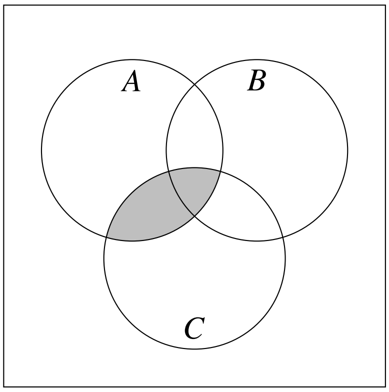


Figura 4.9: Conjunto $A \cap C$.

E dessa forma, temos $(A \cap B) \cup (A \cap C)$:

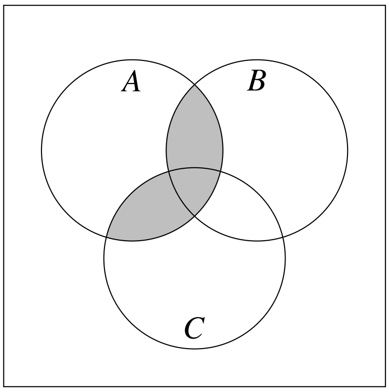


Figura 4.10: Conjunto $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Portanto, como as Figuras 4.7 e 4.10 ilustram o mesmo conjunto, temos dessa forma o convencimento da validade da relação $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, por meio de figuras.

Comentário: Certas estratégias de convencimento podem nos conduzir a erros, principalmente quando envolvem conjuntos infinitos. Por exemplo, é intuitivo aceitarmos que existem mais números inteiros do que números pares, uma vez que $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Ocorre que a bijeção $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ tal que $f(n) = 2n$ mostra que isso não é verdadeiro, já que $\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ são equivalentes.

Teorema 4.1.6. *Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Propriedade distributiva da união em relação à interseção)*

Demonstração. Para provar a igualdade, devemos mostrar que

(i). $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, e
(ii). $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Considere $x \in A \cup (B \cap C)$. Assim, $x \in A$ ou $x \in B \cap C$ e podemos analisar o seguinte:

- Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Portanto, temos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e, logo, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$. Desse modo, temos $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Então, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e, portanto, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Por outro lado, considere $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Assim, $y \in A \cup B$ e $y \in A \cup C$. Então, temos $y \in A$ ou y pertence a um dos conjuntos B ou C ($\Rightarrow y \in B \cup C$). Então, como $y \in A$ ou $y \in B \cup C$, então $y \in A \cup (B \cap C)$ e, portanto, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, concluindo assim a demonstração. □

Comentário: vamos realizar o procedimento de visualizar, por meio dos diagramas de Venn, os conjuntos para os quais queremos mostrar a igualdade $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

Temos a seguir os diagramas dos conjuntos A, B e C:

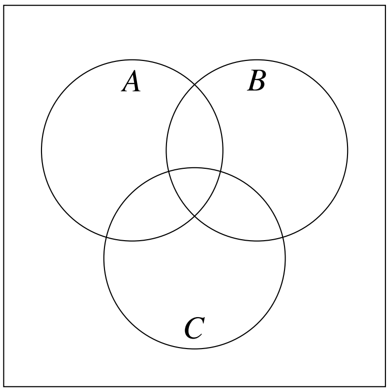


Figura 4.11: Conjuntos A, B e C.

Sombreado, temos o conjunto $A \cup B$:

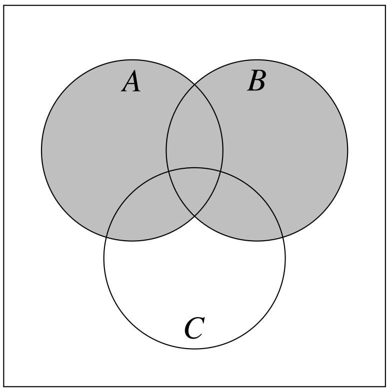


Figura 4.12: Conjunto $A \cup B$.

E o conjunto $A \cup C$:

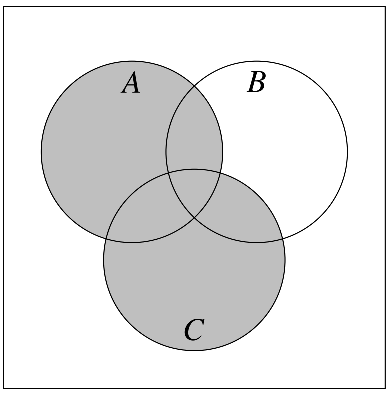


Figura 4.13: Conjunto $A \cup C$.

Relacionando as Figuras 4.12 e 4.13, temos então a seguir a representação do conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ na região sombreada:

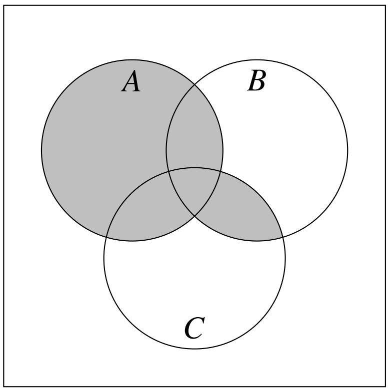


Figura 4.14: Conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Por outro lado, considere o conjunto A sombreado:

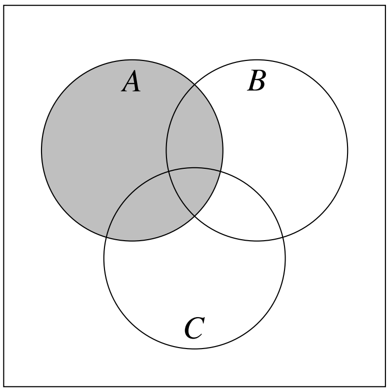


Figura 4.15: Conjunto A.

Representamos a seguir o conjunto $B \cap C$:

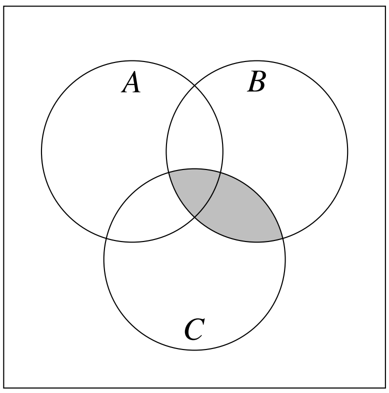


Figura 4.16: Conjunto $B \cap C$.

Portanto, o conjunto $A \cup (B \cap C)$ representa a regão sombreada:

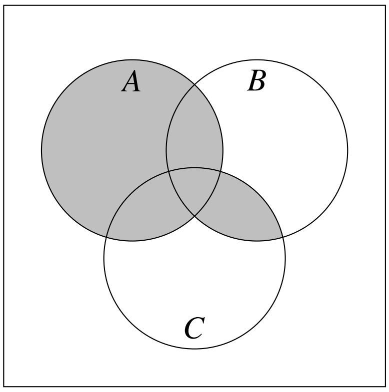


Figura 4.17: Conjunto $A\cup(B\cap C)$.

Logo, como as Figuras 4.14 e 4.17 representam o mesmo conjunto, temos portanto a convicção da validade de $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$.

Teorema 4.1.7. *Sendo A e B conjuntos quaisquer, então $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$*

Demonstração. Para provar a igualdade, devemos mostrar que

(i). $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$, e

(ii). $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$.

Considere $x\in(A\cup B)^c$. Então $x\in\Omega-(A\cup B)$, ou seja, $x\in\Omega$ e $x\notin A\cup B$. Assim, $x\in\Omega$ e não pertence a nenhum dos conjuntos A ou B, ou seja, $x\in\Omega-A$ e $x\in\Omega-B$. Desse modo, temos $x\in(\Omega-A)\cap(\Omega-B)=A^c\cap B^c$. Logo, $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$.

Por outro lado, considere $y\in A^c\cap B^c$. Então $y\in A^c=\Omega-A$ e $y\in B^c=\Omega-B$. Portanto, temos $y\in\Omega$ e y não pertence a nenhum dos conjuntos A ou B, ou seja, $y\in\Omega$ e $y\notin(A\cup B)$. Assim $y\in\Omega-(A\cup B)=(A\cup B)^c$. Logo, $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$, o que conclui a prova. □

Mais uma vez, vamos estabelecer a igualdade $(A\cup B)^c$ e $A^c\cap B^c$ por meio do diagrama de Venn.

Considere o conjunto $A\cup B$ sombreado:

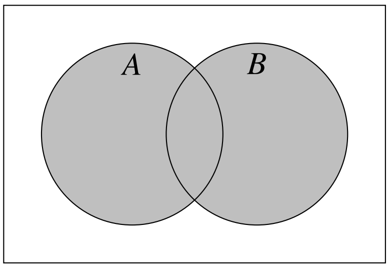


Figura 4.18: Conjunto $A\cup B$.

Representamos assim $(A\cup B)^c$:

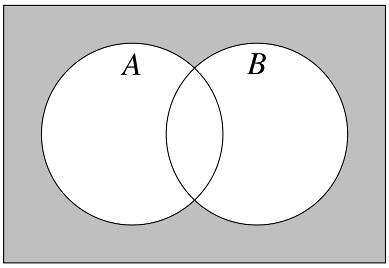


Figura 4.19: Conjunto $(A \cup B)^c$.

Por outro lado, temos o conjunto A^c:

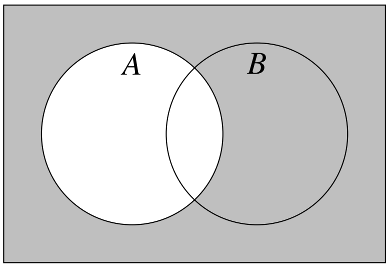


Figura 4.20: Conjunto A^c.

E o conjunto B^c:

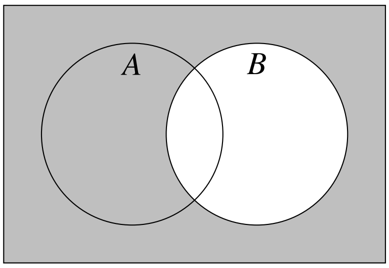


Figura 4.21: Conjunto B^c.

Relacionando as Figuras 4.20 e 4.21, podemos observar que o conjunto $A^c \cap B^c$ é a representação da área sombreada:

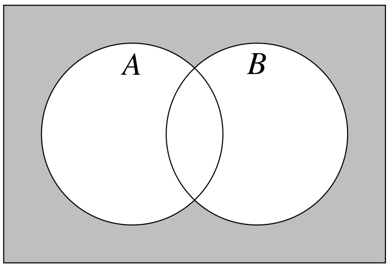


Figura 4.22: Conjunto $A^c \cap B^c$.

E assim, como as Figuras 4.19 e 4.22 expressam o mesmo conjunto, temos o convencimento de que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Teorema 4.1.8. *Sendo A e B conjuntos quaisquer, então $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.*

Demonstração. Para provar a igualdade, devemos mostrar que

(i). $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$, e

(ii). $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

Considere $x \in (A \cap B)^c = \Omega - (A \cap B)$. Então $x \in \Omega$ e $x \notin A \cap B$ ($\Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$). Assim, temos $x \in \Omega$ e $x \notin A$ ou $x \in \Omega$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in (\Omega - A) \cup (\Omega - B) = A^c \cup B^c$. Logo, $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

Por outro lado, considere $y \in A^c \cup B^c$. Então $y \in A^c = \Omega - A$ ou $y \in B^c = \Omega - B$, ou seja, $y \in \Omega$ e não pertence a nenhum dos conjuntos A ou B, equivalente a afirmar que $y \in \Omega - (A \cup B) = (A \cup B)^c$. Portanto, $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$, concluindo assim a demonstração. $\square$

Vamos novamente utilizar o diagrama de Venn para estabelecer a igualdade $(A \cap B)^c$ e $A^c \cup B^c$.

O conjunto $A \cap B$ sombreado:

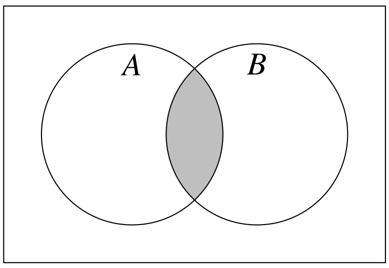


Figura 4.23: Conjunto $A \cap B$.

O conjunto $(A \cap B)^c$:

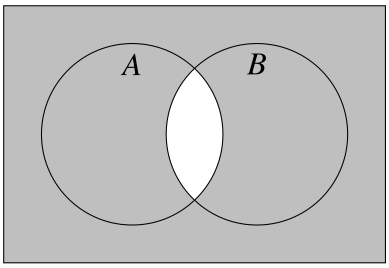


Figura 4.24: Conjunto $(A \cap B)^c$.

Por outro lado, temos o conjunto A^c sombreado:

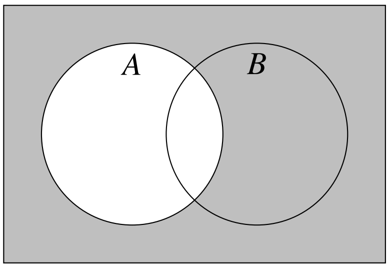


Figura 4.25: Conjunto A^c.

E o conjunto B^c:

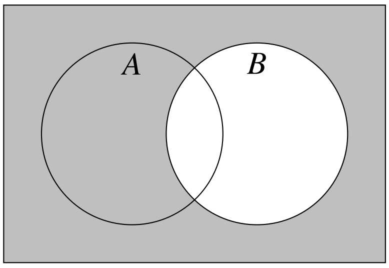


Figura 4.26: Conjunto B^c.

Relacionando as Figuras 4.25 e 4.26, podemos observar a representação do conjunto $A^c \cup B^c$ pela região sombreada:

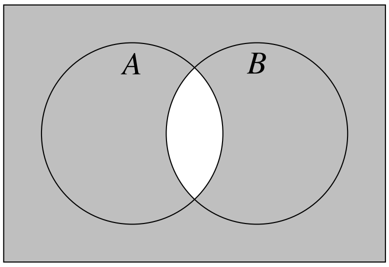


Figura 4.27: Conjunto $A^c \cup B^c$.

E assim, como as Figuras 4.24 e 4.27 representam o mesmo conjunto, temos a convicção de que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

4.2 Teoremas sobre funções

Para essa seção assumiremos como conhecidos o conceito de função, as Definições 4.1.5, 4.1.6 e 4.1.7 assim como os conceitos de *Domínio* e *Imagem* de função, todos inerentes ao ensino fundamental.

Teorema 4.2.1. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então f é uma bijeção.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a injetividade de f, ou seja, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Assim, temos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Agora, provaremos que f é sobrejetiva. Assim, seja y um número real arbitrário. Então, temos

$$f(x) = y \Rightarrow ax + b = y \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

Assim, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe x tal que $y = f(x)$ e f é, portanto, sobrejetiva.

Logo, sendo injetiva e sobrejetiva, concluímos que f é bijetiva. □

Teorema 4.2.2. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ é o valor mínimo da função no caso de $a > 0$ e o valor máximo no caso de $a < 0$.*

Demonstração. Vamos inicialmente, transformar a expressão $ax^2 + bx + c$ para a forma canônica. Assim, temos:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Portanto,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Se $a > 0$, então

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Logo, f possui valor mínimo igual a $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ que ocorre se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Se $a < 0$, então

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow f(x) \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Logo, f possui valor máximo igual a $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ que ocorre se

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

□

Teorema 4.2.3. *Para toda função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, a igualdade*

$$f\left(-\frac{b}{2a}+k\right) = f\left(-\frac{b}{2a}-k\right)$$

é válida qualquer que seja o real k.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}+k\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}+k\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}+k\right)+c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{bk}{a}+k^2\right)-\frac{b^2}{2a}+bk+c \\ &= \frac{b^2}{4a}-bk+ak^2-\frac{b^2}{2a}+bk+c = \frac{b^2}{4a}+ak^2-\frac{b^2}{2a}+c. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}-k\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}-k\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}-k\right)+c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{bk}{a}+k^2\right)-\frac{b^2}{2a}-bk+c \\ &= \frac{b^2}{4a}+bk+ak^2-\frac{b^2}{2a}-bk+c = \frac{b^2}{4a}+ak^2-\frac{b^2}{2a}+c = f\left(-\frac{b}{2a}+k\right). \end{aligned}$$

□

Comentário: A interpretação geométrica da igualdade $f\left(-\frac{b}{2a}+k\right) = f\left(-\frac{b}{2a}-k\right)$ é a de que a reta vertical que cruza a a parábola no seu vértice, representada pela equação $x = -\frac{b}{2a}$, é o eixo de simetria dessa parábola. Assim, se tomarmos em x qualquer par de valores equidistantes de $-\frac{b}{2a}$, eles terão a mesma imagem.

Teorema 4.2.4. *Seja $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ uma função polinomial de grau n e $a_0,a_1,...,a_n \in \mathbb{Z}$. Se $b \in \mathbb{Z}$ é tal que $f(b) = 0$, então b é divisor de a_0.*

Demonstração. $f(b) = 0 \Rightarrow a_0+a_1b+a_2b^2+...a_nb^n = 0 \Rightarrow a_1b+a_2b^2+...a_nb^n = -a_0 \Rightarrow a_1+a_2b+...+a_nb^{n-1} = -\frac{a_0}{b}$.
Como os coeficientes $a_1,...,a_n$ e b são inteiros, então $-\frac{a_0}{b}$ é o número inteiro $a_1+a_2b+...+a_nb^{n-1}$ e logo, concluímos que b é divisor de a_0. □

O teorema demonstrado acima revela uma boa ideia para determinar raízes inteiras por inspeção de uma equação polinomial de coeficientes inteiros.

4.3 Teoremas sobre progressões

Nessa seção serão demonstrados alguns resultados sobre progressões aritméticas e geométricas, onde serão utilizadas algumas notações como (a_n), representando uma sequência numérica, a_n o termo geral de tal sequência e S_n a soma de seus n primeiros termos.

Teorema 4.3.1. *Seja (a_n) uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = a$ e razão r. Então, o termo geral a_n é dado por*

$$a_n = a + (n-1)r.$$

Demonstração. A prova será feita pelo Princípio da Indução Finita. Desse modo, considere a proposição a seguir

$P(n)$: o n-ésimo termo a_n de uma progressão aritmética $(a, a+r, a+2r, ...)$ é $a_n = a + (n-1)r$.

Assim, temos

(i). $P(1)$ é verdadeiro, pois $a_1 = a + (1-1)r = a$.

(ii). Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_n = a + (n-1)r$. Assim, para verificar a validez de $P(n+1)$, temos

$$a_{n+1} = a_n + r = a + (n-1)r + r = a + nr - r + r = a + nr = a + [(n+1) - 1]r.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$. □

Teorema 4.3.2. *Em uma progressão aritmética finita (a_n), com k termos, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual a soma $a_1 + a_k$ dos extremos.*

Demonstração. Seja a_i um termo de (a_n) diferente dos extremos, ou seja, $i \neq 1, k$. Então os termos a_i e a_{k-i+1} são equidistantes dos extremos, pois $i - 1 = k - (k - i + 1)$. Considerando r a razão de (a_n), temos:

$$a_i = a_1 + (i-1)r, \quad \text{e} \quad a_{k-i+1} = a_1 + [(k-i+1) - 1]r = a_1 + (k-i)r.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_i + a_{k-i+1} = & \quad a_1 + (i-1)r + a_1 + (k-i)r = a_1 + ir - r + a_1 + kr - ir = a_1 + a_1 - r + kr \\ = & \quad a_1 + [a_1 + (k-1)r] = a_1 + a_k. \end{aligned}$$

$\square$

Comentário: É importante não confundir uma demonstração de um resultado com a dedução intuitiva de uma fórmula. Como exemplo, muitos livros de Ensino Médio apresentam o resultado demonstrado no teorema 4.3.1 como uma dedução obtida pelo padrão observado, fazendo $a_1 = a$, $a_2 = a + r$, $a_3 = a + 2r$ e assim por diante, sendo perfeitamente natural conjecturar que $a_n = a + (n-1)r$. Porém, caso não seja esclarecido a um estudante que o raciocínio apresentado se trata de uma dedução intuitiva e não uma demonstração rigorosa, é possível que o primeiro seja tomado pelo segundo.

Em mais um exemplo, a seguir vamos mostrar como em geral nos livros didáticos é obtida a fórmula para a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) de razão igual a r.

Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$. Reescrevendo essa soma na ordem inversa das parcelas, podemos organizar as somas da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n. \\ \underline{S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1.} \end{array}$$

Assim, somando termo a termo as parcelas das somas, organizadas em pares, juntando a primeira com a primeira, a segunda com a segunda e assim por diante, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Organizadas desse modo, podemos observar que as somas obtidas em cada par de parênteses não se alteram, pois somam termos equidistantes dos extremos.

Portanto, sendo iguais as somas, todas podem ser presentadas por $(a_1 + a_n)$. Como são n pares de parênteses, então

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n)n,$$

e logo,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Novamente ressaltamos a importância de observar que tal dedução não representa uma prova definitiva sobre a fórmula obtida, mas tão somente a elaboração de um raciocínio que conduz a uma hipótese do valor de S_n, o que não reduz o mérito da construção da conjectura. A demonstração formal será dada a seguir.

Teorema 4.3.3. *A soma S_n dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. A prova será feita pelo Princípio da Indução Finita. Desse modo, considere a proposição a seguir.

$P(n)$: A soma S_n dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Assim, temos

(i). $P(1)$ é verdadeiro, pois $S_1 = \dfrac{(a_1 + a_1)}{2} = \dfrac{2a_1}{2} = a_1$.

(ii). Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Para verificar a validez de $P(n+1)$, sendo r a razão da progressão, temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} = \; & S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} = \frac{na_1 + na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + (na_n + a_{n+1}) + a_{n+1}}{2} \\ = \; & \frac{na_1 + (na_n + a_1 + nr) + a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + (a_1 + n(a_n + r)) + a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + (a_1 + na_{n+1}) + a_{n+1}}{2} \\ = \; & \frac{(na_1 + a_1) + (na_{n+1} + a_{n+1})}{2} = \frac{a_1(n+1) + a_{n+1}(n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$. □

Teorema 4.3.4. *O termo geral a_n, $n \geq 2$, de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = a$ e razão q é*

$$a_n = a \cdot q^{n-1}.$$

Demonstração. A prova será feita pelo Princípio da Indução Finita. Desse modo, considere a proposição a seguir.

$P(n)$: O termo geral a_n, $n \geq 2$, de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = a$ e razão q é $a_n = a \cdot q^{n-1}$.

Assim, temos

(i). $P(2)$ é verdadeiro, pois $a_2 = a \cdot q^{2-1} = a \cdot q$.

(ii). Suponha que a proposição $P(n)$ seja verdadeira. Para verificar a validez de $P(n+1)$, temos:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = (a \cdot q^{n-1}) \cdot q = a \cdot (q^{n-1} \cdot q) = a \cdot q^n = a \cdot q^{(n+1)-1}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 2$. □

Assim como foi realizado numa progressão aritmética, vamos mostrar uma dedução bastante comum em livros didáticos, utilizada para conjecturar uma expressão para a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Assim, temos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \;\Rightarrow\; S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.$$

Portanto,

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Organizando essas somas, podemos escrever

$$\begin{array}{l} qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \\ \underline{S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.} \end{array}$$

E fazendo a diferença entre as somas,termo a termo, obtemos

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \;\Rightarrow\; (q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \;\Rightarrow\; S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \;\Rightarrow\; S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

A demonstração desse fato será dada a seguir.

Teorema 4.3.5. *A soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q \neq 1$ é*

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Demonstração. A prova será feita pelo Princípio da Indução Finita. Desse modo, considere a proposição a seguir.

$P(n)$: A soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é dada por $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Assim, temos

(i). $P(1)$ é verdadeiro, pois $S_1 = \dfrac{a_1(1-q^1)}{1-q} = \dfrac{a_1(1-q)}{1-q} = a_1$.

(ii). Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Assim, para verificar a validez de $P(n+1)$, temos:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = & \quad S_n + a_{n+1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} + a_1q^n = \frac{a_1(1-q^n)+(1-q)a_1q^n}{1-q} \\ = & \quad \frac{a_1 - a_1q^n + a_1q^n - a_1q^nq}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}. \end{aligned}$$

Logo, provamos que se $P(n)$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, então $P(n+1)$ também é verdadeira, concluindo assim que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$. □

4.4 Teoremas sobre combinatória

A análise combinatória estudada no Ensino Médio se baseia no chamado *princípio multiplicativo*, o qual diz que se dois eventos ocorrem sequencialmente e de forma independentes (no sentido de que independentemente de qual evento ocorra primeiro, o número de possibilidades para o segundo evento se preserva) e que a quantidade de possíveis para o primeiro evento é m e a quantidade de possíveis para o segundo evento é n, então o número de possibilidade para a ocorrência destes dois eventos é $m \cdot n$. Como o nome já diz, esse fato é apresentado como um *princípio* e assim não é questionada sua justificativa. Em níveis mais avançados, esse resultado é dado como um teorema, que pode ser verificado em [10].

Para o próximo teorema, uma *permutação* dos elementos de um conjunto A é uma bijeção de A em A.

Teorema 4.4.1. *A quantidade P_n de permutações dos n elementos do conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ é dada por*

$$P_n = n!.$$

Comentário: antes de apresentar a demonstração desse teorema, faremos uma dedução intuitiva da fórmula para o cálculo da quantidade de permutações, a partir da definição 2.2.2. Assim, considere um conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ a partir do qual queremos estabelecer a quantidade de sequências possíveis de serem formadas com seus n elementos. Para isso, temos n possibilidades para a escolha do primeiro termo da sequencia e, para cada uma dessas possibilidades, há $n-1$ possibilidades de escolha para o segundo termo da sequencia. Ainda, para cada uma dessas possibilidades, há $n-2$ possibilidades para a escolha do terceiro termo da sequencia e assim por diante. Desse modo, aplicando o princípio multiplicativo, temos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ sequências possíveis de serem formadas. Como cada sequência distinta é uma permutação dos n elementos, a quantidade P_n de permutações de n elementos é então dada por

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Ressaltando que o processo em questão não consiste em uma prova, mas repetindo, se trata de uma dedução intuitiva. A demonstração formal é dada a seguir.

Demonstração do teorema 4.4.1. A prova desse teorema será dada pelo Princípio da Indução Finita. Assim, seja $Q(n)$ a proposição:

$Q(n)$: o número de permutações dos n elementos de $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ é $n!$.

Desse modo, temos que $Q(1)$ é verdadeira, já que para um objeto, há apenas uma ordem possível. Suponha agora que $Q(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, por hipótese de indução, vamos admitir que o número de permutações de n elementos seja $n!$. Desse modo, vamos mostrar que admitir $Q(n)$ implica na validade de $Q(n+1)$.

Considere o conjunto $B = A \cup \{x_{n+1}\} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}\}$. Para cada permutação possível para os elementos de A, existem $n+1$ permutações para esses elementos com o acréscimo de x_{n+1}, pois x_{n+1} pode se localizar em qualquer dos $n+1$ espaços possíveis:

$$\_\_\_\_ x_1 \_\_\_\_ x_2 \_\_\_\_ x_3 \_\_\_\_ \cdots \_\_\_\_ x_{n-1} \_\_\_\_ x_n \_\_\_\_$$

Em cada espaço que x_{n+1} ocupar temos uma permutação distinta e variando x_{n+1} em todos os espaços, temos todas as permutações possíveis para uma determinada ordem dos outros elementos $x_1, x_2, ..., x_n$. Dessa forma, o número de permutações possíveis para os $n+1$ elementos de B é $(n+1) \cdot P_n = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

Portanto, provamos que se $Q(n)$ é verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, então $Q(n+1)$ também é verdadeira. Logo, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que $Q(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definição 4.4.1. *Permutação circular é um tipo de permutação no qual os elementos que constituem a sequência estabelecem uma ordem cíclica. Por exemplo, as figuras 4.28, 4.29 e 4.30 representam, cada uma delas, uma permutação circular de A,B,C e D, sendo que as permutações das figuras 4.28 e 4.29 são iguais entre si, sendo distintas da permutação circular representada na figura 4.30.*

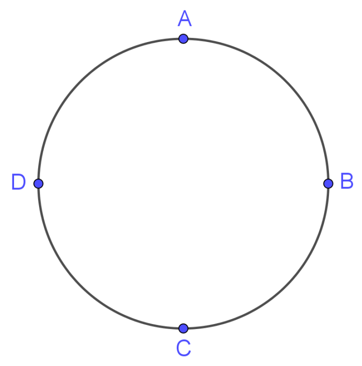


Figura 4.28: Permutação circular de A,B,C e D.

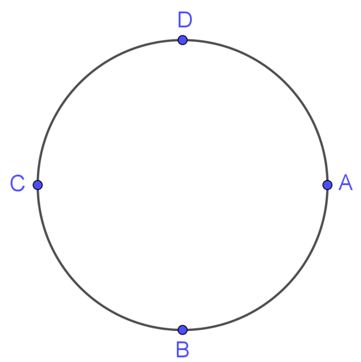


Figura 4.29: Permutação circular de A,B,C e D.

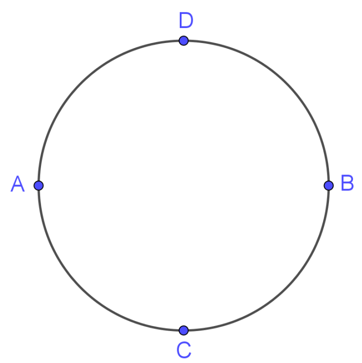


Figura 4.30: Permutação circular de A,B,C e D.

Teorema 4.4.2. *A quantidade PC_n de permutações circulares dos n elementos do conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ é*

$$PC_n = (n-1)!.$$

Demonstração. Considere o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, ou seja, $|A| = n$. Pelo teorema 4.4.1, sabemos que o número de permutações simples possíveis com os elementos de A é $n!$. Para cada uma das permutações simples que podem ser obtidas com os elementos de A, há n permutações circulares iguais. Por exemplo, as n permutações

$$x_1x_2x_3\ldots x_n,$$
$$x_nx_1x_2\ldots x_{n-1}$$
$$,x_{n-1}x_nx_1\ldots x_{n-2},$$
$$\vdots$$
$$x_2x_nx_3\ldots x_nx_1,$$

são permutações simples distintas, porém são permutações circulares idênticas.

Assim, como para cada permutação simples temos n permutações circulares iguais, então

$$n\cdot PC_n = P_n \Rightarrow n\cdot PC_n = n! \Rightarrow PC_n = \frac{n!}{n} \Rightarrow PC_n = \frac{n(n-1)!}{n} \Rightarrow PC_n = (n-1)!.$$

□

Teorema 4.4.3 (Relação de *Stifel*[2]). *Dados $n,k\in\mathbb{N}$ com $1\leq k\leq n$, então*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Demonstração. A prova será dada por argumento combinatório.

Considere um conjunto com $n+1$ elementos e seus subconjuntos com k elementos. A quantidade de tais subconjuntos é evidentemente $\binom{n+1}{k}$. Por outro lado, tais subconjuntos podem ser contados da seguinte forma: considere aqueles que não contém um determinado elemento x_0. A quantidade desses é dada por $\binom{n}{k}$.

Já os subconjuntos (de k elementos) que possuem o elemento x_0 são em número de $\binom{n}{k-1}$. Ora, a quantidade total de subconjuntos com k elementos é então igual a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, ou seja, a soma dos subconjuntos (com k elementos) que possuem x_0 e aqueles que não o possuem.

Logo, concluímos daí que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

.

[2]Em referência a Michael Stifel (1487 — 1567), matemático alemão.

A seguir apresentamos outra possibilidade de prova, aplicando uma manipulação algébrica na fórmula dada pela definição 2.2.1:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\\ &= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}\\ &= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k(n-k+1)(k-1)!(n-k)!}=\frac{n![(n-k+1)+k]}{k(n-k+1)(k-1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!(n+1)}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4.4. *Dados $n,k\in\mathbb{N}$ com $1\leq k\leq n$, então*

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. A prova será realizada de maneira direta por manipulação algébrica da fórmula apresentada na definição 2.2.1. Desse modo, temos

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Alternativamente, podemos usar um argumento combinatório para provar a identidade. Para tanto, usaremos o que foi assumido após a definição 2.2.1, de que o número binomial $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos com k elementos obtidos a partir de um conjunto com n elementos.

Assim, consideremos conjuntos Y e $X\subset Y$ tais que $|Y|=n$ e $|X|=k$, $k\leq n$. Para cada subconjunto X, existe um, e exatamente um subconjunto X^c (dentro de um universo Ω fixado), formado com os elementos de Y que não pertencem a X. Assim, a quantidade de subconjuntos X, com k elementos, é igual a quantidade de subconjuntos X^c, com $n-k$ elementos. Como a quantidade dos subconjuntos X^c é dada pelo número binomial $\binom{n}{n-k}$, temos portanto a igualdade desejada

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

□

Teorema 4.4.5. *Dado $n\in\mathbb{N}$, então*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Demonstração. A prova será dada por argumento combinatório.

Considere um conjunto A tal que $|A| = n$. Sabemos pelo teorema 4.1.4 que a quantidade de subconjuntos de A é 2^n. Por outro lado, vamos determinar a contagem dos subconjuntos de A somando as quantidades de subconjuntos com um número fixado de elementos.

Assim, temos $\binom{n}{0}$ subconjuntos com zero elemento, $\binom{n}{1}$ subconjuntos com um elemento, $\binom{n}{2}$ subconjuntos com dois elementos e assim por diante, até $\binom{n}{n}$ subconjuntos com n elementos. Dessa forma, a quantidade total de subconjuntos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}.$$

Logo, temos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

□

Teorema 4.4.6. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2.$$

Demonstração. A prova será feita por argumento combinatório.

Considere em um grupo de $2n$ pessoas, sendo n homens e n mulheres. Vamos estabelecer duas contagens distintas para o número de comissões de n pessoas escolhidas entre os homens e as mulheres desse grupo.

De um modo, a quantidade de comissões possíveis é $\binom{2n}{n}$, escolhendo arbitrariamente n pessoas dentre as $2n$ do total. Por outro lado, podemos formar a comissão escolhendo separadamente homens e mulheres. Uma comissão constituída de k homens $(0 \leq k \leq n)$ e $n-k$ mulheres pode ser formada de $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ maneiras. Fazendo k variar de 0 a n e somando as comissões formadas, temos então todas as comissões possíveis com n pessoas, ou seja

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, então $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Assim, a quantidade de comissões formadas é

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Logo, temos

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

□

Teorema 4.4.7. *Para todo $m,n,p \in \mathbb{N}$, temos*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

Demonstração. A prova será feira por argumento combinatório.

Considere um grupo de $m+n$ pessoas, sendo m mulheres e n homens. Vamos contar de duas maneiras a quantidade possível de comissões formadas escolhendo p pessoas do grupo. Por um lado, há evidentemente $\binom{m+n}{p}$ comissões possíveis.

De outro modo, vamos escolher separadamente as mulheres e os homens para compor a comissão. Uma comissão constituída de k mulheres $(0 \leq k \leq p)$ e $p-k$ homens pode ser formada de $\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ maneiras. Fazendo k variar de 0 a p e somando as quantidades de comissões formadas em cada caso, teremos a quantidade total das comissões possíveis, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

Assim, temos portanto

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

□

Esse teorema é conhecido como a identidade de *Vandermonde*[3].

Comentário: o teorema 4.4.6 pode ser visto como um corolário do teorema 4.4.7. Basta fazer o caso particular em que $m = n = p$ no teorema 4.4.7.

4.5 Teoremas sobre logaritmos

Os teoremas sobre logaritmos serão provados com base na definição a seguir.

[3] Em referência a Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 — 1796), um matemático francês.

Definição 4.5.1. *Sendo $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, o* logaritmo de b na base a *(escrevemos $\log_a b$) é um número real c tal que*

$$a^c = b.$$

Em símbolos,

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

No ensino de logaritmos no Ensino Médio muitos problemas envolvem aproximações, como por exemplo $\log_{10} 2 \approx 0,301$ ou $\log_{10} 3 \approx 0,477$. Assim, com o propósito de justificá-las, a seguir são dados três teoremas que podem servir de contribuição no processo de aprendizagem.

Teorema 4.5.1. *Não existe o logaritmo de 0 em nenhuma base $a > 0$.*

Demonstração. De fato, se existisse $\log_a 0 = c$, então por definição teríamos

$$a^c = 0,$$

o que é um absurdo. □

Teorema 4.5.2. *O número real $\log_{10} 2$ não é racional, isto é, $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Sabemos que $\log_{10} 2 \neq 0$, pois $10^0 = 1 \neq 2$.

Suponha por absurdo que $\log_{10} 2$ seja um número racional. Então existem $a,b \in \mathbb{Z}$ não nulos e primos entre si tais que $\log_{10} 2 = \frac{a}{b}$. Assim, temos:

$$\log_{10} 2 = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 10^{\frac{a}{b}} = 2 \Leftrightarrow 10^a = 2^b \Leftrightarrow 2^a \cdot 5^a = 2^b \Leftrightarrow 5^a = 2^{b-a} \Leftrightarrow a = b = 0,$$

contradizendo a hipótese de a e b serem não nulos. Portanto, podemos concluir que $\log_{10} 2$ não é racional. □

Teorema 4.5.3. *Se p é um número primo, então o número real $\log_{10} p$ é irracional, ou seja, $\log_{10} p \notin \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Primeiramente temos $\log_{10} p \neq 0$, pois caso contrário, se $\log_{10} p = 0$, teríamos $p = 10^0 = 1$, contrariando o fato de p ser primo.

Agora, suponha por absurdo que $\log_{10} p$ seja um número racional não nulo. Então existem $a,b \in \mathbb{Z}$ não nulos e primos entre si tais que $\log_{10} p = \frac{a}{b}$. Assim, temos:

$$log_{10} p = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 10^{\frac{a}{b}} = p \Leftrightarrow 10^a = p^b.$$

Isso implica que p^b é divisível por 2 e por 5 e por consequência que p é divisível por 2 e por 5, contradizendo o fato de p ser primo. Logo, podemos concluir que $\log_{10} p \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Teorema 4.5.4. *Se n é um inteiro positivo, então $\log_{10} n \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, n é uma potência de 10.*

Demonstração. Suponha que $\log_{10} n \in \mathbb{Q}$. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e primos entre si tais que $log_{10} n = \frac{a}{b}$. Primeiro note que $n \neq 0$ pelo Teorema 4.5.1 e disso, concluímos que $a \neq 0$. Então

$$\log_{10} n = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 10^{\frac{a}{b}} = n \Leftrightarrow 10^a = n^b.$$

Isso implica que n^b é divisível por 2 e por 5 e por consequência que n é divisível por 2 e por 5. Por outro lado, se p é um número primo tal que p divide n, então p divide 10^a e assim, $p = 2$ ou $p = 5$.

Portanto, pelo *Teorema Fundamental da Aritmética*[4], n é da forma $2^k 5^r$, e então temos

$$\begin{aligned} 10^a = n^b \Rightarrow &\quad 2^a 5^a = 2^{bk} 5^{br} \Rightarrow 2^{a-bk} = 5^{br-a} \Rightarrow a - bk = br - a = 0 \\ \Rightarrow &\quad bk = a = br \Rightarrow k = r \\ \Rightarrow &\quad n = 10^k. \end{aligned}$$

E, reciprocamente, se $n = 10^k$, então $\log_{10} n = k \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

$\square$

Teorema 4.5.5. *Sendo $a, b, r \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a, r \neq 1$ e $b > 0$, então*

$$\log_a b = \frac{\log_r b}{\log_r a}.$$

Demonstração. Sendo x, y e z os valores de $\log_a b$, $\log_r b$ e $\log_r a$, respectivamente, então

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b. \tag{4.1}$$

$$\log_r b = y \quad \Leftrightarrow \quad r^y = b. \tag{4.2}$$

$$\log_r a = z \quad \Leftrightarrow \quad r^z = a. \tag{4.3}$$

Desse modo, combinando (4.1), (4.2) e (4.3), temos

$$r^y = a^x = (r^z)^x = r^{xz} \Rightarrow y = xz \Rightarrow x = \frac{y}{z},$$

[4]Importante teorema da Aritmética que garante que todo número inteiro possui uma única fatoração em números primos, a menos, claro da ordem e produto por inversíveis. Uma demonstração deste teorema pode ser consultada em [3].

concluindo a prova.

□

Teorema 4.5.6. *Sendo* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $0 < a \neq 1$ *e* $b, c > 0$*, então*

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Demonstração. Sendo x, y e z os valores de $\log_a (b \cdot c)$, $\log_a b$ e $\log_a c$, respectivamente, então

$$\log_a (b \cdot c) = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \cdot c. \tag{4.4}$$

$$\log_a b = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = b. \tag{4.5}$$

$$\log_a c = z \quad \Leftrightarrow \quad a^z = c. \tag{4.6}$$

Desse modo, combinando (4.4), (4.5) e (4.6, temos

$$a^x = b \cdot c = a^y \cdot a^z = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z,$$

concluindo a prova.

□

Teorema 4.5.7. *Sendo* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $0 < a \neq 1$ *e* $b, c > 0$*, então*

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração. Sendo x, y e z os valores de $\log_a \frac{b}{c}$, $\log_a b$ e $\log_a c$, respectivamente, então

$$\log_a \frac{b}{c} = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = \frac{b}{c}. \tag{4.7}$$

$$\log_a b = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = b. \tag{4.8}$$

$$\log_a c = z \quad \Leftrightarrow \quad a^z = c. \tag{4.9}$$

Desse modo, combinando (4.7), (4.8) e (4.9), temos

$$a^x = \frac{b}{c} = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z} \Rightarrow x = y - z,$$

concluindo a prova. □

4.6 Teoremas sobre trigonometria

A trigonometria no triângulo retângulo é conteúdo presente no currículo do Ensino Fundamental, sendo assim assumimos que os resultados relacionados sejam conhecidos. Para a trigonometria na circunferência, faremos algumas definições pertinentes a seguir.

Definição 4.6.1. *Denominamos de* ciclo trigonométrico *à circunferência C, representada pelos pontos de coordenadas (x,y) no plano cartesiano tais que*

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

O ponto de coordenadas $(0,0)$ é denominado origem *do ciclo trigonométrico.*

Definição 4.6.2. *Seja $E : \mathbb{R} \to C$ definida da seguinte forma: a partir da origem $A = (0,0)$ da circunferência C, percorremos sobre C, no sentido positivo (antihorário) se $x > 0$ e no sentido negativo (horário) se $x < 0$, um comprimento igual a x. Desse modo, estabelecemos $E(x)$ como sendo o ponto de C assim atingido.*

Definição 4.6.3. *Seja P um ponto de C tal que $P = E(x)$. No sistema de coordenadas cartesianas definimos as coordenadas de P como sendo $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$.*

Definição 4.6.4. *Seja* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real* $\operatorname{sen} x$.

Definição 4.6.5. *Seja* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real* $\cos x$.

Definição 4.6.6. *Para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x \neq 0$, a* tangente de x *é o número real* $\operatorname{tg} x$ *dado por* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Teorema 4.6.1 (Lei dos cossenos)**.** *Em um triângulo ABC, dados $AB = c$, $AC = b$ e $\angle BAC = \alpha$, temos*

$$(BC)^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha.$$

Demonstração. Temos três casos a serem considerados, a saber:

(i). $\alpha = 90^\circ$; (ii). $\alpha < 90^\circ$; (iii). $\alpha > 90^\circ$.

No caso (i), como $\alpha = 90^\circ$, o triângulo ABC é retângulo em A e $\cos 90^\circ = 0$. Assim, o *teorema de Pitágoras*[5] justifica a prova.

[5]Importante teorema da Geometria Plana garantindo que em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

No caso (ii), em que $\alpha < 90^\circ$, o triângulo pode ser representado como na figura 4.31, uma vez que o triângulo é acutângulo.

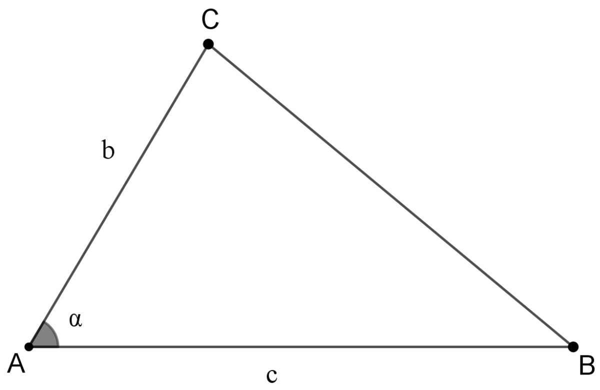


Figura 4.31: triângulo acutângulo ABC.

Traçando a altura CH relativa ao lado AB, temos $CH = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$ e $AH = b \cdot \cos\alpha$. Assim, $HB = c - b \cdot \cos\alpha$, como mostra a Figura 4.32.

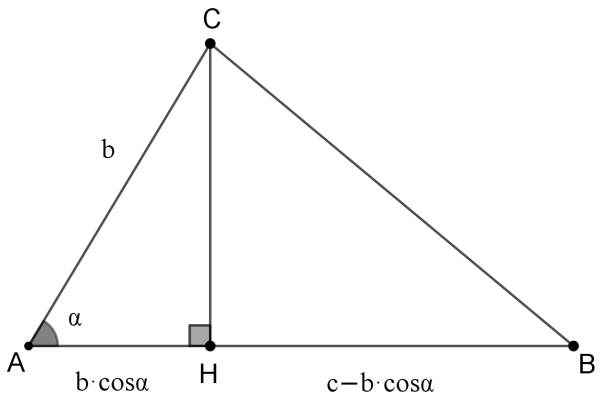


Figura 4.32: triângulo acutângulo ABC.

Como o triângulo BHC é retângulo em H, aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$
\begin{aligned}
(BC)^2 &= (HC)^2 + (HB)^2 = (b \cdot \operatorname{sen}\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 \\
&= b^2 \cdot (\operatorname{sen}\alpha)^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot (\cos\alpha)^2 \\
&= b^2((\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\
&= b^2(1) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.
\end{aligned}
$$

No caso (iii), em que $\alpha > 90^\circ$ é um ângulo obtuso, como ilustrado pela Figura 4.33, fazemos o seguinte:

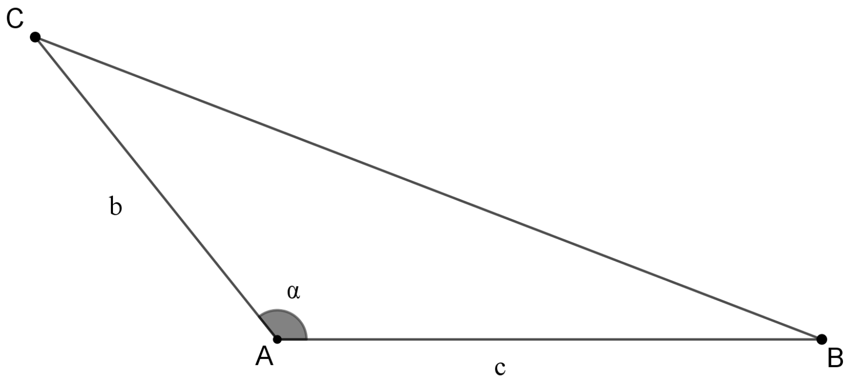


Figura 4.33: triângulo obtusângulo ABC.

Traçando a altura CH relativa ao lado AB, como representado na Figura 4.34, temos $HC = b \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$ e $HA = b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$:

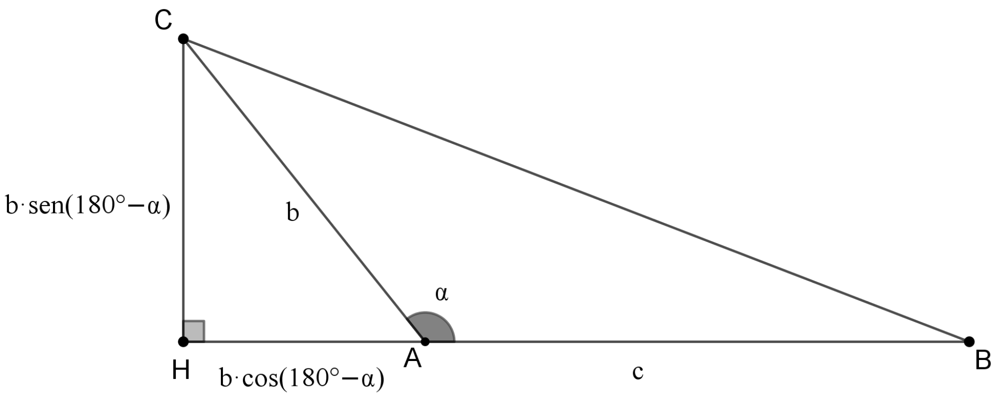


Figura 4.34: triângulo obtusângulo ABC estendido com a altura relativa ao lado AB.

Assim, como o triângulo HBC é retângulo em H, aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo e usando o fato de $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, temos

$$\begin{aligned}
(BC)^2 &= (HC)^2 + (HB)^2 = (b \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha))^2 + (c + b \cdot \cos(180^\circ - \alpha))^2 \\
&= (b \cdot \operatorname{sen}\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 = b^2 \cdot (\operatorname{sen}\alpha)^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot (\cos\alpha)^2 \\
&= b^2((\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = b^2(1) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,
\end{aligned}$$

Concluindo assim a prova.

□

Teorema 4.6.2. *Para todos $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, valem as seguintes identidades:*

$$\cos(\alpha-\theta) = \cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta. \quad (4.10)$$

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta. \quad (4.11)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha. \quad (4.12)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\alpha. \quad (4.13)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}. \quad (4.14)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}. \quad (4.15)$$

Demonstração. Para a demonstração de (4.10), considere a circunferência de raio unitário com dois ângulos arbitrários α e θ e seus correspondentes pontos $P_\alpha = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ como representado na Figura 4.35.

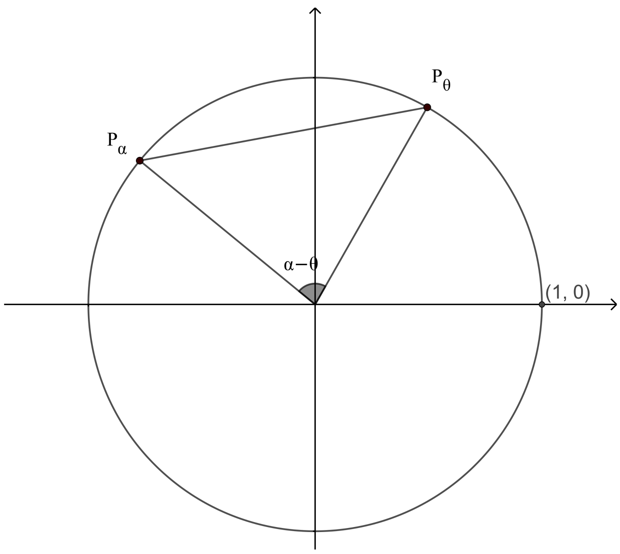


Figura 4.35: Ciclo trigonométrico.

Sendo d a distância entre os pontos P_α e P_θ, usando as coordenadas de P_α e P_θ, temos

$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta)^2. \quad (4.16)$$

Por outro lado, aplicando a lei dos cossenos no triângulo cujos vértices são os pontos P_α, P_θ e o centro do plano coordenado, temos

$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \theta). \quad (4.17)$$

Assim, combinando (4.16) e (4.17), obtemos

$$
\begin{aligned}
& 1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\theta)=(\cos\alpha-\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\theta)^2\\
\Rightarrow\ & 2-2\cos(\alpha-\theta)=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\theta+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta\\
\Rightarrow\ & 2-2\cos(\alpha-\theta)=(\cos^2\alpha+\cos^2\theta)-2\cos\alpha\cos\theta+(\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\theta)-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\\
\Rightarrow\ & 2-2\cos(\alpha-\theta)=1-2\cos\alpha\cos\theta+1-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\\
\Rightarrow\ & 2-2\cos(\alpha-\theta)=2-2\cos\alpha\cos\theta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\\
\Rightarrow\ & -2\cos(\alpha-\theta)=-2\cos\alpha\cos\theta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\\
\Rightarrow\ & -\cos(\alpha-\theta)=-\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\\
\Rightarrow\ & \cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}
$$

provando assim, a identidade (4.10).

Substituindo θ por $-\theta$ em (4.10), e usando o fato de que $\cos(-\theta)=\cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$, temos

$$
\begin{aligned}
& \cos(\alpha-(-\theta))=\cos\alpha\cos(-\theta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\theta)\\
\Rightarrow\ & \cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}
$$

que conclui a prova de (4.11).

Em (4.10), fazendo $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ temos

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\theta.$$

Então, na identidade obtida

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta, \tag{4.18}$$

fazendo a substituição θ por $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ obtemos uma nova identidade:

$$\cos\theta=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right). \tag{4.19}$$

Agora, usando as identidades (4.10), (4.18) e (4.19) podemos afirmar que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\theta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\theta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\theta\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\theta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}
$$

concluindo a prova de (4.12).

Assim, em (4.12), fazemos a substituição de θ por $-\theta$, lembrando que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ e $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}(\alpha + (-\theta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\theta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\theta) \\ \Rightarrow \quad & \operatorname{sen}(\alpha - \theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \cos\alpha\operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração de (4.13).

Para provar (4.14), temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\theta) = & \ \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha}{cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\theta}}{\frac{\cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}} \\ = & \ \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta}{\cos\alpha\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\theta}}{\frac{\cos\alpha\cos\theta}{\cos\alpha\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} \\ = & \ \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta}, \end{aligned}$$

completando a prova de (4.14).

E, finalmente, substituindo θ por $-\theta$ em (4.14) e usando o fato de que $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$, obtemos assim

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\alpha + (-\theta)) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\theta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(-\theta)} \\ \Rightarrow \quad & \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta} \end{aligned}$$

concluindo a prova de (4.15) e finalizando, portanto, a demonstração do teorema. $\square$

4.7 Teoremas sobre volumes de sólidos geométricos

Nessa seção, serão demonstrados alguns resultados sobre o volume de certos sólidos geométricos. Ocorre que no nível do Ensino Médio, a ideia de volume passa muitas vezes apenas por uma noção intuitiva. A definição matemática formal de volume requer conhecimentos que fogem ao escopo deste texto, mas um leitor mais interessado pode consultar [9], onde esse conceito é feito de modo axiomático.

E ainda, como uma introdução ao estudo dos sólidos geométricos faz parte do currículo do Ensino Fundamental, consideramos que sejam conhecidas as definições de prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

A seguir fazemos algumas observações necessárias.

1. Por convenção, tomamos como a unidade o volume de um cubo unitário, isto é, um cubo cujas arestas medem uma unidade de comprimento.
2. Nesse texto, consideramos que duas figuras planas são ditas *equivalentes* caso tenham a mesma área.
3. Sejam A e B dois sólidos e α um plano tais que, para todo plano $\beta//\alpha$, se as seções obtidas em A e B pelas interseções com β sejam equivalentes, então A e B tem o mesmo volume.

Essa última observação é um resultado denominado *Princípio de Cavalieri*. Quando a teoria do cálculo de volumes é desenvolvida em níveis mais avançados, esse resultado é um teorema, ou seja, pode ser demonstrado. Aqui, assumimos o Princípio de Cavalieri como verdadeiro.

Para a demonstração do primeiro teorema sobre volume de sólidos geométricos, vamos considerar o teorema 4.7.1 a seguir, conhecido como *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* cuja demonstração não será dada aqui, mas pode ser obtida em [6].

Teorema 4.7.1. *Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função com as seguintes propriedades:*

(i) f é crescente, ou seja, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Então,

$$f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$$

para todo $m \in \mathbb{R}_+$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 4.7.2. *Dado um bloco retangular de medidas a, b e c, seu volume V é dado por $V = abc$.*

Demonstração. Seja $V(a,b,c)$ o volume do bloco retangular cujas arestas medem a, b e c. Pelo teorema 4.7.1, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$V(na,b,c) = V(a,nb,c) = V(a,b,nc) = n \cdot V(a,b,c),$$

pois cada um dos três primeiros valores representa o volume de um bloco formado pela justaposição de n blocos de dimensões a, b e c. Sabemos ainda que $V(a,b,c)$ é uma função crescente em relação a qualquer uma das variáveis a, b e c.

Com isso, o volume $V(a,b,c)$ é diretamente proporcional as medidas das arestas e assim, para todo real positivo t, temos:

$$V(ta,b,c) = V(a,tb,c) = V(a,b,tc) = t \cdot V(a,b,c).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a\cdot 1,b,c) = a\cdot V(1,b,c) = a\cdot V(1,b\cdot 1,c) \\ &= a\cdot b\cdot V(1,1,c) = a\cdot b\cdot V(1,1,c\cdot 1) = a\cdot b\cdot c\cdot V(1,1,1) \\ &= a\cdot b\cdot c \end{aligned}$$

já que $V(1,1,1)$ é o volume do cubo de aresta 1, ou seja, $V(1,1,1) = 1$.

□

Corolário 4.7.2.1. *O volume de um cubo cujas arestas medem a unidades de comprimento é igual a a^3.*

Demonstração. Basta fazer $b = c = a$ no teorema 4.7.2.

Alternativamente, é possível fazer a demonstração sem evocar o teorema 4.7.2, que por sua vez utiliza o teorema 4.7.1. Tal possibilidade é recomendável para alunos de Ensino Médio, uma vez que os teoremas citados não são estudados nesse nível de ensino.

Entretanto, para que isso seja feito sem ultrapassar a capacidade de compreensão para alunos do Ensino Médio, nos limitamos a tratar de dois casos: quando $a \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Q}$:

(i). a é natural: Dividindo cada aresta em a partes de comprimento unitário, o cubo fica decomposto em a^3 cubos unitários justapostos e, portanto, seu volume é a^3.
A seguir temos uma ilustração de um cubo de aresta 2 dividido em cubos de aresta 1:

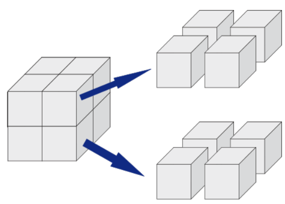


Figura 4.36: Cubo de aresta 2 dividido.

E um cubo de aresta 3 dividido em cubos de aresta 1:

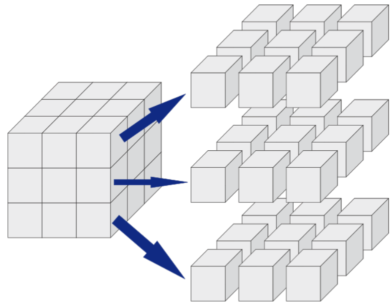


Figura 4.37: Cubo de aresta 3 dividido.

(ii). a é racional: De modo análogo ao caso anterior, decompondo as arestas de um cubo unitário em n partes iguais, com n inteiro, então dessa forma decompomos o cubo unitário em n^3 cubos justapostos, sendo cada um com arestas de medida $\frac{1}{n}$ e volume igual a $\frac{1}{n^3}$.
Dado um cubo cujas arestas tem como medida o número racional $a = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros, então podemos dividir cada aresta em m partes iguais, cada uma com comprimento $\frac{1}{n}$, obtendo assim m^3 cubos justapostos, cada um de arestas de medida $\frac{1}{n}$. Logo, teremos m^3 cubos de volume $\frac{1}{n^3}$ e o volume do cubo de arestas $a = \frac{m}{n}$ é dado por $m^3 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m^3}{n^3} = \left(\frac{m}{n}\right)^3 = a^3$.

□

Teorema 4.7.3. *O volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração. Considere um prisma de altura h e área da base S. Assim tomamos, para efeito de comparação, um bloco retangular de altura h e cujas medidas da arestas da base sejam x e $\frac{S}{x}$, i.e., de área S.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que os primas têm as bases situadas em um mesmo plano α e estejam localizados em um mesmo semi espaço determinado por α, conforme Figura 4.38.

Qualquer plano paralelo a α que secciona o prisma, secciona também o bloco retangular segundo figuras equivalentes, pois a seção obtida em cada sólido pela interseção deste com o plano é idêntica ao polígono da base do sólido, dada a isometria existente relativa aos planos.

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma e o bloco retangular tem volumes iguais. Como o volume V do bloco retangular é $V = x \cdot \frac{S}{x} \cdot h = S \cdot h$, então essa é a expressão que determina o volume V de um prisma de área da base S e altura de medida h. □

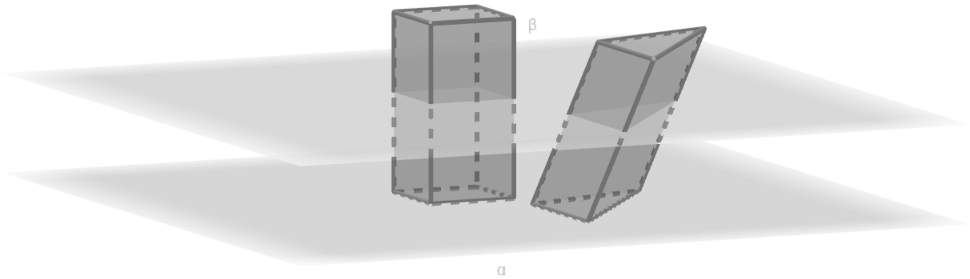


Figura 4.38: Bloco retangular e prisma.

Teorema 4.7.4. *O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração. Considere um cilindro de altura h e área da base S. Assim tomamos, para efeito de comparação, um prisma de altura h e área da base S.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que os sólidos têm as bases situadas num mesmo plano α e estejam localizados em um mesmo semi espaço determinado por α.

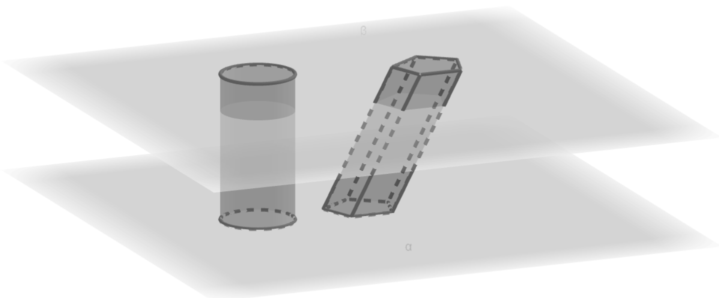


Figura 4.39: Cilindro e prisma.

Qualquer plano paralelo a α que secciona o cilindro, secciona também o prisma segundo figuras equivalentes, pois a seção obtida em cada sólido pela interseção deste com o plano β é idêntica ao polígono da base de cada sólido, dada a isometria existente relativa aos planos.

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma tem volumes iguais. Como o volume do prisma é dado por $S \cdot h$, então essa é também a expressão que determina o volume de um cilindro de área da base S e altura de medida h. □

Para os teoremas sobre o volume do cone e da pirâmide, enunciamos o teorema 4.7.5 a seguir, cuja demonstração não será apresentada aqui, mas pode ser encontrada em [5].

Teorema 4.7.5. *Seja A um cone (ou uma pirâmide) de vértice V, altura h_0 e base S situada no plano α. Seja β um plano paralelo a α, situado entre V e α. Denotemos por S_1 a seção obtida em $\beta \cap A$ e por d a distância entre V e β, ou seja, a altura do cone (ou pirâmide) de base S_1 e vértice V. Então, é válida a relação*

$$\frac{\textit{área}(S_1)}{\textit{área}(S)} = \left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Teorema 4.7.6. *Dois tetraedros de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.*

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as bases equivalentes dos tetraedros tenham área S e estejam situadas em um mesmo plano α e ainda que os vértices desses tetraedros estejam localizados em um mesmo semi espaço determinado por α.

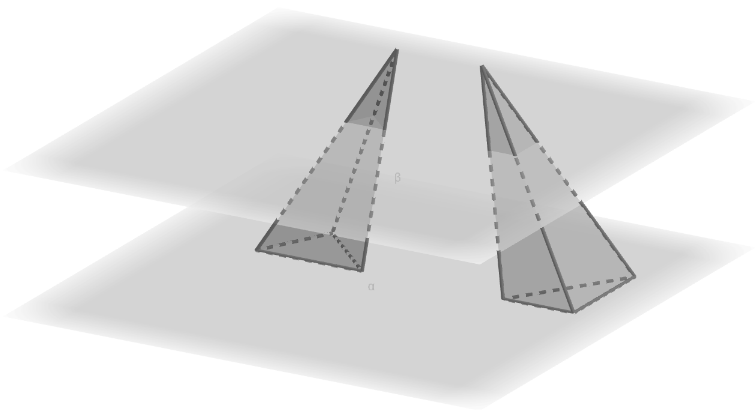


Figura 4.40: Tetraedros.

Qualquer plano β, paralelo a α, que seccione um tetraedro, também secciona o outro obtendo seções equivalentes pois, sendo d a distância entre o plano β e o vértice de uma das pirâmides, sejam S_1 e S_2 as áreas das seções obtidas na interseção dos tetraedros com o plano β. Sendo h a altura desses tetraedros, temos, de acordo com o teorema 4.7.5,

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S_2}{S} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S} \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Como as seções S_1 e S_2 são equivalentes podemos concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que os tetraedros têm volumes iguais. □

Teorema 4.7.7. *O volume de um tetraedro é igual a um terço do produto da medida da altura pela área da base.*

Demonstração. Como o produto de um prisma é o produto da sua altura pela área da base, então é suficiente mostrar que um prisma pode ser decomposto em três tetraedros de mesmo volume.

Considere então um prisma triangular $ABCFDE$, de bases ABC e DEF.

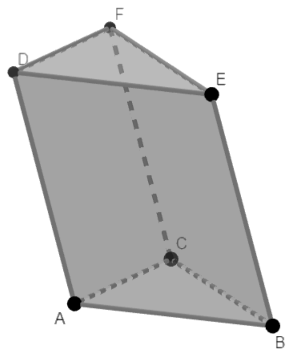
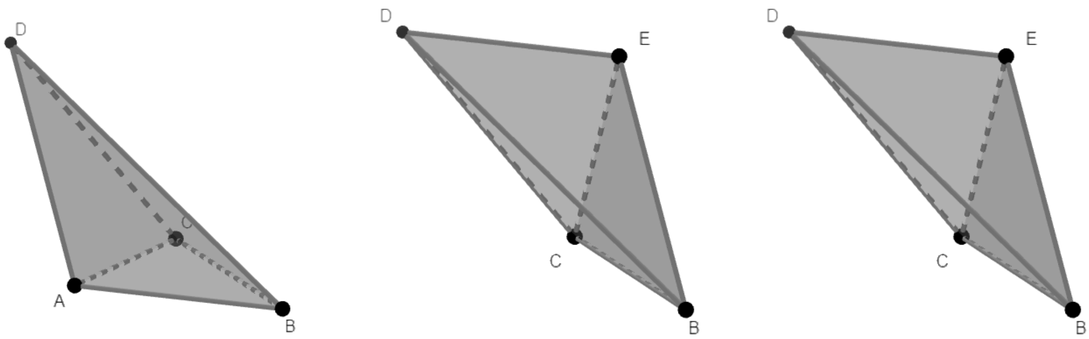


Figura 4.41: Prisma $ABCFDE$.

Decompomos esse prisma nos tetraedros $ABCD$, $BCDE$ e $CDEF$, que vamos denominar de T_1, T_2 e T_3, respectivamente.



(a) Pirâmide T_1. (b) Pirâmide T_2. (c) Pirâmide T_3.

Figura 4.42: Prisma $ABCFDE$ decomposto nas pirâmides T_1, T_2 e T_3.

Primeiramente, vamos mostrar que os volumes de T_1, T_2 são iguais. Para isso, observe que os triângulos ABC e DEF, bases do prisma, são congruentes. Assim, T_1 e T_2 têm bases equivalentes. Temos ainda que as alturas desses tetraedros são iguais, pois são iguais à altura do prisma. Logo, T_1 e T_2 têm o mesmo volume.

Agora, comparemos os tetraedros T_2 e T_3. Para isso, considere os triângulos BCE, base de T_2 e CEF, base de T_3. Esses triângulos são congruentes, considerando que foram obtidos pela divisão da paralelogramo $BCFE$ pela diagonal EC. Assim, T_2 e T_3 têm bases equivalentes. Temos ainda que a altura de cada um desses tetraedros é dada pela distância do vértice D ao plano $BCFE$ e, portanto, T_2 e T_3 têm alturas iguais e assim, tendo bases equivalentes e mesma altura, então T_2 e T_3 tem mesmo volume.

Desse modo, sendo V_1, V_2 e V_3 os volumes de T_1, T_2 e T_3, respectivamente, provamos que $V_1 = V_2 = V_3$.

$\square$

Observação 4. O teorema 4.7.7 garante uma expressão para o volume de um tetraedro, ou seja, especificamente uma pirâmide cuja base seja triangular. No teorema 4.7.8, veremos que a expressão se estende para uma pirâmide cuja base é um polígono qualquer.

Teorema 4.7.8. *O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da medida da altura pela área da base.*

Demonstração. Considere uma pirâmide de altura h e área da base S. Assim tomamos, para efeito de comparação, um tetraedro de altura h e cuja base seja um triângulo no qual um dos lados tenha comprimento x e altura correspondente a esse lado de medida $\frac{2S}{x}$, ou seja, a área de tal triângulo é $\frac{1}{2} \cdot \frac{2S}{x} \cdot x = S$.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que os sólidos têm as bases situadas num mesmo plano α e estejam localizados em um mesmo semi espaço determinado por α.

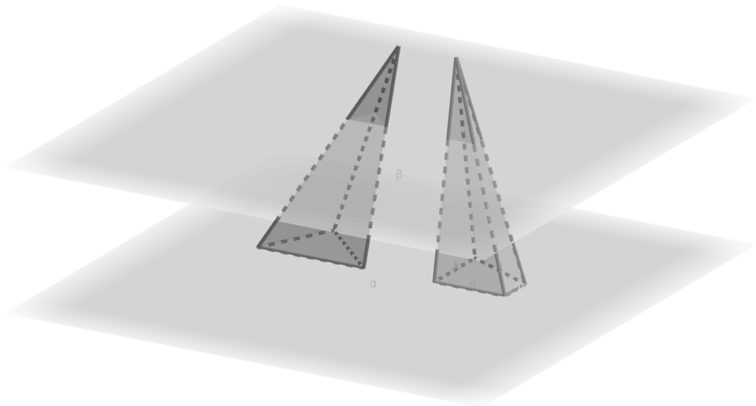


Figura 4.43: Pirâmides.

Qualquer plano β, paralelo a α, que seccione a pirâmide secciona também o tetraedro, obtendo seções equivalentes pois, sendo d a distância entre o plano β e o vértice de uma das pirâmides, sejam S_1 e S_2 as áreas das seções obtidas na interseção das pirâmides com o plano β. Sendo h a altura desses sólidos, temos, de acordo com o teorema 4.7.5,

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S_2}{S} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S} \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Como as seções S_1 e S_2 são equivalentes podemos concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que a pirâmide e o tetraedro têm volumes iguais.

□

Teorema 4.7.9. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da medida da altura pela área da base.*

Demonstração. Considere um cone de altura h e área da base S. Assim tomamos, para efeito de comparação, uma pirâmide de altura h e área da base S.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que os sólidos têm as bases situadas num mesmo plano α e estejam localizados em um mesmo semi espaço determinado por α.

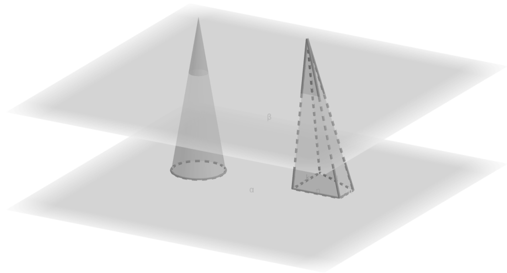


Figura 4.44: Cone e pirâmide.

Qualquer plano β, paralelo a α, que seccione o cone secciona também a pirâmide, obtendo seções equivalentes pois, sendo d a distância entre o plano β e o vértice do cone (ou da pirâmide), sejam S_1 e S_2 as áreas das seções obtidas na interseção do cone e da pirâmide, respectivamente com o plano β. Sendo h a altura desses sólidos, temos, de acordo com o teorema 4.7.5,

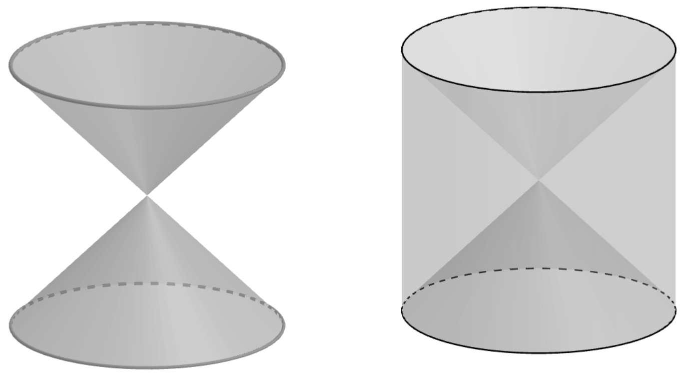
$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S_2}{S} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S} \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Como as seções S_1 e S_2 são equivalentes podemos concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o cone e a pirâmide têm volumes iguais.

□

Para o cálculo do volume da esfera, será necessário constituir um sólido por um arranjo de um cilindro e dois cones. Assim, considere um cilindro equilátero de raio da base r, isto é, cuja altura é igual a $2r$ e ainda dois cones retos de altura r, sendo a base de cada um coincidindo com cada uma das bases do cilindro.

Desse modo, o centro do cilindro considerado é o vértice dos cones. O sólido formado pelos dois cones dispostos desse modo é denominado *clépsidra* e o sólido determinado pela região interna do cilindro e externa aos cones é denominado *anticlépsidra*.



(a) Clépsidra. (b) Anticlépsidra.

Figura 4.45: Clépsidra e Anticlépsidra.

Para demonstrar o teorema 4.7.10, que fornece a expressão do volume da esfera, vamos utilizar a anticlépsidra como referência na aplicação do Princípio de Cavalieri.

Teorema 4.7.10. *O volume de uma esfera de raio r é* $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Demonstração. Considere uma anticlépsidra e um plano α que contém o círculo de uma das bases do cilindro que determina a anticlépsidra. No mesmo semiespaço determinado por α que contém a anticlépsidra, seja ainda uma esfera tangente a α com raio r igual ao raio da base (e da altura) dos cones.

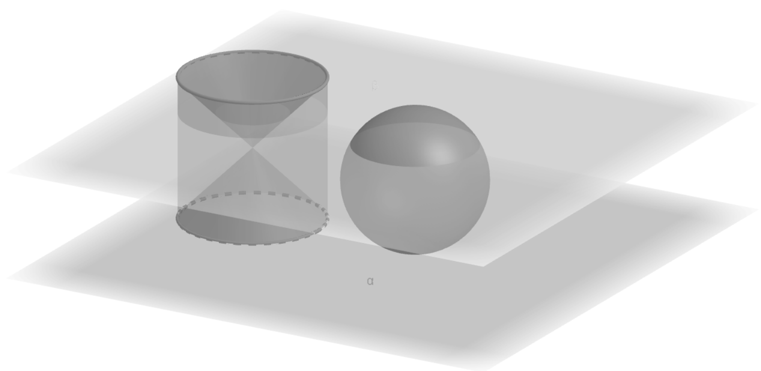


Figura 4.46: Anticlépsidra e esfera.

Desse modo, qualquer plano β, paralelo a α que secciona a esfera, secciona também a ainticlépsidra. Sendo d a distância de β ao centro da esfera, temos a interseção de β com a esfera como sendo um círculo cujo raio é dado por $\sqrt{r^2 - d^2}$, i.e., um círculo de área $(r^2 - d^2)\pi$.

A interseção de β com a anticlépsidra é uma coroa circular de raio maior r e raio menor d. Então a área dessa seção obtida é igual a $(r^2 - d^2)\pi$.

Portanto, sendo iguais as áreas das seções determinadas pela interseção de β com a esfera e a anticlépsidra, pelo Princípio de Cavalieri concluímos que esses sólidos tem volumes iguais.

Ocorre que o volume da anticlépsidra é dado pelo volume de um cilindro de raio da base r e altura $2r$ subtraído do volume de dois cones iguais de raio da base r e altura de medida r. Então, sendo V_E o volume da esfera, V_{AC} o volume da anticlépsidra, V_{Co} o volume do cone e V_{Ci} o volume do cilindro, temos:

$$\begin{aligned} V_E &= V_{AC} = V_{Ci} - 2 \cdot V_{Co} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

5 Considerações finais

O objetivo desse trabalho é, num sentido amplo, contribuir para o uso das demonstrações nas aulas de Matemática em turmas de Ensino Médio. A escolha do tema para essa dissertação ocorreu pela experiência em mais de vinte anos lecionando na educação básica, acreditando que esse trabalho possa servir de apoio principalmente para professores que acreditam que aprender Matemática é algo indissociável a prática de demonstração de teoremas.

Assim, foi realizada uma síntese de tópicos da lógica matemática que representam as condições necessárias para que as demonstrações possam ser realizadas e compreendidas, procurando inclusive diferenciar uma dedução intuitiva de uma prova rigorosa de um teorema. Foram apresentados ainda os métodos de demonstração mais frequentemente utilizados nesse segmento de ensino.

Como o foco relativo ao nível de ensino é o Ensino Médio, foi também realizada uma catalogação das demonstrações matemáticas desenvolvidas nos textos de três coleções de livros didáticos, escolhidos dentre os presentes no último *Guia de Livros Didáticos* do Ensino Médio. Nesse capítulo é possível observar que, ao contrário do que sugere os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, os livros didáticos analisados depositam pouca importância nas demonstrações, enquanto desenvolvimento de aprendizagem em Matemática.

Nesse trabalho foram também elencados uma série de teoremas tratados no ensino médio, para que fosse possível observar os princípio básicos da lógica matemática aplicados nos conteúdos estudados no Ensino Médio, de forma que é possível concluir que muitas das demonstrações de teoremas tratados nesse segmento de ensino pode ter plena compreensão por parte dos alunos.

Certamente que essa dissertação pode ser aperfeiçoada em vários aspectos, por exemplo com o acréscimo de demonstrações, uma vez que no capítulo 4 foi realizado um recorte dos conteúdos tratados no Ensino Médio e vários teoremas foram omitidos. Ainda podem ser exploradas e discutidas outras técnicas de demonstrações, assim como mais livros didáticos podem ser examinados.

Dessa forma, finalizado esse trabalho e tendo feito uma crítica do mesmo, consideramos que a leitura dessa dissertação pode, de acordo com o exposto, contribuir com o trabalho de colegas professores do Ensino Médio. É possível, por exemplo, ser útil como material de apoio na elaboração de planos de aulas ou ainda ser utilizado como material de construção de uma oficina de matemática cujo objetivo seja o de trabalhar as demonstrações de teoremas.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

[2] BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

[3] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[4] LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[5] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. 4 ed. rio de Janeiro: SBM, 2009.

[6] LIMA, Elon Lages. et al *A Matemática no Ensino Médio*. Vol. 1. 9 ed. rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. *Um Convite à Matemática*. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[8] MORGADO, Augusto César de Oliveira. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Geometria*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória*. Vol. 4. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[11] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar Matemática* - Vol. 1, 2 e 3. 2 ed. São Paulo: FTD, 2013.

[12] SMOLE, Katia Stocco.; DINIZ, M.I. *Matemática Ensino Médio* - Vol.1, 2 e 3. 8 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[13] PAIVA, Manoel. *Matemática Paiva* - Vol 1, 2 e 3. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

[14] PIGHI, P.. *O matemático peruano que resolveu um problema de quase 300 anos.* **BBC**. [s. L.], p. 1-1. 4 out. 2015. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/10/151004 matematico peruano helfgott mv>. Acesso em: 06 fev. 2019.