UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

HERCULES LUIZ POLONI

SISTEMAS LINEARES, APLICAÇÕES E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

CAMPINAS
2018

HERCULES LUIZ POLONI

SISTEMAS LINEARES, APLICAÇÕES E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO HERCULES LUIZ POLONI, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. PROFA. DRA. CLAUDINA IZEPE RODRIGUES.

CAMPINAS
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P767s

Poloni, Hercules Luiz, 1971-
Sistemas lineares, aplicações e representação gráfica / Hercules Luiz Poloni. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas lineares. 2. Representação gráfica. 3. GeoGebra (Programa de computador). I. Rodrigues, Claudina Izepe, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Linear systems, applications and graphical representation
Palavras-chave em inglês:
Linear systems
Graphical representation
GeoGebra (Computer program)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]
Roberto Andreani
Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno
Data de defesa: 04-04-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 04 de abril de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). LUIS FELIPE CESAR DA ROCHA BUENO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

À minha esposa Eva, por ser meu grande amor e meu porto seguro.
Aos meus filhos, Éverton e Evelyn, para que se sintam motivados a sempre buscarem a realização de seus sonhos, tendo esta minha conquista como um exemplo de que, com esforço e dedicação, é possível alcançar tudo que almejamos.
Aos meus queridos pais Hélio Poloni e Benedita Aparecida de Souza Poloni, pois devo a eles tudo o que sou.

Agradecimentos

A Deus, Senhor da minha vida, por estar ao meu lado em todos os momentos, de alegrias ou de preocupações. Senhor, meu Pai, muito obrigado.

À toda minha família, pelo grande amor, carinho e paciência que demonstraram. Em especial, minha esposa Eva, pois foi seu grande apoio e incentivo que me deram forças para conquistar esse meu sonho.

A todos os professores, pela dedicação e ensinamentos transmitidos durante todo o curso.

À professora Claudina, que me orientou e acompanhou todas as etapas dessa dissertação com muita dedicação, sempre me ensinando e incentivando. Sou muito grato.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tive durante o curso, podendo assim me dedicar aos estudos.

Aos amigos e colegas que conquistei ao longo dessa caminhada, muito obrigado pela amizade e incentivo constante. Os momentos que passamos juntos serão guardados para sempre.

E aos meus colegas de trabalho na escola Profª. Augusta do Amaral Peçanha, pelo apoio e força.

Resumo

Esta dissertação se concentra no estudo de sistemas lineares com duas e três incógnitas, detendo-se em sua relação algébrica e gráfica, com a utilização do software GeoGebra já que sua distribuição é livre. Apresenta-se uma série de atividades que podem ser aplicadas aos alunos do 8º ano do ensino fundamental (sistemas lineares com duas incógnitas) e aos alunos da 2ª série do ensino médio (sistemas lineares com três incógnitas).

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Representação Gráfica, GeoGebra.

Abstract

This dissertation focuses on the study of linear systems with two and three unknowns, focusing on their algebraic and graphical relationship, with the use of GeoGebra software since its distribution is free. A series of activities that can be applied to 8th grade students (linear systems with two unknowns) and to secondary school students (linear systems with three unknowns) are presented.

Keywords: Linear Systems, Graphical Representation, Geogebra.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver o conteúdo sobre sistemas lineares com enfoque em sua representação gráfica e interpretação geométrica, voltada para o ensino médio. Na rede pública do estado de São Paulo, este tema é trabalhado pensando apenas na resolução de problemas e métodos de resolução e consideramos importante fazer a conexão entre o algébrico e o geométrico.

Conforme as Orientações curriculares para o ensino médio (pág.77) [4] "nós precisamos colocar a álgebra sob o olhar da geometria".

O caderno do professor, criado pelo programa São Paulo Faz Escola, apresenta orientações didático-pedagógicas e traz como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, que pode ser utilizado como complemento à Matriz Curricular. O caderno diz que as atividades podem ser complementadas por outras que o professor julgar pertinente ou necessária, dependendo do seu planejamento e adequação da proposta de ensino deste material à realidade da sua escola e de seus alunos.

Conforme Lima (1993, pág.8) [15] sobre o ensino de sistemas lineares, diz que "sua abordagem nas escolas é, na maioria das vezes, obsoleta, árida e desmotivada". Portanto, o uso do computador, pode dar sentido e a motivação necessária para o aluno desenvolver este tema.

Segundo Lima (2006, pág.164) [13].

> "..., ao analisar um sistema linear é vantajoso não ter espírito preconcebido, encarando-o sob vários aspectos: linhas, colunas, interseção de planos, combinações lineares e determinantes. A confluência dessas várias interpretações ilustra muito bem a riqueza de um assunto, aparentemente elementar, porém de grande utilidade na Matemática e em suas aplicações."

Para poder explorar a representação gráfica de sistemas lineares, foi utilizado o software Geogebra, e sua escolha se deu pelos seguintes motivos:

- programa livre e de código aberto;
- gráficos, álgebra e tabelas são conectados dinamicamente;
- interface fácil de usar, mas com poderosos recursos;
- ferramentas de autoria para criar materiais de ensino interativos exibidos como páginas da internet;
- disponível em vários idiomas para milhões de usuários ao redor do mundo.

Para baixar o GeoGebra, é necessário acessar www.geogebra.org.

No capítulo 1 é contada, de maneira bem sucinta, um pouco sobre a história do surgimento do estudo de sistemas lineares, determinantes e matrizes assim como os responsáveis pelo seu estudo, pois a história da matemática pode ser usada como um motivador para o aprofundamento destes conteúdos.

No capítulo 2 será introduzido o estudo de vetores, para que seja possível trabalhar em três dimensões, com pontos no espaço e equações de retas e planos.

No capítulo 3 será introduzido o estudo de matrizes, sua definição e tipos, pois no capítulo 4, ao estudarmos sistemas lineares, veremos que os mesmos podem ser escritos como matrizes.

No capítulo 4 será introduzido o estudo de sistemas lineares, sua definição, tipos, exemplos, representação gráfica e resolução pelo método do escalonamento, para auxiliar na compreensão e aplicação das atividades propostas, sendo este conteúdo o tema principal deste trabalho. Também será apresentada, por meio de dois exemplos, a interpretação geométrica do processo de escalonamento de sistemas lineares.

No capítulo 5 será introduzido o estudo dos determinantes, como calculá-los, quais são suas propriedades e como se aplica o método de Cramer para resolução de sistemas lineares.

No capítulo 6 serão mostrados algumas aplicações do uso de sistemas lineares, em diversas áreas de conhecimento, possibilitando por exemplo, o trabalho interdisciplinar.

No capítulo 7 será dada uma noção de como trabalhar com o software GeoGebra e como usá-lo para realizar as atividades propostas neste trabalho sobre a representação gráfica de sistemas lineares com duas e três incógnitas.

No capítulo 8 são apresentadas atividades que possibilitam relacionar a solução algébrica e a representação gráfica de sistemas de equações lineares com duas e três incógnitas. Essas atividades são destinadas a alunos do 2º ano do Ensino Médio e envolvem construções de tabelas, resoluções de sistemas lineares e o uso do computador para construções gráficas.

No capítulo 9 serão mostrados exemplos de exercícios que envolvem sistemas lineares, aplicados em provas de vestibulares, concursos, entre outros, e como a resolução gráfica ajuda no entendimento e resolução destes exercícios.

Capítulo 1

Um pouco de História

O objetivo deste capítulo é contar de maneira bem sucinta um pouco sobre a história do surgimento do estudo de sistemas lineares, determinantes e matrizes assim como os responsáveis pelo seu estudo, pois a história da matemática pode ser usada como um motivador para o conhecimento destes conteúdos. Para um maior aprofundamento pode ser consultado as referências [20],[8], [3] e [12].

1.1 Sistemas lineares

O estudo dos sistemas lineares desenvolveu-se, historicamente, com maior intensidade, nas civilizações orientais. Um dos capítulos [1] do livro chinês *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática* (aproximadamente século III a.C.) [2] contém um tópico sobre equações indeterminadas e a solução de um problema envolvendo um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas. Os coeficientes do sistema eram escritos com barras de bambu sobre um tabuleiro, que desempenhava o papel hoje ocupado pelas matrizes. Ainda na China em 1303, Chu Shi-kié encontra-se a apresentação mais acabada dos métodos aritmético-algébricos chineses de que se tem conhecimento. Ele se utilizava dos métodos matriciais comuns que encontramos, sua metodologia de eliminação e substituição já foi comparada ao de J.J. Sylvester (1814-1897).

Credita-se aos chineses a descoberta de um processo de resolução de sistemas equivalente ao atual método do escalonamento.

Exemplo de um problema contido no capítulo VIII: *Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual é o preço do feixe para cada uma das qualidades?.*

[1] Capítulo 8, conteúdo: Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais

[2] O mais importante dos textos de matemática chineses antigos é o K'ui-ch'ang Suan-shu, ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, que data do período Han (Dinastia Han 206 a.C - 221 d.C.) mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo, é uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo. Nele estão estabelecidos os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequência de problemas aplicados

1.2 Como surgiram as matrizes

Historicamente, a representação de conjuntos de números em forma de matrizes aparece no século XIX. Augustin-Louis Cauchy(1789-1857), matemático francês, parece ter sido o primeiro a nomear essas configurações numéricas de tableau (tabela, em françês), em 1826, e só em 1850, com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), é que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de matriz.

Em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica, sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente. Porém, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

As matrizes surgiram para Cayley ligadas as transformações lineares do tipo:

$$\begin{array}{c} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array},$$

com a, b, c e d números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (x', y'). Obviamente a transformação precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a, b, c e d, de modo que ela pode ser simbolizada pela tabela:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1.3 A origem dos determinantes

Os primeiros trabalhos sobre determinantes teriam surgido, quase na mesma época, no Oriente e no Ocidente: em 1683, em um artigo do matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) e, dez anos depois, com o alemão Leibniz (1646-1716). Ambos desenvolveram expressões matemáticas ligadas aos coeficientes das incógnitas das equações de um sistema linear.

Em 1693 Leibniz em cartas a L'Hospital[3], escreveu que ocasionalmente usava números indicando linhas e colunas numa coleção de equações simultâneas. Essa antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada em 1850 e teve que ser redescoberta mais de meio século depois.

Outros matemáticos, também publicaram no século XVIII, artigos sobre determinantes, deixando contribuições valiosas, por exemplo, Cramer, Bézout, Laplace e Vandermond.

Porém, foi somente no século XIX que a teoria dos determinantes ganhou maior impulso na Europa, com os trabalhos de Jacobi (1804-1851) e Cauchy (1789-1857). A esse último atribui-se o título de criador do termo *determinante*, além de ser o responsável por reunir, em 1812, tudo o que era conhecido até então sobre o assunto.

[3]Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital (1661-1704), nasceu em Paris. Durante alguns anos, serviu o exército francês como oficial, mas renunciou por conta de sua miopia. Depois disso, L'Hospital dedicou-se inteiramente à Matemática. L'Hospital aprendeu Cálculo com Johann Bernoulli em 1691, assinando um acordo onde, por um salário regular, Bernoulli concordava em enviar a L'Hospital suas descobertas matemáticas. Dessa forma, uma das mais importantes contribuições de Bernoulli, datada de 1694, passou a ser conhecida como Regra de L'Hospital para o cálculo de limites de formas indeterminadas. A fama de L'Hospital é baseada na sua obra Analyse des infiniment petits, publicada em 1696, considerada o primeiro livro texto sobre Cálculo Diferencial.

__Cauchy__ nasceu em Paris em 1789 e recebeu a primeira educação de seu pai. Posteriormente, na École Centrale du Pantheón, ele se sobressaiu em estudos clássicos. Em 1805 entrou na Escola Politécnica e ganhou admiração de Lagrange e Laplace. Dois anos mais tarde matriculou-se na Ècole des Ponts e Chayssées visando preparar-se para ser engenheiro civil. Persuadido por Lagrange e Laplace decidiu abandonar a engenharia civil em favor da ciência pura e aceitou um cargo de professor na Escola Politécnica.

Figura 1.1: Augustin-Louis Cauchy

As contribuições de Cauchy à teoria dos determinantes, começando em 1812 com uma extrema memória de oitenta e quatro páginas, colocam-no como o matemático que mais contribuiu para o assunto. Foi num artigo de Cauchy de 1812 que apareceu a primeira demonstração do importante e útil teorema que garante que o determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes das matrizes.

O matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) possivelmente em 1729, já conhecesse a regra de resolução de um sistema de equações lineares, hoje conhecida por *Regra de Cramer*. A primeira aparição impressa da regra ocorreu em 1748, no *Treatise of Algebra* de Maclaurin, uma obra póstuma. O matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) publicou-a, independentemente, em 1750, em sua *Introduction à I'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, com uma notação superior que, talvez, seja a responsável pela opção do mundo matemático pelo nome consagrado pela regra.

Bézout, numa memória para a Academia de Paris em 1764, em mais extensamente num tratado de 1779 intitulado *Théorie générale des équations algébriques*, deu regras artificiais, semelhantes às de Cramer, para resolver n equações lineares simultâneas em uma ou mais incógnitas. Ele é melhor conhecido pela extensão dessas a um sistema de equações em uma ou mais incógnitas, em que se quer achar a condição sobre os coeficientes necessária para que as equações tenham solução comum.

Capítulo 2

Vetores

O objetivo deste capítulo é fazer uma introdução do estudo de vetores, para que seja possível trabalhar no plano e em três dimensões: pontos no plano e no espaço, equações de retas e planos. Conforme [14] os vetores são um instrumento útil no estudo da Geometria Analítica, quase indispensáveis em três dimensões. O uso de vetores facilita a compreensão, simplifica as fórmulas e dá mais eficácia aos cálculos. Para um maior conhecimento podem ser consultadas as referências [1], [14], [2] e [7].

2.1 Segmentos equipolentes

Um segmento de reta diz-se orientado quando se estipulou qual de suas extremidades é a inicial e qual é a final. No segmento orientado AB, temos que A é o ponto inicial e B o final, e o segmento orientado BA tem sentido oposto ao segmento AB.

Definição 2.1.1. *Os segmentos orientados AB e CD no plano ou no espaço são equipolentes, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as três seguintes condições:*

1. *têm o mesmo comprimento;*
2. *estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta;*
3. *têm o mesmo sentido.*

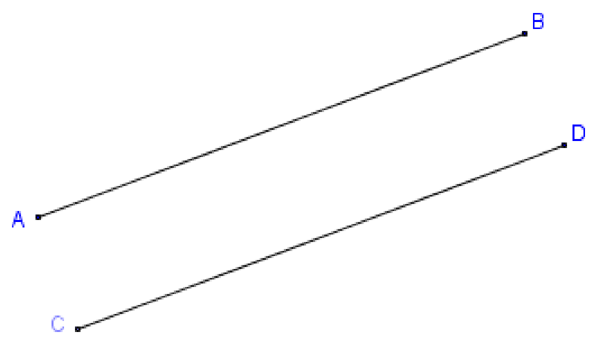
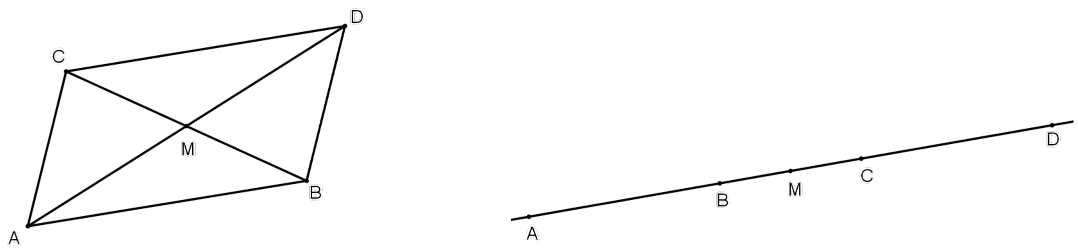


Figura 2.1: Segmentos de reta AB e CD orientados e equipolentes

Observação 2.1.2. *No plano duas retas são paralelas se não se intersectam. No espaço duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e não se intersectam.*

Se AB e CD satisfazem as duas primeiras condições, a terceira significa, no caso em que A, B, C e D não são colineares, que o quadrilátero $ABDC$, percorrendo os vértices nessa ordem, ou seja, $A \to B \to D \to C$, é um paralelogramo. A condição de que o sentido de um dos segmentos seja o mesmo que o sentido do outro é intuitiva e boa para nossos propósitos. Mas, segmentos equipolentes podem ser definidos de modo preciso, tanto no plano como no espaço, dizendo que

> *Os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC, como na Figura 2.2. (Ver demonstração em [7], página 17.)*



(a) Segmentos paralelos

(b) Segmetos na mesma reta

Figura 2.2: Segmentos de reta AB e CD equipolentes

2.2 Coordenadas no plano

Um sistema de eixo ortogonais num plano π é um par de eixos, eixo OX e eixo OY, com unidade de medida de igual comprimento, que se intersectam perpendicularmente na origem comum O. Por convenção, o eixo OX é denominado eixo horizontal e o eixo OY, eixo vertical.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}.$$

De fato, ao ponto P do plano π fazemos corresponder o par ordenado (x, y), onde x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX que passa por P e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passa por P.

Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamos o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto deste eixo de coordenada x com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto deste eixo de coordenada y.

Sabendo que $(x, y) = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$, é simples verificar que a correspondência

$$\text{ponto do plano } \pi \ \leftrightarrow \ \text{par ordenado de } \mathbb{R}^2$$

é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca.

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P: x é a abscissa ou primeira coordenada de P e y é a ordenada ou segunda coordenada de P.

Na Figura 2.3, temos exemplos de alguns pontos do plano π com suas coordenadas em relação ao sistema OXY.

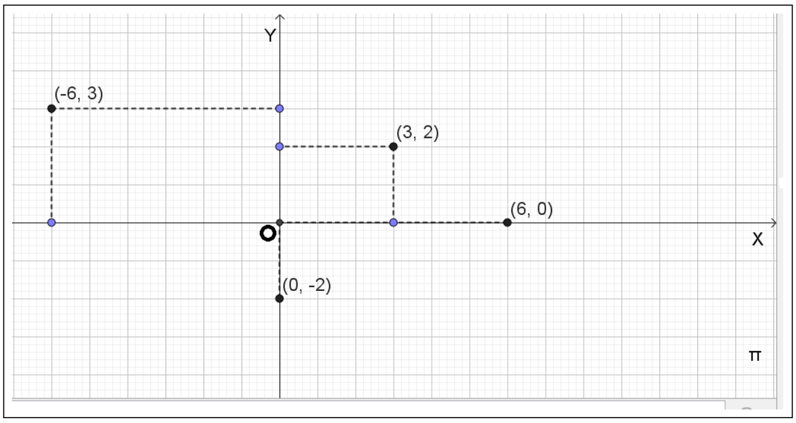


Figura 2.3: Pontos no plano π

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas quadrantes e enumeradas como na Figura 2.4. Observe que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

$$\begin{aligned}
1^{\underline{o}} \text{ quadrante} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ e } y > 0\}; \\
2^{\underline{o}} \text{ quadrante} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \text{ e } y > 0\}; \\
3^{\underline{o}} \text{ quadrante} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \text{ e } y < 0\}; \\
4^{\underline{o}} \text{ quadrante} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ e } y < 0\}.
\end{aligned}$$

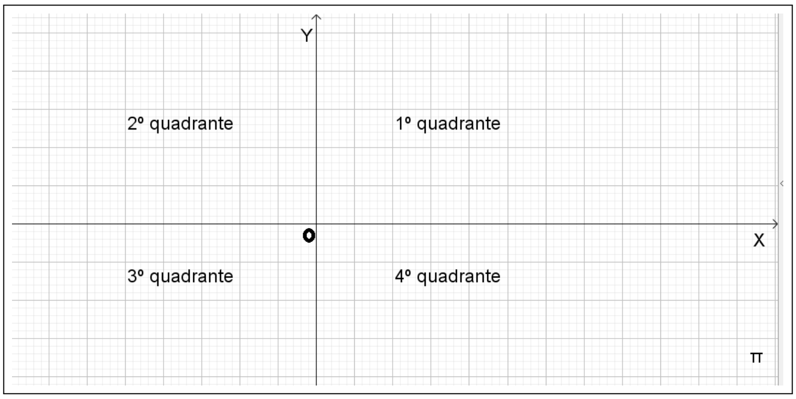


Figura 2.4: Quadrantes do sistema OXY

2.3 Coordenadas no espaço

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ da Geometria Euclidiana consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX, OY e OZ, com a mesma origem O.

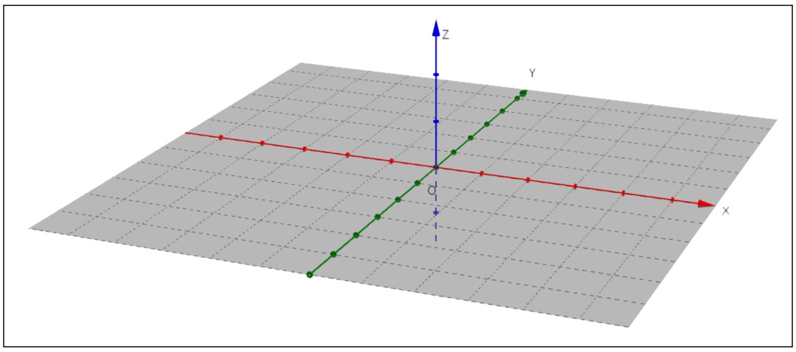


Figura 2.5: Eixos do sistema $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$

Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, há três planos especiais, chamados planos cartesianos, conforme Figura 2.6.

- π_{xy}, o plano que contém os eixos OX e OY;
- π_{xz}, o plano que contém os eixos OX e OZ;
- π_{yz}, o plano que contém os eixos OY e OZ.

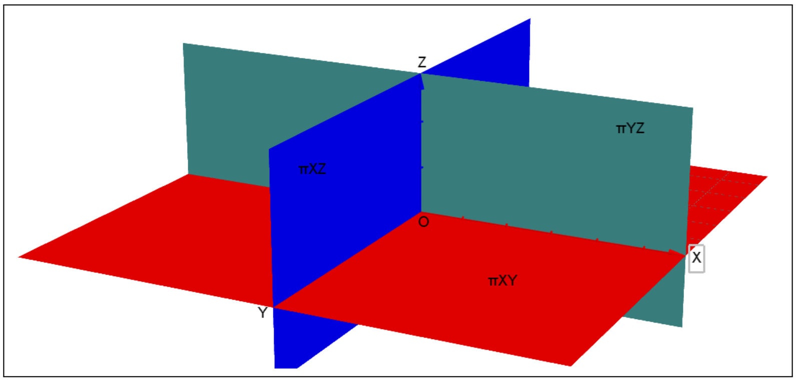


Figura 2.6: Planos cartesianos do sistema $OXYZ$.

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço $\mathcal{E}$ e os ternos ordenados de números reais (x, y, z). Isto é, cada ponto do espaço corresponde exatamente a um terno ordenado de números reais, e cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente a um ponto de $\mathcal{E}$.

Se o ponto P está em correspondência com o terno (x, y, z), dizemos que x, y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- coordenada x: coordenada no eixo OX do ponto de interseção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{yz}.
- coordenada y: coordenada no eixo OY do ponto de interseção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{xz}.
- coordenada z: coordenada no eixo OZ do ponto de interseção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{xy}.

Designamos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais. Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, identificamos cada ponto $P \in \mathcal{E}$ pelas suas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e escrevemos:

$$P = (x, y, z).$$

Com esta identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonal é o ponto $O = (0, 0, 0)$.
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$\begin{aligned} \text{eixo } OX &= \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}; \\ \text{eixo } OY &= \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}; \\ \text{eixo } OZ &= \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\begin{aligned} \pi_{xy} &= \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}; \\ \pi_{xz} &= \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}; \\ \pi_{yz} &= \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Um sistema de eixos ortogonais no espaço $\mathcal{E}$ permite descrever os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos. Vejamos, por exemplo, como caracterizar outros planos e algumas retas por equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos.

Um plano π é horizontal se coincide ou é paralelo ao plano π_{xy} (Figura 2.7). Neste caso, se o ponto de interseção do plano π com o eixo OZ é $(0, 0, c)$, então a terceira coordenada de qualquer ponto $P \in \pi$ é igual a c, ou seja, $\pi = \{(x, y, c) | x, y \in \mathbb{R}\}$, Assim, dizemos que a equação do plano π é $z = c$.

Analogamente, os planos paralelos aos planos π_{xz} e π_{yz} têm equações $y = b$ e $x = a$, com $b \neq 0$ e $a \neq 0$, respectivamente.

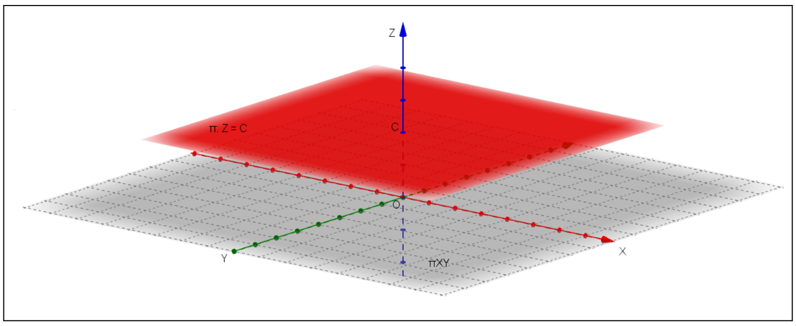


Figura 2.7: Plano horizontal π.

Um plano π é vertical quando contém o eixo OZ ou é paralelo ao eixo OZ. Isto é, π é um plano vertical se, e somente se, o eixo OZ está contido no plano π ou a interseção do eixo OZ e o plano π é vazia, ou seja, $OZ \subset \pi$ ou $OZ \cap \pi = \emptyset$.

Por exemplo, os planos $\pi : x = a,\ a \in \mathbb{R}$, assim como os planos $\pi : y = b,\ b \in \mathbb{R}$, são verticais.

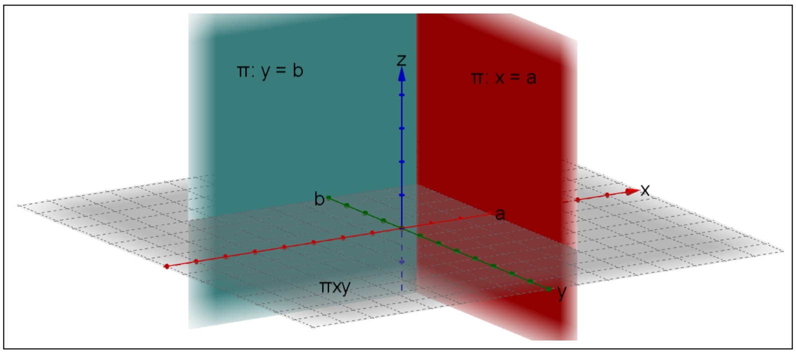


Figura 2.8: Planos verticais.

2.4 Vetor

Se os segmentos de reta AB e CD são equipolentes, então eles representam o mesmo vetor v, que pode ser representado por $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. O vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é representado pelo segmento orientado AB e por qualquer segmento orientado CD equipolente ao segmento AB. A origem da palavra vetor vem do latim vehere que significa transportar.

2.5 Coordenadas de um vetor

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um sistema de coordenadas ortogonais. Vamos considerar vetores no plano e no espaço e associar coordenadas a esses vetores. Na Seção 2.6 apresentamos definições de operações por meio de suas coordenadas.

2.5.1 Coordenadas de um vetor no plano

A proposição que segue permite associar coordenadas a um vetor de modo preciso.

Proposição 2.5.1. *Considerando um sistema de eixos ortogonais OXY no plano e os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$, os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes se, se e somente se, $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ e $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.*

Demonstração. As coordenadas dos pontos médios de AD e BC são

$$\left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{x_3 + x_2}{2}, \frac{y_3 + y_2}{2}\right),$$

respectivamente. Pela Observação 2.1.2, dois segmentos são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC coincidem. Para que isto ocorra é necessário e suficiente que

$$\frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{x_3 + x_2}{2} \text{ e } \frac{y_4 + y_1}{2} = \frac{y_3 + y_2}{2},$$

ou seja, $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ e $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$.

□

Devido a Proposição 2.5.1, sendo $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, podemos definir as coordenadas do vetor $v = \vec{AB}$ colocando $v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, pois essas coordenadas independem do representante, $\vec{AB}$ ou $\vec{CD}$ que consideramos do vetor v.

Dado um vetor $v = \vec{AB}$, se escolhemos, para representar esse vetor, o segmento com ponto inicial a origem do sistema ortogonal e ponto final o ponto P, tal que AB e OP são equipolentes, então as coordenadas de v e as coordenadas do ponto P são iguais.

2.5.2 Coordenadas de um vetor no espaço

De modo análogo aos vetores no plano, temos o resultado seguinte para vetores equipolentes no espaço.

Proposição 2.5.2. *Considerando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço e os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$, os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes se, se e somente se, $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$ e $z_2 - z_1 = z_4 - z_3$.*

Demonstração. Análoga ao resultado para o plano da Seção 2.5.1. □

Pela Proposição 2.5.2, dado o vetor vetor $v = \vec{AB}$, se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, então definimos as coordenadas do vetor, no sistema de coordenadas considerado, como sendo os números $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ e $z_2 - z_1$, ou seja, $v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, que como vimos, independe do segmento que representa o vetor.

Quando se representa v por um segmento orientado com início na origem $O = (0, 0, 0)$, isto é, $v = \vec{OP}$, então as coordenadas de v são as coordenadas do ponto P.

As coordenadas do vetor nulo $\vec{AA}$ são $(0, 0, 0)$.

Exemplo 2.5.3. *Se $A(2, 4, 1)$ e $B(3, 6, 0)$ então o vetor $v = \vec{AB} = B - A = (3-2, 6-4, 0-1) = (1, 2, -1)$.*

2.6 Operações com vetores

Nesta seção definimos a operação de adição de vetores no plano e no espaço e apresentamos suas propriedades. Também definimos a multiplicação de um vetor por um escalar.

2.6.1 Soma de vetores

Conforme Elon [14], definimos a soma $u + v$ de dois vetores u e v da seguinte forma:

Definição 2.6.1. *Sejam os vetores u e v. Considerando as representações de u e v dadas por $u = \vec{AB}$ e $v = \vec{BC}$, tais que o ponto final do primeiro vetor $\vec{AB}$ coincide com a origem do vetor $v = \vec{BC}$, a soma, denotada por $u + v$, é definida por*

$$u + v = \overrightarrow{AC},$$

como mostra a Figura 2.9.

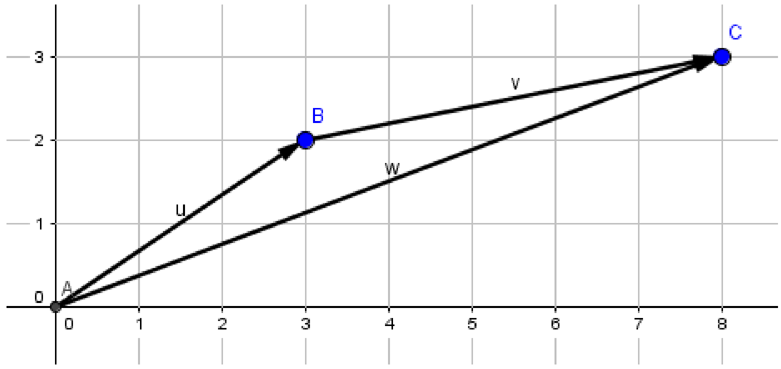


Figura 2.9: Soma de vetores

Observação 2.6.2. *É fácil mostrar que a soma de vetores está bem definida, mostrando que o vetor $u + v$ é único, qualquer que seja a escolha dos representantes dos vetores u e v.*

Observação 2.6.3. *Quando os vetores u e v não são colineares ou não paralelos, uma forma geométrica de visualizar a soma de dois vetores é a seguinte: sejam $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ vetores do plano, P um ponto escolhido do plano e Q e R os pontos tais que $u = \overrightarrow{PQ}$ e $v = \overrightarrow{PR}$. Como os vetores u e v não são colineares e não paralelos, os pontos P, Q e R não são colineares. Assim, o vetor soma $u + v$ é $\overrightarrow{PS}$, com origem no ponto P, sendo PS a diagonal do paralelogramo $PQSR$ de lados adjacentes PQ e PR. De fato, sendo $u = \overrightarrow{PQ}$ e $v = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, pela Definição 2.6.1, temos $u + v = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$.*

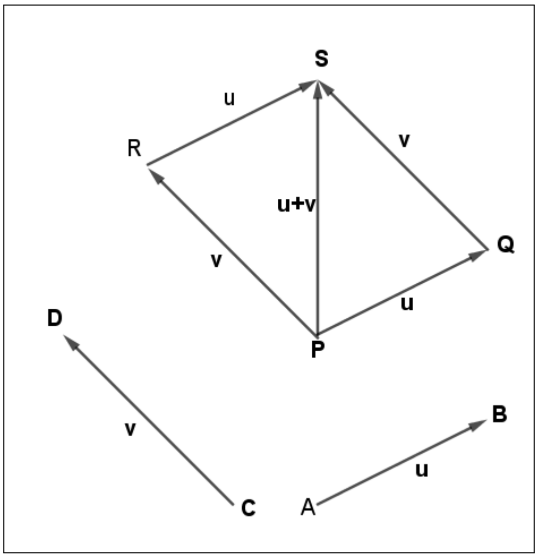


Figura 2.10: Soma de vetores: u + v = $\overrightarrow{PS}$

Considerando um sistema de eixos ortogonais, temos o seguinte resultado sobre as coordenadas da soma de vetores no plano e no espaço.

Proposição 2.6.4. *(Soma de vetores no plano e no espaço em termos de coordenadas)*

(a) *Sejam* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$ *vetores no plano, expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais* OXY*. A soma dos vetores* u *e* v*, denotada* $u + v$*, é dada por*

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

(b) *Sejam* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $v = (x_2, y_2, z_2)$ *vetores no espaço, expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais* $OXYZ$*. A soma dos vetores* u *e* v*, denotada* $u + v$*, é dada por*

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Demonstração. Ver [14].

□

Exemplo 2.6.5. *Sejam os vetores* $u = (1, 3, 2)$*,* $v = (2, 5, 1)$ *no espaço e* $w = u + v$*. Então* $w = (1 + 2, 3 + 5, 2 + 1) = (3, 8, 3)$*.*

2.6.2 Propriedades da soma de vetores

As propriedades apresentadas a seguir são válidas para todos os vetores u, v, w no plano ou no espaço.

(a) *Comutatividade:* $u + v = v + u$.

(b) *Associatividade:* $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(c) *Elemento neutro:* $u + 0 = u$, com 0 denotando o vetor nulo.

(d) *Inverso aditivo:* $-v + v = 0$, com $-v$ denotando o vetor cujas coordenadas são os negativos das coordenadas de v.

2.6.3 Multiplicação de um vetor por um escalar

A multiplicação de um vetor $v = \vec{AB}$ por um escalar $k \in \mathbb{R}$ é um vetor, denotado kv, tal que

(a) Se $k = 0$ ou v for o vetor nulo, kv é o vetor nulo;

(b) Se $k > 0$ e v não nulo, $kv = \vec{AC}$, com C o ponto da reta AB tal que os sentidos de A para B e de A para C coincidem e o comprimento do segmento AC é igual ao produto de k pelo comprimento do segmento AB;

(c) Se $k < 0$ e v não nulo, $kv = \vec{AC}$, com C o ponto da reta AB tal que os sentidos de A para B e de A para C são opostos e o comprimento do segmento AC é igual ao produto de $|k|$ pelo comprimento do segmento AB.

Proposição 2.6.6. *(Multiplicação de um vetor por um escalar no plano e no espaço em termos de coordenadas)*

(a) *Fixado no plano o sistema de eixos ortogonais OXY, seja $v = (x, y)$ a representação do vetor v por suas coordenadas. Dado k um número real, a multiplicação do vetor v pelo escalar k é o vetor, denotado por kv, com coordenadas dadas por*

$$kv = (kx, ky).$$

(b) *Fixado no espaço o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, seja $v = (x, y, z)$ a representação do vetor v por suas coordenadas. Dado k um número real, a multiplicação do vetor v pelo escalar k é o vetor, denotado por kv, com coordenadas dadas por*

$$kv = (kx, ky, kz).$$

Demonstração. Ver [14].

□

Exemplo 2.6.7. *Seja $v = (1, 2, 3)$, então $2v = 2(1, 2, 3) = (2.1, 2.2, 2.3) = (2, 4, 6)$. (ver Figura 2.11)*

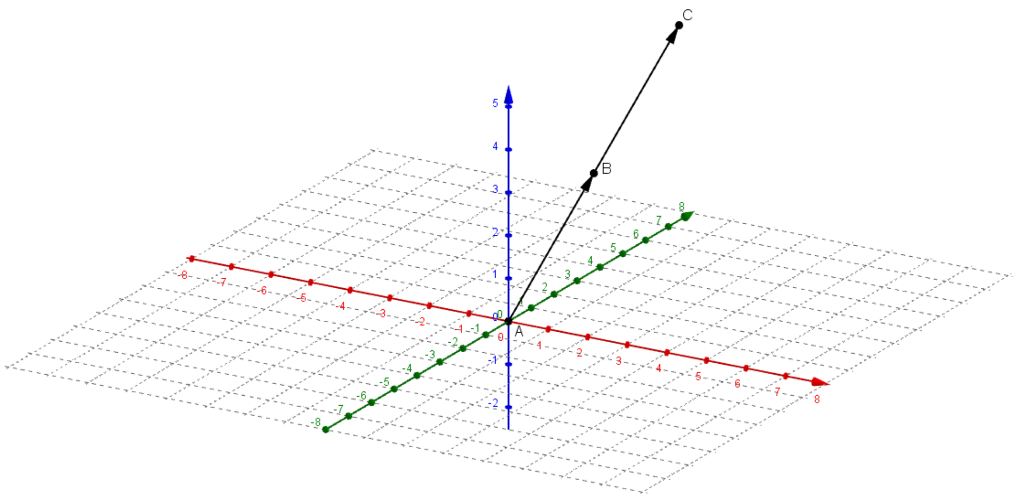


Figura 2.11: Multiplicação de um vetor por um escalar

2.6.4 Propriedades da multiplicação de vetor por escalar

As propriedades apresentadas a seguir são válidas para todos os vetores v e u no plano ou no espaço e escalares k e t.

(a) *Associatividade:* $k(tv) = (kt)v$.

(b) *Distributividade:* $k(v + u) = kv + ku$ e $(k + t)v = kv + tv$.

(c) *Elemento neutro:* $1v = v$.

2.7 Colinearidade de vetores

Sabemos que três pontos A, B, e C são colineares se eles pertencem a uma mesma reta. A seguir apresentamos o conceito de vetores colineares.

Definição 2.7.1. *O vetor v é múltiplo do vetor u se existe um número real k tal que $v = ku$.*

Observação 2.7.2. *Valem as seguintes afirmações:*

(a) Todo vetor é múltiplo dele mesmo.

(b) O vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor.

(c) O vetor v é múltiplo de u se, e somente se, u é múltiplo de v, quando u e v são vetores não nulos.

Definição 2.7.3. *Dois vetores não nulos são colineares se um deles for múltiplo do outro.*

Observação 2.7.4. *Se $\vec{AC}= k\ \vec{AB}$ então os pontos A, B e C são colineares. Por outro lado, se A, B e C são distintos e colineares, então existe um número real k tal que $\vec{AC}= k\ \vec{AB}$. Para verificar este caso, consideremos k igual ao quociente do comprimento de AC pelo comprimento de AB com sinal positivo ou negativo, dependendo se os pontos B e C estão do mesmo lado de A ou em lados opostos na reta, respectivamente.*

Exemplo 2.7.5. *Verificar se os pontos $A = (-1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-2, -1, -1)$ são colineares.*

Para que os vetores $\vec{AB} = (2, 0, 1)$ e $\vec{AC} = (-1, -2, -1)$, sejam colineares, precisamos ter $\vec{AC} = k\ \vec{AB}$, ou seja, $(-1, -2, -1)$=$(2k, 0, k)$, o que é impossível, pois na segunda coordenada temos que -2 $\neq$ 0, portanto os pontos A, B e C não são colineares, e consequentemente os vetores $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$ não são múltiplos.

2.8 Combinação linear de vetores

Definição 2.8.1. *Um vetor v é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, $\cdots$, v_n, quando for soma de múltiplos destes vetores. Isto é, v é uma combinação linear de v_1, v_2, $\cdots$, v_n, se existem k_1, k_2, $\cdots$, $k_n \in \mathbb{R}$ tais que v=k_1v_1+k_2v_2+$\cdots$+k_nv_n.*

Definição 2.8.2. *Dado um conjunto de vetores, dizemos os vetores do conjunto são linearmente independentes (LI) se nenhum deles é uma combinação linear dos demais vetores do conjunto. Caso contrário, os vetores são chamados linearmente dependentes (LD).*

Observação 2.8.3. *No espaço, pode ser verificado que, quando os pontos A, B, C e D não são coplanares, os vetores u=$\vec{AB}$, v=$\vec{AC}$ e w=$\vec{AD}$ são linearmente independentes (LI). E quando os pontos A, B, C e D são coplanares, os vetores u=$\vec{AB}$, v=$\vec{AC}$ e w=$\vec{AD}$ são linearmente dependentes (LD). Para a justificativa, pode ser consultado* [14].

2.9 Produto interno

Nesta seção, será dada uma definição geométrica do produto interno entre dois vetores e posteriormente iremos obter a expressão do produto interno em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixo ortogonais. O desenvolvimento terá como base a referência [7].

O produto interno de dois vetores é um número que tem propriedades importantes. Esse número permite obter a distância entre dois pontos, o ângulo entre duas retas orientadas e, em particular, condições para seu perpendicularismo.

Para a abordagem geométrica, será dada a definição de norma de um vetor e ângulo entre dois vetores e também da geometria plana, a lei dos cossenos.

Considere um triângulo ABC, no plano ou no espaço, com as medidas dos lados a, b e c conforme a Figura 2.12.

A lei dos cossenos estabelece que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,\widehat{A}$, com $\widehat{A}$ o ângulo entre os lados AB e AC. Quando o ângulo $\widehat{A}$ é reto, ou seja, mede 90°, temos então um triângulo retângulo com catetos b e c e hipotenusa a, e então a lei dos cossenos se reduz a $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).

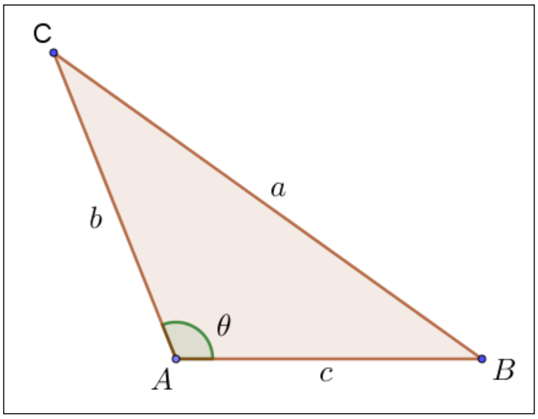


Figura 2.12: Lei dos Cossenos

Definição 2.9.1. *A norma ou comprimento do vetor v, no plano ou no espaço, é o número $\|v\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de v.*

Observação 2.9.2. *Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos no plano, a distância entre os pontos A e B, denotada por $d(A, B)$, é dada por*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

De modo análogo, se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ são pontos no espaço, a distância entre entre eles é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Para um maior aprofundamento sobre o tema desta seção pode ser consultada a referência [7].

Observação 2.9.3. *Valem as seguintes afirmações:*

(a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante.

Com efeito, se $v = \vec{AB} = \vec{CD}$*, então* $AB \equiv CD$ *e, portanto,*

$$d(A, B) = d(C, D) = \|v\|.$$

(b) Se $A = (x_1, y_1)$*,* $B = (x_2, y_2)$ *são pontos no plano e* $v = \vec{AB}$*, então*

$$\|v\| = \left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

De modo análogo, se $A = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $B = (x_2, y_2, z_2)$ *são pontos no espaço e* $v = \vec{AB}$*, então*

$$\|v\| = \left\|\vec{AB}\right\| = d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(c) Se $P = (x, y)$ *é um ponto no plano e* $v = \vec{OP}$*, então*

$$\|v\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

E, se $P = (x, y, z)$ *é um ponto no espaço e* $v = \vec{OP}$*, então*

$$\|v\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Exemplo 2.9.4. *Dados* $A = (1, 2)$ *e* $B = (5, 1)$*, então a norma de* $v = \vec{AB}$ *é:*

$$\|v\| = \sqrt{(5-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Definição 2.9.5. *O ângulo entre os vetores não nulos* u *e* v *no plano (ou no espaço), é o menor ângulo entre os segmentos representantes* AB *e* AC *de* u *e* v*, respectivamente. Designamos* $\theta = \angle(u, v)$ *a medida do ângulo entre* u *e* v*.*

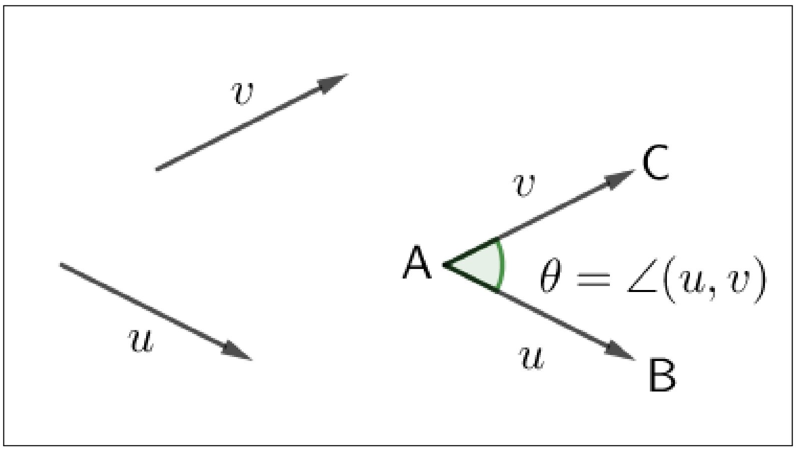


Figura 2.13: Ângulo entre dois vetores

Definição 2.9.6. *O produto interno dos vetores u e v do plano (ou do espaço), é o número real*

$$\langle u,v\rangle = \begin{cases} 0, & se\ u=0\ ou\ v=0; \\ \|u\|\,\|v\|\,cos\theta, & se\ u\neq 0, v\neq 0\ e\ \theta=\angle(u,v). \end{cases}$$

Proposição 2.9.7. *(Produto interno em coordenadas)*

(i) *(Produto interno no plano) Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano, em relação ao qual tomam-se as coordenadas dos vetores $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$. Então o produto interno desses dois vetores é dado pelo número*

$$\langle u,v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

(ii) *(Produto interno no espaço) Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço, em relação ao qual tomam-se as coordenadas dos vetores $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$. Então o produto interno desses dois vetores é o número*

$$\langle u,v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Demonstração.

(i) Se um dos vetores u ou v é nulo, temos $\langle u,v\rangle = 0$ e, também, $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Sejam $u=\vec{OP}$ e $v=\vec{OQ}$ vetores não nulos, com $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$. Então,

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = v - u = (x_2-x_1, y_2-y_1).$$

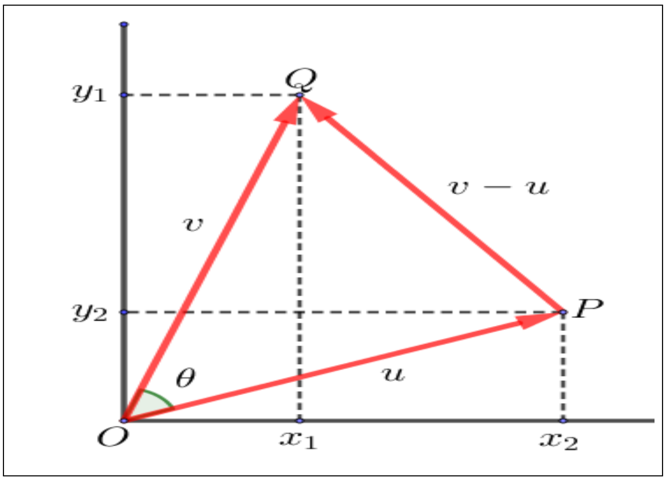


Figura 2.14: Diferença v - u

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo OPQ, obtemos:

$$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\cos\theta,\ \text{com}\ \theta=\angle(u,v).$$

Daí:

$$\begin{aligned}
2\left\|u\right\|\left\|v\right\|\cos\theta &= \left\|u\right\|^2+\left\|v\right\|^2-\left\|v-u\right\|^2.\\
&= (x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)\\
&= x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-(x_2^2-2x_2x_1+x_1^2+y_2^2-2y_2y_1+y_1^2)\\
&= x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-x_2^2+2x_2x_1-x_1^2-y_2^2+2y_2y_1-y_1^2\\
&= 2x_2x_1+2y_2y_1\\
&= 2(x_1x_2+y_1y_2)
\end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 2.9.6,

$$\langle u,v\rangle = \left\|u\right\|\left\|v\right\|\cos\theta = x_1x_2+y_1y_2.$$

(ii) A prova é análoga a do item anterior.

□

Definição 2.9.8. *O vetor u é perpendicular (ou ortogonal) ao vetor v, e escrevemos $u \perp v$, se $u=0$ ou $v=0$ ou $\angle(u,v)=90°$.*

Proposição 2.9.9. *Dois vetores são perpendiculares se, e só se, seu produto interno é zero:*

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0.$$

Demonstração. Se $u=0$ ou $v=0$, então $u\perp v$ e, também, $\langle u,v\rangle=0$.

Sejam $u\neq 0$, $v\neq 0$ e $\theta=\angle(u,v)$, então:

$$\langle u,v\rangle = \left\|u\right\|\left\|v\right\|\cos\,\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\,\theta = 0 \Leftrightarrow 0 = 90°.$$

□

2.9.1 Propriedades do produto interno

(a) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$;

(b) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$;

(c) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$;

(d) $\langle \alpha.u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$;

(e) $\langle u,\alpha.v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$;

(f) $\langle 0,v\rangle = \langle u,0\rangle = 0$;

(g) $\langle u,u\rangle > 0$ se $u\neq 0$.

Exemplo 2.9.10. *Sejam os vetores $u=(1,2,3)$ e $v=(-1,0,1)$, então $\langle u,v\rangle = (1.-1+2.0+3.1)=2$.*

2.10 Equação cartesiana da reta no plano

Da geometria plana sabemos que dois pontos distintos determinam unicamente uma reta. Nesta seção vamos encontrar as relações que as coordenadas (x, y), em relação a um sistema de eixos ortogonais, de um ponto P devem satisfazer para que o ponto P pertença a uma determinada reta no plano.

Definição 2.10.1. *Um vetor u não nulo é **normal** ou **perpendicular** a uma reta r no plano se u é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos A e B pertencentes a r.*

Proposição 2.10.2. *Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $u = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$. Então o ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se, $ax + by = c$, com $c = ax_0 + by_0$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \Leftrightarrow & \overrightarrow{AP} \perp u \\ \Leftrightarrow & \left\langle \overrightarrow{AP}, u \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ \Leftrightarrow & ax + by = ax_0 + by_0 \\ \Leftrightarrow & ax + by = c, \text{ com } c = ax_0 + by_0. \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação $ax + by = c$, com $c = ax_0 + by_0$.

□

A equação

$$\boxed{r : ax + by = c.}$$

da Proposição 2.10.2 é chamada **equação cartesiana** da reta r.

Observação 2.10.3. *Na equação cartesiana da reta $ax + by = c$, os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $u = (a, b)$ à reta r e podemos determinar o valor de c a partir de um ponto conhecido de r, por exemplo, o ponto $A = (x_0, y_0)$, pois $c = ax_0 + by_0$. Observamos também que a e b não podem ser ambos iguais a zero, pois $u = (a, b)$ é um vetor não nulo.*
Além disso, pela Proposição 2.10.2, a representação geométrica dos pontos que satisfazem a equação $ax + by = c$ é uma reta.

Exemplo 2.10.4. *Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (-1, 4)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3)$.*

Como $\overrightarrow{u} \perp r$, devemos ter $r : 2x + 3y = c$.

O valor de c é calculado sabendo que $A = (-1, 4)$ pertence a r. Assim, $c = 2.(-1) + 3.(4) =$ 10.

Portanto, a equação procurada é $r : 2x + 3y = 10$.

2.11 Equações paramétricas da reta no espaço

Sejam A e B dois pontos distintos do espaço e seja r a reta que os contêm. Então, P pertence a r se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{AP} = t\ \vec{AB}$.

O ponto P pode ser visto como sendo a translação do ponto A pelo vetor $\vec{AP}$, ou seja, $P = A + \vec{AP}$. Assim, P pertence a r se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + t\ \vec{AB}$.

Consequentemente, a reta r é caracterizada pela equação

$$r : P = A + t\ \vec{AB},\ t \in \mathbb{R},$$

chamada **equação paramétrica** da reta r, com parâmetro t.

Sendo os pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ expressos em coordenadas cartesianas, temos

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

E, sendo $P = (x, y, z)$, obtemos

$$r : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3),$$

ou seja,

$$r : (x, y, z) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)).$$

Portanto, $P = (x, y, z)$ pertence à reta r que passa pelos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ se, e somente se, suas coordenadas x, y, e z satisfazem as equações

$$(*) \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = b_1 + t(b_2 - a_2) \\ z = c_1 + t(b_3 - a_3) \end{cases}$$

para algum t em $\mathbb{R}$.

As equações $(*)$ são chamadas equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ e o vetor $u = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ é chamado vetor diretor da reta.

Exemplo 2.11.1. *Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$.*

Temos o vetor $\vec{AB} = (3 - 1, 1 - 2, 2 - 3) = (2, -1, -1)$. Assim,

$$r : \begin{cases} x = 1 + t(2) \\ y = 2 + t(-1) \\ z = 3 + t(-1) \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da reta r.

2.12 Equação cartesiana do plano no espaço

Um dos axiomas da geometria no espaço nos diz que três pontos não colineares determinam um plano. Nesta seção vamos encontrar as relações que as coordenadas (x, y, z), em relação a um sistema de eixos ortogonais, de um ponto P devem satisfazer para que o ponto P pertença a um determinado plano.

Definição 2.12.1. *Um vetor u não nulo é* **normal** *ou* **perpendicular** *a um plano π no espaço se u é ortogonal aos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, quaisquer que sejam os pontos A, B e C não colineares pertencentes a π. De outra forma, equivalentemente, u é normal ou perpendicular ao plano π que passa pelo ponto A se u é ortogonal ao vetor $\vec{AP}$, para qualquer P pertencente a π.*

Proposição 2.12.2. *Seja π um plano que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é normal ao vetor não nulo $u = (a, b, c)$. Então o ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, $ax + by + cz = d$, com $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.*

Demonstração. Seja π o plano que passa pelo ponto A e normal ao vetor u. Então

$$\begin{aligned} P \in \pi &\Leftrightarrow \vec{AP} \perp u \\ &\Leftrightarrow \left\langle \vec{AP}, u \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Considerando $A = (x_0, y_0, z_0)$, $u = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$, em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ fixado, obtemos

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \pi &\Leftrightarrow \left\langle \vec{AP}, u \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = d, \text{ com } d = ax_0 + by_0 + cz_0. \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + cz = d$, com $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

□

A equação

$$\boxed{\pi : ax + by + cz = d}$$

da Proposição 2.12.2 é chamada **equação cartesiana** do plano π do espaço.

Observação 2.12.3. *Na equação cartesiana do plano $ax + by + cz = d$, os coeficientes a, b e c de x, y e z, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $u = (a, b, c)$ ao plano π e podemos determinar o valor de d a partir de um ponto conhecido de π, por exemplo, o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$, pois $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Observamos também que a, b e c não podem ser todos iguais a zero, pois $u = (a, b, c)$ é um vetor não nulo.*
Além disso, pela Proposição 2.12.2, a representação geométrica dos pontos que satisfazem a equação $ax + by + cz = d$ é um plano e o vetor $u = (a, b, c)$ é normal ao plano, como no exemplo da Figura 2.15.

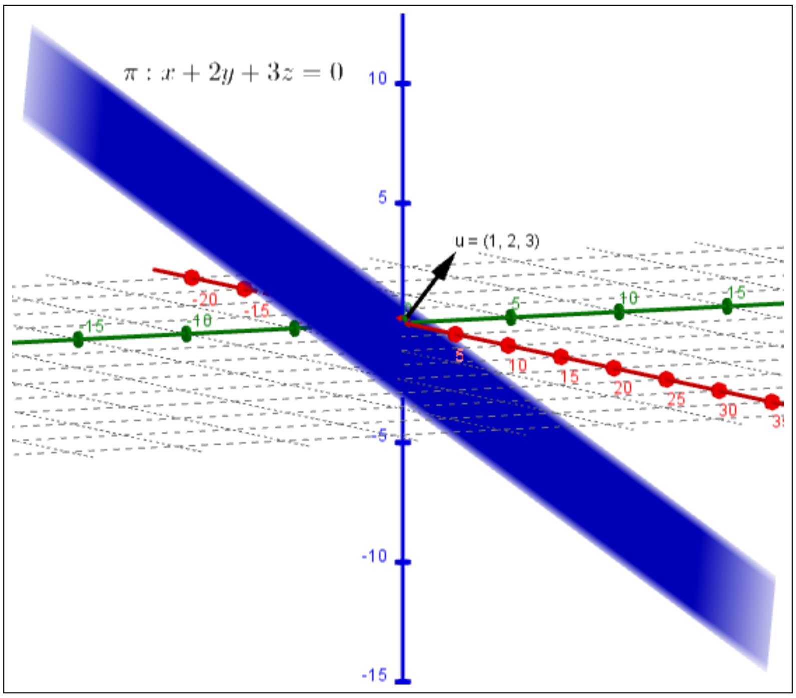


Figura 2.15: Plano $x + 2y + 3z = 0$ com $u = (1, 2, 3)$ vetor normal

Exemplo 2.12.4. *Determinar a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é normal ao vetor $u = (1, 2, -3)$.*

Como $u = (1, 2, -3)$ é normal a π, temos $\pi : 1x + 2y + (-3)z = d$ e o valor de d é calculado sabendo que $A = (1, 1, 2)$ pertence ao plano. Assim, $d = 1.1 + 2.1 + (-3).2 = -3$.
Portanto, a equação procurada é $\pi : x + 2y - 3z = -3$.

Observação 2.12.5. *A interseção de um plano vertical π com o plano π_{xy} é uma reta. Esta reta, vista exclusivamente no plano $\pi_{xy} : z = 0$, é dada por uma equação da forma $ax + by = d$, com $a^2 + b^2 \neq 0$. Mas, no espaço, a reta $r : \pi \cap \pi_{xy}$ é dada por duas equações:*

$$r : \begin{cases} ax + by = d \\ z = 0. \end{cases}$$

Ou seja, um ponto no espaço pertence à reta r se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem, simultaneamente, às duas equações acima.

Além disso, como o eixo OZ é paralelo ao plano π, o plano é formado pela união de todas as retas paralelas ao eixo OZ que passam por um ponto de r. Portanto, o plano π é dado por

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax + by = d \text{ e } z \in \mathbb{R}\},$$

e sua equação cartesiana é:

$$\pi : ax + by = d.$$

No espaço, a equação $ax + by = d$ representa um plano vertical, ao passo que, no plano π_{xy}, esta equação representa uma reta.

Procedendo de forma análoga com os outros dois eixos, temos:

$$\textit{eixo } OX \parallel \pi \textit{ ou eixo } OX \subset \pi \Leftrightarrow \pi : by + cz = d, \textit{ com } b^2 + c^2 \neq 0;$$
$$\textit{eixo } OY \parallel \pi \textit{ ou eixo } OY \subset \pi \Leftrightarrow \pi : ax + cz = d, \textit{ com } a^2 + c^2 \neq 0.$$

Observação 2.12.6. *A equação $0x + 0y + 0z = 0$ é a equação do espaço $\mathcal{E}$.*

2.13 Equações paramétricas do plano

Sejam A, B e C três pontos do espaço e seja π o plano que os contêm. Pode ser verificado que A, B e C são não colineares se, e somente se, os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são linearmente independentes. Além disso, um ponto P pertence ao plano determinado pelos pontos não colineares A, B e C se, e somente se, o vetor $\vec{AP}$ se escreve como uma combinação linear dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Então,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \text{ existem } s,\ t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \vec{AP} = s\,\vec{AB} + t\,\vec{AC}\,.$$

Isto é,

$$P \in \pi, \text{ se, e somente se, } P = A + s\,\vec{AB} + t\,\vec{AC}\,. \tag{2.13.1}$$

Sendo $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ e $P = (x, y, z)$ as coordenadas dos pontos num sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, temos o vetor $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ e o vetor $\vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$. Substituindo suas coordenadas na equação 2.13.1, obtemos

$$\pi : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + s(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) + t(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3),$$

ou seja,

$$\pi : (x, y, z) = (a_1 + s(b_1 - a_1) + t(c_1 - a_1), a_2 + s(b_2 - a_2) + t(c_2 - a_2), a_3 + s(b_3 - a_3) + t(c_3 - a_3)).$$

Portanto, $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π que passa pelos pontos não colineares $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$ se, e somente se, existem números reais s e t tais que as coordenadas x, y, e z do ponto P satisfazem as equações

$$\pi : \begin{cases} x = a_1 + s(b_1 - a_1) + t(c_1 - a_1) \\ y = b_1 + s(b_2 - a_2) + t(c_2 - a_2) \\ z = c_1 + s(b_3 - a_3) + t(c_3 - a_3) \end{cases}. \tag{2.13.2}$$

As equações em 2.13.2 são chamadas equações paramétricas do plano π que passa pelos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$.

Exemplo 2.13.1. *Determinar as equações paramétricas do plano π que contêm os pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.*

Temos $\vec{AB} = (1 - 0, 1 - 1, 0 - 1) = (1, 0, -1)$ e $\vec{AC} = (1 - 0, 0 - 1, 1 - 1) = (1, -1, 0)$. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x &=& 0 &+& s(1) &+& t(1) \\ y &=& 1 &+& s(0) &+& t(-1) \\ z &=& 1 &+& s(-1) &+& t(0) \end{cases} ;\ \textit{com } s, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, as equações paramétrica do plano π são

$$\pi : \begin{cases} x = s + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - s \end{cases} ;\ \textit{com } s, t \in \mathbb{R}.$$

2.14 Posição relativa entre dois planos

Dados dois planos π_1 e π_2, eles podem ser:

- coincidentes: $\pi_1 = \pi_2$;

  Seja qual for o número real $k \neq 0$, as equações $ax + by + cz = d$ e $kax + kby + kcz = kd$ definem o mesmo plano. Reciprocamente, se as equações $ax+by+cz = d$ e $a'x+b'y+c'z = d'$ definem o mesmo plano então existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e $d' = kd$, ou seja,

$$\frac{a'}{a} = k, \quad \frac{b'}{b} = k, \quad \frac{c'}{c} = k \quad \text{e} \quad \frac{d'}{d} = k.$$

- paralelos: $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$;

  A fim de que os planos π_1 e π_2 de equações $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$, sejam paralelos (isto é, não tenham pontos em comum) é necessário e suficiente que, para algum $k \neq 0$, se tenha $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e $d' \neq kd$, ou seja:

$$\frac{a'}{a} = k, \quad \frac{b'}{b} = k, \quad \frac{c'}{c} = k \quad \text{e} \quad \frac{d'}{d} \neq k.$$

- concorrentes: $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta.

  Para que os planos π_1 e π_2 de equações $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$, não coincidam nem sejam paralelos (portanto se intersectem segundo uma reta) é necessário e suficiente que para nenhum $k \in \mathbb{R}$ se tenha

$$a' = ka, \ b' = kb \text{ e } c' = kc.$$

Capítulo 3

Matrizes

O objetivo deste capítulo é fazer uma introdução ao estudo de matrizes, suas definições e tipos, pois no Capítulo 4, ao estudarmos sistemas lineares, veremos que os mesmos podem ser escritos na forma matricial.

3.1 Definição

Uma matriz A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes e representamos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Usamos letras maiúsculas para denotar matrizes, e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (isto é, o número de linhas e colunas), escrevemos $A_{m\times n}$.

Também são utilizadas outras notações para matriz, além de parentêses, como colchetes ou duas barras.

Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está, e denotamos por uma letra minúscula com subíndice ij, com i indicando a linha e j a coluna. Por exemplo, na matriz:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

o elemento que está na primeira linha e terceira coluna é -4, isto é, $a_{13} = -4$.

3.2 Matrizes especiais

a) **Matriz linha:** é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo 3.2.1. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz linha do tipo 1×3.

b) **Matriz coluna:** é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo 3.2.2. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz coluna do tipo 3×1.

Observação: Matriz linha e matriz coluna, são basicamente nesta ordem, vetor linha e vetor coluna.

c) **Matriz nula:** é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo 3.2.3. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz nula do tipo 3×2.

Exemplo 3.2.4. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz nula do tipo 2×2.

d) **Matriz quadrada de ordem n:** é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, é uma matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplo 3.2.5. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 3, ou seja, do tipo 3×3.

Exemplo 3.2.6. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 2, ou seja, do tipo 2×2.

Nas matrizes quadradas temos duas diagonais, a diagonal principal e a diagonal secundária.

Diagonal principal: é o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, ou seja, é o conjunto $\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...a_{nn}\}$.

Exemplo 3.2.7. *Na matriz*

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 3 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix},$$

a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11} = 1,\ a_{22} = 4$ *e* $a_{33} = 2$.

Diagonal secundária: é o conjunto dos elementos que têm a soma dos dois índices igual a $n+1$, ou seja, é o conjunto $\{a_{ij} | i+j = n+1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ...a_{n1}\}$

Exemplo 3.2.8. *Na matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 3 & \boxed{4} & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a diagonal secundária é formada pelos elementos $a_{13} = 3,\ a_{22} = 4$ *e* $a_{31} = 0$.

e) **Matriz diagonal:** é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 3.2.9. *A matriz*

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal de ordem 3.

Exemplo 3.2.10. *A matriz nula de ordem* 3, *ou seja,*

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix},$$

também é uma matriz diagonal.

f) **Matriz identidade de ordem n:** é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Indica-se por I_n.

Exemplo 3.2.11. *A matriz*

$$I_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 3.

Exemplo 3.2.12. *A matriz*

$$I_4 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 4.

3.3 Operações de matrizes

3.3.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes A e B do mesmo tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B.

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo $m \times n$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo 3.3.1. *Consideremos duas matrizes A e B do tipo 2×3:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz $C = A + B$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, é

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+5 & 2+2 \\ 2+2 & 8+3 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 4 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz C assim obtida denomina-se soma da matriz A com a matriz B ou soma das matrizes A e B.

3.3.2 Matriz oposta de uma matriz A

Denomina-se matriz oposta de uma matriz A (representa-se -A) a matriz que somada com A dá como resultado uma matriz nula.

Exemplo 3.3.2.

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \text{ então a matriz oposta de } A \text{ é } -A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pois:}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.3 Subtração de matrizes

Sendo A e B duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada por $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B.

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo 3.3.3.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -3 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 13 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

3.3.4 Multiplicação de um número real por uma matriz

Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij} e α é um número real, então αA é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são αa_{ij}.

Exemplo 3.3.4. *Seja a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz $2A$ *é*

$$2A = 2\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 2.5 & 2.2 \\ 2.(-2) & 2.4 & 2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.5 Multiplicação de matrizes

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{ij})$ do tipo $n \times p$, o produto da matriaz A pela matriz B é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos.

A matriz C, produto de A por B, é denotada por AB.

Observe que só definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Além disso, notamos que o produto AB possui o número de linhas igual ao número de linhas de A e o número de colunas igual ao número de colunas de B.

Exemplo 3.3.5. *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad e \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A é uma matriz 3×2 e B é uma matriz 2×2, o número de colunas de A é igual ao número de linhas B; assim, está definido o produto AB, que será uma matriz 3×2, isto é:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3 + 2.6 & 3.1 + 2.2 \\ 5.3 + 0.6 & 5.1 + 0.2 \\ 1.3 + 4.6 & 1.1 + 4.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 15 & 5 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.3.6 Matriz transposta de uma matriz dada

Seja A uma matriz $m \times n$.

Denomina-se matriz transposta de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A.

Exemplo 3.3.6.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.3.7.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.3.8.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.4 Matriz de Vandermonde

Definição 3.4.1. *Chamamos matriz de Vandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & ... & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_4^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Isto é, as colunas de M são formadas por potências de mesma base, com expoente inteiro, variando desde 0 até $n-1$ (os elementos de cada coluna formam uma progressão geométrica cujo primeiro elemento é 1).

Os elementos da 2ª linha são chamados elementos característicos da matriz.

Exemplo 3.4.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.4.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 25 \\ 8 & 1 & -27 & 125 \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Sistemas Lineares

O objetivo deste capítulo é introduzir o estudo de sistemas lineares, sua definição, tipos, exemplos, representações gráficas e resoluções pelo método do escalonamento, para auxiliar na compreensão das aplicações do Capítulo 6 e das atividades propostas nos Capítulos 7 e 8. Este conteúdo é o tema principal deste trabalho. Para um maior aprofundamento podem ser consultadas as referências [11], [6], [13] e [18].

4.1 Equações Lineares

De modo geral, denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b,$$

na qual:

- $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ são as incógnitas;
- $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas;
- b é um número real chamado termo independente.

Dizemos que:

- $3x + 2y = 7$ é uma equação linear nas incógnitas x e y;
- $2x + 3y - 2z = 10$ é uma equação linear nas incógnitas x, y e z.

Pela definição, não são equações lineares:

- $xy = 10$;
- $x^2 + y = 6$;
- $x^2 - xy - yz + z^2 = 1$.

Na equação linear $3x + 2y = 18$, temos:

- o par ordenado $(4, 3)$ é uma solução da equação, pois $3.4 + 2.3 = 18$;
- o par ordenado $(6, 0)$ é uma solução da equação, pois $3.6 + 2.0 = 18$;
- o par ordenado $(5, 1)$ não é uma solução da equação, pois $3.5 + 2.1 \neq 18$.

Na equação $3x + y - 2z = 8$, temos:

- o terno ordenado $(2, 4, 1)$ é solução da equação, pois $3.2 + 4 - 2.1 = 8$;
- o terno ordenado $(0, 6, -1)$ é solução da equação, pois $3.0 + 6 - 2. - 1 = 8$;
- o terno ordenado $(5, -2, 3)$ não é solução da equação, pois $3.5 - 2 - 2.3 \neq 8$.

Generalizando, dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, dizemos que a n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução da equação se, e somente se, $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$.

4.2 Sistemas lineares

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

com $a_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, e $b_k,\ 1 \leq k \leq m$, números reais.

Uma solução do sistema acima é uma n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaz simultaneamente estas m equações. Dependendo do número de soluções, um sistema pode ser classificado como:

- sistema impossível (SI), se não tem solução;
- sistema possível e determinado (SPD), se tem apenas uma solução;
- sistema possível e indeterminado (SPI), se tem mais de uma de solução. Neste caso, pela Proposição 4.5.1, que vamos apresentar e demonstrar, o sistema tem uma infinidade de soluções.

Assim, temos o esquema da Figura 4.1.

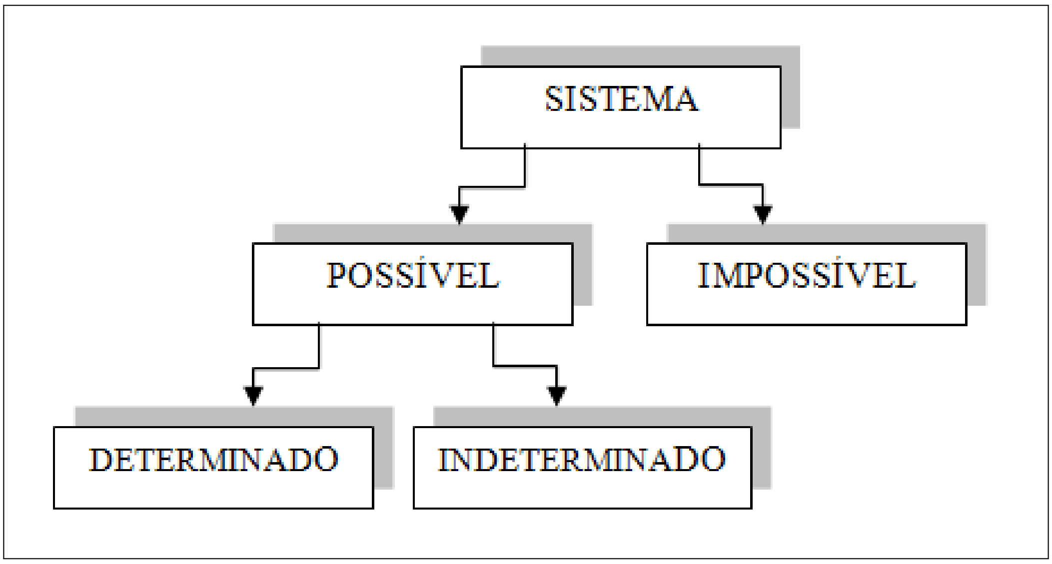


Figura 4.1: Classificação de Sistemas

4.3 Sistemas lineares homogêneos

Sistema linear homogêneo é todo aquele em que o termo independente de todas as equações é igual a zero. Um sistema linear homogêneo admite sempre a solução trivial, que consiste da solução em que todas as incógnitas são iguais a zero.

Exemplo 4.3.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

é homogêneo. Esse sistema admite a solução trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$*, entre infinitas outras soluções, tais como* $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$*,* $(x, y, z) = (-2, 0, -2)$*, etc.*

Exemplo 4.3.2. *O sistema*

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2a + 3b - 2c - d = 0 \\ -a - 2b + 3c + 2d = 0 \\ 3a - b + 2c - 3d = 0 \end{cases}$$

é homogêneo e admite apenas a solução trivial $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$*.*

4.4 Sistemas lineares na forma matricial

Podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ou $A.X = B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes.

Outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

que chamamos matriz ampliada do sistema. Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

4.5 Número de soluções de um sistema linear

Quanto ao número de soluções de um sistema linear, existem apenas três possibilidades, ou ele não tem solução (SI), ou tem uma única solução (SPD), ou ele tem infinitas soluções (SPI).

Proposição 4.5.1. *Se um sistema linear possui duas soluções distintas, então ele possui infinitas soluções.*

Demonstração. Seja $A.X = B$ um sistema linear dado e X_1 e X_2 duas soluções distintas deste sistema linear. Assim, $X_1 \neq X_2$, $A.X_1 = B$ e $A.X_2 = B$.
Sejam $X_\lambda = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$, para $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{array}{rcl} A.X_\lambda & = & A.[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2] \\ & = & A.[(1-\lambda)X_1] + A.[\lambda X_2] \\ & = & (1-\lambda)A.X_1 + \lambda A.X_2 \\ & = & (1-\lambda)B + \lambda B \\ & = & B - \lambda B + \lambda B \\ & = & B. \end{array}.$$

Portanto, X_λ é solução do sistema $A.X = B$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, se um sistema possui duas soluções distintas, então possui uma infinidade de soluções.

□

4.6 Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, os sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ 3x & + & 2y & = & 12 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 7 \\ x & + & 3y & = & 11 \end{array}\right.$$

são equivalentes, pois quando resolvidos, ambos apresentam o mesmo conjunto solução $S = \{(2,3)\}$.

4.7 Escalonamento de sistemas lineares

Dado um sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & ... & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

no qual em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, dizemos que o sistema está na forma escalonada, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro não nulo, aumenta de equação para equação.

Ou mais precisamente, considerando um sistema $m \times n$, dizemos que ele está escalonado quando a matriz dos coeficientes tiver, em cada uma de suas linhas, o primeiro elemento não nulo situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, linhas com todos os elementos nulos devem estar abaixo de todas as outras. Observando as equações do sistema escalonado, percebe-se que, em cada linha considerada, a primeira incógnita com coeficiente não nulo está sempre à esquerda da primeira incógnita com coeficiente não nulo da linha seguinte.

Exemplo 4.7.1. *O sistema*

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ \quad\; 3y + 2z = 1 \\ \qquad\quad 4z = 8 \end{cases}$$

está na forma escalonada, pois o primeiro coeficiente não nulo da primeira equação é o coeficiente 1 *da incógnita* x*, que aparece à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da segunda equação que é o coeficiente 3 da incógnita* y *e que, por sua vez, aparece à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da terceira equação que é* 4*, sendo o coeficiente da incógnita* z*.*

Exemplo 4.7.2. *O sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 9 \\ \qquad\quad 4z + 5t = 10 \end{cases}$$

está na forma escalonada, pois o primeiro coeficiente não nulo da primeira equação é o coeficiente 1 *da incógnita* x*, que aparece à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da segunda equação que é o coeficiente 4 da incógnita* z*.*

4.7.1 Resolução de sistema na forma escalonada

Para a resolução de sistema na forma escalonada, precisamos considerar dois tipos:

1º tipo: número de equações é igual ao número de incógnitas

Nesse caso o sistema terá a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

A solução pode ser obtida resolvendo o sistema por substituição. Partindo da última equação, obtemos o valor de x_n, em seguida, substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1}. Repetindo este procedimento sucessivamente, vamos obtendo x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_3, x_2, x_1.

A matriz dos coeficientes do sistema escalonado é a matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4.7.3. *Consideremos o sistema escalonado*

$$\begin{cases} a + 2b - c + 3d = 6 & (I) \\ \quad b + 3c - d = -5 & (II) \\ \quad\quad 5c + 7d = 21 & (III) \\ \quad\quad\quad 2d = 6 & (IV) \end{cases}$$

De (IV), temos $2d = 6 \Rightarrow d = 3$.
De (III), temos $5c + 7d = 21 \Rightarrow 5c + 7.3 = 21 \Rightarrow c = 0$.
De (II), temos $b + 3c - d = -5 \Rightarrow b + 3.0 - 3 = -5 \Rightarrow b = -2$.
De (I), temos $a + 2b - c + 3d = 6 \Rightarrow a + 2.(-2) - 0 + 3.3 = 6 \Rightarrow a = 1$.
Portanto, a solução do sistema é $(1, -2, 0, 3)$.

2º tipo: número de equações é menor do que o número de incógnitas

Nesse caso o sistema terá a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1r}x_r + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{2j}x_j + ... + a_{2r}x_r + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad\quad a_{mr}x_r + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com $m < n$, $j \geq 2$ e $r > j$.

Para resolvermos tal sistema, podemos tomar os termos das incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações e passá-los para o segundo membro. As incógnitas desses termos são chamadas variáveis livres. Observando o Exemplo 4.7.4, verificamos que a única variável livre é z, pois os termos em z não aparecem no começo de nenhuma das equações. Chama-se grau de *indeterminação* de um sistema o número de suas variáveis livres.

Exemplo 4.7.4. *Seja o sistema*

$$\begin{cases} x - y + \boxed{z} = 4 \\ \quad y - \boxed{z} = 2 \end{cases}.$$

Como os termos em z não aparecem no começo de nenhuma das duas equações, passando esses termos para o 2º membro de cada uma das equações, teremos o sistema

$$\begin{cases} x - y = 4 - z \\ \quad y = 2 + z \end{cases}.$$

O novo sistema assim obtido pode ser visto como sendo um sistema contendo apenas as incógnitas do primeiro membro das equações, ou sejam, x e y. Neste caso, atribuindo valores à incógnita z do 2º membro, temos um sistema do 1º tipo. Portanto, resolvendo-o, obtemos soluções do sistema.
Fazendo $z = \alpha$, *em que* α *é um número real, temos*

$$\begin{cases} x - y = 4 - \alpha & (I) \\ \quad y = 2 + \alpha & (II) \end{cases}$$

De (II), temos $y = 2 + \alpha$
De (I), temos $x - y = 4 - \alpha \Rightarrow x - 2 - \alpha = 4 - \alpha \Rightarrow x = 6$.
Portanto, as soluções do sistema são as triplas ordenadas do tipo $(6, 2 + \alpha, \alpha)$ *em que* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Agora para cada valor atribuído a α*, teremos uma solução para o sistema. Assim, esse sistema possui uma infinidade de soluções, ou seja, o sistema é possível e indeterminado. O grau de indeterminação desse sistema é* 1 *e algumas soluções são:*

Para $\alpha = 1 \Rightarrow (6, 3, 1)$.
Para $\alpha = 2 \Rightarrow (6, 4, 2)$.
Para $\alpha = 0 \Rightarrow (6, 2, 0)$.

4.8 Processo para escalonamento de um sistema linear

Dado um sistema, podemos obter um sistema equivalente por meio de algumas operações elementares. Denotando L_i, a equação da i-ésima linha de um sistema linear, a seguir apresentamos operações elementares que podemos aplicar em sistemas lineares e exemplos.

- Trocar as posições de equações.

  Exemplo 4.8.1. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - 5z = 0 \end{cases},$$

  obter um sistema equivalente trocando as posições da primeira equação (L_1) *e da segunda equação* (L_2)*.*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x - 3y - 5z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

- Multiplicar todos os termos de uma equação pelo mesmo número real diferente de zero. O sistema obtido possui o mesmo conjunto solução do sistema inicial, ou seja, são equivalentes. (Ver demonstração na referência [11].)

  Exemplo 4.8.2. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - 5z = 0 \end{cases},$$

  obter um sistema equivalente substituindo a segunda equação (L_2) *pela equação obtida multiplicando por* 2 *todos os seus termos* ($2L_2$)*.*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow{2L_2 \rightarrow L_2} \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 6y - 10z = 0 \end{cases}$$

- Multiplicar cada termo de uma equação pelo mesmo número real diferente de zero e somar cada um dos resultados ao termo correspondente de outra equação que será substituída pela equação resultante dessa operação. Neste caso, também, o sistema obtido possui o mesmo conjunto solução do sistema inicial. (Ver demonstração na referência [11].)

Exemplo 4.8.3. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 3y & - & 5z & = & 0 \end{cases},$$

obter um sistema equivalente substituindo a segunda equação (L_2) pela soma da primeira equação multiplicada por -1 e a segunda equação ($-L_1 + L_2$).

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 3y & - & 5z & = & 0 \end{cases} \xrightarrow{-L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 5y & - & 8z & = & -1 \end{cases}$$

Quando um sistema linear não está escalonado, podemos obter um sistema escalonado equivalente a ele, utilizando essas três operações elementares.

Para escalonarmos um sistema, seguimos vários passos.

- 1º Passo

  Colocamos como 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja diferente de zero.

- 2º Passo

  Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita de todas as equações, com exceção da 1ª equação, substituindo a i-ésima equação ($i \geq 2$) pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por um número conveniente.

- 3º Passo

  Deixamos de lado a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes.

- 4º Passo

  Deixamos de lado as duas primeiras equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado.

Exemplo 4.8.4. *Vamos escalonar o sistema*

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -4 \end{cases}.$$

Para isso, realizamos as operações que seguem:

Substituímos a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -2.

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -4 \end{cases} \xrightarrow{-2L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -15 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -4 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -15 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -4 \end{array}\right. \xrightarrow{-3L_1+L_3\to L_3} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -15 \\ & - & 7y & - & 5z & = & -31 \end{array}\right.$$

Multiplicamos a 2ª equação por $-\dfrac{1}{3}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -15 \\ & - & 7y & - & 5z & = & -31 \end{array}\right. \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_2\to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & - & 7y & - & 5z & = & -31 \end{array}\right.$$

Finalmente, substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por 7, e, assim, obtemos o sistema escalonado.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & - & 7y & - & 5z & = & -31 \end{array}\right. \xrightarrow{7L_2+L_3\to L_3} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

4.9 Sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

Sabemos que uma solução de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas é um par ordenado (x, y) de números reais que satisfaz simultaneamente as duas equações, como no Exemplo 4.9.1.

Exemplo 4.9.1. *A solução do sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$$

é o par ordenado $(x, y) = (3, 2)$. *Os valores* $x = 3$ *e* $y = 2$ *satisfazem simultaneamente as duas equações, pois* $3 + 2 = 5$ *e* $3 - 2 = 1$.

Quando as equações são consideradas isoladamente, cada uma tem uma infinidade de soluções, como no Exemplo 4.9.2.

Exemplo 4.9.2. *A equação*

$$x + y = 10$$

tem uma infinidade de soluções, ou seja, infinitos pares ordenados (x, y) *que satisfazem a equação, como por exemplo* $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, *etc.*

4.9.1 Classificação de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

Como sabemos, um sistema linear 2×2 e duas incógnitas pode ser classificado em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível. Essa classificação pode ser feita apenas analisando suas equações.

- Se **não** há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas, o sistema é possível e determinado (SPD).

  Exemplo 4.9.3. *Seja o sistema*

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 4 \\ x & - & 4y & = & 2 \end{cases}.$$

  Os coeficientes das mesmas incógnitas nas duas equações não são proporcionais: 3 é o triplo de 1 e -2 é metade de -4. Então o sistema é possível e determinado.

- Se há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas e essa proporcionalidade se mantém nos termos independentes, o sistema é possível e indeterminado (SPI). Equações assim são chamadas equivalentes.

  Exemplo 4.9.4. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 3x & + & y & = & -2 \\ -6x & - & 2y & = & 4 \end{cases}.$$

  Nesse caso, há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas e essa proporcionalidade se mantém nos termos independentes: -6 está para 3, assim como -2 está para 1, assim como 4 está para -2. Então, o sistema é possível e indeterminado.

- Se há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas e essa proporcionalidade **não** se mantém nos termos independentes, o sistema é impossível (SI). Dizemos que equações assim são imcompatíveis.

  Exemplo 4.9.5. *No sistema*

$$\begin{cases} 2x & - & 6y & = & 5 \\ 3x & - & 9y & = & 1 \end{cases},$$

  os coeficientes das mesmas incógnitas nas duas equações são proporcionais, porém essa proporcionalidade não se mantém nos termos independentes: 2 está para 3 assim como -6 está para -9, porém não como 5 está para 1. Então o sistema é impossível.

4.10 Representação gráfica de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

Sob o ponto de vista geométrico uma equação da forma $ax + by = c$ representa uma reta, conforme Proposição 2.10.2 e Observação 2.10.3. Assim, se marcarmos todos os pontos (x, y)

do $\mathbb{R}^2$, em um sistema cartesiano, que satisfazem à esta equação, o gráfico resultante é uma reta. Se tivermos duas equações deste tipo, teremos duas retas no plano. Consequentemente, as soluções de um sistema linear de duas incógnitas são representadas pelos pontos em comum às duas retas.

Ao representar graficamente um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, precisamos representar graficamente cada equação. E, assim, a representação gráfica do sistema, consiste em duas retas, que podem ser:

- Duas retas concorrentes;
- Duas retas coincidentes;
- Duas retas paralelas.

Para cada caso acima, temos uma interpretação distinta:

- No primeiro caso, se as duas retas são concorrentes, existirá um ponto de intersecção, ou seja, um ponto comum, que representará a solução única do sistema, então, o mesmo será possível e determinado (SPD);
- No segundo caso, se as duas retas são coincidentes, o sistema apresentará uma infinidade de soluções, então o mesmo será possível e indeterminado (SPI);
- No terceiro caso, se as duas retas são paralelas, o sistema não apresentará solução, então o mesmo será impossível (SI).

Exemplo 4.10.1. *A representação gráfica do sistema*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$$

do Exemplo 4.9.3 consiste de duas retas concorrentes. Neste caso, o sistema tem uma única solução que é o ponto de interseção das duas retas, como podemos ver na Figura 4.2 e, portanto, o sistema é possível e determinado.

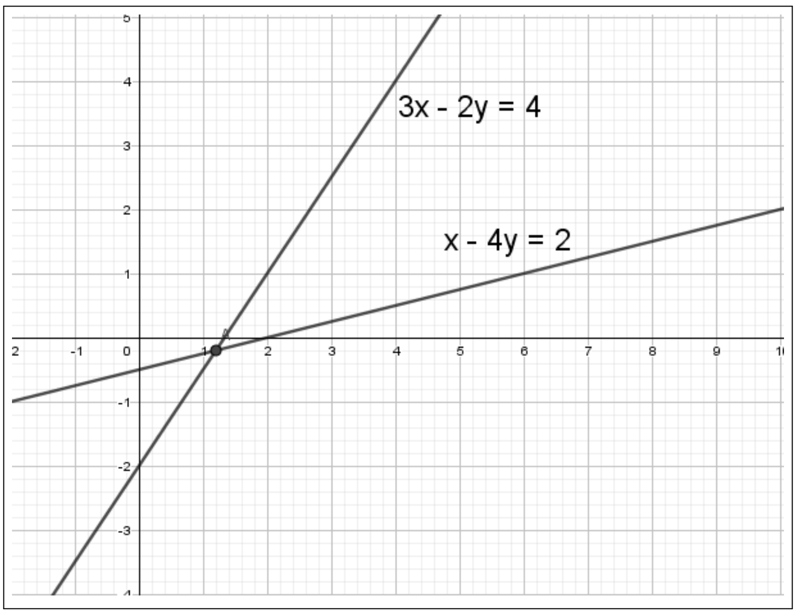


Figura 4.2: Sistema possível e determinado

Exemplo 4.10.2. *A representação gráfica do sistema*

$$\begin{cases} 2x & - & 6y & = & 5 \\ 3x & - & 9y & = & 1 \end{cases}$$

do Exemplo 4.9.5 consiste de duas retas paralelas. Assim, como as duas retas não tem pontos em comum, como mostra a Figura 4.3, o sistema não tem solução e, portanto, é um sistema impossível.

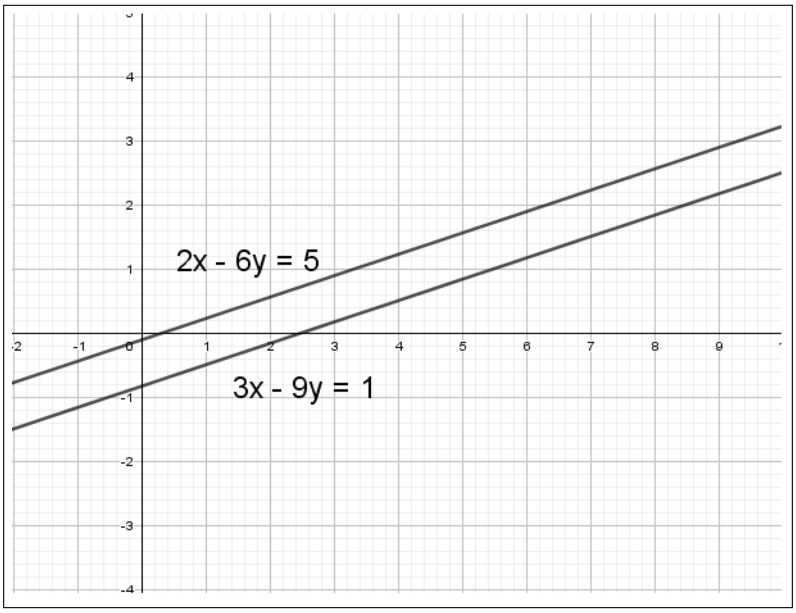


Figura 4.3: Sistema impossível

Exemplo 4.10.3. *A representação gráfica do sistema*

$$\begin{cases} 3x & + & y & = & -2 \\ -6x & - & 2y & = & 4 \end{cases}$$

do Exemplo 4.9.4 consiste de duas retas coincidentes, como na Figura 4.4. Assim, todos os pontos dessa reta satisfazem as duas equações e o conjunto solução do sistema é formado por todos os pontos da reta. Portanto, o sistema é possível e indeterminado.

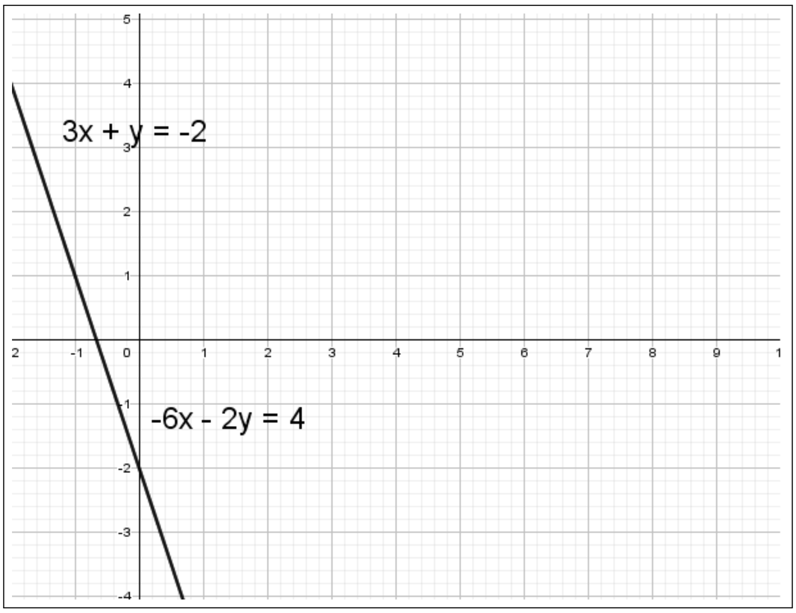


Figura 4.4: Sistema possível indeterminado

4.11 Sistemas lineares de duas equações e três incógnitas

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \end{cases}$$

de duas equações com três incógnitas. Pela Proposição 2.12.2 e Observação 2.12.3, geometricamente, as equações $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ definem planos π_1 e π_2, respectivamente. O termo ordenado (x, y, z) é solução desse sistema quando o ponto $P(x, y, z)$ pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2$, ou seja P está nos dois planos.

Associadas a este sistema há duas matrizes: a matriz dos coeficientes e a matriz ampliada.

Matriz dos coeficientes: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

4.12 Representação gráfica de sistemas lineares de duas equações e três incógnitas

Toda equação linear com três incógnitas $ax + by + cz = d$ representa um plano, conforme Proposição 2.12.2, isto é, se marcarmos todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem à esta equação no sistema cartesiano, o gráfico resultante é um plano (são infinitos valores).

Quando temos duas equações lineares com três incógnitas, temos dois planos no espaço. As soluções do sistema constituído por essas equações são representadas pelos pontos em comum aos dois planos. Existem três possibilidades para as posições relativas dos dois planos. Elas são:

1ª possibilidade: os dois planos são paralelos e o sistema não tem solução.

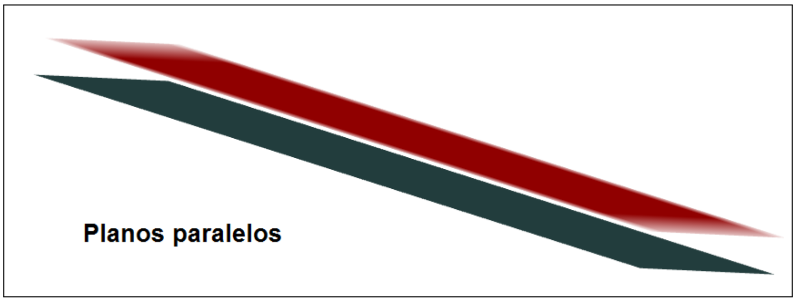


Figura 4.5: Planos paralelos

2ª possibilidade: os dois planos são concorrentes e o conjunto solução do sistema é uma reta.

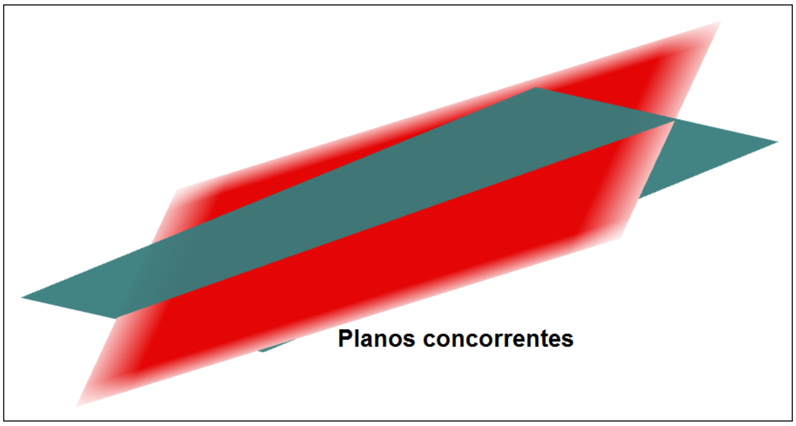


Figura 4.6: Planos concorrentes

3ª possibilidade: os dois planos são coincidentes e o conjunto solução do sistema é o próprio plano.

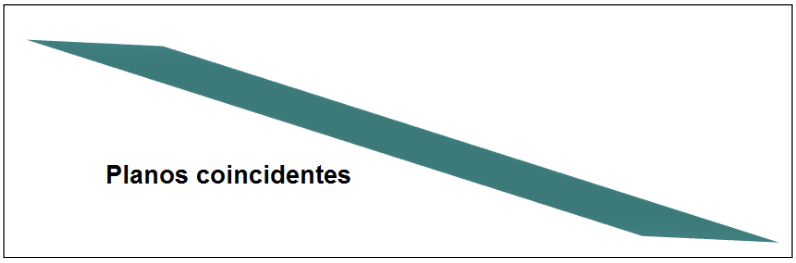


Figura 4.7: Planos coincidentes

4.13 Sistemas lineares de três equações e três incógnitas

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{cases}$$

de três equações com três incógnitas. Conforme Proposição 2.12.2, geometricamente, as equações $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ e $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ definem os planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente. O termo ordenado (x, y, z) é solução desse sistema quando o ponto $P(x, y, z)$ pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja P está simultaneamente nos três planos.

Associadas a este sistema há duas matrizes: a matriz dos coeficientes e a matriz ampliada.

Matriz dos coeficientes: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

4.14 Representação gráfica de sistemas lineares de três equações e três incógnitas

Quando temos três equações lineares com três incógnitas, temos três planos no espaço. As soluções do sistema são representadas pelos pontos em comum aos três planos. Existem oito possibilidades para as posições relativas dos três planos. Elas são:

1ª possibilidade: os três planos coincidem.

Neste caso, todos os pontos $P = (x, y, z)$ de π_1 são soluções do sistema. Há portanto, uma infinidade de soluções para o sistema. O sistema é possível e indeterminado (SPI).

Exemplo 4.14.1. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & - & 4z & = & 4 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & - & 4z & = & 4 \end{cases} \xrightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -4L_1+L_3 \to L_3}} \begin{cases} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{cases}$$

Nas linhas 2 e 3, após o escalonamento, ficam apenas zeros, sobrando apenas a primeira linha que representa a equação $x + y - z = 1$. Como são 3 incógnitas e apenas uma equação, temos *um sistema possível e indeterminado (SPI).*

Podemos observar no sistema dado que $L2 = 2L1$ *e* $L3 = 4L1$. *Assim,* L_1, L_2 *e* L_3 *representam a mesma equação e o mesmo plano e, portanto, os três planos são coincidentes, conforme Seção 2.14.*

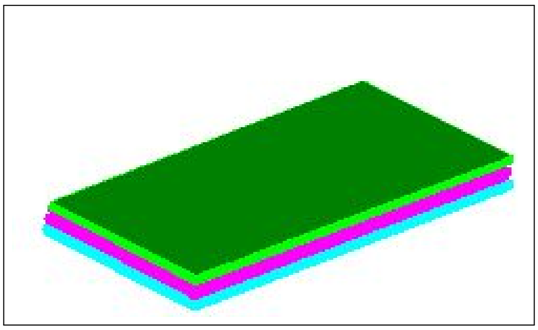


Figura 4.8: Três planos coincidentes

2ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles.

Neste caso, o sistema é impossível, não possui solução (SI).

Exemplo 4.14.2. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases} \xRightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -4L_1+L_3 \to L_3}} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$$

Na linha 2, após o escalonamento, ficam apenas zeros, sobrando a primeira linha que representa a equação $x + y - z = 1$ *e a terceira linha que representa a equação* $0x + 0y + 0z = 3$, *o que torna o sistema impossível, pois para quaisquer valores de* x, y *e* z, $0x + 0y + 0z \neq 3$.

Podemos observar no sistema dado que $L2 = 2L1$ *e, assim,* L_1 *e* L_2 *representam a mesma equação e o mesmo plano. Temos desta forma, dois planos coincidentes. Por outro lado, os coeficientes de* x, y *e* z, *na linha 3 são iguais a quatro vezes os coeficientes correspondentes da linha 1, e o mesmo não ocorrre com os termos independentes. Portanto, temos na linha 3 a equação de um plano paralelo aos planos das linhas 1 e 2, conforme Seção 2.14.*

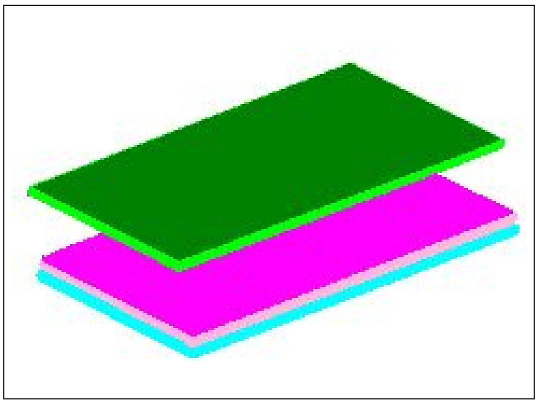


Figura 4.9: Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles

3ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

Neste caso, todos os pontos $P = (x, y, z)$ da reta são soluções. Há, então, uma infinidade de soluções e o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Exemplo 4.14.3. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases} \xrightarrow[-4L_1+L_3 \to L_3]{-2L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 3z = 0 \end{cases}$$

Na linha 2, após o escalonamento, ficam apenas zeros, sobrando a primeira linha que representa a equação $x+y-z = 1$ e a terceira linha que representa a equação $0x+0y+3z = 0$, o que torna o sistema possível e indeterminado, pois o número de equações é menor do que o número de incógnitas. Da equação 3, temos $3z = 0$, logo $z = 0$. Substituindo na primeira equação temos $x+y+0 = 1$ e, portanto, $x = 1-y$. Desta forma o conjunto solução é $S = \{(1 - y, y, 0) | \, y \in \mathbb{R}\}$.

Podemos observar no sistema dado que $L2 = 2L1$, assim, L_1 e L_2 representam a mesma equação e o mesmo plano. Logo, temos dois planos coincidentes, conforme Seção 2.14. A equação 3 não pode ser obtida a partir da 1 por meio da multiplicação por um escalar, o que implica que os correspondentes planos não são coincidentes. Também, na equação 3, os coeficientes das incógnitas x, y e z não podem ser obtidos multiplicando-se os correspondentes coeficientes da equação 1 por um mesmo número real. Assim, pela Observação 2.12.3, seus respectivos vetores normais não são paralelos e, portanto, os correspondentes planos são concorrentes em uma reta.

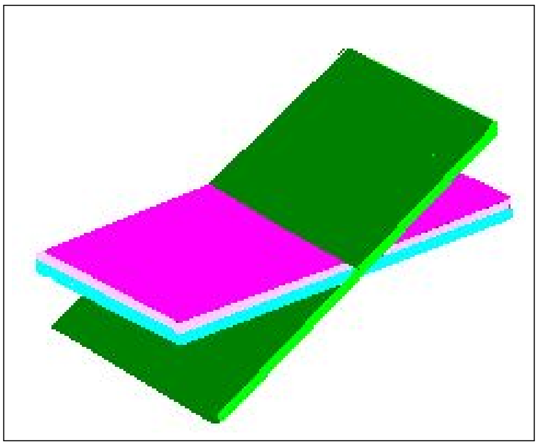


Figura 4.10: Dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta

4ª possibilidade: os planos são paralelos dois a dois.

Neste caso, o sistema não possui solução e, portanto, é impossível (SI).

Exemplo 4.14.4. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases} \xRightarrow[-4L_1+L_3 \to L_3]{-2L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$$

Após o escalonamento, na linha 2 a equação $0x + 0y + 0z = 1$ *não admite solução. Desta forma o sistema é impossível.*

Podemos observar no sistema dado que os coeficientes de x, y *e* z *na linha 3 são iguais a quatro vezes os correspondentes da linha 1, e duas vezes os da linha 2, mas o mesmo não ocorre com os correspondentes termos independentes. Desta forma os três planos são paralelos, não existindo ponto de interseção entre eles e, portanto, o sistema é impossível (SI), conforme Seção 2.14.*

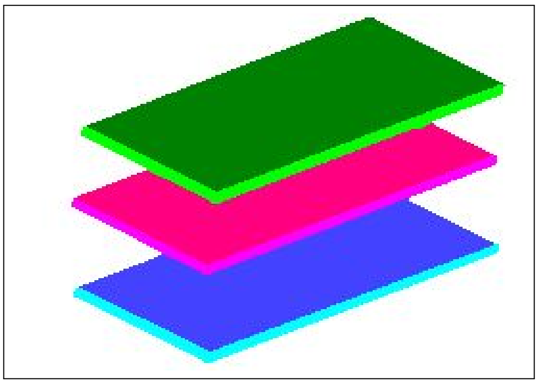


Figura 4.11: Os planos são paralelos dois a dois

5ª possibilidade: dois planos são paralelos e o outro os intersecta segundo retas paralelas r e s.

Neste caso, supondo que os planos π_1 e π_2, representantes da primeira e da segunda equações, são paralelos, temos $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ e, portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$, com π_3 o plano que representa a terceira equação. Desta forma, o sistema não possui solução e, portanto, é impossível (SI).

Exemplo 4.14.5. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases} \xRightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -4L_1+L_3 \to L_3}} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 3z = 0 \end{cases}$$

Na linha 2, do sistema escalonado, a equação $0x + 0y + 0z = 1$ não admite solução, o que torna o sistema impossível.

Podemos observar no sistema inicial que os os coeficientes de x, y e z da linha 2 são iguais a duas vezes os coeficientes da linha 1, o que não ocorre com os termos independentes correspondentes. Desta forma os dois planos π_1 e π_2, definidos pela primeira e segunda equações, são paralelos. Com isto, já podemos concluir que o sistema não tem solução. Mas, podemos notar também que L_3 não é múltiplo de L_1 e nem de L_2, o que implica que os planos π_3 e π_1 não são coincidentes, assim como, π_3 e π_2. Além disso, sendo $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 2, -2)$ e $u_3 = (4, 4, -1)$ os vetores normais de π_1, π_2 e π_3, respectivamente, notamos que u_3 não é múltiplo de u_1 e u_3 não é múltiplo de u_2, logo, os planos π_3 e π_1 não são paralelos, assim como, π_3 e π_2. Portanto, concluímos que os planos π_3 e π_1 são concorrentes em uma reta r, assim como, os planos π_3 e π_2 são concorrentes em uma reta s.
Como $r \subset \pi_1$ e $s \subset \pi_2$ e os planos π_1 e π_2 são paralelos, temos r e s paralelas.

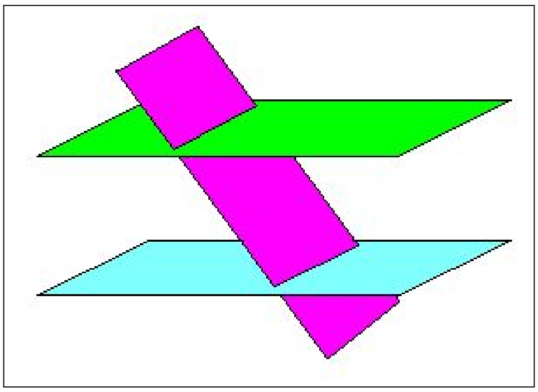


Figura 4.12: Dois planos são paralelos e o outro os intersecta segundo retas paralelas r e s.

6ª possibilidade: os três planos são distintos e têm uma reta em comum.

Neste caso, todos os pontos $P = (x, y, z)$ da reta são soluções. Desta forma, há uma infinidade de soluções e o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Exemplo 4.14.6. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases} \xRightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -4L_1+L_3\to L_3}} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x - 3y - z = 3 \\ 0x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

Podemos verificar, após o escalonamento, que as linhas 2 e 3 são iguais. Logo, o número de equações é menor do que o número de incógnitas, o que implica que o sistema é possível e indeterminado. Pela equação $0x - 3y - z = 3$, temos $z = -3y - 3$ e substituindo na equação $x + y + z = 1$ obtemos $x = 1 - y - z = 1 - y + 3y + 3 = 2y + 4$. Portanto o conjunto solução do sistema é $S = \{(2y + 4, y, -3y - 3)|y \in \mathbb{R}\}$, ou seja, S é uma reta.

No sistema inicial, não temos nenhum par de linhas múltiplas entre si. Assim, não temos nenhum par de planos coincidentes, mais precisamente, todos os planos são distintos dois a dois. Sendo $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ e $u_3 = (4, 1, 3)$ os vetores normais de π_1, π_2 e π_3, respectivamente, é fácil ver que não temos nenhum par de vetores normais múltiplos entre si. Logo, nenhum par de planos são paralelos e as interseções de pares de planos são retas.
Sejam,

$$\pi_1 \cap \pi_2 = r, \qquad \pi_1 \cap \pi_3 = s \qquad \text{e} \qquad \pi_2 \cap \pi_3 = t.$$

Como, por escalonamento, já sabemos que o conjunto solução é uma reta, concluímos que as três retas r, s e t são coincidentes e representam o conjunto solução do sistema.

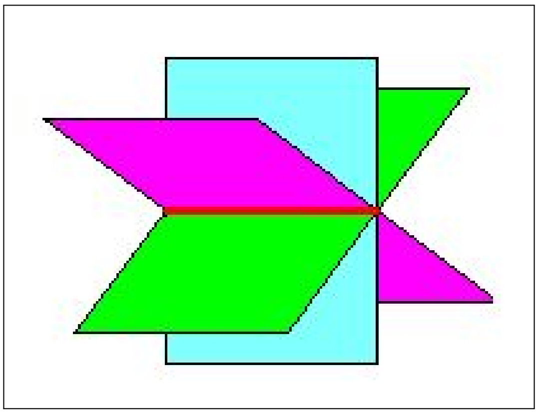


Figura 4.13: Os três planos são distintos e têm uma reta em comum.

7ª possibilidade: os três planos se intersectam dois a dois segundo 3 retas paralelas duas a duas.

Exemplo 4.14.7. *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 5x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 9x & + & 3y & + & 5z & = & 5 \end{array}\right. \xrightarrow[-9L_1+L_3\to L_3]{-5L_1+L_2\to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 0x & - & 3y & + & 16z & = & -3 \\ 0x & - & 6y & + & 32z & = & -4 \end{array}\right.$$

Podemos verificar, após o escalonamento, que os coeficientes de x, y e z na linha 3 são iguais a duas vezes os correspondentes da linha 2, mas o mesmo não ocorre com os termos independentes, o que implica que o sistema é impossível.

Fazendo uma análise análoga a do exemplo da possibilidade anterior, concluímos que nenhum par de planos são paralelos e as interseções de pares de planos são retas.
E, portanto,

$$\pi_1 \cap \pi_2 = r, \qquad \pi_1 \cap \pi_3 = s \qquad e \qquad \pi_2 \cap \pi_3 = t.$$

Como, por escalonamento, já sabemos que o conjunto solução é vazio, podemos verificar que as três retas r, s e t são paralelas duas a duas.

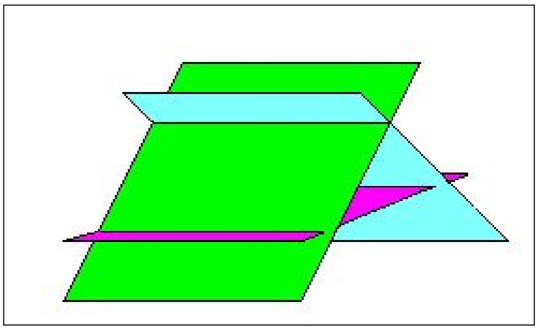


Figura 4.14: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas duas a duas.

8ª possibilidade: os três planos têm um único ponto em comum.

Neste caso, o sistema é possível e determinado (SPD).

Exemplo 4.14.8. *Resolver o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 4x & + & 7y & - & z & = & 13 \end{array}\right.$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 4x & + & 7y & - & z & = & 13 \end{array}\right. \xrightarrow[-4L_1+L_3\to L_3]{-2L_1+L_2\to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 0x & - & y & + & 10z & = & -3 \\ 0x & - & y & + & 11z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & - & y & + & 10z & = & -3 \\ & - & y & + & 11z & = & -3 \end{array}\right. \xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & - & y & + & 10z & = & -3 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Após o escalonamento, na linha 3 temos a equação $z = 0$. *Substituindo na equação da linha 2,* $-y + 10z = -3$, *obtemos que* $y = 3$. *Depois, substituindo os valores de* $z = 0$ *e* $y = 3$, *na equação da linha 1,* $x + 2y - 3z = 4$, *obtemos o valor de* $x = -2$. *Assim sendo, o sistema tem solução única e, portanto, o conjunto solução é* $S = \{(-2, 3, 0)\}$.

De modo análogo aos dois exemplos anteriores, concluímos que nenhum par de planos são paralelos e as interseções de pares de planos são retas. E, assim, sabendo que a solução é única, concluímos que essas 3 retas são concorrentes no ponto $(-2, 3, 0)$.

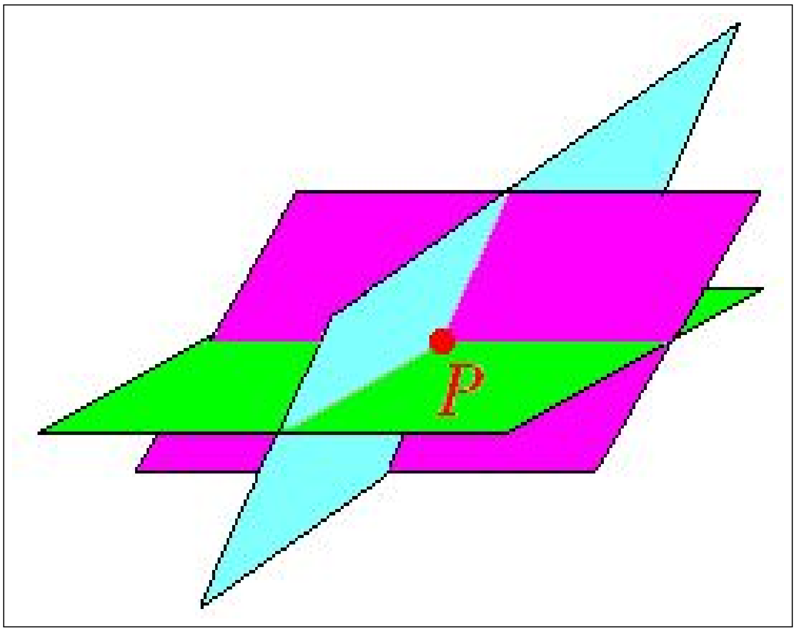


Figura 4.15: Os três planos têm um único ponto em comum.

4.15 Escalonamento - Interpretação Geométrica

Nesta seção, resolvemos por escalonamento dois sistemas lineares, um possível e determinado e outro possível e indeterminado. Apresentamos as suas representações geométricas, assim como, de todos os sistemas lineares equivalentes a cada sistema, obtidos a cada operação elementar aplicada nas suas equações. Analisamos e interpretamos geometricamente o efeito nos planos de cada operação elementar aplicada nas equações dos sistemas.

4.15.1 Sistema possível e determinado

Denotamos por L_i a equação da i-ésima linha do sistema linear.

Seja o sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

A Figura 4.16 mostra os três planos do sistema linear dado, as retas de interseção 2 a 2 desses planos e o ponto P na interseção dos três planos, ou seja, P é a solução do sistema.

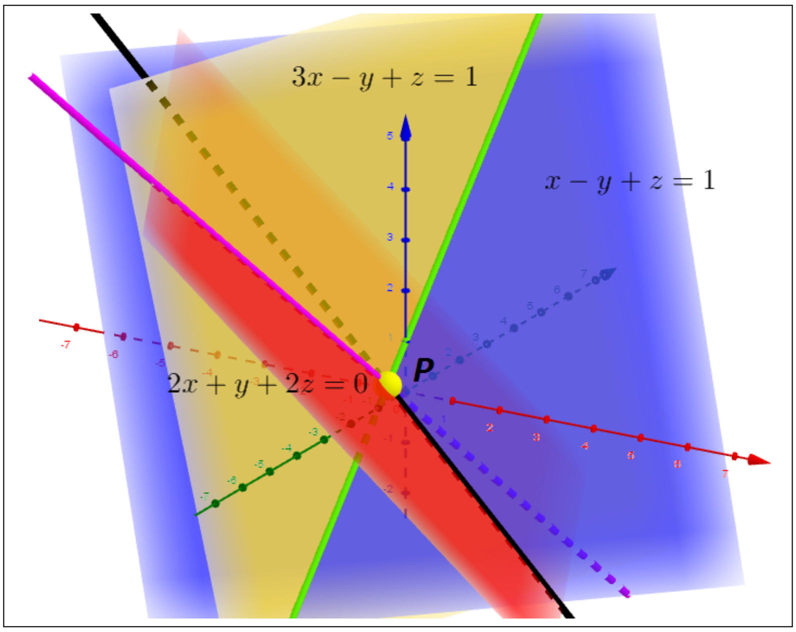


Figura 4.16: Representação geométrica do sistema dado S.

A seguir, por meio de operações elementares sobre as equações do sistema linear S, obtemos a sequência de sistemas equivalentes S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 e para cada S_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, apresentamos a representação geométrica dos seus planos.

Passo 1: $-2L_1 + L_2 \to L_2$

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & & & = & -2 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

A Figura 4.17 mostra os planos de S_1, assim como, as interseções 2 a 2 desses planos e o ponto P que pertence aos três planos. Note que as retas de interseção 2 a 2 dos planos podem mudar, mas o ponto P é o mesmo e é a solução de S_1.

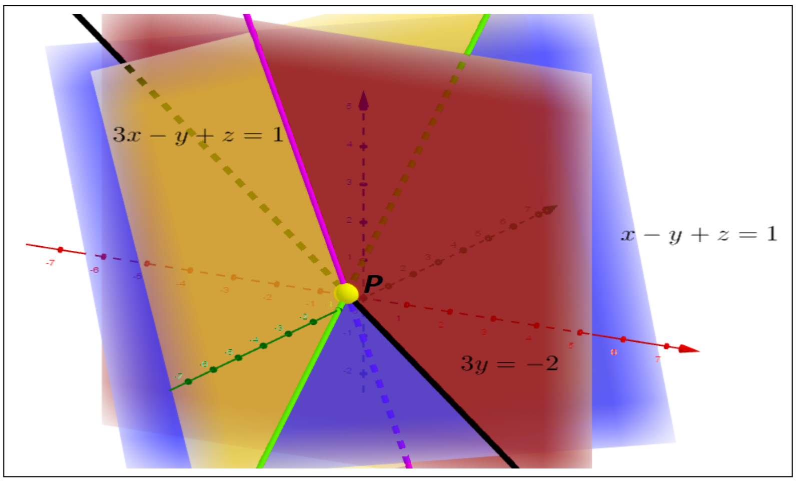


Figura 4.17: Representação geométrica do sistema S_1.

Passo 2: $-3L_1 + L_3 \rightarrow L_3$

$$S_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y = -2 \\ 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

A Figura 4.18 mostra os planos de S_2, assim como, as interseções 2 a 2 desses planos e o ponto P que pertence aos três planos. Note que as retas de interseção 2 a 2 dos planos podem mudar, mas o ponto P é o mesmo e também é a solução de S_2.

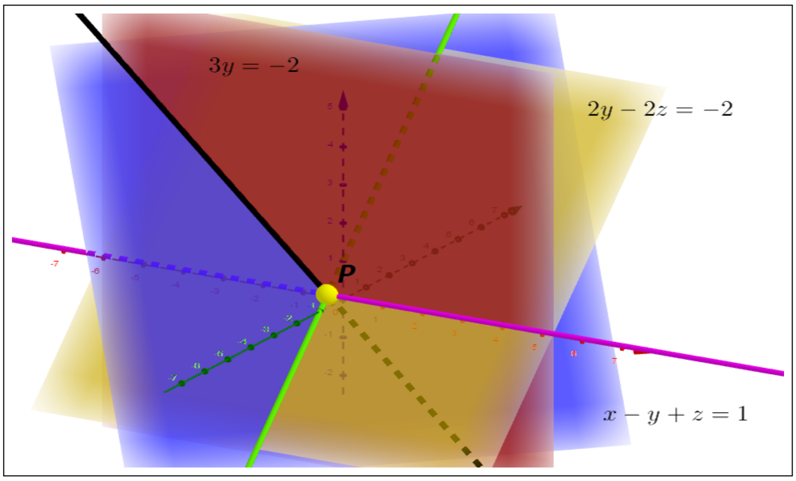


Figura 4.18: Representação geométrica do sistema S_2.

Passo 3: $L_3/2 \rightarrow L_3$ e, a seguir, $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$S_3 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3y = -2 \end{cases}$$

Passo 4: $-3L_2 + L_3 \rightarrow L_3$

$$S_4 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3z = 1 \end{cases}$$

A Figura 4.19 mostra os planos de S_4, assim como, as interseções 2 a 2 desses planos e o ponto P que pertence aos três planos. O ponto P é também a solução de S_4. Note que o plano $3z = 1$ é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0, 0, \frac{1}{3})$.

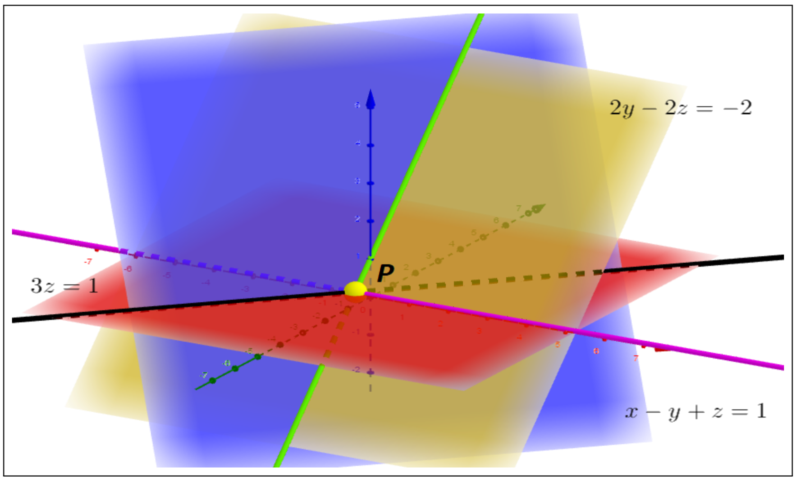


Figura 4.19: Representação geométrica do sistema S_4.

Passo 5: $L_3/3 \to L_3$

$$S_5 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad\ \ y - z = -1 \\ \qquad\quad\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Passo 6: $L_3 + L_2 \to L_2$

$$S_6 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad\ \ y \qquad = -\dfrac{2}{3} \\ \qquad\quad\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A Figura 4.20 mostra os planos de S_6, as interseções 2 a 2 desses planos e a solução P do sistema. Note que o plano $z = \dfrac{1}{3}$ é paralelo ao plano xy e passa pelo ponto $(0, 0, \dfrac{1}{3})$ e o plano $y = -\dfrac{2}{3}$ é paralelo ao plano xz passando pelo ponto $(0, -\dfrac{2}{3}, 0)$.

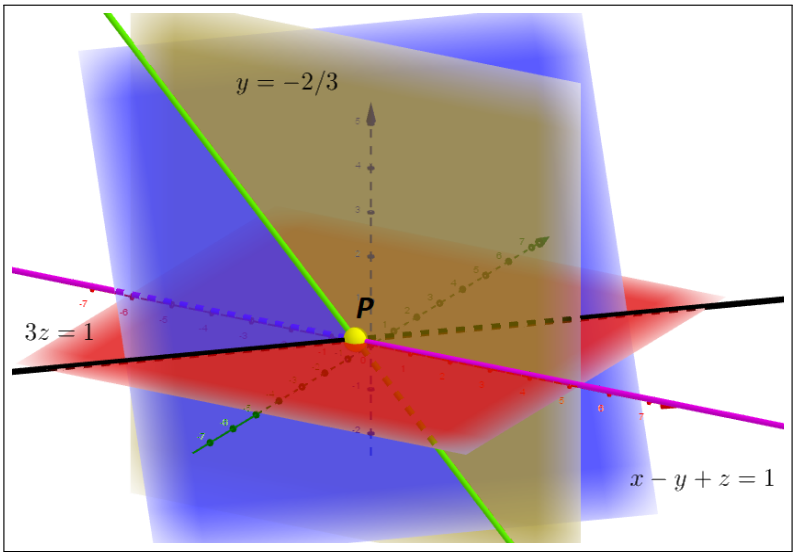


Figura 4.20: Representação geométrica do sistema S_6.

Passo 7: $-L_3 + L_1 \to L_1$

$$S_7 : \begin{cases} x - y = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A Figura 4.21 mostra os planos de S_7, as interseções 2 a 2 desses planos e a solução P do sistema.

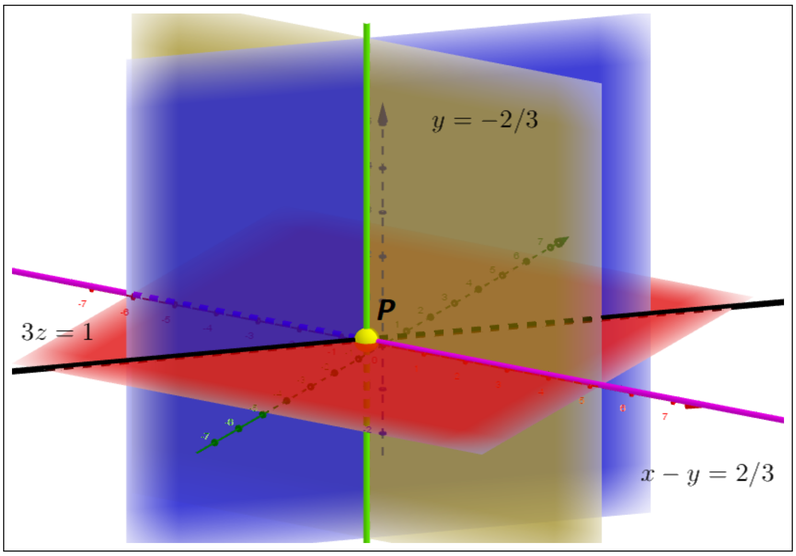


Figura 4.21: Representação geométrica do sistema S_7.

Passo 8: $L_2 + L_1 \to L_1$

$$S_8 : \begin{cases} x & & & = & 0 \\ & y & & = & -\dfrac{2}{3} \\ & & z & = & \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A Figura 4.22 mostra os planos de S_8, as interseções 2 a 2 desses planos e a solução P do sistema. Note que os planos $z = \dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{2}{3}$ e $x = 0$ são paralelos, respectivamente, aos planos xy, xz e yz. Além disso, o ponto P é a interseção desses três planos. E, por S_8 temos $P = (0, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3})$.

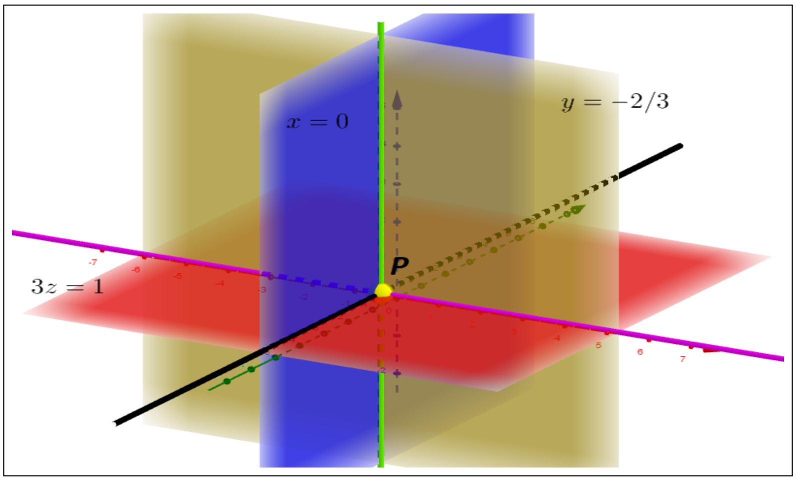


Figura 4.22: Representação geométrica do sistema S_8.

4.15.2 Sistema possível e indeterminado

Denotamos por L_i a equação da i-ésima linha do sistema linear.

Seja o sistema

$$S : \begin{cases} x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & 7y & & & = & 3 \end{cases}$$

A Figura 4.23 mostra os três planos do sistema linear S dado e a reta r, interseção desses planos, ou seja, esse sistema é possível e indeterminado, apresenta infinitas soluções, representados geométricamente por todos os pontos da reta r.

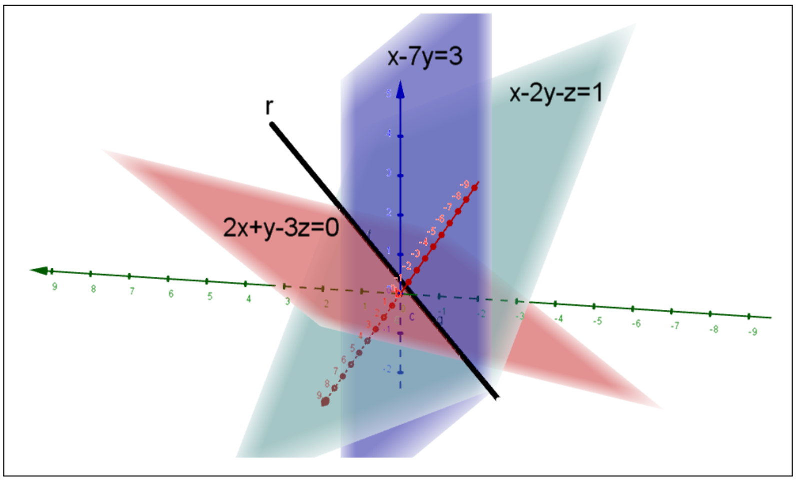


Figura 4.23: Representação geométrica do sistema dado S.

A seguir, por meio de operações elementares sobre as equações do sistema linear S, obtemos a sequência de sistemas equivalentes S_1, S_2, S_3 e para cada S_i, $i = 1, 2, 3$, será apresentada a representação geométrica dos seus planos.

Passo 1: $-2L_1 + L_2 \to L_2$

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & z & = & -2 \\ x & - & 7y & & & = & 3 \end{array} \right.$$

A Figura 4.24 mostra os planos de S_1, assim como, a reta r interseção desses planos. Note que alterando o plano representado pela equação $2x + y - 3z = 0$, pelo plano representado pela equação $5y - z = -2$, a reta r continua a mesma, ou seja, a solução de S_1 é a mesma de S.

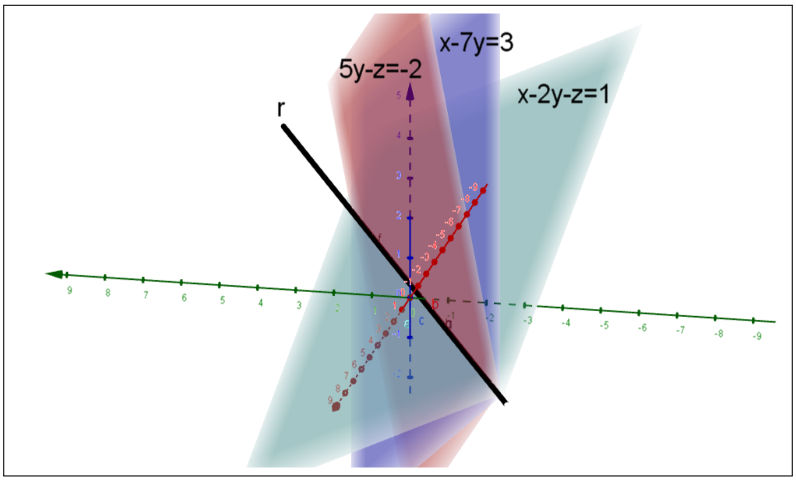


Figura 4.24: Representação geométrica do sistema S_1.

Passo 2: $-L_1 + L_3 \to L_3$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & z & = & -2 \\ & & -5y & + & z & = & 2 \end{array} \right.$$

A Figura 4.25 mostra os planos de S_2, assim como, a reta r interseção desses planos. Note que alterando o plano representado pela equação $x - 7y = 3$, pelo plano representado pela equação $-5y + z = 2$, a reta r continua a mesma, ou seja, a solução de S_2 é a mesma de S. Note também que os planos referentes as equações L_2 e L_3 são coincidentes.

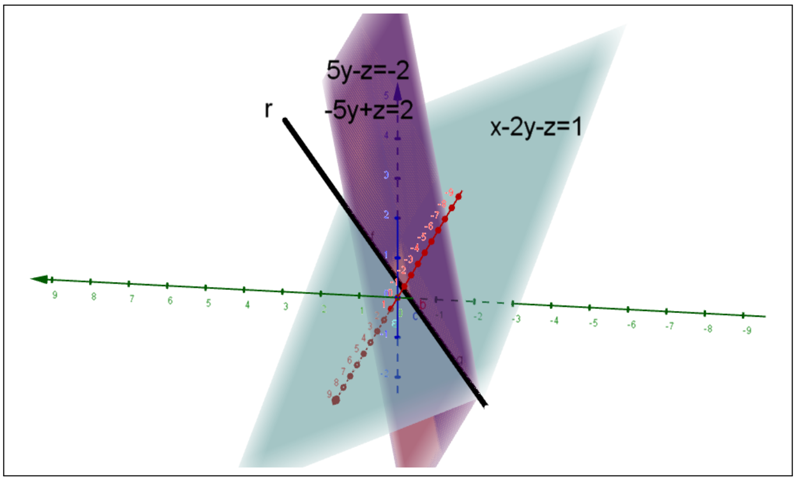


Figura 4.25: Representação geométrica do sistema S_2.

Passo 3: $L_2 + L_3 \to L_3$

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ & & 5y & - & z & = & -2 \end{array} \right.$$

A Figura 4.26 mostra os planos de S_3, assim como, a reta r interseção desses planos. Como os planos referentes as equações L_2 e L_3 são coincidentes, ao somá-los ficou $0x + 0y = 0$, portanto ficamos apenas com duas equações. A reta r continua a mesma, ou seja, a solução de S_3 é a mesma de S.

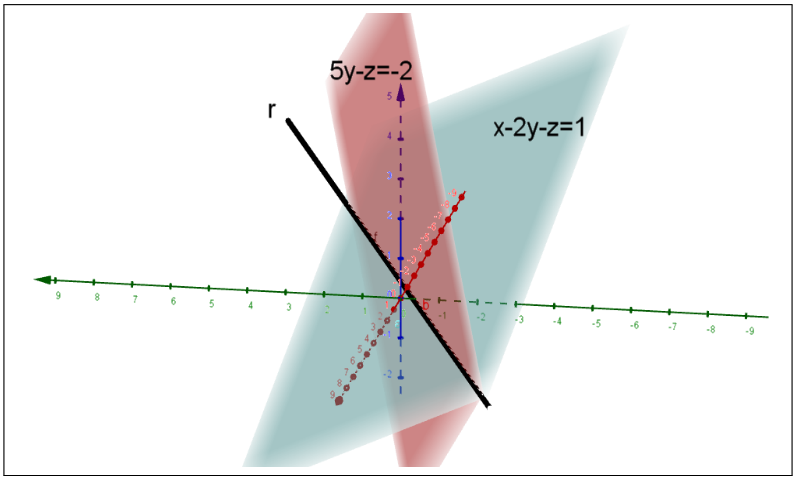


Figura 4.26: Representação geométrica do sistema S_3.

Como o número de equações ficou menor do que o número de incógnitas, o sistema apresenta infinitas soluções, que são os pontos da reta r, cujas equações paramétricas são

$$r : \begin{cases} x = \dfrac{7}{5}t + \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{1}{5}t - \dfrac{2}{5} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 5

Determinantes e o Método de Cramer

Neste capítulo introduzimos o conceito de determinante, que é um número associado a uma matriz quadrada, e apresentamos suas propriedades. Nosso objetivo principal é apresentar e demonstrar o Método de Cramer, que depende do conceito de determinante e constitue uma técnica para a resolução de uma classe especial de sistemas lineares, ou seja, sistemas com número de equações igual ao número de incógnitas e cujos determinantes das respectivas matrizes dos coeficientes são diferentes de zero. Além deste método poder ser aplicado apenas se o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero, ele constitui um método mais trabalhoso do que o método do escalonamento, em especial, quando o número de equações é muito grande. Para um conhecimento mais detalhado sobre o assunto, pode-se consultar as referências [11] e [6].

5.1 Definição de determinante de matriz de ordem menor do que três

Nesta seção definimos determinante para matrizes de ordem $n \leq 3$.

Definição 5.1.1. *Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de ordem $n \leq 3$ de elementos reais. Sendo M uma matriz de ordem n desse conjunto, chamamos determinante da matriz M (e indicamos $detM$) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:*

(a) Se M é de ordem $n = 1$, então $detM$ é igual ao único elemento de M, ou seja, se $M = (a_{11})$, $detM = a_{11}$.

(b) Se M é de ordem $n = 2$, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária, ou seja, se

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$detM = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(c) Se a matriz M é de ordem $n = 3$, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

definimos o determinante de A por

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Exemplo 5.1.2. *Seja $M = (6)$ a matriz quadrada de ordem 1. Temos $detM = 6$.*

Exemplo 5.1.3. *O determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ é igual a*

$$detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 3.9 - 7.5 = 27 - 35 = -8.$$

Exemplo 5.1.4. *O determinante da matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

é igual a

$$detM = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2.4.3 + 3.8.7 + (-2).1.5 - (-2).4.7 - 2.8.5 - 3.1.3 = 149.$$

Observação 5.1.5. *No caso de uma matriz de ordem 3, para obtermos os seis termos da soma da definição do $detM$, pode ser usado o dispositivo prático conhecido como* ***regra de Sarrus****, por ter sido desenvolvida pelo matemático francês Pierre Fréderic Sarrus (1798-1861). Este método consiste de:*

- *À direita de M, copiamos a primeira e a segunda colunas da matriz.*
- *Multiplicamos os elementos situados em cada direção paralela à diagonal principal e somamos os produtos*
- *Multiplicamos os elementos situados em cada direção paralela à diagonal secundária e do resultado anterior subtraímos esses produtos*

5.2 Menor complementar e complemento algébrico

Nesta seção apresentamos as definições de menor complementar e de complemento algébrico, também chamado de cofator, pois na definição geral de determinantes que apresentamos na Seção 5.3 utilizamos esses conceitos.

Definição 5.2.1. *(**Menor complementar**) Consideremos uma matriz M de ordem com $n \geq 2$ e seja a_{ij} um elemento de M. Definimos o menor complementar do elemento a_{ij}, e indicamos por D_{ij} como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M.*

Exemplo 5.2.2. *Seja a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular D_{11}, D_{21}, D_{31}.

Suprimindo a linha 1 e a coluna 1 da matriz M, temos

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13.$$

Suprimindo a linha 2 e a coluna 1 da matriz M, temos

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Suprimindo a linha 3 e a coluna 1 da matriz M, temos

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11.$$

Definição 5.2.3. *(**Complemento algébrico**) Consideremos uma matriz M de ordem $n \geq 2$ e seja a_{ij} um elemento de M. Definimos o complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij}), e indicamos por A_{ij}, como sendo o número $(-1)^{i+j}.D_{ij}$.*

Exemplo 5.2.4. *Seja a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular A_{11}, A_{12} e A_{13}.

Suprimindo a linha 1 e a coluna 1 da matriz M, temos

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -28.$$

Suprimindo a linha 1 e a coluna 2 da matriz M, temos

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 53.$$

Suprimindo a linha 1 e a coluna 3 da matriz M, temos

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -23.$$

5.3 Definição de determinante no caso geral

Nesta seção definimos determinante de matrizes de ordem n qualquer, com o auxílio do conceito de cofator (complemento algébrico).

Definição 5.3.1. *Seja M uma matriz de ordem n. Definimos o determinante da matriz M, e indicamos por $detM$, da seguinte forma:*

(a) Se $M = (a_{11})$ é de ordem 1, $detM = a_{11}$.

(b) Se M é de ordem $n \geq 2$, ou seja, se

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

definimos

$$detM = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} + ... + a_{n1}.A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}.A_{i1}.$$

Assim, o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos da 1ª coluna pelos respectivos cofatores.

Observação 5.3.2. *Para $n \leq 3$, pode ser verificado que a definição de determinante (5.3.1) dada para o caso geral é equivalente a definição de determinante (5.1.1) dada para $n \leq 3$. (ver Exemplos 5.3.3 e 5.3.4)*

Exemplo 5.3.3. *Calcular o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

$$detM = \begin{vmatrix} \boxed{a} & b \\ \boxed{c} & d \end{vmatrix} = a.A_{11} + c.A_{21} = a.(-1)^2.|d| + c.(-1)^3.|b| = ad - bc.$$

Exemplo 5.3.4. *Calcular o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.*

$$detM = \begin{vmatrix} \boxed{a} & b & c \\ \boxed{d} & e & f \\ \boxed{g} & h & i \end{vmatrix} = a.A_{11} + d.A_{21} + g.A_{31}.$$

$$= a.(-1)^2.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + d.(-1)^3.\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g.(-1)^4.\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$= a(ei - hf) - d(bi - ch) + g(bf - ce) = aei + dhc + gbf - gce - dbi - ahf$ (regra de Sarrus).

Exemplo 5.3.5. *Calcular o determinante da matriz* $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$detM = \begin{vmatrix} \boxed{\mathit{3}} & 1 & 2 & -2 \\ \boxed{\mathit{0}} & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{\mathit{0}} & 4 & 1 & -2 \\ \boxed{\mathit{0}} & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3.A_{11} + 0.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41}$$

$$= 3.A_{11} = 3.(-1)^2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3.62 = 186.$$

Exemplo 5.3.6. *Calcular o determinante da matriz* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

$$detM = \begin{vmatrix} \boxed{\mathit{1}} & 2 & 1 & 1 \\ \boxed{\mathit{2}} & 1 & 4 & 3 \\ \boxed{\mathit{3}} & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{\mathit{4}} & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1.A_{11} - 2.A_{21} + 3.A_{31} - 4.A_{41}$$

$$= 1.20 - 2.(-2) + 3.(-48) - 4.14 = -176.$$

Observação 5.3.7. *No Exemplo 5.3.6, como na primeira coluna não tem nenhum valor zero, para calcular o determinante da matriz* 4×4, *foi necessário calcularmos quatro determinantes de matrizes* 3×3, *tornando o cálculo bastante trabalhoso. O trabalho para calcular o determinante dessa matriz* 4×4 *é facilitado utilizando o desenvolvimento de Laplace apresentado na Seção 5.4.*

5.4 Desenvolvimento de Laplace

Nesta seção apresentamos o método de cálculo de determinantes denominado desenvolvimento de Laplace que pode facilitar o cálculo do determinante de determinadas matrizes.

Proposição 5.4.1. *(Desenvolvimento de Laplace) O determinante de uma matriz* M, *de ordem* $n \geq 2$, *é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores. Isto é,*

(a) Se escolhermos a coluna j *da matriz* M, *temos*

$$detM = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \boxed{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}.$$

(b) Se escolhermos a linha i da matriz M, temos

$$detM = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}.$$

Demonstração. Ver a Referência [1]. □

Exemplo 5.4.2. *Calcular o determinante da matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

do Exemplo 5.3.6, utilizando a linha 3 *no desenvolvimento de Laplace.*

Como na terceira linha, existem 2 zeros, escolhendo esta linha temos:

$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3.A_{31} - 0.A_{32} + 0.A_{33} - 2.A_{34} = 3.A_{31} - 2.A_{34}.$$

Assim, só precisamos calcular dois cofatores, em vez de quatro, como fizemos no Exemplo 5.3.6 usando a Definição 5.3.1. Portanto,

$$detM = 3.A_{31} - 2.A_{34} = 3.(-48) - 2.16 = -176.$$

Observação 5.4.3. *Pelo desenvolvimento de Laplace (Proposição 5.4.1), para calcularmos um determinante, não precisamos necessariamente dos elementos da 1ª coluna e seus cofatores (Definição 5.3.1); qualquer outra coluna (ou linha) e seus cofatores permitem seu cálculo. Quantos mais zeros houver em uma fila, mais fácil o cálculo do determinante se usarmos essa fila. Em particular, se a matriz tiver uma fila de zeros, seu determinante será igual a zero.*

5.5 Determinante de Vandermonde

Indiquemos o determinante de uma matriz de Vandermonde por

$$V = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n).$$

O determinante V é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos, com a condição de que, nas diferenças, o minuendo tenha índice maior que o subtraendo. Isto é:

$V = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = (a_2 - a_1)...(a_n - 1)(a_3 - a_2)...(a_n - a_2)...(a_n - a_{n-1}) = \underset{i > j}{\prod^{(a_i - a_j)}}$, onde $i \in 1, 2, 3, ...n$ e $j \in 1, 2, 3, ...n$.

Demonstração. Ver a Referência [11]. □

Exemplo 5.5.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (4-3).(4-2).(3-2) = 2$$

5.6 Propriedades dos determinantes

A definição de determinantes e o desenvolvimento de Laplace permitem-nos o cálculo de qualquer determinante, contudo é possível simplificar o cálculo com o emprego de certas propriedades. Para ver as demonstrações destas propriedades verificar a referência [11].

Propriedades 5.6.1. *Valem as seguintes afirmações:*

P1. (Matriz transposta) Se M é uma matriz de ordem n e M^t sua transposta, então $detM = detM^t$.

P2. (Fila nula) Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então $detM = 0$.

P3. (Multiplicação de uma fila por uma constante) Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número k, o determinante da nova matriz M_1 obtida será o produto de k pelo determinante de M, isto é, $detM_1 = k.detM$.

P4. (Troca de filas paralelas) Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), obteremos uma nova matriz M_1 tal que $detM_1 = -detM$.

P5. (Filas paralelas iguais) Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então $detM = 0$.

P6. (Filas paralelas proporcionais) Se uma matriz de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então $detM = 0$.

P7. (Combinação linear) Se uma matriz quadrada $M = (a_{ij})$, de ordem n, tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então $detM = 0$.

P8. (Teorema de Jacobi) Adicionando a uma fila de uma matriz M, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M_1, tal que $detM_1 = detM$.
Observação: Esta propriedade é muito importante, pois permite introduzir zeros numa fila de uma matriz, sem, com isto, alterar seu determinante. Esta propriedade, juntamente com o desenvolvimento de Laplace, facilita bastante o cálculo do determinante.

P9. (Matriz triangular) Chamamos matriz triangular, aquela cujos elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal são iguais a zero, isto é, a matriz $M = (a_{ij})$ é triangular se $a_{ij} = 0$ para $i < j$ ou $a_{ij} = 0$ para $i > j$. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

P10. (Teorema de Binet) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $det(A.B) = (detA).(detB)$. [1]

Os exemplos a seguir, foram feitos com matrizes de ordem 2, apenas pela facilidade do cálculo de seus determinantes, sendo que as propriedades valem para matrizes de qualquer ordem, como enunciado em Propriedades 5.6.1. Os exemplos têm apenas o objetivo de constatar cada uma das propriedades apresentadas em (5.6.1). Para as demonstrações das propriedades podem ser consultadas as Referências [11] e [1].

Exemplo 5.6.2. *Dada a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

verificar que o determinante de M e de sua transposta M^t são iguais. (P1)
Temos:

$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 4.2 = -3, \ e$$

$$detM^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 2.4 = -3.$$

Assim, $detM = detM^t$.

Exemplo 5.6.3. *Seja a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular $detM$.

$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 4.0 = 0.$$

Notemos que M tem uma linha nula e seu determinante é igual a zero. (P2)

Exemplo 5.6.4. *Seja a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular $detM$ e $detM_1$, com M_1 a matriz obtida de M multiplicando-se sua primeira linha por 2, isto é,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos,

$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 4.2 = -5, \ e$$

$$detM_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 8.2 = -10.$$

Assim, $detM_1 = 2.detM$. (P3)

[1] Para a definição de produto de matrizes pode ser consultada a Referência [1].

Exemplo 5.6.5. *Seja a matriz*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Calcular $detM$ *e* $detM_1$, *com* M_1 *a matriz obtida de* M *trocando-se as posições das linhas* 1 *e* 2, *isto é,*
$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Temos,
$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 4.2 = -5, \ e$$
$$detM_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 3.1 = 5.$$
Assim, $detM_1 = -detM$. *(P4)*

Exemplo 5.6.6. *Seja a matriz*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
Calcular $detM$.
$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 1.4 = 0.$$
Notemos que M *tem duas linhas iguais e seu determinante é igual a zero. (P5)*

Exemplo 5.6.7. *Seja a matriz*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Calcular $detM$.
$$detM = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.2 = 0.$$
Podemos observar que a linha 2 é igual a duas vezes a linha 1, ou seja, $L_2 = 2.L_1$, *e seu determinante é igual a zero. (P6)*

Exemplo 5.6.8. *Seja a matriz*
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$
Calcular $detM$.
Temos,
$$detM = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \boxed{5} \\ 4 & -1 & \boxed{3} \\ 5 & 4 & \boxed{9} \end{vmatrix} = 2.(-1).9 + 3.3.5 + 5.4.4 - 5.(-1).5 - 2.3.4 - 3.4.9 = 0.$$
Podemos observar que a terceira coluna da matriz M *é igual a soma da primeira coluna e da segunda coluna, isto é, a terceira coluna é combinação linear das colunas* 1 *e* 2, *e detM=0. (P7)*

Exemplo 5.6.9. *Seja a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Calcular $detM$ *e* $detM_1$*, com* M_1 *a matriz obtida de* M *adicionando-se à segunda coluna a primeira coluna multiplicada por* (-3)*, isto é,*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\mathit{0}} & 5 \\ 4 & \boxed{\mathit{-10}} & 7 \\ 4 & \boxed{\mathit{-11}} & -6 \end{pmatrix}.$$

Temos,

$detM = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 1.2.(-6) + 3.7.4 + 5.4.1 - 5.2.4 - 3.4.(-6) - 1.1.7 = 117$ *e*

$detM_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix} = 1.(-10).(-6) + 0.7.4 + 5.4.(-11) - 5.(-10).4 - 1.7.(-11) - 0.4.(-6) =$ 117.

Logo, $detM = detM_1$*.*

Neste caso, a segunda coluna de M_1 *é uma combinação linear das colunas 1 e 2 da matriz* M*. Pela propriedade (P8), ao notar esta relação entre as colunas, podemos apenas calcular* $detM$ *e colocar* $detM = detM_1$*, sem a necessidade de calcular* $detM_1$*.*

Exemplo 5.6.10. *Seja a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular $detM$*.*
Temos,

$$detM = \begin{vmatrix} \boxed{\mathit{3}} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{\mathit{4}} & 0 \\ 2 & -3 & \boxed{\mathit{1}} \end{vmatrix} = 3.4.1 + 0.0.2 + 0.1.(-3) - 0.4.2 - 3.0.(-3) + 0.1.1 = 12$$

Note que a matriz M *é triangular e, pela propriedade (P9), para obter o* $detM$ *bastaria ter feito o produto dos elementos de sua diagonal que é igual a* 12*.*

Exemplo 5.6.11. *Seja a matriz*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $detM$*.*

Como a matriz M é triangular, pela propriedade (P9), o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Logo,

$$detM = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = 3.4.1.2 = 24.$$

Exemplo 5.6.12. *Sejam as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular $detA$, $detB$ e $det(A.B)$, sendo $A.B$ o produto das matrizes A e B, ou seja,

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{pmatrix}.$$

A seguir verificar que $det(A.B) = (detA).(detB)$.

Temos

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2,$$

$$detB = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 3.0 = 10 \qquad e$$

$$det(A.B) = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{vmatrix} = 2.29 - 13.6 = -20.$$

Portanto, $(detA).(detB) = -2.10 = -20 = det(A.B)$.

Note que, pela propriedade (P10), para obter o $det(A.B)$ bastaria ter calculado $detA$ e $detB$ e usado a identidade $det(AB) = (detA).(detB)$.

5.7 Resolução de sistemas lineares - Regra de Cramer

O estudo de determinantes constitui outra forma de resolver sistemas $n \times n$, com a vantagem de permitir que os sistemas sejam resolvidos a partir do determinante da sua matriz dos coeficientes.

O método de resolver um sistema por determinante é conhecido como **Regra de Cramer**, por ter sido divulgado pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752).

Porém, esse método **só** pode ser utilizado em sistemas cujas matrizes dos coeficientes possuem **determinantes não nulos**.

5.7.1 Método de Cramer para sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

Proposição 5.7.1. *(Regra de Cramer) Seja o sistema linear de duas equações e duas incógnitas*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{array}\right. .$$

Sendo A a matriz dos coeficientes, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},$$

se $detA \neq 0$, então o sistema tem uma única solução dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad e \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}.$$

Demonstração. Para calcular a incógnita x, multiplicamos a primeira equação por e e a segunda equação por b, obtendo o sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccc} aex & + & bey & = & ce \\ bdx & + & bey & = & bf \end{array}\right. .$$

Subtraindo da primeira equação, a segunda equação, temos

$$aex - bdx = ce - bf$$

Logo,

$$(ae - bd)x = ce - bf.$$

Como $detA = ae - bd \neq 0$, temos

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Agora, para calcular a incógnita y, multiplicamos a primeira equação por d e a segunda equação por a, obtendo o sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccc} adx & + & bdy & = & cd \\ adx & + & aey & = & af \end{array}\right. .$$

Subtraindo da segunda equação, a primeira equação, temos

$$aey - bdy = af - cd.$$

Logo,

$$(ae - bd)y = af - cd.$$

Novamente, como $detA = ae - bd \neq 0$, temos

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

E, finalmente, em termos de determinantes, os valores de x e de y podem ser expressos da forma

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}.$$

□

Observação 5.7.2. *As fórmulas de x e de y dadas na Proposição 5.7.1, podem ser expressas da seguinte forma:*

$$x = \frac{detA_x}{detA} \quad e \quad y = \frac{detA_y}{detA},$$

sendo A a matriz dos coeficientes do sistema, A_x a matriz que se obtém substituindo em A os coeficientes de x pelos termos independentes correspondentes e A_y a matriz que se obtém substituindo em A os coeficientes de y pelos termos independentes correspondentes. Enfatizamos que estas fórmulas só podem ser utilizadas se $detA \neq 0$.

5.7.2 Método de Cramer para sistemas lineares de três equações e três incógnitas

Proposição 5.7.3. *(Regra de Cramer) Seja o sistema linear de três equações e três incógnitas*

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{cases}..$$

Além disso, sejam A a matriz dos coeficientes e B a matriz do termos independentes, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Se $detA \neq 0$, então o sistema tem uma única solução dada por

$$x = \frac{detA_x}{detA}, \quad y = \frac{detA_y}{detA}, \quad z = \frac{detA_z}{detA},$$

em que A_x é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua primeira coluna pela coluna de B, A_y é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua segunda coluna pela coluna de B e A_z é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua terceira coluna pela coluna de B.

Demonstração. Sendo

$$detA = a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, c_2\, b_3 - b_1\, a_2\, c_3 + b_1\, c_2\, a_3 + c_1\, a_2\, b_3 - c_1\, b_2\, a_3 \neq 0,$$

escalonando o sistema, obtemos

$$\begin{cases} 1x & + & 0y & + & 0z & = & \dfrac{b_1\, c_2\, d_3 - b_1\, c_3\, d_2 - b_2\, c_1\, d_3 + b_2\, c_3\, d_1 + b_3\, c_1\, d_2 - b_3\, c_2\, d_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1} \\ 0x & + & 1y & + & 0z & = & \dfrac{-a_1\, c_2\, d_3 + a_1\, c_3\, d_2 + a_2\, c_1\, d_3 - a_2\, c_3\, d_1 - a_3\, c_1\, d_2 + a_3\, c_2\, d_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1} \\ 0x & + & 0y & + & 1z & = & \dfrac{a_1\, b_2\, d_3 - a_1\, b_3\, d_2 - a_2\, b_1\, d_3 + a_2\, b_3\, d_1 + a_3\, b_1\, d_2 - a_3\, b_2\, d_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1} \end{cases}.$$

Assim,

$$x = \frac{b_1\, c_2\, d_3 - b_1\, c_3\, d_2 - b_2\, c_1\, d_3 + b_2\, c_3\, d_1 + b_3\, c_1\, d_2 - b_3\, c_2\, d_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1},$$

$$y = \frac{-a_1\, c_2\, d_3 + a_1\, c_3\, d_2 + a_2\, c_1\, d_3 - a_2\, c_3\, d_1 - a_3\, c_1\, d_2 + a_3\, c_2\, d_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1}, \text{ e}$$

$$z = \frac{a_1\, b_2\, d_3 - a_1\, b_3\, d_2 - a_2\, b_1\, d_3 + a_2\, b_3\, d_1 + a_3\, b_1\, d_2 - a_3\, b_2\, d_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1}$$

Portanto,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{detA_x}{detA},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{detA_y}{detA}, \text{ e}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{detA_z}{detA}.$$

□

5.7.3 Método de Cramer para sistemas lineares de n equações e n incógnitas

Consideremos o sistema linear de n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & ... & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases},$$

que pode ser expresso por $A.X = B$, em que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes.

A seguir apresentamos o resultado sobre a Regra de Cramer para sistemas lineares de n equações e n incógnitas.

Proposição 5.7.4. *(Regra de Cramer) Se o sistema linear de de n equações e n incógnitas $AX = B$ é tal que a matriz dos coeficientes $A_{n\times n}$ tem determinante não nulo, então o sistema tem uma única solução dada por*

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}, \quad x_2 = \frac{detA_2}{detA}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{detA_n}{detA},$$

em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna pela coluna de B, para $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Ver a Referência [19]. □

Observação 5.7.5. *Se a matriz A dos coeficientes não tiver determinante nulo, então a Regra de Cramer não se aplica. Pode ocorrer que $detA = detA_j = 0$, para $j = 1, \ldots, n$ e o sistema não tenha solução. Note que nas demonstrações das Proposições 5.7.1 e 5.7.3, sobre a Regra de Cramer, a hipótese do determinante dos coeficientes ser não nulo é importantíssima.*

5.8 Determinantes, Regra de Cramer e análise de sistemas

Na seção anterior vimos, para um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas, que **se** o determinante dos coeficientes do sistema é não nulo **então** o sistema tem uma única solução, sendo, portanto, um sistema possível e determinado. Neste caso, a solução pode ser calculada utilizando a Regra de Cramer.

No caso em que o determinante dos coeficientes do sistema é nulo, para analisá-lo e resolvê-lo deve ser utilizado outro processo, como por exemplo o método do **escalonamento**. Isso reforça a importância do processo de resolução pelo escalonamento.

Exemplo 5.8.1. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

e sendo A a matriz dos coeficientes, B a matriz dos termos independentes, A_x a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua primeira coluna pela coluna de B, A_y a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua segunda coluna pela coluna de B e A_z a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua terceira coluna pela coluna de B, temos

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ detA_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ detA_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Se tentarmos usar a Regra de Cramer, mesmo sabendo que o $detA = 0$, podemos acabar fazendo uma análise errada do sistema. O que erradamente pode acontecer é que a partir de

$$x = \frac{detA_x}{detA} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{detA_y}{detA} = \frac{0}{0} \quad e \quad z = \frac{detA_z}{detA} = \frac{0}{0}$$

concluirmos que o sistema é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Mas isto é um erro!

Ao analisarmos as equações desse sistema, facilmente percebemos que não tem solução, pois se a primeira equação do sistema é $x + y + z = 1$, então $3x + 3y + 3z$ deve ser igual a 3 e não 4, como na terceira equação do sistema. Porém, como vimos acima, tentando usar a regra de Cramer, obtivemos $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ e $z = \frac{0}{0}$, ou seja, indeterminações, o que poderia levar à falsa conclusão de que o sistema é indeterminado. Resolvendo esse sistema pelo método de escalonamento obtemos que o sistema é impossível, o que pode ser também visualizado ao analisarmos sua representação gráfica, como pode ser conferido a seguir.

Resolução do sistema do Exemplo 5.8.1 pelo método de escalonamento e sua representação gráfica

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \xrightarrow[-3L_1+L_3\to L_3]{-2L_1+L_2\to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 2 \end{array}\right.$$

Após o escalonamento, na linha 3 temos $0 = 2$ e, portanto, o sistema é impossível.

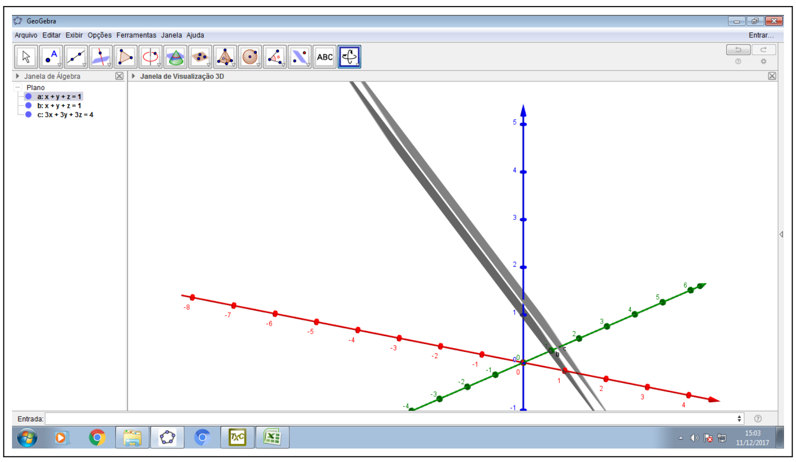


Figura 5.1: Representação gráfica do sistema do Exemplo 5.8.1

Exemplo 5.8.2. *Seja o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 12 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6 \end{array}\right. .$$

Temos

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, detA_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 12 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, detA_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 12 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, detA_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, se tentarmos usar a Regra de Cramer, encontramos as indeterminações

$$x = \frac{detA_x}{detA} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{detA_y}{detA} = \frac{0}{0} \quad e \quad z = \frac{detA_z}{detA} = \frac{0}{0}.$$

Com isto não podemos decidir nada sobre o sistema.

Mas, ao analisarmos o sistema desse exemplo facilmente percebemos que a tripla ordenada $(1,1,1)$ *é solução. Porém, pela regra de Cramer, obtivemos* $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ *e* $z = \frac{0}{0}$, *ou seja, indeterminações.*

No Exemplo 5.8.1, após uma análise algébrica e por meio de escalonamento, concluímos que o sistema era impossível, o que não acontece neste caso. Este sistema tem a solução $(1,1,1)$ *e, como vimos na Seção 5.7, a solução só é única quando* $detA \neq 0$. *Então, o sistema terá infinitas soluções, ou seja, temos um sistema possível e indeterminado, o que pode ser demonstrado por meio da sua resolução algébrica (método do escalonamento), como faremos a seguir, e também percebido pela sua representação gráfica, conforme Figura 5.2.*

Resolução do sistema do Exemplo 5.8.2 pelo método de escalonamento e sua representação gráfica

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 12 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6 \end{array}\right. \xRightarrow[-L_1+L_3 \to L_3]{-2L_1+L_2 \to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Fazendo $z = k$ *no sistema escalonado, obtemos infinitas soluções do tipo* $(6-5k, k, k)$, *o que implica que o sistema é possível e indeterminado. Além disso, a representação gráfica do conjunto solução é uma reta.*

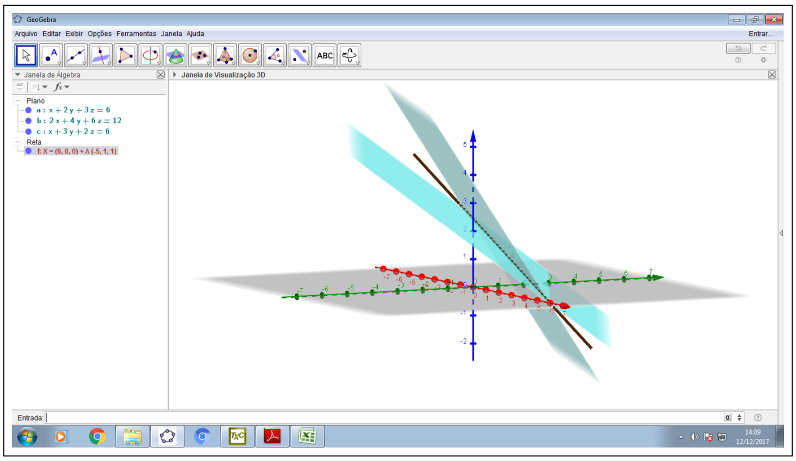


Figura 5.2: Representação gráfica do sistema do Exemplo 5.8.2

Capítulo 6

Sistemas Lineares - Aplicações

O objetivo deste capítulo é mostrar algumas aplicações do uso de sistemas lineares, em diversas áreas de conhecimento, possibilitando, por exemplo, o trabalho interdisciplinar. Para um maior aprofundamento pode ser consultado as referências [17] e [16].

6.1 Química: Balanceamento de equações químicas

Estequiometria é o cálculo que permite relacionar quantidades de reagentes e produtos que participam de uma reação química com o auxílio das equações químicas correspondentes.

Para uma equação química estar balanceada, é necessário que o número de átomos de cada elemento seja o mesmo em cada lado da equação. Para fazermos um balanceamento é necessário colocarmos um número (denominado coeficiente estequiométrico) antes dos símbolos. Esses coeficientes, usados no balanceamento de uma equação química, devem ser sempre os menores números inteiros possíveis. Numa reação química temos um rearranjo de átomos, onde reagentes são transformados em produtos.

Exemplo 6.1.1. *Consideremos a equação química*

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Esta equação não está balanceada, pois o número de átomos do oxigênio não é o mesmo em cada lado.

Se os coeficientes estequiométricos forem respectivamente x, y e z, temos

$$xH_2 + yO_2 \to zH_2O\ ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x & = & 2z \\ 2y & = & z \end{array}\right. .$$

Após escalonarmos o sistema obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 0y & - & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

No sistema de equações acima, o número de equações é menor do que o número de incógnitas, portanto, o sistema é SPI (sistema possível e indeterminado), ou seja, admite mais de *uma solução, porém só nos interessa a menor solução inteira. Pelo sistema escalonado, a solução genérica deste sistema é* $(\alpha, \frac{\alpha}{2}, \alpha)$*. Como os coeficientes precisam ser inteiros e o menor possível, então devemos ter* $\alpha = 2$ *e a solução* $x = 2$*,* $y = 1$ *e* $z = 2$*. Logo, a equação balanceada é*

$$2H_2 + 1O_2 \rightarrow 2H_2O.$$

Exemplo 6.1.2. *Consideremos a equação química*

$$C_6H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_20.$$

Nesta equação são quatro coeficientes estequiométricos. Se os coeficientes estequiométricos forem, respectivamente, x*,* y*,* z *e* w*, temos*

$$xC_6H_6 + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_20\ .$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6x & = & z \\ 6x & = & 2w \\ 2y & = & 2z + w \end{array}\right. .$$

Após escalonarmos o sistema temos

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6x & + & 0y & - & z & + & 0w & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & 2z & - & w & = & 0 \\ 0x & + & 0y & - & z & + & 2w & = & 0 \end{array}\right. .$$

Considerando no sistema escalonado $w = \alpha$*, encontramos as seguintes soluções* $(\frac{\alpha}{3}, \frac{5\alpha}{2}, 2\alpha, \alpha)$*, com* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Então , a menor solução inteira ocorre quando* $\alpha = 6$*, que corresponde a solução* $x = 2$*,* $y = 15$*,* $z = 12$ *e* $w = 6$*. Logo, a equação balanceada é*

$$2C_6H_6 + 15O_2 \rightarrow 12CO_2 + 6H_20.$$

6.2 Biologia: Dieta alimentar

Um jovem esportista está fazendo o seu treino e se sente muito cansado. Fala então com a nutriocionista do clube que lhe sugere uma dieta com quilocalorias, lipídeos e proteínas suficientes para as atividades esportivas. O atleta precisa consumir diariamente 2072Kcal (quilocalorias), 220g de proteínas e 19,3g de lipídeos e, para isto, uma nutricionista passou uma dieta a base de arroz, filé de frango grelhado e maçã. Na Tabela (6.1) temos a quantidade destas substâncias encontradas em cada alimento. Este exemplo consta do video, produzido pelo projeto $M3$ - IMECC - Unicamp, conforme a Referência [16].

100g	quilocalorias	proteínas	lipídeos
arroz	128	2,5	0,2
filé de frango	159	32	2,5
maçã	63	0,2	0,2

Tabela 6.1: Dieta Alimentar

Para sabermos quantos gramas de cada um destes alimentos o atleta deve ingerir diariamente, consideramos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 128a & + & 159f & + & 63m & = & 2072 \\ 2,5a & + & 32f & + & 0,2m & = & 220 \\ 0,2a & + & 2,5f & + & 0,2m & = & 19,3 \end{cases},$$

com: a a quantidade de porções de $100g$ de arroz, f a quantidade de porções de $100g$ de frango, m a quantidade de porções de $100g$ de maçã.
Resolvendo o sistema encontramos a seguinte solução: $a = 4,2235$, $f = 6,8131$ e $m = 7,113$. Isto significa que o atleta necessita comer 4,2235 porções de 100g de arroz, ou seja, 422,35g de arroz, 681,31g de frango e 711,3g de maçã.

6.3 Curva polinomial

Com n pontos num plano xy, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, representando uma coleção de dados, pretendemos encontrar uma função polinomial de grau $n-1$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ cujo gráfico passa por todos os pontos especificados. Este procedimento é chamado de curva polinomial. Se todas as coordenadas dos pontos são distintas, então existe precisamente uma função polinomial de grau $n-1$ (ou menos) que se ajusta aos n pontos.

Para encontrar os n coeficientes de $p(x)$, substituimos cada um dos n pontos na função polinomial e obtemos n equações lineares nas variáveis a_0, a_1, a_2, ... , a_{n-1}, ou seja, obtemos o seguinte sistema linear de n equações e n variáveis.

$$\begin{cases} a_0 & + & a_1x_1 & + & a_2x_1^2 & + & .... & + & a_{n-1}x_1^{n-1} & = & y_1 \\ a_0 & + & a_1x_2 & + & a_2x_2^2 & + & .... & + & a_{n-1}x_2^{n-1} & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1x_n & + & a_2x_n^2 & + & .... & + & a_{n-1}x_n^{n-1} & = & y_n \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 6.3.1. *Para encontrar a função polinomial de grau 2, dada por* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, *cujo gráfico passa pelos pontos* $(1, 4)$, $(2, 0)$ *e* $(3, 12)$, *substituímos cada um dos* 3 *pontos na função polinomial e obtemos* 3 *equações lineares nas variáveis* a_0, a_1, a_2, a_3, *ou seja, obtemos o seguinte sistema linear de* 3 *equações e* 3 *variáveis.*
Substituindo,

$p(1) = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 4,$

$$p(2) = a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0,$$

$$p(3) = a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 12.$$

Assim, temos o sistema linear

$$\begin{cases} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & 4 \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & = & 0 \\ a_0 & + & 3a_1 & + & 9a_2 & = & 12 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos $a_0 = 24$, $a_1 = -28$ *e* $a_2 = 8$. *Logo, a função desejada é* $p(x) = 24 - 28x + 8x^2$, *como podemos ver na Figura 6.1.*

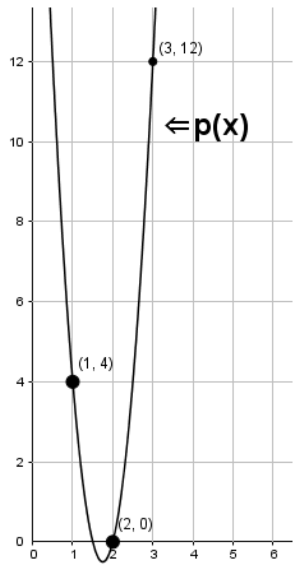


Figura 6.1: Gráfico de $p(x) = 24 - 28x + 8x^2$

6.4 Análise de rede

As redes compostas de ramos e junções são usadas como modelos em campos tais como economia, análise de trânsito e engenharia elétrica. Em um modelo de rede, assumimos que o fluxo total em uma junção é igual ao fluxo total fora da junção. Por exemplo, a junção mostrada na Figura 6.2 tem 25 unidades fluindo para ele. Então, deve haver 25 unidades saindo. Podemos representar essa situação por meio da equação linear

$$x_1 + x_2 = 25.$$

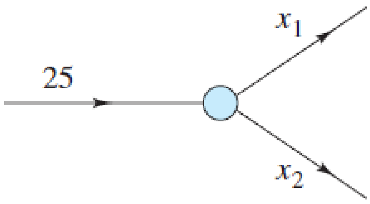


Figura 6.2: Análise de rede

Como cada junção em uma rede dá origem a uma equação linear, podemos analisar o fluxo através de uma rede composta por várias junções, resolvendo um sistema de equações lineares. O exemplo (6.4.1) ilustra este procedimento.

Exemplo 6.4.1. *Consideremos a rede mostrada na Figura 6.3.*

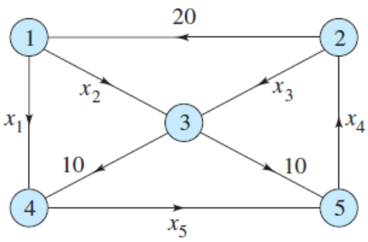


Figura 6.3: Exemplo de rede

Cada uma das cinco junções da rede dá origem a uma equação linear e, portanto, temos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_3 - x_4 = -20 \\ x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - x_5 = -10 \\ -x_4 + x_5 = -10 \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 20 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1x_4 + 0x_5 = -20 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 20 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 = -10 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 = -10 \end{cases}.$$

Por meio de escalonamento, este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 = -10 \\ 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 30 \\ 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 = -10 \\ 1x_4 - 1x_5 = 10 \\ 0x_5 = 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$x_1 - x_5 = -10, \quad x_2 + x_5 = 30, \quad x_3 - x_5 = -10 \quad e \quad x_4 - x_5 = 10.$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções. Então, fazendo $x_5 = t$*, com* $t \in \mathbb{R}$*, temos*

$$x_1 = t - 10, \quad x_2 = -t + 30, \quad x_3 = t - 10, \quad x_4 = t + 10 \quad e \quad x_5 = t.$$

Assim, supondo que seja possível controlar a quantidade de fluxo ao longo do ramo x_5*, usando a solução encontrada, podemos controlar os fluxos representados pelas outras variáveis. Por exemplo, fazendo* $t = 10$ *pode-se reduzir o fluxo de* x_1 *e* x_3 *para zero, como mostrado na Figura 6.4.*

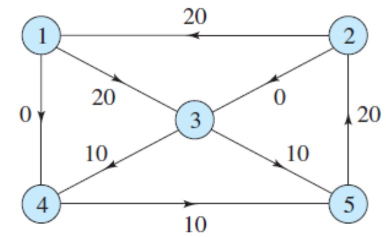


Figura 6.4: Controlando o fluxo da rede

O tipo de análise de rede apresentada no Exemplo 6.4.1 pode ser usado em problemas relacionados com o fluxo de tráfego pelas ruas de uma cidade ou o fluxo de água através de um sistema de irrigação ou uma rede elétrica que é outro tipo de rede onde a análise é comumente aplicada, entre outras situações.

Capítulo 7

Resolução de Sistemas Lineares com o GeoGebra

O objetivo deste capítulo é apresentar o software GeoGebra e dar uma noção de como usá-lo para realizar as atividades propostas neste trabalho sobre a representação gráfica de sistemas lineares com duas e três incógnitas. Foi usado como referência [9], site criado para a divulgação do software GeoGebra, onde podemos encontrar materiais e recursos para o seu uso em situações de ensino e aprendizagem.

7.1 Conhecendo o GeoGebra

Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo foi quem idealizou o projeto do software GeoGebra e é um de seus principais desenvolvedores em conjunto com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo.

O GeoGebra é um software com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos. Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial *www.geogebra.org* e instalado em computadores com sistemas operacionais diversos.

O GeoGebra recebeu esse nome pela possibilidade de operar com as representações aritmética, algébrica e geométrica conjuntamente. Isso significa que um objeto construído com o mouse ou digitando sua sintaxe na *Entrada* pode possuir mais de uma representação: geométrica e aritmética ou algébrica.

7.1.1 Interface

A interface do GeoGebra, ao ser carregado, apresenta a seguinte configuração padrão.

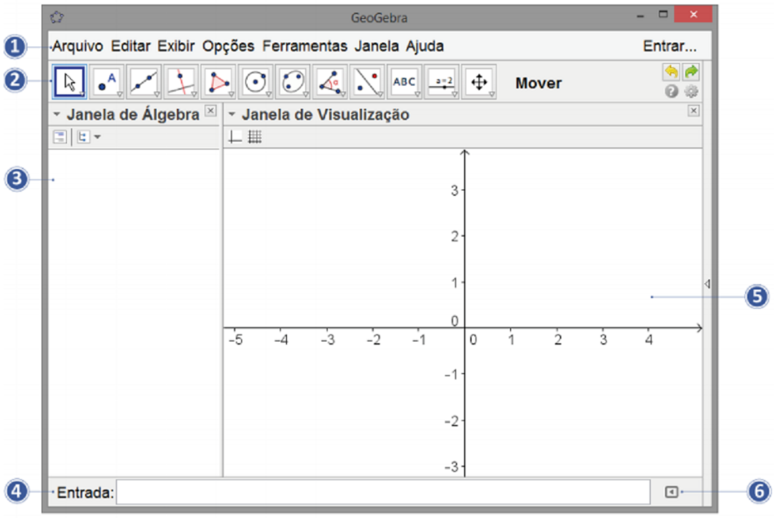


Figura 7.1: Interface do GeoGebra

1. **Barra de Menus:** disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.

2. **Barra de Ferramentas:** composta por dois conjuntos de ícones, para se trabalhar em 2D ou 3D, concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.

3. **Janela de Álgebra:** área em que são exibidas as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

4. **Entrada:** campo de entrada para digitação de comandos

5. **Janela de Visualização:** área de visualização gráfica de objetos em 2D ou 3D, que possuem representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.

6. **Lista de Comandos:** listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.

7.1.2 Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas localizada na parte superior do GeoGebra é composta de um conjunto de ícones, de acordo com a *Janela de Visualização* que estiver trabalhando, 2D ou 3D, com as ferramentas necessárias para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos.

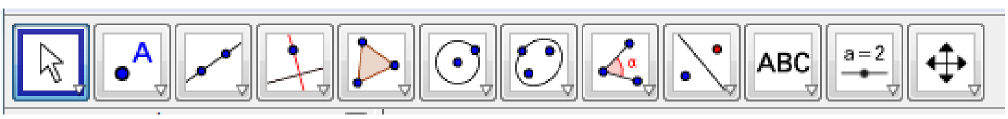


Figura 7.2: Barra de Ferramentas 2D do GeoGebra

Para ativar uma ferramenta, basta clicar em seu ícone. No entanto, para cada conjunto de ícones, há apenas um visível, ao clicar em cada ícone pode-se ver as ferramentas ocultas. Seguem abaixo as opções para o trabalho em 2D.

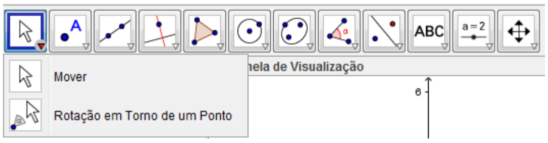


Figura 7.3: 2D - Barra de Ferramentas 1

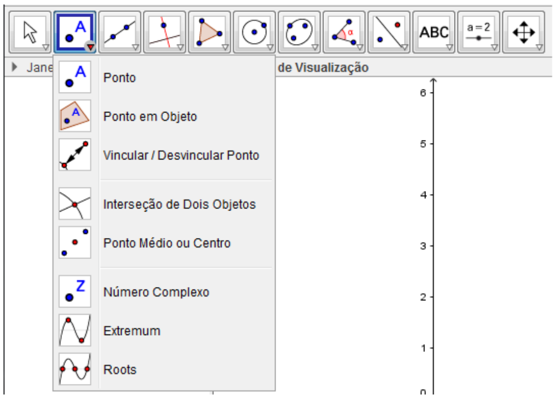


Figura 7.4: 2D - Barra de Ferramentas 2

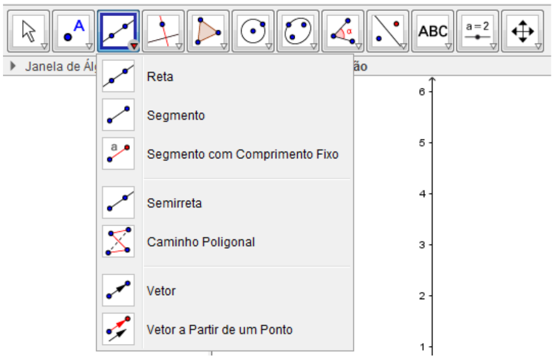


Figura 7.5: 2D - Barra de Ferramentas 3

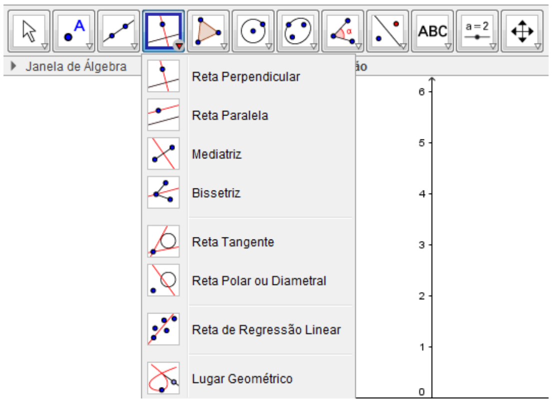


Figura 7.6: 2D - Barra de Ferramentas 4

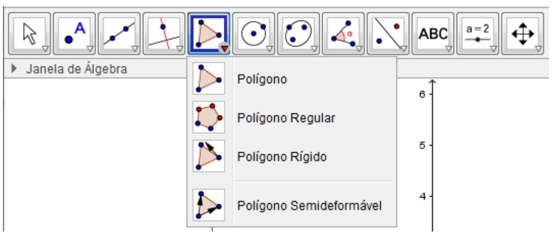


Figura 7.7: 2D - Barra de Ferramentas 5

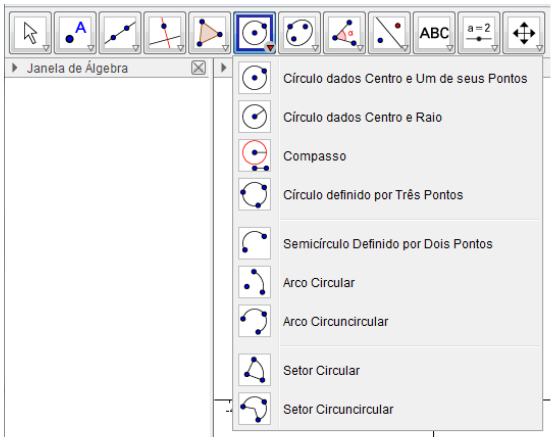


Figura 7.8: 2D - Barra de Ferramentas 6

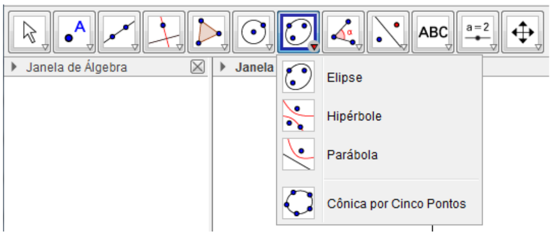


Figura 7.9: 2D - Barra de Ferramentas 7

Figura 7.10: 2D - Barra de Ferramentas 8

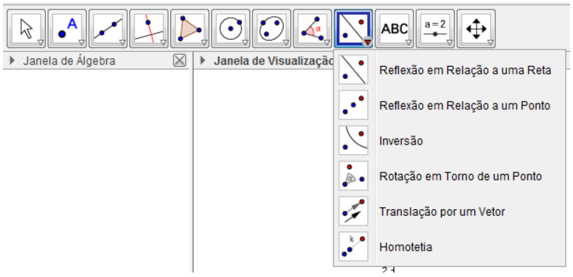


Figura 7.11: 2D - Barra de Ferramentas 9

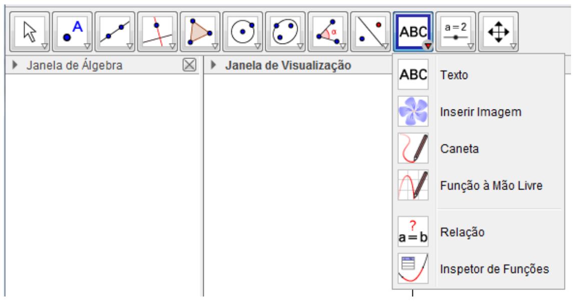


Figura 7.12: 2D - Barra de Ferramentas 10

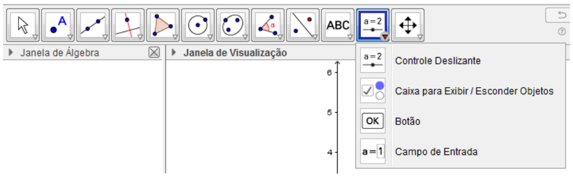


Figura 7.13: 2D - Barra de Ferramentas 11

Figura 7.14: 2D - Barra de Ferramentas 12

Seguem abaixo, as caixas de ferramentas para o trabalho em 3D.

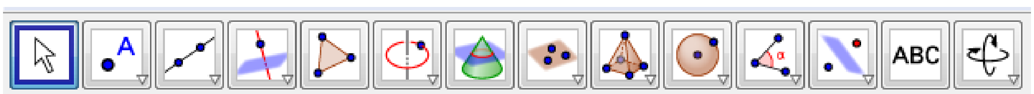


Figura 7.15: Barra de Ferramentas 3D do GeoGebra

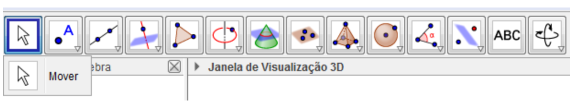


Figura 7.16: 3D - Barra de Ferramentas 1

Figura 7.17: 3D - Barra de Ferramentas 2

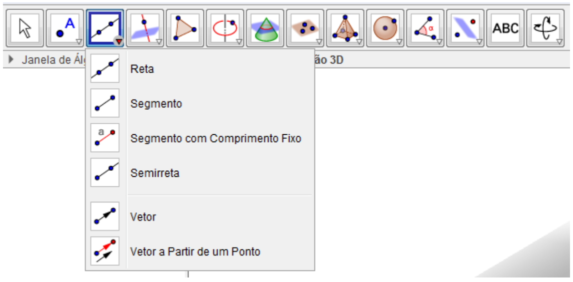


Figura 7.18: 3D - Barra de Ferramentas 3

Figura 7.19: 3D - Barra de Ferramentas 4

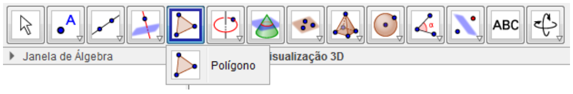


Figura 7.20: 3D - Barra de Ferramentas 5

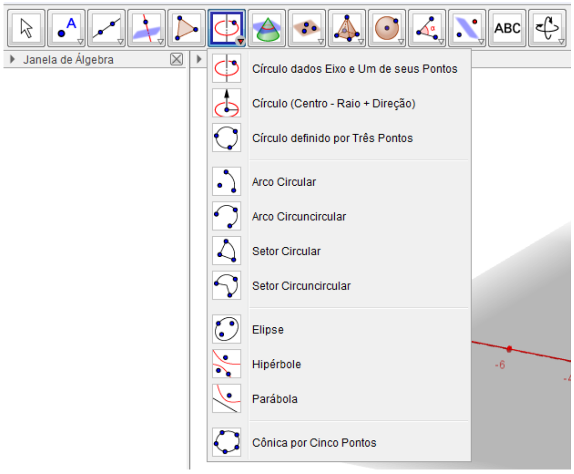


Figura 7.21: 3D - Barra de Ferramentas 6

Figura 7.22: 3D - Barra de Ferramentas 7

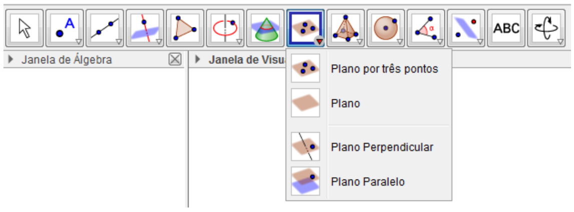


Figura 7.23: 3D - Barra de Ferramentas 8

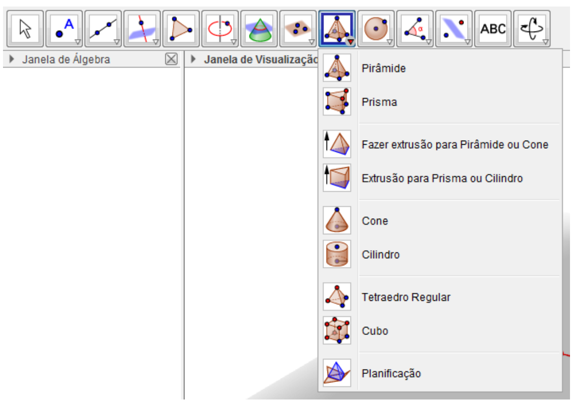


Figura 7.24: 3D - Barra de Ferramentas 9

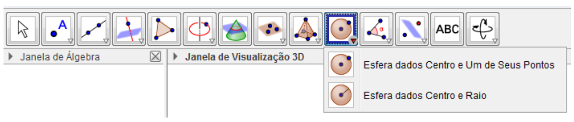


Figura 7.25: 3D - Barra de Ferramentas 10

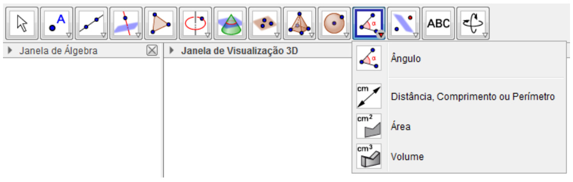


Figura 7.26: 3D - Barra de Ferramentas 11

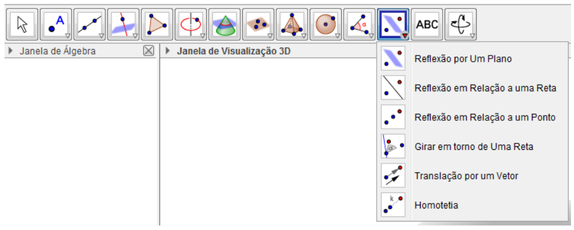


Figura 7.27: 3D - Barra de Ferramentas 12

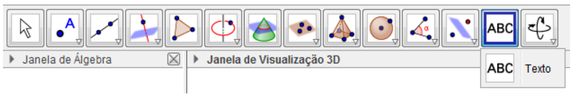


Figura 7.28: 3D - Barra de Ferramentas 13

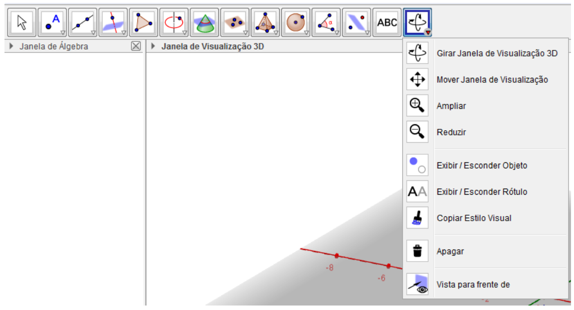


Figura 7.29: 3D - Barra de Ferramentas 14

7.2 Aprendendo a utilizar o GeoGebra

7.2.1 Resolução de sistemas com duas incógnitas

1º passo: Abrir o GeoGebra.

Ao abrir o GeoGebra aparecerá a seguinte tela, dividida em duas janelas, *Janela de Álgebra* e *Janela de Visualização* (usada para trabalhar em duas dimensões, portanto, trabalhar com sistemas com duas incógnitas), conforme a Figura 7.30.

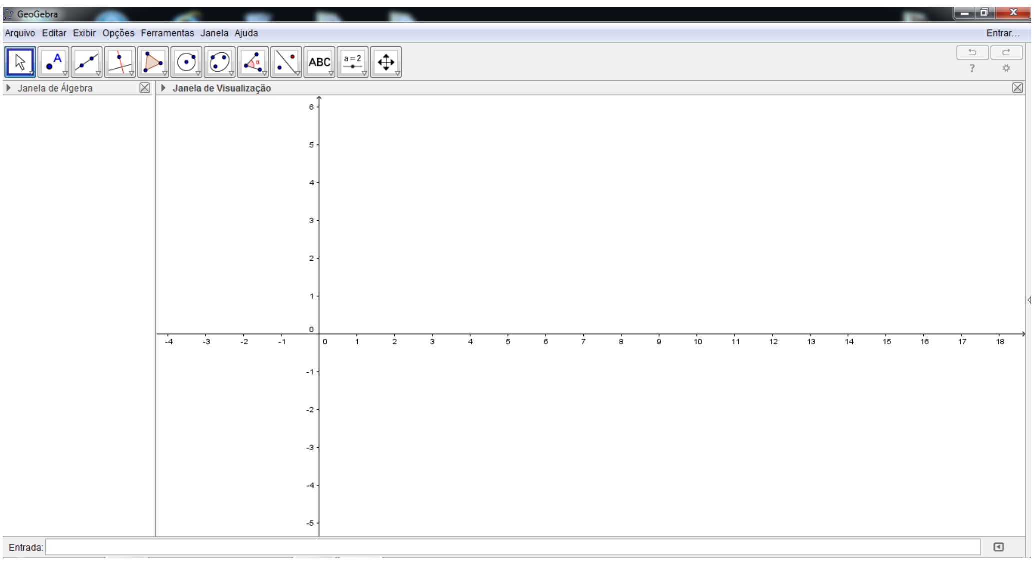


Figura 7.30: Tela inicial do GeoGebra

2º passo: Digitar as equações.

Na caixa de *Entrada*, no canto inferior da tela, (Figura 7.1), digitamos todas as equações do sistema. Por exemplo, digitamos $x + y = 10$ e apertamos a tecla enter e repetimos este processo para todas as equações. Automaticamente aparecerá na *Janela de Álgebra*, a equação digitada, e na *Janela de Visualização*, a sua representação gráfica, que neste caso será uma reta (Figura 7.31).

3º passo: Pontos de interseção.

Na barra de ferramentas, no segundo ícone (Figura 7.4), clica-se na opção *Interseção de Dois Objetos* e depois, por exemplo, para marcar a interseção de duas retas, clica-se em cada uma das retas. Se existir a interseção, será criado um ponto, que aparecerá na *Janela de Álgebra* e também na *Janela de Visualização* (Figura 7.31).

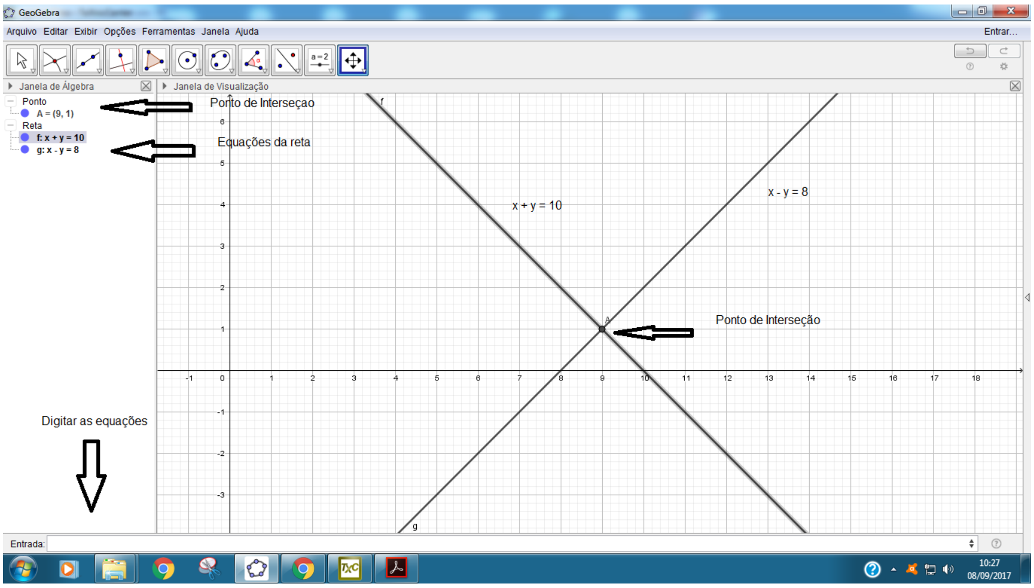


Figura 7.31: Janela de Àlgebra e Visualização

4º passo: Alterando as configurações.

Na *Janela de Visualização*, clica-se o botão direito do mouse sobre um objeto, desta forma aparecerá uma janela (Figura 7.32) para que possa ser alterada algumas propriedades, tais como, cor, estilo, entre outras.

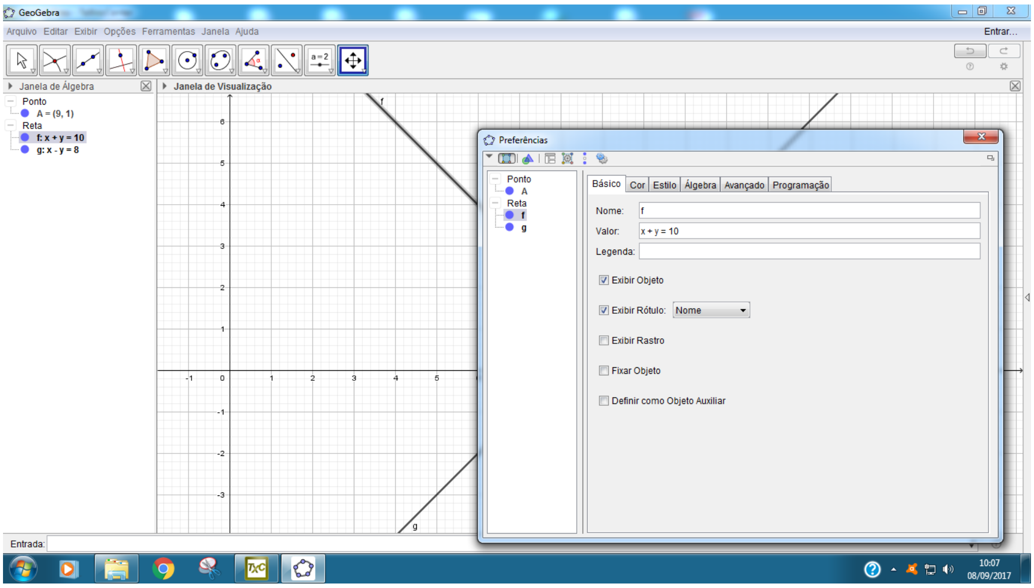


Figura 7.32: Alterando Propriedades

5º passo: Visualização.

Na *Barra de ferramentas*, no décimo segundo ícone (Figura 7.14), para melhorar a visualização, existem opções para mover os objetos, ampliar ou reduzir.

7.2.2 Resolução de sistemas com três incógnitas

1º passo: Abrir o GeoGebra.

Ao abrir o GeoGebra aparecerá uma tela dividida em duas janelas, *Janela de Álgebra* e *Janela de Visualização*. Para trabalhar com sistemas com 3 incógnitas, usa-se apenas a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização 3D*, para isto, no menu principal, escolhe-se a opção *Exibir* (Figura 7.33), para selecionar as janelas a serem usadas e fechar as quais não serão utilizadas. Neste caso, clica-se na opção *Janela de Visualização*, a mesma será fechada e ao clicar na opção *Janela de Visualização 3D* a mesma será aberta.

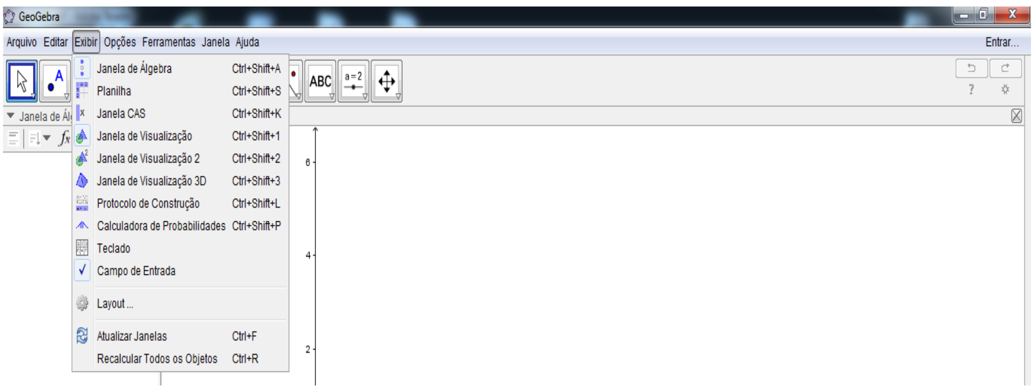


Figura 7.33: Escolhendo janelas de visualização

Após selecionar as janelas a serem utilizadas, obtem-se a tela da (Figura 7.34).

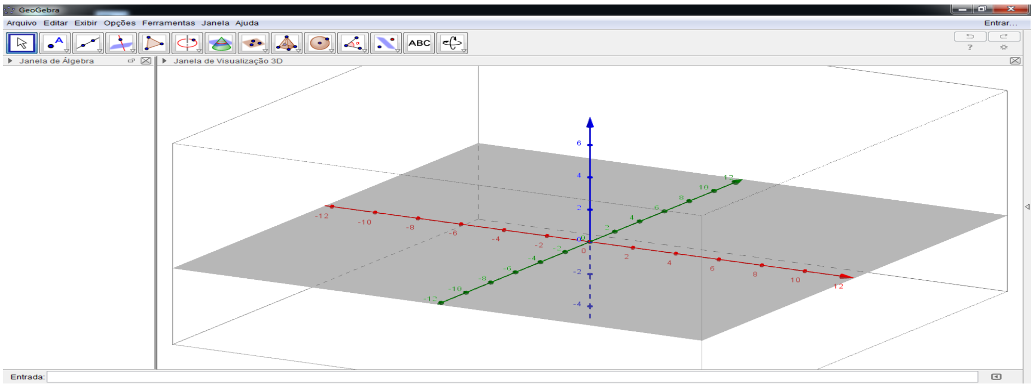


Figura 7.34: Tela inicial para trabalhar em 3D

2º passo: Configurar a Janela de Visualização.

Para facilitar a visualização, é necessário clicar em algum lugar da *Janela de Visualização 3D*, e pressionar o botão direito do mouse, que abrirá uma janela, onde escolhe-se a opção *Plano*, assim sendo irá desaparecer o plano que foi criado automaticamente pelo GeoGebra, e na mesma janela, na opção *Janela de visualização*, na opção *Básico*, em *Clipping*, há a necessidade de desabilitar a opção *habilitar Clipping*, para que não mostre a caixa que envolve o plano cartesiano (Figura 7.35).

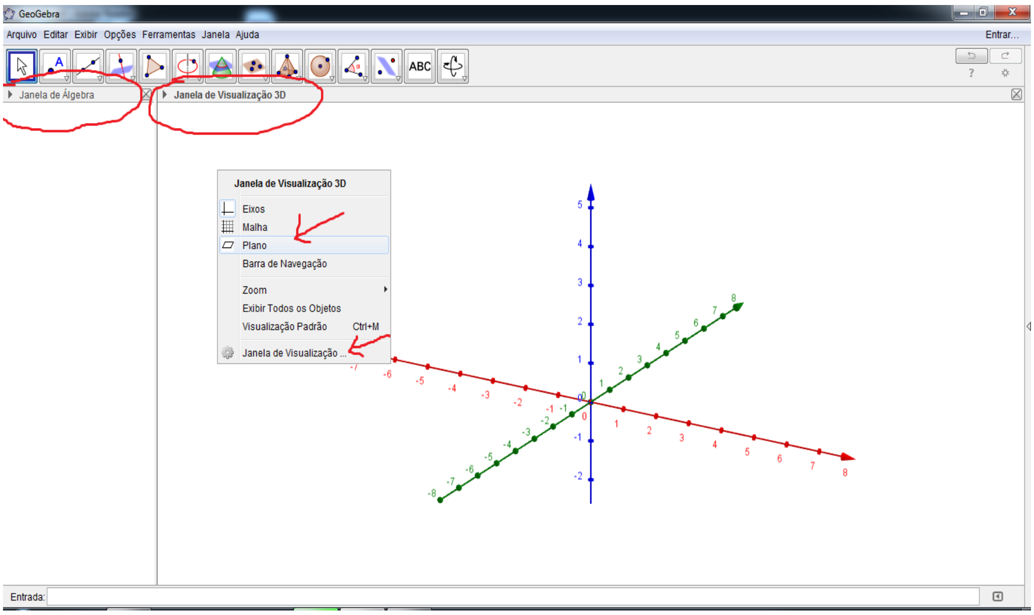


Figura 7.35: Configurando o GeoGebra para trabalhar em 3D

3º passo: Digitar as equações.

Para digitar as equações de um sistema, usa-se a caixa de *Entrada*, na parte inferior da tela, observando que ao digitar cada equação ela será associada a uma letra, neste caso a, b, c, assim sucessivamente na *Janela de Álgebra*, e para cada equação, será desenhado um plano na *Janela de Visualização 3D*. Na *Janela de Álgebra*, em frente a cada equação, há um círculo no qual pode-se habilitar ou não o aparecimento do plano na *Janela de Visualização 3D* (Figura 7.36), para explorar cada plano individualmente, ou dois a dois, ou os três ao mesmo tempo.

4º passo: Visualização.

Na barra de ferramentas existe a opção *Girar Janela de Visualização 3D* (Figura 7.36), ao escolher esta opção, e clicando na imagem, pode-se gira-lá, para explorar melhor a sua visualização.

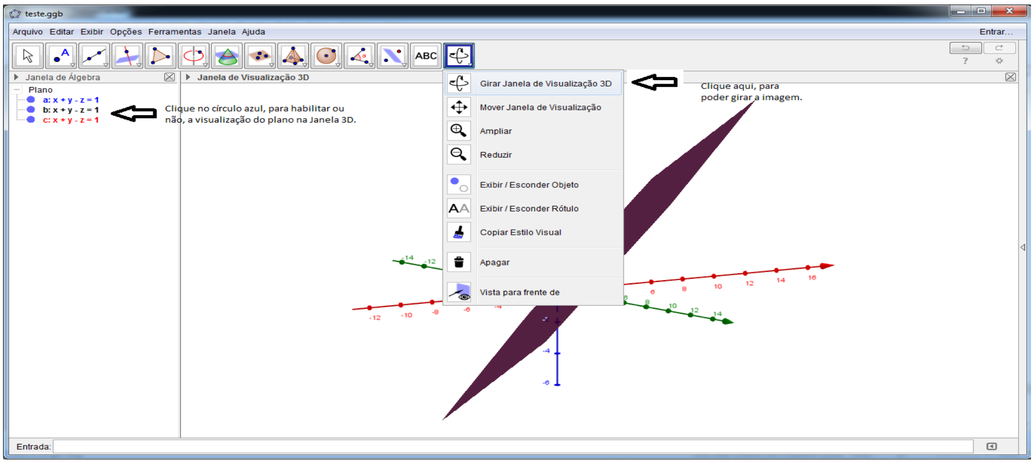


Figura 7.36: Habilitar ou não o aparecimento do plano na Janela 3D

5º passo: Alterando as configurações.

Ao clicar na *Janela de Álgebra*, por exemplo, na equação a com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, onde poderão ser alteradas algumas propriedades. Escolhendo a opção *Básico*, aparecerá o nome da equação, a qual poderá ser renomeada, e no campo valor, aparecerá a equação como foi digitada na caixa de *Entrada*. Escolhendo a opção *Cor*, pode-se alterar a cor das equações, diferenciando-as entre si e, automaticamente alterando a cor do plano na *Janela de Visualização 3D*.

7.2.3 Exemplo de como usar o GeoGebra para resolver sistemas com três incógnitas

Vamos usar o GeoGebra para fazer a representação geométrica do sistema do exemplo a seguir, mas primeiramente faremos a resolução algébrica:

Exemplo 7.2.1. *Resolver o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & - & 4z & = & 4 \end{array}\right.$$

pelo processo de escalonamento e interpretar geometricamente com o auxílio do GeoGebra.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & - & 4z & = & 4 \end{array}\right. \xrightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -4L_1+L_3\to L_3}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Agora basta digitar na caixa de *Entrada*, na parte inferior da tela, as equações que compõem o sistema acima, observa-se que ao digitar cada equação, a mesma foi associada a uma letra, neste caso a, b e c na *Janela de Álgebra* e para cada equação foi desenhado um plano na *Janela de Visualização 3D* (Figura 7.37). As equações $2x+2y-2z=2$ e $4x+4y-4z=4$, digitadas na caixa de *Entrada*, aparecem na *Janela de Álgebra* como $x+y-z=1$, pois, automaticamente, as mesmas foram divididas, respectivamente, por 2 e 4, ficando, portanto, as três equações iguais, e os três planos coincidentes.

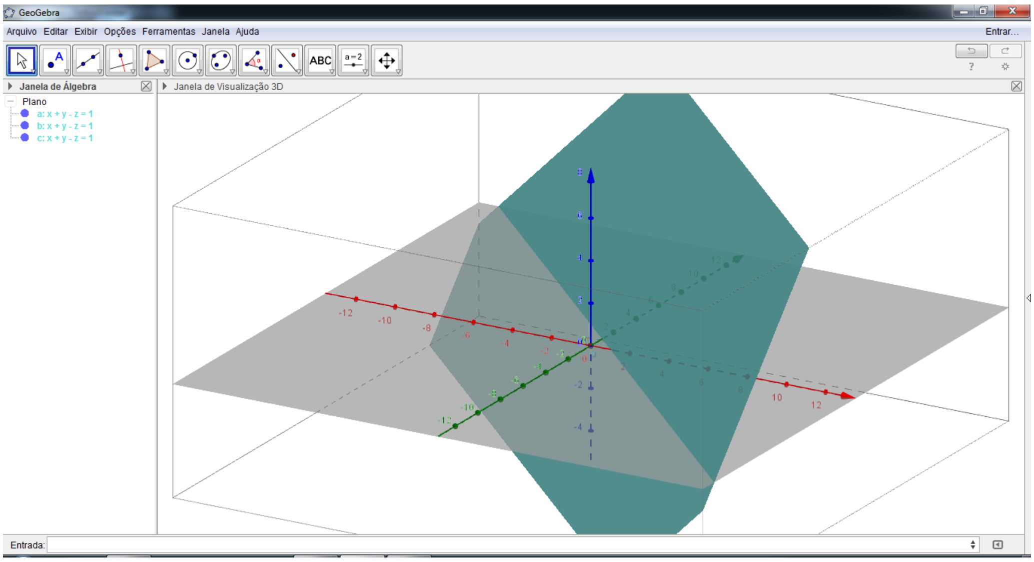


Figura 7.37: Caixa de Entrada

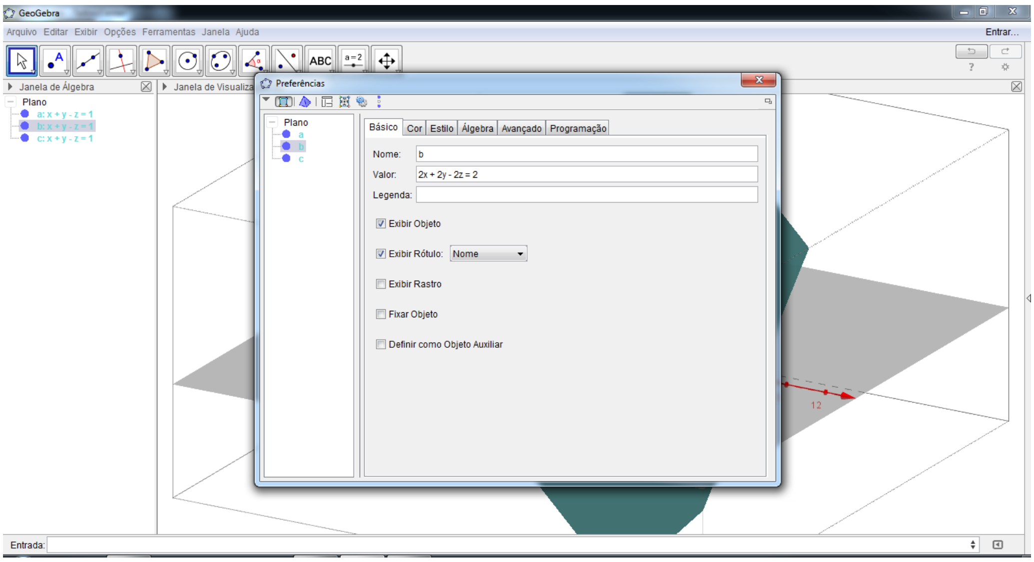


Figura 7.38: Alterando propriedades

Ao clicar na *Janela de Álgebra*, por exemplo, na equação b e clicando com o botão direito do mouse, abre uma janela, onde podemos alterar algumas propriedades (Figura 7.38). Escolhendo a opção *Básico*, aparece o nome da equação, neste caso b, a qual pode ser renomeada, e no campo *Valor* aparece a equação como foi digitada na caixa de *Entrada*, neste caso, $2x+2y-2z=2$.

Escolhendo a opção *Cor*, pode-se alterar a cor, podendo fazer isto para todas as equações, para diferenciá-las, e automaticamente alterar a cor do plano na *Janela de Visualização 3D*.

Capítulo 8

Sequência de Atividades para Sala de Aula

O objetivo deste capítulo é que os alunos entendam e consigam relacionar a solução algébrica e a representação geométrica de sistemas e a solução de equações lineares com duas e três incógnitas, através da construção do seu conhecimento com atividades, tais como, construção de tabelas, resoluções e classificação de sistemas, e o uso do computador para a construção gráfica.

Neste capítulo montaremos uma sequência de atividades pedagógicas voltadas para alunos do 2º ano do Ensino Médio, como sugestão para serem trabalhadas em sala de aula juntamente com o uso de computador. Para tanto, o professor deverá ter noção do software GeoGebra, para que possa orientar seus alunos, sendo que, no capítulo 7, apresentamos uma explicação e exemplos de como usar este software. O professor poderá também usar o capítulo 4, sobre sistemas lineares, como referência.

Nestas atividades foram usadas algumas equações, apenas como exemplo, sendo que o professor poderá escolher outras, de acordo com sua preferência e de acordo com a sua turma.

8.1 Atividade 1 - Resolução de equação linear de duas incógnitas

O objetivo desta atividade é que os alunos construam tabela e gráfico de uma equação linear com duas incógnitas e consigam perceber que a mesma tem infinitas soluções e que sua representação gráfica é uma reta, e que todos os pontos da reta, são soluções da equação.

Como primeira atividade, o professor pedirá que os alunos façam uma tabela, conforme a Tabela 8.1, com possíveis soluções para a equação $x + y = 10$, e respondam algumas perguntas. Para isto deverá usar a ficha encontrada no Apêndice A.

x	y	(x, y)
1	9	$(1, 9)$
2	8	$(2, 8)$
3	7	$(3, 7)$
4	6	$(4, 6)$
-1	11	$(-1, 11)$
-2	12	$(-2, 12)$

Tabela 8.1: Possíveis valores de x e y

Depois que os alunos preencherem a tabela e responderem as questões, o professor então deverá abrir uma discussão entre os mesmos, para que possam analisar as suas tabelas, verificando se as soluções são as mesmas, como encontraram as soluções, quantas soluções eles acham que existem.

Espera-se que eles descubram que existem infinitas soluções e que a condição necessária para que o par ordenado (x, y) seja solução é que a sua soma, seja igual a 10, ou seja $x + y = 10$.

Logo após, o professor pedirá aos alunos que abram o GeoGebra e digitem na caixa de *Entrada* (Figura 7.1) a equação $x + y = 10$. Após a digitação, aparecerá o gráfico na *Janela de Visualização* (Janela de Visualização em 2D), e para melhor poder observar, se o aluno achar necessário, poderá mover a *Janela de Visualização*, ampliar ou reduzir (Figura 7.14), para isto deverá usar a ficha encontrada no Apêndice A.

Depois desse processo após o aluno deverá digitar também na caixa de *Entrada* os pares ordenados de sua tabela, digitar $(1, 9)$ teclar *enter*, $(2, 8)$ teclar *enter*, (estes pares ordenados são do exemplo do professor), e assim sucessivamente. O aluno deverá também criar no seu gráfico outros pontos que não são da sua tabela. Para isto, selecionar na *Barra de Ferramentas*, no segundo ícone (Figura 7.14), a opção *Ponto em Objeto*, e cada vez que clicar sobre a reta, ele criará um novo ponto, que automaticamente aparecerá na *Janela de Álgebra* as suas coordenadas. Assim, o aluno poderá testar se são soluções da equação $x + y = 10$.

Depois de tudo digitado, o aluno deverá observar o gráfico e responder algumas questões.

Do exemplo do professor aparecerá o gráfico abaixo.

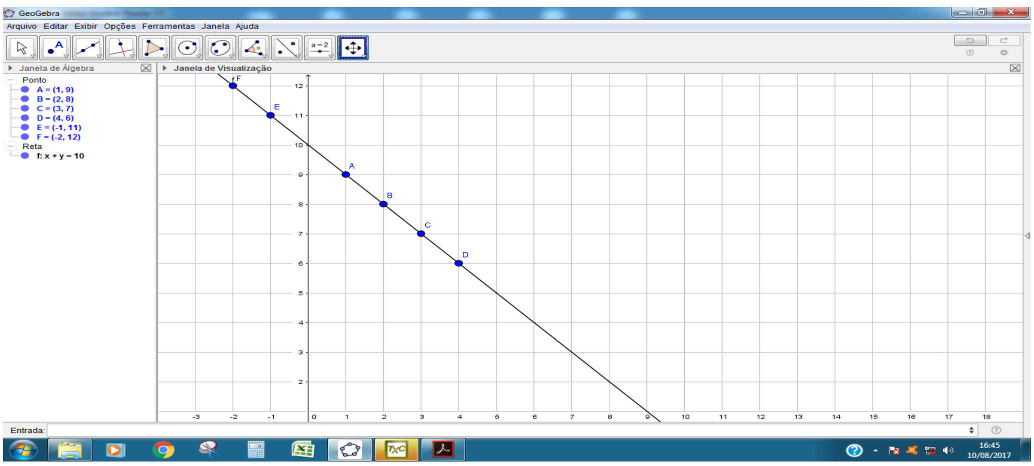


Figura 8.1: Representação Gráfica da equação $x + y = 10$

Se na questão "a) Todos os pares ordenados da tabela, pertencem ao gráfico?", o aluno responder **não**, o professor deverá verificar com o aluno, pois o mesmo preencheu a tabela de forma errada.

Com esta atividade espera-se que o aluno tenha compreendido que uma equação linear com duas incógnitas tem infinitas soluções, e sua representação gráfica é uma reta.

8.2 Atividade 2 - Sistema linear de duas equações e duas incógnitas

Como segunda atividade pede-se para os alunos montarem duas tabelas com possíveis soluções para a equação $x + y = 8$ e $x - y = 4$, conforme realizado na atividade 1. Para isto os mesmos deverão usar a ficha encontrada no Apêndice B.

x	y	(x, y)
-1	9	$(-1, 9)$
0	8	$(0, 8)$
1	7	$(1, 7)$
2	6	$(2, 6)$
3	5	$(3, 5)$
4	4	$(4, 4)$
5	3	$(5, 3)$
6	2	$(6, 2)$

Tabela 8.2: Soluções da equação $x + y = 8$

x	y	(x, y)
10	6	$(10, 6)$
9	5	$(9, 5)$
8	4	$(8, 4)$
7	3	$(7, 3)$
6	2	$(6, 2)$
5	1	$(5, 1)$
4	0	$(4, 0)$
3	-1	$(3, -1)$

Tabela 8.3: Soluções da equação $x - y = 4$

Depois de preenchidas as tabelas e feitos os questionamentos, o professor deverá pedir aos alunos que digitem no GeoGebra, na caixa de *Entrada* (Figura 7.1) as equações $x + y = 8$ e $x - y = 4$. Logo após a digitação, aparecerá o gráfico na *Janela de Visualização*, e para melhor poder observar, se o aluno achar necessário, o mesmo poderá mover a *Janela de Visualização*, ampliar ou reduzir (Figura 7.14).

Logo após, o aluno deverá digitar, também na caixa de *Entrada*, os pares ordenados de suas tabelas, para isto, na caixa de *Entrada*, digitar $(-1, 9)$ teclar *enter*, $(0, 8)$ teclar *enter*, e assim sucessivamente, usando a ficha encontrada no Apêndice B.

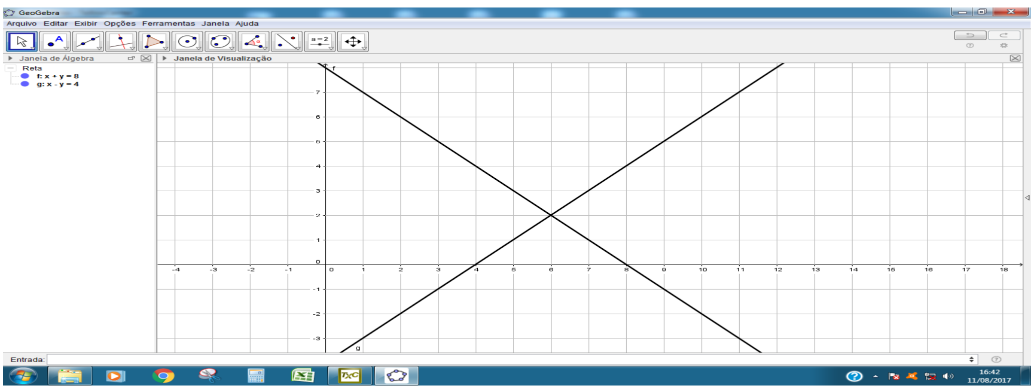


Figura 8.2: Representação Gráfica do sistema $x + y = 8$ e $x - y = 4$

Neste momento, o professor deverá pedir para os alunos que resolvam o sistema, pelo método que achar melhor, tal como método da adição, substituição, escalonamento, etc., devendo obter a solução $x = 6$ e $y = 2$, ou seja, $(x, y) = (6, 2)$.

Dica para o professor: O professor deverá fazer atividades semelhantes, usando um sistema que seja impossível e um que seja indeterminado, para que o aluno tenha contato, com todos os tipos de sistemas lineares 2 x 2.

Expectativa: Com as atividades 1 e 2, espera-se que os alunos entendam que uma equação com duas incógnitas, apresenta infinitas soluções, e que estas soluções são representadas geometricamente por uma reta, e que quando temos um sistema de equações com duas incógnitas, precisamos de pelo menos duas equações, onde cada uma pode ser representada por uma reta, e que o sistema terá ou não solução, dependendo da posição relativa entre as retas.

8.3 Atividade 3 - Sistema linear de duas equações e duas incógnitas

Como terceira atividade, será colocada uma série de exercícios, visando explorar a solução de sistemas lineares 2 x 2 através da interpretação da sua representação gráfica.

Exercício 01) Para cada sistema linear abaixo, digite no GeoGebra as duas equações do sistema, faça a interpretação da sua representação gráfica e classifique-os.

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 7 \end{array}\right.$$

Resposta da a)

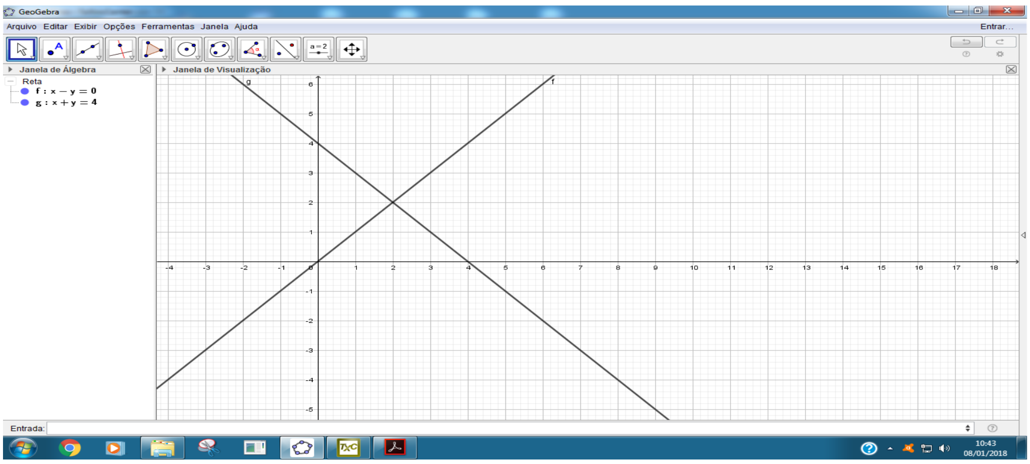


Figura 8.3: Representação Gráfica do sistema $x - y = 0$ e $x + y = 4$

A solução do sistema é o ponto de interseção das retas, ou seja, é o conjunto $S = \{(2, 2)\}$, *portanto o sistema é possível e determinado.*

Resposta da b)

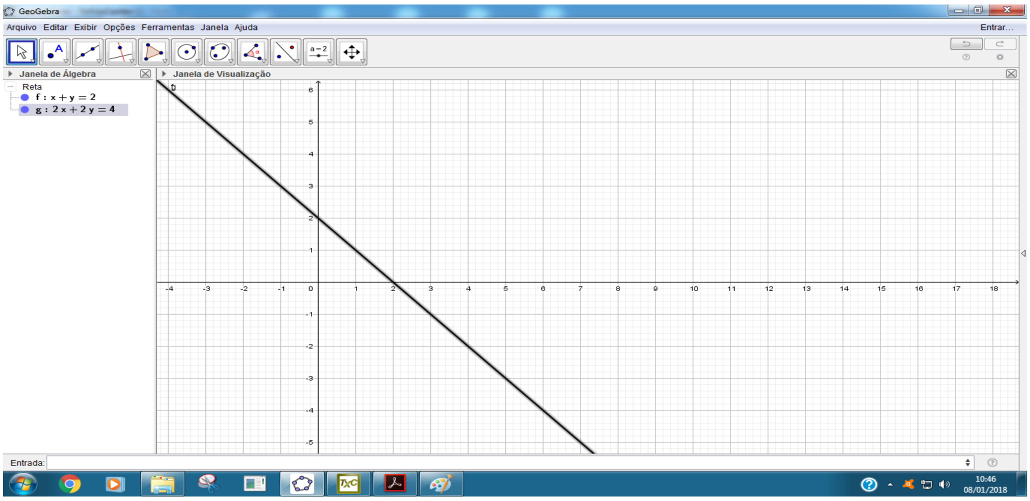


Figura 8.4: Representação Gráfica do sistema $x + y = 2$ e $2x + 2y = 4$

Como as duas retas são coincidentes, o sistema possui infinitas soluções, portanto o sistema é possível e indeterminando.

Resposta da c)

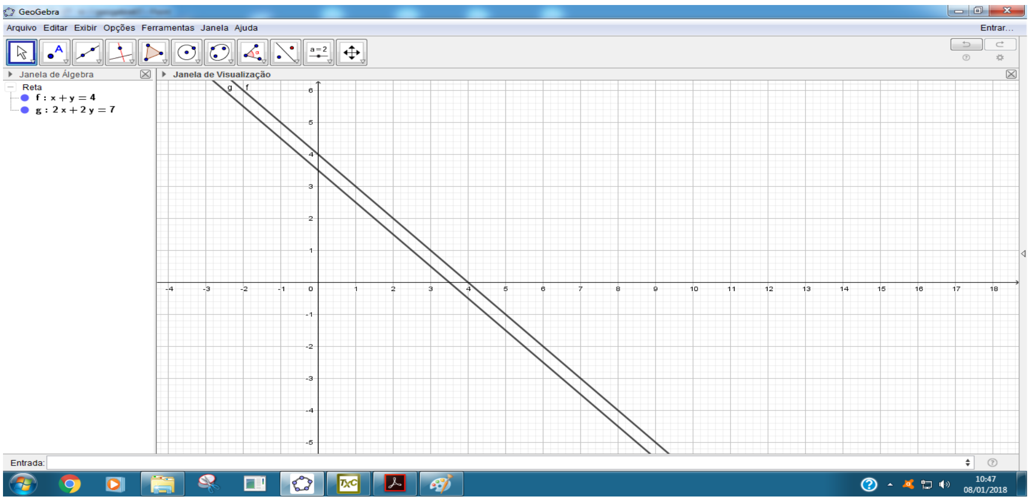
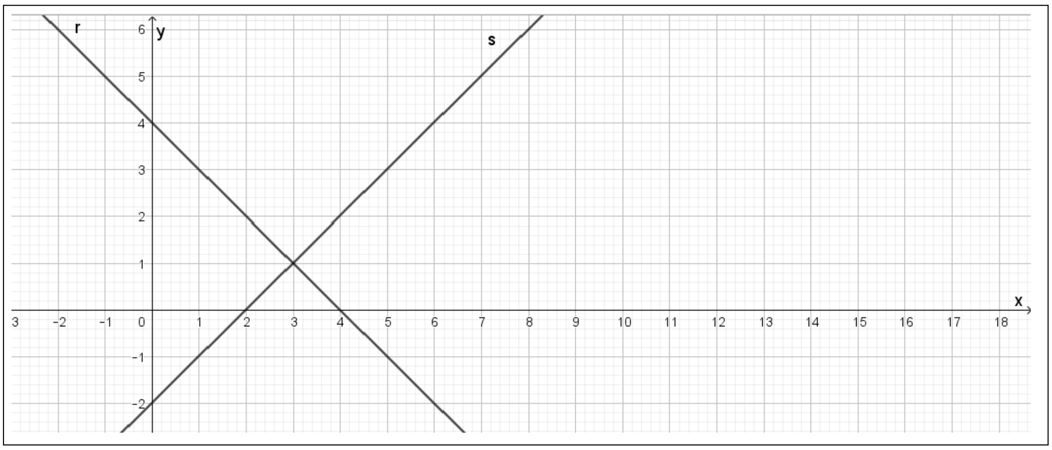


Figura 8.5: Representação Gráfica do sistema $x + y = 4$ e $2x + 2y = 7$

Como as duas retas são paralelas, o sistema não possui solução, portanto o sistema é impossível.

Exercício 02) Observe a figura e responda as questões a seguir.



a) Qual é a equação cujas soluções estão sobre a reta r: $x + y = 3$, $x + y = 4$ ou $x + y = 5$?

Após analisar a figura, espera-se que os alunos identifiquem alguns pares ordenados pertencentes a reta r, tais como, $(0, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$, entre outros, e percebam que todos eles satisfazem a equação $x + y = 4$, pois a soma de suas coordenadas (x, y), sempre dá 4.

b) Qual é a equação cujas soluções estão sobre a reta s: x - y = 4, x - y = 3 ou x - y = 2?

Após analisar a figura, espera-se que os alunos identifiquem alguns pares ordenados pertencentes a reta s, tais como, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$, entre outros, e percebam que todos eles satisfazem a equação $x - y = 2$, pois a diferença entre suas coordenadas (x, y), sempre dá 2.

c) Qual é o par ordenado correspondente ao ponto de interseção das retas r e s?

Após analisar a figura, espera-se que os alunos identifiquem que o ponto de interseção, é o ponto cujas coordenadas são $(3, 1)$, e que este par ordenado pertence as retas r e s.

8.4 Atividade 4 - Resolução de equação linear de três incógnitas

Nesta atividade pede-se para os alunos montarem uma tabela com possíveis soluções para a equação $x + y + z = 10$, conforme Tabela 8.4, para isto, os mesmos deverão usar a ficha encontrada no Apêndice C.

x	y	z	(x,y)
1	1	8	$(1,1,8)$
1	2	7	$(1,2,7)$
1	3	6	$(1,3,6)$
1	4	5	$(1,4,5)$
1	5	4	$(1,5,4)$
1	6	3	$(1,6,3)$
1	7	2	$(1,7,2)$
1	8	1	$(1,8,1)$
1	9	0	$(1,9,0)$

Tabela 8.4: Possíveis valores de x, y e z

Depois de preenchida a tabela e feito os questionamentos, o professor pedirá aos alunos que digitem no GeoGebra na caixa de *Entrada* (Figura 7.1) a equação $x+y+z=10$. Logo após a digitação, aparecerá o gráfico na *Janela de Visualização 3D*, e para melhor poder observar, se o aluno achar necessário, o mesmo poderá, mover a *Janela de Visualização*, ampliar ou reduzir (Figura 7.29).

Logo após, o aluno deverá digitar, também na caixa de *Entrada*, as triplas ordenadas de sua tabela, assim sendo, na caixa de *Entrada* digitar $(1,1,8)$, teclar *enter*, $(1,2,7)$ teclar *enter*, e assim sucessivamente. E também digitar algumas que não pertencem a sua tabela, tais como $(2,2,7)$, $(3,3,6)$, $(1,1,5)$, para isto deverá usar a ficha encontrada no Apêndice C.

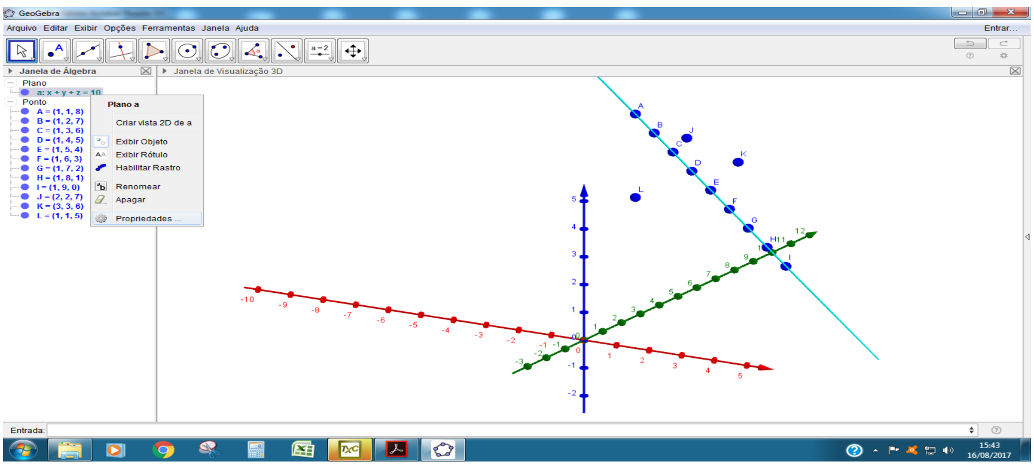


Figura 8.6: Representação Gráfica da equação $x+y+z=10$

Dica para o professor: Dependendo de como o aluno girar a imagem, o mesmo poderá fazer uma interpretação errada, pois observando as Figuras 8.6 e 8.7, as triplas ordenadas que pertencem ao plano na Figura 8.6 e na Figura 8.7, parecem que não pertencem ao plano. Isto acontece, pois o plano é infinito e apenas parte dele aparece na tela do computador.

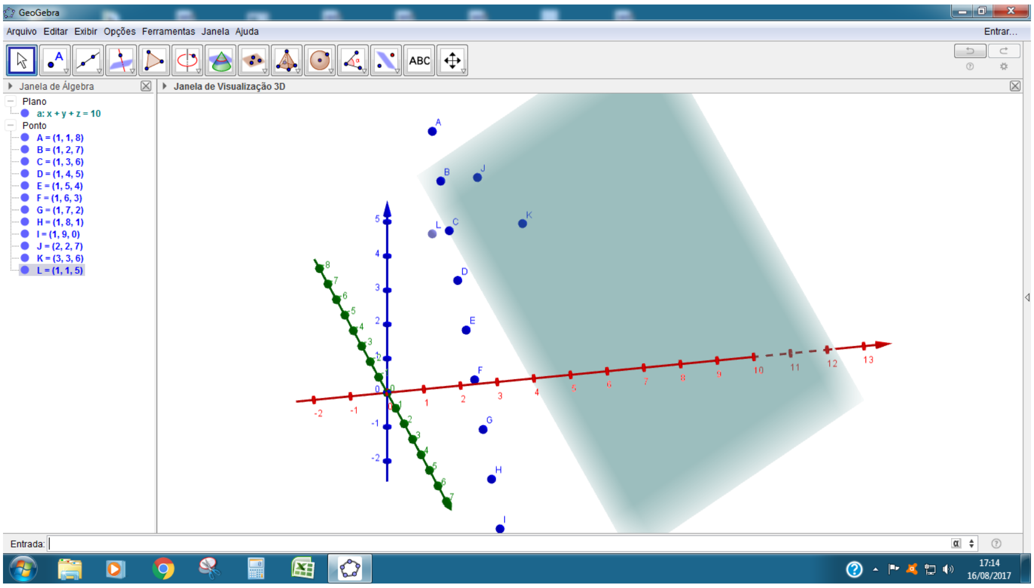


Figura 8.7: Outra Representação Gráfica da equação $x + y + z = 10$

8.5 Atividade 5 - Sistema linear de duas equações e três incógnitas

Nesta atividade pede-se para os alunos montarem duas tabelas com possíveis soluções para as equações $x + y + z = 9$ e $x + y - z = -1$, conforme realizado na atividade 2, para isto, os mesmos deverão usar a ficha do Apêndice D.

x	y	z	(x, y, z)
1	1	7	$(1, 1, 7)$
1	2	6	$(1, 2, 6)$
1	3	5	$(1, 3, 5)$
1	4	4	$(1, 4, 4)$
1	5	3	$(1, 5, 3)$
1	6	2	$(1, 6, 2)$
1	7	1	$(1, 7, 1)$
1	8	0	$(1, 8, 0)$

Tabela 8.5: Soluções da equação $x + y + z = 9$

x	y	z	(x, y, z)
1	1	3	$(1, 1, 3)$
1	2	4	$(1, 2, 4)$
1	3	5	$(1, 3, 5)$
1	4	6	$(1, 4, 6)$
1	5	7	$(1, 5, 7)$
1	6	8	$(1, 6, 8)$
1	7	9	$(1, 7, 9)$
1	8	10	$(1, 8, 10)$

Tabela 8.6: Soluções da equação $x + y - z = -1$

Fazendo o escalonamento o aluno deverá chegar na solução abaixo.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 9 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{-L_1+L_2 \to L_2} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 9 \\ & & & - & 2z & = & -10 \end{array}\right. \xrightarrow{\frac{L_2}{-2} \to L_2} \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 9 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Se $z = 5$, substituindo na primeira equação $x+y+z = 9$, temos $x+y+5 = 9$, então $x+y = 4$. Como temos uma única equação com duas incógnitas, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções. Com y variável livre, se consideramos $y = \alpha$, temos $x + \alpha = 4$, então, $x = 4 - \alpha$.

Portanto, $(4-\alpha, \alpha, 5)$ é solução para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Depois de preenchidas as tabelas, resolvido o sistema e feito os questionamentos, o professor pedirá aos alunos que digitem no GeoGebra na caixa de *Entrada* (Figura 7.1) as equações $x+y+z=9$ e $x+y-z=-1$. Logo após a digitação, aparecerão os gráficos na *Janela de Visualização 3D*, e para melhor poder observar, se o aluno achar necessário, o mesmo poderá mover a *Janela de Visualização*, ampliar ou reduzir (Figura 7.29). Então o aluno deverá digitar também, na caixa de *Entrada*, as triplas ordenadas de suas tabelas, para isto, na caixa de *Entrada*, digitar $(1,1,7)$ teclar *enter*, $(1,2,6)$ teclar *enter*, e assim sucessivamente. Para esta tarefa o aluno deverá usar a ficha do Apêndice D.

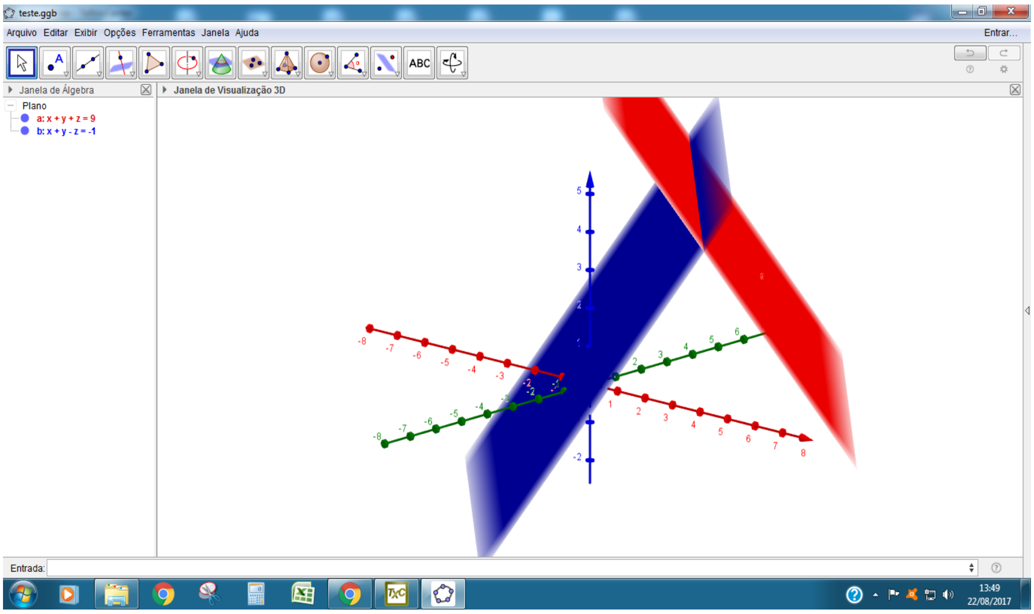


Figura 8.8: Representação Gráfica do sistema $x+y+z=9$ e $x+y-z=-1$

Expectativa: Com as atividades 4 e 5, espera-se que os alunos entendam que uma equação com três incógnitas, apresentam infinitas soluções, e que estas soluções são representadas geometricamente por um plano. E que quando temos um sistema de três equações com três incógnitas, cada é representada por um plano, e que o sistema terá ou não solução, dependendo da posição relativa entre os planos.

8.6 Atividade 6 - Sistema linear - lista de exercícios

Nesta seção será apresentada uma série de exercícios, explorando a interseção de dois planos e classificação de sistemas lineares 3 x 3.

8.6.1 Interseção de dois planos

Neste exercício será explorado como determinar algebricamente a equação paramétrica da reta, interseção de dois planos e como usar o Geogebra, para verificar se a solução está correta.

Foi feita a resolução detalhada apenas do item c), pois a resolução dos itens a) e b) são idênticas a resolução do item c).

Exercício 01) Determine todos os pontos de interseção dos planos:

(a) $\pi_1 : 3x + y = 2$ e $\pi_2 : x + y - 3z = 0$;

(b) $\pi_1 : x + y + z = 1$ e $\pi_2 : x + y - z = 1$;

(c) $\pi_1 : 2x - y + 2z = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y - z = 1$.

Resolução do item (c):

A interseção de dois planos distintos e não paralelos é uma reta, conforme podemos ver na Seção 2.11. Como os dois planos π_1 e π_2 não são paralelos e nem coincidentes (verifique!), a interseção deles é uma reta. E, para determinar uma reta no espaço precisamos ter dois pontos. Então o primeiro passo é determinar dois pontos que pertençam simultaneamente aos planos π_1 e π_2.

Primeiro passo:
Seja o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. ,$$

cujas equações são as equações cartesianas dos dois planos do item (c).
Podemos tentar encontrar um primeiro ponto da reta fazendo $x = 0$ no sistema. Assim, substituindo $x = 0$ nas duas equações do sistema, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -y & + & 2z & = & 0 \\ -2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

A seguir, fazendo o escalonamento deste sistema, temos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -y & + & 2z & = & 0 \\ -2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{-2L_1+L_2 \to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcr} -y & + & 2z & = & 0 \\ & & -5z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\frac{-L_2}{5} \to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcr} -y & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Substituindo $z = -\dfrac{1}{5}$ na equação $-y + 2z = 0$, temos $y = -\dfrac{2}{5}$. Portanto, o ponto $A = (0, -\dfrac{2}{5}, -\dfrac{1}{5})$ pertence à reta interseção.
Agora, tentamos achar um segundo ponto, fazendo $y = 0$ no sistema inicial.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{y=0} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

E, fazendo o escalonamento,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{-2L_1+L_2 \to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2z & = & 0 \\ & & -5z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{-\frac{L_2}{5} \to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Substituindo $z = -\dfrac{1}{5}$ na equação $2x + 2z = 0$, temos $x = \dfrac{1}{5}$. Portanto, o ponto $B = (\dfrac{1}{5}, 0, -\dfrac{1}{5})$ pertence à reta interseção.

Segundo passo: com os dois pontos encontrados A e B, encontramos o vetor diretor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, 0)$.

Terceiro passo: escolhemos um dos pontos encontrados, por exemplo A, e com o vetor diretor $\vec{u}$, montamos as equações paramétricas da reta (ver equação na Seção 2.11), substituindo as coordenadas do ponto A em a_1, b_1 e c_1, respectivamente, e as coordenadas do vetor $\vec{u}$ em $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ e $b_3 - a_3$, respectivamente, ou seja,

$$r : \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) = 0 + \dfrac{1}{5}t \\ y = b_1 + t(b_2 - a_2) = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{2}{5}t \\ z = c_1 + t(b_3 - a_3) = \dfrac{-1}{5} + 0t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, as equações paramétricas da reta são

$$r : \begin{cases} x = 0 + \dfrac{1}{5}t \\ y = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{2}{5}t \\ z = \dfrac{-1}{5} + 0t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Usando o Geogebra

Para ter uma melhor compreensão do exercício podemos utilizar o programa GeoGebra e fazer as representações geométricas dos dois planos e da reta interseção para observar as conclusões obtidas algebricamente. Para uma melhor visualização, escondemos os eixos cartesianos e o plano gerado automaticamente pelo GeoGebra.

1º Passo) Abrir o GeoGebra.
2º Passo) Deixar visível apenas a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização 3D*.
3º Passo) Digitar na *Entrada: 2x-y+2z=0*.
4º Passo) Digitar na *Entrada: 4x-2y-z=1*.

Ao digitar os planos, o aluno já poderá perceber que os mesmos são concorrentes, portanto existe interseção. Também precisam perceber que só estão visualizando parte dos planos, portanto, apenas uma parte da reta, que é a interseção dos dois planos.

5º Passo) Alterar as cores dos planos escolhendo cores diferentes para cada um deles para melhor visualização.
6º Passo) Digitar na *Entrada: A=(0,-2/5, -1/5)*.
7º Passo) Digitar na *Entrada: B=(1/5, 0, -1/5)*.

Se o aluno achar melhor, pode mudar aos cores dos pontos para diferenciá-los, também podem ampliar e girar a imagem para ajudar na visualização. Neste momento é importante que os alunos observem que os dois pontos, A e B encontrados algebricamente, pertencem à interseção dos planos, e que se isto não aconteceu, ou ele digitou errado no GeoGebra ou a resolução do exercício esta errada.

8º Passo) Digitar na *Entrada: vetor(A,B)*.

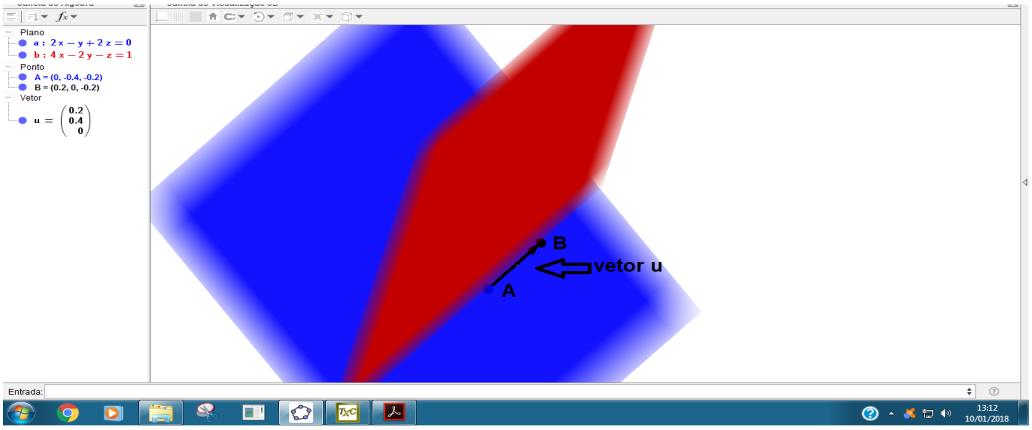


Figura 8.9: Interseção de dois planos

9º Passo) Digitar na *Entrada: reta(A,u)*.

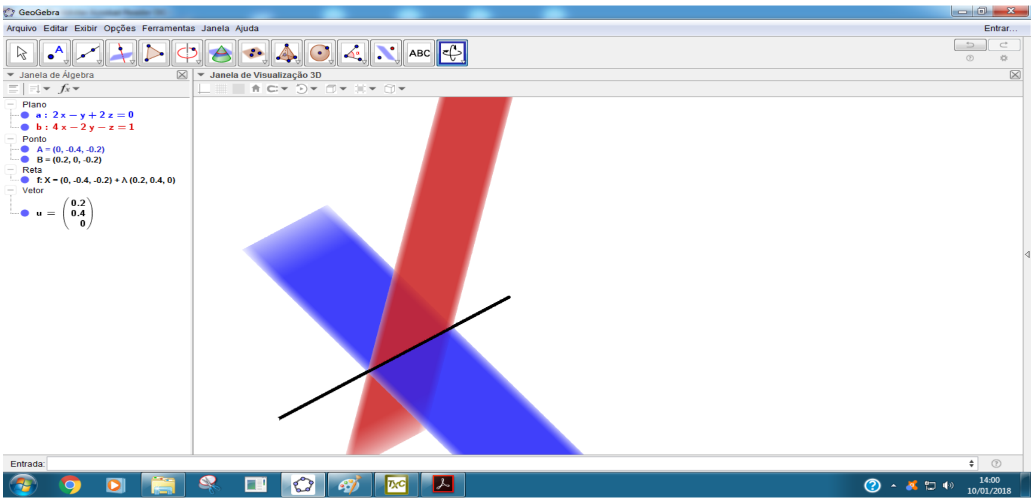


Figura 8.10: Reta interseção de dois planos

Após digitar a equação da reta, isto é, *reta(A,u)* do passo 9, se a mesma não coincidir com a reta de interseção dos dois planos, ou o aluno digitou errado ou a sua resolução algébrica do exercício é que esta errada.

8.6.2 Classificação de sistemas lineares de três equações e três incógnitas

Neste exercício explora-se a classificação de sistemas lineares 3 x 3, fazendo a interpretação da sua representação gráfica, com o uso do software Geogebra.

Exercício 01) Usando o GeoGebra classifique os sistemas a seguir:

Neste exercício os alunos devem digitar as equações no GeoGebra, analisar sua representação gráfica e classificar o sistema como sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI). É importante que o aluno amplie e gire a imagem, sempre que necessário, para que possa melhorar a visualização e fazer sua interpretação corretamente.

Sempre que for classificar um novo sistema, é importante abrir um novo arquivo. Para isto, na *Barra de ferramentas* (ver Figura 7.1), selecionar a opção *Arquivo*, clicar em *Novo*, e seguir as orientações abaixo até o 5º passo, alterando apenas as equações do sistema em cada um dos itens de (a) até (h) a seguir.

(a) $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -2x - 4y + 2z = -6 \end{cases}$$

1º Passo) Abrir o GeoGebra.

2º Passo) Deixar visível apenas a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização 3D*.

Para uma melhor visualização, se o aluno preferir poderá esconder os eixos cartesianos, o plano gerado automaticamente pelo GeoGebra e alterar as cores dos planos. Fazer isto após o 2º passo.

3º Passo) Digitar na *Entrada* a primeira equação, neste caso: *x+2y+3z=1*.

4º Passo) Digitar na *Entrada* a segunda equação, neste caso: *x+2y+z=2*.

5º Passo) Digitar na *Entrada* a terceira equação, neste caso: *-2x-4y+2z=-6*.

Logo após estes procedimentos, o aluno estará visualizando a imagem da Figura 8.11. Também, o aluno deve observar que na *Janela de Álgebra* os planos são denominados por a, b e c, respectivamente.

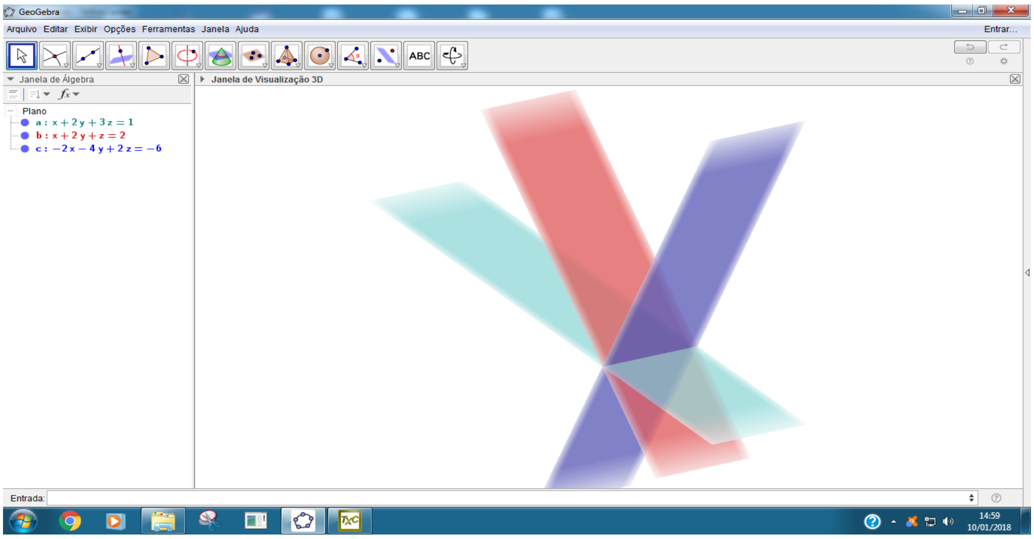


Figura 8.11: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (a)

Se o aluno ainda estiver com dúvida, pode usar a opção *Interseção de Duas Superfícies* (ver Figura 7.22. Após clicar nesta opção, basta clicar em cada um dos dois planos, ou na *Janela de Álgebra* ou na *Janela de Visualização 3D*. É importante fazer a interseção dos planos a e b, a e c e depois b e c. O aluno deverá perceber que as três interseções resultam na mesma reta (Figura 8.12), ou seja, esta reta é a interseção dos três planos. Portanto, temos três planos distintos que têm uma reta em comum e, neste caso, o sistema tem infinitas soluções é (SPI).

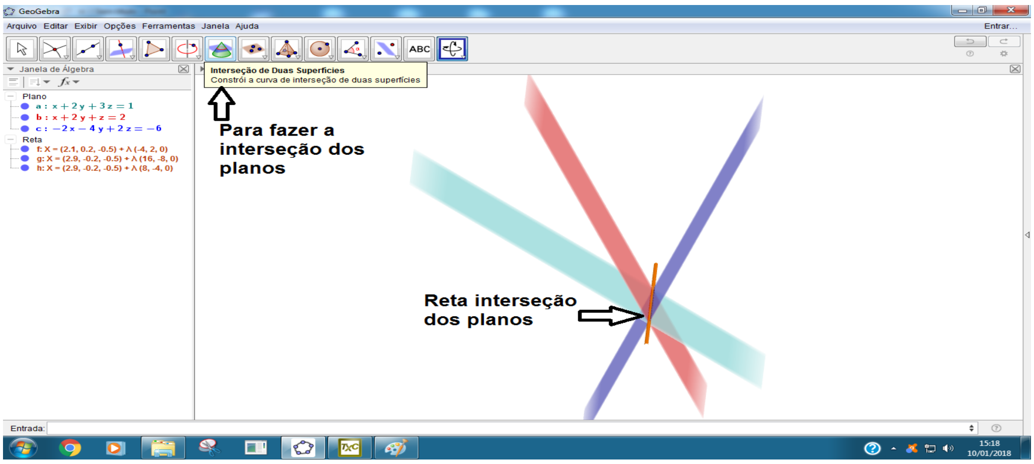


Figura 8.12: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (a)

$$\text{(b)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 8x + y + 6z = 6 \end{cases}$$

Após abrir um novo arquivo, e seguir as orientações iniciais, o aluno deverá fazer as interseções dos planos dois a dois, verificando que são retas. Deverá então, fazer as interseções das retas duas a duas, verificando que as interseções das retas não existem, (Figura 8.13), pois as retas são paralelas, e concluir que os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras, e que, neste caso, o sistema é impossível (SI).

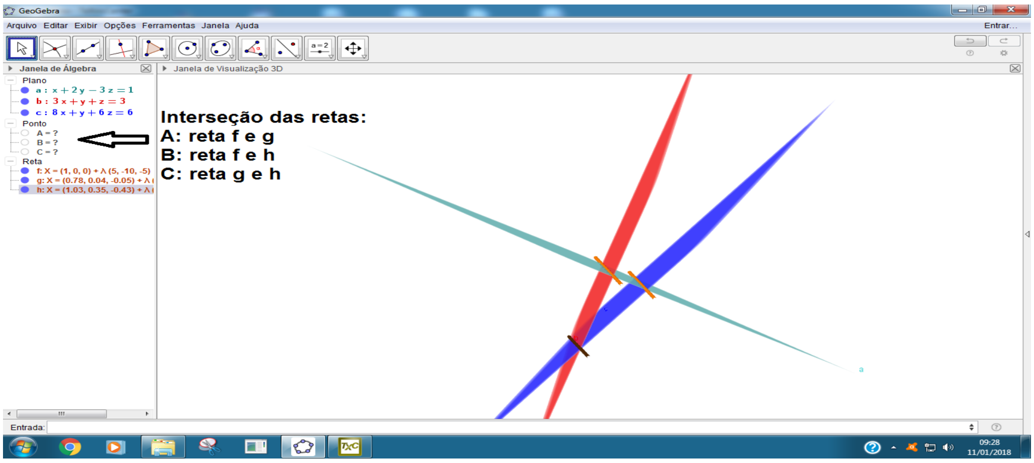


Figura 8.13: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (b)

$$\text{(c)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases}$$

Depos de abrir um novo arquivo e seguir as orientações iniciais, logo após a digitação das equações, o aluno estará visualizando a imagem da Figura 8.14, e será bastante difícil a sua interpretação. Após ampliar e girar a imagem, o aluno terá a imagem da Figura 8.15, o que facilitará muito a sua interpretação, devendo concluir que os planos são paralelos, dois a dois, portanto, não havendo interseção entre eles, e que neste caso, o sistema é impossível (SI).

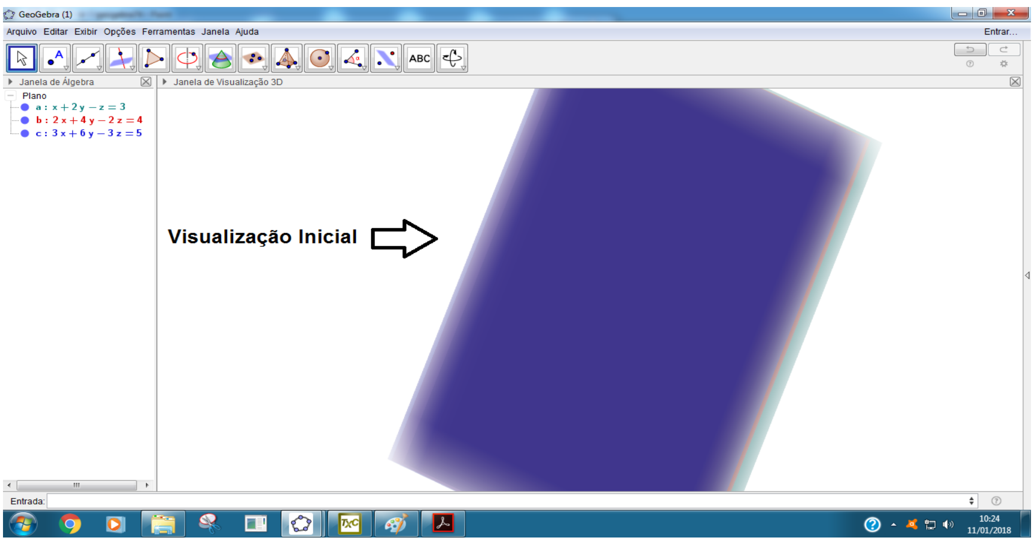


Figura 8.14: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (c)

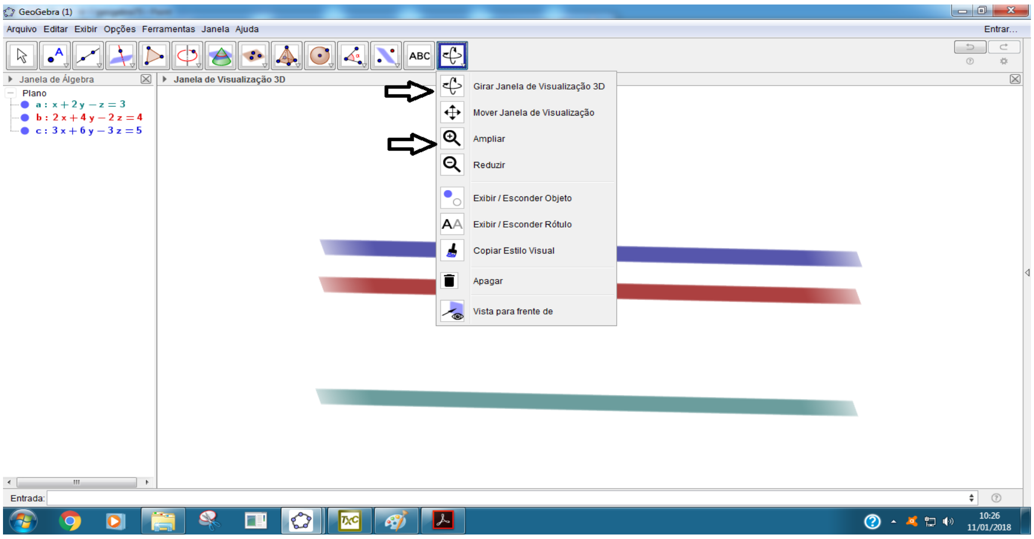


Figura 8.15: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (c)

$$\text{(d)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases}$$

Depois de abrir um novo arquivo e seguir as orientações iniciais, logo após a digitação das equações o aluno estará visualizando a imagem da Figura 8.16, e deverá concluir que os três planos coincidem, e que, neste caso, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

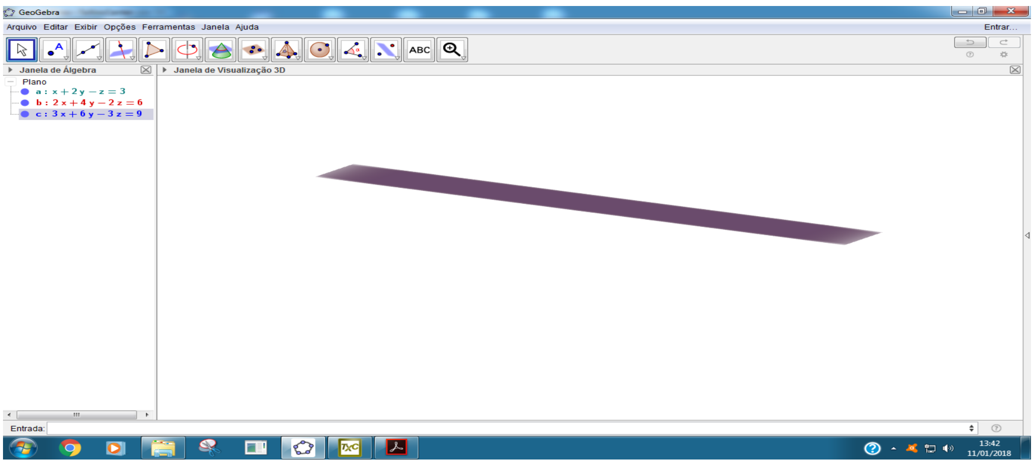


Figura 8.16: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (d)

$$\text{(e)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 8 \end{cases}$$

Depois de abrir um novo arquivo e seguir as orientações iniciais, logo após a digitação das equações o aluno estará visualizando a imagem da Figura 8.17, e deverá concluir que dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles, e que neste caso, o sistema é impossível (SI).

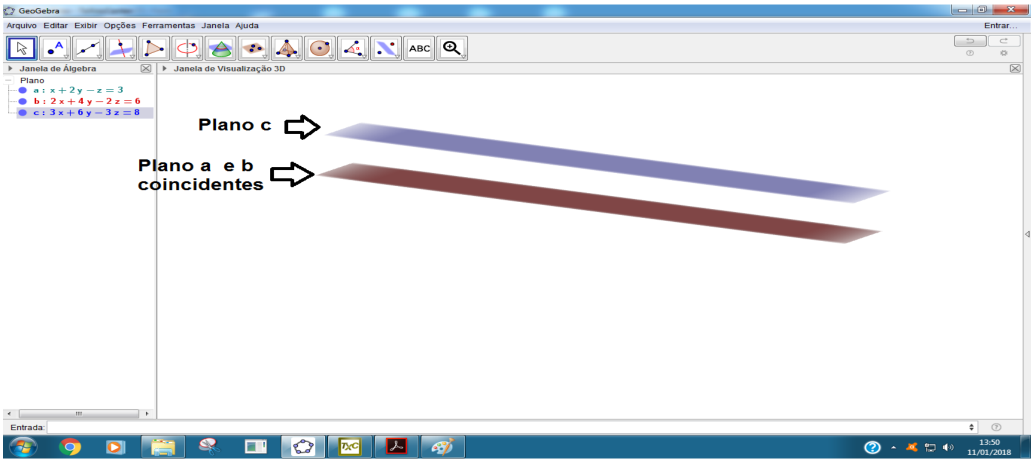


Figura 8.17: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (e)

$$\text{(f)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases}$$

Depois de abrir um novo arquivo e seguir as orientações iniciais, o aluno deverá fazer as interseções dos planos dois a dois, verificando que são retas coincidentes (Figura 8.18), e concluir que dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta, e que neste caso, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Observação: olhando para a Figura 8.18, percebemos que só existem duas retas, a reta f, interseção dos planos a e c e reta g, interseção dos planos b e c. O GeoGebra não fez a interseção dos planos a e b, pois são planos coincidentes, portanto, todos os pontos são comuns.

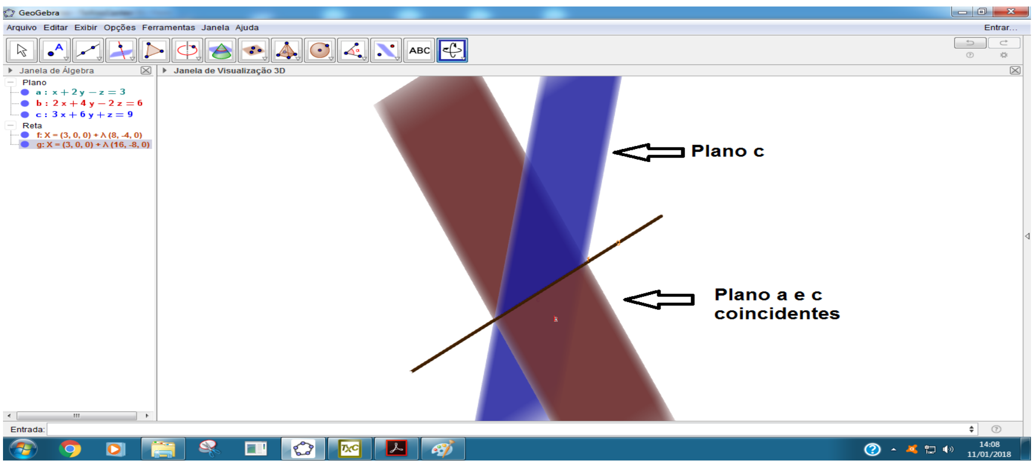


Figura 8.18: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (f)

$$\text{(g)} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

Depois de abrir um novo arquivo, e seguir as orientações iniciais, o aluno deverá fazer as interseções dos planos dois a dois, verificando que aparecerão duas retas, interseções dos planos a e c, e b e c. Como, com relação aos planos a e b, não apareceu interseção, deverá ser concluído que são paralelos. O aluno deverá por consequência, solicitar a interseção de duas retas, verificando que a interseção das retas não existe (Figura 8.19, pois as retas são paralelas, e concluir que temos dois planos paralelos e o terceiro os intersecta segundo retas paralelas, e que neste caso, o sistema é impossível (SI).

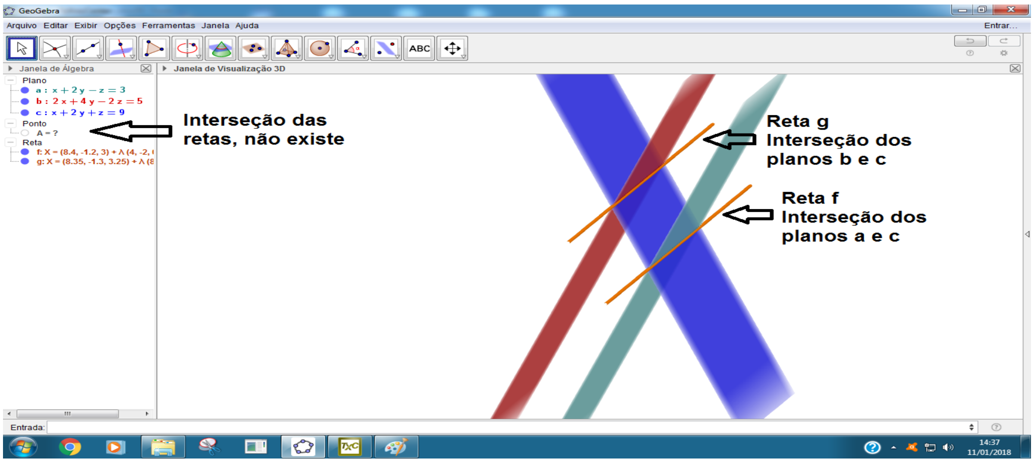


Figura 8.19: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (g)

$$(h)\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Depois de abrir um novo arquivo, e seguir as orientações iniciais, o aluno deverá fazer as interseções dos planos dois a dois, verificando que aparecerão três retas, interseções dos planos a e b, a e c, e b e c. Deverá então fazer as interseções das retas duas a duas, verificando que as interseções das retas geram pontos A interseção das retas f e g, B interseção das retas f e h e C interseção das retas g e h, de mesmas coordenadas, conforme Figura 8.20, e concluir que temos três planos distintos com um único ponto em comum, que é a solução do sistema, e que neste caso, o sistema é possível e determinado (SPD).

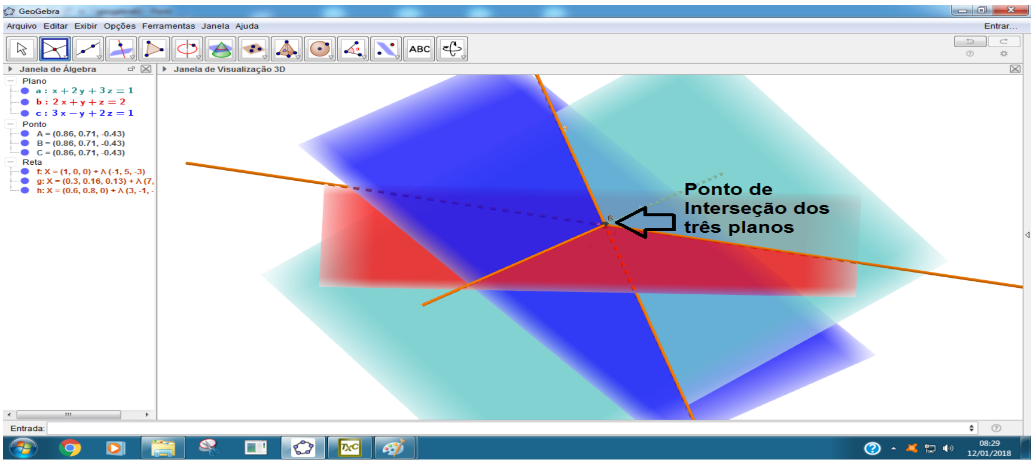


Figura 8.20: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (h)

Outro recurso que pode ser utilizado nesta construção para ajudar na sua visualização e interpretação é desabilitar a visualização dos planos, ficando na tela, apenas as retas e o ponto de interseção das mesmas, conforme Figura 8.21.

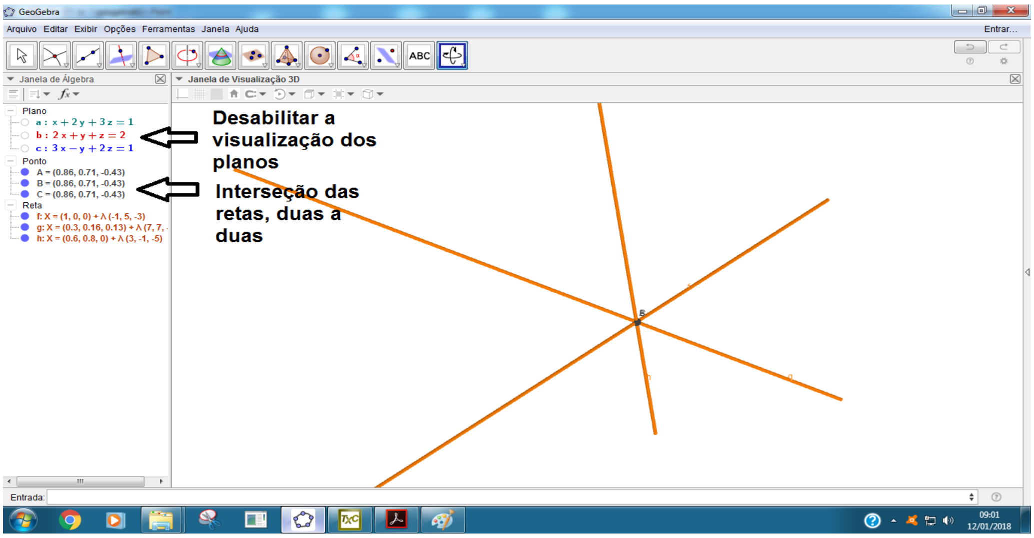


Figura 8.21: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (h)

Podemos também deixar habilitado apenas dois planos e a reta de interseção dos mesmos. Podemos, por exemplo, deixar habilitado a visualização dos planos b e c e a reta de interseção dos dois planos, conforme Figura 8.22. Depois podemos desabilitar a visualização dos planos b e c e habilitar a visualização do plano a, conforme Figura 8.23. E poderemos perceber que esta reta de interseção dos planos b e c, tem um único ponto em comum com o plano a, portanto este sistema só apresenta uma única solução.

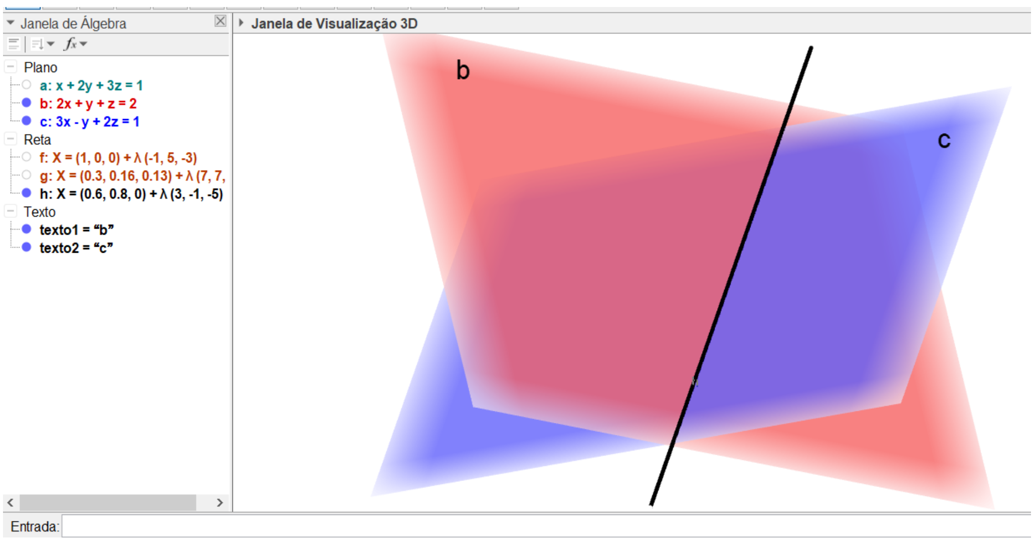


Figura 8.22: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (h)

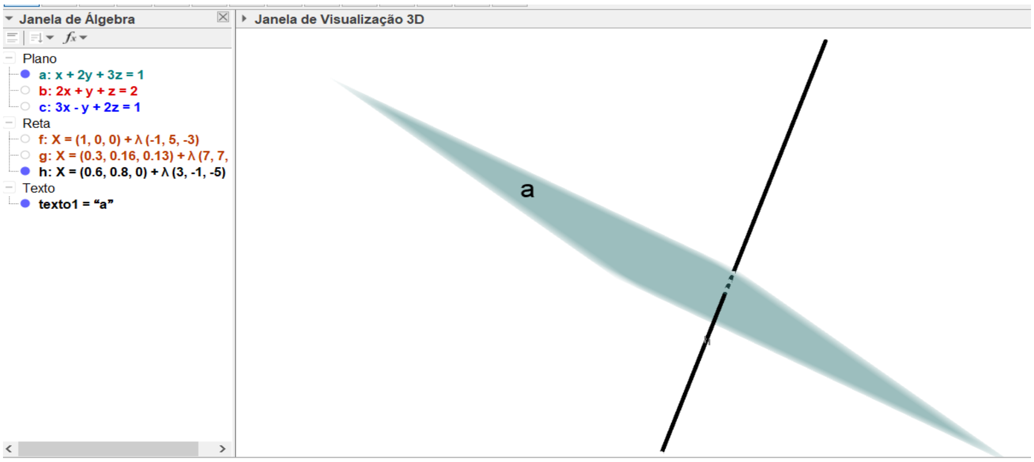


Figura 8.23: Classificação de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 01 (h)

8.6.3 Resoluções algébricas de sistemas lineares de três equações e três incógnitas

O objetivo deste exercício é resolver algebricamente sistemas lineares 3 x 3, e utilizar o Geogebra para conferir os resultados e explorar geometricamente os sistemas.

Exercício 02) Resolva os sistemas a seguir:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 4y & + & 2z & = & -6 \end{array} \right.$$

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -6 \end{array} \right. \xRightarrow{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & -2z & = & 1 \\ & & & & 8z & = & -4 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{-\frac{L3}{4}\to L_3} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & -2z & = & 1 \\ & & & & -2z & = & 1 \end{array} \right. \xRightarrow{L_2=L_3} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & -2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Da segunda linha temos $-2z = 1$, ou seja, $z = -\dfrac{1}{2}$. Se consideramos a variável livre $y = k$, e substituimos y e z na equação $x + 2y + 3z = 1$, temos:

$x + 2k + 3(-\dfrac{1}{2}) = 1$;

$x + 2k - \dfrac{3}{2} = 1$, isolando x;

$x = -2k + 1 + \dfrac{3}{2}$;

$x = -2k + \dfrac{5}{2}$.

Portanto, este sistema tem infinitas soluções e o conjunto solução é $S = \left\{(-2k + \frac{5}{2}, k, -\frac{1}{2}) | k \in \mathbb{R}\right\}$. Para cada valor de k encontramos uma solução para o sistema, por exemplo, se:

$k = 0$, obtemos $A = (\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2})$,

$k = 1$, obtemos $B = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$,

$k = 2$, obtemos $C = (-\frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2})$.

Escolhendo dois destes pontos, por exemplo, $A = (\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ e $B = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$, encontramos o vetor diretor $u = \vec{AB} = B - A = (-2, 1, 0)$.

Escolhendo um dos pontos, por exemplo A, e com o vetor diretor u, podemos escrever as equações paramétricas da reta (ver equação na Seção 2.11), substituindo as coordenadas do ponto A em a_1, b_1 e c_1, respectivamente, e as coordenadas do vetor u em $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ e $b_3 - a_3$, respectivamente, ou seja, substituindo esse valores em:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & a_1 & + & t(b_1 - a_1) \\ y & = & b_1 & + & t(b_2 - a_2) \\ z & = & c_1 & + & t(b_3 - a_3) \end{array}\right. ; \ t \in \mathbb{R},$$

obtemos as equações paramétricas da reta

$$r : \left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & \frac{5}{2} & - & 2t \\ y & = & 0 & + & t \\ z & = & -\dfrac{1}{2} & + & 0t \end{array}\right. ; \ t \in \mathbb{R}.$$

É importante que o aluno entenda que após digitar o sistema no GeoGebra, fazer as interseções dos planos, se ele digitar os pontos que ele encontrou atribuindo valores para k, para sua resolução estar correta, todos os pontos precisam estar contidos na reta, como podemos verificar na Figura 8.24.

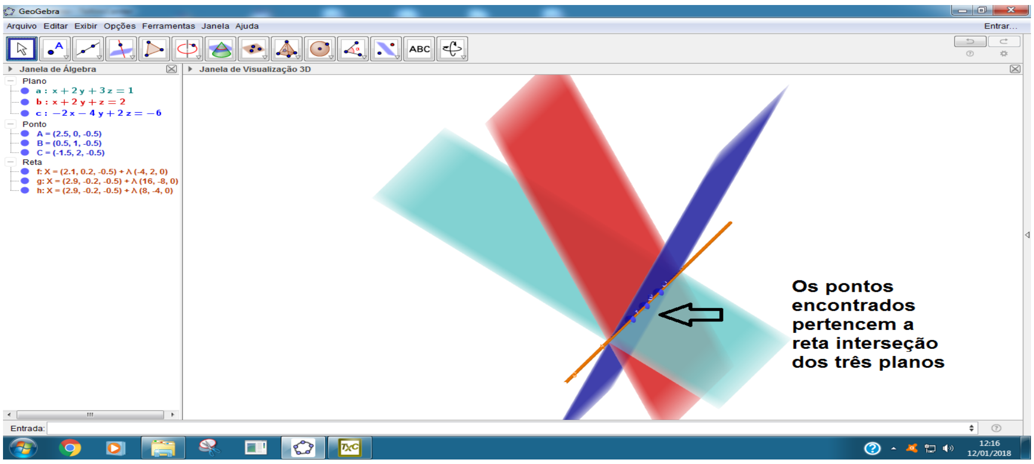


Figura 8.24: Resolução algébrica de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 02 (a)

(b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 8x + y + 6z = 6 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 8x + y + 6z = 6 \end{cases} \xRightarrow[-8L_1+L_3 \to L_3]{-3L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad -5y + 10z = 0 \\ \quad -15y + 30z = -2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{-3L_2+L3 \to L_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad -5y + 10z = 0 \\ \quad\quad 0z = -2 \end{cases}$$

Da terceira linha temos que 0z = -2, ou seja, é impossível, pois para qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$, $0.z = 0$. Portanto, o sistema não possui solução, é um sistema impossível (SI).

(c) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases} \xRightarrow[-3L_1+L_3 \to L_3]{-2L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ \quad 0z = -2 \\ \quad 0z = -4 \end{cases}$$

Da terceira linha temos $0z = -4$, ou seja, é impossível, pois para qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$, $0.z = 0$. Portanto, o sistema não possui solução, é um sistema impossível (SI).

(d) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases} \xRightarrow[-3L_1+L_3 \to L_3]{-2L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ \quad 0 = 0 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$$

Após o escalonamento, ficamos apenas com uma equação, pois a segunda equação é duas vezes a primeira equação, e a terceira equação é três vezes a primeira equação, ou seja, as três equações são equivalentes e como temos o número de equações menor do que o número de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado (SPI).
Isolando z na primeira equação, temos $z = x + 2y - 3$ Portanto, o sistema possui infinitas soluções e o conjuto solução é $S = \{(x, y, x + 2y - 3)|x, y \in \mathbb{R}\}$. Assim, para cada valor de x e de y, encontramos uma solução para o sistema, por exemplo, se:

$x = 0$ e $y = 0$, obtemos $A = (0, 0, -3)$,
$x = 0$ e $y = 1$, obtemos $B = (0, 1, -1)$,
$x = 1$ e $y = 0$, obtemos $C = (1, 0, -2)$.

É importante que o aluno entenda que após digitar a equação do plano no GeoGebra, se ele digitar os pontos que ele encontrou atribuindo valores para x e y, para sua resolução estar correta, todos os pontos precisam estar contidos no plano, como podemos verificar na Figura 8.25.

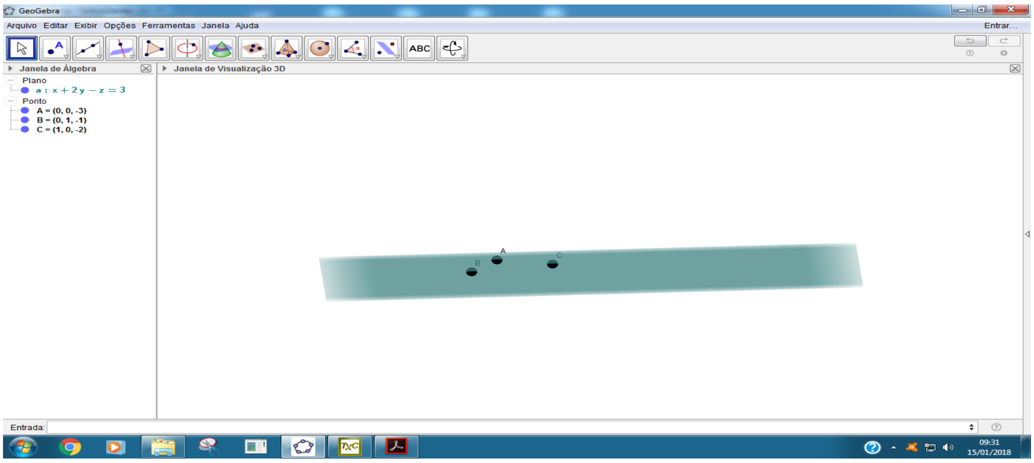


Figura 8.25: Resolução algébrica de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 02 (d)

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right.$

Resolução:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right. \xrightarrow[-3L_1+L_3\rightarrow L_3]{-2L_1+L_2\rightarrow L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & & & & 0z & = & -1 \\ & & & & 0z & = & -1 \end{array}\right.$$

Da segunda linha temos $0z = -1$, ou seja, é impossível, pois para qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$, $0.z = 0$. Portanto, o sistema não possui solução, é um sistema impossível (SI).

(f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 6y & + & z & = & 9 \end{array}\right.$

Resolução:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 6y & + & z & = & 9 \end{array}\right. \xrightarrow[-3L_1+L_3\rightarrow L_3]{-2L_1+L_2\rightarrow L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & & & & 4z & = & 0 \\ & & & & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Da segunda linha temos $4z = 0$, ou seja, $z = 0$. Se consideramos a variável livre $y = k$, e substituimos o valor de y e z na equação $x + 2y - z = 3$, temos:

$x + 2k - 0 = 3$;

$x + 2k = 3$, isolando x;

$x = -2k + 3$.

Portanto, este sistema tem infinitas soluções e o conjuto solução é $S = \{(-2k + 3, k, 0) | k \in \mathbb{R}\}$. Para cada valor de k encontramos uma solução para o sistema, por exemplo, se:

$k = 0$, obtemos $A = (3, 0, 0)$,

$k = 1$, obtemos $B = (1, 1, 0)$,

$k = 2$, obtemos $C = (-1, 2, 0)$.

Escolhendo dois desses pontos, por exemplo, $A = (3, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 0)$, encontramos o vetor diretor $u = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1, 0)$.

Escolhendo um dos pontos, por exemplo A, e com o vetor diretor u, podemos escrever as equações paramétricas da reta (ver equação na Seção 2.11), substituindo as coordenadas do ponto A em a_1, b_1 e c_1, respectivamente, e as coordenadas do vetor u em $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ e $b_3 - a_3$, respectivamente, ou seja, substituindo esse valores em:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & a_1 & + & t(b_1 - a_1) \\ y & = & b_1 & + & t(b_2 - a_2) \\ z & = & c_1 & + & t(b_3 - a_3) \end{array}\right. ; \ t \in \mathbb{R},$$

obtemos as equações paramétricas da reta

$$r : \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & + & t \\ z & = & 0 & + & 0t \end{array}\right. ; \ t \in \mathbb{R}.$$

É importante que o aluno entenda que após digitar o sistema no GeoGebra e fazer as interseções dos planos, se ele digitar os pontos que encontrou atribuindo valores para k, para sua resolução estar correta, todos os pontos precisam estar contidos na reta, como podemos verificar na Figura 8.26.

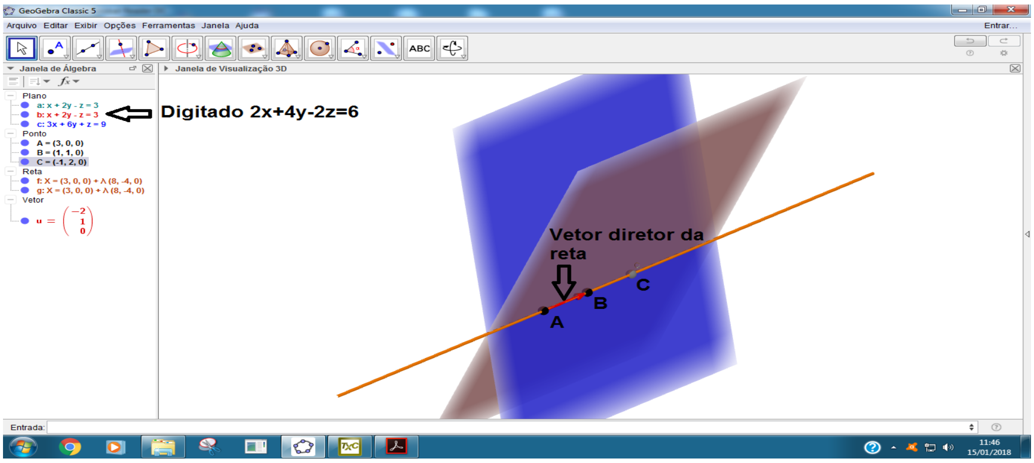


Figura 8.26: Resolução algébrica de sistemas lineares 3 x 3 - ex. 02 (f)

(g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & z & = & 9 \end{array}\right.$

Resolução:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & z & = & 9 \end{array}\right. \xrightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ & & & & 0z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{array}\right.$$

Da segunda linha temos que $0z = -1$, ou seja, é impossível, pois para qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$, $0.z = 0$. Portanto, o sistema não possui solução, é um sistema impossível (SI).

(h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$

Resolução:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow[]{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & -3y & - & 5z & = & 0 \\ & & -7y & - & 7z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[]{-7L_2+3L_3\to L_3} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & -3y & - & 5z & = & 0 \\ & & & & 14z & = & -6 \end{array}\right.$$

A equação da linha 3, ou seja, $14z = -6$, implica que $z = -\dfrac{6}{14} = -\dfrac{3}{7}$. Substituindo na equação da linha 2, temos $-3y - 5(-\dfrac{3}{7}) = 0$ e, portanto, $y = \dfrac{5}{7}$. Substituindo os valores de y e de z na equação da linha 1, temos $x + 2(\dfrac{5}{7}) + 3(-\dfrac{3}{7}) = 1$. Assim, $x = \dfrac{6}{7}$. Logo, $(\dfrac{6}{7}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{-3}{7})$ é a única solução do sistema e o sistema é possível e determinado (SPD).

Capítulo 9

Questões sobre Sistemas Lineares em Provas de Seleção

O objetivo deste capítulo é mostrar exemplos de exercícios que envolvem sistemas lineares, aplicados em provas de vestibulares, e concursos, e como a resolução gráfica ajuda no entendimento e resolução destes exercícios, sem, portanto, entrar em detalhes quanto a utilização do GeoGebra, pois isto já foi detalhado no capítulo 7. Apenas serão dados exemplos de como exercícios deste tipo podem ser trabalhados em sala de aula, ajudando os alunos no entendimento dos conceitos e na execução das provas.

9.1 Vestibular Unicamp 2018 - prova X - questão 26

QUESTÃO 26

Sabendo que k é um número real, considere o sistema linear nas variáveis reais x e y,

$$\begin{cases} x + ky = 1, \\ x + y = k. \end{cases}$$

É correto afirmar que esse sistema

a) tem solução para todo k.

b) não tem solução única para nenhum k.

c) não tem solução se $k = 1$.

d) tem infinitas soluções se $k \neq 1$.

Figura 9.1: Vestibular Unicamp 2018

Nesta questão pede-se para fazer uma análise do parâmetro k, para verificar se o sistema tem ou não solução.

Fazemos a seguir a análise algébrica e também a sua representação geométrica com o auxílio do GeoGebra.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & ky & = & 1 \\ x & + & y & = & k \end{array}\right. \xrightarrow{-L_1+L_2\to L_2} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & ky & = & 1 \\ & & (-k+1)y & = & k-1 \end{array}\right. .$$

Para $k = 1$, note que as duas equações do sistema inicial são iguais, portanto o sistema é possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções.
Também podemos chegar a essa conclusão notando que a segunda equação do sistema escalonado, isto é, a equação $(-k+1)y = k-1$, para $k = 1$, é $0y = 0$. Logo, qualquer número real y é solução. E, pela primeira equação, temos $x = 1-y$. Assim, denotando $y = t$, temos $x = 1-t$ e concluímos que o conjunto solução é $S = \{(1-t, t)|t \in \mathbb{R}\}$, ou seja, uma reta. Portanto, como já dissemos, é um sistema com infinitas soluções (SI).

Para $k \neq 1$, pela segunda equação do sistema escalonado, $(-k+1)y = k-1$, obtemos $-y(k-1) = k-1$, ou seja, $y = -1$.

Substituindo $y = -1$, na primeira equação, temos $x + k(-1) = 1$, o que implica $x - k = 1$. Portanto, $x = k+1$ e a solução para k $\neq 1$ é par ordenado $(k+1, -1)$.

Portanto a alternativa correta da questão é **a) tem solução para todo** k.

Para podermos analisar geometricamente a resolução do sistema, basta digitarmos as equações no caixa de *Entrada* do GeoGebra, pois o mesmo criará um controle deslizante para o valor de k. Então podemos, mudando o valor de k, observar se o sistema tem ou não solução.

Para $k = 1$, na Figura 9.2, podemos observar que na *Janela de Álgebra* aparecem as duas equações iguais, e na *Janela de Visualização*, apenas uma reta, pois as duas retas são coincidentes, ou seja, o sistema é possível e indeterminado, tendo infinitas soluções.

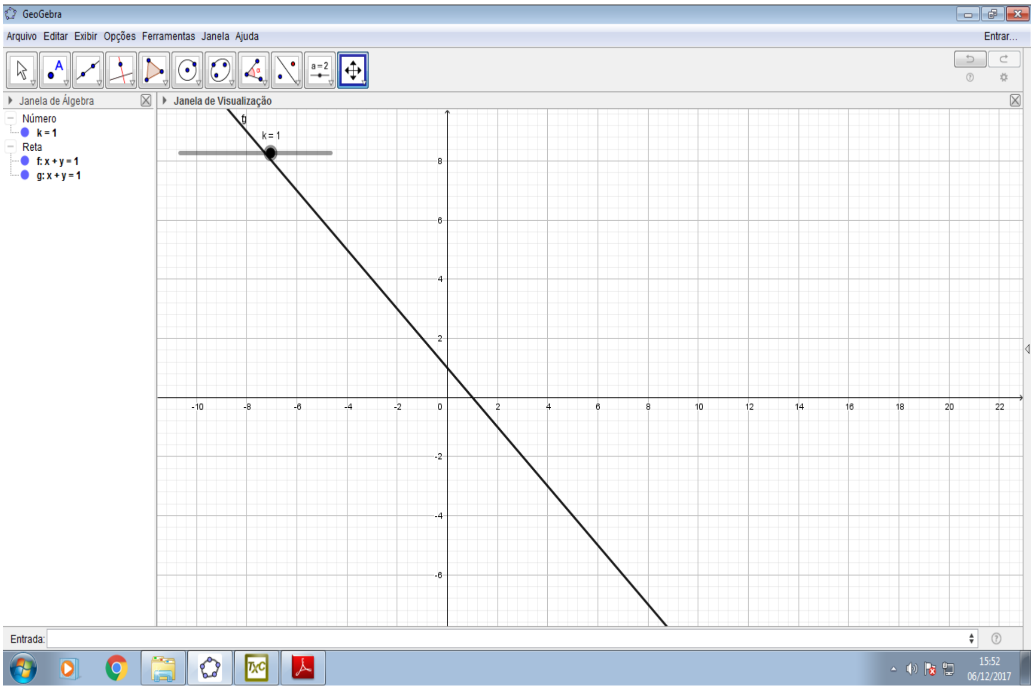


Figura 9.2: Análise do sistema para $k = 1$

Para $k \neq 1$, é interessante criar o ponto de interseção entre dois objetos e também mudar o intervalo de variação de k e, depois, variar o valor de k, e analisar o que acontece, conforme Figura 9.3.

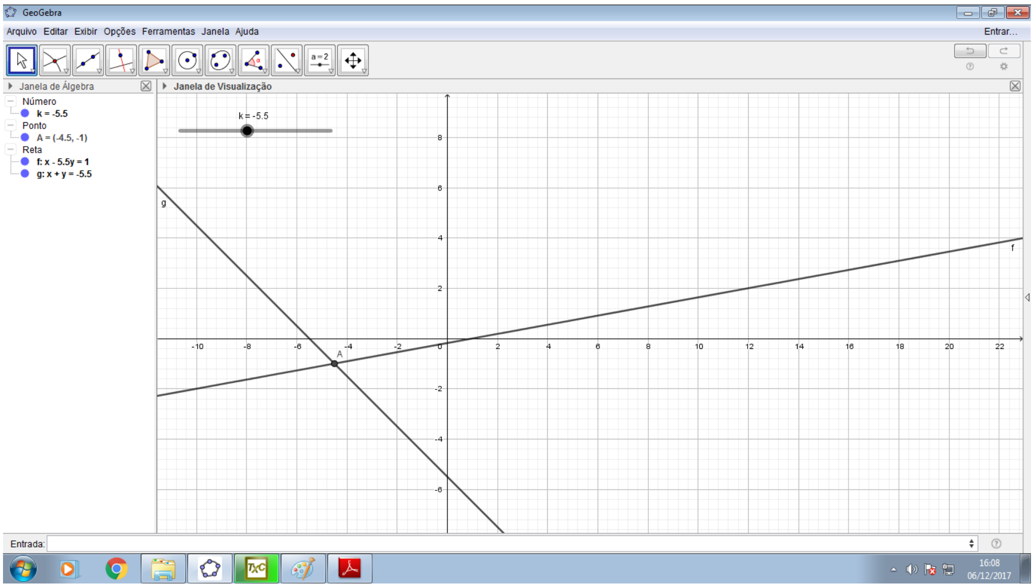


Figura 9.3: Análise do sistema para k $\neq 1$

O que podemos observar é que, para cada valor de $k \neq 1$, existe apenas um ponto de interseção das retas. Portanto, o sistema é possível e determinado, apresentando apenas uma solução.

9.2 FUNDATEC - 2015 - BRDE - Analistas de Sistemas - questão 44

QUESTÃO 44 – A solução do seguinte sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ x - z = 5 \\ y - 2z = 13 \end{cases}$ é:

A) S={(0,2,-5)}

B) S={(1,4,1)}

C) S={(4,0,6)}

D) S={($\frac{3}{2}$,6,$\frac{-7}{2}$)}

E) Sistema sem solução.

Figura 9.4: Concurso BRDE (Banco Regional de Desenvolvimento do Extremo Sul) 2015

Nesta questão pede-se a solução do sistema linear, e como a questão é de alternativas, pode ser resolvida simplesmente testando os valores de cada alternativa ou usando um dos métodos de resolução conhecidos.

Na alternativa d) temos: $x = \dfrac{3}{2} = 1,5$; $y = 6$; $z = \dfrac{-7}{2} = -3,5$. Substituindo no sistema obtemos

$$\begin{cases} 1,5 & + & 2.6 & + & (-3,5) & = & 10 \\ & & 1,5 & - & (-3,5) & = & 5 \\ & & 6 & - & 2(-3,5) & = & 13 \end{cases}$$

Percebemos que as três equações tornam-se verdadeiras, pois: $1,5+12-3,5 = 10$; $1,5+3,5 = 5$; $6 + 7 = 13$. Portanto, a alternativa correta é a **d)**.

Podemos também resolver o sistema usando o método de escalonamento, conforme feito a seguir:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ x & & & - & z & = & 5 \\ & & y & - & 2z & = & 13 \end{cases} \xRightarrow{-L_1+L_2 \to L_2} \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ & & -2y & - & 2z & = & -5 \\ & & y & - & 2z & = & 13 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{L_2+2L_3 \to L_3} \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ & & -2y & - & 2z & = & -5 \\ & & & & -6z & = & 21 \end{cases}$$

Após o escalonamento, pela terceira equação, temos $-6z = 21$, ou seja, $z = -\dfrac{21}{6} = -\dfrac{7}{2} = -3,5$. Substituindo z na segunda equação, temos $-2y - 2.(-\dfrac{7}{2}) = -5$, assim, $y = 6$. Substituindo $z = -\dfrac{7}{2}$ e $y = 6$, na primeira equação, encontramos $x = \dfrac{3}{2}$. Portanto, a solução é $\left(\dfrac{3}{2}, 6, -\dfrac{7}{2}\right)$.

Agora, para vermos a representação geométrica do sistema desta questão e fazermos a interpretação da sua solução, devemos digitar as três equações no caixa de *Entrada* do GeoGebra, uma de cada vez. E para que possamos explorar melhor, podemos mudar a cor de cada plano, girar a figura e desabilitar a visualização de algum plano. Assim, investigamos, por meio visual, se existe interseção entre os três planos. Neste caso, a interseção dos três planos é apenas um ponto, o que significa que a solução do sistema é única.

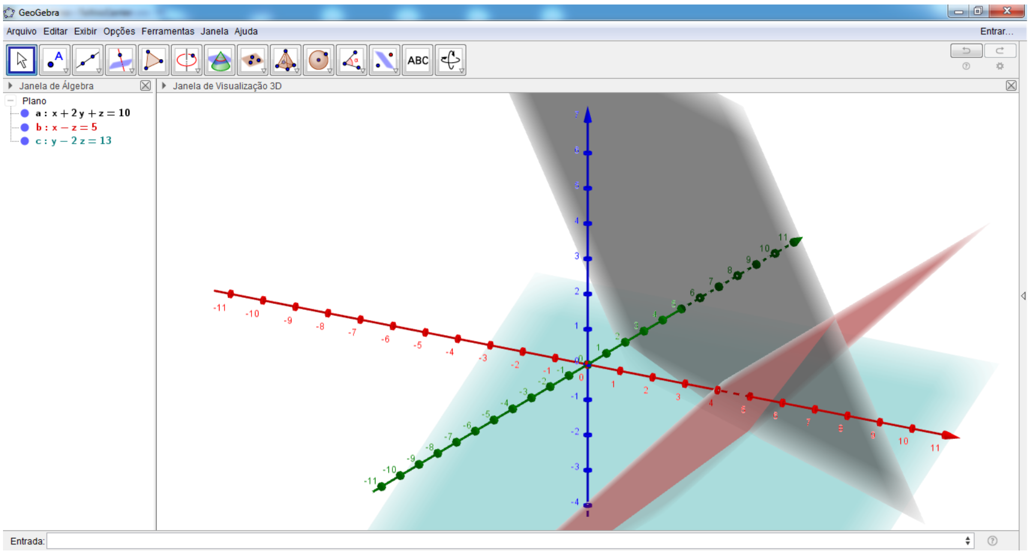


Figura 9.5: Representação Gráfica da questão 44

Outra ferramenta que podemos usar no GeoGebra para ajudar em nossa interpretação é fazer a interseção entre os planos. Para isto, selecionamos na sétima barra de ferramentas (ver Figura 7.22) *Interseção de Duas Superfícies*. Note que na *Janela de Álgebra* os três planos, correspondentes a cada uma das equações do sistema, são denominados a, b e c. Usando a ferramenta *Interseção de Duas Superfícies*, fazemos a interseção entre os planos a e b, a e c e b e c, de forma que podemos observar que estas interseções, de cada par de dois planos, são retas e suas equações paramétricas aparecem na *Janela de Álgebra*.

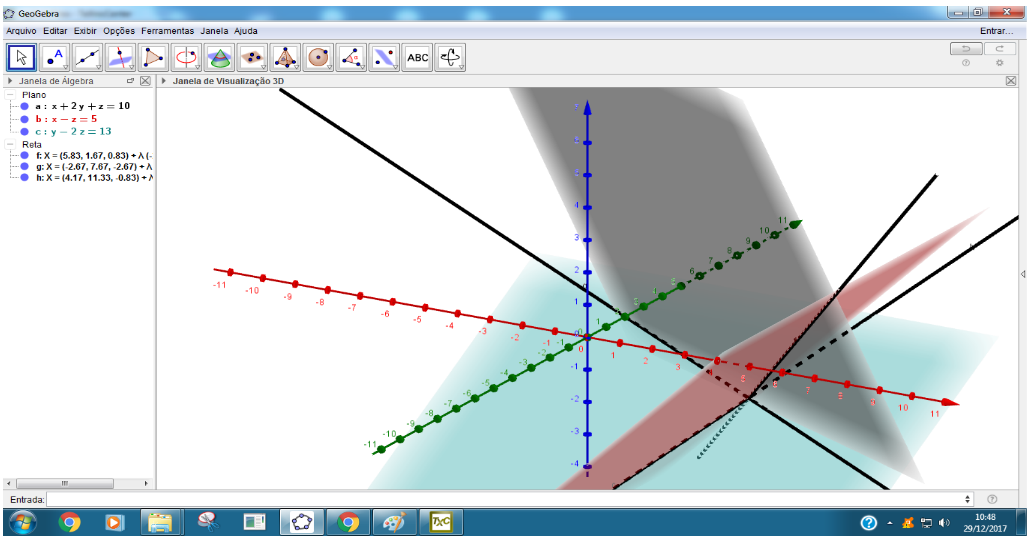


Figura 9.6: Representação Gráfica da questão 44 - Interseção entre planos

Após fazer as interseções entre planos, para facilitar a nossa interpretação podemos desabilitar a visualização dos planos, deixando visível somente as retas de interseção. Depois, usando o recurso *Interseção de Dois Objetos* da segunda barra de ferramentas (ver Figura 7.17), podemos fazer a interseção entre as retas e visualizar que são concorrentes em um ponto. Conforme podemos ver na *Janela de Visualização 3D* e na *Janela de Álgebra*, o ponto $A = (1,5, 6, -3,5)$ é a solução do nosso sistema e a resposta da questão 44. (ver Figuras 9.5, 9.6 e 9.7)

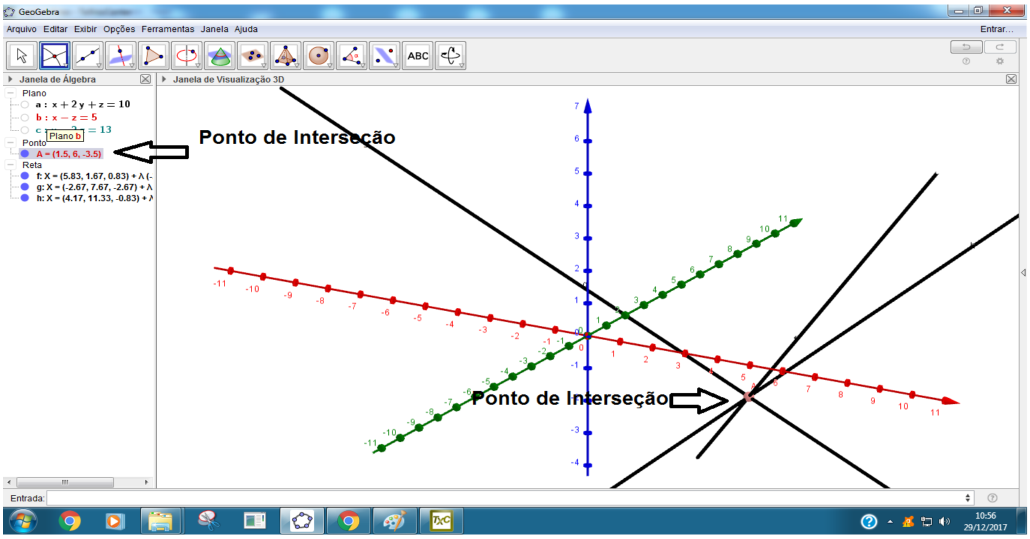


Figura 9.7: Representação Gráfica da questão 44 - Solução do Sistema

Considerações Finais

Nesta dissertação apresentamos o estudo de sistemas lineares, focalizando principalmente na sua resolução gráfica e interpretação geométrica, o que geralmente não é dado ênfase no ensino médio, até porque as provas de vestibulares, concursos e avaliações do governo, geralmente é cobrado a sua resolução algébrica.

Inicialmente apresentamos um pouco da história do surgimento dos sistemas lineares, matrizes e determinantes. Definimos os conceitos necessários com exemplos, aplicações e suas propriedades, formando o conhecimento necessário para a aplicação das atividades propostas.

Após este estudo teórico, foi apresentado de forma sucinta o software Geogebra, e como utilizá-lo para trabalhar a representação gráfica de sistemas lineares.

Por fim, foi proposta uma sequência de atividades para uso em sala de aula, com a finalidade de explorar a representação gráfica de sistemas lineares e sua interpretação geométrica, com o uso do software Geogebra.

Esperamos que este trabalho contribua para o aperfeiçoamento de professores de matemática, levando-os a refletir sobre a importância de se trabalhar a representação gráfica de sistemas lineares, fazendo uso do computador como ferramenta para o desenvolvimento do ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI, José Luiz ... [et al.]. Álgebra Linear. 3ª Ed. São Paulo: *Editora Harbra ltda.*, 1980.

[2] BOULOS, Paulo, CAMARGO, Ivan de. Geometria Analítica. Um tratamento vetorial. *Editora McGraw-Hill Ltda.*, 2005.

[3] BOYER, Carl B. História da Matemática. 3ª Ed. São Paulo: *Editora Edgard Blucher*, 2010.

[4] BRASIL, Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica (2006). Orientações Curriculares para o Ensino Médio, vol. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília

[5] CALLIOLI, Carl A., DOMINGUES, Hygino H., COSTA, Roberto C. F. Álgebra Linear e aplicações. *Editora Atual*, 1990 - 6ª Ed. São Paulo - SP

[6] DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. 1ª Ed. São Paulo: *Editora Ática*, 2010.

[7] DELGADO, Jorge, FRENSEL, Katia, CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: *Coleção Profmat-SBM*, 2013.

[8] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas: *Editora Unicamp*, 2004.

[9] GEOGEBRA. Software de Matemática. Disponível em `https://www.geogebra.org`. Acesso em: 08 set. 2017.

[10] FERREIRA, Maria Cristina Costa, GOMES, Maria Laura Magalhães. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. São Paulo: *Revista do Professor de Matemática (RPM) v.32, pp. 9-16 - SBM.*, 1996.

[11] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 4. 7º Ed. São Paulo: *Atual Editora.*

[12] IEZZI, Gelson ... [et al.]. Matemática: Ciência e Aplicações. Volume 2: ensino médio. 6ª Ed. São Paulo: *Editora Saraiva.*, 2010.

[13] LIMA, Elon Lages ... [et al.]. A Matemática do Ensino Médio. Volume 3. 6ª Ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[14] LIMA, Elon Lages. Coordenadas no Espaço. Rio de Janeiro: *Coleção do Professor de Matemática - SBM.*, 2007.

[15] LIMA, Elon Lages. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. São Paulo: *Revista do Professor de Matemática (RPM) v.23, pp. 8-18 - SBM.*, 1993.

[16] MEC-UNICAMP. Projeto Multimídia - Video: Comendo Números. Disponível em `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073`. Acesso em: 20 jul. 2016.

[17] PEDROLO, Caroline. Estequiometria. Disponível em `www.infoescola.com/quimica/estequiometria/`. Acesso em: 02 mar. 2016.

[18] PROMATH. Sistemas Lineares 2 - Interpretação Geométrica. Disponível em `http://www.promath.com.br/2013/11/sistemas-lineares-2-interpretacao-geometrica/`. Acesso em: 19 jan. 2018.

[19] SANTOS, Reginaldo J.. Matrizes Vetores e Geometria Analítica. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.

[20] WOLFRAM. Biografia: Cauchy. Disponível em `http://scienceworld.wolfram.com/biography/Cauchy.html`. Acesso em: 12 jul. 2016.

Apêndice A

Atividade 1

Roteiro para o aluno:

Preencha a tabela abaixo, com possíveis soluções para a equação $x + y = 10$.

x	y	(x, y)

Tabela A.1: Tabela para realizar a atividade 1

QUESTÕES

a) Quantas soluções você encontrou?

b) Você acha que existem outras soluções possíveis?

c) Qual a condição necessária para o par (x, y) ser solução?

d) Qual o procedimento que você utilizou para encontrar as soluções?

e) Quantas soluções você acha que existem?

Roteiro para o aluno - uso do computador:

Abra o GeoGebra.

Digite na *caixa de entrada* a equação $x + y = 10$.

Digite na *caixa de entrada* todos os pares ordenados de sua tabela.

Crie vários pontos sobre a reta.

Após tudo digitado, observe o gráfico e responda as questões abaixo:

a) Todos os pares ordenados da tabela pertencem ao gráfico?

b) Verifique os pontos do gráfico que você criou que não pertencem a sua tabela. Estes pontos são soluções do sistema?

c) Todos os pontos do gráfico são soluções do sistema?

d) O que você pode concluir?

Apêndice B

Atividade 2

Roteiro para o aluno:

Preencha as tabelas abaixo, com possíveis soluções para a equação $x + y = 8$ e $x - y = 4$, respectivamente.

x	y	(x, y)

x	y	(x, y)

QUESTÕES

a) Você encontrou algum par ordenado comum as duas tabelas?

Roteiro para o aluno - uso do computador:

Abra o GeoGebra.

Digite na caixa de entrada a equação $x + y = 8$.

Digite na caixa de entrada a equação $x - y = 4$.

Digite na caixa de entrada todos os pares ordenados de suas tabelas.

Crie vários pontos sobre a reta.

Após tudo digitado, observe o gráfico e responda as questões abaixo:

a) A resolução que você encontrou pertence as suas tabelas? Justifique. Em caso de resposta negativa, mas poderia pertencer?

b) Observando o gráfico, qual é a posição relativa entre as duas retas?

c) Analisando sua solução e a representação gráfica, o que você percebe?

d) Após a realização desta atividade, o que você pode concluir?

Apêndice C

Atividade 4

Roteiro para o aluno:

Preencha a tabela abaixo, com possíveis soluções para a equação $x + y + z = 10$.

x	y	z	(x, y)

QUESTÕES

a) Quantas soluções você encontrou?

b) Você acha que existem outras soluções possíveis?

c) Qual o procedimento que você utilizou para encontrar as soluções?

d) Quantas soluções você acha que existem?

Roteiro para o aluno - uso do computador:

Abra o GeoGebra.

Digite na *caixa de entrada* a equação $x + y + z = 10$.

Digite na *caixa de entrada* todas as triplas ordenadas de sua tabela.

Digite na *caixa de entrada* algumas triplas ordenadas que não pertencem a sua tabela.

Após tudo digitado, observe o gráfico e responda as questões abaixo:

a) Todas as triplas ordenadas da tabela pertencem ao mesmo plano?

---

b) As triplas ordenadas que você escolheu, que não pertencem a sua tabela, pertencem ao plano?

---

c) Todos os pontos do plano são soluções do sistema?

---

d) O que você pode concluir?

Apêndice D

Atividade 5

Roteiro para o aluno:

Preencha as tabelas abaixo, com possíveis soluções para a equação $x + y + z = 9$ e $x + y - z = -1$, respectivamente.

x	y	z	(x, y, z)

x	y	z	(x, y, z)

QUESTÕES

a) Você encontrou alguma tripla ordenada comum as duas tabelas?

---

b) Faça o escalonamento do sistema, para encontrar as possíveis soluções?

Roteiro para o aluno - uso do computador:

Abra o GeoGebra.

Digite na *caixa de entrada* a equação $x + y + z = 9$.

Digite na *caixa de entrada* a equação $x + y - z = -1$.

Digite na *caixa de entrada* algumas triplas ordenadas que pertencem a sua tabela.

Após tudo digitado, observe o gráfico e responda as questões abaixo:

a) A resolução que você encontrou pertence as suas tabelas? Justifique. Em caso de resposta negativa, mas poderia pertencer?

b) Observando o gráfico, qual é a posição relativa entre os dois planos?

c) Analisando sua solução e a representação gráfica, o que você percebe?

d) Existem pontos de interseção entre os planos? Se sim, quantos?

e) Após a realização desta atividade, o que você pode concluir?