UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE VETORES

Rogério Lima Sousa

São Luís - MA
2019

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE VETORES

Rogério Lima Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao departamento de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Raimundo J. B. Brandão

São Luís - MA
2019

Sousa, Rogério Lima.
Representações semióticas como
instrumento didático no ensino e aprendizagem
de vetores/ Rogério Lima Sousa. - São Luís, 2019.
95p.

Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em
Matemática (PROFMAT), Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo J. B. Brandão.

1. Vetor. 2. Registros de Representações Semiótica.
3. Engenharia Didática I. Título.

CDU 514.742:37.02

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE VETORES

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dissertação de Mestrado apresentada ao departamento de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Raimundo J. B. Brandão

Aprovada em: 13 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Raimundo J. B. Brandão - UEMA
Orientador

Prof. Dr. Raimundo Luna Neres - UFMA

Prof. Dr. Sérgio Noleto Turibus - UEMA

São Luís - MA
2019

Dedico este trabalho a minha esposa Adriana e ao meu filho Gian Roberto, pois são eles que fazem sentir - me vivo e dar valor à vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e à minha família por todas as maravilhas que têm me proporcionado. Agradeço imensamente ao professor Raimundo J. B. Brandão que me orientou com toda a paciência, motivação e ensinamentos valiosos durante esta difícil caminhada. Ao professor Sérgio Turibus pela sua generosa contribuição durante todo o período do curso de mestrado. Finalmente agradeço a todos os colegas do PROFMAT.

RESUMO

Este trabalho visa a utilização das representações semióticas como instrumento didático no ensino e aprendizagem de vetores, trata-se de um experimento com alunos do 2º ano do ensino médio, onde objetivamos identificar suas dificuldades e oferecer uma proposta didática facilitadora do aprendizado. Utilizamos em aulas expositivas a teoria de Raymond Duval, aplicamos algumas atividades e exploramos as representações dos vetores em várias situações. O trabalho foi dividido em etapas, na primeira a turma foi submetida a um teste diagnóstico e após análise do mesmo constatamos a quase total ausência de conhecimento prévio sobre vetores, suas representações e propriedades. A segunda etapa consistiu de aulas expositivas onde apresentamos os vetores em termos de coordenadas definindo suas operações e apresentamos suas propriedades despertando assim o interesse dos alunos por este novo objeto. Na terceira etapa fizemos a experimentação e finalmente passamos a analisar as respostas dos alunos às questões propostas dando ênfase às conversões entre os registros distintos e ao tratamento dentro de um mesmo registro o que nos permitiu identificar dificuldades e apresentar uma sequência didática que por sua vez possa tornar o aluno protagonista do seu aprendizado. Este estudo tem uma abordagem qualitativa de intervenção com embasamento na metodologia da engenharia didática. A questão que norteou este trabalho foi: como os registros de representações semiótica contribuem para o processo de ensino e aprendizagem de vetores?.
Palavras Chave: Vetor, representações semióticas, engenharia didática.

ABSTRACT

This work aims at the use of semiotic representations as a didactic tool in teaching and learning vectors, it is an experiment with students of the second year of high school, where we aim to identify their difficulties and offer a didactic proposal to facilitate learning. We used Raymond Duval's theory in lectures, applied some activities and explored representations of vectors in various situations. The work was divided in stages, in the first the class was submitted to a diagnostic test and after analysis of the same we verified the almost total absence of previous knowledge about vectors, their representations and properties. The second stage consisted of expository classes where we presented the vectors in terms of coordinates defining their operations and presented their properties thus arousing the students' interest in this new object. In the third stage we did the experimentation and finally we started to analyze the students' answers to the questions proposed, emphasizing the conversions between the different registers and the treatment within a same record, which allowed us to identify difficulties and present a didactic sequence that in turn could make the learner the protagonist of their learning. This study has a qualitative intervention approach based on didactic engineering methodology. The question that guided this work was: how do records of semiotic representations contribute to the process of teaching and learning vectors?
Keywords: Vector, semiotic representations, didactic engineering.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

O conceito de vetor no cotidiano das pessoas, leva à ideia de condução de alguma coisa. É assim por exemplo nas ciências biológicas e médicas, quando se refere aos animais que transmitem doenças. Em matemática, o termo vetor remete à condução de uma informação acerca de uma grandeza caracterizada por uma direção, um sentido e um comprimento.

O objeto matemático vetor, também é bastante utilizado na educação superior principalmente nos componentes curriculares cálculo diferencial, física, álgebra linear e principalmente em geometria analítica. Logo é muito importante trabalhar o conceito de vetor na etapa de estudo anterior à universidade.

Diante das dificuldades na aprendizagem do conceito de vetor na educação básica, verifica-se com muita frequência o baixo desempenho dos alunos em cursos de engenharia nas disciplinas acima citadas.

Este estudo tem por objetivo analisar as contribuições dos registros de representação semiótica no estudo de vetores, com alunos da 2ª série do ensino médio. É uma investigação de abordagem qualitativa de intervenção, onde buscou-se explicar as razões das dificuldades dos alunos utilizando-se da engenharia didática como metodologia de ensino. A engenharia didática, enquanto metodologia de ensino, consiste num trabalho de construção de conhecimento através de uma sequência didática.

Procurou-se com este estudo responder a seguinte questão de pesquisa: como os registros de representações semiótica contribuem no processo de ensino e aprendizagem de vetor? Para responder a esta questão, além da engenharia didática de Michele Artigue (988), buscou-se ainda fundamentação na teoria dos registros de representação de Duval (2003, 2005, 2006, 2001).

A organização das seções que compõem esta dissertação, refletem os princípios da engenharia didática que se fizeram presentes no desenrolar deste estudo e as contribuições dos registros de representações semiótica no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Na introdução apresenta-se o trabalho justificando-se a utilização da engenharia didática e a teoria de representação semiótica no ensino da matemática, em particular no de vetores. A seção 2, foca na teoria dos registros de representações semióticas. A seção 3, aborda as concepções, evolução e operações com vetores. Na seção 4, discorre-se sobre a concepção da metodologia engenharia didática, suas fases e apresentação de uma sequência didática para a realização do experimento. Já na seção 5, o foco são as etapas da realização do experimento e analise a posteriori. Finalmente na seção 6 temos as considerações finais.

2 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

2.1 Representações

Falar em representações matemáticas significa discorrer sobre as diversas maneiras de se representar um objeto de ensino. Haja vista que, segundo Duval (2003) e Neres (2010) essa variedade de representações tem grande importância para a construção do conhecimento, pois o aluno, ao sair do imaginário e exteriorizar um conceito forma conexões entre conhecimentos prévios e novas informações o que por sua vez tende a amplia o seu horizonte de saberes.

Apalavra representação é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal "representar". Assim representam objetos matemáticos: um número, uma função, um vetor. Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles (DUVAL, 2012, p.268).

De fato, essa confusão acarreta, em perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática (DUVAL, 2012, p.268).

Nas últimas décadas estudos sobre representações matemáticas tem ocupado espaço nas discussões em educação matemática dada a sua grande importância para o raciocínio matemática.

Para Bishop e Goffree (1986), existem quatro tipos principais de representações: símbolos matemáticos, linguagem, figuras e objetos. Os autores afirmam que estas representações possuem o seu próprio vocabulário que os alunos necessitam de aprender para compreenderem as ideias matemáticas. E que mesmo perante várias representações de um objeto, estes só irão compreendê-lo quando atribuírem significado a estas representações.(PONTE e VELEZ,2011 apud MACEDO, 2016, p. 1).

As tarefas propostas pelo professor devem apresentar problemas compatíveis com seu conhecimento desafiando a curiosidade e incutindo no aluno o gosto pelo raciocínio PÓLYA (1977). Nos momentos de discussão dessas tarefas o professor pode perceber o nível de compreensão dos alunos, para que estes compreendam melhor os conceitos, procedimentos e representações e desenvolvam as capacidades de raciocínio e comunicação (PONTE e VELEZ, 2011 apud MACEDO, 2016, p. 1-2).

Os professores tendem para uma visão absolutista e instrumental da matemática, considerando-a como uma acumulação de regras, procedimentos e teoremas. No entanto, alguns professores, destacando-se do conjunto, assumem uma concepção dinâmica, encarando a matemática como um domínio em evolução, conduzido por problemas, e sujeito a revisões significativas. (PONTES, 1992, p. 208).

Em Portugal por exemplo, desde 2007 o Ministério da Educação (M.E, 2007) vem recebendo um especial cuidado, tanto nas orientações metodológica, quanto como recomendações para o processo de ensino e aprendizagem nos diversos conteúdos matemáticos.

Para que estas recomendações e orientações tenha êxitos, é fundamental que o professor esteja bem preparado em todos os aspectos dos saberes docentes para que o ensino de matemática seja eficiente.

Encontra-se em Ponte e Velez (2008), que as representações matemáticas receberam uma significativa atenção no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 no Ministério da Educação e Cultura de Portugal como orientação metodológica.

Embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados (PORTUGAL, 2013, p. 5).

2.2 Signos e Semiótica

Estudando a história da humanidade percebe-se que sua maior invenção foi a língua, tanto falada quanto escrita. Foi a linguagem que possibilitou ao homem utilizar signos para representar alguma coisa. A partir da utilização dos signos, as formas de representar e significar acompanham o homem e sua evolução.

Um signo, é tudo aquilo que guarda determinados aspectos ou maneira de representar algo para as pessoas ou indivíduos, criando na mente desse individuo um significado equivalente, gerando um efeito interpretativo.

Um dos maiores estudiosos acerca dos signos foi o filósofo e físico norte-americano Charles Sanders Peirce (1839 -1914) que a partir destes estudos ampliou os estudos sobre semiótica.

Peirce concebeu a semiótica como a Teoria Geral dos signos, ciência dos signos e de seus significados, tanto na natureza, quanto na cultura. Ciência da linguagem e dos processos de comunicação O estudo da semiótica aprimorou a comunicação entre alguns ramos do conhecimento e, dentre algumas delas, encontra-se a matemática, que incorporou aos seus processos de ensino e aprendizagem dinamizando sua linguagem.

A Semiótica é uma ciência que possui como objeto de investigação os signos. "Um signo só é signo porque esse corpo material que o constitui está para alguma coisa que não é ele mesmo. Ele só funciona e age como signo porque substitui, representa, está no lugar de alguma coisa que não é ele"(SANTAELLA, 2000, p. 60).

A tese central de Peirce é a de que 'todo pensamento se dá em signos', do que decorre que [...] a cognição é uma relação de três termos, isto é, triádica, uma relação entre um sujeito e um objeto inevitavelmente mediada pelo signo. (SANTAELLA, 1992, p.70). O desenvolvimento dos conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas outras funções intelectuais [...]. Esses processos psicológicos complexos não podem ser dominados através da aprendizagem inicial. A experiência prática mostra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. (VIGOTSKY,1998, p.104).

Antes de formalizar os conceitos matemáticos, é importante uma apresentação das noções intuitivas e suas representações, pois símbolos, tabelas, gráficos, expressões tudo contribuem para uma melhor compreensão dos conceitos, pois o pensamento matemático se externaliza seja pela integração do estudo da gênese das palavras e seus significados, chamada de noesis e semiose, que para Peirce compreende o processo de significação e a produção de significados, ou seja, a maneira como as pessoas usam os signos, seu objetos e suas diferentes representações.

Semiótica é a ciência que estuda os signos e seus significados, é a ciência das linguagens. A teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval contribui com a compreensão da aprendizagem matemática, do ponto de vista cognitivo, na busca por entender dificuldades apresentadas por muitos alunos na compreensão de conceitos matemáticos. Duval defende a importância das representações semióticas não apenas para expressar o que foi aprendido, mas para aprender o que ainda não se sabe. E defende que o ensino da matemática na formação inicial dos alunos tem o objetivo de "contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização" (DUVAL, 2003, p. 11).

A Teoria das Representações Semióticas estuda o funcionamento e o desenvolvimento cognitivo do pensamento humano, principalmente em atividades relacionadas à Matemática. Segundo Duval (2007), para desenvolvermos o entendimento da Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental, é necessária uma abordagem cognitiva, haja vista que, no ensino da Matemática, buscamos desenvolver nos alunos habilidades e competências que possam vir contribuir para o desenvolvimento de suas capacidades de raciocínio e de análise. (NERES, 2010, p. 22)

[...] A teoria dos registro de representação semiótica tem como pressuposto que uma aprendizagem significativa ocorre quando o estudante adquire a capacidade de mudar de registro e, além disso, consegue diferenciar um objeto de sua representação. Na conversão, é normal que o estudante encontre mais dificuldade, pois é nesse momento que ele precisa decidir entre as representações, e escolher a que melhor se adapta a situação – em termos de tratamento – e, então, fazer a transformação para o registro requerido no enunciado da questão. (RONCAGLIO e NEHRING, 2015, P. 4).

Segundo Davis e Hersh (1998, p. 293), "[...] a Matemática provém da conexão da mente com o mundo externo..." e, neste sentido, a presença da Matemática na realidade não pode ser ignorada no âmbito da Educação Matemática e, especialmente, quando se trata de aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Neste cenário, para evidenciar a conexão entre Matemática, mente e mundo externo é necessário o uso de representações. (SILVA, 2008, p.19)

2.3 Representação Semiótica

Ao longo dos anos de nossa experiência como docente temos observado que aulas onde valoriza-se apenas a concepção algébrica dos conceitos matemáticos acabam limitando a construção do conhecimento do aluno, pois para compreender um objeto abstrato necessita-se mais de uma representação.

Muitas pesquisas em educação matemática, nas últimas décadas , têm procurado contribuir com maior eficiência na aprendizagem em matemática. São várias as metodologias e quadros teóricos com essa perspectiva no processo de ensino e aprendizagem. Dentre os muitos quadros teóricos em educação matemática, neste trabalho optou-se para sua fundamentação, os Registros de Representação Semiótica, pois compreender o conceito de um objeto matemático sem conhecer suas formas de representação é difícil de se fazer uma conexão entre mente e mundo exterior.

Sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, buscamos publicações realizadas nos últimos anos. Dentre os trabalhos levantados e pesquisados, selecionamos apenas aqueles que, de certa forma, possuem alguma interseção com este trabalho e que tenha aplicado essa Teoria. Pavlopoulou (1994) investigou a aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no ensino propedêutico de álgebra linear. O objetivo foi promover a coordenação dos diferentes registros de representação. Ela propôs aos alunos de álgebra linear, do DEUG A (Primeiro ano universitário), da Universidade de Strasbourg, uma variedade de situações para as famílias de vetores em cada um dos seus registros, assim como tarefas que levassem a explorar sistematicamente as possíveis variações que estivessem representadas em um cadastro e fornecer, ou observar as variações concomitantes de performances em outro registro. Foram desenvolvidas quatro pesquisas com os alunos. (NERES, 2010, p. 22)

Raymond Duval propõe em seu estudo sobre "registros de representação semiótica para a aprendizagem matemática", que a abordagem cognitiva deve ser direcionada para compreender as dificuldades dos alunos na compreensão da matemática e para a também compreensão da natureza dessas dificuldades.

A ação cognitiva possibilita ao aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos. Dessa forma, observar e entender as condições e os problemas da aprendizagem em matemática podem se dá buscando descortinar quais vertentes cognitivas estão presentes na ação que se direciona aos objetos matemáticos e como se dão as várias transformações que constituem as representações dos saberes matemáticos.(Duval, 2005, p. 12).

Nesse caminho, deve-se também identificar a possibilidade da unicidade dessas representações em qualquer ação de construção de conhecimento em outros objetos de estudo.

Assim é dada: As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos (sinais) pertencentes a um sistema de representação que têm suas dificuldades próprias de significância e de funcionamento. Uma figura, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, são representações semióticas que salientam sistemas semióticos diferentes (Santos, 2009, p. 58).

As representações semióticas constroem um elo entre o objeto e as ações cognitivas do pensamento, o que leva aos registros de representação diferentes para um mesmo objeto matemático estudado. Segundo Duval (2005), não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação, isto porque não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação. Essa afirmação nos traz a ideia de pluralidade de aplicação, não se restringindo à matemática, e sim a toda construção de conhecimento, em todas as áreas da função cognitiva.

Percebe-se desta forma, a importância dos registros de representação semiótica para o processo de ensino e aprendizagem de vetores relacionando com a necessidade de articulação do pensamento entre as várias representações deste objeto matemático. Assim, é percebido que a compreensão em matemática, quando envolvido com a interpretação das várias aplicações, em particular dos vetores, tem como uma de suas condições a identificação da pluralidade dos registros de representação e a livre circulação entre eles.

A possibilidade de um objeto matemático ser expresso por várias representações diferentes gerou, a necessidade de diferenciar o objeto matemático de sua representação. Duval (2005) diferencia quatro tipos de registros concentrados na estruturação do pensamento matemático, classificando-os assim:

- **Quanto a funcionalidade:** multifuncionais ou monofuncionais
- **Quanto ao discurso:** discursivo ou não discursivo

Os registros discursivos utilizam a linguagem natural ou os sistemas de escritas. Permitem descrever, explicar, calcular, raciocinar e, interferir nestes registros. Os não discursivos mostram formas ou configurações de formas. Permitem informações bem características destas representações, mas limitadas em relação às representações discursivas.

Os registros multifuncionais são utilizados em todas as áreas do conhecimento, são comuns a uma determinada cultura e espontâneos. Podem ser aprendidos fora da escola. Os monofuncionais são formais, especializados, aprendidos em matemática ao solicitar cálculos e gráficos.

REGISTOS	DISCURSIVO	NAO DISCURSIVO
MULTIFUNCIONAIS	Língua natural	Figural
MONOFUNCIONAIS	Algébrico	Gráfico

Tabela 1: FONTE: Duval, 2003

A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isto porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópios, aparelhos de medida, etc.).

"O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas". O que leva a um paradoxo em matemática: como se pode não confundir um objeto e sua representação se não se tem acesso a esse objeto a não ser por sua representação? (Duval, 2005, p. 21)

Para que seja possível essa costura entre o objeto matemático e as suas várias representações, é necessário e primordial que o agente operante compreenda, assimile e corretamente use cada um dos registros e saiba "navegar" entre eles.

Nesses argumentos, podemos considerar compreensão e assimilação matemática quando há a mobilização simultânea de, pelo menos, dois diferentes registros de representação, ou na possibilidade da troca de registro de representação. Deve haver a possibilidade constante de transitar de um registro para outro. Assim, é considerado compreendido o objeto matemático quando há a operacionalização de, ao menos, dois registros de representação semiótica.

De acordo com esses argumentos, se colocam dois diferentes tipos de transformações entre os registros de representação semiótica:

Tratamento - transformação permanecendo no mesmo sistema. Nem todo tratamento pode ser efetuado em qualquer registro e cada registro favorece um tipo de tratamento. Temos no estudo de vetor como, exemplos de tratamento: desenvolver um cálculo permanecendo no mesmo sistema de escrita numérica ou uma lei de formação.

Conversão - transformação com mudança de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos. Destaca-se aqui que converter significa relacionar registros mobilizados. É comum e sempre relatado pelos estudantes as muitas dificuldades em reconhecer e resolver problemas com o mesmo objeto matemático através de duas representações diferentes, sendo que em muitas situações, cada uma delas apresenta a problematização e as variáveis de formas diferentes. A conversão não necessariamente, mantem a explanação de propriedades do objeto igualmente. Portanto, a representar o objeto matemático no registro final, através de certa conversão, não tem significado igual à representação no registro inicial.

Na conversão há dois fenômenos: o da não-congruência e o da congruência. Quando a representação do registro final se assemelha em alguns aspectos a forma na representação inicial e a conversão apresenta elementos de uma simples codificação, então há correspondência semântica das unidades de significado entre os dois registros, logo, há congruência. Se no registro final não existirem elementos do registro inicial, isto é, não se percebe uma clara representação cognitiva do objeto matemático ou falta de conexão entre a passagem de um registro a outro, então há o fenômeno da não- congruência.

Usando uma análise matemática pura e simples, observamos que a conversão serve unicamente para avaliar qual será o registro ao qual os tratamentos utilizados são eficazes ou mais simplificados para obter um outro registro, que servirá de ponte ou direcionamento aos tratamentos que se aplicam em outro registro. Isto é, ao fazer a conversão da forma algébrica gráfica, inicialmente pode-se utilizar, implicitamente em alguns casos, uma conversão da forma algébrica para uma representação tabular. Daí o registro tabular, com tratamento coerentemente aplicado, será possível chegar à representação algébrica.

Aqui, nestes referenciais, obtivemos embasamento para utilização dos registros de representação semiótica como principal referencial teórico para esta dissertação, por sua aplicabilidade imediata ao estudo de vetores e, por sua variabilidade, que possibilita transitar nas várias formas de representação de um vetor.

3 VETORES

Existem grandezas, chamadas escalares, que são caracterizadas por um número seguido de uma unidade de medida. Por exemplo, a temperatura, a massa, o volume, o comprimento e a densidade. No entanto, há outras grandezas que requerem mais do que isso. Por exemplo, para caracterizarmos deslocamento, força ou velocidade, precisamos de três características a saber: intensidade (ou módulo), direção e sentido. Tais grandezas são ditas vetoriais e serão representadas por segmentos de reta orientados (flechas).

Diante das dificuldades de aprendizagem do objeto matemático vetor, muitos pesquisadores têm procurado desenvolver pesquisas mostrando a necessidade deste conteúdo ser melhor explorado na educação básica, não apenas no componente curricular de física, mas na própria matemática.

A propósito desta necessidade, a nossa legislação educacional tem demonstrado esta preocupação, tanto que a Base Nacional Comum Curricular contempla o ensino de vetor na educação básica.

O trabalho com vetores deve proporcionar aos estudantes, inicialmente, compreender o conceito de vetor tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) como do ponto de vista algébrico (caracterizado por suas coordenadas). Na continuidade, esse trabalho é ampliado para que eles sejam capazes de interpretar a representação geométrica da soma de vetores e da multiplicação de um vetor por um escalar e de compreender as relações entre vetores e as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação). "É importante que todo esse trabalho seja proposto de modo articulado e integrado com situações estudadas na Física, por exemplo, e com apoio de softwares de geometria dinâmica". (BNCC, 2016, p. 562-563). Esta preocupação com o ensino de vetores no ensino médio se faz presente desde a primeira versão da base nacional comum.

O estudo desse conteúdo na 2ª série do ensino médio contribuirá para uma melhor aprendizagem em geometria plana e espacial, matrizes, geometria analítica e muitas disciplinas dos cursos superiores.

Os vetores são instrumentos matemáticos adequados para exposição sintética de muitas ideias importantes da geometria euclidiana, da física e da geometria analítica e uma combinação dos vetores com métodos do cálculo permitem aplicações à mecânica. Uma boa descrição de como abordar vetores é dada por Apostol em seu clássico livro de cálculo optamos por retratá-la nos parágrafos seguintes.

Segundo Apostol (1994) "Existem fundamentalmente três maneiras diferentes para se iniciar o estudo dos vetores: geometricamente, analiticamente e axiomaticamente. Na visão geométrica os vetores são representados por segmentos de reta orientados ou setas. As operações algébricas com vetores tais como adição, subtração e multiplicação por número real são definidas e estudadas por métodos algébricos.

No método analítico, os vetores e correspondentes operações são completamente descritos em termos de números, chamados as componentes ou coordenadas. As propriedades das operações com vetores são então deduzidas a partir das operações correspondentes dos número. A descrição analítica dos vetores resulta naturalmente da descrição geométrica, desde que se introduza um sistema de coordenadas.

A via axiomática não faz qualquer tentativa para descrever um vetor ou as operações algébricas com os mesmos. Pelo contrário, vetores e operações vetoriais são considerados como conceitos não definidos, relativamente aos quais pouco sabemos a não ser que eles satisfazem a um certo conjunto de axiomas. Um tal sistema algébrico, com axiomas apropriados, chama-se um espaço linear ou espaço vetorial linear. Em todos os ramos da matemática se encontram exemplos de espaços vetoriais. A álgebra dos segmentos de reta orientados e a álgebra dos vetores definidos pelas componentes são apenas dois exemplos de espaços vetoriais.

O estudo dos vetores do ponto de vista axiomático é talvez o mais satisfatório matematicamente, uma vez que proporciona uma descrição dos vetores independentemente do sistema de coordenadas e de qualquer representação geométrica particular. Este estudo é adequado ao ensino superior. Nos trabalhos voltados à educação básica em especial ao ensino médio recomenda-se o método analítico e também o uso de segmentos de reta orientados para interpretar geometricamente muitos dos resultados. Sempre que possível, apresentar as demonstrações e aplicações permitindo que o estudante possa familiarizar-se com exemplos concretos e igualmente motivar-se na preparação para os temas mais abstratos que serão enfrentados nas disciplinas de geometria analítica, cálculo e álgebra linear".

3.1 Gênese e evolução do conceito de vetor

Sabemos que os vetores surgiram no século XIX com as representações geométricas de números complexos. Nomes como Caspar Wessel (1745 - 1818), Jean Robert Argand (1768 - 1822), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), conceberam números complexos como pontos no plano bidimensional, isto é, como vetores bidimensionais.

Muitos matemáticos e cientistas trabalharam com estes novos números e os aplicaram de várias maneiras; por exemplo, Gauss fez um uso crucial de números complexos para provar o Teorema Fundamental da Álgebra (1799). Em 1837, William Rowan Hamilton (1805 -1865) mostrou que os números complexos poderiam ser considerados abstratamente como pares ordenados (a, b) de números reais. Esta ideia era parte de uma campanha de muitos matemáticos, incluindo Hamilton, para procurar uma maneira de estender os "números"bidimensionais para três dimensões; mas ninguém conseguiu isto preservando as propriedades algébricas básicas dos números reais e complexos.

O trabalho de Patrício (2011) descrito nos parágrafos a seguir nos dá uma boa descrição cronológica da evolução do conceito de vetor.

Em 1828, C, V. Mourey e john Warren, publicaram obras que trataram de representações geométricas dos números complexos.

A teoria da extensão linear (Die lineale Ausdehnungslehre) foi a primeira exposição completa da teoria de Hermann Gunther Gassmann. Ele ampliou a adição de vetores, o produto interno e o externo. Embora sua obra não tenha sido reconhecida desde o início, por ser considerada de caráter mais filosófico do que matemático, é a que guarda características mais próximas à teoria dos espaços vetoriais como hoje é conhecida.

Apontado como um dos principais difusores da ideias de um moderno sistema de análise vetorial, William Rowan Hamilton foi o primeiro a usar os termos escalar e vetor pra designar parte real e parte imaginária respectivamente, de um quaternion - um dos principais sistemas de análise vetorial. Em seu artigo de 1846 ele escreveu sobre um quaternion Q = a + bi + cj + dk, que poderia ser escrito q= Scal.Q + Vect.Q ou simpismente Q = SQ + VQ, em outras palavras, SR = a quando VQ = bi + cj + dk, isto induziu a escrita de equações quarternioninstas, da maneira omo veremos a seguir: se tivermos dois quaternions e ambos tiverem a pare escalar igual a zero, Q = xi +yj + zk e Q' = x'i +y'j+z'k, então, as regras para multiplicação do quaternion acima é: SQQ' = - (xx' + yy' + zz') e VQQ' = i(yz' - zy') + j(zx - xz') + k(xy' + yx') o que é importante notar sobre isto é que a parte escalar deste quaternion pode ser vista, matematicamente igual ao negativo do moderno produto escalar e a parte vetorial, o que se conhece modernamente como o produto misto. Historicamente, a descoberta dessa estrutura marcou uma fase importante do desenvolvimento da análise vetorial, pois foi ao longo desse caminho que se originou a moderna análise vetorial

Em 1853, Augustin Cauchy publicou seu "Sur les clefs algébriques"onde apesenta métodos que transferiu para as soluções de vários problemas algébricos por exemplo, encontrar as raízes de uma equação qualquer. Introduziu as noções de rayon vector e suas projeções sobre os eixos, definindo raio vetor como a soma de suas projeções. Contribuindo para a popularização do uso dos úmeros complexos e sua representação geométrica.

Ao final do século XIX, a teoria dos quaternions desempenhou um importante papel na física, sendo utilizada principalmente, na simplificação da notação do eletro magnetismo.

3.2 Visão Geométrica

A sequência de tópicos dado nesta seção teve inspiração e influência nas aulas do programa de aperfeiçoamento de professores de matemática do ensino médio - PAPMEM promovido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA e nas seguintes referências: [13], [21] e [29].

3.2.1 Segmentos orientados

Esta seção é dedicada ao estudo dos segmentos orientados. Um segmento AB é orientado quando há uma distinção entre os pontos A e B que o determinam, assim um deles é a origem e o outro a extremidade do segmento. Se o ponto A é a origem e o ponto B a extremidade, denotamos esse segmento por AB e dizemos que o sentido da orientação é de A para B. Se, por outro lado, B for a origem e A a extremidade, denotamos o segmento orientado por BA e se diz que o sentido da orientação é de B para A. Assim escrevemos BA = - AB indicando que AB e BA têm sentidos opostos.

Geometricamente um segmento orientado AB é uma seta que aponta da origem A para a extremidade B.

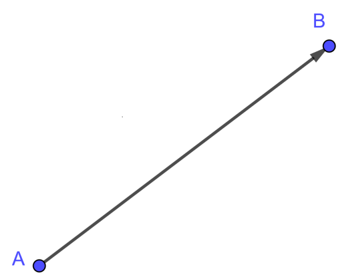

Figura 1: Segmento orientado AB

Há uma relação muito importante entre segmento orientados, a chamada relação de equipolência. Dois **segmentos orientados são equipolentes** se têm: o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. A figura 2 ilustra essa definição.

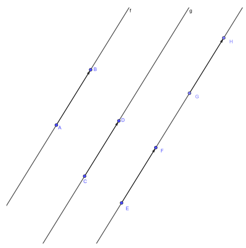

Figura 2: Segmentos orientados equipolentes em retas paralelas e em uma só reta.

Escrevemos $AB \equiv CD$ para indicar que AB e CD são dois segmentos orientados equipolentes. A relação de equipolência entre segmentos orientados satisfaz três condições fundamentais:

- Reflexividade: todo segmento orientado é equipolente a si mesmo, ou seja, $AB \equiv AB$, para todo segmento orientado AB.
- Simetria: se um segmento orientado AB é equipolente a um segmento orientado CD, então CD é equipolente a AB, ou seja, se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.
- Transitividade: se um segmento orientado AB é equipolente a um segmento orientado CD e, por sua vez, CD é equipolente a um terceiro segmento orientado EF, então AB é equipolente a EF. Em símbolos: se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada relação de equivalência. Assim, a relação de equipolência entre segmentos orientados é uma relação de equivalência. Usaremos a relação de equipolência para construir a noção de vetor.

No restante desta seção, estudaremos uma caracterização geométrica da relação de equipolência. Para tal, precisamos começar relembrando a noção de paralelogramo.

Um paralelogramo é um quadrilátero ABCD tal que os pares de lados opostos, AB e CD, BC e DA, são paralelos. Lembremos que segmentos de reta são ditos paralelos se suas retas suporte forem paralelas.

Os resultado a seguir dá duas caracterizações importantes de um paralelogramo.

Teorema 1. Seja ABCD um quadrilátero plano. As seguintes condições são equivalentes:

1. ABCD é um paralelogramo.
2. Os lados opostos de ABCD são congruentes.
3. As diagonais de ABCD intersectam-se em seus pontos médios.

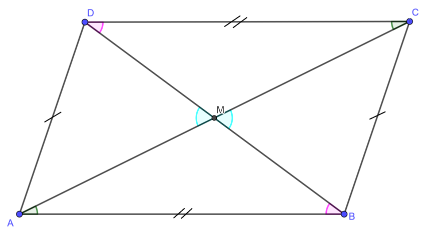

Figura 3: Paralelogramo

Agora, estamos em condições de apresentar uma caracterização geométrica de equipolência de segmentos orientados não colineares.

Teorema 2. Sejam AB e CD dois segmentos orientados e não colineares. AB e CD são equipolentes se, e somente se, AD e BC intersectam-se em seus pontos médios.

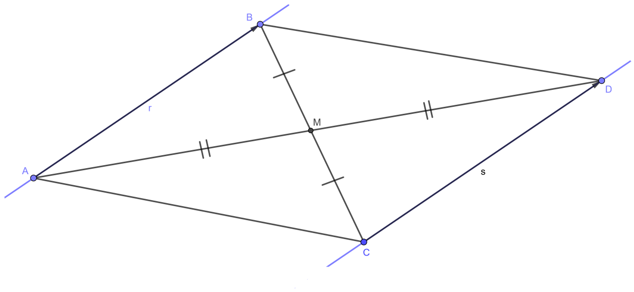

Figura 4: Paralelogramo

3.2.2 Definição de vetor

.

Um vetor é uma coleção de segmentos orientados que possuem o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido. (DELGADO, J; FRENSEL,K; CRISAF, L. 2014)

Para representar o vetor, tomamos um segmento orientado qualquer da coleção, que isoladamente podem ser chamado representante do vetor ou simplesmente vetor. A figura 5 ilustra a definição.

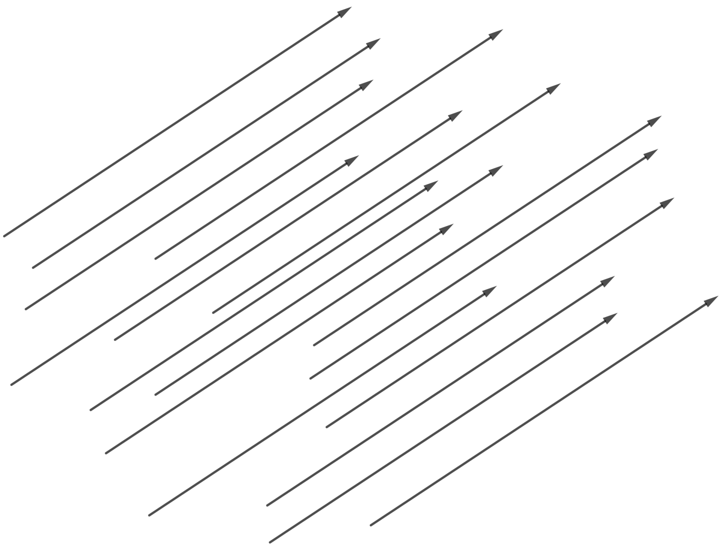

Figura 5: Definição de vetor

3.2.3 Vetores iguais

Dois vetores são iguais se os representantes de suas coleções possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Se pelo menos uma das características dos dois vetores forem diferentes eles serão considerados distintos

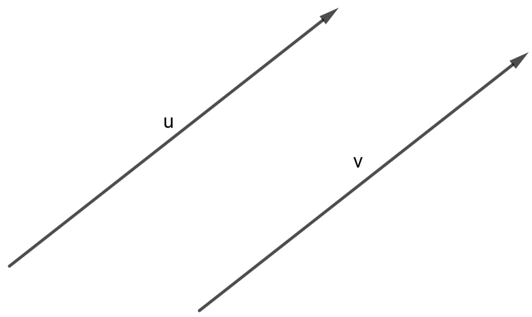

Figura 6: Vetores iguais

3.2.4 Vetor nulo

É o conjunto de todos os segmentos orientados nulos e será representado por $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

3.2.5 Vetor oposto

Existe o vetor oposto do vetor v, que será representado por -v

Figura 7: Vetores opostos

3.2.6 Adição de vetores

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer tomemos um representante de $\vec{u}$ e outro representante de $\vec{v}$, de modo que eles sejam consecutivos. Ligando a origem do primeiro com a extremidade dos segundo, obtemos o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ que é a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

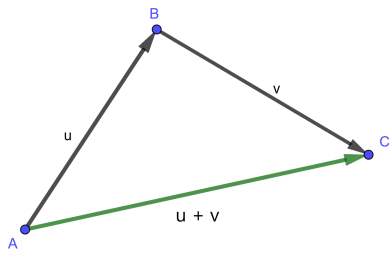

Figura 8: Regra do triângulo

Uma outra opção seria utilizar a regra do paralelogramo. Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer tomemos um representante de $\vec{u}$ e outro representante de $\vec{v}$, com a mesma origem. O vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é dado pela diagonal do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

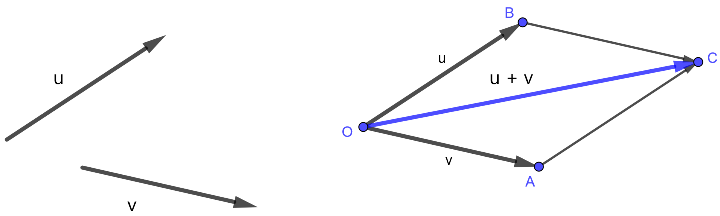

Figura 9: Regra do paralelogramo

3.2.7 Subtração de vetores

A subtração $\vec{u} - \vec{v}$ se obtém através da adição de $\vec{u}$ com o oposto de $\vec{v}$, de fato

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Conforme ilustra a figura abaixo.

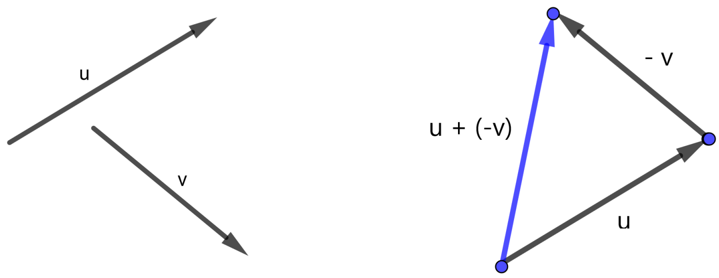

Figura 10: Subtração de vetores

3.2.8 Multiplicação por número real (escalar)

O produto de k por $\vec{u}$ é o vetor $k\vec{u}$ cujas características são:

1. $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$
2. A direção é a mesma de $\vec{u}$
3. Se $k > 0$, tem o meso sentido de $\vec{u}$ e se $k < 0$, tem sentido oposto ao de $\vec{u}$

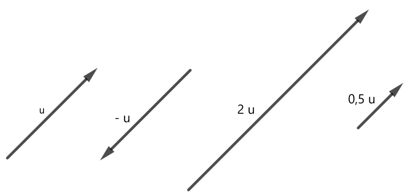

Figura 11: Multiplicação por escalar

3.3 Visão algébrica

3.3.1 Plano cartesiano

Considerando que o estudante já sabe marcar pontos no plano cartesiano passemos a analisar os vetores no plano.

A partir da representação de $\mathbb{R}$ como uma reta numerada, os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ se associam aos pontos do plano definindo por duas retas perpendiculares, que ao mesmo tempo definem um sistema de coordenadas cartesianas retangulares onde a intersecção é a origem (0, 0) e a cada par de números (x, y) faz corresponder um ponto de coordenada x no eixo X e y no eixo Y.

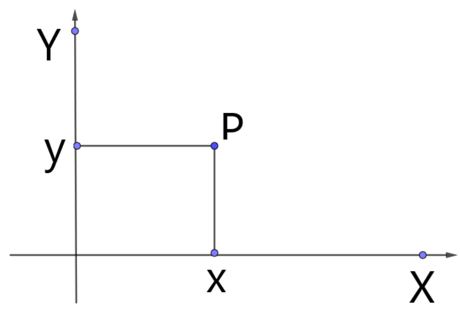

Figura 12: Ponto no plano

Notação

- Vetores serão representados com letras minúsculas com uma seta em cima tais como $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Os pontos serão denotados com letra maiúsculas tais como A, B e C. No contexto dos vetores, os números reais são chamados de escalares e se escrevem com letras minúsculas sem a seta.
- Se o ponto inicial de um vetor $\vec{v}$ é A e o ponto final é B, então $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$
- O vetor nulo se escreve como $\vec{0} = (0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$

- **Igualdade**. Geometricamente vimos que dos vetores iguais possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido. Em termos algébricos a igualdade de vetores ocorre quando as coordenadas correspondentes são iguis, ou seja.
  Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ em $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

Exemplo. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 4)$ temos que $\vec{u} \neq \vec{v}$ pois a segunda coordenada é diferente.

Observação.: Sabemos que existe uma diferença entre pares ordenados e vetores, porém uma vez definido o sistema de coordenadas o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o ponto $P = (x, y)$ possuem as mesmas coordenadas. Assim é natural a identificação de um ponto com um vetor.

Dados $O = (0, 0)$ e $P = (x, y)$ tem-se $\overrightarrow{OP} = (x, y) - (0, 0) = (x, y)$

$$P = (x, y) \iff \overrightarrow{OP} = (x, y)$$

Outa grande vantagem é que todo vetor admite um representante canônico cuja origem é a própria origem do sistema de coordenadas fixado.

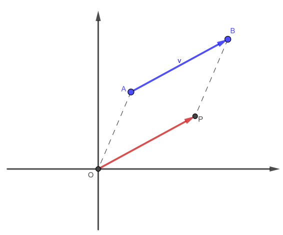

Figura 13: Vetor transladado para a origem

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$$

3.3.2 Operações com pares ordenados

As operações com pares ordenados que aparentemente nada tem a ver com as operações geométricas, traduzem de forma algébrica as operações geométricas com vetores. Vamos definir duas operações com pares ordenados a saber: adição, e multiplicação por escalar.

Operações em $\mathbb{R}^2$.
Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\quad \vec{v} = (v_1, v_2) \quad$ e $\quad k \in \mathbb{R}$

- **Adição de vetores:** $\vec{u} + \vec{v} := (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2)$
- **Multiplicação por escalar:** $k\vec{v} := (kv_1,\ kv_2) \quad a \in \mathbb{R}$

Exemplos: Dados os vetores $\vec{u} = (1, -2)$ e $\vec{v} = (5, 3)$ de $\mathbb{R}^2$

- $\vec{u} + \vec{v} = (1 + 5, -2 + 3) = (6, 1)$

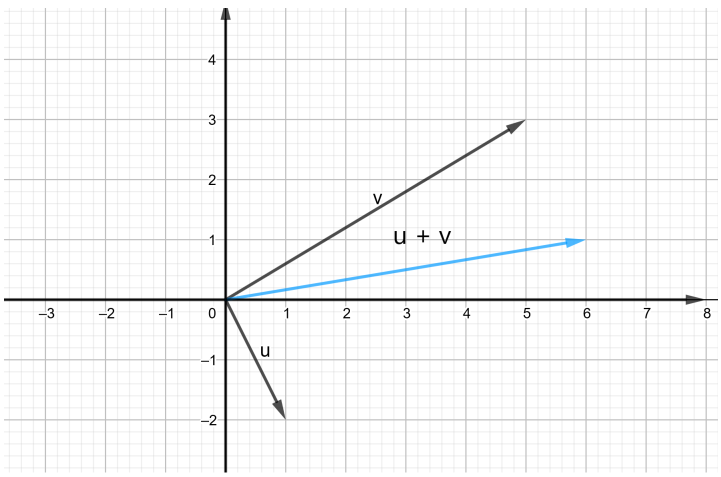

Figura 14: Adição dos vetores u e v

- $\vec{u} - \vec{v} = (1 - 5, -2 - 3) = (-4, -5)$

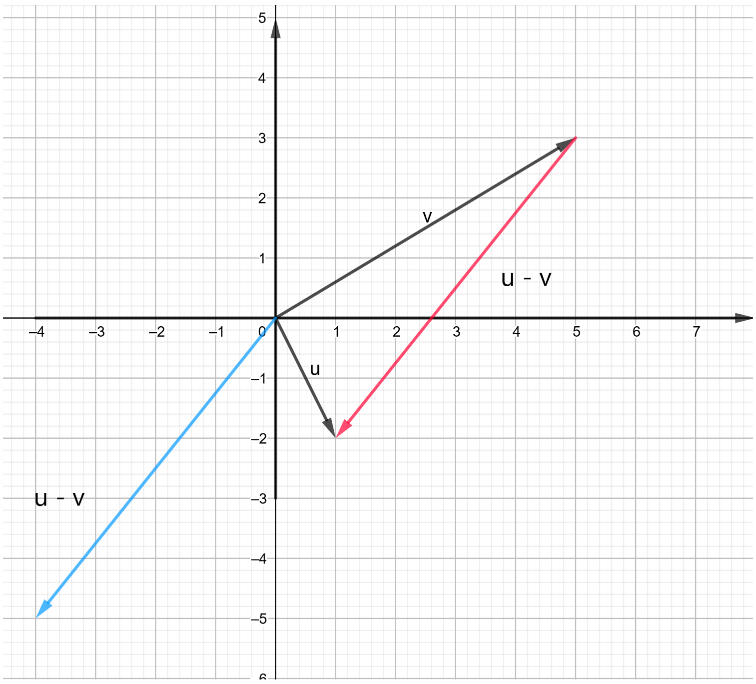

Figura 15: Subtração de vetores

- $2\vec{u} = 2(1, -2) = (2, -4)$

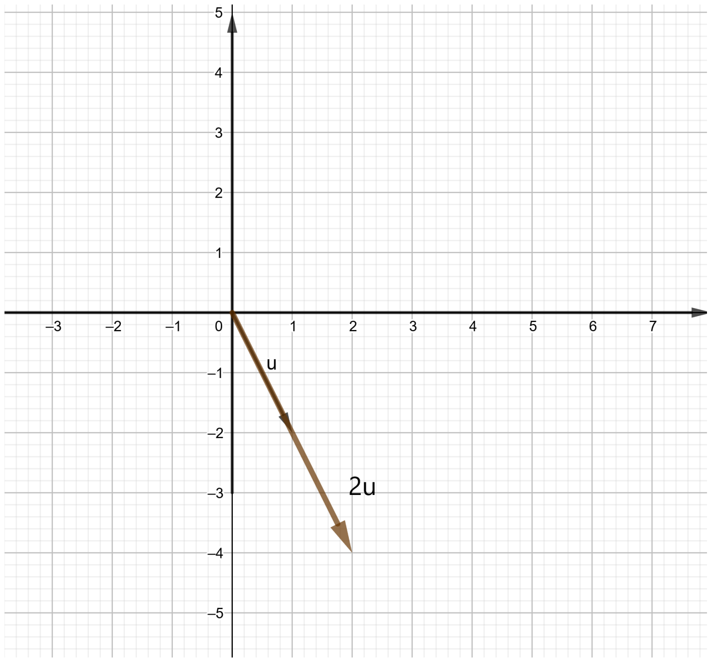

Figura 16: Multiplicação por escalar

- $\frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(5, 3) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

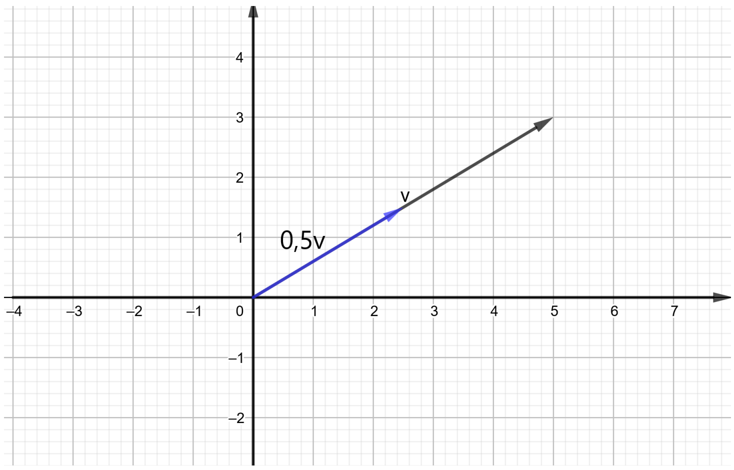

Figura 17: Multiplicação por escalar

3.3.3 Propriedades das operações

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ temos:

1. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

2. $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

3. $0\vec{v} = \vec{0}$

4. $1\vec{v} = \vec{v}$

5. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

6. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

7. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

8. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

9. $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$

   A verificação destas propriedades se faz por meio das coordenadas. Deixamos esta tarefa como exercício.

3.3.4 Combinação linear

Definição: Uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é o vetor $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Logo dados dois vetores quaisquer, duas coisas podem ocorrer:

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares. Assim $\vec{w}$ terá a mesma direção deles

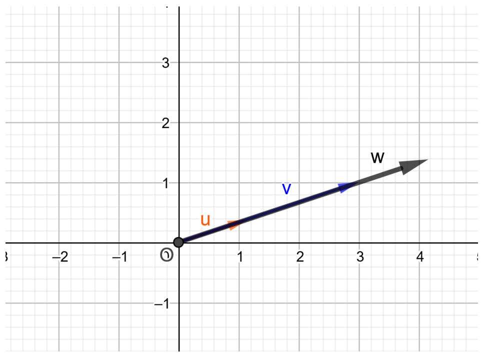

Figura 18: Combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares. Assim todo vetor $\vec{w}$ do plano se escreve de forma única como combinação linear deles

Exemplo: Dados $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1)$ e $\vec{w} = (4, 4\,,\, 3, 6)$, é de fácil verificação que $\vec{w} = 0,8\vec{u} + 1,2\vec{v}$

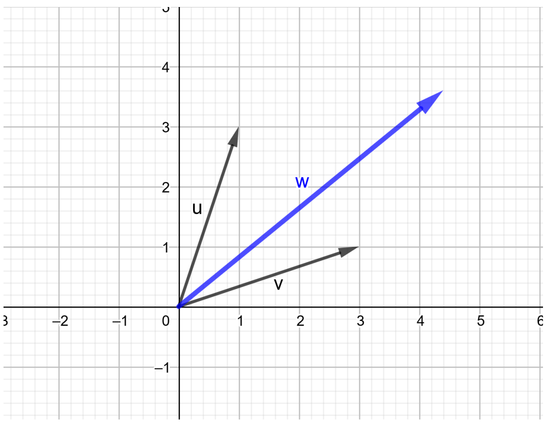

Figura 19: Combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

3.3.5 Norma euclidiana

Uma norma é qualquer função definida em um certo conjunto E (cujos elementos podem ser de natureza qualquer) assumindo valores em $\mathbb{R}$ e que deve satisfazer às três condições descritas na definição a seguir.

Definição: $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma norma em E se, para todos x, y em E e $a, \in \mathbb{R}$, então:

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Com esta definição fica evidente a existência de diversas normas. Como nosso ambiente de estudo é o plano vamos definir uma norma de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Esta norma é dita norma euclidiana. Assim dado $\vec{v} = (v_1, v_2)$, temos:

Norma Euclidiana: $\| \ \| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

É necessário provar que esta relação de fato define uma norma. Para isto basta verificar as três condições da definição. As duas primeiras são imediatas, porém a ultima conhecida como desigualdade triangular requer algo mais e será provada mais adiante (seção 3.4.4)

Exemplos:

a) Seja $\vec{u} = (4, -3)$, logo $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{w} = (cos\,\alpha, sen\,\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{cos^2\alpha + sen^2\alpha} = 1$

Obs.: Vetores cuja norma é igual a 1 são chamados unitários. Assim o vetor $\vec{w}$ do exemplo anterior é unitário. De modo geral é unitário o seguinte vetor: $\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$.

A norma induz a noção de distância entre dois pontos. Assim dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ a distância entre eles é dada pela norma do vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1,\, b_2 - a_2)$:

$$\mathbf{d}(A, B) = \|B - A\|$$

Exemplo: $A = (1, 3)$ e $B = (4, 2)$
$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{(4-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$

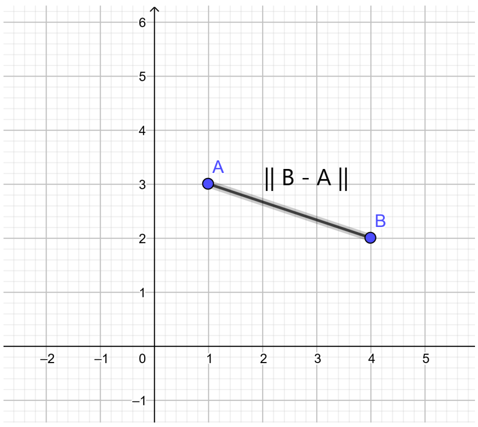

Figura 20: Distância entre os ponto A e B

3.3.6 Perpendicularidade

Dados os vetores perpendiculares: $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ que denotaremos por $\vec{u} \perp \vec{v}$ temos:
$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1\ ,\ u_2 - v_2)$

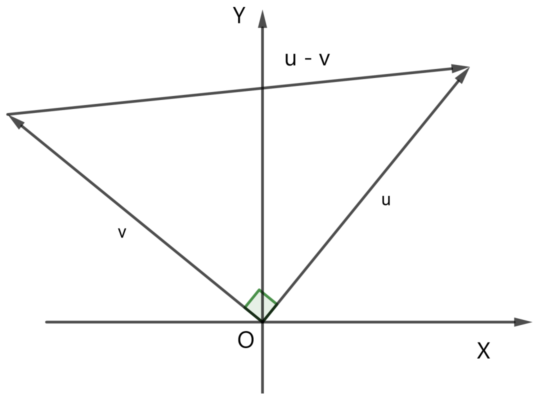

Figura 21: Perpendicularidade

Aplicando o teorema de Pitágoras

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2$$

$${u_1}^2 - 2u_1v_1 + {v_1}^2 + {u_2}^2 - 2u_2v_2 + {v_2}^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {v_1}^2 + {v_2}^2$$

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = 0$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0 \tag{1}$$

A expressão (1) costuma aparecer com frequência quando se trabalha com vetores e por isto merce atenção especial. Será chamada de produto interno e sera definida a seguir.

3.4 Produto interno

O produto interno do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ pelo vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é o número real $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Podemos reescrever a relação (1) em termos do produto interno.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \tag{2}$$

3.4.1 Rotação

Para efetuar uma rotação de noventa graus, no sentido anti - horário em um vetor do $\mathbb{R}^2$, basta inverter o sinal da segunda coordenada e a seguir permutá-la com a primeira.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \xrightarrow[Giro]{90°} \vec{v} = (-u_2, u_1)$$

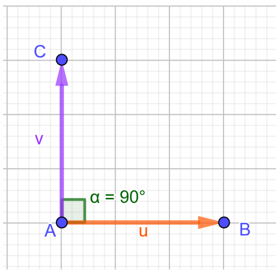

Figura 22: Rotação de 90° no sentido anti-horário

3.4.2 Propriedades do produto interno

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e $a, \in \mathbb{R}$ temos:

1. $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

4. $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$

5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

A verificação das propriedades do produto interno se faz utilizando coordenadas. Deixamos esta tarefa como exercício.

3.4.3 Ângulo entre vetores

A partir da noção de produto interno podemos definir o ângulo entre dois vetores. Isto se dá mediante a lei dos cossenos, pois com esta lei podemos relacionar o produto interno, a norma e o ângulo entre dois vetores. Dados: $\vec{u} = u$ e $\vec{v} = v$ com $\vec{w} = u - v$

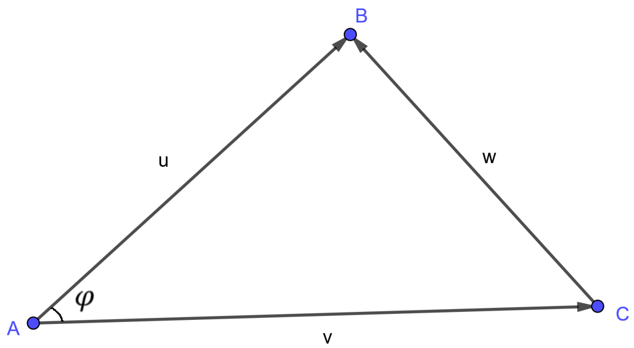

Figura 23: Ângulo entre vetores

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo temos

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

$$(u-v)\cdot(u-v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

$$(u-v)\cdot u - (u-v)\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

$$u.u - v\cdot u - u.v + v\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

$$\|u\|^2 - 2u\cdot v + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

Fazendo os devidos cancelamentos

$$-2u\cdot v = -2\|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

Dividindo por - 2

$$u\cdot v = \|u\|\|v\|cos\,\varphi$$

Ou de forma equivalente

$$cos\varphi = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

3.4.4 Consequências da relação: $u \cdot v = \|u\|\|v\| cos\, \varphi$

A relação acima tem duas consequências importantes

- **Desigualdade de Schwarz:** $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

  Demonstração: Seja φ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Aplicando o módulo à relação acima e lembrando que $|cos\, \varphi| \leq 1,$ segue que:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| cos\, \varphi\ | = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||cos\, \varphi| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

- **Desigualdade Triangular:** $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

  Demonstração: $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

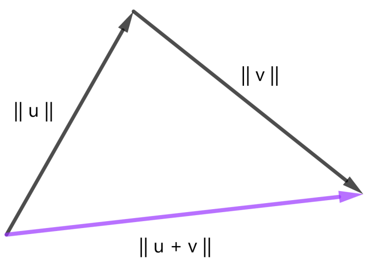

Figura 24: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Obs.: Na primeira desigualdade usamos o fato de que um número real é sempre menor ou igual ao seu módulo e na segunda utilizamos a desigualdade de Schwarz.

3.4.5 Aplicações

1. (PAPMEM - 2019) A base de um retângulo é o dobro da altura. Calcule o ângulo entre suas diagonais.
   Solução:

   Uma opção de escolha dos eixos é a seguinte

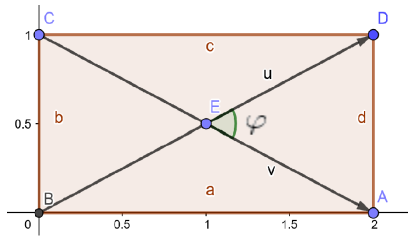

Figura 25: Aplicação 1

A = (2, 0),   B = (0, 0),   C = (0, 1)   e   D = (2, 1)

$$\vec{u} = \overrightarrow{BD} = D - B = (2, 1), \quad \vec{v} = \overrightarrow{CA} = A - C = (2, -1)$$

$$cos\,\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{2.2 + 1(-1)}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

Assim $\varphi = 53,1°$

2. (PAPMEM 2019) Prove que as alturas de um triângulo cortam - se em um único ponto.

Solução:
Supondo que as altura se cortem em pontos distintos H_1 e H_2 vamos provar que na verdade $H_1 = H_2$.
Traçando as alturas $\overline{BD}$ e $\overline{AE}$ temos:

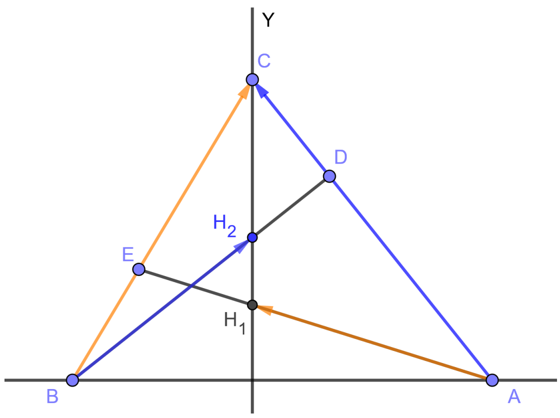

Figura 26: Aplicação 2

$\overrightarrow{BC} = (-b, c)$ e $\overrightarrow{AH_1} = (-a, y_1)$

$\overrightarrow{AC} = (-a, c)$ e $\overrightarrow{BH_2} = (-b, y_2)$
$A = (a, 0),\ B = (b, 0),\ C = (0, c),\ H_1 = (0, y_1)$ e $H_2 = (0, y_2)$

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH_1} \Rightarrow (-b)(-a) + cy_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{ab}{c}$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH_2} \Rightarrow ab + cy_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{ab}{c}$
Assim $y_1 = y_2 \Rightarrow H_1 = H_2$

3. (**Área do paralelogramo**) Se os lados não paralelos de um paralelogramo são $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então sua área será dada por:

$$A = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

Demonstração:

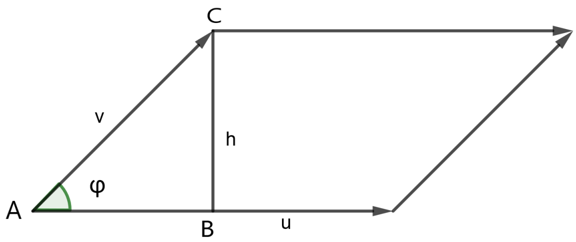

Figura 27: Área do paralelogramo

Aplicando a definição de seno ao triângulo ABC temos:

$$sen\,\varphi = \frac{h}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow h = \|\vec{v}\|sen\varphi$$

$$A = \|\vec{u}\|h = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sen\varphi$$

Elevando ao quadrado fica

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 sen^2\varphi$$

Usando a relação fundamental $sen^2\varphi = 1 - cos^2\varphi$

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1 - cos^2\varphi)$$

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 cos^2\varphi$$

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\varphi)^2$$

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

$$A = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

4. O resultado anterior também pode ser expresso em coordenadas, de fato dados:

   $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, teremos

$$A = |\,[\vec{u}, \vec{v}]\,| = \left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right|$$

   Demonstração:
   Elevando ao quadrado o resultado anterior

$$A = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2$$

$$A^2 = u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 - u_1^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - u_2^2v_2^2$$

$$A^2 = u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_2u_2v_1 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

$$A = |u_1v_2 - u_2v_1| = \left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right|$$

5. (**Área do triângulo**) Calcule a área do triângulo cujos vértices são: A = (-2, 8), B = (1, 4) e C = (3, 2).
Solução:

Podemos aplicar o resultando anterior

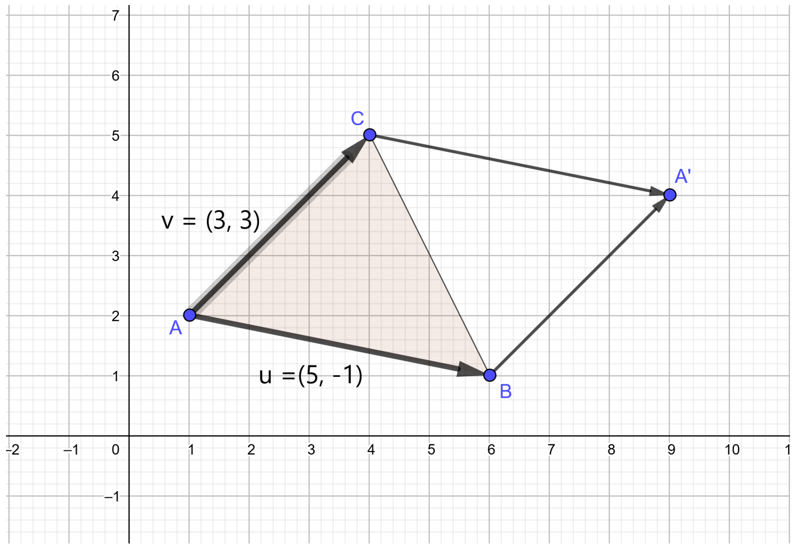

Figura 28: Área do triângulo

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (5, -1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3, 3)$$

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} A_{paralelogramo}$$

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{18}{2} = 9$$

6. **(Física)** Um bloco de 400 kg de massa etá suspenso por dois cabos, conforme mostra a figura 29. Calcue as forças (tensões) T_1 e T_2 que agem nos cabos.($g = 9,8m/s^2$)

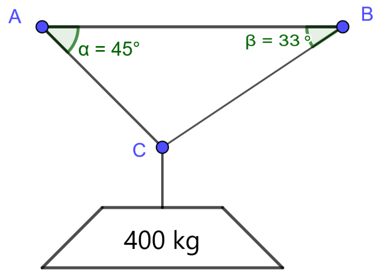

Figura 29: Peso suspenso

Solução: Como o sistema está em equilíbrio, a resultante das forças que atuam no ponto C deve equilibrar o peso, ou seja são vetores de mesma intensidade e direção porém com sentidos opostos. A figura 30 ilustra bem essa situação

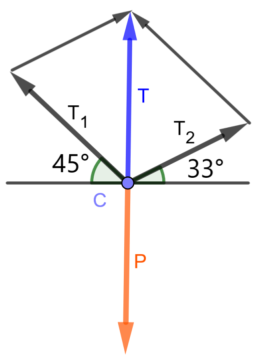

Figura 30: Forças atuando em C

T é soma vetorial de T_1 e T_2, alem disto T = P = 3920 N

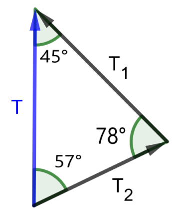

Figura 31: Triângulo

Aplicando a lei dos senos ao triângulo da figura 31

$$\frac{T_1}{sen57°} = \frac{T_2}{sen45°} = \frac{T}{sen78°}$$

$$T_1 = T\frac{sen57°}{sen78°} = 3920\frac{sen57°}{sen78°} = 3361,03N$$

$$T_2 = T\frac{sen45°}{sen78°} = 3920\frac{sen45°}{sen78°} = 2833,78N$$

4 ENGENHARIA DIDÁTICA

O caminho trilhado para e realização desta investigação segue os fundamentos da engenharia didática, campo de estudo surgido com o objetivo de propagar estudos sobre a didática da matemática.

A pioneira da engenharia didática, Michele Artigue define esta metodologia como um esquema experimental que tem base, fundamentada na concepção, observação e análise das situações didáticas.

> [...] uma sequência de aulas concebida(s) e articuladas(s), no campo, de forma coerente, por um professor engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob reações dos alunos e em função das escolhas e decisão do professor (ARTIGUE, 1988, apud MACHADO, 2002 p.198)

A metodologia de ensino da engenharia didática é composta pelas fases: análise preliminar, análise a priori e experimentação, analise a posteriori e validação. A seguir detalharemos cada uma delas.

A pesquisa foi realizada com 26 alunos da 2ª série do ensino médio no Centro de Ensino Domingos Vieira Filho, que fica localizado em Paço do Lumiar e atende a clientela do ensino médio.

4.1 Análises preliminares

Nesta fase aplicamos atividades ao grupo de alunos participantes do estudo com o propósito de analisar as noções que os mesmos possuíam acerca do conceito de vetor.

Atividade preliminar

Atividade 1: Que características são necessárias para que um vetor fique bem definido?

O objetivo desta atividade foi verificar a capacidade do aluno mobilizar conhecimentos anteriores para caracterizar um vetor. Esperava-se nesta atividade que os alunos definissem um vetor na linguagem materna ou na linguagem matemática.

Dos 26 alunos participantes deste estudo somente 2 conseguiram responder corretamente citando o módulo, a direção e o sentido.

Atividade 2: Represente no plano cartesiano os seguintes vetores. $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (3, 1)$ **e** $\vec{w} = (-2, 5)$

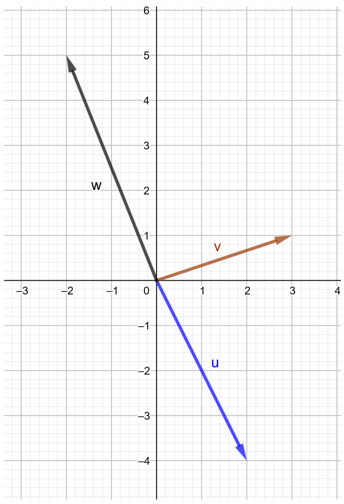

Figura 32: Vetores no sistema de coordenadas

Esta atividade teve por objetivo analisar a competência do aluno realizar uma conversão, saindo do registro vetorial (representação analítica) para o registro figural (representação gráfica)

Atividade 3: Dados os vetores: $\vec{u} = (-4, 4), \vec{v} = (0, 3)$, **e** $\vec{w} = (-6, 2)$. **Determinar:**

$2\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $3\vec{u} + 2\vec{w}$, $\|u\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ **e** $\|\vec{w}\|$

Nesta atividade, desejava-se que os alunos realizassem as operações de tratamento no registro proposto.

Uma solução esperada seria:

- $2\vec{u} = 2(-4, 4) = (-8, 8)$
- $\vec{u} + \vec{v}$ = (-4, 4) + (0, 3) = (-4, 7)

- $\vec{u} - \vec{v} = (-4, 4) - (0, 3) = (-4, 1)$

- $3\vec{u} + 2\vec{w} = 3(-4, 4) + 2(0, 3) = (-12, 12) + (0, 6) = (-12, 18)$

- $\|u\| = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$

- $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Atividade 4: Caule o módulo da resultante das forças aplicadas no ponto P. Quando F_1 = 6 N e F_2 = 8 N

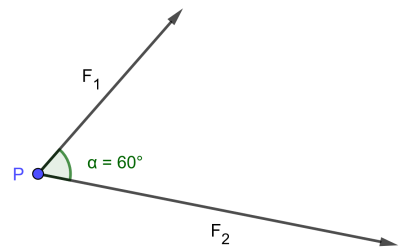

Figura 33: Forças aplicadas em um corpo

Desejava-se que os alunos desenvolvessem:

- O tratamento dentro do registro figural ao utilizar a regra do paralelogramo

- A conversão do registro figural para o algébrico. Em seguida realizar o tratamento dentro do registro algébrico ao calcular a força resultante.

Solução:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\,cos\,60^\circ$$

$$F_R^2 = 6^2 + 8^2 + 2.6.8.\frac{1}{2}$$

$$F_R^2 = 6^2 + 8^2 + 6.8$$

$$F_R^2 = 36 + 64 + 48$$

$$F_R^2 = 148$$

$$F_R = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}\ N$$

4.2 Analise a priori

Na análise a priori descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local remetendo-se; eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação didática que delas decorrem; analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor; preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem (ARTIGUE, 1996, p.205).

Após a identificação dos obstáculos de dificuldades constatadas nas análises prévias, nesta fase da Engenharia Didática, a analise a priori, delimitou-se as variáveis didáticas de comando e a sequência didática para a experimentação.

As variáveis didáticas são de duas naturezas, as macrodidáticas ou globais que dizem respeito ao sistema didático, ou seja, se referem a organização global da Engenharia didática.

Encontra-se em Pais (2002, p.102): É sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise a priori, cujo objetivo é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão de conceitos em questão. Neste estudo estabeleceu-se as seguintes variáveis macrodidáticas:

a) Esclarecer que o objeto matemático vetor, deve fazer parte da vida estudantil e cotidiana dos alunos dada a sua aplicabilidade e contribuição par compreender certos fenômenos da natureza;

b) Aplicar atividades de ensino que contribuam na percepção e apreensão do conceito de vetor pelos alunos;

c) Usar as diversas formas de representação de um mesmo objeto matem ático;

d) Apresentar as propriedades figurais apontadas por Duval (1995) para a compreensão de conceitos geométricos;

e) Transitar pelos diferentes tipos de Registro de Representação Semióticos.

> O outro tipo de variável didática utilizada nesta fase da pesquisa, são as variáveis microdidáticas, que segundo Artigue dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado. (ARTIGUE, 1996, p.202).

A sequência didática tem como foco o aluno, por ser considerado o sujeito principal de seu processo de aprendizagem, ficando o professor com o papel de elabora e aplicar situações de ensino através da devolução e no final realizar a institucionalização. Para este estudo elaborou-se a seguinte sequência didática:

Seção	Assunto	Tempo
I	Resolução de problemas envolvendo transição do registro na língua materna para o algébrico e gráfico	3 h
II	Resolução de problemas envolvendo transição do registro na língua materna para o gráfico e realização de tratamento	3 h
III	Resolução de problemas envolvendo conversão gráfica para a língua natural e registro algébrico	3 h
IV	Esclarecimentos sobre a experimentação e importância da apreensão do conceito de vetor na vida estudantil e no cotidiano	3 h

Tabela 2: Seção Didática

As questões aplicadas pelo pesquisador são propostas com intuito de criar situações de construção do objeto matemático, vetor, que propiciem a percepção de representações semióticas, onde o aluno se utilize da variação de registros de representação semiótica, caracterizando assim o processo de aprendizagem dos vetores, com intervenções do pesquisador na medida que se fizerem necessárias.

Ao analisar as respostas coletadas na aplicação da pesquisa, foram feitas considerações à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, que tem por base a necessidade de uma variação de registros de representação de um mesmo objeto matemático e o domínio sobre os tratamentos e transito entre eles para que se possa garantir a apropriação do objeto tratado.

4.3 Experimento, analise a posteriori e validação

Elaborou-se uma sequência didática para a realização posterior da experimentação.

> A experimentação significa que se recorre à experiência, ou seja, os fatos e acontecimentos são apreendidos em um contexto de normas constantes e, por isso, podem ser sistematicamente observados, deliberadamente organizados e sujeitos a uma intervenção planificada para permitir inferências e previsões sobre os fatos que se deem nas mesmas condições. (CHIZZOTTI, 1991, p.26)

A aplicação das atividades na fase de experimentação procedeu-se de acordo com a teoria das situações didática de Brousseou (2008), que contempla o ensino concebido a partir de relações entre o sistema educacional e o aluno, vinculado à promoção de determinado conhecimento. Dessa forma, a relação didática é interpretada como uma comunicação de informações e essa atividade se consolida em dois processos: a aculturação e a adaptação independente.

A aculturação está relacionada ao conjunto de mudanças resultantes do contato, de dois ou mais grupos de indivíduos, representantes de culturas diferentes ou até saberes diferentes, quando postos em contato direto e contínuo. A adaptação independente é o processo no qual o aluno ou os alunos vão se ajustando ao meio de forma natural no desenvolvimento das atividades.

Duval aponta para três tipos de registros de representação semiótica: o registro figural, o simbólico e o da língua natural, cujas representações apresentam dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado). A representação de um vetor pode ser realizada de diferentes maneiras, isto é, no plano e no espaço, mas sempre por meio dos registros de representação semiótica.

Segundo (GOGOY E., GERAB F., 2018, p 92) podemos distinguir os diversos sistemas semióticos conforme a atividade cognitiva que cada um executa. A primeira delas é a atividade de formação cuja finalidade é expressar um pensamento. A segunda é a atividade de tratamento que consiste na mudança de representação dentro de um mesmo registro semiótico, por exemplo a manipulação de uma equação. A terceira é a atividade de conversão que é a mudança de um registro para outro, por exemplo conversão do registro simbólico para o figural.

Caso o professor não tenha o cuidado explorar diferentes registros o aluno passa a identificar um objeto matemático exclusivamente com uma de suas representações. Assim, na nossa visão, a administração lúcida dessa diversidade de sistemas semióticos representa um exercício essencial para o aprendizado na disciplina de matemática.

A fase da experimentação é caracterizada pelo momento onde se coloca em funcionamento o que foi planejado na fase de analise a priori.

Na fase de experimentação deste estudo, a sequência didática foi realizada com 26 alunos da 2ª série do ensino médio, com duração de 12 horas distribuídas ao longo de um mês com 4 horas semanais. Foram trabalhadas as atividades com os alunos e durante este momento foi possível uma interação entre aluno e professor nas situações adidáticas.

A fase de experimentação é sucedida da fase de analise a posteriori que consiste na análise dos resultados da experimentação obtidos a parir dos dados envolvidos no estudo.

Com relação a analise a posteriori segundo Almouloud e Coutinho (2008), não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que:

> [...] Os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori. Assim, a análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático...) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.(ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p.68).

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Analise das atividades preliminares

Nas preliminares, observou-se grandes dificuldades dos alunos pesquisados em compreender conceitos relacionados aos vetores, tais como a própria definição, o conceito de combinação linear e algumas operações. Estes problemas de assimilação do estão fortemente ligado à confusão feita por parte do aluno entre objeto matemático e suas representações.

A propósito dessa ideia, Duval (2009) afirma que não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos e figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática.

A compreensão do objeto matemático, depende do domínio que o aluno possui acerca do conceito e das relações que ele estabelece entre estes conceitos e as suas representações. Saber o significado dos conceitos também é essencial ao processo de aprendizagem em matemática. A existência de conceitos equivocados na mente do aluno segundo AUSUBEL (2003), é um dos fatores limitantes para a aprendizagem. A seguir analisa-se as atividades preliminares aplicadas aos alunos participantes do estudo acerca do objeto vetor.

Atividades preliminares

1. **Descreva as características de uma grandeza vetorial e exemplifique.**

Esta atividade teve como objetivos analisar a capacidade do aluno em mobilizar seus conhecimentos para caracterizar um vetor.

Dos 26 alunos participantes do estudo apenas 6 citaram corretamente as características, a saber intensidade, direção e sentido.

Analisando minuciosamente cada resposta constatou-se que com relação ao módulo existe uma dificuldade muito grande por parte dos alunos. A propósito desta dificuldade, em trabalhos já realizado afirma-se que:

> Em sua maioria, os alunos investigados desconhecem a noção de módulo de um vetor, e sua relação com a distância entre dois pontos. Até mesmo a localização de pares ordenados no plano cartesiano parece que não é dominada. Não ficou claro se os alunos fazem a distinção correta entre reta e segmento de reta. (NASSER; VAZ; TORRACA, 2015, p. 10)

Nesta questão aproveitou-se para pedir aos participantes a diferença entre reta, semirreta e segmento de reta. Verificou-se que apenas 2 alunos (7, 67%) souberam explicar essa diferença, evidenciando desta forma a falta de capacidade dos alunos em estabelecerem estas diferenças. Acredita-se que estas dificuldades estejam associadas ao desconhecimento dos alunos de alguns postulados básicos de geometria plana.

2. **Dados os pontos plotados no plano cartesiano, identifique as coordenadas de cada um deles.**

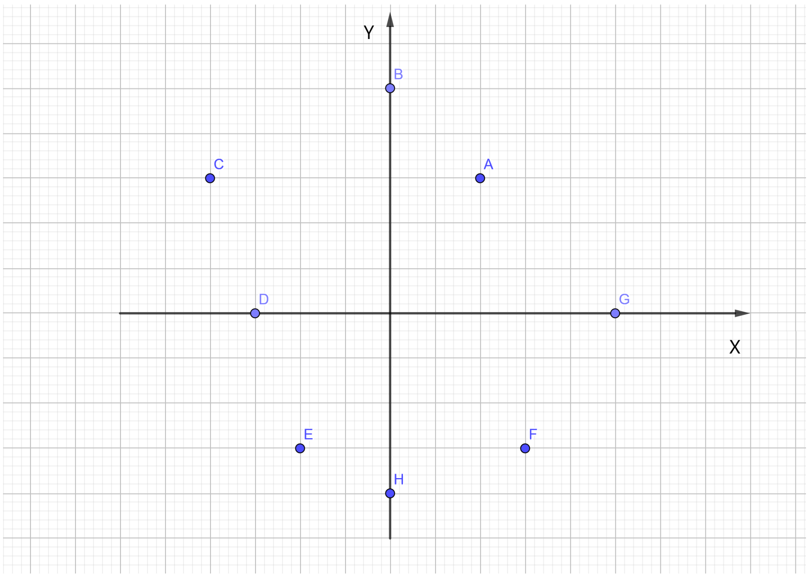

Figura 34: Pontos no plano cartesiano

Esta atividade teve como objetivo, analisa a competências dos alunos em identificar as coordenadas de um ponto plotado no plano cartesiano.

Nesta atividade percebeu-se que os alunos apresentam muitas dificuldades em localizar pontos no plano cartesiano, habilidade esta necessária para as representações de vetores. Somente 8 dos 26 alunos conseguiram identificar corretamente os pontos marcados.
Solução: A = (2, 3); B =(0, 5); C = (-4,3); D = (-3, 0); E = (-2, -3); F = (3, -3); G = (5,0)

3. **Represente no sistema de coordenadas cartesiana os vetores abaixo dados sua origem e extremidade:**

- Origem no ponto P = (1, 4) e extremidade em Q = (5, 4)
- Origem no ponto R= (-2, 3) e extremidade em S = (-5, 0)
- Origem no ponto T= (3,- 4) e extremidade em U = (-7,-6)
- Origem no ponto V= (0, 0) e extremidade em W = (4, 1)

A atividade teve o objetivo de avaliar a capacidade do aluno em fazer representação gráfica de um vetor.

As dificuldades dos alunos em representarem graficamente os vetores, foram em virtude de não terem domínio em plotar pontos no plano cartesiano. Como na questão anterior, o nível de dificuldade foi praticamente o mesmo, pois somente 9 alunos fizeram a representação corretamente.

Solução:

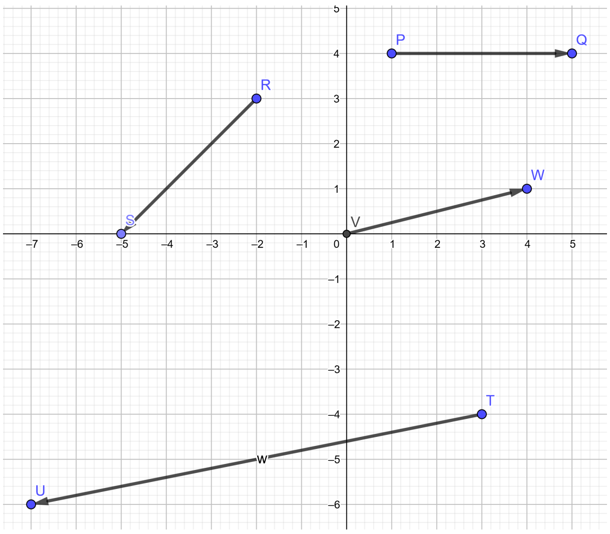

Figura 35: Vetores

5.2 Analise das atividades da experimentação

Para a aplicação das atividades de intervenção realizou um trabalho de informações e conscientização dos alunos da importância do estudo de vetores como elemento essencial na aprendizagem de outros conteúdos em matemática, tanto na educação básica como na Física, Geometria e Geometria Analítica, quanto em curso superior nos componentes de Cálculo Vetorial e Álgebra Linear.

As atividades seguiram a abordagem da Teoria das Situações Didática do Francês e pai da Didática da matemática Guy Brousseau (1986), que recebe a contribuição de outas teorias da educação matemática tais como Contrato Didático de Brousseau (1986), Teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991), Didática da Matemática de D'Amore (2007), entre outras.

Afirma Brousseau (1986), que, hoje, a Teoria das Situações Didáticas apresenta-se como um instrumento científico que tende a unificar e integrar as contribuições de outras disciplinas, apoiar e regular o ensino de matemática. Para ele a relação didática é uma comunicação de informações, e é o professor o responsável pela organização das mensagens dessa comunicação, visando à aculturação do aluno pela sociedade. Defende que o ensino baseia-se numa atividade que harmoniza dois processos: um, de aculturação e outro de adaptação independente. (SULEIMAN, 2015, p. 201)

A Teoria das Situações Didática (TSD) proporciona reflexões sobre a maneira do professor planejar a exposição de um conteúdo de modo que os alunos possam construir um conhecimento que seja significativo. Neste planejamento é importante levar em conta situações de contexto de vida dos estudantes.

Os elementos da teoria de Brousseau buscam contribuir para o processo investigativo, e podem contribuir para aulas alternativas de Física e Matemática. (FERREIRA, FERREIRA E SOUZA, 2916, p. 26).

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...). O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos" (BROUSSEAU, 1986, p.8).

Durante a experimentação teve-se o cuidado de observar cuidadosamente a aprendizagem do aluno em todas as etapas do processo de construção do conhecimento do aluno, bem como considerar as estruturas lógicas de desenvolvimento do aluno, suas diversas maneiras de pensamento e, estimular a participação dos sujeitos de pesquisa e estabelecer uma atmosfera positiva em sala de aula com uma relação professor, aluno e conhecimento favorável.

Estabelecida esta relação entre o aluno, o professor e conhecimento, planejada pelo docente, procurou-se envolver os alunos de modo que os mesmos se apropriassem do conhecimento e compreendesse o seu significado.

Durante a realização das atividades, seguiu-se as etapas da Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (1986), que estabelece as seguintes fases:

- Fase de devolução.

Nesta fase os alunos concordam em participar do processo de aprendizagem. Na fase de devolução os alunos dividem a responsabilidade no ato de aprender que no ensino tradicional, era responsabilidade apenas do professor.

- Fase de ação

Nesta fase diante da situação didática, os alunos mediante uma boa atmosfera em sala de aula interagem, estabelecem hipóteses e elaboram esboços para solução das atividades

- Fase Formulação

Na fase de formulação, dada a interação entre os alunos, professor e o conhecimento, existe trocas de saber entre os alunos, onde há uma reelaboração da linguagem matemática e compreensão das situações com o propósito de alcançar as metas preestabelecidas.

- Fase de Validação

Na fase de validação, os alunos analisam se tudo que foi estudado e aprendido corresponde ao conhecimento esperado.

- Fase de Institucionalização

Nesta etapa, professor e alunos vão validar o conhecimento produzido, quando então o professor esclarece o que pretendia com a situação didática.

Em sala de aula, é importante que o professor crie uma situação adidática, para permitir aos alunos uma maior reflexão nos procedimentos de resolução das atividades. Uma situação adidática é caracterizada pelas situações de devolução, ação, formulação, validação e institucionalização. Nas situações adidáticas o professor não deve interferir diretamente na resposta do aluno, pois este momento é de grande relevância para o aluno desenvolver a sua potencialidade.

O aluno só terá verdadeiramente adquirido conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional. Tal situação é chamada situação adidática. (BROUSSEAU, 1996, p. 49-50).

A situação adidática faz parte de um planejamento mais amplo onde o professor facilita a interações com os alunos e entre estes.

Na experimentação deste estudo, buscou-se desenvolver habilidades dos alunos participantes em realizar transformações semióticas contemplando a Teoria das Situações didáticas.

O professor dividiu a sala em 4 grupos com 4 componentes e 2 grupos com 5 membros. O grupo A foi enumerados de 1 a 4, B de 5 a 8, C de 9 a 12, D de 13 a 16, E de 17 a 21 e F de 22 a 26.

Atividades de Ensino

1. **Chamamos mediana de um triângulo o segmento que liga um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto a ele. Assim, determine o comprimento das três medianas de um triângulo de vértices A = (0, 0), B = (4, -6) e C = (-1, -3).**

   Objetivo: Realizar uma conversão, passando do registro língua natural para o registro figural, no caso uma representação geométrica,

   Para resolução da atividade, basta os alunos plotarem os três pontos no plano cartesiano, em seguida traçar as medianas unindo cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

   Num primeiro momento os alunos tiveram dificuldades na representação geométrica, mas com o procedimento da situação adidática do professor as discussões entre os grupos foram ficando mais interessantes sob o ponto de mobilização de conceitos necessários à resolução da atividade.

   O aluno A10, perguntou: professor, quem é a origem do vetor, o ponto médio ou o vértice do triangulo?

   O professor fez a devolução, respondendo (Como o objetivo é calcular o módulo do vetor, a escolha é arbitrária, ou seja, a origem pode ser tanto o ponto médio quanto o vértice do triângulo).

   O aluno D15, questionou professor para calcular o ponto médio do lado do triangulo, é preciso apenas somar as coordenadas dos vértices e dividir por dois?

Mais uma vez o professor fez a devolução, respondendo: sim, porém cuidado com a regra usual de sinais

Aluno F25: professor e se quisermos representar as medianas no plano cartesiano, como será o procedimento?

Primeiramente represente o triângulo plotando os pontos correspondente a cada vértice em seguida ligue cada vértice ao ponto médio do lado oposto

Uma solução esperada:

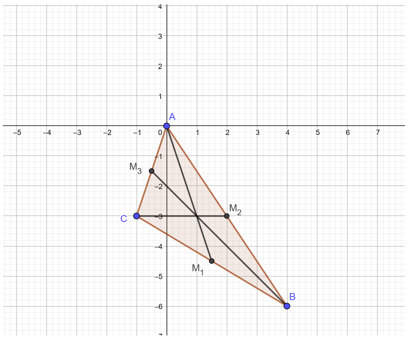

Figura 36: Medianas de um triângulo

M_1, M_2 e M_3 são os pontos médios de cada um dos lados do triângulo e suas coordenadas são dadas pela média aritmética das coordenadas dos pontos extremos.

M_1, M_2 e M_3 são os pontos médios, suas coordenadas são dadas pela média aritmética das coordenadas dos pontos extremos.

$$M_1 = \left(\frac{4+(-1)}{2}, \frac{-6+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$$M_2 = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+(-6)}{2}\right) = (2, -3)$$

$$M_3 = \left(\frac{0+(-1)}{2}, \frac{0+(-3)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right) - (0,0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CM_2} = (2,-3) - (-1,-3) = (3,0)$$

$$\overrightarrow{BM_3} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) - (4,-6) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Basta calcular a norma de cada um dos vetores acima

$$\|\overrightarrow{AM_1}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\|\overrightarrow{CM_2}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\overrightarrow{BM_3}\| = \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{162}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

2. **Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo.**

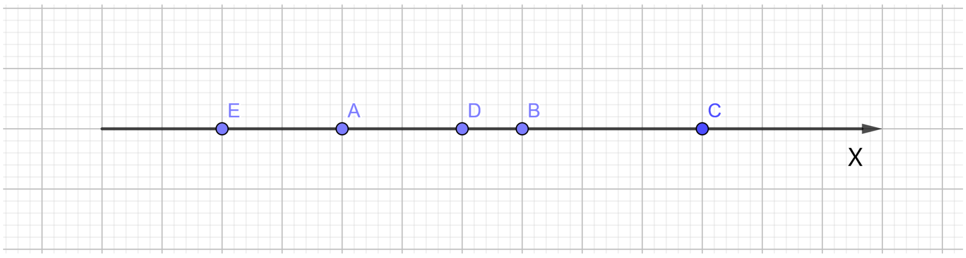

Figura 37: Pontos na reta

A partir dessa informação determinar o valor de k real quando $k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Objetivos:

- Realizar uma conversão ao sair do registro gráfico para o registro algébrico
- Realizar tratamento dentro registro numérico.
- Verificar a compreensão da operação de multiplicação de vetor por um número real.

O aluno A4 indagou: professor não entendi essa questão! Como é essa questão professor?
Trata - se de uma operação?
Professor responde : sim, multiplicação por número real

Uma solução esperada:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = 3, \quad \overrightarrow{DA} = A - D = -2 \text{ e } k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$$

$$k.3 = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

3. **Um corpo está sob a ação de duas forças, F_1 e F_2, que formam entre si um ângulo de 60º. Calcule a força resultante F_R que age nesse corpo sabendo que a força $F_1 = \mathbf{5}$ N e $F_2 = \mathbf{12}$ N.**

   Objetivos:

   - Realizar uma conversão, ao sair do registro língua natural e ir para o registro algébrico

   - Realizar a transformação de tratamento ao encontrar a força resultante dentro do registro algébrico

O aluno B2 perguntou: Professor é para aplicar o teorema de Pitágoras é?

O aluno B1 perguntou: Professor isso é aula de Física?

Utilize a seguinte consequência da lei dos cossenos

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\,cos\,\alpha$$

Após o questionamento dos alunos e o encaminhamento feito pelo professor a atividade foi validada da seguinte maneira, inicialmente fez-se a representação geométrica e em seguida utilizou-se a lei dos cossenos.

Uma solução esperada:

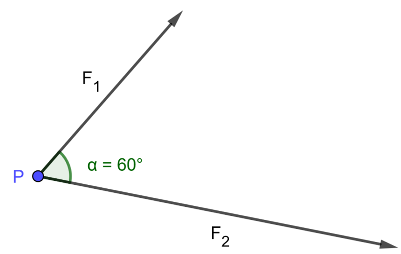

Figura 38: Forças aplicadas em um corpo

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\,cos\,60°$$

$$F_R^2 = 5^2 + 12^2 + 2.5.12.\frac{1}{2}$$

$$F_R^2 = 5^2 + 12^2 + 5.12$$

$$F_R^2 = 25 + 144 + 60$$

$$F_R^2 = 229$$

$$F_R = \sqrt{229}\ N$$

4. **ABCD é um paralelogramo onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.**

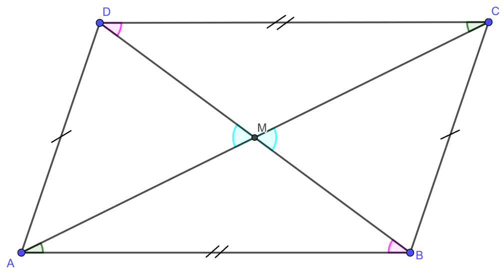

Figura 39: Paralelogramo

Exprima em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os seguintes vetores:

$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{DB} =$

Objetivo:

- Verificar a compreensão da definição de vetor
- Realizar tratamento dentro do registro algébrico
- Identificar vetores opostos
- Efetuar geometricamente as operações de soma e subtração de vetores, identificá-las e fazer a conversão do registro figural para o algébrico.

Professor explique essa questão, não consigo entender?
É so pra representar os vetores na figura?
É pra efetuar a soma dos vetores?
Uma solução esperada:
$\overrightarrow{BA} = -\vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = -\vec{v}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$

5. **Na figura abaixo estão representados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Determine o ponto M tal que $\overrightarrow{OM} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.**

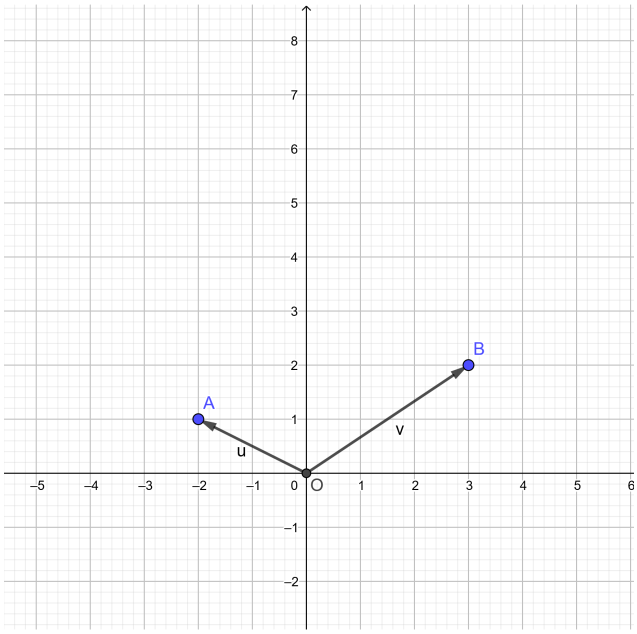

Figura 40: vetores u e v

Objetivo

- Fazer a conversão do registro figural(gráfico) para o registro algébrico
- Efetuar o tratamento dentro do registro algébrico

- Aluno: Por onde eu começo?
- Professor: identificando as coordenadas de cada vetor e depois substitua na expressão dada.

Uma solução:

$$\vec{u} = (-2, 1),\ \ \vec{v} = (3, 2)$$

$$\overrightarrow{OM} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OM} = 3(-2, 1) + 2(3, 2)$$

$$\overrightarrow{OM} = (-6,3) + (6,4)$$

$$\overrightarrow{OM} = (0,7)$$

Assim o ponto M é (0, 7), basta marcar o ponto M sobre o eixo vertical

6. **Encontre o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD da figura 40, onde: A = (-3, -1), B =(4, 2), C = (5, 5)**

Objetivo:

- Efetuar a conversão do registro numérico para o registro figural.
- Efetuar a conversão do registro figural para o registro numérico.

É para fazer a figura?
O que fazer após o desenho? Como acho o ponto A?
Uma solução esperada:

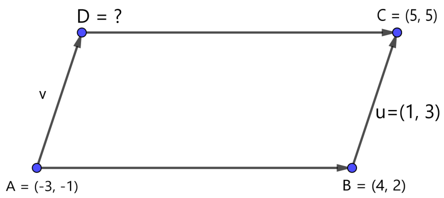

Figura 41: Paralelogramo

$$\vec{u} = C - B = (5-4,\, 5-2) = (1,3)$$

Pela definição de vetor, $\vec{v} = \vec{u}$, assim
D = A + $\vec{v}$ = A + $\vec{u}$ = (-3, -1) + (1, 3) = (-2, 2)

Validação da Engenharia Didática

De acordo com as atividades de sondagem aplicadas, na fase de análise preliminar observou-se que os alunos participantes do estudo não possuíam domínio sobre o conceito de vetor e suas representações. Porem percebeu-se uma grande evolução no processo das representações semióticas.

Os alunos foram capaz de resolver as situações de ensino, utilizando representações diferentes do objeto vetor e operações dentro do mesmo registro.

> [...] nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados serve, também, para os seus propósitos, pois insere o pesquisador na investigação, e diferindo, porém, na validação, que é externa, pois utiliza métodos comparativos para validar seus resultados (ARTIGUE, 1996, p.196).

5.3 Contribuições dos Registros de Representações Semióticas no processo de ensino e aprendizagem de vetores

As representações são indiscutivelmente essenciais ao processo de ensino e aprendizagem em educação matemática, pois desempenham atividades de muita relevância. Em matemática qualquer atividade de aprendizagem precisa da mobilização das representações.

Para uma boa conexão entre a matemática com o mundo exterior, é fundamental o uso dos diversos tipos de representações do objeto matemático estudado, pois o acesso a este não se dá de forma direta, dada a sua abstração.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), já contemplavam a importância das representações no ensino de matemática.

No ensino da matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquema, tabelas e figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1998, p.19)

A nova legislação da educação nacional, no ensino de matemática também contempla a importância da utilização dos registros de representação semiótica no ensino dos objetos matemático.

Assim, a aprendizagem em Matemática demanda a exploração de três momentos distintos e ordenados. No primeiro, o estudante deve fazer matemática. Após, ele deve desenvolver registros de representações pessoais para, finalmente, apropriar-se dos registros formais (BRASIL, 2015, p. 129).

As representações estão relacionadas ao conjunto de símbolos utilizados em matemática e se sustenta nos diversos tipos de registros de representação semiótica.Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza. (Duval, 1995, p. 17)

O ensino tradicional da matemática era centrado na figura do professor, que era responsável pela exposição do conteúdo e geralmente os alunos eram passivos no processo. Nas últimas décadas, metodologias mais dinâmicas têm surgido e aliadas a quadros teóricos como a etnomatemática e os registros de representações semióticas tem dado uma grande contribuição ao ensino deste componente curricular.

As representações semióticas possibilitam a existência de um conjunto de comunicação diverso através dos seus registros, e isto melhora a interação entre professor, aluno e conhecimento.

Além da comunicação oral e escrita na língua materna ou língua natural, a Matemática necessita de representações especiais simbólicas e gráficas reconhecidas mundialmente. O conjunto de símbolos, gráficos e regras que representam uma estrutura matemática deve responder ao caráter sistêmico dessa área. O uso dessa simbologia, de caráter universal, possibilita socializar o conhecimento matemático. (SÃO PAULO, 2016, p. 8)

[...] A compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto com sua representação. Na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente. O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas (Duval 2003, p. 21).

Acredita-se que as realizações das transformações de tratamento e conversão utilizadas em atividades de ensino de forma contextualizada, mobilizam uma série de conhecimentos dos alunos favorecendo uma aprendizagem que faça sentido aos mesmos.

Segundo DUVAL (2003, 2009, 20110), o apoio dos registros de representações semióticas no estudo de qualquer objeto matemático traz grandes contribuições ao processo de ensino e aprendizagem, levando o aluno momentos de criticidade, reflexão, uso do raciocínio lógicos e conexão com as metodologias ativas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como propósito analisar as contribuições dos registros de Representações Semióticas, no ensino de matemática, em especial no ensino de vetores.

Observou-se durante as fases de levantamento de dados, tanto nas análises prévias, quanto na experimentação, que os vários tipos de representações de um objeto matemático, facilitaram o processo de ensino e de aprendizagem de vetores.

Constatou-se que quando o aluno compreende os objetos matemáticos e é capaz de representá-los de diferentes formas o mesmo é levado a fazer conexões da informação nova com conhecimentos já existentes e estas conexões permitem que haja a construção de novas aprendizagens.

Durante o processo de experimentação, constatou-se as dificuldades dos alunos e também as peculiaridades de cada um. Verificou-se que o ritmo de aprendizagem é diferente, dada a superficialidade dos conhecimentos prévios de cada participante da investigação. Apesar das dificuldades, percebeu-se a importância dos registros de representações na compreensão do conceito de vetor, de suas operações e propriedades.

Pode-se afirmar que os participantes do estudo ao mobilizarem seus conhecimentos prévios para realizar transformações de tratamento ou conversão, assimilaram de maneira mais consistente e clara o conteúdo trabalhado, bem como a reconstrução de outros conceitos.

A utilização das representações semióticas como instrumento pedagógico em sala de aula no ensino de vetores, possibilitará que os alunos ao realizarem transformações de tratamento mobilizem operações básicas e conceitos já conhecidos para resolver sentenças matemática em geral. Já nas transformações de conversões, o fato de o aluno utilizar seus conhecimentos para realizar os vários tipos de representações possíveis de um objeto matemático, contribuirá para um raciocínio mais amplo e uma visão cognitiva mais consolidada.

Referências

[1] ALMOULOUD, Saddo Apg. COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

[2] APOSTOL, T. M. **CÁLCULO I. Cálculo com funções de uma variável, com introdução à Álgebra Linear:** Editorial Reverté, 1994.

[3] ARTIGUE, M. **"Ingénierie Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Penséen Sauvage-Éditions, 1988.

[4] BRASIL. **Ministro de Estado da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria Executiva. Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2015.

[5] BRASIL. **Ministro de Estado da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria Executiva. Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2016.

[6] BRASIL, **Ministério da educação. Lei de Diretrizes e Base da educação Nacional/LDBEN.** Brasília, MEC, 1996.

[7] BRASIL, **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC /SEF, 1998.

[8] BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

[9] CASTRO, **Samira Choukri de. Os Vetores do Plano e do Espaço e os Registros de Representação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2001.

[10] CASTRO,Alexandre Silva **O Geogebra como ferramenta de auxílio no ensino de vetores no ensino médio**. Dissertação de Mestrado. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. RIO DE JANEIRO, 2014.

[11] CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GÁSCON, Josep. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Porto alegre: Aritmed, 2001.

[12] CHIZZOTTI **A Pesquisas em ciências humanas e sociais**. 3a ed. São Paulo: Cortez Editora, 1991.

[13] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISAF, LHAYLLA **Geometria Analítica** Rio de Jaeiro: SBM,Coleçãp PROFMAT, 2014.

[14] DEMANA, F.; LEITZEL, J. **Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra** .São Paulo: Atual, p. 70-79, 1995.

[15] DUVAL, **R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2011.

[16] FERREIRA, M. V. V. ; FERREIRA, A.T.; SOUZA, M.A.V. F. **Teoria das Situações Didáticas e seus elementos para o ensino de Física e Matemática. VII Encontro Científico de Física Aplicada.** Serra, Espirito santo, 2016.

[17] GODOY, E. V.; GERAB, F. **Ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Superior: inovação propostas e desafios** Rio de janeiro, 2018.

[18] MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. **Dificuldades dos alunos com o conceito de função. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra**, São Paulo: Atual, p. 49-69, 1995.

[19] NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. **Aprendizagem de cálculo: dificuldades e sugestões para a superação. In: XIV Conferencia Interamericana de Educación matemática, 2015, Tuxtla Gutierrez**. Atas do XIV CIAEM, Tuxtla Gutierrez, México, 2015.

[20] NERES, Raimundo Luna. **Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino- aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do sexto ano do ensino fundamental**/ Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2010.

[21] NETO, A. P. **Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. O conceito de vetor**. Disponível em: $< https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material\_teorico/vrs7uo0ums0cc.pdf >$. Acesso em: 5 de novembro 2018.

[22] PATRÍCIO, R. S. **As Dificuldades Relacionadas à Aprendizagem do Conceito de vetor à Luz dos Registros de Representação Semiótica.** Dissertação de Mestrado. Belém 2010.

[23] PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

[24] PORTUGAL. **Ministério da Educação e Ciência. Programa e metas curriculares matemáticas - ensino básico.** Lisboa: MEC, 2013.

[25] RONCAGLIO, Viviane.; NEHRING, Cátia Maria. **Aprendizagem do Conceito de Vetor por Estudantes de Engenharia – Análise de Registro**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática ISSN 2178-034X. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo - SP, 13 a 16 de julho de 2016.

[26] RONCAGLIO, Viviane. **Registros de Representação Semiótica – Atividades de Conversão e Tratamento em Vetores e suas Operações a partir da Argumentação de Estudantes de Engenharia**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências Mestrado e Doutorado, UNIJUÍ, 2015. Acesso em 20 de nov. 2018.

[27] SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica? 19ª Ed**. São Paulo: Brasiliense, 2003.

[28] SANTAELLA, Lúcia. **A assinatura das coisas: Peirce e a literatura.** Rio de Janeiro: Imago, 1992.

[29] SANTOS, Fabiano J. Dos ; FERREIRA, Silvimar F. **Geometria Analítica** Porto Alegre: Bookman, 2009.

[30] SCHOEN, Harold L. **A resolução de problemas em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As ideias da Álgebra** São Paulo: Atual, 1995.

[31] SILVA, Nilson Alves da.; FERREIRA, Marcus Vinícius Vieira.; TOZETTI, Karla Dubberstein. **Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau**. Congresso Nacional em Educação. V Seminário Internacional sobre Profissionalização Docente. PUCPR, 2015.

[32] SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL, 2008.

[33] SULEIMAN, Amal Rahif. **INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: Conteúdos e métodos de ensino. Educação: Teoria e Prática/** Rio Claro/ Vol. 25, n.48/ p. 200-206/ Jan-Abr. 2015.

[34] Velez, I., e Ponte, J.P. **Desenvolvendo representações estatísticas de alunos do 3.ºano**. In Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 183-196).Braga: APM & CIED da Universidade do Minho, 2013.

[35] VIGOTSKY, L. S . **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Editora Martins Fontes, 1998.

7 Apêndice

Análise Preliminar

1. Quais característica de um vetor são necessárias para que o mesmo fique bem definido?

2. Represente no sistema de coordenadas cartesiana os seguintes vetores: $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (3, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 5)$

3. Dados os vetores: $\vec{u} = (-4, 4), \vec{v} = (0, 3)$, e $\vec{w} = (-6, 2)$. Determine: $2\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $3\vec{u} + 2\vec{w}$, $\|u\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ e $\|\vec{w}\|$

4. Caule o módulo da resultante das forças aplicadas no ponto P. Quando $F_1 = 6N$ e $F_2 = 8N$

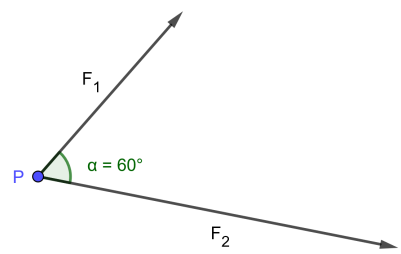

Figura 42: Forças aplicadas em um corpo

Atividades Preliminares

1. Descrevas as características de uma grandeza vetorial e exemplifique.

2. Dados os pontos plotados no plano cartesiano, identifique as coordenadas de cada um deles.

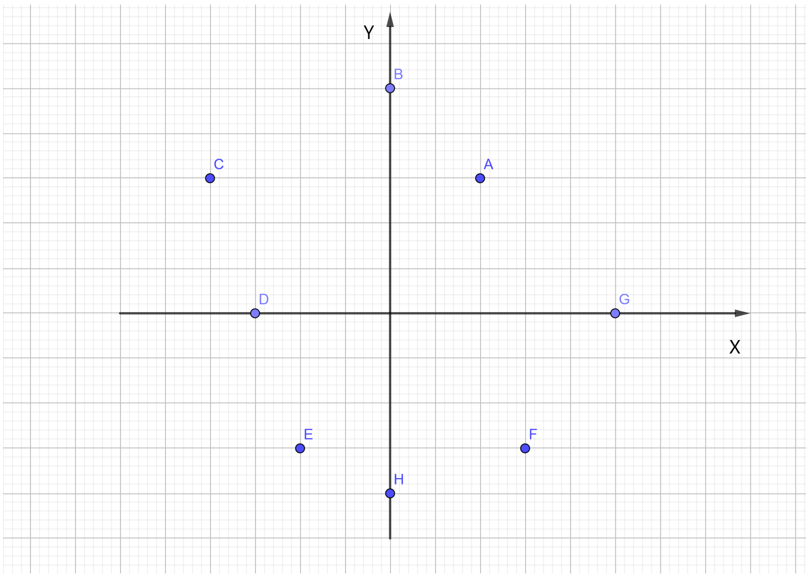

Figura 43: Pontos no plano cartesiano

3. Represente no sistema de coordenadas cartesiana os vetores abaixo dados sua origem e extremidade:

- Origem no ponto P = (1,4) e extremidade em Q = (5,4)
- Origem no ponto R= (-2,3) e extremidade em S = (-5,0)
- Origem no ponto T= (3,-4) e extremidade em U = (-7,-6)
- Origem no ponto V= (0,0) e extremidade em W = (4,1)

4. Dados os vetores $\vec{u} = (4, 2), \vec{v} = (1, 0)$ e $\vec{w} = (3, -1)$ Determine: $2\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $3\vec{v} + 2\vec{w}$, $\|\vec{w}\|$, e $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

5. Represente nas figuras a seguir cada operação sugerida:

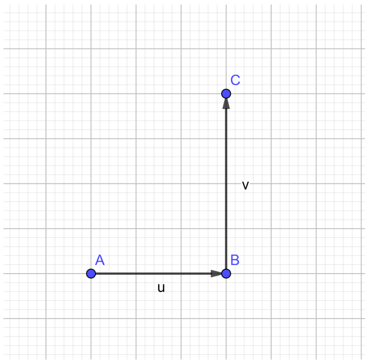

Figura 44: Adição: $\vec{u} + \vec{v}$

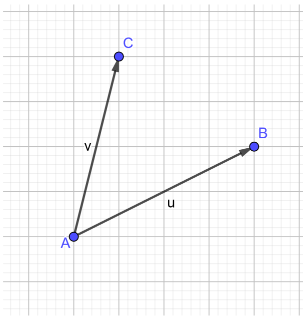

Figura 45: Subtração: $\vec{u} - \vec{v}$

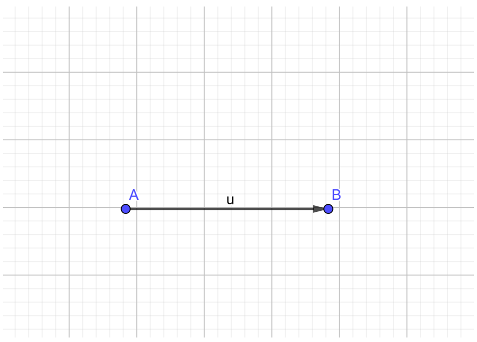

Figura 46: Multiplicação por escalar: $2\vec{u}$, -$3\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$

Atividades de Ensino

1. Chamamos mediana de um triângulo o segmento que liga um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto a ele. Assim, determine o comprimento das três medianas de um triângulo de vértices A = (0, 0), B = (4, -6) e C = (-1, -3).

2. Os pontos A, B, C, D e E foram marcados na reta graduada abaixo.

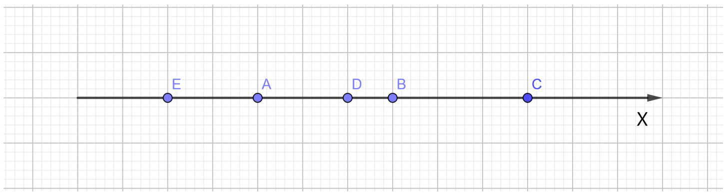

Figura 47: Pontos na reta

Determine o valor de k real quando $k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

3. Um corpo está sob a ação de duas forças que formam entre si um ângulo de 60º. Calcule a força resultante F_R que age nesse corpo sabendo que a força $F_1 = 5$ N e $F_2 = 12$ N.

4. ABCD é um paralelogramo onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

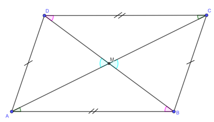

Figura 48: Paralelogramo

Exprima em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os seguintes vetores:

$\overrightarrow{BA} =$ $\quad$ $\overrightarrow{CB} =$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} =$ $\quad$ $\overrightarrow{DB} =$

5. Na figura abaixo estão representados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Determine o ponto M tal que $\overrightarrow{OM} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

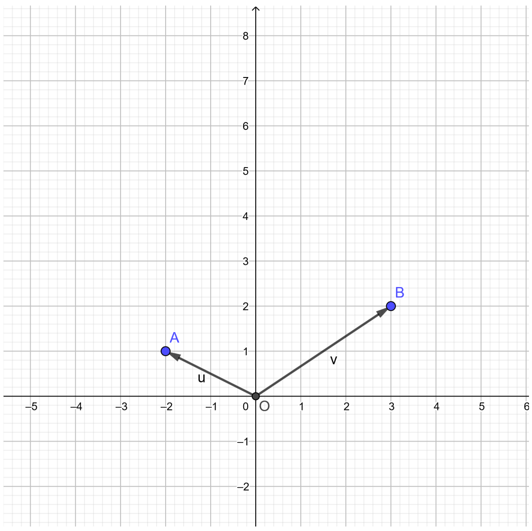

Figura 49: vetores u e v

6. Encontre o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, onde:
A = (-3, -1), B =(4, 2), C = (5, 5)

7. Determine na figura todos os segmentos orientados que são representantes do vetor $\overrightarrow{AD}$

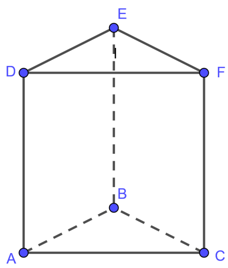

Figura 50: Prisma

8. Classifique em verdadeiro ou falso?

   (a) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (   )

   (b) Se $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ então A = B (   )

9. Em cada caso represente graficamente o vetor definido pelos pontos A e B e o vetor correspondente com origem em O = (0, 0)

   (a) A = (-1, 3) e B = (3, 5)

   (b) A = (-1, 4) e B = (4, 1)

10. Determine os valores de k para que os vetores $\vec{v} = (-2, 3)$ e $\vec{w} = (k, -4)$ sejam ortogonais

11. Encontre os números reais m e n tais que $(10, 2) = m(3, 5) + n(-1, 2)$

12. Dados os vetores $\vec{u} = (-1, 1)$, $\vec{v} = (-2, 3)$, calcule: $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ e represente graficamente