André Costa da Fonte

Médias, desigualdades e problemas de otimização

Recife
2013

André Costa da Fonte

Médias, desigualdades e problemas de otimização

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rodrigo José Gondim Neves

Recife
2013

COSTA DA FONTE, André
Médias, desigualdades e problemas de otimização
61 páginas
Trabalho de Conclusão(Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

1. Médias
2. Desigualdades
3. Otimização

I. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Matemática.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Aírton Temístocles Gonçalves de Castro
DMAT/UFPE

Prof. Dr.
Claudio Tadeu Cristino
DEINFO/UFRPE

Prof. Dr.
Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva
DM/UFRPE

Prof. Dr.
Rodrigo José Gondim Neves
DM/UFRPE

A meu pai, professor, conselheiro, revisor e amigo, Raul Duarte Costa

Tempo II

A vida não dá certeza
Pois tudo se movimenta
Cada dia representa
A chance de uma surpresa
Até mesmo a natureza
Se altera a cada segundo
O tempo é ventre fecundo
Aonde tudo é gerado
Se o tempo fosse parado
Nada existia no mundo

Ninguém sabe o que será
Do tempo futuramente
Mas o tempo do presente
Tudo tem e tudo dá
O que tem no tempo está
Em um caderno anotado
Tudo que o tempo tem dado
De tempo em tempo se soma
Que o tempo com tempo toma
Tudo o que deu no passado

O tempo não tem feição
Não tem cheiro, não tem cor
Não tem som, não tem sabor
Voa sem ser avião
Rouba mas não é ladrão
Carrega tudo o que cria
Tempo é vento que assovia
Que passa e faz pirueta
E o vivente é borboleta
levada na ventania

Vejo o tempo que passou
Montando o tempo que passa
E já respirando a fumaça
Do tempo que não chegou
Que o tempo me atropelou
No meio de uma avenida
Estou na porta de saída
Vendo o portão de chegada
Depois de muita rodada
Na bolandeira da vida

Siba

Agradecimentos

A Rodrigo meu amigo e orientador. Pelas extraordinárias aulas nas disciplinas que ministrou no ProfMat, algumas das melhores aulas de Matemática que já tive. Pelos encontros esclarecedores no nosso projeto. Por sua curiosidade e vibração pela Matemática contagiantes, nunca havia visto em tal intensidade. Pelo Pesto Genovese e pela compreensão infindável nos meus atrasos. Poder tê-lo como orientador e ter sido o primeiro aluno do mestrado orientado por ele foi uma honra

Aos professores do Departamento de Matemática da UFRPE, em especial a Adriano Regis, Jorge Hinojosa, Maria Eulália, Maité Kulesza, Paulo Santiago, Márcia Pragana, Leon Denis e Teófilo Viturino.

Ao Departamento de Matemática da UFPE, pela formação inicial, em particular aos meus orientadores de iniciação científica e amigos, Ramón Mendoza e Israel Vainsencher. Com eles aprendi muito mais do que Matemática.

Aos componentes da banca examinadora composta pelos professores Adriano Regis (DM/UFRPE), Aírton Castro (DMat/UFPE) e Claudio Castro (DeInfo/UFRPE) pelos comentários e correções feitos nesse trabalho.

À CAPES pelo financiamento da bolsa de mestrado e ao IFPE Campus Recife pela liberação parcial da carga horária em sala de aula.

Aos amigos, colegas de curso do ProfMat, pelo apoio recebido durante toda nossa jornada.

Ao meu amigo Rodrigo Sitaro pela correção do *abstract*.

À minha esposa e companheira, Roberta da Fonte Costa, pelo apoio e imenso incentivo.

Aos meus pais, Yara e Raul, pelo apoio incondicional que sempre tive.

Aos orientadores que tive ao longo de minha vida, os quais sou extremamente grato: prof. Raul Duarte, prof. Mario Duarte, prof. Alberto Vieira, prof. Helio Henio Santos e prof. Rogério Porto, que de um modo ou de outro me aguçaram a minha curiosidade e a vontade de estudar.

Resumo

Alguns dos problemas mais interessantes do dia a dia envolvem o conceito de otimização. Maximizar vantagens e minimizar prejuízos é de grande interesse prático. Porém, a principal ferramenta para a resolução da maioria dos problemas de otimização são as derivadas. Isto faz com que quase todos esses problemas fiquem inacessíveis para alunos do ensino fundamental ou médio.

Nesse trabalho, utilizando a desigualdade das médias aritmética-geométrica, resolvemos uma série de problemas de otimização, eliminando a necessidade das derivadas e tornando-os, assim, acessíveis a alunos e professores da educação básica.

Palavras-chave: médias, desigualdades, otimização

Abstract

Some of the most interesting problems in our daily life are related to the optimization concept. To maximize profits and minimize losses is now the focus of a great practical interest. However, the main tool to solve the majority of optimization problems are the derivatives. It makes the almost all of these problems remain unaccessible for middle and high school students.

On this project, we use the inequality of arithmetic and geometric means to solve several optimization problems, by removing the derivatives necessity and, therefore, making the problems accessible to basic school students and teachers as well.

Keywords: means, inequalities, optimization

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Ao final do primeiro semestre de curso, procurei o professor Rodrigo Gondim para saber se ele me orientaria num possível Trabalho de Conclusão do ProfMat. A recomendação da Coordenação Nacional do ProfMat é que o trabalho de conclusão seja um material que possa servir para a melhoria do ensino básico da Matemática. Rodrigo me propôs que trabalhasse em uns “rabiscos” sobre médias e problemas de otimização para que pudéssemos aplicar para publicação. Com seis meses o texto básico estava pronto. Depois de algumas pequenas mudanças, ocorridas graças a comentários de alguns amigos, e mais um ano, aplicamos para a revista Eureka!.

A meta era apresentar um modo alternativo para resolver problemas de otimização sem a utilização das derivadas, que é a uma das principais ferramentas para resolver esse tipo de problema. O uso das derivadas torna a maioria desses problemas inacessíveis para alunos do ensino fundamental ou médio. A ideia foi utilizar a desigualdade das médias para resolver problemas de otimização, maximizando vantagens e minimizando prejuízos. Com isso, tornando acessível aos alunos e professores do ensino básico a possibilidade de resolver alguns problemas interessantíssimos sem a utilização do Cálculo Diferencial.

Começamos, no Capítulo 1, dando um conceito geral de médias e apresentamos as médias mais comuns, com algumas aplicações de cada uma delas. Uma atenção especial é dada a média harmônica que, ativa no aluno a famosa pergunta: “pra que serve?”. Além disso, apresentamos a média quadrática, geralmente não trabalhada no Ensino Médio.

No Capítulo 2, apresentamos a famosa desigualdade das médias (Teorema 1), que vai servir no restante do capítulo como ferramenta para a resolução dos problemas de otimização. O Teorema é demonstrado no caso de três variáveis, que é suficiente para resolver os problemas que geralmente aparecem no dia a dia. O cerne desse teorema é a famosa desigualdade A-G (média aritmética-geométrica) e a demonstração desta parte é feita utilizando um interessante argumento que aparece em (Cauchy, 1989) e que posteriormente generalizamos no Apêndice A.1.

Todo material teórico é complementado com exercícios, para que a teoria seja praticada e melhor assimilada. A resolução de todos os problemas é fornecida no Apêndice B. Com isso é facilitado estudo auto-didata do material. No Apêndice A coloquei varias demonstrações do teorema da desigualdade A-G no caso geral. O objetivo foi mostrar varias maneiras, algumas belíssimas, de se demonstrar esse importante teorema. A primeira demonstração utiliza o argumento "avança-retorna" aplicado por Cauchy que utilizamos no caso restrito do Teorema 1, no capítulo 2. Apresentamos mais sete demonstrações sendo a última demonstração feita a partir de uma ideia fascinante originada, segundo Pólya, a partir de um sonho.

Um conhecimento básico de progressões e geometria espacial tornará a leitura do texto mais confortável e agradável, embora não afete as ideias gerais apresentadas. Para o estudo do apêndice A o conhecimento do princípio da indução finita é preciso, juntamente com uma maior maturidade matemática.

Como recomendação para a leitura, comum a todo texto de Matemática, mantenha papel e caneta ao lado para que você possa seguir, por si próprio, alguns passos que estão implícitos (e mesmo alguns explícitos). Leve em conta que na cultura matemática é comum que algumas passagens tidas como imediatas na verdade requererem uma certa atenção e varias contas para serem compreendidas. Cuidado com o jargão: "é fácil ver que". Por fim, espero que o estudo desse material seja tão prazeroso quanto foi sua confecção.

Capítulo 1

As médias

Nesse capítulo é feita uma breve introdução das principais médias. As médias estão associadas a ideia de substituir uma sequência de números por um único que represente toda sequência. Como veremos, elas geralmente estão associadas a uma determinada operação sobre a sequência dos números. Após a definição de cada média, elas são utilizadas em alguns exemplos e por fim são propostos alguns exercícios para que haja uma melhor fixação das ideias. Todos os exercícios são resolvidos no Apêndice B.

1.1 O conceito de média

Para as médias que trabalharemos podemos dar uma conceitualização geral. A ideia chave é a da substituição de uma sequência de valores por um valor que represente todos.

Definição 1. Considere uma sequência finita de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $*$ uma operação sobre os membros da sequência. Uma média dos elementos da sequência com respeito à operação $*$ é um número real M com a propriedade de substituir todos os elementos da sequência no que diz respeito a operação $*$, isto é:

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n = \underbrace{M * M * \cdots * M}_{n \text{ termos}}.$$

Observação 1. O conceito geral de média descrito acima é abstrato, portanto, devemos especializá-lo para encontrar importantes tipos usuais de média. Nos casos que trabalharemos a média é de fato um número intermediário, isto é:

$$\min \{x_i\} \leq M \leq \max \{x_i\}.$$

Claramente, se os números são iguais, a média é igual a estes números.

Observação 2. Quando for dito que uma sequência de termos está em ordem **crescente** queremos dizer que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Quando a desigualdade for estrita, $x_1 < x_2 < \ldots x_n$, diremos que a sequência de termos é **estritamente crescente**. Para as médias que trabalharemos e na maioria dos resultados obtidos a ordem dos termos não é relevante, pois estaremos lidando com operações comutativas como adição, multiplicação etc.

1.2 Média aritmética

Definição 2. A **média aritmética** (simples) é a média com respeito a operação de adição, desta forma, a média aritmética simples de uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o número A tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{n \text{ termos}} = n.A,$$

logo, concluímos que:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Podemos observar que a terminologia média aritmética está relacionada à progressão aritmética (PA), onde cada termo, exceto pelos extremos, é média aritmética dos termos equidistantes. Note que podemos tomar essa afirmação acima como definição de uma PA, pois em particular teríamos,

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1 \;\Leftrightarrow\; a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1} = r \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Onde r é constante e é denominada **razão da PA**.

A possibilidade de ocorrer vários a_i iguais inspira a definição de uma média aritmética onde as grandezas possam ter pesos a elas associados, pesos estes que de alguma forma deem uma ideia de multiplicidade. Então, se agruparmos os termos iguais e multiplicarmos pela frequência de cada um deles teremos a conhecida média aritmética ponderada.

Definição 3. A **média aritmética ponderada** é a média com respeito à operação de adição com pesos. Desta forma, a média ponderada de uma sequência de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com pesos $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é o número P tal que

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n = p_1\, P + p_2\, P + \cdots + p_n\, P,$$

logo, concluímos que:

$$P = \frac{p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + \cdots + p_n\,x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Aplicação 1. *A soma dos n primeiros termos de uma PA é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Solução: Observe que a soma dos termos equidistantes dos extremos é constante, ou seja, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$ (de fato, basta observar que $a_1 + a_n = a_1 + r\ - r + a_n = a_2 + a_{n-1}$ e de modo análogo para as demais igualdades).

Logo, para somar os n primeiros termos de uma PA podemos agrupá-los em $(n/2)$ pares cuja soma é $a_1 + a_n$. (Pense um pouco no caso de n ímpar). □

Execícios 1.1.

1. Demonstre a fórmula do termo geral da PA,

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

   cujo primeiro termo é a_1 e a razão é r.

2. Suponha que a média aritmética dos números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seja M. Qual será a média dos números obtidos multiplicando cada número da sequência original por a e somando b, isto é, $y_i = ax_i + b$?

3. (UFPE) Em seis provas, onde as notas atribuídas variam de 0 a 100, um estudante obteve média 83. Se a menor nota for desprezada a sua média sobe para 87. Qual foi a menor nota obtida nas 6 provas?

4. Suponha que a média aritmética de uma turma de 20 pessoas seja 7 numa determinada prova. Qual será a média das 19 pessoas restantes se retirarmos da turma o único aluno que tirou nota 10.

5. (UFPE) Em um exame a média aritmética de todos os alunos foi 5,2, enquanto a média dos aprovados foi 5,9 e a dos reprovados foi 4,3. Descoberto um erro na elaboração de uma das

questões, a banca resolveu adicionar 1,0 à nota de cada um dos alunos. Observou-se então que a média dos aprovados subiu para 6,5 e a dos reprovados subiu para 4,8. Sabendo-se que o número de alunos que participaram do exame é inferior a 300, calcule o número de alunos que inicialmente estavam reprovados, mas que foram aprovados depois do acréscimo às notas.

1.3 Média geométrica

Definição 4. A **média geométrica** é a média com respeito à operação de multiplicação, desta forma, a média geométrica de uma sequência de números reais positivos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o número G tal que

$$x_1.x_2.\cdots.x_n = \underbrace{G.G.\cdots.G}_{n \text{ termos}} = G^n,$$

logo concluímos que:

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.\cdots.x_n}.$$

Podemos observar que terminologia média geométrica está relacionada à progressão geométrica (PG), onde o módulo de cada termo, exceto os extremos, é média geométrica dos termos equidistantes.

De fato temos,

$$|a_i| = \sqrt{a_{i-1}.a_{i+1}} \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1 \Leftrightarrow \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_{i+1}}{a_i} = q \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

onde q é uma constante denominada razão da PG.

Aplicação 2. *O módulo do produto dos n primeiros termos de uma PG é:*

$$|P_n| = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

Aplicação 3. *A altura de um triângulo retângulo em relação à hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.*

Solução: Basta observar que os triângulos AHC e BHA são semelhantes.

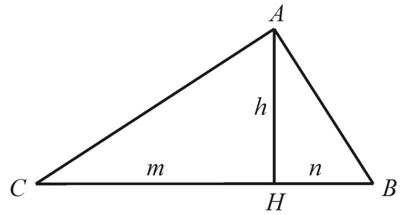

Figura 1.1: Altura é a média geométrica das projeções dos catetos.

Logo,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Leftrightarrow h = \sqrt{m.n}.$$

□

Aplicação 4. *Numa aplicação a juros compostos o fator de aumento médio é a média geométrica dos fatores de aumento individuais.*

Execícios 1.2.

1. Demonstre a fórmula do termo geral da PG,

$$a_n = a_1.q^{n-1},$$

   cujo o primeiro termo é a_1 e a razão é q.

2. Demonstre que se (a_i) é uma PG não nula, temos $a_n.a_m = a_p.a_q$, se, e somente se, $n+m = p+q$.

3. Considere uma PG tal que $a_8 = 1$ e $a_{16} = 625$, determine a_{10}.

4. Justifique a fórmula, $|P_n| = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$, para o produto dos termos de uma PG finita, e determine o produtos dos 40 termos de uma PG cujo primeiro e o quadragésimo termo são 1 e 2 respectivamente.

5. Demonstre a fórmula

$$P_n = {a_1}^n.\, q^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

   para o produto dos n primeiros termos de uma PG, dados a_1 - o primeiro termo e q - razão. (Dica: escreva todos termos em função de a_1 e q.)

6. Considere que a taxa de rendimento de um fundo de renda fixa tenham sido 10% no primeiro quadrimestre, 20% no segundo e 15% no terceiro. Determine a taxa média de rendimentos anuais.

7. Suponha que a média geométrica de n números seja M, qual será a média dos números obtidos elevando cada número da sequência original por a e multiplicando por b, onde $a > 0$ e $b > 0$, isto é, $y_i = bx_i^a$.

1.4 Média harmônica

Definição 5. A **média harmônica** é a média com respeito a operação de soma dos inversos, desta forma, a média harmônica de uma sequência de números reais não nulos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o número H tal que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H}}_{n \text{ termos}} = \frac{n}{H},$$

logo, concluímos que:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

A exemplo do ocorrido nas médias anteriores, podemos observar que terminologia média harmônica está relacionada com a noção de progressão harmônica, uma progressão cujos inversos multiplicativos dos termos estão em PA. Cada termo, exceto os extremos, de uma progressão harmônica é a média harmônica dos termos equidistantes.

Observação 3. Alguns dos problemas práticos mais interessantes sobre médias estão relacionados à média harmônica. É importante que saibamos reconhecer esses problemas. A seguir colocamos alguns exemplos onde surge a ideia da média harmônica. Nesses problemas o que geralmente ocorre é o fornecimento de taxas de variação (velocidades, períodos, vazões etc) e se pede algo relativo a taxa de variação média.

Aplicação 5. *Um automóvel vai da cidade A para B com uma velocidade média de v_1 e volta, pelo mesmo caminho, de B para A com uma velocidade média de v_2. A velocidade média em todo percurso será a média harmônica de v_1 e v_2.*

Solução: De fato, sendo d a distância entre A e B. Seja $t_1 = \frac{d}{v_1}$, tempo de ida, e $t_2 = \frac{d}{v_2}$, tempo de volta. Se v é a velocidade média em todo percurso, então $v = \frac{2d}{t_1+t_2}$, donde

$$\frac{2d}{v} = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$$

e portanto

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}.$$

Note que a argumentação não se altera se tivermos n deslocamentos iguais com velocidades médias em cada parte $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ou seja, se v é a velocidade média em todo percurso, temos,

$$\frac{n}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}.$$

□

Aplicação 6. *Se um tanque pode ser enchido individualmente por uma torneira* 1 *em um tempo* T_1*, por uma torneira* 2 *em um tempo* T_2*, assim sucessivamente até uma torneira* n *em um tempo* T_n*, então se pusermos todas as torneiras simultaneamente para encher o tanque, o inverso do tempo que levarão é a soma dos inversos dos tempos delas separadas. Note que cada uma das torneiras pode ser substituída por torneiras de mesma vazão, de modo que o tempo necessário para que esta torneira substituta encha o tanque é a média harmônica dos tempos individuais.*

Solução: O raciocínio empregado é semelhante ao do problema anterior. A razão $1/T_i$ corresponde a fração do tanque que é cheia em uma unidade de tempo pela torneira i, ou seja, a vazão da torneira i. Logo, se T for o tempo necessário para as torneiras juntas encherem todo tanque e $1/t$ a vazão de n torneiras idênticas encherem juntas o tanque, teremos:

$$\frac{n}{t} = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \cdots + \frac{1}{T_n}.$$

□

Observe que esse tipo de problema pode ainda ter *vazamentos*, que são considerados como torneiras que "enchem" o tanque em tempo negativo. Além disso existem vários problemas análogos como, por exemplo, que associam o trabalho de pintores, pedreiros, digitadores, etc.

Execícios 1.3.

1. Três torneiras ligadas sozinhas enchem um tanque em 3 h, 4 h e 6 h respectivamente. Ligando as três torneiras simultaneamente, quanto tempo levarão para encher o tanque sabendo que há um vazamento capaz de esvaziar o tanque em 12 h.

2. Prove que média geométrica entre dois termos é média geométrica entre as médias harmônica e aritmética desses dois termos.

3. (UPE) A empresa "Consultores Associados" firmou contrato com a "Roupagem S/A", para o planejamento de Marketing na cidade do Recife. Os administradores Júnior, Daniela e Maria Eduarda, foram convocados para realizarem o trabalho. Após várias reuniões foi constatado que, Júnior e Daniela, trabalhando juntos, fariam o planejamento em 15 dias. Júnior e Maria Eduarda, trabalhando juntos, gastariam 20 dias para realizar o trabalho. Daniela e Maria Eduarda, trabalhando juntas, precisariam de 12 dias para concluir a tarefa. Se Maria Eduarda trabalhasse sozinha, em quantos dias estaria concluído o planejamento?

4. (UFPE) Suponha que os pneus novos de um automóvel duram 30.000 km quando usados nas rodas dianteiras e 50.000 km quando usados nas rodas traseiras. Calcule o número máximo de quilômetros que um carro pode rodar começando com 4 pneus novos e fazendo um rodízio adequado entre eles.

5. No trapézio $ABCD$ abaixo M e N são pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. P é o ponto de interseção das diagonais AC e DB. XY é paralelo à AB e passa pelo ponto P.

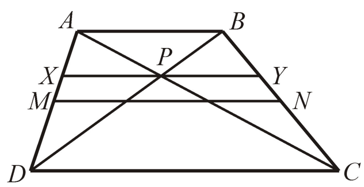

Figura 1.2: Desigualdade A-H no trapézio.

Mostre que $\overline{XY}$ é média harmônica de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e $\overline{MN}$ é média aritmética de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

1.5 Média quadrática

Definição 6. A **média quadrática** é a média com respeito a operação de soma dos quadrados, desta forma, a média quadrática de uma sequência de números reais não nulos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o número Q tal que

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = \underbrace{Q^2 + Q^2 + \cdots + Q^2}_{n \text{ termos}} = n\,Q^2,$$

logo, concluímos que:

$$Q = \sqrt{\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}{n}}.$$

Aplicação 7. *A maneira estatisticamente mais natural de medir o quanto uma sequência de números se dispersou da média aritmética é através do* **desvio padrão***. O desvio padrão (que denotamos por σ) é a média quadrática dos desvios individuais. Ou seja, dados $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e denotando por $\bar{x}$ a média aritmética dos x_i's temos*

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Execícios 1.4.

1. Considere a função real de variável real:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2}{n}}.$$

   Prove que $\bar{x}$, a média aritmética dos x_i's é o valor que minimiza o desvio padrão.

Capítulo 2

Desigualdade das médias e problemas de otimização

Nesse capítulo apresentaremos e demonstraremos o Teorema da Desigualdade das Médias no caso particular de três termos. Em seguida utilizaremos o Teorema para resolver problemas nos quais temos situações que se procura maximizar ou minimizar alguma expressão. O capítulo termina com uma lista de exercícios propostos, todos resolvidos no Apêndice B.

2.1 Desigualdades das médias

Teorema 1 (Desigualdades das médias)**.** *Sejam* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *números reais positivos em ordem crescente e denotemos por* H, G, A, Q *respectivamente as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática desses números, então temos as seguintes desigualdades:*

$$x_1 \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq x_n.$$

Além disso, a igualdade em qualquer ponto das desigualdades acima é possível se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *e, nestas condições, teremos necessariamente a igualdade de todas as médias.*

Demonstração: Restringiremos a demonstração para o caso $n = 3$ e $n = 4$. Começaremos com a desigualdade $A \geq G$. Várias demonstração desse resultado para $n = 2$ podem ser vistas em (Lima, 2006). Algumas demonstrações do caso $n = 2$ foram colocadas como exercícios na página 22. No Apêndice A.1 fornecemos várias demonstrações para o caso de n natural.

A demonstração que apresentamos se baseia num argumento utilizado por Cauchy, ver página

457 de (Cauchy, 1989) ou no Apêndice A.1 na página 28, para a demonstração do caso n natural. Faremos a demonstração para o caso $n = 4$ e em seguida mostraremos que a desigualdade vale para $n = 3$.

Começaremos provando que $A \geq G$ vale para $n = 2$. De fato, tomando x e y reais positivos, temos,

$$x.y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

com a igualdade só ocorrendo se, e somente se, $\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0$, ou seja, $x = y$.

O resultado da desigualdade $A \geq G$ para o caso $n = 4$ é obtido imediatamente aplicando o caso $n = 2$ duas vezes como podemos observar abaixo. Considerando x, y, z e t reais positivos, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z+t}{4} = \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{z+t}{2}\right)}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z+t}{2}\right)} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{x\,y}\,\sqrt{z\,t}} \\ &= \sqrt{\sqrt{x\,y\,z\,t}} \\ &= \sqrt[4]{x\,y\,z\,t}\,. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade acima, a igualdade só ocorre se, e somente se, $\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{z+t}{2}\right)$, ou seja $x + y = z + t$. Na segunda desigualdade, a igualdade ocorre se, $x = y$ e $z = t$. Juntando as duas condições, a igualdade $A = G$ para o caso $n = 4$ só ocorre se, e somente se, $x = y = z = t$.

Provaremos agora o caso $n = 3$ supondo válido o caso $n = 4$. Considere x, y e z reais positivos, e denote

$$A = \frac{x+y+z}{3}.$$

Logo, temos que:

$$\frac{x+y+z+A}{4} = A = \frac{x+y+z}{3}.$$

Portanto,

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{x+y+z+A}{4} \geq \sqrt[4]{xyzA},$$

com a igualdade ocorrendo apenas se, e somente se, $x = y = z$. Elevando ambos lados da desigualdade a 4ª potência, temos:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^4 = A^4 \geq xyzA.$$

Como $A > 0$, podemos cancelá-lo de ambos lados, obtendo a desigualdade desejada

$$A^3 \geq xyz \;\Leftrightarrow\; \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Para provar que $G \geq H$, basta calcular as médias aritmética e geométrica entre $(1/x)$, $(1/y)$ e $(1/z)$, e aplicar a desigualdade, $A \geq G$.

$$\begin{aligned} A \geq G \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \\ &\Leftrightarrow \quad H \leq G. \end{aligned}$$

Para a última desigualdade, $Q \geq A$, considere a expressão, $(x-A)^2+(y-A)^2+(z-A)^2 \geq 0$, que é válida para quaisquer reais x, y e z, onde a igualdade só ocorre quando $x = A$, $y = A$ e $z = A$. Logo,

$$(x-A)^2+(y-A)^2+(z-A)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)A+3A^2 \geq 0.$$

Como $(x+y+z) = 3A$, temos: $x^2+y^2+z^2 \geq 3A^2$.

Donde concluímos: $Q \geq A$.

Note que os argumentos utilizados para mostrar essa duas últimas desigualdades ($H \leq G$ e $A \leq Q$) podem ser utilizados para o caso geral de n natural. $\square$

2.2 Problemas de otimização

Nosso objetivo agora é, utilizando as desigualdades das médias, resolvermos uma série de problemas de otimização, os conhecidos “problemas de máximo e mínimo”. Os problemas envolvem diversas partes da Matemática Básica, como Geometria Plana, Geometria Espacial, Trigonometria e Geometria Analítica. Para mais problemas puramente algébricos recomenda-se (Lima et al., 2009), (Shklarsky et al., 1993) e (Muniz Neto, 1999). Iniciamos com alguns problemas cuja otimização é obtida de modo imediato das desigualdades do Teorema 1.

Aplicação 8. *Qual o maior valor possível para* $S = \operatorname{sen} x + \cos x$, *com* $x \in \mathbb{R}$ *?*

Solução: Aplicando a desigualdade $A \leq Q$ temos,

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} \leq \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo o valor máximo para S é $\sqrt{2}$ e ocorre quando $\operatorname{sen} x = \cos x = \sqrt{2}/2$, ou seja, quando $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Aplicação 9. *Suponha que* $x^2 + y^2 = R^2$, *com* $R >)$. *Determine reais positivos* x *e* y *tais que* $S = x + y$ *seja máximo.*

Solução: Aplicando a desigualdade $A \leq Q$. Temos,

$$\frac{S}{2} = \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Ou seja, S será máximo quando a igualdade ocorrer e isso só acontece quando $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. $\square$

Observação: O problema acima pode ser interpretado, com a teoria de Geometria Analítica, como *"Qual as coordenadas* (x, y) *de um ponto sobre a circunferência com centro na origem e raio* R*, de modo que a soma* $S = x + y$ *seja máxima ?"* e pode ser visto como uma generalização do problema anterior.

Aplicação 10. *Sejam* a, b *e* c *números reais positivos e suponha que* $ax^2 + by^2 = c$, *determine* x *e* y *reais positivos, tais que* $P = xy$ *seja máximo.*

Solução: Utilizando a desigualdade $G \leq A$, temos,

$$P\sqrt{ab} = \sqrt{ax^2\, by^2} \leq \frac{ax^2 + by^2}{2} = \frac{c}{2}.$$

Logo, o valor máximo para P ocorre quando $ax^2 = by^2 = \frac{c}{2}$, ou seja quando $x = \sqrt{\frac{c}{2a}}$ e $y = \sqrt{\frac{c}{2b}}$. $\square$

Definição 7. A **média simétrica de ordem 2** entre x, y e z, reais positivos, é o número Σ tal que,

$$\Sigma^2 + \Sigma^2 + \Sigma^2 = xy + yz + zx,$$

ou seja,

$$\Sigma = \sqrt{\frac{x\,y + y\,z + z\,x}{3}}.$$

O resultado seguinte nos fornece mais uma desigualdade entre médias para o caso $n = 3$. Em seguida utilizaremos essa desigualdade para provar alguns resultados interessantes sobre o paralelepípedo retângulo.

Teorema 2. *Dados x, y e z reais positivos, valem as desigualdades:*

$$A \geq \Sigma \geq G,$$

ou seja,

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{\frac{x\,y + y\,z + z\,x}{3}} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}\,.$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x = y = z$.

Solução: Observe que para quaisquer x, y e z reais positivos, temos que $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $x = y = z$. Dessa desigualdade, temos que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (*)$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $x = y = z$.

Para a primeira desigualdade fazemos:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \geq \frac{xy+yz+zx}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{9}\right) \geq \left(\frac{3xy+3yz+3zx}{9}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \quad \text{(verdade por } (*)).
\end{aligned}$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z$.

Para a segunda desigualdade, aplicamos $A \geq G$, escolhendo adequadamente os termos das médias:

$$
\begin{aligned}
(A \geq G \text{ aplicada em } xy, yz, zx) \qquad & \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{xy\,yz\,zx} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{x^2\,y^2\,z^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \left(\sqrt[3]{x\,y\,z}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}\,.
\end{aligned}
$$

Note, novamente, que a igualdade ocorre se, e somente se, $xy = yz = zx \Rightarrow x = y = z$. □

Aplicação 11. *Quais as dimensões de um paralelepípedo retângulo, cuja diagonal mede d, para que sua área total $\mathcal{A}$ seja máxima ?*

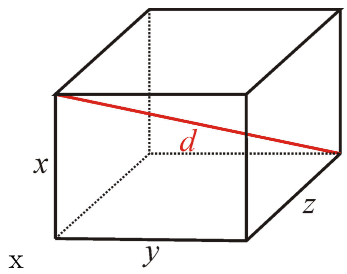

Figura 2.1: Paralelepípedo retângulo.

Solução: Sabendo que $\mathcal{A} = 2xy + 2yz + 2zx$ e $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, e utilizando o Teorema 2, temos,

$$\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{6}} = \sqrt{\frac{x\,y + y\,z + z\,x}{3}} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Logo $\mathcal{A}$ será máxima quando ocorrer a igualdade $x\,y = y\,z = z\,x \Rightarrow x = y = z$, ou seja, quando o paralelepípedo for um cubo, com aresta $a = x = y = z = d/\sqrt{3}$. □

Observação 4. O problema acima é um caso particular da relação:

$$\sqrt[3]{\mathcal{V}} \leq \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{6}} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{d}{\sqrt{3}},$$

onde d, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{V}$ são a diagonal, a área e o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z, com a igualdade ocorrendo quando o paralelepípedo for um cubo.

Nos problemas seguintes, após equacionar nosso problema em função de alguma variável x, aplicaremos as desigualdades das médias sempre procurando uma cota superior (caso desejemos maximizar) ou uma cota inferior (caso desejemos minimizar) que não dependa de x. E nesse ponto forçamos a igualdade ocorrer igualando os termos da média, descobrindo assim o valor de x que otimiza o problema.

Aplicação 12. *Dentro de um campo de futebol, um jogador corre em direção à bandeirinha de escanteio do time adversário ao longo de uma reta que forma* $45°$ *com a linha de fundo do campo (ver Figura 2.2).*

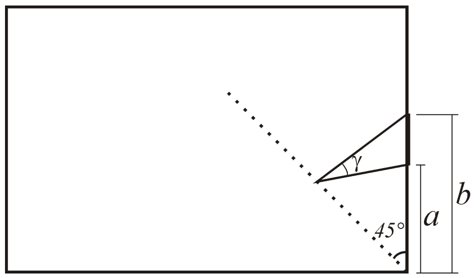

Figura 2.2: Ângulo máximo de visão.

Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da lateral do campo. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo (γ) máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Solução: Considerando a nomenclatura adotada na Figura 2.3 e considerando $a \leq x \leq b$, o ângulo de visão do jogador será particionado fazendo $\gamma = \alpha + \beta$. (Verifique, como exercício, que a expressão para $\operatorname{tg}\gamma$ continua válida para os casos em que $x < a$ e $x > b$.) Levando em conta que um ângulo agudo é máximo quando sua tangente é máxima, maximizaremos $\operatorname{tg}\gamma$.

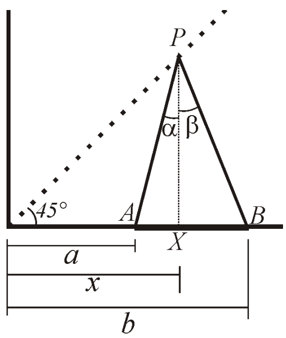

Figura 2.3: Ângulo máximo de visão, linha de fundo como referência.

Calculando a $\operatorname{tg}\gamma$ temos,

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta}.$$

Note que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}} = \frac{x-a}{x}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{XB}}{\overline{PX}} = \frac{b-x}{x}$. Logo,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{x-a}{x} + \frac{b-x}{x}}{1 - \left(\frac{x-a}{x}\right)\left(\frac{b-x}{x}\right)} = \frac{b-a}{x - \frac{(x-a)(b-x)}{x}}.$$

Para a $\operatorname{tg}\gamma$ ser máximo, basta minimizarmos o denominador, D.

$$D = x - \frac{(x-a)(b-x)}{x} = 2x + \frac{ab}{x} - (a+b).$$

Para tanto basta minimizar a parte que depende de x, e para isso utilizaremos a desigualdade $A \geq G$ com os termos $2x$ e (ab/x).

$$A = \frac{2x + \frac{ab}{x}}{2} \geq \sqrt{2x.\frac{ab}{x}} = \sqrt{2\,a\,b}.$$

Logo, o valor mínimo para A ocorre quando $2x = \dfrac{ab}{x} \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$. □

Aplicação 13. *Numa folha de cartolina quadrada de lados* $2a$ *retiramos quadrados de lado* $x < a$ *de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado* $2a - 2x$ *e altura* x*. Qual deve ser o valor de* x *para que o volume da caixa seja máximo?*

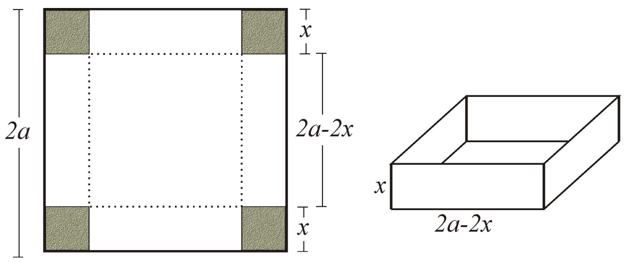

Figura 2.4: Caixa de volume máximo.

Solução: O volume da caixa pode ser calculado fazendo $\mathcal{V} = (2a-2x)^2 x$. Conforme comentado anteriormente, aplicamos a desigualdade das médias escolhendo adequadamente os termos de modo a obter uma cota máxima independente de x. Para esse problema aplicamos a desigualdade $G \leq A$ para os valores $(2a-2x)$, $(2a-2x)$ e $4x$,

$$\sqrt[3]{4\mathcal{V}} = \sqrt[3]{(2a-2x)(2a-2x)(4x)} \leq \frac{(2a-2x)+(2a-2x)+(4x)}{3} = \frac{4a}{3}.$$

Logo, pela desigualdade acima, o valor máximo para o volume da caixa ocorre quando $\sqrt[3]{4\mathcal{V}}$ for igual a $\frac{4a}{3}$, e isso acontece quando $2a - 2x = 4x$. Portanto, o volume máximo é $V = \frac{16a^3}{27}$ e é obtido fazendo $x = \dfrac{a}{3}$. □

Aplicação 14. *Um triângulo isósceles tem seu vértice na origem, sua base é paralela ao eixo x acima dele e os vértices da base estão na parábola $9y = 27 - x^2$. Calcule a maior área de um triângulo nessas condições.*

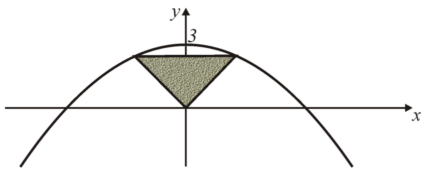

Figura 2.5: Parábola $9y = 27 - x^2$.

Solução: O triângulo descrito acima tem vértices $O(0{,}0)$, $B(x{,}y)$ e $C(-x{,}y)$, com $x > 0$ e $y > 0$ obedecendo a relação $9y = 27 - x^2 \Leftrightarrow 2y + \frac{2x^2}{9} = 6$ $(*)$. Note que a área de OBC pode ser calculada fazendo $\mathcal{A} = \dfrac{2x\,y}{2} = xy$. Para maximizar a área utilizaremos a desigualdade $G \leq A$, escolhendo os termos $\frac{2x^2}{9}$, y e y. Note que obtemos,

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}\mathcal{A}^2} = \sqrt[3]{\frac{2x^2}{9} \cdot y \cdot y} \leq \frac{\frac{2x^2}{9} + y + y}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Note que na penúltima igualdade aplicamos $(*)$. Para que tenhamos o valor máximo para $\mathcal{A}$ fazemos $\frac{2x^2}{9} = y$ e como a média desses termos é constante, temos que $\frac{2x^2}{9} = y = 2$, e portanto $x = 3$ e a área máxima igual a $\mathcal{A} = 3.2 = 6$. □

Aplicação 15. *Qual deve ser o formato de uma lata cilíndrica de volume $\mathcal{V}$ (cilindro circular reto) para minimizar o gasto de material para confeccioná-la?*

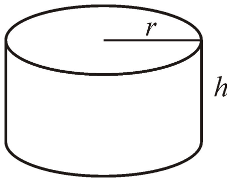

Figura 2.6: Área mínima de um cilindro reto de volume dado.

Solução: Sabemos que podemos calcular o volume da lata por $\mathcal{V} = \pi r^2 h$, onde r é o raio do círculo da base e h, a altura da lata. Queremos minimizar a área total do cilindro, que podemos calcular fazendo, $\mathcal{A} = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Substituindo $h = \mathcal{V}/\pi r^2$ em $\mathcal{A}$, ficamos com

$$\mathcal{A} = \frac{2\mathcal{V}}{r} + 2\pi r^2. \quad (\star)$$

Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ para os números $(\mathcal{V}/r)$, $(\mathcal{V}/r)$ e $(2\pi r^2)$, ficamos com

$$\frac{\mathcal{A}}{3} = \frac{\frac{\mathcal{V}}{r} + \frac{\mathcal{V}}{r} + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{r} \cdot \frac{\mathcal{V}}{r} \cdot 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\mathcal{V}^2\pi}.$$

Logo a área será mínima ocorre quando $\frac{\mathcal{V}}{r} = 2\pi r^2$, ou seja, quando $\pi rh = 2\pi r^2$, donde $h = 2r$ (um cilindro equilátero). □

O problema seguinte possui um nível de dificuldade um pouco maior do que os problemas anteriores, sendo o ajuste utilizado para obter a otimização mais refinado.

Aplicação 16. *Qual o volume máximo de um cilindro regular inscrito em uma esfera?*

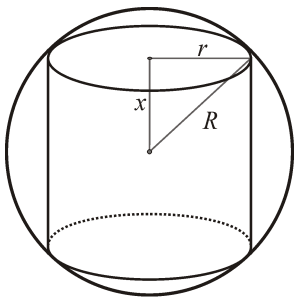

Figura 2.7: Cilindro inscrito numa esfera.

Solução: Utilizando as denominações fornecidas pela figura acima, o volume do cilindro pode ser calculado fazendo $\mathcal{V} = \pi\, r^2\, 2x$. Aproveitando que $R^2 = x^2 + r^2$, podemos reescrever $\mathcal{V} = 2\pi\, x\,(R^2 - x^2) = 2\pi\, x\,(R - x)\,(R + x)$. O artifício agora consiste em utilizar a desigualdade $G \leq A$, com os termos de $\mathcal{V}$ colocados em G e fazer A constante. Para tanto, acrescentaremos α e β de modo a não alterar o produto em G, mas com o objetivo de tornar A independente de x. Procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\mathcal{V}} &= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}.x.\alpha(R-x).\beta(R+x)} \\
&= \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}}\,\sqrt[3]{x.\alpha(R-x).\beta(R+x)} \\
&\leq \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}}\left(\frac{x\,+\,\alpha(R-x)\,+\,\beta(R+x)}{3}\right).
\end{aligned}$$

Onde a desigualdade acima temos um fator comum $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}$ e a desigualdade $G \leq A$, calculadas nos termos x, $\alpha(R-x)$ e $\beta(R+x)$. Note que em A temos no numerador $x + \alpha(R-x) + \beta(R+x) = (1 + \beta - \alpha)x + (\alpha + \beta)R$. Como queremos que A independa de x, fazemos $\alpha - \beta = 1$ $(*)$. Porém, sabemos que a igualdade das médias só ocorre (ou seja, o máximo para $\mathcal{V}$) quando $x = \alpha(R-x) = \beta(R+x)$. Portanto,

$$\alpha = \frac{x}{R-x} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{x}{R+x}.$$

Substituindo em $(*)$, ficamos com,

$$\begin{gathered}\frac{x}{R-x} - \frac{x}{R+x} = 1\\ x\left(\frac{R+x-R+x}{R^2-x^2}\right) = 1\\ 2x^2 = R^2 - x^2,\end{gathered}$$

donde concluímos que,:

$$x = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Logo o volume máximo para o cilindro inscrito numa esfera de raio R será $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. $\square$

A seguir colocamos uma lista de problemas de otimização que podem ser resolvidos através da utilização adequada das desigualdades das médias. Como observado nas resoluções dos problemas acima, essa argumentação é bastante elegante, elementar e abrangente, resolvendo problemas que de outro modo exigiriam ferramentas matemáticas muito mais elaboradas.

Execícios 2.1.

1. Dois problemas clássicos de otimização são os de determinar a **área máxima** de um retângulo, onde é dado o perímetro e o dual, onde se pede o **perímetro mínimo** de um retângulo com uma determinada área. Prove que em ambos casos a otimização é obtida quando o retângulo é um quadrado.

2. Prove que para todo ângulo agudo x temos: $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \geq 2$.

3. Sejam b e c catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a. Prove que $b + c \leq a\sqrt{2}$.

4. Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência. Sejam x e y as projeções

ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Demonstre a desigualdade $A \geq G$ para x e y utilizando a situação descrita.

5. Considere duas circunferências de centros O_1 e O_2 e diâmetros x e y tangentes exteriormente e tangentes à uma mesma reta, t, nos pontos T_1 e T_2. Utilizando que $\overline{O_1O_2} \geq \overline{T_1T_2}$ demonstre a desigualdade $A \geq G$.

6. (ProfMat) Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

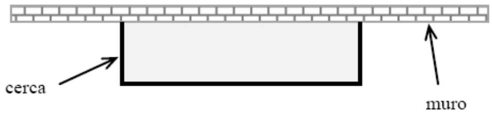

Figura 2.8: O problema da cercar área máxima.

7. No problema anterior, qual o menor comprimento de cerca necessário para que o fazendeiro cerque uma área de $162\,\mathrm{m}^2$?

8. Determine os lados do retângulo cuja diagonal mede 8 cm sabendo que o retângulo tem perímetro máximo.

9. (UFPE) Qual o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente à circunferência $x^2 + y^2 = 50$, pode assumir?

10. Encontre as dimensões de retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, que esteja inscrito em uma elipse de equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

11. Sabendo que a área total de um paralelepípedo reto retângulo mede $24\,\mathrm{cm}^2$ determine o volume máximo do paralelepípedo.

12. Qual o volume máximo de um paralelepípedo retângulo de área total $\mathcal{A}$?

13. Prove que o triângulo equilátero é o que possui maior área entre todos os triângulos com um determinado perímetro fixo.

14. (ITA) Mostre que

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > \binom{8}{4}$$

15. Seja (x_1 , x_2 , x_3 , . . . , x_n) uma sequência de números reais positivos e (k_1 , k_2 , k_3 , . . . , k_n), uma sequência de números racionais positivos cuja soma seja igual a 1. Mostre que:

$$k_1.x_1 + k_2.x_2 + \cdots + k_n.x_n \geq x_1^{k_1}.x_2^{k_2}.\cdots.x_n^{k_n}$$

16. (ProfMat) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja Figura 2.9, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).

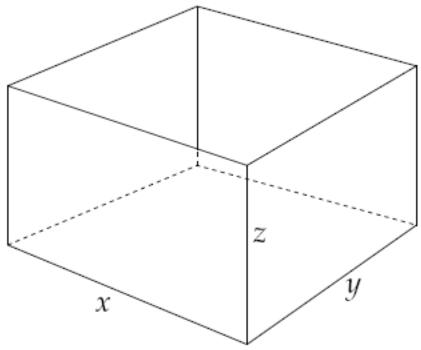

Figura 2.9: Área mínima com um volume fixo.

(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.

(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior do que ou igual a 48.

(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

17. De uma folha de cartolina retangular de lados $2a$ e $2b$, $a > b$, retiramos quadrados de lados $x < b$ de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um retângulo de lados $(2a - 2x)$ e $(2b - 2x)$, e cuja altura é x. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?

18. (ProfMat) Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.

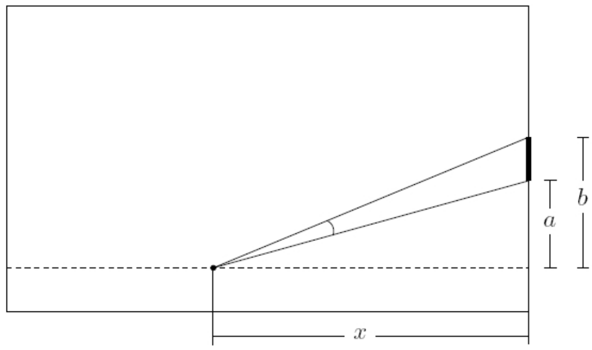

Figura 2.10: Outro problema de ângulo máximo de visão.

Capítulo 3

Concluindo...

Espero que esse material tenha cumprido o objetivo de servir como ferramenta na resolução de problemas de máximos e mínimos utilizando simplesmente a Desigualdade das Médias, Teorema 1, tornando assim a resolução desses problemas acessível a quem não tenha estudado Cálculo Diferencial. Caso haja interesse, exercícios de otimização podem ser encontrados em livros de Cálculo como, por exemplo, (Simmons, 1987), de onde retirei alguns problemas apresentados. É uma boa diversão tentar resolver problemas de otimização encontrados em livros de Cálculo apenas com ferramenta e truques apresentados no texto.

Caso haja interesse ou necessidade, o estudo aqui iniciado pode ser complementado nas indicações contidas na bibliografia. Nas referências há uma série de textos sobre o assunto. A principal referência é o livro (Lima et al., 2009), que deve ser a primeira leitura complementar. Um texto mais básico é a referência (Lima, 2006), onde o prof. Elon Lima apresenta varias demonstrações da desigualdade A-G no caso de duas variáveis, algumas delas foram colocadas como exercício aqui. Num segundo momento, a escolha deve ser o extraordinário livro de problemas resolvidos (Shklarsky et al., 1993). Infelizmente a maior parte dos textos não se encontram em português.

Caso haja o interesse pelas desigualdades de um modo geral, a primeira leitura deve ser do Apêndice A, onde coloquei oito demonstrações da desigualdade A-G. Para conhecer outras desigualdades, recomendo (Muniz Neto, 1999). Num segundo nível, o divertido, mas não tão fácil, (Steele, 2004) deve ser o objeto de estudo. Para os amantes da Matemática e que possuam uma certa maturidade na disciplina, o livro dos matemáticos Hardy, Littlewood e Pólya, (Hardy et al., 1934), é a referência.

Referências Bibliográficas

Cauchy, A.-L. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, première partie, Analyse algébrique.* Éditions Jacques Gabay, Paris, 1989.

Hardy, G., Littlewood, J. e Pólya, G.. *Inequalities.* Cambridge University Press, London, 1934.

Lima, E. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2006.

Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E. e Morgado, A. *Matemática para o Ensino Médio*, volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 6ª edição, 2009.

Muniz Neto, A. Desigualdades elementares. *Eureka!*, 5:34–49, Agosto 1999.

Shklarsky, D., Chentzov, N. e Yaglom, I. *The USSR Olympiad Problem Book.* Dover Publications, Inc., New York, 1993.

Simmons, G. *Cálculo com Geometria Analítica*, volume 1. McGraw-Hill, São Paulo, 1987.

Steele, J. M. *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.* Cambridge University Press, New York, 2004.

Apêndice A

Desigualdade A-G

Nesse apêndice colocamos oito demonstração da desigualdade A-G, entre as médias aritmética e geométrica. O enunciado deste teorema dado por Cauchy pode ser traduzido como "a média geométrica entre os números positivos A, B, C, $D, \ldots$ é sempre inferior a média aritmética deles." (Cauchy, 1989). Em cada seção a seguir, enunciaremos novamente o teorema, às vezes com pequenas variações. Nas demonstrações em que é utilizada a indução, procurei fornecer demonstrações do caso $n = 2$ de maneiras distintas, geralmente relacionadas com a indução posterior. Todas demonstrações são independentes e podem ser lidas em qualquer ordem.

A.1 Indução de Cauchy

Na demonstração apresentada para o Teorema 1 da página 12, foi utilizado um argumento na demonstração para o caso $A \geq G$ com $n = 4$ e $n = 3$, que aqui será generalizado para o caso n, natural. O argumento básico é o utilizado por Cauchy na referência citada acima. Procurei colocar uma roupagem mais contemporânea, utilizando a indução de modo mais formal.

Teorema. *Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ números reais positivos então temos a seguinte desigualdade:*

$$\sqrt[n]{x_1.\ldots.x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração:

Já sabemos que a desigualdade vale para $n = 2$, de fato

$$x_1.x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2,$$

com a igualdade só ocorrendo quando $(\frac{x_1 - x_2}{2}) = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$.

Suponha que nosso resultado vale para $m \geq 2$ natural. Provaremos que o resultado também é válido para $2m$. Para tanto basta agrupar os termos em dois conjuntos de m termos e aplicar o caso da desigualdade para o caso $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2m}}{2m} &= \frac{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{2m}}{m}}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[m]{x_1.x_2.\cdots.x_m} + \sqrt[m]{x_{m+1}.x_{m+2}.\cdots.x_{2m}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[m]{x_1.x_2.\cdots.x_m}.\sqrt[m]{x_{m+1}.x_{m+2}.\cdots.x_{2m}}} \\
&= \sqrt[2m]{x_1.x_2.\cdots.x_{2m}}.
\end{aligned}$$

Com isso temos que a desigualdade $A \geq G$ vale para todo natural na forma de potência de dois.

Considere um n natural qualquer e k inteiro de modo que $2^k > n$. Denote $d = 2^k - n$. Seja,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Logo,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + d.A}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{x_1.x_2.\ldots.x_n.A^d}.$$

Elevando ambos os os lados da desigualdade por 2^k, temos,

$$A^{2^k} \geq x_1.x_2.\ldots.x_n.A^d.$$

Dividindo ambos lados por $A^d > 0$ temos $A^n \geq G^n$ e portanto nossa desigualdade $A \geq G$. $\square$

A.2 Por indução, utilizando expansão binomial

A próxima demonstração fará uso da indução finita, utilizando a expansão binomial para recair na hipótese de indução.

Teorema. *Sejam* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *números reais positivos em ordem crescente então temos a seguinte desigualdade:*

$$x_1.\ldots.x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \text{ ou seja, } \; G^n \leq A^n$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração: O teorema será demonstrado por indução. Para o caso $n = 2$, basta observar,

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1.x_2} \geq 0$$

com a igualdade só ocorrendo quando $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$.

Suponhamos então que seja válido para n e provemos para $n + 1$.

Seja A_n e A_{n+1} definidos como,

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

e

$$A_{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}.$$

Como a sequência (x_i) é ordenada de modo crescente, temos que $x_{n+1} = A_n + d$, com $d \geq 0$. Logo,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)A_n + d}{n+1} = A_n + \frac{d}{n+1}.$$

Elevando ambos lado da igualdade à $(n + 1)$ potência, teremos

$$\begin{aligned}
(A_{n+1})^{n+1} &= \left(A_n + \frac{d}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= (A_n)^{n+1} + \binom{n+1}{1}(A_n)^n \frac{d}{n+1} + \cdots + \left(\frac{d}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\geq (A_n)^{n+1} + (A_n)^n d \\
&= (A_n)^n (A_n + d) \\
&= (A_n)^n x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos que $(A_n)^n \geq x_1.\dots.x_n$, logo

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq (A_n)^n \, x_{n+1} \geq x_1.x_2 \dots .x_n.x_{n+1}$$

consequentemente,

$$A_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1.x_2 \dots .x_n.x_{n+1}},$$

o que demonstra a desigualdade. Note que a desigualdade estrita só ocorre se, e somente se, $d > 0$. □

A.3 Por indução

Demonstração utilizando uma variação do argumento apresentado em notas do professor Paulo R. Santiago para o curso MA12 do ProfMat.

Teorema. *Sejam* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *números reais positivos em ordem crescente, então temos a seguinte desigualdade:*

$$x_1.\dots.x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^n, \textit{ ou seja, } \; G^n \leq A^n$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração:

Para $n = 1$ o resultado é, claramente, verdadeiro. Para o processo indutivo não é necessário, mas o caso $n = 2$ pode ser obtido observando,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \frac{x_1^2}{4} - \frac{2x_1x_2}{4} + \frac{x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2 \geq 0$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2$.

Suponhamos agora que o resultado seja válido para n. E provemos para $n + 1$. Como x_1, $x_2, \dots, x_n$, x_{n+1} são reais positivos em ordem crescente e A a média aritmética entre eles, temos $x_1 \leq A \leq x_{n+1}$, assim,

$$(A - x_1)(x_{n+1} - A) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A(x_1 + x_{n+1} - A) - x_1 \, x_{n+1} \geq 0.$$

Donde,

$$A(x_1 + x_{n+1} - A) \geq x_1\, x_{n+1} \quad (\star)$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = A$ ou $x_{n+1} = A$, que implica $x_1 = \cdots = x_{n+1}$ já que (x_i) é crescente.

Denotando $X_1 = x_1 + x_{n+1} - A$, observe que

$$\frac{X_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} - A}{n} = \frac{(n+1)A - A}{n} = A.$$

Mas, por hipótese de indução,

$$A = \frac{X_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{X_1.x_2.\cdots.x_n}.$$

Elevando ambos os termos a enésima potência e multiplicando ambos os lados por A, temos

$$A.A^n \geq A.X_1.x_2.\cdots.x_n = A.(x_1 + x_{n+1} - A).x_2.\cdots.x_n.$$

Donde por $(\star)$, temos

$$A^{n+1} \geq A.(x_1 + x_{n+1} - A).x_2.\cdots.x_n \geq x_1.x_{n+1}.x_2.\cdots.x_n = G^{n+1}.$$

Com a igualdade ocorrendo na segunda desigualdade se, e somente se, $x_1 = \cdots = x_{n+1}$ conforme observado em $(\star)$. Consequentemente na primeira, por hipótese de indução. $\square$

A.4 Maximizando o produto (C. Maclaurin)

Nessa seção teremos duas demonstrações. Como a ideia presente nelas são análogas, decidi colocá-las juntas na mesma seção. Primeiro provaremos que o produto de uma sequência de números positivos, cuja média aritmética é constante, é máximo quando todos os termos são iguais. Depois provaremos o resultado dual, que a soma de uma sequência de números positivos, cuja a média geométrica é constante, é mínima quando todos os termos são iguais. A ideia original da demonstração é creditada a C. Maclaurin em (Hardy et al., 1934).

Teorema. *Sejam $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ números reais positivos em ordem crescente então temos a seguinte desigualdade:*

$$x_1.\dots.x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \textit{ ou seja, } \; G^n \leq A^n$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração:

(maximizando o produto mantendo A constante)

Note que caso $x_1 = \cdots = x_n$ temos que

$$G^n = x_1.\dots.x_n = \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n = A^n. \;\; (*)$$

Mostraremos que se $x_1 < x_n$, teremos $G^n < A^n$. Assumindo a desigualdade estrita $x_1 < x_n$, então $x_1 < A < x_n$. Seja $t = x_n - A$ e considere $x_1' = x_1 + t$ e $x_n' = x_n - t = A$. Logo, pelo modo que escolhemos x_1' e x_n', temos que,

$$\frac{x_1' + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n'}{n} = A.$$

Ou seja, a média aritmética não se altera ao tomarmos essa nova sequência. No entanto,

$$x_1'.x_n' = (x_1 + t)(x_n - t) = x_1.x_n + (x_n - x_1 - t)t = x_1.x_n + (A - x_1)t > x_1.x_n,$$

pois $A > x_1$ e $t = x_n - A > 0$. Donde concluímos que, ao alterarmos dois termos da sequência original, sendo um deles seja igual a A, e mantendo A constante, conseguimos aumentar o produto dos termos. Ou seja,

$$G^n = x_1.x_2.\dots.x_{n-1}.x_n < x_1'.x_2.\dots.x_{n-1}.x_n' = (G')^n,$$

onde pelo menos um fator de G' é igual a A.

Se todos os valores de G' forem iguais, chegamos no caso $(*)$ e a desigualdade $G \leq A$ é obtida, caso contrário, reordenamos os valores, $x_1', x_2', \dots, x_n'$, e repetimos o processo, considerando

$t' = x'_n - A$ e fazendo $x''_1 = x'_1 + t$ e $x''_n = x'_n - t' = A$. Logo, obtemos

$$G^n < (G')^n = x'_1.x'_2.\dots.x'_{n-1}.x'_n < x''_1.x'_2.\dots.x'_{n-1}.x''_n = (G'')^n,$$

onde em G'' temos pelos menos dois fatores iguais a A.

Novamente, se os n valores forem idênticos, temos a nossa desigualdade $G \leq A$. Caso contrário repetimos de novo o processo. Após, no máximo, n dessas reordenações e mudanças, obteremos,

$$G^n = x_1.x_2.\dots.x_{n-1}.x_n < (G')^n < (G'')^n < \dots < A^n,$$

donde obtemos a desigualdade $G^n \leq A^n$, com a igualdade só ocorrendo se $x_1 = \dots = x_n$, caso $(*)$. $\square$

(minimizando a soma mantendo G constante)

De modo análogo, Se $x_1 < x_n$, então $x_1 < G < x_n$. Considere $x'_1 = G$ e $x'_n = \frac{x_1.x_n}{G}$. Como $G - x_1 > 0$ e $x_n - G > 0$, temos,

$$(G - x_1)(x_n - G) > 0 \;\Leftrightarrow\; x_1.G + x_n.G - G^2 - x_1.x_n > 0.$$

Dividindo a desigualdade por $G > 0$, temos

$$\frac{x_1.G + x_n.G - G^2 - x_1.x_n}{G} > 0 \;\Leftrightarrow\; (x_1 + x_n) - \left(G + \frac{x_1.x_n}{G}\right) > 0,$$

que nos fornece a desigualdade, $x_1 + x_n > x'_1 + x'_n$. Assim, teremos

$$A' = \frac{x'_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x'_n}{n} < A,$$

onde A' possui pelo menos uma das parcelas iguais a G. E, novamente, repetindo o processo por no máximo n vezes teremos,

$$A > A' > A'' > \dots \geq G,$$

obtendo a desigualdade desejada. $\square$

A.5 Utilizando a Desigualdade da Reordenação

Nessa próxima seção apresentamos um teorema conhecido como "desigualdade da reordenação" e a partir dele chegamos a nossa desigualdade *A-G* como corolário.

A desigualdade da reordenação pode ser interpretada de modo bem intuitivo. Imagine que em um cofrinho você tem moedas de R$ 0,10, R$ 0,25, R$ 0,50 e R$ 1,00, e que a sequência (n_1, n_2, n_3, n_4) diz quantas moedas de cada tipo há no cofre. O teorema da reordenação afirma que $\mathcal{V}$, o valor total das moedas no cofre, dado por

$$\mathcal{V} = n_1.0{,}10 + n_2.0{,}25 + n_3.0{,}50 + n_4.1{,}00,$$

será máximo se a sequência (n_i) for crescente e mínimo se (n_i) for decrescente.

Teorema (Desigualdade da Reordenação). *Sejam $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sequências crescentes de números reais e σ uma bijeção de $\mathcal{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ em $\mathcal{I}_n$ (permutação de n elementos). Então temos as seguintes desigualdades:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.b_{n-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}.b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i.b_i.$$

Ou seja, ao se somar a multiplicação de pares distintos de termos escolhido um na sequência (a_i) e outro na (b_j), a soma será máxima quando os termos forem escolhidos na mesma ordem e será minima quando os termos forem multiplicados em ordem inversa.

Demonstração: Provaremos primeiro o limite superior, a maximização do somatório.

O caso $n = 2$ é imediato, pois, por hipótese, temos $(a_2 - a_1) \geq 0$ e $(b_2 - b_1) \geq 0$, donde obtemos

$$(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1.b_1 + a_2.b_2 \geq a_1.b_2 + a_2.b_1. \quad (\star)$$

Note que se as sequências (a_i) e (b_j) forem estritamente crescentes, teremos uma desigualdade estrita em $(\star)$.

Para o caso geral provaremos por contradição. Suponha que exista uma permutação σ, diferente da identidade, que maximize o somatório. Logo existe algum $k \in \mathcal{I}_n$, tal que $\sigma(i) = i$, para $i < k$, com $\sigma(k) > k$ e existe um $p \in \mathcal{I}_n$, $p > k$, com $\sigma(p) = k$. Logo, utilizando o mesmo argumento do caso $n = 2$, temos,

$$(a_{\sigma(k)} - a_k).(b_p - b_k) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_k.b_k + a_{\sigma(k)}.b_p > a_{\sigma(k)}.b_k + a_{\sigma(p)}.b_p,$$

o que nos leva a uma contradição, pois obtemos uma reordenação dos termos que fornece um somatório maior.

Para a desigualdade inferior, minimização do somatório, basta aplicar o caso da maximização à sequência $(-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_2, -a_1)$. □

Corolário 1. *Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ números reais positivos em ordem crescente então temos a seguinte desigualdade:*

$$x_1.x_2.\ldots.x_n = \prod_{j=1}^{n} x_j \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^n = \frac{x_1^n + \cdots + x_n^n}{n}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração: Provaremos por indução. O caso $n = 2$, é a aplicação imediata da Desigualdade da Reordenação tomando as sequências $a_i = b_i = x_i$, para $i = 1, 2$,

$$2x_1.x_2 = x_1.x_2 + x_2.x_1 \leq x_1.x_1 + x_2.x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

com a igualdade ocorrendo apenas se $x_1 = x_2$.

Considere agora o resultado válido para $n - 1$ e provemos para n. Para tanto considere a sequência

$$X_i = \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j}{x_i} = x_1.x_2.\cdots.x_{i-1}.x_{i+1}.\cdots.x_n.$$

Como (x_i) é crescente, temos que (X_i) será decrescente. Logo aplicando a Desigualdade da Reordenação temos imediatamente que

$$n.x_1.x_2.\ldots.x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.X_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_{n-i}.X_i.$$

Por hipótese de indução, temos que, para cada i vale,

$$\begin{aligned}(n-1)x_1.x_2.\cdots.x_{i-1}.x_{i+1}.\cdots.x_n &= (n-1)X_i\\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{n-1}\right) - x_i^{n-1}\\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots .x_n^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{n-i}.X_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_{n-i}.\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{n-1}\right) - x_i^n}{n-1}.$$

Do lado direito da desigualdade acima, teremos $(n-1)$ rearranjos de produtos envolvendo produtos de termos, tomados dois a dois, das sequências crescentes (x_i) e (x_i^{n-1}). Utilizando, novamente, a Desigualdade da Reordenação temos,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{n-i}.\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{n-1}\right) - x_i^n}{n-1} \leq \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^n.$$

Obtendo a desigualdade desejada. É fácil ver que a igualdade só ocorre quando $x_1 = \cdots = x_n$. □

Corolário 2 (Desigualdade *A-G*). *Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ números reais positivos em ordem crescente então temos a seguinte desigualdade:*

$$\sqrt[n]{x_1.\ldots.x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração: A partir de (x_i), crescente, considere a sequência $(\sqrt[n]{x_1}, \sqrt[n]{x_2}, \ldots, \sqrt[n]{x_n})$, também crescente. Agora basta utilizar o Corolário acima e o resultado é imediato.

□

A.6 Demonstração de J.F.Steffensen

Demonstração muito elegante da desigualdade *A-G* creditada a J.F.Steffensen em (Hardy et al., 1934).

Lema. *Dadas as sequências* $(a_1, \ldots, a_n)$ *e* $(b_1, \ldots, b_n)$*, crescentes com* $a_j \leq b_j$*, para* $j = 1, 2, \ldots, n$*. Então o produtos dos somatórios*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

cresce pela permuta de um termo a_k *por* b_k *nos somatórios, sendo estritamente crescente exceto se* $a_k = b_k$ *ou* $a_i = b_i$ *para* $i \neq k$*.*

Demonstração: É imediata se for observada a igualdade

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + (b_k - a_k)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i + (a_k - b_k)\right) = & \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + (b_k - a_k)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i - b_k + a_k\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + (b_k - a_k)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - b_k\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - a_k\right)\right] \\
&\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).
\end{aligned}$$

□

Teorema. *Sejam* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *números reais positivos em ordem crescente, então temos a seguinte desigualdade:*

$$x_1 . \cdots . x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \text{ ou seja, } \; G^n \leq A^n$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Demonstração: Note que a desigualdade desejada é equivalente a mostrar que

$$(nG)^n = \overbrace{(x_1 + \cdots + x_1)}^{n \text{ parcelas}} . \cdots . \overbrace{(x_n + \cdots + x_n)}^{n \text{ parcelas}} \leq (x_1 + \cdots + x_n)^n = (nA)^n.$$

Como $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, ao trocarmos $n - 1$ termos do primeiro fator do lado esquerdo da desigualdade por um termo de cada um dos outros fatores, obtemos

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)(x_1 + x_2 + x_2 + \cdots + x_2). \ldots .(x_1 + x_n + x_n + \cdots + x_n)$$

que, pelo lema anterior, é maior do que $(nG)^n$, exceto se $x_1 = \cdots = x_n$. Repetindo o argumento por, no máximo, $n-1$ vezes obtemos a desigualdade desejada. □

A.7 Indução utilizando Cálculo elementar

Nessa seção utilizaremos noções básicas de cálculo. Sendo acessível a qualquer pessoa que tenha conhecimento de derivação a uma variável e análise de pontos críticos.

Teorema. *Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ números reais positivos em ordem crescente, então temos a seguinte desigualdade:*

$$x_1. \cdots .x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \textit{ ou seja, } \ G^n \leq A^n$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração: Para o caso $n = 2$ considere a função,

$$f(x) = \frac{x_1 + x}{2} - \sqrt{x_1.x}, \text{para } x > 0.$$

Calculando $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x_1}{2\sqrt{x_1.x}}$, temos que $x = x_1$ é um ponto crítico. Como $f''(x) = \frac{x_1^2}{(\sqrt{x_1.x})^3} > 0$, para $x > 0$, temos que $x = x_1$ é um ponto de mínimo. Logo, para $x_2 \neq x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1) = 0$, ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1.x_2} \geq 0,$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $x_1 = x_2$.

Suponhamos agora que o resultado é válido para n e provemos para $n+1$. Considere a função

$$f(x) = \frac{x_1 + \cdots + x_n + x}{n+1} - (x_1. \cdots .x_n\, x)^{\frac{1}{n+1}},$$

definida para x real positivo.

Queremos mostrar que $f(x) \geq 0$, para todo $x > 0$ e $f(x) = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. Para tanto, utilizaremos a mesma argumentação utilizada no caso $n = 2$ acima.

Derivando $f(x)$ temos,

$$f'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{(x_1.\ldots.x_n)^{\frac{1}{n+1}}}{n+1}.x^{\frac{-n}{n+1}}.$$

Que tem como ponto crítico,

$$x_0 = (x_1.\ldots.x_n)^{\frac{1}{n}} = G. \quad \text{(média geométrica)}$$

Calculando a segunda derivada, temos,

$$f''(x) = \frac{n}{(n+1)^2}.(x_1.\ldots.x_n)^{\frac{1}{n+1}}.x^{\frac{-2n-1}{n+1}}.$$

Note que $f''(x) > 0$, para $x > 0$. Logo f é convexa de concavidade para cima, e o valor mínimo de f será obtido no ponto crítico, ou seja $f(x_0)$. Portanto, calculando $f(x_0)$ temos,

$$\begin{aligned} f(x_0) = f(G) &= \frac{x_1 + \cdots + x_n + G}{n+1} - (x_1.\ldots.x_n\, G)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n+1} + \frac{G}{n+1} - (G^{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n+1} + \frac{G}{n+1} - G \\ &= \frac{n}{n+1}\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \frac{n}{n+1}G \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - G\right). \end{aligned}$$

Mas, hipótese de indução temos,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - G \geq 0.$$

Logo $f(x_0) \geq 0$, sendo igual a zero se, e somente se, $A = G$, ou seja, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. $\square$

A.8 O sonho de George Pólya

Para fechar essa sequência de demonstrações, será apresentada a belíssima demonstração de George Pólya para a desigualdade A-G no caso geral, médias aritmética e geométrica com pesos reais. Também nessa demonstração utilizaremos noções básicas de cálculo para tornar a demonstração mais elegante.

Dizem que, certa vez, Pólya contou que a ideia dessa demonstração originou de um sonho. Alguns anos depois, afirmou que fora "a melhor matemática sonhada por ele." (Steele, 2004).

Teorema (Caso geral da desigualdade A-G). *Sejam as sequências* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *de números reais positivos, com*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

então temos a seguinte desigualdade:

$$G = {x_1}^{p_1}.{x_2}^{p_2}.\ldots.{x_n}^{p_n} \leq p_1.x_1 + p_2.x_2 + \cdots + p_n.x_n = A$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração: O núcleo da demonstração é a desigualdade $1 + x \leq e^x$ $(\star)$. Uma bela justificativa dessa desigualdade é observar que a reta $y = x + 1$ tangencia a exponencial apenas no ponto $(0, 1)$, ficando sob ela para todo real $x \neq 0$, ou seja, $1 + x < e^x$, com a igualdade só ocorrendo quando $x = 0$.

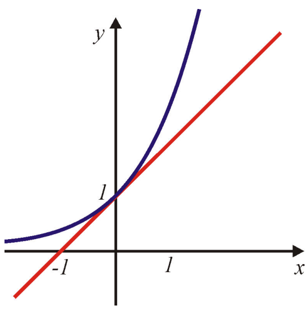

Figura A.1: Sonho de Pólya: $e^x \geq x + 1$.

De um modo mais formal, considere a função $f(x) = e^x - x - 1$. Como $f'(x) = e^x - 1$ e

$f''(x) = e^x > 0$, temos que $x = 0$ é ponto de mínimo global de f, logo $f(x) \geq f(0) = 0$, ou seja, $e^x \geq x + 1$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $x = 0$.

Fazendo a mudança de variável x por $x - 1$, $(\star)$ modifica para

$$x \leq e^{x-1} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Logo, aplicando a desigualdade $(*)$ acima aos termos $X_i = \frac{x_i}{A}$, temos

$$X_i \leq e^{X_i - 1}$$

com a igualdade só ocorrendo se $X_i = 1$, ou seja, $x_i = A \quad (\heartsuit)$.

Elevando ambos lados a p_i, ficamos com,

$$X_i{}^{p_i} \leq \left(e^{X_i - 1}\right)^{p_i} = e^{p_i(X_i - 1)} = \exp(p_i.X_i - p_i).$$

Logo, fazendo o produto de todos os $X_i{}^{p_i}$'s temos,

$$X_1{}^{p_1}.\ldots.X_n{}^{p_n} \leq \prod_{i=1}^{n} \exp(p_i.X_i - p_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}(p_i.X_i - p_i)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i.X_i \; - 1\right).$$

Como $X_i = \frac{x_i}{A}$, temos

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^{p_1}.\ldots.\left(\frac{x_n}{A}\right)^{p_n} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i.\frac{x_1}{A} \; - 1\right) = \exp\left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} p_i.x_1 \; - 1\right) = \exp(0) = 1.$$

E portanto

$$\frac{x_1{}^{p_1}.\ldots.x_n{}^{p_n}}{A^{p_i + \cdots + p_n}} = \frac{G}{A} \leq 1.$$

O que demonstra nossa desigualdade. Note que a igualdade só ocorrerá se $(\heartsuit)$ ocorrer para todo i, ou seja, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = A$.

Observe que se tomarmos $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ temos imediatamente a desigualdade A-G padrão. $\square$

Apêndice B

Resolução dos problemas

Nesse apêndice será fornecida resoluções dos exercícios propostos. Sempre que for referida a desigualdade *A*-*G*, estou me referindo ao Teorema 1 da página 12 (Desigualdade das Médias).

B.1 Resolução dos exercícios 1.1 (página 5)

1. *Demonstre a fórmula do termo geral da PA,*

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

cujo o primeiro termo é a_1 e a razão é r.

Solução: Demonstrando por indução, note que para $n = 1$ o resultado é obviamente verdadeiro. Suponhamos que seja válida para n e provemos para $n+1$.

De fato, basta observar que

$$a_{n+1} = a_n + r \overbrace{=}^{(hi)} a_1 + (n-1)\,r \ + r = a_1 + (n+1\ -1)\,r.$$

$\square$

2. *Suponha que a média aritmética dos números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seja M. Qual será a média dos números obtidos multiplicando cada número da sequência original por a e somando b, isto é, $y_i = ax_i + b$?*

Solução: Temos que $M = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Considere, $\mathcal{M} = (y_1 + \cdots + y_n)/n$, logo,

$$\mathcal{M} = \frac{ax_1 + b\, +\, ax_2 + b\, +\, \cdots\, +\, ax_n + b}{n} = \frac{a(x_1 + \cdots + x_n) + n.b}{n} = a.M + b.$$

□

3. *(UFPE) Em seis provas, onde as notas atribuídas variam de 0 a 100, um estudante obteve média 83. Se a menor nota for desprezada a sua média sobe para 87. Qual foi a menor nota obtida nas 6 provas?*

Solução: Considere x_6 a menor nota. Então,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_5 + x_6}{6} = 83 \;\Rightarrow\; x_1 + \cdots + x_5 + x_6 = 6 \times 83 = 498 \; (*)$$

e

$$\frac{x_1 + \cdots + x_5}{5} = 87 \;\Rightarrow\; x_1 + \cdots + x_5 = 5 \times 87 = 435. \; (\star)$$

Logo, substituindo $(\star)$ em $(*)$, temos

$$435 + x_6 = 498 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 63.$$

□

4. *Suponha que a média aritmética de uma turma de* 20 *pessoas seja* 7 *numa determinada prova. Qual será a média das* 19 *pessoas restantes se retirarmos da turma o único aluno que tirou nota* 10.

Solução: Considere $x_{20} = 10$. Logo, $x_1 + \cdots + x_{19} + x_{20} = 20 \times 7$. Portanto,

$$M = \frac{x_1 + \cdots + x_{19}}{19} = \frac{140 - 10}{19} = \frac{130}{19} \approx 6{,}84.$$

□

5. *(UFPE) Em um exame a média aritmética de todos os alunos foi* 5,2*, enquanto a média dos aprovados foi* 5,9 *e a dos reprovados foi* 4,3*. Descoberto um erro na elaboração de uma das questões, a banca resolveu adicionar* 1,0 *à nota de cada um dos alunos. Observou-se então que a média dos aprovados subiu para* 6,5 *e a dos reprovados subiu para* 4,8*. Sabendo-se que o número de alunos que participaram do exame é inferior a* 300*, calcule o número de*

alunos que inicialmente estavam reprovados, mas que foram aprovados depois do acréscimo às notas.

Solução: Seja A e R o número de alunos aprovados e reprovados inicialmente, respectivamente. Logo, temos,

$$\frac{5{,}9A + 4{,}3R}{A + R} = 5{,}2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{9R}{7}. \quad (\star)$$

Seja x o número de alunos que estavam reprovados e passaram a aprovados. Logo,

$$\frac{6{,}5(A + x) + 4{,}8(R - x)}{A + R} = 6{,}2 \quad \Rightarrow \quad 17x = 14R - 3A. \quad (*)$$

Substituindo $(\star)$ em $(*)$, temos,

$$17x = 14R - 3\left(\frac{9R}{7}\right) \quad \Rightarrow \quad 119x = 71R \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{71} = \frac{R}{119} = k.$$

Por $(\star)$,

$$A = \frac{9R}{7} = \frac{9 \times 119k}{7} = 153k.$$

Como $A + R < 300$, temos $k = 1$ e portanto $x = 71$. □

B.2 Resolução dos exercícios 1.2 (página 7)

1. *Demonstre a fórmula do termo geral da PG,*

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

cujo o primeiro termo é a_1 e a razão é q.

Solução: Demonstrando por indução, note que para $n = 1$ o resultado é obviamente verdadeiro. Suponhamos que seja válida para n e provemos para $n + 1$.

De fato, basta observar que

$$a_{n+1} = a_n.q \overbrace{=}^{(hi)} a_1.q^{n-1}.q = a_1 + q^{(n+1-1)}.$$

□

2. *Demonstre que se* (a_i) *é uma PG não nula, temos* $a_n.a_m = a_p.a_q$*, se, e somente se,* $n+m = p+q$*.*

   Solução: Imediato, basta observar que,

$$a_n.a_m = a_p.a_q \;\Leftrightarrow\; a_1^2.q^{n-1}.q^{m-1} = a_1^2.q^{p-1}.q^{q-1} \;\Leftrightarrow\; q^{n+m-2} = q^{p+q-2} \;\Leftrightarrow\; n+m = p+q.$$

□

3. *Considere uma PG tal que* $a_8 = 1$ *e* $a_{16} = 625$ *determine* a_{10}*.*

   Solução: Basta perceber que $a_{12} = \sqrt{a_8.a_{16}} = \sqrt{1.625} = 25$ e $a_{10} = \sqrt{a_8.a_{12}} = \sqrt{25} = 5$. □

4. *Justifique a fórmula,* $|P_n| = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$*, do produto dos termos de uma PG e determine o produtos dos* 40 *termos de uma PG cujo primeiro e o quadragésimo termo são* 1 *e* 2 *respectivamente.*

   Solução: Considere $P_n = a_1.a_2.\cdots.a_{n-1}.a_n$ e reescreva o produto na ordem inversa dos termos, $P_n = a_n.a_{n-1}.\cdots.a_2.a_1$. Agora multiplique as duas expressões termo a termo, na ordem.

$$P_n{}^2 = (a_1.a_n).(a_2.a_{n-1}).\cdots.(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1).$$

   Pelo exercício 2, sabemos que $a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = \cdots = a_{n-1}.a_2 = a_n.a_1$, logo

$$P_n{}^2 = (a_1.a_n)^n \quad\Leftrightarrow\quad |P_n| = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

   Aplicando a fórmula no caso acima, temos,

$$|P_{40}| = (1 \times 2)^{\frac{40}{2}} = 2^{20}.$$

   Como a_1 e a_{40} são ambos positivos, então a PG é positiva, logo, $P_{40} = 2^{20}$.

□

5. *Demonstre a fórmula*

$$P_n = {a_1}^n .\, q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

para o produto dos n primeiros termos de uma PG, dados a_1 *- o primeiro termo e* q *- razão.*

Solução: Imediato, basta observar

$$P_n = a_1.a_2.\cdots.a_{n-1}.a_n = (a_1).(a_1\, q).(a_1\, q^2).\cdots.(a_1\, q^{n-1}) = {a_1}^n .\, q^{1+2+\cdots+n-1}.$$

Mas sabemos pela fórmula da soma de PA que,

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{(1 + \ n - 1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

6. *Considere que a taxa de rendimento de um fundo de renda fixa tenham sido* 10% *no primeiro quadrimestre,* 20% *no segundo e* 15% *no terceiro. Determine a taxa média de rendimentos anuais.*

Solução: Queremos encontrar uma determinada taxa i, tal que

$$(1+i)^3 = (1+0{,}1)(1+0{,}2)(1+0{,}15).$$

Logo,

$$(1+i) = \sqrt[3]{1{,}1 \times 1{,}2 \times 1{,}15} \approx 1.1493,$$

que nos dá uma taxa média de aproximadamente 14,93%. □

7. *Suponha que a média geométrica de n números seja G, qual será a média dos números obtidos elevando cada número da sequência original por a e multiplicando por b, onde* $a > 0$ *e* $b > 0$*, isto é,* $y_i = bx_i^a$*.*

Solução: Temos $G^n = a_1.a_2.\cdots..a_n$. Seja $\mathcal{G}^n = y_1.y_2.\cdots.y_n$. Logo,

$$\mathcal{G}^n = bx_1^a.bx_2^a.\cdots.bx_n^a = b^n.(x_1.\cdots.x_n)^a = b^n.(G^n)^a = b^n.(G^a)^n.$$

Portanto, $\mathcal{G} = b.G^a$. □

B.3 Resolução dos exercícios 1.3 (página 10)

1. *Três torneiras ligadas sozinhas enchem um tanque em* $3\,\mathrm{h}$, $4\,\mathrm{h}$ *e* $6\,\mathrm{h}$ *respectivamente. Ligando as três torneiras simultaneamente, quanto tempo levarão para encher o tanque sabendo que há um vazamento capaz de esvaziar o tanque em* $12\,\mathrm{h}$.

   Solução: Basta fazer,

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}.$$

   Donde,

$$x = \frac{3}{2} = 1{,}5\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}\,.$$

   □

2. *Prove que média geométrica entre dois termos é média geométrica entre as médias harmônica e aritmética desses dois termos.*

   Solução: De fato, dados x e y reais positivos, temos $G = \sqrt{x.y}$, $A = \frac{x+y}{2}$ e $H = \frac{2xy}{x+y}$, logo,

$$\sqrt{A.H} = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{2xy}{x+y}\right)} = \sqrt{x.y} = G.$$

   □

3. *(UPE) A empresa "Consultores Associados" firmou contrato com a "Roupagem S/A", para o planejamento de Marketing na cidade do Recife. Os administradores Júnior, Daniela e Maria Eduarda, foram convocados para realizarem o trabalho. Após várias reuniões foi constatado que, Júnior e Daniela, trabalhando juntos, fariam o planejamento em 15 dias. Júnior e Maria Eduarda, trabalhando juntos, gastariam 20 dias para realizar o trabalho. Daniela e Maria Eduarda, trabalhando juntas, precisariam de 12 dias para concluir a tarefa. Se Maria Eduarda trabalhasse sozinha, em quantos dias estaria concluído o planejamento?*

   Solução: Seja J, D e M o tempo em dias que Júnior, Daniela e Maria Eduarda levariam para fazer o serviço sozinhos. Logo,

$$\frac{1}{J} + \frac{1}{D} = \frac{1}{15}\,, \quad \frac{1}{J} + \frac{1}{M} = \frac{1}{20} \quad \text{e} \quad \frac{1}{D} + \frac{1}{M} = \frac{1}{12}.$$

Somando as duas últimas equações e subtraindo a primeira obtemos,

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15}.$$

Donde $M = 30$ dias. □

4. *(UFPE) Suponha que os pneus novos de um automóvel duram* 30.000 km *quando usados nas rodas dianteiras e* 50.000 km *quando usados nas rodas traseiras. Calcule o número máximo de quilômetros que um carro pode rodar começando com 4 pneus novos e fazendo um rodízio adequado entre eles.*

Solução: Seja d a distância que teremos que percorrer com os pneus até fazer o rodízio. Logo $2d$ é a distância máxima percorrida caso um rodízio adequado seja realizado. Ao rodarmos com um pneu nas rodas dianteiras, consumimos $\frac{d}{30.000}$ dele, e quando rodamos na traseira, consumimos $\frac{d}{50.000}$ dele. Logo, temos que,

$$\frac{d}{30.000} + \frac{d}{50.000} = 1 \quad \therefore \quad d = 18.750\,\text{km}.$$

Logo a distância máxima procurada é $2d = 37.500$ km □

5. *No trapézio $ABCD$ abaixo M e N são pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. P é o ponto de interseção das diagonais AC e DB. XY é paralelo à AB e passa pelo ponto P.*

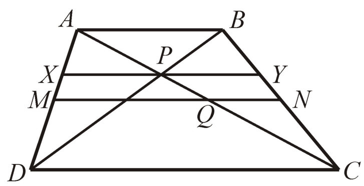

Figura B.1: Desigualdade A-H (solução do problema).

Mostre que $\overline{XY}$ é média harmônica de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e $\overline{MN}$ é média aritmética de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Solução: Como o triângulo ABD é semelhante ao triângulo XPD, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XP}} \quad \Rightarrow \quad (\star)\ \overline{XD} = \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{AB}}.$$

Pela semelhança dos triângulos AXP e ADC, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XP}} \quad \Rightarrow \quad (*)\ \overline{AX} = \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{DC}}.$$

Somando as expressões $(*)$ e $(\star)$ obtemos,

$$\overline{AD} = \overline{AX} + \overline{XD} = \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{AB}}.$$

Logo, dividindo toda expressão por $\overline{AD}$, obtemos

$$1 = \frac{\overline{XP}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{XP}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\overline{XP}} = \frac{1}{\overline{DC}} + \frac{1}{\overline{AB}}.$$

De modo análogo, através das semelhanças entre os triângulos ABC e PYC e entre BDC e BPY, obtemos que

$$\frac{1}{\overline{PY}} = \frac{1}{\overline{DC}} + \frac{1}{\overline{AB}}.$$

Logo concluímos que $\overline{XP} = \overline{PY}$, e portanto a expressão acima pode ser reescrita como,

$$\frac{2}{\overline{XY}} = \frac{1}{\overline{DC}} + \frac{1}{\overline{AB}}.$$

Provando que $\overline{XY}$ é a Média Harmônica de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Para a segunda parte, basta observar que $\overline{QN} = \frac{\overline{AB}}{2}$, por semelhança entre os triângulos CNQ e CBA e $\overline{MQ} = \frac{\overline{DC}}{2}$, por semelhança entre os triângulos AMQ e ADC. Donde,

$$\overline{MN} = \overline{MQ} + \overline{QN} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}.$$

□

Observe que o problema acima nos fornece uma demonstração para a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, para dois termos, ou seja, $A \geq H$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $\overline{AB} = \overline{DC}$.

B.4 Resolução dos exercícios 1.4 (página 11)

1. *Considere a função real de variável real:*

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2}{n}}.$$

Prove que $\bar{x}$*, a média aritmética dos* x_i*'s, é o valor que minimiza o desvio padrão.*

Solução: Para minimizar σ, basta minimizar a função $\sigma(x)^2$. Desenvolvendo $\sigma(x)^2$, temos,

$$\sigma(x)^2 = x^2 - 2\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}x + \frac{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n}.$$

Como essa função é uma função quadrática, da forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, o mínimo ocorre no vértice, onde $x_v = \frac{-b}{2a}$. Logo,

$$x_v = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

□

B.5 Resolução dos exercícios 2.1 (página 22)

1. *Dois problemas clássicos de otimização são os de determinar a* **área máxima** *de um retângulo, onde é dado o perímetro e o dual, onde se pede o* **perímetro mínimo** *de um retângulo com uma determinada área. Prove que em ambos casos a otimização é obtida quando o retângulo é um quadrado.*

Solução: Sejam x e y as dimensões do retângulo, logo $2p = 2x + 2y$ e $A = xy$ são o perímetro e a área do retângulo. Pela desigualdade $A \geq G$, temos

$$\frac{2p}{2} = \frac{2x + 2y}{2} \geq \sqrt{2x.2y} = 2\sqrt{x.y} = 2\sqrt{A}.$$

Donde se o perímetro for dado a área máxima será dada por $A = \left(\frac{2p}{4}\right)^2$, quando $x = y$. E se a área for dada o perímetro mínimo será dado por $2p = 4\sqrt{A}$, com $x = y$. □

2. *Prove que para todo ângulo agudo x temos:* $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \geq 2$.

Solução: Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\operatorname{tg} x > 0$ e $\operatorname{cotg} x > 0$. Aplicando a desigualdade $A \geq G$ temos,

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2} \geq \sqrt{\operatorname{tg} x . \operatorname{cotg} x} = 1$$

portanto,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \geq 2.$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$, ou seja, quando $x = \pi/4$. □

3. *Sejam b e c catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a. Prove que $b + c \leq a\sqrt{2}$.*

Solução: Pela desigualdade $Q \geq A$, temos

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \frac{b + c}{2}.$$

Utilizando o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos,

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \frac{b + c}{2}.$$

com a igualdade ocorrendo apenas quando $b = c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, num triângulo retângulo isósceles.

□

4. *Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência. Sejam x e y as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Demonstre a desigualdade $A \geq G$ para x e y utilizando a situação descrita.*

Solução: Num triângulo retângulo inscrito numa circunferência temos que a hipotenusa é um diâmetro. Logo $\overline{CB} = \overline{CH} + \overline{HB} = x + y = 2R$, $\overline{OA} = R$ e denote $\overline{AH} = h$.

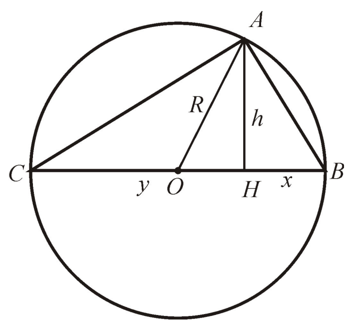

Figura B.2: Desigualdade *A*-*G*, triângulo retângulo inscrito (solução do problema).

Note que $\overline{OA} \geq \overline{AH}$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $\overline{CA} = \overline{BA}$, ou seja, quando os triângulos AHC e AHB forem congruentes, e portanto $y = \overline{CH} = \overline{HB} = x$. Por semelhança entre os triângulos AHC e BHA, temos que $h^2 = xy$. Portanto,

$$\overline{OA} = R = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = h = \overline{AH}$$

com a igualdade só ocorrendo quando $x = y$. □

5. *Considere duas circunferências de centros O_1 e O_2 e diâmetros x e y tangentes exteriormente e tangentes à uma mesma reta, t, nos pontos T_1 e T_2. Utilizando que $\overline{O_1O_2} \geq \overline{T_1T_2}$ demonstre a desigualdade $A \geq G$.*

Solução: Seja O_2A é um segmento paralelo a T_1T_2. Com isso temos que $O_2T_2T_1A$ é um retângulo. Portanto O_1O_2A é um triângulo retângulo de hipotenusa O_1O_2.

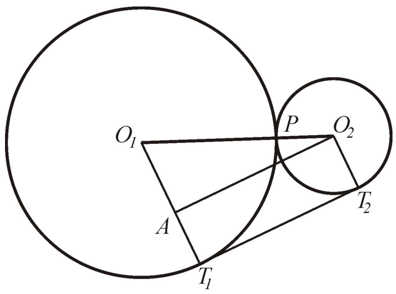

Figura B.3: Desigualdade A-G, circunferências tangentes (solução do problema).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo O_1O_2A, temos,

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{T_1T_2}^2 \;\therefore\; \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \overline{T_1T_2}^2 \;\therefore\; \overline{T_1T_2}^2 = xy.$$

Logo,

$$\overline{O_1O_2} \geq \overline{T_1T_2} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{x\,y}$$

com a igualdade só ocorrendo quando $\overline{O_1A} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 0$, ou seja, $x = y$. □

6. (ProfMat) *Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando* 40 m *de cerca e aproveitando um muro (de mais de* 40 m*) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

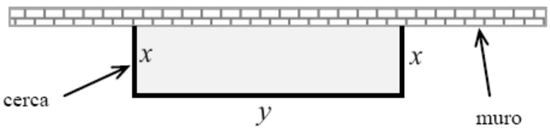

Figura B.4: Área máxima com perímetro fixo (solução do problema).

Solução: Conforme indicado na figura temos $2x + y = 40$. Pela desigualdade $A \geq G$ temos,

$$20 = \frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2x\,y} = \sqrt{2A},$$

logo a área será máxima, quando $\sqrt{2A} = 20 \therefore A = 200$, e acontece quando $2x = y = 20$. $\square$

7. *No problema anterior, qual o menor comprimento de cerca necessário para que o fazendeiro cerque uma área de* $162\,\text{m}^2$ *?*

Solução: Aplicando novamente a desigualdade $A \geq G$, temos

$$\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2x\,y} = \sqrt{2A} = \sqrt{324} = 18$$

o valor mínimo para a cerca acontece quando a igualdade acima ocorrer, ou seja, $2x+y = 36$, com $2x = y = 18$. $\square$

8. *Determine os lados do retângulo cuja diagonal mede* 8 cm *sabendo que o retângulo tem perímetro máximo.*

Solução: Denotando as dimensões do retângulo por x e y, pelo Teorema de Pitágoras temos $8^2 = x^2 + y^2$.

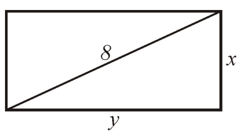

Figura B.5: Perímetro máximo com diagonal fixa (solução do problema).

Aplicando a desigualdade $Q \geq A$, temos

$$4\sqrt{2} = \sqrt{\frac{8^2}{2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} = \frac{2x+2y}{4} = \frac{2p}{4},$$

logo o perímetro máximo ocorre quando a igualdade é estabelecida acima, ou seja, quando $x = y = 4\sqrt{2}$, e o perímetro máximo será $2p = 16\sqrt{2}$. □

9. *(UFPE) Qual o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente à circunferência* $x^2 + y^2 = 50$*, pode assumir?*

Solução: Pela desigualdade $Q \geq A$ temos,

$$5 = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}.$$

Então o valor máximo que a soma das coordenadas pode assumir é $x + y = 10$, e ocorre quando $x = y = 5$. □

10. *Encontre as dimensões de retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, que esteja inscrito em uma elipse de equação:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (*)$.

Solução: Como os vértices estão sobre a elipse, as coordenadas satisfazem a equação $(*)$. Aplicando a desigualdade $Q \geq G$ aos termos $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ temos,

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)}.$$

Como a área do nosso retângulo é dada por $A = (2x)(2y)$ temos da desigualdade acima,

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{xy}{ab}} = \sqrt{\frac{A}{4ab}}.$$

Logo a área máxima acontece quando a igualdade acima ocorre, ou seja, quando $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ e é igual a $A = 2ab$. Nesse caso temos $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

11. *Sabendo que a área total de um paralelepípedo reto retângulo mede* $24\,\mathrm{cm}^2$ *determine o volume máximo do paralelepípedo.*

Solução: Pela Teorema 2, da página 16, sabemos que para reais positivos x, y e z, vale a desigualdade,

$$\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

com a igualdade só ocorrendo quando $x = y = z$. Logo se x, y e z são as dimensões do paralelepípedo retângulo, então sua área total é dada por $A = 2(xy + yz + zx)$ e o volume por $V = xyz$. Portanto da desigualdade acima, obtemos

$$2 = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{\frac{A}{6}} \geq \sqrt[3]{V}. \quad (\star)$$

O volume máximo ocorre quando $x = y = z$, que nos deixa com a igualdade em $(\star)$,

$$\sqrt[3]{V} = 2 \quad \therefore \quad V = 8\,\text{cm}^3.$$

$\square$

12. *Qual a área total mínima de um paralelepípedo retângulo de volume $\mathcal{V}$?*

Solução: Análogo ao exercício anterior. A área total mínima ocorre quando da igualdade $x = y = z$ em $(\star)$, logo

$$\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{6}} = \sqrt[3]{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} = 6\mathcal{V}^{\frac{2}{3}}.$$

Em ambos problemas, a otimização ocorre quando o paralelepípedo é um cubo. $\square$

13. *Prove que o triângulo equilátero é o que possui maior área entre todos os triângulos com um determinado perímetro fixo.*

Solução: Podemos calcular a área do triângulo pela fórmula de Heron,

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo. Utilizando a desigualdade $A \geq G$ para os termos $(p-a)$, $(p-b)$ e $(p-c)$, temos,

$$\frac{2p}{3} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt[3]{\frac{A^2}{p}}.$$

A área será máxima quando a igualdade ocorrer na desigualdade acima, ou seja, quando $(p-a) = (p-b) = (p-c)$, e portanto $a = b = c$. $\square$

14. *(ITA) Mostre que*

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > \binom{8}{4}.$$

Solução: Aplicando a desigualdade $A \geq G$ aos termos $\frac{x}{y}$, 1, 1 e $\frac{y}{x}$, temos,

$$\frac{\frac{x}{y} + 1 + 1 + \frac{y}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y}.1.1.\frac{y}{x}} = 1$$

donde,

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} \geq 4$$

Logo,

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq 4^4 = 256 > \binom{8}{4}.$$

□

15. *Seja* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *uma sequência de números reais positivos e* $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$*, uma sequência de números racionais positivos cuja soma seja igual a 1. Mostre que:*

$$k_1.x_1 + k_2.x_2 + \cdots + k_n.x_n \geq x_1^{k_1}.x_2^{k_2}.\cdots.x_n^{k_n}.$$

Solução: Note que se tivéssemos $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ inteiros positivos, utilizando a desigualdade $A \geq G$, obteríamos,

$$\begin{aligned}
\frac{p_1.x_1 + p_2.x_2 + \cdots + p_n.x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} &= \frac{\overbrace{x_1 + \cdots + x_1}^{p_1} + \overbrace{x_2 + \cdots + x_2}^{p_2} + \cdots + \overbrace{x_n + \cdots + x_n}^{p_n}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \\
&\geq \sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{\underbrace{(x_1.\ldots.x_1)}_{p_1}.\underbrace{(x_2.\ldots.x_2)}_{p_2}.\cdots.\underbrace{(x_n.\ldots.x_n)}_{p_n}} \\
&= \sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{x_1^{p_1}.x_2^{p_2}.\cdots.x_n^{p_n}}.
\end{aligned}$$

No caso de k_i racional, considere Q inteiro de modo que $k_i = \frac{p_i}{Q}$, com p_i inteiro para todo i. Observe que,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{Q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = Q.$$

Logo, recaímos no caso inteiro,

$$\begin{aligned}
k_1.x_1 + k_2.x_2 + \cdots + k_n.x_n &= \frac{p_1}{Q}.x_1 + \frac{p_2}{Q}.x_2 + \cdots + \frac{p_n}{Q}.x_n \\
&= \frac{p_1.x_1 + p_2.x_2 + \cdots + p_n.x_n}{Q} \\
\text{(caso inteiro)} \quad &\geq \sqrt[Q]{x_1^{p_1}.x_2^{p_2}.\cdots.x_n^{p_n}} \\
&= x_1^{\frac{p_1}{Q}}.x_2^{\frac{p_2}{Q}}.\cdots.x_n^{\frac{p_n}{Q}} \\
&= x_1^{k_1}.x_2^{k_2}.\cdots.x_n^{k_n}.
\end{aligned}$$

□

16. *(ProfMat) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).*

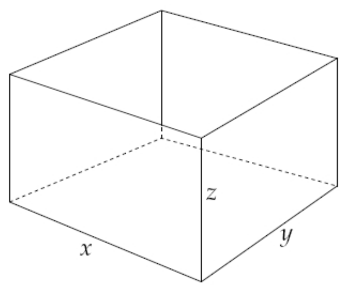

Figura B.6: Área mínima com volume fixo (solução do problema).

(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.

(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior do que ou igual a 48.

(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

Solução:

a) Área: $\mathcal{A} = xy + 2xz + 2yz$, Volume: $\mathcal{V} = x\,y\,z$.

b) Pela desigualdade $A \geq G$ aplicada aos termos xy, $2xz$ e $2yz$, temos:

$$\frac{\mathcal{A}}{3} = \frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy.2xz.2yz} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{4\mathcal{V}^2} = 16.$$

Logo $\mathcal{A} \geq 3.16 = 48$.

c) A área será mínima quando a igualdade ocorrer, ou seja, quando $xy = 2xz = 2yz \Rightarrow x = y = 2z$. Como $\mathcal{V} = x.y.z = 32 \quad \therefore \quad 4z^3 = 32 \quad \therefore \quad z = 2$ e $x = y = 4$. $\square$

17. *De uma folha de cartolina retangular de lados $2a$ e $2b$, $a > b$, retiramos quadrados de lados $x < b$ de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um retângulo de lados $(2a - 2x)$ e $(2b - 2x)$, e cuja altura é x. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?*

Solução: O volume da caixa pode ser calculado fazendo $\mathcal{V} = (2a - 2x)\,(2b - 2x)\,x$. Aplicamos a desigualdade das médias escolhendo os termos de modo a obter uma cota máxima independente de x. Para tanto temos que fazer um ajuste semelhante ao da Aplicação 16, página 21. O artifício agora consiste em utilizar a desigualdade A-G, com os termos de $\mathcal{V}$ colocados em G e fazer A constante. Para tanto, acrescentaremos α e β de modo a não alterar o produto em G, mas com o objetivo de tornar A independente de x. Procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\mathcal{V}} = \sqrt[3]{\frac{x}{\alpha\,\beta}.\alpha(2a-2x).\beta(2b-2x)} &= \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\,\beta}}\,.\,\sqrt[3]{x.\alpha(2a-2x).\beta(2b-2x)}\\
&\leq \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\,\beta}}\,.\left(\frac{x+\alpha(2a-2x)+\beta(2b-2x)}{3}\right)\\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\,\beta}}\,.\left(\frac{(1-2\alpha-2\beta)x+2a\alpha+2b\beta}{3}\right).
\end{aligned}$$

Onde a desigualdade acima temos um fator comum $\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\,\beta}}$ e a desigualdade $G \leq A$, calculadas nos termos x, $\alpha(2a - 2x)$ e $\beta(2b - 2x)$. Note que em A temos no numerador $x + \alpha(2a - 2x) + \beta(2b - 2x) = (1 - 2\alpha - 2\beta)x + 2a\alpha + 2b\beta$. Como queremos que A independa de x, fazemos $2\alpha + 2\beta = 1$ $(*)$. Porém, sabemos que a igualdade das médias só ocorre (o máximo para $\mathcal{V}$) quando $x = \alpha(2a - 2x) = \beta(2b - 2x)$, ou seja, $2\alpha = \dfrac{x}{a - x}$ e $2\beta = \dfrac{x}{b - x}$. Portanto, substituindo em $(*)$ temos,

$$\frac{x}{a-x} + \frac{x}{b-x} = 1$$

$$(a-x)(b-x) = bx - x^2 + ax - x^2$$

$$3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$$

Donde concluímos,

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}.$$

Observando que a aplicação 13, página 19, é um caso particular, notamos que a solução desejada ocorre com

$$x = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}.$$

□

18. *(ProfMat) Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.*

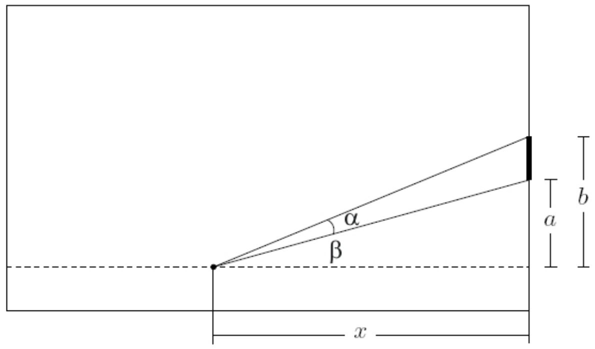

Figura B.7: Ângulo máximo de visão (solução do problema).

Solução: O ângulo α, agudo, será máximo quando $\operatorname{tg}\alpha$ for máximo. Pela figura acima, temos,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}((\alpha+\beta)-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta).\operatorname{tg}\beta} \\ &= \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}.\frac{a}{x}} \\ &= \frac{b-a}{x+\frac{ba}{x}}\end{aligned}$$

logo $\operatorname{tg}\alpha$ será máxima quando o denominador $d = x + \frac{ba}{x}$ for mínimo. Utilizando a desigualdade $A \geq G$ temos

$$\frac{d}{2} = \frac{x+\frac{ba}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{ba}{x}} = \sqrt{ba}.$$

Portanto d será mínimo quando a igualdade acima ocorrer, ou seja, quando

$$x = \frac{ba}{x} \;\therefore\; x = \sqrt{ba}.$$

$\square$