Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

A análise combinatória nos vestibulares militares e olimpíadas. [†]

por

WILLIAM LACERDA MOURÃO

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Dissertação apresentada como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT.

10/2018
João Pessoa - PB

[†] O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A análise combinatória nos vestibulares militares e olimpíadas.

por

WILLIAM LACERDA MOURÃO

Dissertação apresentada como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT

Área de Concentração: Matemática Discreta, Análise Combinatória.

Aprovada por:

Prof.Dr. Carlos Bocker Neto -UFPB (orientador)

Prof.Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB (membro interno ao programa)

Prof.Dr. Thiago José Machado - UFPB (membro externo ao programa)

Outubro/2018

Agradecimentos

Quero agradecer em especial a minha mãe, Eva Maria Lacerda Mourão, que sempre me apoiou em tudo o que eu fiz e faço até hoje. Agradeço ao meu pai, Aloizio Veras Mourão, que sempre investiu na minha educação, e a quem devo tudo o que tenho hoje. Agradeço ao meu irmão Aloizio Veras Mourão Jr. que dividiu comigo a responsabilidade de estudar sozinho longe dos pais, quando ainda éramos muito jovens. Agradeço a minha esposa Maria Zelita Remígio Filha, que sempre me apoia nos momentos difíceis, e a minha filhinha Ana Júlia Remígio Mourão, por sempre alegrar o meu dia. Gostaria também de agradecer ao meu orientador professor Dr. Carlos Bocker Neto, que foi de fundamental importância para a realização desse trabalho, sempre ajudando e orientando em tudo o que foi necessário durante todo o processo de realização da dissertação.

Dedicatória

A todos que sempre me apoiam e querem o meu bem.

Resumo

Nesse trabalho será estudado um importante tema da Matemática Discreta, a Análise Combinatória que muito amedronta os alunos de diversos cursos de graduação, bem como os alunos do ENSINO MÉDIO e os professores que ministram a matéria. O objetivo do trabalho é mostrar alguns problemas de Análise Combinatória e as diferentes formas de abordar o assunto nos vestibulares militares e olimpíadas.

Palavras-chave: Métodos de contagem, análise combinatória, problemas de contagem.

Abstract

In this work it will be studied an important topic of Discrete Mathematics, the Combinatorial Analysis that usually scare students of several undergraduate courses, as well as the high school students and the teachers who teach the subject. The purpose of the paper is to show some problems of Combinatorial Analysis and the different ways of approaching the subject, in special, at military and olimpic exams.

Keywords: Methods of counting, combinatorial analysis, counting problems.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A Análise Combinatória é um ramo clássico da matemática, embora represente um caso especial de outros ramos da matemática, pelo motivo principal de não haver uma teoria axiomática para ela [9]. Por classificação axiomática, pode-se pensar a combinatória como um capítulo de teoria dos números, mas claramente, com tipos totalmente diferentes de problemas.

Alguns dos maiores matemáticos estudaram problemas de combinatória, por exemplo, no século $XVIII$ o matemático Leonhard Euler estudou o seguinte problema:

"Escritas n cartas endereçadas a n diferentes destinatários, de quantas formas distintas elas podem ser colocadas em n envelopes, de modo que nenhuma delas seja colocada no envelope correto?"[11].

Esse problema se resolve usando o conceito de permutações caóticas, que trata em estabelecer uma fila entre n objetos, cada um em sua posição correta e logo depois refazer a fila de tal modo que os objetos não ocupem suas posições iniciais. A mesma ideia pode ser aplicada à brincadeira de amigo secreto, onde as pessoas colocam os nomes em papéis, dobram e submetem os nomes a um sorteio para retirar o nome de outra pessoa, a brincadeira não tem sentido se alguém retirar a si próprio.

Há também como outro exemplo, o famoso problema de Lucas cujo enunciado é:

"De quantas maneiras casais podem se sentar em cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas, e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?"[6].

Essa pergunta foi elaborada pelo francês Édouard Lucas em 1891, e resolvida pelo canadense Irving Kaplansky, que publicou um artigo com dois lemas para a resolução do problema, sendo esse resolvido com o segundo lema de Kaplansky.

A Análise Combinatória começa de forma bem intuitiva com os princípios multiplicativo e aditivo, depois passa por grupos de problemas semelhantes, que possuem resoluções de mesmo princípio, como é o caso de problemas que envolvem o uso da ferramenta de combinação, em que a ordem das escolhas não importa, isso é o que ocorre quando se deseja escolher dois pares de tênis, entre cinco pares disponíveis para uma viagem.

Há também problemas onde alguns tipos específicos de técnicas são muito úteis para a resolução como é o caso de problemas resolvidos pelo princípio da inclusão e exclusão.

A ideia desse trabalho foi abordar problemas que costumam cair em concursos públicos militares a nível de ENSINO MÉDIO, como AFA (Academia da Força Aérea), ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), entre outros, e que tem alguns padrões que se repetem, como, por exemplo, o fato de que a maioria dos problemas propostos tem de ser quebrados em casos mais simples dentro da situação proposta, para tornar o raciocínio de resolução mais fácil.

Em alguns problemas, foram dadas mais de uma solução para se executar as contagens de maneiras diferentes, para se perceber como duas ferramentas distintas de contagem podem ser usadas com estratégias diferentes para se chegar ao mesmo resultado de contagem.

Um outro ramo abordado foi analisar uma miscelânea de problemas de olimpíadas de vários países, que usassem os mesmos princípios de contagem usados no texto base. Ambas as partes, tanto de vestibulares militares, quanto de problemas olímpicos, usam estratégias de construção de soluções bem diferentes, em geral as questões de olimpíadas requerem uma imaginação maior para que as soluções sejam montadas.

A abordagem do trabalho foi feita em três capítulos, um inicial com os métodos fundamentais de contagem em problemas mais gerais, trazendo as ferramentas de permutações simples, permutações com repetição, permutações circulares, combinações simples e combinações com repetição. Foi evitado o uso de arranjos, uma vez que o princípio fundamental da contagem já resolve a necessidade do uso de arranjos simples e também dos arranjos com repetição.

Num segundo capítulo, são abordadas algumas ferramentas de resolução de problemas mais específicas de contagem, com um estudo sobre o princípio da inclusão e exclusão, permutação caótica, lemas de Kaplansky, e princípio da reflexão. São abordados problemas específicos com o uso direto desses métodos para a resolução de exemplos que podem ser cobrados de um estudante do ENSINO MÉDIO.

No terceiro capítulo são abordados alguns tipos de problemas recorrentes em exames de escolas militares e de olimpíadas. Muitos estudantes tem a curiosidade de saber como o assunto é abordado nesses exames, no sentido de quais as melhores técnicas de resolução para se raciocinar, ou quais ferramentas são as melhores para se utilizar.

Os problemas foram colocados de maneira a se tornarem acessíveis para estudantes e professores que queiram ter uma ideia de como alguns problemas de raciocínio bem interessantes podem ser levados para a sala de aula.

Capítulo 1

Permutações e Combinações

Para o começo do trabalho faremos o estudo das permutações e combinações, porém antes será introduzido o princípio multiplicativo, ou princípio fundamental da contagem.

1.1 Breve Comentário Histórico e o Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Muito do estudo e interesse sobre Combinatória surgiu de jogos e quebra-cabeças, vários dos grandes matemáticos famosos: Gauss, Euler e Hamilton estavam interessados em quebra-cabeças, J. L. Synge certa vez disse : "A mente está no seu melhor quando em jogo."Logo após a Combinatória desenvolveu seus métodos para aplicações em probabilidade, problemas de transportes, criação de horários, programação, estatística, entre outros [1].

A Combinatória tem como objeto de estudo escolher e arrumar objetos em determinadas situações de contagens. Partindo-se do princípio fundamental da contagem e do princípio aditivo, pode-se desenvolver as ferramentas que são usadas em cada caso, como por exemplo, a ferramenta de combinação simples que é utilizada quando não há necessidade de se levar conta na escolha a ordem dos elementos.

Antes de iniciar enunciando o princípio fundamental da contagem, façamos a análise dos seguintes problemas motivadores:

Exemplo 1.1 *Um rapaz deseja sair de sua casa e ir até a faculdade onde faz seu mestrado. Entre sua casa e a universidade há três vias principais A, B, e C que podem ser usadas para lá chegar, de quantas maneiras o rapaz pode ir e voltar da universidade?*

Solução: Para contar de quantas maneiras o aluno pode ir e voltar da universidade, deve-se levar em consideração que ele pode escolher a via de ida de 3 formas diferentes (ele pode ir ou por A, ou B, ou C), a volta (universidade para casa) pode ser feita também de 3 maneiras (ele pode voltar por A, B, ou C), assim o número total de possibilidades é $3 \cdot 3 = 9$ maneiras, ou seja 9 modos de se percorrer o trajeto.

Para efeito de raciocínio as possibilidades de trajetos são: $(A, A); (A, B); (A, C); (B, A); (B, B); (B, C); (C, A); (C, B); (C, C)$, onde a primeira letra dos pares ordenados representa o primeiro caminho escolhido para se ir a faculdade, e a segunda letra, o caminho escolhido para se voltar ao lar, por exemplo ele pode ir a universidade pelo caminho A, e voltar para casa pelo caminho B, o que é representado por (A, B). $\diamond$

Exemplo 1.2 *Suponha agora que o rapaz do Exemplo* 1.1 *queira voltar por um caminho diferente do que tomou para ir à universidade. De quantos modos isso pode ser feito?*

Solução: Nesse caso, ele terá 3 possibilidades para pegar um caminho de ida (A, B, ou C), supondo que ele escolha o caminho A, sem perda de generalidade, ele tem à disposição 2 modos de voltar (B, ou C), e portanto $3 \cdot 2 = 6$ maneiras no total. $\diamond$

Exemplo 1.3 *Uma quadrilha foi realizada entre os alunos de uma sala de* 20 *alunos,* 12 *homens e* 8 *mulheres, de quantos modos podem se formar casais para dançar a quadrilha?*

Solução: Para efeito de raciocínio, seja h_m, com m variando de 1 até 12 e seja m_n com o n variando de 1 até 8, as representações para o homem m e para a mulher n respectivamente que compõem o casal (h_m, m_n).

Para se escolher um homem e formar o par que dançará junto, tem-se 12 modos de escolha possíveis entre $(h_1, h_2, ..., h_{12})$, para se escolher uma mulher, tem-se 8 possibilidades entre $(m_1, m_2, ..., m_8)$.

Assim, sem perca de generalidade, tomando-se h_1 como o primeiro homem a ser escolhido para se formar casais, h_1 tem 8 possibilidades de dançar com uma mulher, são essas: (h_1, m_1); (h_1, m_2);...;(h_1, m_8).

O mesmo pode ser feito com $h_2, h_3..., h_{12}$, e como há no total 12, esse procedimento pode ser feito 12 vezes, com cada homem tendo a possibilidade de escolher 8 mulheres, portanto será possível formar $12 \cdot 8 = 96$ casais para a quadrilha. $\diamond$

A partir desses 3 exemplos, pode-se enunciar o princípio fundamental da contagem:

"Se o primeiro elemento ou objeto de um par ordenado puder ser selecionado de n_1 formas e para cada uma dessas n_1 formas o segundo elemento do par puderser selecionado de n_2 formas, então, o númro de pares é $n_1 \cdot n_1$."[2]

Esse princípio pode ser expandido para uma quantidade x de decisões a serem tomadas em seguida uma da outra, assim um enunciado mais completo para o princípio é:

"Se existem x_1 modos de se tomar uma decisão, e logo após x_2 modos de se tomar uma segunda decisão, e assim sucessivamente até se tomar a enésima decisão de x_n modos, existem no total $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ maneiras de se tomarem as n decisões uma após a outra em sequência."[10]

Quando for preciso, ao longo do trabalho, se referir ao princípio fundamental da contagem, para efeito de simplificação, poderá ser usada a sigla PFC.

1.2 Permutações Simples

Para começar a entender o significado das permutações pode-se fazer a análise do seguinte exemplo:

Exemplo 1.4 *Durante o intervalo de aulas de um colégio, 4 alunos (A, B, C e D) formam uma fila na cantina, de quantos modos pode-se formar essa fila?*

Solução: Usando o princípio fundamental da contagem, o primeiro aluno da fila pode ser escolhido de 4 modos (A, B, C ou D), supondo que D tenha sido escolhido para a primeira posição, sem perda de generalidade.

Para a segunda posição tem-se 3 modos de se fazer a escolha(A, B ou C), e supondo que A foi o escolhido para a segunda posição da fila, prosseguindo a enumeração dos alunos, na terceira escolha, tem-se 2 modos de se escolher o terceiro lugar da fila (B ou C), supondo-se que B foi o escolhido, para terceira posição, tem-se por ultimo apenas 1 modo de escolha do quarto lugar da fila (C).

Assim, tem-se um total de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de se escolher as posições dos alunos na fila. $\diamond$

Pode-se definir então a permutação de n objetos distintos como sendo o conjunto de todos os agrupamentos ordenados desses n objetos [5].

De maneira geral, a permutação de n objetos é representada por $P_n = n!$, onde $n!$ representa o fatorial de n, que é um número natural definido da seguinte forma [10]:

Definição 1.1

$$\begin{cases} n! = 1, \; se \; n = 0 \;\; ou \; n = 1; \\ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \; se \; n > 1 \end{cases}$$

Logo no **Exemplo 1.4**, poderia-se responder que o número de maneiras de se formar a fila entre os 4 alunos na cantina é $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

1.3 Permutação com Repetição

As permutações podem também ser usadas quando há elementos repetidos, como é o caso quando se deseja contar o número de anagramas de uma palavra, em que alguma letra aparece repetida.

Para exemplificar tal situação, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 1.5 *Qual é o número de anagramas da palavra ASA? Chama-se anagrama de uma palavra a qualquer permutação que se possa formar com todas as letras dessa palavra [10].*

Solução:

Aparentemente, para se resolver tal problema poderia ser intuitivo simplesmente permutar as 3 letras (A,A,S) da palavra, porém permutar uma letra A por outra letra A não surte efeito nenhum para um possível anagrama novo.

Para melhor entender isso suponha-se que existam A_1 e A_2 diferentes na palavra ASA, assim fazendo-se $P_3 = 3! = 6$, teria-se 6 anagramas possíveis que são:

A_1SA_2, A_1A_2S, SA_1A_2, SA_2A_1, A_2SA_1 e A_2A_1S.

Analisando-se o anagrama A_1SA_2, este é igual ao anagrama A_2SA_1, pois A_1 é a mesma letra que A_2 que é a letra A.

Para fazer a correção dessa contagem, deve-se dividir o número de anagramas encontrados por 2, pois existem P_2 modos de se colocar A_1 e A_2 em fila (A_1A_2, ou A_2A_1).

Logo a resposta para o cálculo desse exemplo pode ser feita usando $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$.

$\diamond$

De maneira geral, para n elementos, juntamente com as repetições de $n_1, n_2, ..., n_k$, de cada grupo de elementos que se repetiu respectivamente, tem-se:

Definição 1.2

$$P_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

1.4 Permutações Circulares

Para iniciar a discussão das permutações circulares, tomemos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.6 *Suponha que 3 amigos A, B e C sentem-se à mesa de um restaurante, sendo que a cadeira do A lhe permita ver a porta de entrada, a posição do B lhe dê vista para a cozinha do restaurante, e a cadeira que C senta tenha vista para o aquário do restaurante.*

De quantas maneiras os amigos A, B e C poderiam ter sentado, se o fizessem de maneira diferente da descrita anteriormente, ou seja, o que importasse fosse a posição relativa entre os amigos (B senta à esquerda ou à direita de A, por exemplo), e não as "vistas"que as posições permitem (B enxerga o aquário ou a cozinha, por exemplo)?

Solução:

Supondo-se que na verdade fossem duas perguntas e não apenas uma, a vista das posições importa, ou apenas a posição relativa entre as pessoas importa, tem-se duas maneiras distintas de se pensar.

Caso a vista do cliente importe, basta usar o PFC e concluir que há 6 modos de se arrumar os 3 amigos à mesa, pois supondo que o A sente primeiro, ele pode sentar com 3 vistas distintas, suponha em seguida que o B sente-se depois do A, B tem duas opções de vista, e C, por ser o último, tem apenas 1 modo de se acomodar à mesa.

Já caso apenas a posição relativa entre os amigos importe, ou seja a vista não importa, lembrando que essa foi a pergunta inicial do **Exemplo 1.6**, é disso que trata o objeto de estudo da permutação circular, importância entre posições relativas entre as pessoas.

Dando continuidade ao raciocínio da pergunta do **Exemplo 1.6**, fixando-se o A, B pode estar à direita ou a esquerda de A, e C pode estar à direita ou à esquerda de A.

Para efetuar tal contagem, escolha o amigo que sentará à direita do A, e isso pode ser feito de duas formas (B ou C), suponha que C tenha sido o escolhido para sentar à direita do A, tem-se portanto um único modo de se colocar uma pessoa à esquerda do A (o amigo que sobra, B), assim, há duas maneiras de se sentar os amigos à mesa.

Uma outra maneira de se pensar nesse problema é permutar os 3 amigos sem se importar com as posições relativas entre eles, o que pode ser feito de $3! = 6$ modos, e depois dividir o número 6 encontrado por 3, que é o número de disposições iguais a mais existentes numa disposição com 3 pessoas num círculo.

Com efeito, por exemplo, A pode estar de frente para a cozinha, tendo C a sua direita, e B a sua esquerda, A pode estar de frente para o aquário, tendo C a sua direita e B a sua esquerda, e finalmente A pode sentar-se de frente para a entrada, ainda com C sentado a sua direita e B a sua esquerda (3 configurações relativas correspondentes, C a direita de A e B a esquerda de A), ou seja, foram contadas 3 vezes mais disposições do que de fato é o valor correto.

Dessa maneira a resposta é $PC_3 = \dfrac{3!}{3} = (3-1)! = 2.$ ◇

Generalizando-se o **Exemplo 1.6**, pode-se definir o valor da permutação circular de n elementos como sendo:

Definição 1.3
$$PC_n = (n-1)!$$

1.5 Combinações

As combinações são ferramentas importantes para facilitar as contagens em que não se deseja preocupar com uma ordem prévia na escolha dos elementos [7].

Por exemplo, suponha que a organização de uma corrida de rua decide premiar cada um dos três primeiros lugares com 500,00 reais, não interessa se o corredor A foi o primeiro, o segundo ou o terceiro lugar, em qualquer dessas posições, ele ganhará 500,00 reais.

Já se a organização decidir premiar o primeiro lugar com $800,00$ reais, o segundo colocado com $500,00$ reais e o terceiro lugar com $300,00$ reais, percebe-se que A mudando de posição (1, 2 ou 3), muda-se completamente as possibilidades de premiações.

No primeiro caso apresentado, usa-se a combinação para solucionar a contagem, pois tanto faz ser o primeiro ou o terceiro colocado, uma vez que a premiação é a mesma $500,00$ reais. Já no segundo caso, o PFC é a ferramenta usada para o cálculo do total de maneiras de se premiar três primeiros lugares com premiações diferentes.

Pode-se ainda dividir os problemas de combinações em dois tipos, os que envolvem combinações simples e os que envolvem combinações completas, casos que serão abordados separadamente nas seções seguintes.

1.5.1 Combinações Simples

Muitas vezes, tem-se como objetivo contar elementos sem a necessidade de se preocupar com a ordem em que os elementos são dispostos no conjunto a ser analisado. Nesses casos uma ferramenta de contagem muito importante é a combinação simples. Na próxima seção a combinação simples será diferenciada da combinação com repetição.

Para se chegar a essa ferramenta, suponha o seguinte exemplo:

Exemplo 1.7 *Um colégio dará, como prêmio, para os* 3 *melhores classificados no exame de vestibular de medicina da cidade de João Pessoa,* 3 *viagens para a cidade de Fortaleza. Sabendo-se que* 100 *alunos da escola farão o vestibular, de quantas formas pode-se premiar os* 3 *primeiros lugares com a viagem, sabendo-se que qualquer aluno entre os* 100 *possui as mesmas chances de ser premiado?*

Solução:

Pensando-se no problema, percebe-se que para efeito de premiação, não interessa a classificação dos 3 primeiros lugares, suponha, que os premiados sejam os alunos A, B, e C.

Se o aluno A foi o primeiro lugar, ou se foi o segundo lugar, ou o terceiro lugar, ele vai viajar a Fortaleza de qualquer maneira, o mesmo ocorrerá com os alunos B e C.

Novamente, nesse tipo de situação, percebe-se claramente que não importa a ordem dos 3 primeiros alunos para premiá-los, o que importa é de quantas formas se pode escolher esses 3 alunos no universo de 100 possíveis.

Para se fazer a escolha dos 3 primeiros lugares, podemos imaginar uma fila com 100 alunos, por exemplo $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ..., P_{100}$, onde $P_1, P_2, ..., P_{100}$ são os 100 alunos com chances de serem premiados.

Logo após, podem ser escolhidos os 3 primeiros alunos da fila para ganharem o prêmio separando-se eles por um traço |, e assim separar duas filas: 3 primeiros que ganham o prêmio e os 97 últimos que não ganham o prêmio.

$P_1P_2P_3|P_4P_5...P_{100}$

Para se contar todos os modos de se formar a fila com os 100 alunos, temos 100! maneiras, porém ao se escolher os 3 primeiros alunos da fila A, B, e C, foram contadas as seguintes formações a mais:

(A, B, C);(A,C,B); (B, A, C);(B,C,A); (C, A, B);(C, B, A)

Como em todos esses casos anteriores, os 3 alunos vão para Fortaleza, tem-se que descontar as 3! filas a mais que foram contadas, dividindo-se 100! por 3!.

Além disso os 97 alunos que não serão premiados podem formar, de maneira semelhante, 97! filas em que continuarão nas 97 últimas posições, sem premiação alguma.

Logo, há na contagem 97! filas a mais dentre os que não serão premiados, se fazendo também necessário fazer esse desconto.

Portanto, descontando-se tanto as filas a mais dos 3 primeiros colocados (3!), quanto as filas a mais dos 97 últimos (97!), a resposta é:

$\frac{100!}{3!97!} = 161700.$ ◇

Para esse tipo de contagem em que não se importa a ordem dos elementos, a ferramenta de combinação simples pode ser utilizada diretamente, e essa é definida por:

Definição 1.4

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Lê-se combinação de n elementos p a p, com $0 < p \leqslant n$.

Para o **Exemplo 1.7** abordado, poderia-se ter usado direto uma combinação de 100 alunos 3 a 3, ou seja:

$C_{100,3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} = 161700.$

1.5.2 Combinações Completas ou Combinações com Repetições

As combinações completas diferem das combinações simples pelo fato de se poder escolher objetos repetidos numa determinada situação, e continuando a manter a não importância da ordem na escolha desses elementos.

Para melhor entender essa diferença vamos estudar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.8 *Uma pessoa vai a uma loja de chocolates para comprar* 3 *chocolates, dentre* 4 *tipos possíveis de escolha: banco (B), preto (P), amargo (A), ou Belga (Be), de quantos modos ela pode levar os* 3 *chocolates para casa?*

Solução:

Aparentemente, um raciocínio intuitivo seria calcular a combinação simples de 4 chocolates, combinados 3 a 3, uma vez que a ordem de escolha dos chocolates que vão ser levados não importa, ou seja, $C_{4,3} = \dfrac{4!}{3!1!} = 4$.

Há, como se calculou, 4 modos de se fazer essa contagem que são:

(B, P, A); (B, P, Be) ;(B, A, Be); (Be, A, P).

Porém, foram esquecidos de contar os casos em que se levam 2 ou 3 chocolates de um mesmo tipo, por exemplo, tem-se o caso em que são levados 2 chocolates brancos e 1 chocolate preto, (B, B, P), e esse caso não foi computado no raciocínio inicial.

Para a resolução de problemas desse tipo, a ferramenta a ser utilizada é a de combinação completa, ou combinação com repetição.

Para tanto, resolver esse tipo de problema é análogo a resolver a seguinte equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 3$, onde x_1, x_2, x_3 e x_4 são as quantidades de cada tipo de chocolate, B, P, A e Be respectivamente, que serão levados, e 3 é a quantidade de chocolates no total que será levada pela pessoa.

As quantidades x_1, x_2, x_3 e x_4 são números inteiros, pois nenhum chocolate será fracionado.

Para se resolver esse problema, pode-se imaginar que as quantidades de chocolates a serem levadas serão representadas pelo símbolo $|$, e separadas pelo símbolo $+$.

Assim, por exemplo, suponha que a pessoa quisesse levar um chocolate do tipo B, um do tipo P, e um do tipo A, e nenhum do tipo Be, teria-se a seguinte configuração: $|+|+|+$.

Uma outra possibilidade, seria o comprador levar 3 chocolates do tipo A, e nada dos outros tipos, logo, configurando com os símbolos: $|||+\ \ +\ \ +$. Assim, os sinais de $+$ separam as "barrinhas" ("$|$") de chocolates do tipo A, e os espaços vazios entre os $+$ significam que não há escolha dos outros tipos de chocolate.

Em síntese, o problema se resume a encontrar o número de filas possíveis entre os símbolos $|\,|\,|\ +\ +\ +$, problema que se resolve fazendo uma permutação de 6 ($|\,|\,|\ +\ +\ +$) elementos com repetição de 3 barrinhas ($|\,|\,|$) e 3 sinais de mais ($+\ +\ +$).

Logo, há $\dfrac{6!}{3!3!} = 20$ modos de se levar 3 chocolates, entre um total possível de 4 escolhas, podendo-se repetir um sabor, a título de ilustração, as escolhas possíveis foram listadas abaixo.

(Be, Be, Be)	(Be, Be, A)	(Be, Be, P)	(Be, Be, B)	(A, A, A)
(A, A, Be)	(A, A, P)	(A, A, B)	(B, B, B)	(B, B, Be)
(B, B, P)	(B, B, A)	(P, P, P)	(P, P, A)	(P, P, B)
(P, P, Be)	(Be, A, P)	(Be, A, B)	(Be, P, B)	(B, A, P)

◇

Capítulo 2

Outros Métodos de Contagem

Nesse capítulo serão abordados métodos interessantes e alternativos de contagem, dentre eles: o Princípio da Inclusão e Exclusão, a Permutação Caótica ou Desarranjo, os Lemas de Kaplansky, e o Princípio da Reflexão.

Todos esses métodos trazem ideias que podem facilitar muito a contagem de certos problemas de combinatória que quando resolvidos por métodos mais gerais podem dar muito trabalho.

2.1 Princípio da Inclusão e Exclusão

O princípio da inclusão e exclusão conta os elementos que pertencem à união de conjuntos, disjuntos ou não [8].

Para dois conjuntos, por exemplo, a ideia a ser utilizada será:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

.

A notação $|X|$ significa a quantidade de elementos que o conjunto X possui. Daqui por diante para efeito de simplificação, sempre que se precisar fazer referência ao número de elementos de um certo conjunto, será usada essa notação.

Para o exemplo de 2 conjuntos A e B, como o mencionado anteriormente, disjuntos ou não, tal princípio poderia ser justificado de maneira simples da seguinte forma:

Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = a$, $|B| = b$ e $|A \cap B| = c$, tem-se que os que a quantidade de elementos que são exclusivos de A e de B, respectivamente são $a-c$ e $b-c$, portanto $|A \cup B| = (a-c)+(b-c)+c = a+b-c = |A|+|B|-|A \cap B|$.

Para melhor se entender a aplicação desse princípio em problemas de contagem abordemos o exemplo seguinte.

Exemplo 2.1 *Quantos são os números inteiros entre 1 e 100 que são divisíveis por 4 ou 6?*

Solução:

Sejam os conjuntos

$A =$ conjunto dos inteiros divisíveis por 4.

$B =$ conjunto dos inteiros divisíveis por 6.

Como deseja-se obter $|A \cup B|$, calculando-se $|A| = \left[\frac{100}{4}\right] = 25$, e $|B| = \left[\frac{100}{6}\right] = 16$, e $|A \cap B| = \left[\frac{100}{12}\right] = 8$, onde $[X]$ é a parte inteira do número X.

Tem-se usando o princípio da inclusão e exclusão:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 16 - 8 = 33$ números que satisfazem ao pedido do enunciado.

$\diamond$

Para o caso do uso do princípio da inclusão e exclusão em 3 conjuntos, pode-se escrever

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cup C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Assim, para casos de 4 ou mais conjuntos, é só prosseguir com a linha de raciocínio, dos dois casos anteriores.

De maneira geral, pode-se enunciar o Princípio da Inclusão e Exclusão para n conjuntos da seguinte maneira:

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de um conjunto universo U, de tal maneira que:

$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_n|$
$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + ... + |A_{n-1} \cap A_n|$
...
$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$

Pode-se calcular o número de elementos da união dos n subconjuntos de U como sendo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

O leitor pode encontrar a prova do Princípio da Inclusão e Exclusão no Apêndice 1 do livro [6].

Analisemos agora um exemplo ligado à contagem de anagramas.

Exemplo 2.2 *Quantos são os anagramas da palavra "CURTIDO"em que a letra C aparece na primeira posição ou a letra U aparece na segunda posição ou a letra R aparece na terceira posição?*

Solução:

Sejam os conjuntos:

A = anagramas em que a letra C aparece na primeira posição;

B = anagramas em que a letra U aparece na segunda posição;

C = anagramas em que a letra R aparece na terceira posição;

Assim, para calcular $|(A \cup B \cup C)|$, usa-se:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Onde:

$|A| = 6!$, pois fixando-se a letra C na primeira posição, basta permutar as outras 6 letras nas outras posições.

$|B| = 6!$, pois fixando-se a letra U na segunda posição, basta permutar as outras 6 letras nas outras posições.

$|C| = 6!$, pois fixando-se a letra R na terceira posição, basta permutar as outras 6 letras nas outras posições.

$|A \cap B| = 5!$, pois fixando-se as letras C e U na primeira e segunda posições, basta permutar as outras 5 letras nas demais posições.

$|A \cap C| = 5!$, pois fixando-se as letras C e R na primeira e terceira posições, basta permutar as outras 5 letras nas demais posições.

$|B \cap C| = 5!$, pois fixando-se as letras U e R na segunda e terceira posições, basta permutar as outras 5 letras nas demais posições.

$|A \cap B \cap C| = 4!$, pois fixando-se o as letras C, U e R na primeira, segunda e terceira posições, basta permutar as outras 4 letras nas demais posições.

Assim há:

$|A \cup B \cup C| = 6! + 6! + 6! - 5! - 5! - 5! + 4! = 1824$ modos de se fazer os anagramas do exemplo.

$\diamond$

De maneira geral, o método da Inclusão e Exclusão permite resolver problemas onde se podem organizar conjuntos de objetos e suas quantidades, de maneira metódica.

2.2 Permutação Caótica ou Desarranjo

Uma permutação caótica é uma sequência em que os elementos não ocupam as suas posições iniciais, segundo [8], ou seja, dada uma sequência, por exemplo, composta pelos números $(1, 2, 3, ..., n)$, qualquer permutação em que cada número i esteja fora de sua posição inicial i, isto é, o número 1 não ocupe a primeira posição, o número 2 não ocupe a segunda posição, e assim sucessivamente, essa sequência será uma permutação caótica.

Na sequência $(1, 2, 3, 4)$, um exemplo de permutação caótica seria $(2, 3, 4, 1)$, pode-se notar que cada número não está ocupando sua posição inicial.

Pode-se calcular as permutações caóticas de uma dada sequência com n termos é dada por D_n, de tal modo que:

$$D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Uma das demonstrações possíveis para a fórmula é a seguinte:

Suponha que D_n seja o número de permutações caóticas para a sequencia $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, com n elementos, e que A_i seja o conjunto das permutações em que o elemento a_i ocupa a i-ésima posição, sendo i pertencente ao conjunto $\{1, 2, .., n\}$.

O número de elementos de A_i é dado por $(n-1)!$, uma vez que o elemento a_i estando fixado em sua posição inicial, basta permutar o restante dos elementos de $(n-1)!$ maneiras.

Agora calculando o número de permutações não caóticas em que os elementos a_i e a_f encontram-se em suas posições originais, i-ésima e f-ésima , ou seja, $|A_i \cap A_f|$, esse número é dado por $(n-2)!$, que é o número de maneiras de se permutar os outros $(n-2)$ elementos nas outras $(n-2)$ posições que sobraram.

Suponhamos agora que k elementos, estejam em suas posições iniciais na sequência não caótica, com isso sobram $(n-k)$ lugares para serem permutados entre os outros elementos que entram nas outras posições da fila, ou seja, $|A_i \cap A_f \cap ... \cap A_j \cap A_k| = (n-k)!$

Finalmente, chega-se na situação em que todos os elementos $a_1, a_2, a_3, ...,$ e a_n estarão nas suas posições originais, ou seja, $|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = (n-n)! = 0! = 1$.

Para computar todos os conjuntos que podem ser formados em cada situação anterior, devem ser feitas todas as possibilidades de se juntar os elementos nas posições originais, assim a quantidade de conjuntos em que um elemento fica em sua posição fixa é $C_{n,1}$ (podemos escolher o a_1, para manter fixo, ou o a_2, e assim sucessivamente, tem-se n opções portanto), as quantidades em que dois elementos ficam em suas posições fixas é $Cn, 2$ (podem ser escolhidos o a_1 e a_2, a_1 e a_3, até chegar no a_{n-1} e a_n), generalizando, a quantidade de modos de se selecionar k elementos para se manter em posição fixa é $C_{n,k}$.

Finalizando os cálculos, sejam $S_1, S_2, ..., S_n$, tais que:

$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_n|$
$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + ... + |A_{n-1} \cap A_n|$
...
$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$

Pelo mencionado anteriormente, concluímos que:

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_n| = C_{n,1} \cdot (n-1)! = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{1!}$$

$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + ... + |A_{n-1} \cap A_n| = C_{n,2} \cdot (n-2)! = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{n!}{2!}$
...
$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = C_{n,n} \cdot (n-n)! = \dfrac{n!}{(n-n)!n!} = \dfrac{n!}{n!}$

Feito esse raciocínio todas, as permutações não caóticas foram enumeradas, agora é necessário contar todas as permutações não caóticas possíveis e isso é feito utilizando-se o princípio da inclusão e exclusão, assim:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!}$$

Para encontrar D_n basta subtrair do total de permutações possíveis, que é $n!$, o total de permutações não caóticas que acabamos de calcular, logo:

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = n! - \left[\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!}\right] =$$
$$= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Para exemplificar o uso dos desarranjos, vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 2.3 *Suponha que 4 amigos A, B, C e D vão organizar um amigo secreto, e escrevem seus nomes em papéis para realizar o sorteio, de quantos modos a brincadeira pode ocorrer?*

Solução:

O amigo secreto ocorre sempre que todos os participantes não sortearem seus próprios nomes nos papéis, portanto o problema do amigo secreto trata de uma permutação caótica, assim deve-se calcular D_4 que é igual a

$$4!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$$

◇

Exemplo 2.4 *Um concurso para peritos foi realizado e 6 pessoas convocadas estão a fazer exames com um médico e um dentista, em consultórios separados. Sabendo-se que cada aprovado deve passar pelos 2 profissionais em no máximo uma hora, e que depois devem seguir para a entrega de documentos, de quantos modos o médico e o dentista podem atender a todos os 6 futuros peritos?*

Solução:

Vamos imaginar uma fila de 6 pessoas para o médico de tal modo que: a primeira pessoa a ser atendida pelo médico, certamente não possa ser a primeira a ser atendida pelo dentista, assim como a segunda a ser atendida pelo médico não possa ser a segunda a ser atendida pelo dentista, e assim sucessivamente, até que o médico atenda a sexta pessoa, que por sua vez, não pode ser a sexta a ser atendida pelo dentista.

Dessa forma, o médico possui 6! modos de fazer a chamada das 6 pessoas em sua fila de atendimento, e o dentista tem D_6 maneiras de atender as 6 pessoas da lista feita pelo médico, pois o primeiro da fila do médico não pode ser o primeiro da fila do dentista, e assim por diante, conforme o explicado anteriormente, logo a fila do dentista será uma permutação caótica, da fila do médico.

Calculando-se:
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$, e $D_6 = 6!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right] = 256$

Logo, tem-se $6! \cdot D_6 = 720 \cdot 256 = 190800$ modos de se atender aos 6 peritos. $\diamond$

Nesses 2 exemplos nota-se o quão fica mais rápida a solução de problemas que envolvem permutações caóticas com o uso da fórmula.

2.3 Lemas de Kaplansky

Nessa seção será estudado o método de Kaplansky, com seus 2 lemas para a solução do problema de Lucas, mencionado na Introdução do trabalho.

2.3.1 Primeiro Lema de Kaplansky

Para estudar o primeiro lema de Kaplansky tomemos o seguinte exemplo, como ponto de partida.

Exemplo 2.5 *Dado o conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *como fazer subconjuntos com* 3 *elementos, de forma que esses novos conjuntos não possuam dois elementos consecutivos?*

Solução:

Para atacar esse problema, pode-se adotar a seguinte estratégia, caso o elemento vá ser colocado no subconjunto, marquemos ele com um $*$, caso não, marquemos com N (para simbolizar um "N"de "não", será elemento do subconjunto, e facilitar o raciocínio).

Assim se o conjunto $\{1, 3, 6\}$ fosse formado a sequencia $*N * NN*$ seria indicadora de que o elemento 1 vai $(*)$, o elemento 2 não vai participar do subconjunto (N), o elemento 3 vai $(*)$, os elementos 4 e 5 não vão (NN) e finalmente o elemento 6 vai ser escolhido $(*)$.

Um outro subconjunto que poderia ser escolhido é o $\{2, 4, 6\}$ simbolizado pela sequencia $N * N * N*$.

Já se for escolhido o conjunto $\{1, 5, 6\}$ simbolizado pela sequência de caracteres $*NNN**$, este não servirá, pois os números 5 e 6 são consecutivos, portanto, deve ser notado que para que um subconjunto com 3 elementos sirva, não podem aparecer 2 asteriscos consecutivos na sequência dos 6 caracteres que foram adotados.

Dessa forma, pode-se pensar no problema analisando as vagas a se colocar os asteriscos que podem ser indicadas por "_", separados pelos símbolos "o"que devem receber os símbolos "N", e portanto tem-se:

_ o _ o _ o _

logo, a resposta é $C_{4,3} = 4$, que são as formas dos 4 espaços possíveis de se colocar asterisco sejam escolhidos 3. ◇

Generalizando, seja A um conjunto com n elementos, e seja $f(n, p)$, a quantidade de subconjuntos de A com p elementos, de modo que os p elementos não sejam consecutivos entre si, o cálculo dessa quantidade é feito por $C_{n-p+1,p}$, ou seja:

$$f(n, p) = C_{n-p+1,p}$$

tal função $(f(n, p))$, representa o cálculo do primeiro lema de Kaplansky. Vejamos mais dois exemplos, para se familiarizar com a notação $f(n, p)$.

Exemplo 2.6 *Um concurso será realizado em* 3 *etapas, devendo cada etapa ocorrer em meses diferentes e não consecutivos ao longo dos* 6 *primeiros meses do ano, de janeiro a junho, de quantos modos a comissão organizadora pode organizar as* 3 *etapas?*

Solução:

Usando-se o primeiro lema de Kaplansky deve-se usar 3 meses $(p = 3)$ não consecutivos, dentre 6 meses $(n = 6)$, assim, $f(6, 3) = C_{6-3+1,3} = \frac{4!}{3!} = 4$ modos de se escolherem os meses. ◇

Exemplo 2.7 5 *garotos que foram assistir ao filme Vingadores Guerra Infinita, ao chegar na fileira em que vão sentar, encontram* 15 *cadeiras vazias. De quantos modos esses garotos podem se sentar em cadeiras que não são vizinhas umas das outras, ou seja, nenhum garoto senta do lado de outro?*

Solução:

Para a escolha das cadeiras que não sejam vizinhas, tem-se $f(15, 5) = C_{15-5+1,5} = C_{11,5}$ e dadas as cadeiras escolhidas, basta permuta-los nas 5 cadeiras, assim, o total de maneiras é $C_{11,5} \cdot P_5 = C_{11,5} \cdot 5! = 55440$ modos de os garotos assistirem ao filme.

◇

A partir do momento em que se identifica que se trata de um exercício que se resolve pelo primeiro lema de Kaplansky, a solução se torna quase que imediata com a notação $f(n,p)$.

2.3.2 Segundo Lema de Kaplansky

O segundo lema de Kaplansky apresenta a mesma ideia do primeiro lema, mas faz uma consideração extra de que 1 e n são termos consecutivos.

Assim, para um conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ ele nos diz quantos subconjuntos com p elementos podem ser feitos com a escolha dos p elementos feita entre os n elementos do conjunto inicial A, em que não há números consecutivos, fazendo a consideração de que n e 1 são termos consecutivos.

Tal quantidade de subconjuntos é calculada pela seguinte notação $g(n,p)$, tal que:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p,p}$$

.

Para demonstrar o segundo lema de Kaplansky, basta imaginar um círculo com n elementos, com a seguinte situação, queremos fazer um subconjunto com p elementos, e para isso há apenas 2 tipos de subconjuntos:

Num primeiro tipo, o elemento n aparece no conjunto, sendo assim, não pode ser colocado o elemento 1 e o elemento $n-1$, logo sobram $n-3$ elementos para se formar os subconjuntos de $p-1$ elementos, uma vez que a vaga do n já está guardada no subconjunto, e pelo lema 1 de Kaplansky, tal contagem é feita de:

$$f(n-3, p-1) = C_{[(n-3)-(p-1)+1],p-1} = C_{n-p-1,p-1} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!}$$

.

Num segundo tipo, o elemento n não aparece, então há $n-1$ elementos que podem ser usados para se escolher os p elementos não consecutivos, e pelo primeiro lema, isso pode ser feito de:

$$f(n-1,p) = C_{(n-1)-p+1,p} = C_{n-p,p} = \frac{(n-p)!}{(p)! \times (n-2p)!}$$

Como é um caso ou outro, pelo princípio aditivo da contagem:

$$C_{n-p-1,p-1} + C_{n-p,p} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{(p)!(n-2p)!} =$$
$$= \frac{(n-p-1)!p + (n-p)!}{p!(n-2p)!} = (n-p-1)! \cdot \frac{p + (n-p)}{p!(n-2p)!} =$$
$$= n\frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} = \frac{n}{n-p}\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} = \frac{n}{(n-p)}C_{n-p,p} = g(n,p)$$

.

Para exemplificar a Definição 2.3, consequentemente o segundo lema de Kaplansky, observemos o exemplo seguinte.

Exemplo 2.8 *Um professor se matricula numa academia, porém devido a grande quantidade de aulas que ministra durante a semana, o mesmo só pode frequentar a academia exatamente* 3 *vezes por semana, e opta por uma academia* A*, que abre todos os dias da semana, inclusive aos sábados e domingos. Seu orientador físico prepara para ele uma ficha tal que sempre que o professor se exercitar, ele deve deixar pelo menos* 1 *dia para descansar a musculatura. Assim, de quantos modos o professor pode fazer musculação durante a semana?*

Solução:

Tomando-se o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, onde 1 representa o domingo, 2 a segunda, e assim por diante até que 7 representa o sábado.

Pela condição do problema deve-se formar um conjunto com 3 elementos (3 dias da semana) em que não pode haver números consecutivos e considerando-se também que o 1 e o 7 também são consecutivos, pois o professor não deve malhar no sábado (7) e no domingo (1), consecutivamente.

Assim, pelo segundo lema de Kaplansky tem-se:

$g(7,3) = \dfrac{7}{7-3} \cdot C_{(7-3),3} = \dfrac{7}{4} \cdot 4 = 7$ modos de se escolher os 3 dias para ir a academia.

◇

Percebe-se que o segundo lema é uma extensão do primeiro lema para os casos em que se consideram como consecutivos o primeiro e o último elementos do conjunto inicial em questão.

2.4 Princípio da Reflexão

O Princípio da Reflexão usa a geometria para auxiliar em problemas de contagem com algumas restrições de caminhos a serem percorridos, como por exemplo, um máximo de deslocamento, ou um mínimo.

Além disso o raciocínio usado pode ser ampliado para outros problemas como o problema de se traçar possíveis trajetórias para votos numa eleição, poupando tempo que seria perdido através do uso de recorrências, entre outras técnicas.

Para visualizar o método na prática, comecemos com a análise de um primeiro exemplo.

Exemplo 2.9 *Suponha-se que uma partícula ocupe a posição* (c, d) *de um plano cartesiano, e que possa se movimentar para pontos do tipo* $(c+1, d+1)$*, que podem ser associados a* S *(subida), ou pontos do tipo* $(c+1, d-1)$*, associados ao movimento de descida* D*, notando-se ainda que tanto executando o movimento* S *ou* D *esse ponto se desloque para a direita em uma unidade* $(c+1)$*, pois sua abscissa é acrescida de* 1*. Quantos são os trajetos do ponto* $A = (0, 0)$ *até o ponto* $B = (6, 4)$*?*

Solução:

Apenas para localizar os pontos A e B usemos a Figura 2.1

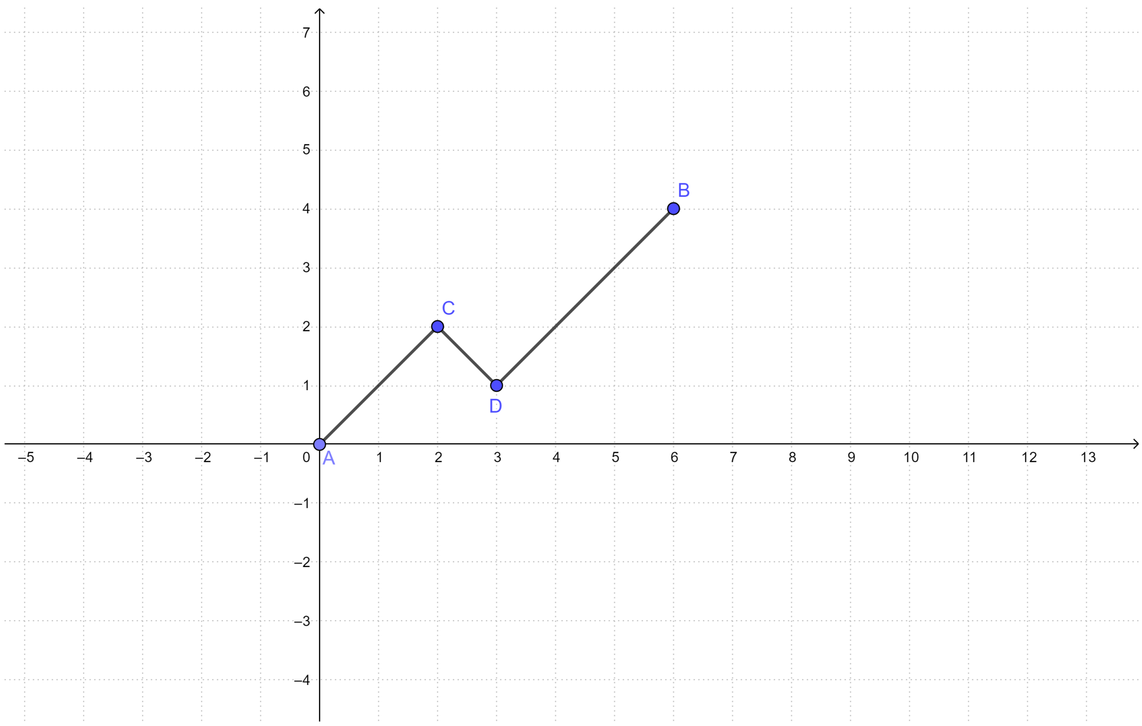

Figura 2.1: Um possível caminho entre os pontos A e B.

Na figura o trajeto descrito é: $SSDSSS$. Nota-se que na horizontal a partícula deve ter a seguinte condição satisfeita $S + D = 6$, pois o corpo se desloca 6 unidades na horizontal.

Em raciocínio análogo, $S - D = 4$, pois há um aumento de 1 na ordenada para cada movimento de subida, e o decréscimo de 1 para cada movimento de descida.

Assim, $S = 5$, e $D = 1$ para o exemplo da Figura 2.1, portanto:

$P_6^{5,1} = \dfrac{6!}{5!1!} = 6$ modos. ◇

Aproveitando a mesma ideia do Exemplo 2.9, façamos o próximo exemplo com uma variação de enunciado.

Exemplo 2.10 *Uma sala de* 6 *alunos indicou* 2 *alunos* S *e* D *para serem votados ao cargo de líder de sala. Sabe-se que o aluno* S *ganhou do aluno* D *por* 4 *votos a mais. De quantos modos pode ter acontecido a apuração?*

Solução:

O problema é análogo ao anterior, pode-se olhar para o gráfico da Figura 2.1 e pensar no ponto de apuração D como tendo sido o terceiro voto apurado, e que naquele ponto, o candidato S tem um voto de vantagem. Assim, a resposta também seria:

$P_6^{5,1} = \dfrac{6!}{5!1!} = 6.$ ◇

Agora num terceiro exemplo, suponha que se deseje limitar as possíveis trajetórias por uma reta.

Exemplo 2.11 *Quantos são os trajetos do ponto* $A = (0, 0)$ *ao ponto* $B = (10, 4)$*, em que a reta* $y = -1$ *é tocada?*

Solução:

Para o início do raciocínio, observemos a Figura 2.2.

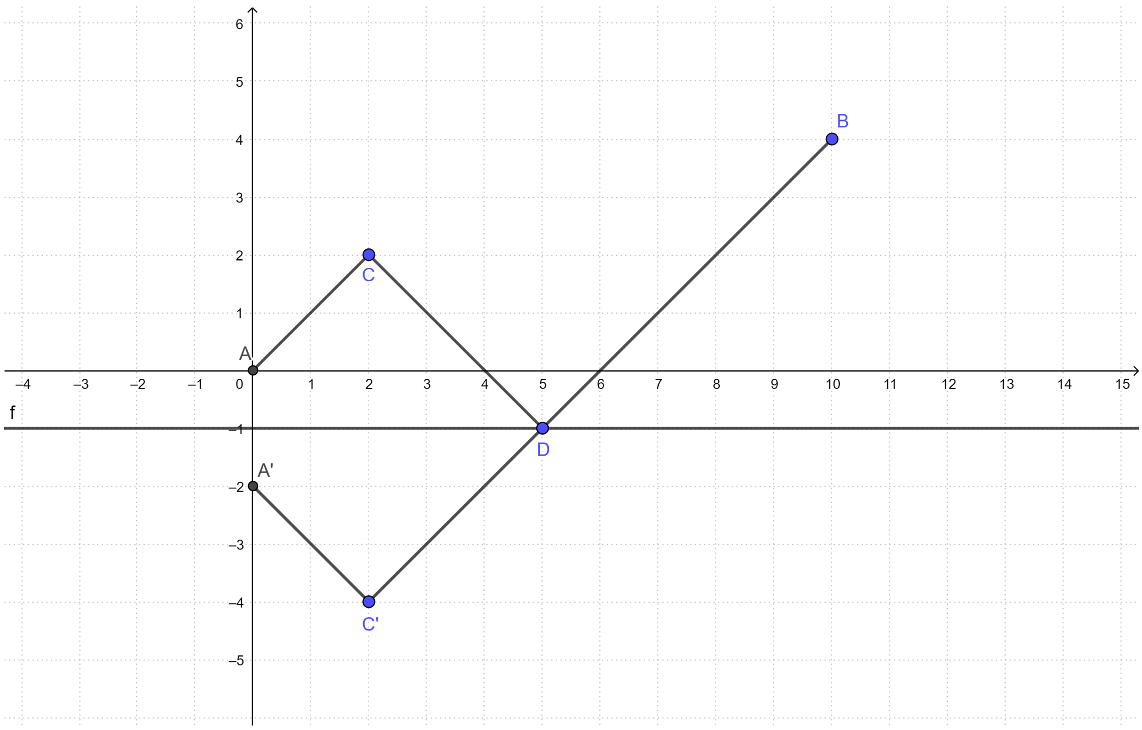

Figura 2.2: Representação das trajetórias $ACDB$ e $A'C'DB$.

Na Figura 2.2, foi representado um possível trajeto ACD em que a reta $f : y = -1$ é tocada uma vez no ponto $D = (5, -1)$, e também foi representada uma trajetória simétrica a essa trajetória ACD, em relação à reta f, que é a trajetória $A'C'D$.

Observa-se, na figura 2.2, que um caminho tomado entre os pontos A e B, em que a reta f seja tocada, como foi o caso no ponto D, pode ser transformado por reflexão em relação a f, de maneira que um novo trajeto simétrico sempre pode ser criado, usando-se a simetria, também nota-se que qualquer trajeto saindo de A' e chegando a B deverá cortar f.

Assim, a quantidade de trajetos entre os pontos A e B que tocam f, pela trajetória AB é o mesmo número de trajetos entre os pontos A' e B, que por obrigação cortam f.

Tomando-se o trajeto $A'C'DB$ da figura 2.2, pode-se subir oito vezes (diferença de ordenadas entre C' e B) e descer duas vezes (diferença de ordenadas entre A' e C'), num total de 10 passos, ao longo do trajeto, logo há: $P_{10}^{8,2} = \dfrac{10!}{8!2!} = 45$ maneiras de se fazer o trajeto tocando-se a reta f. $\diamond$

2.5 Princípio das Gavetas de Dirichlet, ou Princípio da Casa dos Pombos

O princípio das gavetas ou da casa dos pombos é usado para mostrar de maneira simples que um certo tipo de conjunto existe satisfazendo certas propriedades, não se preocupando em si com a contagem dos elementos do conjunto analisado.

O princípio utiliza uma ideia bem simples que observa o seguinte fato se n pombos vivem em $n-1$ casinhas de um viveiro, e os pombos se distribuem da maneira mais confortável possível, eles devem se acomodar de modo que haja 1 pombo em cada casa, e o pombo que sobrou depois dos $n-1$ terem sido acomodados, deve entrar em uma casa já ocupada por um outro pombo, ou seja, há pelo menos uma casinha, em que deverão conviver 2 pombos.

A prova é feita por contradição:

Se há $n-1$ casas, e n pombos, e cada uma das casas acomodar, no máximo, um único pombo, na pior das hipóteses, o número máximo de pombos a serem colocados nas casinhas será $n-1$, porém há um absurdo nessa afirmação, pois, se assim fosse, haveria apenas $n-1$ pombos colocados nas casas, e um pombo sobraria sem ter para onde ir, logo, por absurdo, um pombo deverá entrar em alguma das $n-1$ casas que já são ocupadas por um pombo cada, e assim, na pior da hipóteses, deve haver 2 pássaros numa mesma casa.

Apesar de um enunciado de ideia bastante simples, o princípio das gavetas resolve uma quantidade grande de problemas difíceis.

Vejamos alguns exemplos que aplicam o princípio.

Exemplo 2.12 *Se uma sala de aula de um curso de inglês possui* 13 *alunos, demonstrar que pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês.*

Solução:

Na pior das hipóteses tentaremos distribuir uma pessoa para aniversariar em cada mês do ano, pois se de primeira pelo menos duas pessoas já aniversariarem num mesmo mês, a demonstração estaria encerrada.

Assim, suponhamos, na pior das hipóteses que a pessoa 1 faz aniversário no mês 1 que pode, sem perda de generalidade, representar o mês de janeiro (mês 1), a pessoa 2 aniversaria em fevereiro (mês 2), e assim por diante até que a pessoa 12 faça aniversário em dezembro (mês 12).

Nessa distribuição tem-se os 12 meses do ano já preenchidos, porém na hora de alocar a pessoa 13, essa fará aniversário em um dos 12 meses que já ocupados pelas 12 pessoas anteriores.

Logo a pessoa 13 fará aniversário no mês em que outro colega também aniversaria e portanto, pode-se concluir que pelo menos duas pessoas aniversariam no mesmo mês.

$\diamond$

Exemplo 2.13 *Numa sala de mestrado Profmat da UFPB há* 40 *mestrandos, demonstrar que há pelo menos* 4 *alunos que possuem o mesmo signo, dentre os* 12 *existentes.*

Solução:

Imaginemos 12 casas, e na pior das hipóteses, coloquemos as pessoas de maneira que os signos não se repitam, pois se houvesse repetições de 4 alunos com o mesmo signo, a demonstração já estaria acabada.

Assim o aluno 1, entra na primeira casa que representa o signo de Áries, por exemplo, o aluno 2 entra na casa de Touros, e assim sucessivamente até que o aluno 12 entre na casa de Peixes, repetindo-se o processo 3 vezes, o aluno 36 terminará de preencher a casa de Peixes.

Sobram ainda 4 alunos, e o aluno 37 terá que entrar numa casa já ocupada por 3 alunos, logo, no mínimo há 4 alunos com um certo signo em comum. $\diamond$

Capítulo 3

Análise combinatória em vestibulares militares e olimpíadas

Nesse capítulo são tratados alguns problemas que envolvem ideias interessantes de análise combinatória em vestibulares militares e olimpíadas, mostrando como o assunto costuma ser abordado nas provas de admissões a nível de ENSINO MÉDIO e de olimpíadas.

3.1 Problemas de combinatória em vestibulares militares

Aqui trataremos de alguns problemas que trazem estratégias interessantes de análise combinatória nas escolas militares.

As questões analisadas foram retiradas dos vestibulares militares da AFA (Academia da Força Aérea), EFOMM (Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante), EN (Escola Naval), IME (Instituto Militar de Engenharia), ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), ESPCEX (Escola Preparatória de Cadetes do Exército), e da EPCAR (Escola Preparatória de Cadetes do Ar).

De maneira geral, observa-se que as questões trazem restrições que precisam ser quebradas em casos mais simples para uma melhor análise dos problemas.

Problema 3.1 *EFOMM 2016. A quantidade de anagramas da palavra MERCANTE que não possui vogais juntas é*
a) 40320
b) 38160
c) 37920
d) 7200
e) 3600

Solução:

Suponha a seguinte disposição:

$\_M\_R\_C\_N\_T\_$

Cada espaço representado por _ pode ser ocupado por no máximo uma vogal, se for mais de uma vogal, essas aparecerão juntas no diagrama, o que não pode ocorrer. Desse modo, para que não haja vogais juntas, deve-se escolher dos espaços "vazios"(_) disponíveis que são 6, 3 para se colocarem as vogais E, A, E, o que é feito de $C_{6,3} = 20$ modos.

Definidos os espaços que serão ocupados pelas vogais, há a necessidade de fazer uma permutação das mesmas, ou seja, $P_3^2 = 3$ modos, por último permutar as consoantes de $P_5 = 5! = 120$ maneiras.

Assim tem-se como resposta $20 \cdot 3 \cdot 120 = 7200$" modos.

A ideia é a mesma usada para deduzir o primeiro lema de Kaplansky. ◇

Problema 3.2 *EFOMM 2017. Quantos anagramas é possível formar com a palavra CARAVELAS, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?*

a) 24
b) 120
c) 480
d) 1920
e) 3840

Solução:

A única configuração possível para o que se pede é:

$C_1V_1C_2V_2C_3V_3C_4V_4C_5$

Onde C_i, com i pertencente ao conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, representa uma das das 5 consoantes C, R, V, L, S, e V_j, com j pertencente ao conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$, representa as vogais A, A, A, E.

Assim basta permutar as 5 consoantes ($P_5 = 120$) e as 4 vogais com repetição de 3 vogais A ($P_4^3 = 4$), totalizando $120 \cdot 4 = 480$ modos. ◇

Problema 3.3 *EPCAR 2017. Um baralho é composto por* 52 *cartas divididas em* 4 *naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por* 13 *cartas, das quais* 9 *são numeradas de* 2 *a* 10 *e as outras* 4 *são* 1 *valete J,* 1 *dama Q,* 1 *rei K e* 1 *ás A. Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a*

*a)*612
*b)*613

*c)*614
*d)*615

Solução:

Para resolver o problema há a necessidade de se quebrar em 2 casos mais simples:

Caso 1: a primeira carta retirada é um ás de ouros, o que se pode fazer de apenas 1 modo, assim para a segunda carta sobram 48 opções, pois nenhuma carta ás pode ser escolhida.

Caso 2: a primeira carta não é um ás de ouros, o que permite 12 escolhas, uma vez que há 13 cartas de cada naipe, assim a segunda escolha pode ser feita de 47 maneiras $(52 - 1 - 4)$.

Como a escolha pode ser feita pelo primeiro ou segundo casos, tem-se $1 \cdot 48 + 12 \cdot 47 = 48 + 564 = 612$ modos de sequências. $\diamond$

Problema 3.4 *EPCAR 2014. Sr. José deseja guardar bolas (uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta) em caixas numeradas:*

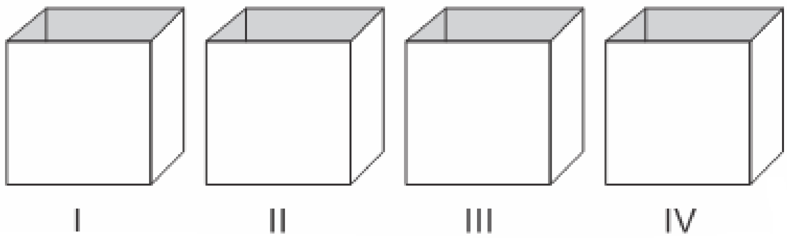

Figura 3.1: Urnas I, II, III, eIV.

O número de maneiras de Sr. José guardar todas as bolas de forma que uma mesma caixa NÃO contenha mais do que duas bolas, é igual a
a) 24
b) 36
c) 144
d) 204

Solução:

Para esse problema iremos usar 3 formas de pensar distintas, para mostrar como as ferramentas diferentes podem ser usadas para um mesmo fim, com estratégias diferentes de contagem.

Solução 1:

Nesse problema há também a necessidade de se quebrar em diferentes casos:

Caso 1: Duas bolas numa certa urna e duas em outra.

Para tanto, deve-se escolher entre as 4 urnas, duas para ficarem vazias, o que pode ser feito de $C_{4,2} = 6$ modos, agora das 4 bolas, deve-se escolher duas para se colocar em uma caixa ($C_{4,2} = 6$), e automaticamente a última caixa estará preenchida com as duas últimas bolas restantes.

Portanto, para este caso há $6 \cdot 6 = 36$ modos de se distribuir as bolinhas.

Caso 2: Duas urnas com uma bola, uma urna com duas, e uma vazia.

Nesse caso, 4 modos de se escolher uma urna para ficar vazia, dentre as 3 urnas que sobraram, uma delas ficará com as duas bolinhas, $C_{4,2} = 6$ modos de se escolher quais bolas colocar nela.

Terminando a contagem, 2 modos de se colocar as duas últimas bolas nas caixas que sobraram (bola X na caixa W, ou bola Z na caixa W, e a bolinha que sobrar vai para a última caixa).

Portanto tem-se um total de $4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 144$ modos.

Caso 3: Uma bolinha em cada urna.

Basta escolher entre as 4 bolas, uma para a primeira urna, o que pode ser feito de 4 maneiras.

Para a segunda urna da fila de urnas, entre 3 escolher uma, o que pode ser escolhido de 3 modos, finalmente tem-se 2 modos para a escolha das bolinhas da urna 3, e a última urna fica com a bolinha que restar, logo no total são $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras.

Assim como há a possibilidade do caso 1 ou 2 ou 3, tem-se no total $36+144+24 = 204$ modos de se colocarem bolinhas nas caixas.

Solução 2:

Uma segunda solução para este problema pode ser feita usando-se permutações para se colocar as caixas em fila, do seguinte modo:

Caso 1:

As possibilidades de distribuição das quantidades de bolinhas nas caixas são 2 2 0 0, portanto decide-se a ordem em que essas quantidades irão aparecer, o que pode ser feito de $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ modos.

Após isso, coloca-se duas bolinhas numa das caixas que ficaram com duas, o que pode ser feito de $C_{4,2} = 6$, e as outras duas que sobraram na outra urna, no total tem-se $6 \cdot 6 = 36$ modos.

Caso 2:

Deve-se distribuir as seguintes quantidades de bolas 1 1 2 0, e essa sequencia pode ser feita de $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ modos.

Após o enfileiramento tem-se $C_{4,2} = 6$ modos de se colocar as duas bolinhas que ficarão na caixa com duas, e 2 modos de se escolher uma bolinha, das duas que sobram, para uma das caixas que receberão uma bola, ficando a outra bolinha automaticamente escolhida para a outra caixinha que recebe uma bola também.

No total tem-se $12 \cdot 6 \cdot 2 = 144$ modos de se distribuir o caso 2.

Caso 3: Uma bolinha em cada urna.

Para essa escolha basta-se fazer a seguinte fila de quantidades de bolinhas 1 1 1 1, o que pode ser feito de $P_4^4 = \dfrac{4!}{4!} = 1$ modo, em seguida 4 modos de se preencher a caixa em primeiro lugar da fila, 3 modos de se colocar a segunda bolinha na segunda urna da fila, 2 modos de se colocar a terceira bolinha na terceira urna, e a assim a última bolinha está automaticamente escolhida para a última urna da fila.

No total, portanto tem-se $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modos de se fazer tal distribuição.

Logo há no total $36+144+24 = 204$ modos de se fazer a distribuição das bolinhas.

Solução 3:

Uma terceira solução para o problema seria contar todos os casos e se excluir os casos que o enunciado restringiu.

Contando o total de casos:

Pelo PFC, a primeira bolinha pode ser colocada de quatro modos (ser alocada na urna I, II, III ou IV) e assim pode ser feito com a segunda, terceira e quarta bolinhas, totalizando 256 modos de se colocar as bolinhas nas urnas. Dentre esses modos, qualquer urna pode ficar vazia, com uma bolinha, com duas, com três ou quatro bolinhas. Assim, vejamos as possibilidades de distribuição nos casos abaixo que não são permitidas.

Caso 1: 4 bolas numa única urna, 4 0 0 0.

Enfileirando os símbolos 4 0 0 0, que representam três urnas vazias e uma com 4 bolinhas, tem-se $P_4^3 = \dfrac{4!}{3!} = 4$ modos, pois há repetição de três urnas que ficarão vazias, depois há apenas uma maneira de se colocar 4 bolinhas.

Um raciocínio análogo poderia ser feito usando-se combinação, das 4 urnas, escolhem-se 3 para ficarem vazias, o que pode ser feito de $C_{4,3} = 4$ modos.

Caso 2: 3 bolas numa urna, duas urnas vazias, e uma urna com uma bolinha. Enfileirando as quantidades 3, 1, 0, e 0 de bolinhas, tem-se $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ modos. Agora, escolhendo-se 3 das 4 bolas para uma das urnas, tem-se $C_{4,3} = 4$ modos.

Assim, no total tem-se $12 \cdot 4 = 48$ modos para o caso 2.

Portanto, para essa terceira solução há $256 - 4 - 48 = 204$ modos de se fazer a distribuição pedida.

$\diamond$

Problema 3.5 *AFA 2013. Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados* 10 *soldados, dentre eles o soldado* A *e o soldado* B*, de tal maneira que fiquem* 4 *soldados na barraca I,* 3 *na barraca II e* 3 *na barraca III. Se o soldado* A *deve ficar na barraca I e o soldado* B *NÃO deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a*
a) 560.
b) 1120.
c) 1680.
d) 2240.

Solução:

Atacando primeiramente as restrições do problema:

_ O soldado A fica na barraca I;

_ O soldado B não fica na barraca III;

Quebrando agora o problema em 2 casos.

Caso 1: O soldado A e o soldado B ficam na barraca I.

Barraca I: Podem ser escolhido 2 soldados dentre os 8 que sobraram para as distribuições, o que pode ser feito de $C_{8,2} = \dfrac{8!}{6!2!} = 28$ modos.

Barraca II: 4 soldados já estão na barraca I, portanto tem-se que escolher 3 soldados para a barraca II, o pode ser feito de $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$ maneiras.

Barraca III: Apenas 1 modo, colocar os 3 soldados na barraca III.

Assim para o caso 1 tem-se $28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$ modos.

Caso 2: O soldado A fica na barraca I e soldado B fica na barraca II.

Barraca I: Como o soldado A já está na barraca I, e essa tem 4 vagas no total, e o soldado B está na barraca II, pode-se escolher entre os 8 soldados que sobram, 3 para compor o restante das vagas que sobraram na barraca I, assim tem-se $C_{8,3} = \dfrac{8!}{3!5!} = 56$ modos de se fazer essa escolha.

Barraca II: Após a ocupação da barraca I, sobram 5 soldados para se colocar em duas vagas, pois há no total 3 soldados nessa barraca, sendo que B já está nela, assim tem-se $C_{5,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ modos de se preencher a barraca.

Barraca III: apenas 1 modo, pois sobram 3 soldados e esses ficarão nessa barraca.

Assim para o segundo caso tem-se no total $56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$ maneiras de se distribuir.

Então, o número de maneiras total de se distribuir os soldados é igual a $560 + 560 = 1120$.

◇

Problema 3.6 *EN 2017. Calcule o número de soluções inteiras não negativas de* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ *nas quais pelo menos* 3 *incógnitas são nulas, e assinale a opção correta.*
*a)*3332
*b)*3420
*c)*3543
*d)*3678
*e)*3711

Solução:

Solução 1:

Uma primeira solução para o problema consiste em contar os seguintes casos que não são desejados:

Caso 1:

Nenhuma incógnita é nula, assim devemos garantir que cada incógnita é maior ou igual a 1, para tanto basta resolver o seguinte sistema $x'_1+x'_2+x'_3+x'_4+x'_5+x'_6 = 14$ onde foi feita a substituição de variável $x_i = x'_i+1$, com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a solução pode ser dada de $P_{19}^{14,5} = \dfrac{19!}{14!5!} = 11628$ modos.

Caso 2:

Uma incógnita seja nula, o que pode ser escolhido de $C_{6,1} = \dfrac{6!}{5!1!} = 6$ modos, sem perca de generalidade suponhamos que $x_1 = 0$, como as outra 5 incógnitas tem de ser maiores ou iguais a 1, façamos a mesma substituição de variável do caso 1, ou seja, $x'_2+x'_3+x'_4+x'_5+x'_6 = 15$, assim há $P_{19}^{15,4} = \dfrac{19!}{15!4!} = 3876$ modos de se solucionar o sistema dentro das condições pedidas, logo no total tem-se $6 \cdot 3876 = 23256$ modos de se resolver o caso 2.

Caso 3:

Duas incógnitas nulas, o que pode ser escolhido de $C_{6,2} = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$ modos, supondo analogamente ao caso 2 que $x'_3 + x'_4 + x'_5 + x'_6 = 16$, para esse sistema tem-se $P_{19}^{16,3} = \dfrac{19!}{16!3!} = 969$ soluções, assim para o caso 3 há $15 \cdot 969 = 14535$ modos de se satisfazer ao caso 3.

Agora calculando o total de respostas não importando se cada incógnita é nula ou não. Tem-se que resolver ao sistema completo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$, o que pode ser feito de $P_{25}^{20,5} = \dfrac{25!}{20!5!} = 53130$ modos.

Logo, o número de soluções desejadas pelo problema é $53130 - 14535 - 23256 - 11628 = 3711$

Solução 2:

Uma segunda solução para o problema é contar os casos diretamente, o que pode ser feito da seguinte forma:

Caso 1:

3 variáveis nulas, o que pode ser escolhido de $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$ modos, e sem perca de generalidade suponha-se que $x'_4 + x'_5 + x'_6 = 17$, tal quantidade de soluções pode ser dada por $P_{19}^{17,2} = \dfrac{19!}{17!2!} = 171$ maneiras. Assim, para o caso 1, tem-se um total de $20 \cdot 171 = 3420$ modos.

Caso 2:

4 variáveis nulas, de maneira análoga ao caso 2, escolhe-se as variáveis de $C_{6,4} = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$ modos, e considerando $x'_5 + x'_6 = 18$, tem-se $P_{19}^{18} = \dfrac{19!}{18!} = 19$ modos de se resolver a equação, assim o total de modos é $15 \cdot 19 = 285$.

Caso 3:

Nesse caso 5 variáveis nulas, o que pode ser escolhido de $C_{6,5} = \dfrac{6!}{5!1!} = 6$ modos, e apenas uma maneira de se resolver o problema, pois qualquer que seja a variável que sobrou ela tem de ser 20, um exemplo seria a seguinte escolha $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ e $x_6 = 20$, note também que esse é o último caso a se analisar, pois não há como as 6 incógnitas assumirem o valor 0 se $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$, teria-se um absurdo.

Assim o total de soluções para essa segunda solução é $3420 + 285 + 6 = 3711$, número que é o mesmo da solução anterior, como tinha de ser. ◇

Problema 3.7 *ESPCEX 2015. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos* 1, 3, 5, 7, 9 *e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a*

*a)*1000000
*b)*1111100
*c)*6000000
*d)*6666000
*e)*6666600

Solução:

Vamos começar construindo o primeiro número que é 13579, observando que esse número pode ser escrito como $1\cdot10^4+3\cdot10^3+5\cdot10^2+7\cdot10^1+9\cdot10^0$, e sabendo que cada número da sequencia é obtido permutando-se os algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9, conclui-se que cada um dos algarismos ocupará a posição da unidade, dezena, centena, unidade de milhar e dezena de milhar, uma vez cada enquanto os outros números permutam nas outras posições do sistema decimal.

Assim, será possível somar os números da seguinte maneira:

$1(10^4+10^3+10^2+10^1)P_4+3(10^4+10^3+10^2+10^1)P_4+5(10^4+10^3+10^2+10^1)P_4+7(10^4+10^3+10^2+10^1)P_4+9(10^4+10^3+10^2+10^1)P_4=(1+3+5+7+9)(10^4+10^3+10^2+10^1)P_4=25\cdot11111\cdot24=6666600.$ ◇

Problema 3.8 *ITA 2018. Quantos pares de números inteiros positivos* (A, B) *existem cujo mínimo múltiplo comum é* $126\cdot10^3$*? Para efeito de contagem, considerar* $(A, B)\equiv(B, A)$.

Solução:

O número $126\cdot10^3$ é igual a $2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^1$, e como esse é o mmc entre A e B, tanto A, quanto B dividem o mmc, assim, tem-se: $A=2^{x_1}\cdot3^{x_2}\cdot5^{x_3}\cdot7^{x_4}$ e $B=2^{y_1}\cdot3^{y_2}\cdot5^{y_3}\cdot7^{y_4}$, em que:

x_1 e y_1 pertencem a $\{0,1,2,3,4\}$; x_2 e y_2 pertencem a $\{0,1,2\}$; x_3 e y_3 pertencem a $\{0,1,2,3\}$; x_4 e y_4 pertencem a $\{0,1\}$;

Tomando-se 2 números como exemplo, para efeito de raciocínio, sejam $A=2^4\cdot3^1\cdot5^3\cdot7^0$ e $B=2^2\cdot3^2\cdot5^1\cdot7^1$, repara-se que o valor máximo de x_i e y_j devem sempre ser iguais a: 4, para os casos de x_1 e y_1, ou 2 para os casos de x_2 e y_2, ou 3 para os casos de x_3 e y_3, ou 1 para os casos de x_4 e y_4.

Prosseguindo o raciocínio tem-se:

Para x_1 e y_1, o número que deve aparecer é o 4, supondo que o 4 está no expoente do 2 em A, sem perca de generalidade, o B terá como possibilidades de expoentes y_1 para o 2, 4 opções, inclusive o 4, assim, há 5 modos de se escolher o y_1 para o 2 do B.

Como o mesmo procedimento poderia ser feito colocando-se o 4 no expoente do 2 em B, e variando-se o x_1 no expoente do 2 do A, tem-se 10 maneiras no total de se colocar o expoente 4 em um dos números 2 do A ou do B, porém nessa contagem foi contato $x_1=4$ e $y_1=4$ duas vezes, uma ao fixar $x_1=4$ e variar y_1, e a outra ao se fixar $y_1=4$ e se variar x_1, assim há a necessidade de se subtrair 1 do número total de casos(10), tendo-se 9 possibilidades no total.

Para se determinar o expoente dos números x_2 e y_2, pode-se fazer a contagem de forma análoga, fixando-se x_2 ou y_2 como 2 e fazendo-se variar o outro. No total, tem-se $3\cdot2-1=5$ modos de se colocar o expoente do dígito 3, em A ou B.

Escolhendo-se agora o expoente do número 5 em A ou B, o total de modos é $4\cdot2-1=7$.

Finalmente para a escolha de x_4 e y_4 tem-se $2 \cdot 2 - 1 = 3$ modos.

Aparentemente o total é $9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 945$ modos, porém para os casos em que que $A \neq B$, há necessidade de se tomarem 2 passos a mais nessa contagem, o primeiro é que os números $A = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 7^{x_4}$ e $B = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 7^{x_4}$, aparecem duas vezes, quando $x_1 = y_1 = 4$, $x_2 = y_2 = 2$, $x_3 = y_3 = 3$, e $x_4 = y_4 = 1$, portanto há a necessidade de subtrair 1 desse número do total, corrigindo para $945 - 1 = 944$.

O segundo erro é que como $(A, B) \equiv (B, A)$, a contagem está duplicada, pois foram contados os números $A = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^0$ e $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ e $B = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^0$ e $A = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, assim tem-se $\dfrac{944}{2} = 472$.

Para o caso em que $A = B$, há apenas 1 caso, que inclusive foi subtraído para o caso em que $A \neq B$. Logo tem-se no total para a resposta do problema que há $472 + 1 = 473$ números A e B, distintos ou não cujo mmc é $126 \cdot 10^3$. $\diamond$

Problema 3.9 *ITA 2017. Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \longmapsto A$ existem?*

Solução:

Primeiramente calculemos o número total de funções, como o conjunto B possui 5 elementos, o elemento b_1 tem 3 opções de imagem, a_1, a_2 ou a_3 e assim o mesmo para b_2, b_3, b_4 e b_5, logo há no total $3^5 = 243$ funções.

Vejamos agora a quantidade de funções não sobrejetoras, sejam os seguintes conjuntos A_1, A_2, e A_3, conjuntos em que os elementos a_1, a_2 e a_3, respectivamente, não fazem parte da imagem de f $(Im(f))$.

Agora calculando $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, $|A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$:

$|A_1|=|A_2|=|A_3| = 2^5 = 32$, justificativa, sem perca de generalidade, raciocinando com o b_1, para o caso do conjunto A_1, esse elemento tem duas possibilidades de ter um correspondente em A, a_2 ou a_3, de modo análogo os elementos b_2, b_3, b_4 e b_5 tem tem duas possibilidades de ter um correspondente em A, assim o $|A_1| = 2^5 = 32$. Procedendo-se assim para A_2, e A_3, conclui-se que $|A_1|=|A_2|=|A_3| = 2^5 = 32$.

$|A_1 \cap A_2|=|A_1 \cap A_3|=|A_2 \cap A_3| = 1$, justificativa, novamente fazendo o raciocínio para b_1, no caso do conjunto A_1 e A_2, b_1 só tem possibilidade de ter como correspondente o elemento a_3, analogamente b_2, b_3, b_4 e b_5, logo para $A_1 \cap A_3$, e $A_2 \cap A_3$ há também uma possibilidade de correspondência para b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5, e assim $|A_1 \cap A_2|=|A_1 \cap A_3|=|A_2 \cap A_3| = 1$.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, justificativa, não há maneira de se criar uma $f : B \longmapsto A$, em que os elementos a_1, a_2 e a_3 não podem ser correspondentes de b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5.

Logo, as funções que não são sobrejetoras são dadas em quantidade por:
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$
$= 32 + 32 + 32 - (1 + 1 + 1) - 0 = 93$, e portanto as sobrejetoras são $243 - 93 = 150$.

$\diamond$

Problema 3.10 *ITA 2013. Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.*

Solução:

Sem perca de generalidade para efeito de raciocínio, consideremos que as quatro cores são: amarelo (A), roxa (R), preta (P) e branca (B).

Novamente, quebrando o problema em casos:

Caso 1: O tetraedro regular será pintado da mesma cor em todas as faces, assim há 4 modos de se pintar o tetraedro.

Caso 2: Duas cores serão usadas, nesse caso, há $C_{4,2} = 6$ modos de se escolher as duas cores, suponha que tenham sido escolhidas as cores R e P. Há duas maneiras de se colorir esse tetraedro, 3 faces de R, por exemplo e a outra de P, e vice versa, logo 2 modos. O segundo modo de se colorir o tetraedro, que é duas faces de uma cor, por exemplo R e duas de outra cor, no caso P, logo 1 modo, pela simetria. No total de $6 \cdot (2 + 1) = 18$ modos.

Caso 3: 3 cores serão usadas, dessa forma, há $C_{4,3} = 4$ modos de se escolher as 3 cores. Suponha que tenham sido escolhidas para efeito de raciocínio as cores A, P, e B, para simplificação de raciocínio. Nesse caso há um modo apenas, duas faces devem ser pintadas de uma cor, por exemplo A, uma outra face de outra cor, pode ser o B, sobrando P para a última face a ser pintada, logo tem-se 3 modos de se fazer a escolha da cor que pintará duas faces e as outras faces estão automaticamente determinadas, totalizando $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

Caso 4: 4 cores distintas para as faces, para tanto imaginemos o tetraedro com uma base P voltada para o chão, e uma face R de frente para um observador, logo sobram duas possibilidades para o observador pintar a face direita a ele B ou A, escolhida por exemplo A, automaticamente a face a sua esquerda deve ser pintada de apenas 1 modo que é R.

Logo a resposta para o problema é $4 + 18 + 12 + 2 = 36$ modos. ◇

Problema 3.11 *IME 2014. Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode se organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas).*

Solução:

Para se resolver esse problema novamente deve-se quebrar em casos, pois podem haver as seguintes possibilidades:

Caso 1: Não há grupos de 2 alunos, assim as 9 pessoas fazem o trabalho sozinhas, portanto uma maneira de se organizar.

Caso 2: Há 1 grupo de 2 alunos, assim há $C_{9,2} = 36$ maneiras de se organizar.

Caso 3: Há 2 grupos de 2 alunos, assim há para o primeiro grupo $C_{9,2} = 36$, para o segundo grupo $C_{7,2} = 21$, como não há distinção entre os 2 grupos, deve-se dividir o resultado por 2!, assim há no total $\frac{36 \cdot 21}{2!} = 378$ modos.

Caso 4: Há 3 grupos de 2 alunos, analogamente ao caso 3, há $\frac{C_{9,2}C_{7,2}C_{5,2}}{3!} = 1260$ modos.

Caso 5: Há 4 grupos de 2 alunos, nesse último caso há $\frac{C_{9,2}C_{7,2}C_{5,2}C_{3,2}}{4!} = 945$.

Portanto no total há $1+36+21+1260+945 = 2620$ modos da sala se organizar.

◇

3.2 Problemas de combinatória em olimpíadas

Nessa seção, serão abordados alguns problemas de olimpíadas nacionais e estrangeiras, trazendo estratégias, que são objeto de estudo para a preparação dos alunos brasileiros, focados em exames nacionais e internacionais de olimpíadas [4].

Problema 3.12 *Leningrado 1988. Alguns besouros estão em um tabuleiro de 8×8, um em cada casa. A cada segundo, um dos besouros move para uma casa vizinha (lado em comum). Após muito tempo verificou-se que cada besouro havia passado por todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e tinha voltado para a sua casa inicial. Prove que existiu um momento em que todos os besouros estavam fora de sua casa inicial.*

Solução:

Seja A o primeiro besouro que voltou para a sua posição inicial, depois de se movimentar n vezes.

Caso A tenha passado por todas as casas, então os outros besouros saíram de suas posições iniciais, pelo menos uma vez, saindo de sua casinha de origem.

Nenhum dos outros besouros, porém para suas posições iniciais, depois de se movimentar por todas as casas, pois se isso tivesse ocorrido o besouro A não teria sido o primeiro a voltar para sua posição inicial.

Assim, antes que o A chegue ao seu ponto de partida, pode-se garantir que todos os insetos estão fora de suas posições de origem.

Nesse tipo de problema, deve-se extremizar uma situação (maximizando ou minimizando, considerando o melhor caso, ou o pior caso, considerando um momento imediatamente anterior ou posterior a essa situação especial [3]), assim, o raciocínio para resolver um problema não só algébrico, mas também de análise combinatória.

◇

Problema 3.13 *Olimpíada da Noruega 1996. Quantas contas de banco de* 11 *dígitos existem usando apenas os dígitos* 1 *e* 2*, tais que não ocorram dois* $1's$ *consecutivos?*

Solução:

Precisamos ter no mínimo cinco $2's$. E neste caso a única conta possível seria: 12121212121

Fixaremos os $2's$ e escolheremos as posições dos $1's$, Por exemplo, para sete $2's$, haveria 8 posições a escolher para colocar os quatro $1's$: _2_2_2_2_2_2_2_

Procederemos assim para todos os casos em que vamos separar o problema:

cinco $2's$ e seis $1's$: $C_{6,6} = 1$ modo.

seis $2's$ e cinco $1's$: $C_{7,5} = 21$ maneiras.

sete $2's$ e quatro $1's$: $C_{8,4} = 70$ maneiras.

oito $2's$ e três $1's$: $C_{9,3} = 84$ maneiras.

nove $2's$ e dois $1's$: $C_{10,2} = 45$ maneiras.

dez $2's$ e um 1: $C_{11,1} = 11$ maneiras.

onze $2's$: $C_{12,0} = 1$ modo.

Perceba que podemos calcular o número de maneiras para uma dada configuração a partir do 1 Lema de Kaplansky, por exemplo, para sete $2's$ e quatro $1's$ teríamos de imediato:

$f(11, 4) = C_{11-4+1,4} = C_{9,4}$.

Somando todas as possibilidades, temos:

$1 + 21 + 70 + 84 + 45 + 11 + 1 = 233$.

Observa-se também que a soma destas combinações corresponde a um termo da sequência de Fibonacci, no caso, o décimo terceiro.

Com isso seria possível generalizar este problema para uma quantidade maior de dígitos da conta.

◇

Problema 3.14 *OBM 1998. São dados um tabuleiro e uma peça, como mostra a figura*

De quantas maneiras diferentes podemos colocar a peça no tabuleiro, de modo que cubra completamente 3 *casas?*

*a)*16
*b)*24
*c)*36
*d)*48
*e)*60

Solução:

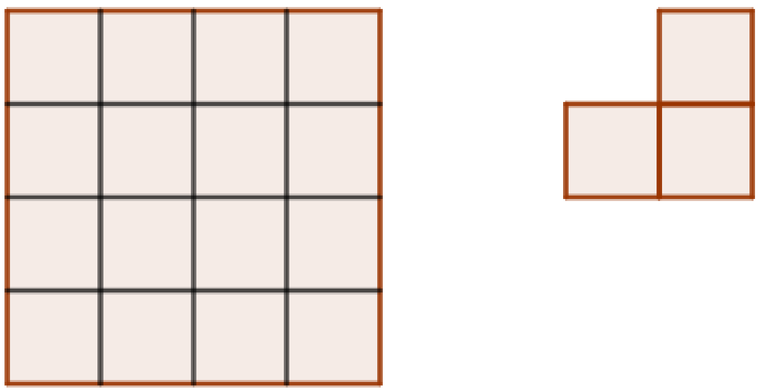

Figura 3.2: Tabueiro e peça a ser encaixada.

Para melhor raciocinar, imaginemos um tabuleiro menor 2×2 recortado do tabuleiro original de tamanho 4×4.

Há 9 tabuleiros 2×2 no interior do tabuleiro 4×4, além disso a peça pode ser encaixada no tabuleiro menor de 4 modos, assim pelo PFC, há $9 \cdot 4 = 36$ modos de se colocar a peça no tabuleiro da figura. $\diamond$

Problema 3.15 *Olimpíada de Wisconsin 1997. Deve-se preencher as* 16 *casas de um tabuleiro* 4×4 *com as letras a,b,c e d de tal modo que cada letra apareça precisamente uma vez em cada linha e precisamente uma vez em cada coluna. De quantas formas distintas isto pode ser feito?*

Solução:

Inicialmente, para se referir a um certo elemento do tabuleiro, imaginemos suas posições como as de uma matriz, assim usaremos $a_{i,j}$, para designar uma posição ou elemento a tomar aquela posição.

Para se escolher os elementos da primeira coluna há $4! = 24$ modos, como nesse caso o elemento a_{11} já foi escolhido sobram $3! = 6$ modos de se escolher os elementos da primeira linha, e portanto isso pode ser feito de $24 \cdot 6 = 144$ modos.

Supondo sem perca de generalidade que os elementos ficaram como o mostrado no tabuleiro a seguir.

a	b	c	d
b			
c			
d			

Agora, se faz necessário colocar os outros elementos das outras linhas e colunas. Conforme o pedido do enunciado, pela configuração acima, $a_{22} \neq b$, agora vejamos os casos em que $a_{22} = a$, $a_{22} = c$ ou $a_{22} = d$.

Caso 1: $a_{22} = a$, nesse caso há 2 modos de fazer o preenchimento:
I. $a_{32} = d$, $a_{42} = c$, $a_{23} = d$, $a_{24} = c$, $a_{33} = a$, $a_{34} = b$, $a_{43} = b$, $a_{44} = a$.
II. $a_{32} = d$, $a_{42} = c$, $a_{23} = d$, $a_{24} = c$, $a_{33} = b$, $a_{34} = a$, $a_{43} = a$, $a_{44} = b$.

Caso 2: $a_{22} = c$, há 1 modo:
$a_{32} = d$, $a_{42} = a$, $a_{23} = d$, $a_{24} = a$, $a_{33} = a$, $a_{34} = a$, $a_{43} = b$, $a_{44} = c$.

Caso 3: $a_{22} = d$, nesse último caso há 1 modo:
$a_{32} = a$, $a_{42} = c$, $a_{23} = a$, $a_{24} = c$, $a_{33} = d$, $a_{34} = b$, $a_{43} = b$, $a_{44} = a$.

O mesmo raciocínio pode ser feito para cada linha e coluna escolhidas, ou seja, há 4 maneiras de se preencher o quadro para cada escolha das filas, logo a resposta para o problema é $(4 \cdot 24) \cdot 4 = 576$ modos de se preencher o tabuleiro. $\diamond$

Problema 3.16 *Rússia 1965. Um certo comitê se encontrou* 40 *vezes. Existiam* 10 *membros em cada encontro. Nenhum par de membros se encontrou duas vezes. Prove que existiram pelo menos* 60 *membros no comitê.*

Solução:

Em cada encontro estão presentes 10 membros, e assim há $C_{10,2} = \dfrac{10!}{8!2!} = 45$ pares possíveis de membros, como houve 40 encontros, há $40 \cdot 45 = 1800$ pares totais.

Logo, $C_{n,2} \geqslant 1800 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} \geqslant 1800 \Rightarrow n \geqslant 60$, portanto havia pelo menos 60 membros. $\diamond$

Problema 3.17 *OBM 2010. Em uma cidade arbitrária o prefeito organizou uma rifa com bilhetes numerados de* 100 *a* 999*. O prêmio de cada bilhete é determinado pela soma dos algarismos do número do bilhete. Para que ninguém leve três prêmios iguais, estabeleceu-se que quem retirar três bilhetes iguais tem direito a um superprêmio. Qual é o menor número de bilhetes que um cidadão deve comprar para ter a certeza de que vai receber um superprêmio?*

Solução:

O menor número que um bilhete pode ter como soma é 1, que é o caso de um bilhete que vem com o número 100, e o maior número é 27, que é o bilhete que apresenta a numeração 999. Para esses 2 valores existem só os 2 bilhetes mencionados, 100 e 999.

Já para qualquer outro bilhete existem pelo menos 3 somas que são iguais, por exemplo para 3 dígitos diferentes os números 234, 243, 324, 342,432, 423, todos esses números possuem 9 como soma, ou seja são 6 números de mesma soma.

Se dois dígitos forem iguais como no caso dos números 223, 232, e 322, a soma será sempre 7, nesses 3 números.

Se hover três dígitos iguais, como é o caso do número 111, há pelo menos mais 2 números, cuja soma dos algarismos resulta em 3, são eles os números 300, 201, e 102.

As quantidades de números podem ser determinadas usando-se $x_1 + x_2 + x_3 = n$, em que n é a soma dos dígitos e $1 \leqslant x_1 \leqslant 9$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 9$, e $0 \leqslant x_3 \leqslant 9$ são os dígitos, que devem ser menores que 9.

Assim, se o participante for azarado, na pior das hipóteses, vai retirar o bilhete 100, o bilhete 999, e como há 27 somas possíveis, ele vai tirar 1 com cada um dos 25 valores, e repetir o feito de tirar cada um dos 25 valores novamente, na próxima retirada ele vai conseguir a terceira soma igual a uma das 25 possíveis que ele já retirou.

Portanto, retirando-se $1 + 1 + (2 \cdot 25) + 1 = 53$ ele conseguirá o prêmio especial.

◇

Problema 3.18 *China 1991. Em uma mesa circular estão sentados* 8 *mulheres e* 25 *homens, com ao menos* 2 *homens entre todo par de mulheres consecutivas. De quantas maneiras as pessoas podem sentar-se à mesa se duas configurações são consideradas iguais se uma pode ser obtida por rotação da outra.*

Solução:

Para efeito de raciocínio, fixemos a mulher 1 (M_1) a mesa, e fixemos também o sentido horário de preenchimento da outras pessoas, sem perda de generalidade.

Cada mulher deve ser seguida por 2 homens, assim, tem-se 8 espaços preenchidos entre as 8 mulheres por 2 homens, o que dará 16 homens já sentados, restando-se 9 ainda por sentar.

Assim, deve-se decidir quantos dos 9 homens deixar entre os oito espaços, o que é a mesma solução do seguinte sistema: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 9$, que pode ser feito de $P_{(9+7)}^{9,7} = \dfrac{16!}{9!7!} = 11440$ modos.

Como M_1 está fixa, pode-se permutar as outras 7 mulheres de 7! maneiras e os 25 homens podem ser permutados de 25! modos, logo no total há $11440 \cdot 7! \cdot 25!$ maneiras de se distribuir as pessoas na mesa.

◇

Problema 3.19 *OBM 2010. Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.*

Solução:

Duas situações extremas são ele não vai jogar bola nenhum dia ou então ele joga bola no máximo de dias que pode, que são 5 dias.

Usando o primeiro lema de Kaplansky, tem-se as seguintes possibilidades:

$$f(10,0)+f(10,1)+f(10,2)+f(10,3)+f(10,4)+f(10,5)=$$

$$=C_{(10-0+1),0}+C_{(10-1+1),1}+C_{(10-2+1),2}+C_{(10-3+1),3}+C_{(10-4+1),4}+C_{(10-5+1),5}=$$

$$=C_{11,0}+C_{10,1}+C_{9,2}+C_{8,3}+C_{7,4}+C_{6,5}=$$

$$=\frac{11!}{11!0!}+\frac{10!}{1!9!}+\frac{9!}{2!7!}+\frac{8!}{3!5!}+\frac{7!}{4!3!}+\frac{6!}{5!1!}=$$

$$=1+10+36+56+35+6=144.$$

◇

Problema 3.20 *Argentina 1997. Sejam s e t duas retas paralelas. São marcados k pontos nas retas s e n pontos na reta t ($k \geqslant n$). Sabendo que a quantidade total de triângulos que tem seus três vértices em pontos marcados é 220, achar todos os possíveis valores de k e n.*

Solução:

Pode-se formar os triângulos por dois casos:

Caso 1: Escolhe-se 2 pontos da reta s entre os k possíveis, isso pode ser feito de $C_{k,2}$ modos, e escolhe-se 1 ponto da reta t entre os n possíveis, o que pode-se fazer de n modos. Assim há $nC_{k,2}$ maneiras de se formar os triângulos.

Caso 2: Escolhe-se 2 pontos da reta t entre os n possíveis, isso pode ser feito de $C_{n,2}$ modos, e escolhe-se 1 ponto da reta s entre os k possíveis, o que pode-se fazer de k modos. Assim há $kC_{n,2}$ maneiras de se formar os triângulos.

Pelo caso 1 e caso 2, há $nC_{k,2}+kC_{n,2}$ modos de se formarem os triângulos.

Logo, $\dfrac{k(k-1)n}{2}+\dfrac{n(n-1)k}{2}=\dfrac{kn(k-1+n-1)}{2}=\dfrac{kn(k+n-2)}{2}=220 \Rightarrow$ $kn(k+n-2)=440 \Rightarrow nk^2+n(n-2)k-440=0$.

Analisando o valor de n:

Para $n=1$: $k^2-k-440=0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n=2$: $2k^2-440=0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n=3$: $3k^2-3k-440=0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n=4$: $4k^2+8k-440=0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n=5$: $5k^2+15k-440=0 \Rightarrow k=8$ (convém, pois $k>n$) ou $k=-11$ (não convém).
Para $n=6$: $6k^2+24k-440=0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n=7$: $7k^2+35k-440=0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.

Para $n = 8$: $8k^2 + 48k - 440 = 0 \Rightarrow k = 5$ (não convém, pois $k < n$) ou $k = -11$ (não convém).
Para $n = 9$: $9k^2 + 63k - 440 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n = 10$: $10k^2 + 80k - 440 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$.
Para $n > 10$: Obtem-se $k < n$, o que contraria o enunciado.

Assim a única possibilidade é $k = 8$ e $n = 5$. $\diamond$

Problema 3.21 *Argentina 2001. Carlos escreve a lista de todos os números naturais menores que* 10000 *que tem exatamente dois dígitos* 1 *consecutivos. (Por exemplo,* 113, 5112, 1181 *estão na lista de Carlos, porém* 1312, 2111 *não estão na lista de Carlos.) Achar quantos números tem a lista de Carlos.*

Solução:

Carlos deve escolher números no seguinte formato: $11ab$, $a11b$, ou $ab11$, quebrando o problema em casos:

Caso 1: Números no formato $11ab$, nesse caso há 9 modos de se escolher o a, pois o 1 não pode ser escolhido e 10 modos de se escolher o b, pois o 1 pode ser uma opção, logo existe $9 \cdot 10 = 90$ maneiras de se formar um número nesse caso.

Caso 2: Números no formato $a11b$, nesse caso há 9 modos de se escolher os números a e b, todos os algarismos exceto o 1 podem ser usados, assim no total há $9 \cdot 9 = 81$ modos de se colocar um número nesse formato.

Caso 3: Números no formato $ab11$, para esse último caso há 10 modos de se escolher a e 9 modos de se escolher b, portanto $10 \cdot 9 = 90$ modos de obter tal número.

Contabilizando todos os casos, temos $90+81+90 = 261$ números sob as condições do problema. $\diamond$

Referências Bibliográficas

[1] Sweeney, Dennis J., Thomas, A. Williams, David, R. Anderson, *Estatística aplicada à Administração e Economia*, IV. Introdução a probabilidade. 157-159, (2013).

[2] Devore, Jay L., *Probabilidade e estatística para engenharia e ciências*, II. Probabilidade. 57-62, (2014).

[3] Rufino, Marcelo O., Carneiro, Manoel Leite, *Coleção elementos da matemática-sequencias, análise combinatória, matriz*, IV. Análise combinatória. 50-100, (2006).

[4] Rufino, Marcelo O., *Técnicas em olimpíadas de matemática-combinatória*, III. Contagem. 27-38, (2014).

[5] Morgado, Augusto C., Carvalho, Paulo C. P., *Matemática Discreta*, VI. Análise Combinatória. 107-123, (2015).

[6] Morgado, Augusto C., Carvalho, Paulo C. P., de Carvalho, João B. Pitombeira, Fernandez, Pedro, *Análise Combinatória e Probabilidade*, Análise Combinatória. 1-87, (2006).

[7] Berman, Gerald K. D. F., *Introduction to Combinatorics*, 35-42, (1972).

[8] Tertuliano, Franco *Princípios de Combinatória e Probabilidade*,323 pp. 39-56, 95-97, 123-126 (2018).

[9] Andreescu, Titu, Zuming, Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates Counting Strategies*, 1-25, (2004).

[10] Bachx, Arago de C., Poppe, Luiz M. B., Tavares, Raymundo N. O.*Prelúdio à Análise Combinatória*, 3-106, (1975).

[11] Garbi, Gilberto. *Uma pequena pérola de Euler, Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática* , n$^{\underline{o}}$ 50 (2002).

A análise combinatória nos vestibulares militares e olimpíadas.

por

WILLIAM LACERDA MOURÃO

Dissertação apresentada como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre no Ensino de Matemática do PROFMAT-CCEN-UFPB.

Área de Concentração: Matemática Discreta, Análise Combinatória.

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof.Dr. Carlos Bocker Neto -UFPB (orientador)

Flank David Morais Bezerra

Prof.Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB

Thiago José Machado

Prof.Dr. Thiago José Machado - UFPB

Outubro/2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M929a Mourão, William Lacerda.
A análise combinatória nos vestibulares militares e olimpíadas. / William Lacerda Mourão. - João Pessoa, 2018.
52 f.

Orientação: Carlos Bocker Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/João Pessoa.

1. Métodos de contagem. 2. análise combinatória. 3. problemas de contagem. I. Bocker Neto, Carlos. II. Título.

UFPB/BC