UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOÃO HENRIQUE RODRIGUES DO CANTO TITO

ENSINO DE LOGARITMOS A PARTIR DO ESTUDO DA ESCALA MUSICAL

Campinas
2018

JOÃO HENRIQUE RODRIGUES DO CANTO TITO

ENSINO DE LOGARITMOS A PARTIR DO ESTUDO DA ESCALA MUSICAL

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Marcelo Firer

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JOÃO HENRIQUE RODRIGUES DO CANTO TITO E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCELO FIRER

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

T538e

Tito, João Henrique Rodrigues do Canto, 1983-
Ensino de logaritmos a partir do estudo da escala musical / João Henrique Rodrigues do Canto Tito. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Marcelo Firer.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Logaritmos. 2. Música. 3. Música - Modelos matemáticos. 4. Intervalos musicais e escalas. 5. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. I. Firer, Marcelo, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Teaching of logarithms from the study of the musical scale
Palavras-chave em inglês:
Logarithms
Music
Music - Mathematical models
Musical intervals and scales
Mathematics (High school) - Study and teaching
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Marcelo Firer [Orientador]
Humberto Luiz Talpo
Daniel Miranda Machado
Data de defesa: 18-12-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 18 de dezembro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARCELO FIRER

Prof(a). Dr(a). HUMBERTO LUIZ TALPO

Prof(a). Dr(a). DANIEL MIRANDA MACHADO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Thaís, parceira para a vida e para a música, que me apoiou em cada passo desse projeto.

À minha tia Maria do Rosário, por abrir as portas para a música ao me presentear com meu primeiro instrumento musical.

Aos meus professores de música:

Fábio “5B”, que orientou meus primeiros passos no estudo da música;

Rogério “Moonward” Ferarri, que me ensinou a sentir a música e a tocar com o coração;

Kléber Gonçalves, que me mostrou que a música poderia ser um desafio à percepção e um estímulo à curiosidade;

Andrés Zúñiga, que me apresentou uma nova perspectiva de interpretação para a música e ajudou a por em prática aquilo que até então eram apenas ideias.

Ao meu orientador, Marcelo Firer, por toda a atenção, inspiração e respeito.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de atividade para alunos de ensino médio, a qual tem por objetivo introduzir o conceito de logaritmos a partir de práticas relacionadas ao estudo da escala musical. Foi construída a partir de práticas em sala de aula e apresenta uma reflexão a respeito dos resultados obtidos.

Esta atividade tem por objetivo apresentar os logaritmos pela perspectiva da relação entre progressões, de modo a complementar e aprofundar o tema quando combinado à forma tradicional de apresentação prevista pelos parâmetros curriculares do ensino médio brasileiro.

Palavras-chave: logaritmos, música, escala musical, ensino médio

ABSTRACT

This work presents a proposal of activity for high school students, which aims to introduce the concept of logarithms from practices related to the study of musical scale. It was constructed from practices in the classroom and presents a reflection about the results obtained.

This activity aims to present the logarithms from the perspective of the relationship between progressions, in order to complement and deepen the theme when combined with the traditional form of presentation predicted by the Brazilian curricular parameters of high school.

Keywords: logarithms, music, musical scale, high school

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história da humanidade, com o passar do tempo, alguns elementos do dia-a-dia perdem seus propósitos e significados originais e se transformam para se adequar às novas necessidades e práticas. O botão de ‘salvar’ dos softwares de edição de texto ou planilhas, por exemplo, são representados por um disquete, apesar deles já não serem utilizados há muitos anos. O aplicativo de envio de ‘e-mail’ é representado por um ícone na forma de um envelope de papel, apesar de ser exatamente a negação, tanto da necessidade de envio físico, quanto da espera da chegada e da resposta da mensagem. Dessa forma, é possível perceber que o sentido real do símbolo já não ocupa o mesmo lugar que ocupava na sociedade, porém o costume faz com que sejam aceitos com naturalidade.

Seguindo essa ideia, além dos símbolos, é possível observar incoerências desse tipo em práticas cotidianas, sejam pessoais ou profissionais. Por exemplo, o relógio de pulso passou a ser usado como um adorno corporal, ou uma joia, uma vez que o telefone celular apresenta as horas de maneira precisa, e inclusive com atualizações automáticas para horário de verão, e ajustes automáticos de fuso horário de acordo com sua localização.

Partindo dessa breve digressão surge o questionamento a respeito das práticas educacionais: será que elas estão adequadas às demandas da sociedade, ou estariam, nas escolas, repetindo práticas obsoletas pelo simples hábito de ensiná-las?

Levando esse questionamento para um ponto bem mais específico, será que o ensino de logaritmos ainda se faz necessário?

De acordo com (LIMA, 1996, p. introdução), o propósito original dos logaritmos já não tem a mesma relevância computacional em relação ao período em que foi concebido:

> *Os logaritmos, que durante três séculos e meio tão bem desempenharam o papel de maravilhoso instrumento para simplificar o cálculo aritmético permitindo que se efetuassem, com rapidez e precisão, operações complicadas como a de multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoente fracionário, perderam há algum tempo seu lugar de eficiente calculador, hoje ocupado com grande êxito pelas maquininhas eletrônicas.*

Ou seja, com a criação das calculadoras eletrônicas, o propósito original para o qual os logaritmos foram criados deixou de ser tão prático. A agilidade para realização das contas e diversidade de operações permitidas pelas calculadoras fizeram que recursos utilizados antigamente perdessem seu sentido ou assumissem novos significados.

A partir dessa reflexão é imediato o questionamento a respeito da necessidade de se manter o ensino de logaritmos no currículo educacional. A respeito desse questionamento complementa:

> *Apesar disso, os logaritmos continuam por motivos bem diversos, a merecer uma posição de destaque no ensino da Matemática, devido à posição central que ocupa nessa ciência e em suas aplicações. Essa posição é permanente porque a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, constituem a única maneira de descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional a quantidade daquela grandeza existente num dado momento.*

Sob essa perspectiva se faz necessário repensar a abordagem desse tema, de modo que, não só a utilidade prática de suas aplicações seja evidenciada, mas também a compreensão do conceito em si seja favorecida. A partir de suas propriedades, a combinação entre a utilização original, como instrumento facilitador de cálculos, e a atual, como inversa da função exponencial, representam o equilíbrio entre entendimento prático e teórico.

1.1. Proposta da atividade

A proposta deste estudo é apresentar uma atividade de construção de um instrumento musical, de modo que o caminho a se percorrer para realizar essa atividade apresente o conceito de logaritmo, tanto pelo ponto de vista pelo qual foi concebido, como ferramenta facilitadora de cálculos, quanto sob uma perspectiva mais contemporânea, relacionada à interpretação gráfica da função logarítmica e de suas propriedades.

Para tal será apresentado o conceito básico da formação da escala musical ocidental, comumente denominada ‘Escala Igualmente Temperada’, a qual segue uma sequência logarítmica na definição de suas notas. Além disso, se propõe realizar uma modesta oficina de criação de instrumentos musicais ou, luteria experimental, para construir um instrumento a partir de cálculos realizados através de conceitos básicos da análise da escala musical e medição de outros instrumentos.

Com essa perspectiva, o estudo da escala musical temperada, a qual será apresentada na seção 3.2, se mostra como um possível ponto de partida para a introdução formal do conceito de logaritmos, haja vista que se utiliza da percepção estética inerente aos humanos para atribuir sentido a um conceito usualmente apresentado de maneira bastante abstrata. Além disso, a ludicidade dessa atividade se mostrou em experiência realizada em sala de aula, como um fator motivacional e convidativo à participação dos estudantes.

Este trabalho está organizado do seguinte modo:

- Capítulo 2 está voltado à análise e explicação dos logaritmos, sob dois pontos de vista: o usual, aplicado no dia-a-dia escolar como a função inversa das funções exponenciais, e outro, à luz de sua definição original, como uma comparação entre duas progressões.

O método chamado aqui de ‘usual’, o qual será apresentado na seção 2.2, se mostra importante no que diz respeito à compreensão da função logarítmica, tendo em vista a facilidade da representação gráfica da evolução de certa grandeza. Já a perspectiva dos logaritmos como relação entre progressões, apresentado na da seção 2.3, se diferencia do caso anterior, pois permite uma abordagem pontual sob o ponto de vista do cálculo de valores específicos dos logaritmos, por se tratar de uma abordagem mais próxima de sua definição original, ou seja, logaritmo como uma ferramenta que propicia agilidade nos cálculos, convertendo operações trabalhosas em outras mais simples. Além disso, a característica discreta das medidas dos tubos que formarão a representação material de nosso objeto final, a flauta pan, serão representados a partir da relação entre duas progressões, o que tornam essa abordagem bastante coerente com a proposta da atividade.

Vale deixar claro que a apresentação do conceito de logaritmos por mais de um método não tem o intuito de estabelecer um juízo de valores. O propósito não é determinar se um método é melhor do que o outro, mas buscar por mais de um caminho maneiras de evidenciar as propriedades e características dos logaritmos e da função logarítmica. Além disso, vale ressaltar que, independentemente da abordagem tomada, serão apresentados apenas elementos suficientes sobre as definições de logaritmo, para que o propósito dessa atividade seja discutido. Para mais detalhes, aconselha-se a consulta ao livro ‘Logaritmos’, (LIMA, 1996), uma das referências importantes deste trabalho.

- Capítulo 3 voltado à apresentação formação da escala musical sob o ponto de vista matemático, o que se faz necessária e indispensável para o desenvolvimento dessa atividade. Serão explicados conceitos e termos técnicos utilizados no decorrer da atividade.

- Capítulo 4 voltado à interpretação de aspectos físicos da escala musical, a partir da análise de ondas e da relação entre o comprimento de um tubo sonoro e a frequência gerada por ele.

- Capítulo 5 voltado ao desenvolvimento do plano de aula para a aplicação da atividade prática. Serão apresentados planos de aula dos professores, e o material destinado aos estudantes, com os encaminhamentos da atividade.

-Capítulo 6, no qual será apresentado um relato pessoal sobre experiência da aplicação da atividade em sala de aula, e as reflexões provenientes dessa prática e as reformulações realizadas no material a partir da avaliação dessas reflexões.

Vale ressaltar que serão apresentadas as relações entre formação da escala musical e a teoria física sobre ondas sonoras e harmônicos em tubos fechados, apresentadas nos capítulos 3 e 4, respectivamente, de modo que as relações estabelecidas entre elas permitirão que obtenhamos os resultados desejados por meio da prática da construção do instrumento musical.

2. LOGARITMOS

Este capítulo tem como propósito apresentar os logaritmos sob dois aspectos: como relação entre uma progressão aritmética e uma geométrica, que de acordo com (EVES, 2004), forma a qual se deu sua concepção original, e sob a perspectiva da inversa em relação à função exponencial. Compreender essas duas abordagens é importante para o desenvolvimento da atividade prevista por esse trabalho, portanto, nas seções a seguir serão apresentadas definições e propriedades fundamentais para a compreensão da escala musical como uma sequência logarítmica.

2.1. Percepção inata sobre logaritmos

A formalização do conceito de logaritmos se dá normalmente na primeira série do ensino médio (PCN), devido à necessidade da apresentação de pré-requisitos, como função inversa e função exponencial, além da complexidade do tema. Não obstante, existem evidências de que a percepção humana a respeito da noção de proporcionalidade é inata. De acordo com (DEHAENE, IZARD, *et al.*, 2008), indivíduos não submetidos ao processo formal de escolarização, ou com baixíssima escolaridade, apresentam percepção de posicionamento dos números em escala logarítmica, e não linear. Nessa pesquisa, realizada em uma tribo indígena da Amazônia brasileira, concluiu-se que a proporção entre quantias é intuitivamente mais relevante que a análise da diferença entre as quantias.

Proponho, a seguir, uma análise hipotética como forma de reflexão a respeito dessa percepção logarítmica inata:

A que distância o número 50 se encontra em relação aos números 1 e 99?

Pensando sob o ponto de vista aritmético a resposta é a mesma: 49 unidades de distância em relação a ambos.

Agora, analise a seguinte pergunta:

O que é maior: a diferença entre 1 e 50 ou a diferença entre 50 e 99?

Usualmente se atribui ao termo ‘diferença’ o significado da subtração entre os valores, e sob esse ponto de vista a resposta esperada é que ambas as diferenças sejam iguais.

Porém, sob o ponto de vista da proporcionalidade entre os valores, a resposta seria diferente. A razão 50 : 1 evidencia que o primeiro número é 50 vezes maior que o segundo, enquanto a razão 99 : 50 se aproxima, mas sequer chega a ser 2.

No livro 'Rápido e devagar: duas formas de pensar' (KAHNEMAN, 2012, p. 349) foi apresentada um relato de um experimento que revela algumas características a respeito dessa percepção logarítmica inata.

Observe as duas questões propostas:

> *Problema 3: Além do que já tem, você recebeu mil dólares. Agora lhe pedem para escolher uma dessas opções: 50% de chance de ganhar mil dólares OU conseguir quinhentos dólares com certeza.*
>
> *Problema 4: Além do que já tem, você recebeu 2 mil dólares. Agora lhe pedem para escolher uma dessas opções: 50% de chance de perder mil dólares OU perder quinhentos dólares com certeza.*

Perceba que matematicamente trata-se de duas situações equivalentes, tendo em vista que em ambas há 50% de chances de ficar com mil e quinhentos dólares e 50% de chance de ficar com dois mil dólares. Dessa maneira é de se esperar que os participantes da pesquisa tivessem preferências semelhantes em ambas as questões, entretanto os resultados das escolhas não comprovaram essa expectativa: no 'Problema 3' a grande maioria de pessoas optou pela resposta segura, ou seja, preferiram a certeza de ganhar quinhentos dólares, enquanto no 'Problema 4' a grande maioria preferiu o risco da aposta.

Segundo (KAHNEMAN, 2012, p. 349):

> *A comparação dos problemas enfatiza o papel crucial do ponto de referência a partir do qual as opções são avaliadas.*

Dessa maneira, explorar essa percepção e utilizá-la como ponto de partida para o ensino de logaritmos pode facilitar a compreensão do tema, além de justificar a necessidade de formalização do conceito e atribuir mais sentido prático à teoria.

2.2. Logaritmo como inversa da exponencial

Dada a vivência prática cotidiana do ensino de matemática é possível afirmar que os logaritmos representam um dos temas que os estudantes mais tem dificuldades de compreender.

A abordagem escolar usual dos logaritmos, de acordo com a maioria dos livros didáticos determinados pelo PNLD (BRASIL, 2018) se faz a partir da apresentação do tema como a função inversa da função exponencial, e normalmente traz as propriedades operatórias dos logaritmos sob a perspectiva de mera ferramenta de resolução de exercícios e problemas, sem explorar significados mais profundos, como o redimensionamento de grandezas e, segundo (LIMA, 1996), "*permitindo que se efetuassem, com rapidez e precisão, operações complicadas, como a multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoente fracionário*".

Outro elemento que vale ser mencionado é diferença entre o domínio da função logarítmica quando abordada sob a perspectiva da função inversa à exponencial, ou como relação entre progressões: enquanto no primeiro caso a função possui domínio real, no segundo, o domínio é o conjunto dos números naturais. Essa diferença será relevante na fase final da atividade prática proposta no capítulo 5, uma vez que o objeto final utilizado como recurso didático, a flauta pan, trata-se de um instrumento que possui organização discreta dos tubos responsáveis por produzir cada uma das notas da escala musical, sendo dessa maneira abordado sob a perspectiva do logaritmo como relação entre progressões

Por outro lado, um efeito positivo da abordagem dos logaritmos como inversa da função exponencial reside no fato de que o gráfico criado a partir dessa interpretação gráfica facilita na compreensão da dinâmica associada a fenômenos interpretados matematicamente por meio dos logaritmos, e favorece a interdisciplinaridade ao evidenciar aplicações práticas e interpretações dos logaritmos a partir de eventos.

Por exemplo, suponha que se queira analisar os danos gerados à audição em função da distância que se encontra em relação a uma fonte sonora como um altofalante. A intensidade sonora percebida por um receptor em função de sua distância em relação à fonte sonora é dada por uma função logarítmica (ROEDERER, 2002). Dessa maneira, analisando o gráfico dessa função é possível ter clareza sobre a intensidade sonora que atinge o receptor, e assim saber a partir de que distância o impacto das ondas sonoras deixa de ser prejudicial ao ouvido.

É importante enfatizar que este capítulo tem a intenção de apresentar os logaritmos e suas propriedades sob a perspectiva da abordagem tradicional dos livros didáticos e, a partir disso, sugerir na seção 2.3 uma abordagem que enfatize mais as características do logaritmo em si, a partir de sua definição original.

2.2.1. Definição e propriedades

Nos livros didáticos atuais os logaritmos são abordados como uma função inversa da exponencial. Habitualmente o conteúdo de exponenciais é abordado gradativamente por todo o Ensino Fundamental 2, de modo que nos 6º e 7º anos são apresentadas noções iniciais de potenciação, enquanto nos 8º e 9º ano os conceitos são aprofundados e suas principais propriedades apresentadas de maneira abstrata. No início do Ensino Médio são apresentadas as funções exponencial, composta e inversa, oferecendo assim os pré-requisitos necessários para a abordagem dos logaritmos.

De acordo com livros do ensino médio (IEZZI, MURAKAMI e DOLCE, 1977) a definição de logaritmo é

$$Se\ a, b\ \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1\ e\ b > 0, \text{ então}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \tag{1}$$

A seguir serão apresentadas proposições e propriedades dos logaritmos.

Proposição 1: Dados $x\ e\ y$ tais que $x \in \mathbb{R}\ e\ y \in \mathbb{R}_+^*$ e as funções f e g de modo que $f(x) = y = a^x$ e $g(y) = x = \log_a y$, então $g = f^{-1}$.

Demonstração:

$i.$ Tome a função composta de g com f

$$g\big(f(x)\big) = \log_a(a^x)$$

Como $y = a^x$, então

$$\log_a(a^x) = \log_a y = x$$

Ou seja, $g\big(f(x)\big) = x, \forall\ x \in \mathbb{R}$

$ii.$ Agora, tome a função composta de f com g

$$f\big(g(y)\big) = a^{\log_a y}$$

Como $x = \log_a y$, então

$$a^{\log_a y} = a^x = y$$

Ou seja, $f\big(g(y)\big) = y, \forall\, y \in \mathbb{R}_+^*$.

De i e ii conclui-se que $g = f^{-1}$

■

Propriedades: A partir da definição dada pela (1) e da proposição 1 obtém-se as seguintes propriedades de logaritmos:

1) $a^0 = 1 \iff \log_a 1 = 0.$

2) $a^1 = a \iff \log_a a = 1$

3) considerando $x = \log_a y$, temos que $a^{\log_a y} = y$.

4) considerando $y = a^x$, temos que $\log_a a^x = x$.

A partir das definições e desdobramentos iniciais dos logaritmos é possível obter algumas propriedades operatórias. Aqui serão apresentadas três.

Proposição 2: Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $0 < a \neq 1, b > 0, c > 0$, então:

a) $\boldsymbol{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$

b) $\boldsymbol{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$

c) $\boldsymbol{\log_a b^d = d \cdot \log_a b}$

Demonstração:

Antes de tudo, definimos

$$x = \log_a b \quad \text{e} \quad y = \log_a c. \tag{2}$$

Pela definição de logaritmo, tem-se

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^y = c. \tag{3}$$

a) Dado $\log_a(b \cdot c)$ então, pela (3)

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(a^x \cdot a^y).$$

A partir de propriedades de potências é sabido que

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

portanto

$$\log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}).$$

Pela propriedade 4) temos que

$$\log_a(a^{x+y}) = x + y$$

e pela (2) concluímos

$$\log_a(a^{x+y}) = \log_a b + \log_a c.$$

b) Dado $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$, então, pela (3)

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right)$$

A partir de propriedades de potências é sabido que

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

portanto

$$\log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a(a^{x-y}).$$

Pela propriedade 4) temos que

$$\log_a(a^{x-y}) = x - y$$

e pela definição da (2) concluímos

$$\log_a(a^{x-y}) = \log_a b - \log_a c.$$

c) Considere $\log_a(b^d) = z$, com $z \in \mathbb{R}_+^*$.

Pela definição da (3) ,

$$\log_a(b^d) = \log_a((a^x)^d) = z$$

e partir de propriedades de potências é sabido que

$$(a^x)^d = a^{d \cdot x}.$$

Assim,

$$\log_a((a^x)^d) = \log_a(a^{d \cdot x}).$$

Pela propriedade 4) é possível afirmar que

$$\log_a(a^{d \cdot x}) = d \cdot x$$

e pela definição da (2)

$$d \cdot x = d \cdot \log_a b.$$

Concluímos que

$$\log_a(b^d) = d \cdot \log_a b$$

$\blacksquare$

2.2.2. Gráficos de Funções Exponenciais e de Funções Logarítmicas

A partir das definições apresentadas neste capítulo, por meio da proposição 1 e das propriedades, será feita uma breve análise dos gráficos dos logaritmos. O propósito dessa seção é, de maneira simplificada, evidenciar características visuais desse tipo do gráfico, o que facilitará na compreensão da relação entre a teoria estudada e a prática da construção do instrumento musical.

2.2.2.1. Função Exponencial

Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$e $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x = y$, de maneira que $y \in \mathbb{R}_+^*$. Assim o gráfico da função f pode ser representado por

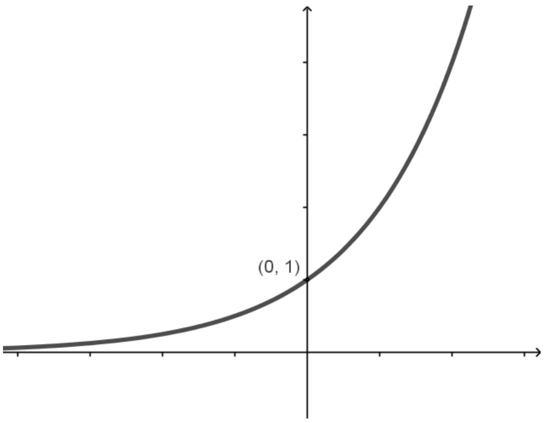


Figura 1 – Gráfico da função exponencial com $a > 1$

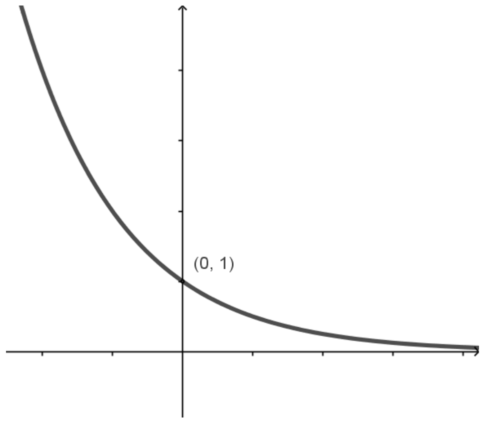


Figura 2 – Gráfico da função exponencial com $0 < a < 1$

Esta representação gráfica será importante mais adiante, nos capítulos 3 e 5, quando forem estabelecidas as relações entre escala musical e logaritmos, tanto pela perspectiva teórica, para compreensão da relação, quanto pela prática, na execução da atividade como forma de facilitar a visualização da sequência das cordas as quais gerarão a escala musical.

2.2.2.2. Função Logarítmica

Proposição 1 afirma que:

Dados $x\ e\ y$ tais que $x \in \mathbb{R}\ e\ y \in \mathbb{R}_+^*$ e as funções f e g de modo que $f(x) = y = a^x$ e $g(y) = x = \log_a y$, então $g = f^{-1}$.

Dessa maneira os gráficos determinados pela função g devem ser simétricos aos gerados pela função f em relação à reta $x = y$.

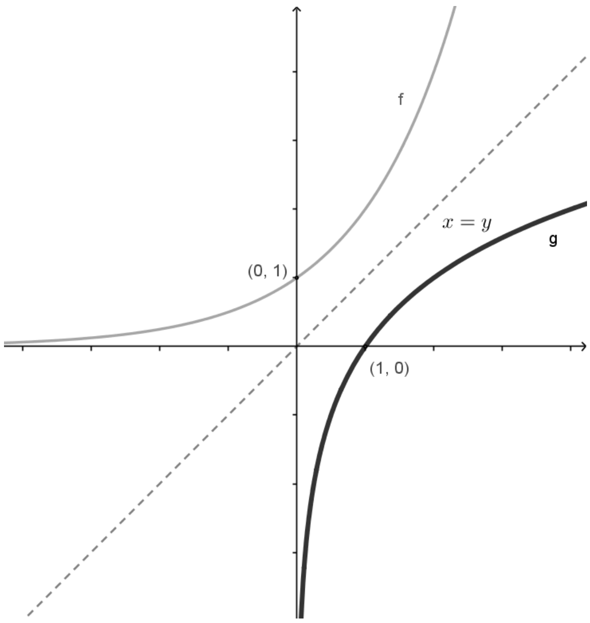


Figura 3 – Gráfico da função logarítmica com $a > 1$ como inversa da função exponencial

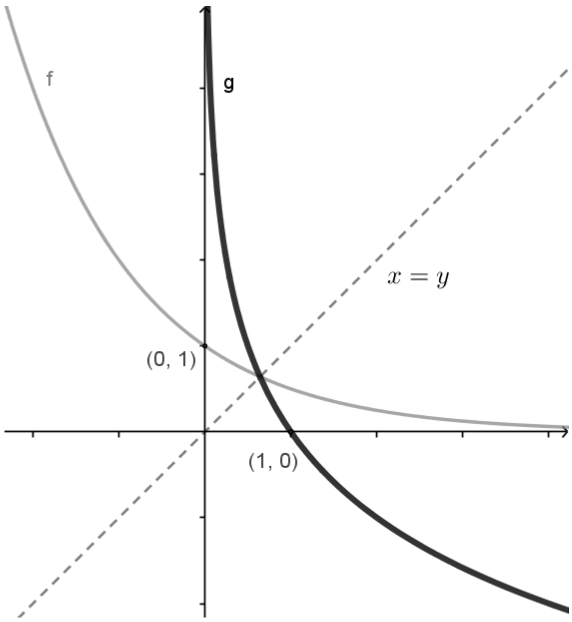


Figura 4 – Gráfico da função logarítmica com $0 < a < 1$ como inversa da função exponencial

2.3. Logaritmo a partir da relação entre progressões.

A definição de logaritmos surgiu no século XVII, época em que o conhecimento humano, tecnológico e científico viveu grandes avanços. Grandes pensadores e cientistas como Kepler (1571 - 1630), Newton (1643 - 1727) e Descartes (1596 - 1650) desenvolveram suas teorias nesse período, as quais foram de grande valia para o avanço da matemática e das ciências (EVES, 2004, p. 340).

O responsável pela criação dessa ideia foi o matemático escocês John Napier (1550 - 1617), que buscando um método para resolução de multiplicações muito trabalhosas, desenvolveu um sistema de comparação entre duas progressões que facilitava os cálculos (EVES, 2004, p. 344).

Em termos atuais, o método pode ser descrito de forma simplificada da seguinte maneira:

Tome duas progressões: uma aritmética, de termo inicial 0, e outra geométrica de termo inicial 1. O valor tomado como razão de cada uma das progressões não é relevante para o desenvolvimento do raciocínio.

Selecione dois valores que esteja em quaisquer posições da PA e seus correspondentes na PG.

Somando os valores selecionados na PA e multiplicando os valores selecionados na PG obtém-se resultados presentes nas próprias progressões, de modo que esses valores sempre estarão em posições equivalentes. Isso será demonstrado adiante, na Proposição 11**:**.

Exemplo: Considere as progressões indicadas na tabela a seguir:

		Progressão Aritmética Razão: 1	Progressão Geométrica Razão: 2
POSIÇÃO	0	0	1
	1	1	2
	2	2	4
	3	3	8
	4	4	16
	5	5	32
	6	6	64
	7	7	128
	8	8	256
	9	9	512
	10	10	1024

Tabela 1 – Exemplo de comparação entre PA e PG

Tome os valores presentes nas posições 3 e 4 das progressões: 3 e 4 na PA e 8 e 16 na PG. Somando os valores selecionados na PA e multiplicando os da PG obtém-se 7 e 128, valores presentes exatamente na 7ª posição da tabela. Dessa maneira, observando que o cálculo de multiplicações de valores pertencentes a PG poderiam ser substituídos por adições de valores presentes em posições equivalentes na PA, essa técnica passou a ser amplamente adotada para dinamizar cálculos utilizando tabelas de logaritmos.

TABLE 1
Logarithms of Numbers

1000–1500

No.	0	d	1	d	2	d	3	d	4	d	5	d	6	d	7	d	8	d	9	d
100	00000	43	00043	44	00087	43	00130	43	00173	44	00217	43	00260	43	00303	43	00346	43	00389	43
101	00432	43	00475	43	00518	43	00561	43	00604	43	00647	42	00689	43	00732	43	00775	42	00817	43
102	00860	43	00903	42	00945	43	00988	42	01030	42	01072	43	01115	42	01157	42	01199	43	01242	42
103	01284	42	01326	42	01368	42	01410	42	01452	42	01494	42	01536	42	01578	42	01620	42	01662	41
104	01703	42	01745	42	01787	41	01828	42	01870	42	01912	41	01953	42	01995	41	02036	42	02078	41
105	02119	41	02160	42	02202	41	02243	41	02284	41	02325	41	02366	41	02407	42	02449	41	02490	41
106	02531	41	02572	40	02612	41	02653	41	02694	41	02735	41	02776	40	02816	41	02857	41	02898	40
107	02938	41	02979	40	03019	41	03060	40	03100	41	03141	40	03181	41	03222	40	03262	40	03302	40
108	03342	41	03383	40	03423	40	03463	40	03503	40	03543	40	03583	40	03623	40	03663	40	03703	40
109	03743	39	03782	40	03822	40	03862	40	03902	39	03941	40	03981	40	04021	39	04060	40	04100	39
110	04139	40	04179	39	04218	40	04258	39	04297	39	04336	40	04376	39	04415	39	04454	39	04493	39
111	04532	39	04571	39	04610	40	04650	39	04689	38	04727	39	04766	39	04805	39	04844	39	04883	39
112	04922	39	04961	38	04999	39	05038	39	05077	38	05115	39	05154	38	05192	39	05231	38	05269	39
113	05308	38	05346	39	05385	38	05423	38	05461	39	05500	38	05538	38	05576	38	05614	38	05652	38
114	05690	39	05729	38	05767	38	05805	38	05843	38	05881	37	05918	38	05956	38	05994	38	06032	38
115	06070	38	06108	37	06145	38	06183	38	06221	37	06258	38	06296	37	06333	38	06371	37	06408	38
116	06446	37	06483	38	06521	37	06558	37	06595	38	06633	37	06670	37	06707	37	06744	37	06781	38
117	06819	37	06856	37	06893	37	06930	37	06967	37	07004	37	07041	37	07078	37	07115	36	07151	37
118	07188	37	07225	37	07262	36	07298	37	07335	37	07372	36	07408	37	07445	37	07482	36	07518	37
119	07555	36	07591	37	07628	36	07664	36	07700	37	07737	36	07773	36	07809	37	07846	36	07882	36
120	07918	36	07954	36	07990	37	08027	36	08063	36	08099	36	08135	36	08171	36	08207	36	08243	36
121	08279	35	08314	36	08350	36	08386	36	08422	36	08458	35	08493	36	08529	36	08565	35	08600	36
122	08636	36	08672	35	08707	36	08743	35	08778	36	08814	35	08849	35	08884	36	08920	35	08955	36
123	08991	35	09026	35	09061	35	09096	36	09132	35	09167	35	09202	35	09237	35	09272	35	09307	35
124	09342	35	09377	35	09412	35	09447	35	09482	35	09517	35	09552	35	09587	34	09621	35	09656	35
125	09691	35	09726	34	09760	35	09795	35	09830	34	09864	35	09899	35	09934	34	09968	35	10003	34
126	10037	35	10072	34	10106	34	10140	35	10175	34	10209	34	10243	35	10278	34	10312	34	10346	34
127	10380	35	10415	34	10449	34	10483	34	10517	34	10551	34	10585	34	10619	34	10653	34	10687	34
128	10721	34	10755	34	10789	34	10823	34	10857	33	10890	34	10924	34	10958	34	10992	33	11025	34
129	11059	34	11093	33	11126	34	11160	33	11193	34	11227	34	11261	33	11294	33	11327	34	11361	33
130	11394	34	11428	33	11461	33	11494	34	11528	33	11561	33	11594	34	11628	33	11661	33	11694	33
131	11727	33	11760	33	11793	33	11826	34	11860	33	11893	33	11926	33	11959	33	11992	32	12024	33
132	12057	33	12090	33	12123	33	12156	33	12189	33	12222	32	12254	33	12287	33	12320	32	12352	33
133	12385	33	12418	32	12450	33	12483	33	12516	32	12548	33	12581	32	12613	33	12646	32	12678	32
134	12710	33	12743	32	12775	33	12808	32	12840	32	12872	33	12905	32	12937	32	12969	32	13001	32
135	13033	33	13066	32	13098	32	13130	32	13162	32	13194	32	13226	32	13258	32	13290	32	13322	32
136	13354	32	13386	32	13418	32	13450	31	13481	32	13513	32	13545	32	13577	32	13609	31	13640	32
137	13672	32	13704	31	13735	32	13767	32	13799	31	13830	32	13862	31	13893	32	13925	31	13956	32
138	13988	31	14019	32	14051	31	14082	32	14114	31	14145	31	14176	32	14208	31	14239	31	14270	31
139	14301	32	14333	31	14364	31	14395	31	14426	31	14457	32	14489	31	14520	31	14551	31	14582	31
140	14613	31	14644	31	14675	31	14706	31	14737	31	14768	31	14799	30	14829	31	14860	31	14891	31
141	14922	31	14953	30	14983	31	15014	31	15045	31	15076	30	15106	31	15137	31	15168	30	15198	31
142	15229	30	15259	31	15290	30	15320	31	15351	30	15381	31	15412	30	15442	31	15473	30	15503	31
143	15534	30	15564	30	15594	31	15625	30	15655	30	15685	30	15715	31	15746	30	15776	30	15806	30
144	15836	30	15866	31	15897	30	15927	30	15957	30	15987	30	16017	30	16047	30	16077	30	16107	30
145	16137	30	16167	30	16197	30	16227	29	16256	30	16286	30	16316	30	16346	30	16376	30	16406	29
146	16435	30	16465	30	16495	29	16524	30	16554	30	16584	29	16613	30	16643	30	16673	29	16702	30
147	16732	29	16761	30	16791	29	16820	30	16850	29	16879	30	16909	29	16938	29	16967	30	16997	29
148	17026	30	17056	29	17085	29	17114	29	17143	30	17173	29	17202	29	17231	29	17260	29	17289	30
149	17319	29	17348	29	17377	29	17406	29	17435	29	17464	29	17493	29	17522	29	17551	29	17580	29
150	17609	29	17638	29	17667	29	17696	29	17725	29	17754	28	17782	29	17811	29	17840	29	17869	29
No.	0	d	1	d	2	d	3	d	4	d	5	d	6	d	7	d	8	d	9	d

Prop. parts

	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33
1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3
2	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7
3	13	13	13	12	12	12	11	11	11	10	10	10
4	18	17	17	16	16	16	15	15	14	14	14	13
5	22	22	21	20	20	20	19	18	18	18	17	16
6	26	26	25	25	24	23	23	22	22	21	20	20
7	31	30	29	29	28	27	27	26	25	24	24	23
8	35	34	34	33	32	31	30	30	29	28	27	26
9	40	39	38	37	36	35	34	33	32	32	31	30

Figura 5 - Tabela de logaritmos dos valores de 1000 a 1500.

Fonte: (NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY, U.S. GOVERNMENT - PUBLIC DOMAIN, 2001)

Esta seção se encarrega de apresentar como os logaritmos foram originalmente concebidos, sob a perspectiva geométrica, e também explica como essa comparação entre progressões funciona.

2.3.1. Definição Original de Logaritmos

Napier dedicou pelo menos vinte anos de trabalho a essa teoria, conseguindo uma explicação a seu trabalho sobre logaritmos através de princípios geométricos.

Segundo (EVES, 2004, p. 344), a definição pode ser dada nos seguintes termos:

> "Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem D. Suponha que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas duas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova sempre com uma velocidade numericamente igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Napier definiu então DF como o logaritmo de CB. Isto é, pondo DF = x e CB = y;
>
> $$x = \text{Nap} \log y \text{"}[1] \qquad (4)$$

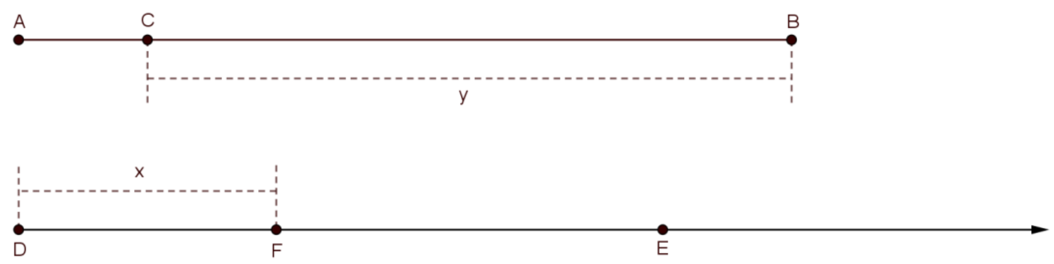


Figura 6 - Definição geométrica de Logaritmo

Buscando uma melhor compreensão da ideia concebida por Napier, segue a demonstração com base na explicação de (EVES, 2004, p. 345).

---

[1] A notação 'x = Nap log y' foi retirada de (EVES, 2004, p. 344). Originalmente a definição não se referia a uma base específica, mas por questões de praticidade o número de Euler foi adotado para a demonstração do teorema 1.

TEOREMA 1: Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE de origem D. Suponha que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas duas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova sempre com uma velocidade numericamente igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Se $DF = x$ e $CB = y$, então $x = Nap\ log\ y$, sendo $Nap\ log\ y$ o logaritmo natural de y

Demonstração:

Inicialmente analisaremos o segmento AB, de modo a determinar a velocidade y com que o ponto C se desloca.

Tome o segmento AB, tal que

$$AB = AC + y \iff AB - y = AC\,. \tag{5}$$

Derivando a (5) velocidade instantânea de C pode ser descrita como

$$v_C = -\frac{dy}{dt}.$$

Pela definição de Napier, a velocidade instantânea de C é definida como

$$v_C = y$$

portanto

$$-\frac{dy}{dt} = y \iff -\frac{dy}{y} = dt.$$

Integrando esta expressão, obtém-se

$$\int -\frac{dy}{y} = \int dt$$

$$\ln y = -t + C$$

Considerando $t = 0$, temos que $y = AB$, e é possível calcular a constante de integração C.

$$\ln y = 0 + C \Leftrightarrow \ln|AB| = C$$

que pela definição de logaritmo (1) pode ser escrita como

$$\ln|AB| = C \Leftrightarrow e^C = |AB|.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade

$$\ln e^C = \ln|AB|.$$

Pela propriedade 4)

$$C = \ln|AB|$$

portanto

$$\ln y = -t + \ln|AB|$$

reescrita conforme a (6), de modo a facilitar sua utilização na continuação desta demonstração.

$$t = \ln|AB| - \ln y \tag{6}$$

Agora, dada a semirreta DE:

A velocidade constante de F é calculada por

$$v_F = \frac{dx}{dt}$$

Pela definição de Napier,

$$v_F = \frac{dx}{dt} = |AB|$$

portanto, o comprimento do segmento x pode ser determinado por

$$x = |AB| \cdot t$$

Sabendo que $x = AB \cdot t$ e pela (4) , temos que

$$\text{Nap}\log \text{y} = x = |AB| \cdot t$$

Mas pela (6) $t = \ln|AB| - \ln y$, então

$$\text{Nap}\log \text{y} = x = |AB| \cdot t = t = |AB| \cdot (\ln|AB| - \ln y)$$

Pela proposição 2.b temos

$$\text{Nap}\log \text{y} = |AB| \cdot \ln\frac{|AB|}{y}$$

■

É interessante observar que a definição criada por Napier não possuía o conceito de base, a qual foi introduzida alguns anos depois, após a publicação dos logaritmos chegar a Henry Briggs, um professor de geometria da Gresham College em Londres. Napier e Briggs concordaram que os logaritmos seriam mais práticos e úteis se fossem calculados de modo em que o número 10 fornecesse uma resposta conveniente para a continuidade dos cálculos (EVES, 2004, p. 345).

2.3.2. Definição de logaritmo por meio da comparação entre progressões

Em termos mais atuais e formais, os logaritmos podem ser apresentados a partir da relação entre progressões de modo que sua definição, segundo (LIMA, 1996, p. 13), é apresentada da seguinte maneira:

Uma função real $L: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:

$$L: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$A) \ \ x < y \ \Rightarrow L(x) < L(y)$$

$$B) \ \ L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$$

para quaisquer $x \ e \ y \ \in \mathbb{R}^+$.

Uma vez dadas essas duas propriedades, vale evidenciar que podem ser realizadas alterações no sistema de logaritmos por meio da multiplicação de constantes.

A partir dessa definição é possível verificar algumas propriedades e características apresentadas a seguir nas proposições 1 a 7.

Proposição:[2]

3) L é sempre injetiva.

4) $L(1) = 0$.

5) Se $0 < x < 1 < y$, então $L(x) < 0$ e $L(y) > 0$.

6) Para todo $x > 0$, $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

7) Para qualquer $x \ e \ y \in \mathbb{R}^+$, $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.

8) Para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$e todo número racional $n = \frac{p}{q}$, $L(x^n) = n \cdot L(x)$.

9) Para qualquer $x, t \in \mathbb{R}$, $L(x^t) = t \cdot L(x)$

10) L é ilimitada superiormente e inferiormente.

Vale evidenciar que as proposições apresentadas neste capítulo são apenas as necessárias para compreensão e encaminhamento da atividade final, de modo que outras proposições são possíveis, porém desnecessárias nesse contexto.

[2] As proposições apresentadas nesta seção se iniciam na numeração '3' para evitar conflitos de referência, uma vez que na seção 2.2.1 são apresentadas as proposições 1 e 2 para tratar dos logaritmos como função inversa à função exponencial.

Demonstração:

3) Dados $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ com $x \neq y$,

ou $x < y$, portanto $L(x) < L(y)$

ou $x > y$, portanto $L(x) > L(y)$

logo $L(x) = L(y)$

4) Como $1 = 1 \cdot 1$, então

$$L(1) = L(1 \cdot 1).$$

Pela definição de L obtemos

$$L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$$

donde segue que

$$L(1) = 0.$$

5) Pela definição de L dados x e y de modo que $0 < x < 1 < y$, então

$$L(x) < L(1) < L(y).$$

Como $L(1) = 0$, de acordo com a proposição 4, então

$$L(x) < 0 < L(y)$$

6) A proposição 4 que afirma

$$L(1) = 0$$

então

$$0 = L(1) = L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como

$$0 = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{então} \quad -L(x) = L\left(\frac{1}{x}\right)$$

7) Segue do fato de $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ que

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right).$$

Da propriedade aditiva de L tem-se que

$$L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right).$$

Da proposição 6 temos que

$$L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

8) Esta demonstração será dividida em 3 partes:

i. Para $n \in \mathbb{N}$ (demonstração por indução)

Verificando que a relação é válida para $n = 1$

$$L(x^1) = 1 \cdot L(x)$$

Supondo válida para $n = k$, temos por hipótese de indução que

$$L(x^k) = k \cdot L(x)$$

Para $n = k + 1$ temos que

$$L(x^{k+1}) = L(x^k \cdot x) = L(x^k) + L(x)$$

Pela hipótese de indução temos

$$L(x^k) + L(x) = \ k \cdot L(x) + L(x)$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação temos

$$k \cdot L(x) + L(x) = (k+1) \cdot L(x)$$

portanto a hipótese de indução é válida.

ii. Para $n \in \mathbb{Z}^*$

Para $n \in \mathbb{N}$, $0 = L(1) = L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^n) + L(x^{-n})$

Como $L(x^n) = n \cdot L(x)$ obtém-se

$$0 = n \cdot L(x) + L(x^{-n}) \Rightarrow -n \cdot L(x^n) = L(x^{-n})$$

iii. Para $n \in \mathbb{Q}$, tal que $n = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$.

Tome $L[(x^n)^q]$. Usando propriedades de potenciação $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$, temos que

$$L[(x^n)^q] = L\left[\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right] = L(x^p).$$

Pela propriedade apresentada na proposição 8.i temos

$$L[(x^n)^q] = q \cdot L(x^n) \quad \text{e} \quad L(x^p) = p \cdot L(x).$$

A equação pode ser escrita

$$q \cdot L(x^n) = p \cdot L(x)$$

portanto

$$L\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \cdot L(x).$$

Observação: $L(0)$ não pode ser definido, pois

$$L(0) = L(0 \cdot x) = L(0) + L(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^+$$

um absurdo, pois como $L(x)$ é crescente, existe x tal que $L(x) \neq 0$.

Para o propósito deste trabalho não há necessidade de estender essa demonstração para todo o conjunto dos números reais, pois serão utilizadas, no máximo, expoentes racionais. Entretanto, a seguir serão enunciados os elementos básicos para que se possa prosseguir com essa demonstração, caso haja interesse.

Continuidade: Tem-se, por definição de continuidade, a seguinte descrição:

> "Uma função $f: X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em símbolos, f contínua no ponto a significa:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0\,;\, x \in X, |x - a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon."$$

Potência com expoente irracional: De acordo com (NETO, 2013, p. 41).

> Sejam a um número real positivo, x um número real e x_n uma sequência de números racionais que converge para x. Então o limite $\lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ existe e é igual a a^x, ou seja, $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$.

9) Tomemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = t$$

Pela proposição 8, temos que

$$\lim_{n\to\infty} L\left(x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_n}{q_n} \cdot L(x)\right)$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_n}{q_n} \cdot L(x)\right) = L(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_n}{q_n}\right) = t \cdot L(x).$$

Se

$$y_n = \frac{p_n}{q_n} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} y_n = x^t$$

então

$$\lim_{n\to\infty} L(y_n) = L\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = L(x^t).$$

9) Suponha por absurdo que existe $\alpha > 0$ tal que α seja o limite superior de L. Tomando $n > 0$ de modo que

$$n > \frac{\alpha}{L(2)}$$

então

$$n \cdot L(2) > \alpha$$

portanto

$$L(2^n) > \alpha$$

Assim, $L(2^n)$ assume valores maiores do que α, contrariando a afirmação inicial de que esse seria o limite superior de $L(x)$.

Portanto $L(x)$ é ilimitada superiormente.

De maneira análoga se demonstra que a função é ilimitada inferiormente.

■

Outras propriedades podem ser demonstradas, entretanto para o propósito desse trabalho as sete apresentadas são suficientes.

A partir das definições e proposições apresentadas é possível estabelecer uma relação entre logaritmos e progressões de acordo com a proposição a seguir:

Proposição 11: Seja L satisfazendo as propriedades da proposição (pág. 36) considere $x \; e \; r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e sejam y e q definidos por $L(y) = x \; e \; L(q) = r$. Dada uma PG de termo inicial 1 e razão q e uma PA de termo inicial 0 e razão r, então

$$L(q^{n-1}) = (n-1) \cdot r.$$

Demonstração: Por definição $L(y) = x$. Assim, se o valor y for multiplicado por q, obtém-se, pela definição de L que

$$L(y \cdot q) = L(y) + L(q)$$

que também, por definição, pode ser escrito como

$$L(y) + L(q) = x + r.$$

Se o mesmo procedimento for realizado novamente, obtém-se

$$L(y \cdot q^2) = L(y \cdot q \cdot q) = L(y \cdot q) + L(q) = (x + r) + r = x + 2r$$

Realizando esse procedimento sucessivas vezes, obtém-se

$$L(y \cdot q^{n-1}) = x + (n-1) \cdot r$$

o que será verificado a seguir, por hipótese de indução.

- Verificando que a relação é válida para $n = 1$

$$L(y \cdot q^{1-1}) = L(y \cdot q^0) = L(y \cdot 1) = L(y) == x = x + (1-1) \cdot r$$

-Supondo válida para $n = k$, temos por hipótese de indução que

$$L(y \cdot q^{k-1}) = x + (k-1) \cdot r$$

- Para $n = k + 1$ temos que

$$L\left(y \cdot q^{(k+1)-1}\right) = L(y \cdot q^{k+1-1}) = L(y \cdot q^k).$$

Pela definição de L, temos que

$$L(y \cdot q^k) = L(y) + L(q^k).$$

Pela proposição 9

$$L(q^k) = k \cdot L(q),$$

portanto

$$L(y) + L(q^k) = L(y) + k \cdot L(q),$$

que, por definição correspondem a

$$L(y) + k \cdot L(q) = x + k \cdot r = x + \big((k+1) - 1\big) \cdot r,$$

portanto a hipótese de indução é válida.

Observe que $y \cdot q^{n-1}$ representa a expressão para determinar o termo geral de uma progressão geométrica, enquanto $x + (n-1) \cdot r$ determina o termo geral de uma progressão aritmética.

Uma vez estabelecida a relação entre PA e PG por meio da função L é possível dispor essas informações em uma tabela

n	PA	PG
1	x	y
2	$x + r$	$y \cdot q$
3	$x + 2r$	$y \cdot q^2$
4	$x + 3r$	$y \cdot q^3$
...	...	...
n	$x + (n-1) \cdot r$	$y \cdot q^{n-1}$

Tabela 2 – Relação literal entre PA e PG

Observe que a proposição 2, a qual afirma que $\boldsymbol{L(1) = 0}$, não foi atendida na Tabela 2 **– Relação literal entre PA e PG**

Para corrigir essa falha, basta subtrair $\boldsymbol{x}$ de todos os termos da PA e dividir por $\boldsymbol{q}$ todos os termos da PG, conforme apresentado na Tabela 3. Isso não descaracteriza nenhuma das duas progressões, apenas translada o ponto inicial da PA para o número 0 e o da PG redimensionado para o número 1.

n	PA	PG
1	0	1
2	r	q
3	$2r$	q^2
4	$3r$	q^3
...	...	...
n	$(n-1)\cdot r$	q^{n-1}

Tabela 3 – Logaritmo dado a partir da relação entre PA e PG

Uma vez estabelecida a relação entre progressões e logaritmos vale fazer uma última observação antes de encerrar o capítulo: tomando como referência a Tabela 3, a razão entre dois números quaisquer da coluna da PG, quando aplicado na definição da função L, resulta na diferença entre os números localizados em posições correspondente na coluna da PA.

Proposição 12: Seja L como $i, j \in \mathbb{N}$ com $i > j,\ r \in \mathbb{R}$ e q definido por $L(q) = r$. Dada uma PG de termo inicial 1 e razão q e uma PA de termo inicial 0 e razão r, então

$$L\left(\frac{q^i}{q^j}\right) = (i \cdot r) - (j \cdot r).$$

Demonstração: Através das propriedades de potências é possível afirmar que

$$\frac{q^i}{q^j} = q^{i-j}$$

Pela proposição 6

$$L\left(\frac{q^i}{q^j}\right) = L\left(q^{i-j}\right) = (i-j)\cdot L(q) = (i-j)\cdot r$$

Aplicando a distributividade obtém-se

$$L\left(\frac{q^i}{q^j}\right) = (i\cdot r) - (j\cdot r).$$

∎

3. ESCALA MUSICAL

Para que a atividade de construção do instrumento musical seja possível é necessário que os estudantes tenham alguma noção teórica a respeito da estrutura da escala musical. Para isso este capítulo traz algumas informações sobre a criação e desenvolvimento da escala musical utilizada no ocidente, tanto sob o ponto da estética sonora considerada agradável desde os gregos antigos, quanto sob a necessidade de precisão na afinação.

3.1. Escala Pitagórica

Um dentre os muitos grandes legados deixados pela cultura helênica sem dúvidas foi a criação da escala diatônica, ou seja, a escala musical formada pelas 7 principais notas musicais, dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Uma vez terminada essa sequência, ela se repete tantas vezes quanto se queira, de modo que o único limitante para que seja considerada uma nota musical é o espectro de frequências audíveis aos humanos (20 Hz a 20.000 Hz).

3.1.1. Criação das notas da escala pitagórica

Essa escala foi criada a partir de conceitos simples de subdivisões por meio de frações. A ideia principal consiste no fato que dada uma corda de qualquer extensão chamada de ***tônica***, ao ser tocada emite uma frequência sonora que é interpretada como uma nota musical. Se for tomada outra corda com exatamente o dobro da extensão da primeira (feitas do mesmo material e recebendo a mesma tração), ambas emitirão a mesma nota musical, ou seja, as frequências sonoras são múltiplas numa escala de 2:1, informação que será mais bem explicada na seção 4.1. A nota emitida pela corda maior será chamada de ***oitava***. A mesma relação se estabelece quando tomada uma corda com metade da extensão da inicial, porém, neste caso com razão entre eles numa escala de 1:2. Na prática a segunda opção costuma ser a mais utilizada tendo em vista a facilidade de não necessitar de uma segunda corda, mas simplesmente prender a corda original em uma determinada posição e tocar apenas a porção desejada.

É importante deixar claro que o que determina uma escala é a relação entre as razões dos comprimentos de notas consecutivas, o que será melhor explicado adiante neste capítulo. Diferentes tons[3] são obtidos a partir de diferentes comprimentos iniciais. Por exemplo, as notas dó e ré se dão a partir de ondas de diferentes extensões, porém as escalas de dó maior e ré maior se definem a partir de um mesmo padrão de razões entre notas consecutivas, assim como descrito na Tabela 4 – Intervalos da escala diatônica.

Sendo assim, supondo, sem perda de generalidade, que as cordas vibrem na frequência conhecida como a nota Dó, no intervalo de escalas em que a razão entre os comprimentos das ondas vão de 1:1 até 2:1, necessariamente encontram-se todas as demais notas musicais necessárias para formar um ciclo completo de uma oitava.

Uma subdivisão considerada agradável aos ouvidos foi a que apresentava proporção de 3:2 em relação à corda inicial, de modo que repetições dessa proporção gerariam novas frequências consonantes e esteticamente agradáveis quando tocadas juntas com as notas anteriores. Este intervalo seria chamado posteriormente de ***quinta*** em relação à tônica. Porém, como a composição de 3:2 duas vezes seguidas gera a proporção de 9:4, a extensão da corda necessária para conseguir a próxima nota seria maior que a maior corda disponível. Para solucionar essa questão convém utilizar a ideia das oitavas, ou seja, uma vez que se sabe que uma corda com a metade da extensão vibra com a mesma nota, basta dividir a proporção por 2. Esse recurso pode ser utilizado tantas vezes quantas forem necessárias, de modo a obter sempre uma proporção contida no intervalo real entre 1 e 2. Neste caso, 9:4 dividido por 2 , gera 9:8, que atende ao requisito de sempre pertencer ao intervalo original (BENSON, 2007, p. 163).

Outra possibilidade para gerar esse mesmo intervalo é, a partir da corda maior, a oitava, realizar um deslocamento proporcional a 3:2 no sentido oposto de modo a buscar qual nota foi aumentada em 3:2 para gerar a última da escala. Desse

[3] Notas musicais podem definidas como qualquer frequência audível. Já os tons são notas musicais a partir das quais se estabelecem a escala diatônica, a qual será discutida ainda neste capítulo. (BACKUS)

modo, dividindo 2 por 3:2 obtém-se 4:3, que posteriormente seriam chamada de Quarta em relação à tônica (BENSON, 2007, p. 164).

Também será necessário ser cuidadoso com as subdivisões por 3:2, pois eventualmente serão obtidas frações com valor inferior ao intervalo pretendido, porém esse problema pode ser facilmente resolvido usando a mesma ideia aplicada à ampliação das Quintas: uma vez obtido um resultado abaixo de 1, basta multiplicar o valor por 2 para retornar à escala pretendida inicialmente.

Seguindo essas subdivisões, serão obtidas treze notas musicais (Tônica, Oitava e onze outras notas intermediárias), porém, apenas oito eram comumente exploradas pelos pitagóricos. Essa escala recebeu o nome de Escala Diatônica Maior. Essas notas principais correspondem às posições 1 (tônica), 3, 5, 6, 8, 10, 12 e 13 (oitava) da Tabela 4.

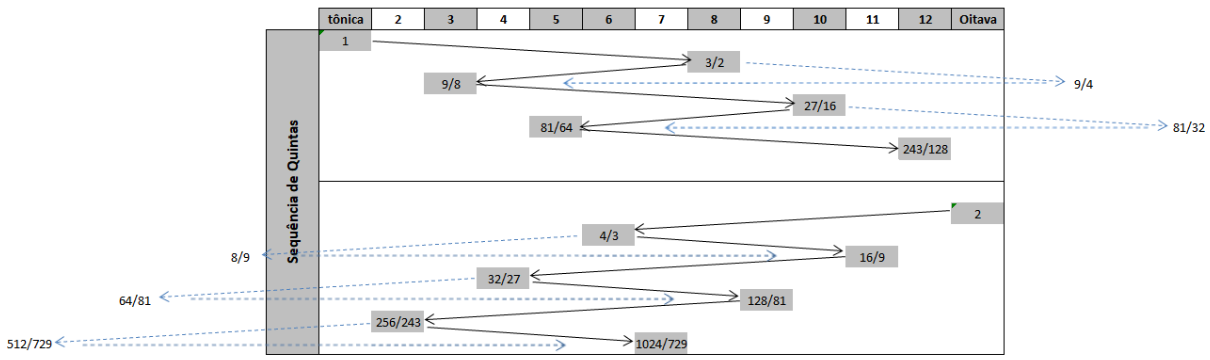


Figura 7 – Cálculo de notas em um intervalo da escala pitagórica

O intervalo entre duas notas consecutivas foi denominado semitom de modo que dois semitons em sequência gerem um tom. Desse modo, em termos atuais, para se evitar a numeração indicada no parágrafo anterior, é possível descrever a escala diatônica como sendo o intervalo apresentado na Tabela .

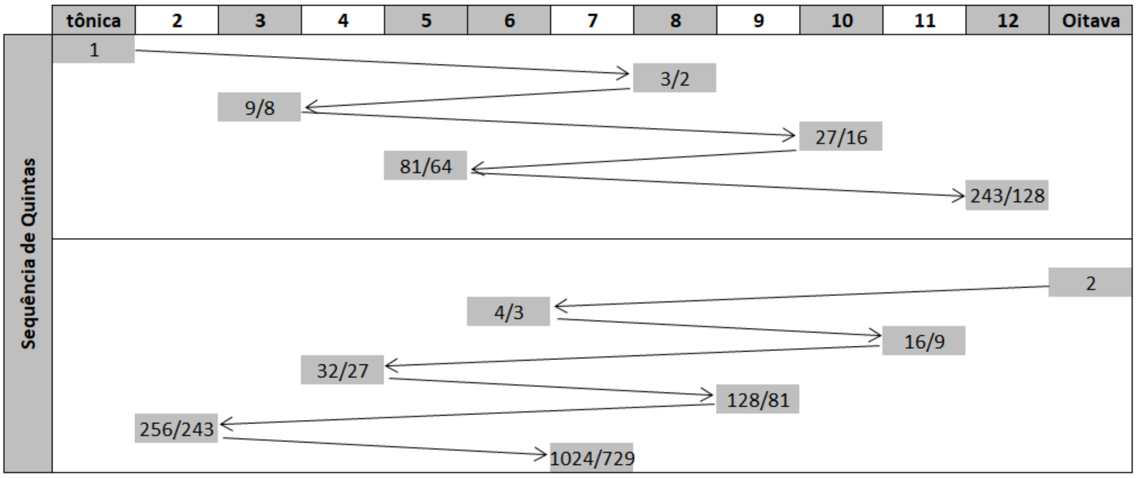


Figura 8 – Escala pitagórica contida no intervalo de razão entre 1 e 2.

Tônica		Tom		Tom	Semitom		Tom		Tom		Tom	Semitom
Tônica		3		5	6		8		10		12	Oitava

Tabela 4 – Intervalos da escala diatônica maior[4]

Como a escala é cíclica e depende apenas da definição do intervalo chamado de quinta, essa sequência é chamada de 'Ciclo de Quintas' apresentada na Figura 9 – Representação gráfica do ciclo de quintas..

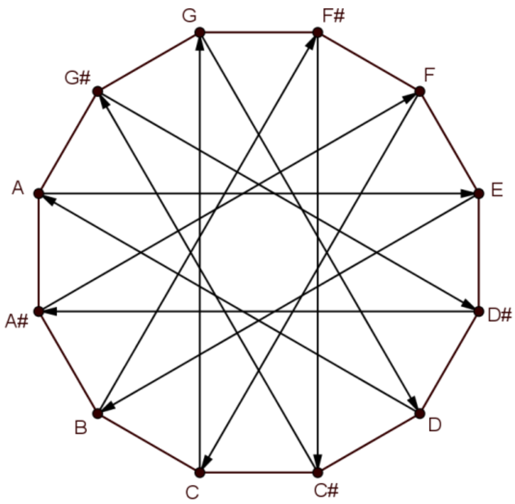


Figura 9 – Representação gráfica do ciclo de quintas.

[4] As posições das notas 2, 4, 7, 9 e 11 apresentadas na Tabela 4 representam notas intermediárias, as quais, apesar de fazerem parte dessa escala musical, eram menos exploradas pelos pitagóricos. Popularmente descrita como a sequência 'Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó', a escala diatônica maior caracteriza a música ocidental e as principais escalas modernas.

3.1.2. Problemas da afinação pela escala pitagórica

Apesar de muito difundida, a escala pitagórica apresentava um problema que passou a ser percebido com clareza a partir da popularização de instrumentos que utilizavam de muitas cordas, como o piano. O acúmulo de leves imprecisões gerados a partir de definição das notas da podiam gerar dissonâncias desagradáveis entre oitavas.

Um piano, usualmente, tem pelo menos 88 notas, ou seja, para algumas notas pode ter até 7 oitavas acima da nota mais grave. A Tabela 5 – Afinação por quartas e por quintas evidencia como a afinação a partir de quartas ou quintas influenciava nessa distorção sonora.

	Afinação por quintas	
	Fração	**Aproxim.**
Tônica	1	1,00000
2	$3^{7}/2^{11}$	1,06787
3	$3^{2}/2^{3}$	1,12500
4	$3^{9}/2^{14}$	1,20135
5	$3^{4}/2^{6}$	1,26563
6	$3^{11}/2^{17}$	1,35152
7	$3^{6}/2^{9}$	1,42383
8	$3^{1}/2^{1}$	1,50000
9	$3^{8}/2^{12}$	1,60181
10	$3^{3}/2^{4}$	1,68750
11	$3^{10}/2^{15}$	1,80203
12	$3^{5}/2^{7}$	1,89844
Oitava	$3^{12}/2^{18}$	2,02729

	Afinação por quartas	
	Fração	**Aproxim.**
Tônica	1	1,00000
2	$4^{5}/(3^{5}.2^{2})$	1,05350
3	$4^{10}/(3^{10}.2^{4})$	1,10986
4	$4^{3}/(3^{3}.2^{1})$	1,18519
5	$4^{8}/(3^{8}.2^{3})$	1,24859
6	$4^{1}/3^{1}$	1,33333
7	$4^{6}/(3^{6}.2^{2})$	1,40466
8	$4^{11}/(3^{11}.2^{4})$	1,47981
9	$4^{4}/(3^{4}.2^{1})$	1,58025
10	$4^{9}/(3^{9}.2^{3})$	1,66479
11	$4^{2}/3^{2}$	1,77778
12	$4^{7}/(3^{7}.2^{2})$	1,87289
Oitava	$4^{12}/(3^{12}.2^{4})$	1,97308

Tabela 5 – Afinação por quartas e por quintas

A afinação da oitava por quintas fica pouco acima da razão 2:1 em 2,02729, enquanto a afinação em quartas fica pouco abaixo em 1,97308. Essa variação já chega a incomodar os ouvidos mais treinados, mas ainda assim é uma leve. O problema está no acúmulo desse desvio: após 7 oitavas, as escalas deveriam atingir uma proporção de 128:1 quando comparado com a corda original, mas pela afinação em quintas essa relação ficaria em 140,736 e a afinação em quantas chegaria a 116,416, totalizando 11,45% de variação em cada caso, o que corresponde a praticamente um tom completo de variação em relação ao esperado.

Como solucionar esse problema? Distribuindo essas pequenas imperfeições entre as oitavas, de modo que a relação de proporção de 2:1 seria mantida entre quaisquer oitavas consecutivas. A essa nova escala foi atribuído o nome 'Escala Igualmente Temperada'.

3.2. Escala igualmente Temperada

A escala igualmente temperada, que por uma questão de praticidade a partir daqui será chamada apenas de escala temperada, consiste em uma sequência de subdivisões, chamadas semitons, igualmente distribuídas pela escala, de modo a obter 12 notas antes de atingir a Oitava da escala.

Essas subdivisões foram realizadas a partir da ideia de uma sequência geométrica, na qual o primeiro valor deve ser a extensão da corda inicial (tônica) enquanto a décima-terceira corda (afinal são 12 semitons mais a Oitava) deve ter o dobro do comprimento da primeira corda.

Seguindo essa ideia é possível obter o comprimento da corda que emite a vibração correspondente a qualquer oitava, apenas realizando sucessivas multiplicações por 2.

Tome C_0 como o comprimento da primeira corda:

$$C_1 = 2 \cdot C_0$$

Recursivamente conclui-se que

$$C_n = 2^n \cdot C_0, \qquad com\ n \in \mathbb{N}.$$

É importante ressaltar que nesse capítulo não será discutida a relevância do comprimento inicial C_0 (e consequentemente a nota produzida por essa corda), uma vez que o que realmente interessa são os intervalos definidos entre as notas. Dessa maneira, para qualquer comprimento de corda deve-se respeitar esse padrão. Assim, a 1ª e a 13ª nota possuem um intervalo numa razão de 2:1, e da mesma maneira a 2ª e a 14ª, a 3ª e a 15ª , e subsequentemente, até onde se queira. Isso justifica a necessidade do uso de uma sequência geométrica, e não aritmética, além de remeter diretamente à definição de logaritmos a partir da abordagem do seção 2.3(Logaritmo a partir da relação entre progressões.).

Para obter cada uma das 12 notas da escala temperada é necessário definir a razão pela qual se deve multiplicar cada termo da sequência para obter o próximo.

Seja r a razão que determina a distância de um semitom e $C_{0,n}$ o comprimento da corda que representa o comprimento da n-ésima corda de uma escala, então

$$C_{0,1} = r \cdot C_0$$

sendo

$$C_{0,2} = r \cdot C_{0,1} = r \cdot r \cdot C_0 = r^2 \cdot C_0$$

Recursivamente conclui-se que

$$C_{0,n} = r \cdot C_{0,n-1} = r \cdot r^{n-1} \cdot C_0 = r^n \cdot C_0$$

entretanto, tendo em vista a extensão da oitava, restrita a 12 passagens é possível escrever C_1 como

$$C_1 = C_{0,12} = r^{12} \cdot C_0 = 2C_0$$

ou, de maneira simplificada

$$r^{12} \cdot C_0 = 2C_0.$$

Simplificando os dois lados da igualdade obtêm-se

$$r^{12} = 2$$

$$r = \sqrt[12]{2}$$

Por questões de conveniência, em algumas situações é interessante pensar a situação contrária, dada uma corda de comprimento C_0 se permite que apenas metade dessa extensão venha a vibrar. Com isso, o comprimento $\frac{1}{2}C_0$ corresponde a oitava em relação a C_0. Dessa maneira no intervalo compreendido entre C_0 e $\frac{1}{2}C_0$ é possível localizar todas as 12 notas musicais. De maneira análoga ao realizado anteriormente, obtém-se que

$$r^{12} \cdot C_0 = \frac{1}{2}C_0$$

Simplificando os dois lados da igualdade obtém-se

$$r^{12} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

As sequências de proporções obtidas a partir das razões calculadas estão apresentadas na Tabela 6, na qual multiplicações por $\sqrt[12]{2}$ levam a uma oitava abaixo (mais grave) enquanto multiplicações por $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ levam a uma oitava acima (mais aguda).

Observe que nas análises anteriores foram citadas as oitavas como sendo, tanto o dobro da extensão inicial da corda, quanto a metade da extensão inicial. Ambas as situações estão corretas, pois a oitava pode estar à cima ou à baixo da tônica. No caso em que a nova corda tem o dobro da inicial, se obtém uma oitava abaixo, a qual produz um som mais grave que a tônica. Já no caso de utilizar apenas metade da corda, se produz uma oitava a cima, que por sua vez gera uma nota mais aguda que a tônica.

	ESCALA TEMPERADA		
Tônica	1,000000	0,500000	**Oitava acima**
	1,059463	0,529732	
	1,122461	0,561231	
	1,189206	0,594604	
	1,259919	0,629960	
	1,334837	0,667420	
	1,414210	0,707107	
	1,498303	0,749153	
	1,587396	0,793700	
	1,681787	0,840896	
	1,781791	0,890898	
	1,887741	0,943874	
Oitava abaixo	2,000000	1,000000	**Tônica**

Tabela 6 – Intervalos da escala temperada

3.3. Comparação entre escala pitagórica e temperada

Apesar de terem regras de formação diferentes, as escalas Pitagórica e Temperada são descritas a partir de proporções bastante próximas, como indica a Tabela 7 – Comparação entre escalas Pitagórica e Temperada.

ESCALA	
TEMPERADA	PITAGÓRICA
1,000000	1,000000
1,059463	1,053498
1,122461	1,125000
1,189206	1,185185
1,259919	1,265625
1,334837	1,333333
1,414210	1,404664
1,498303	1,500000
1,587396	1,580247
1,681787	1,687500
1,781791	1,777778
1,887741	1,898438
2,000000	2,000000

Tabela 7 – Comparação entre escalas Pitagórica e Temperada

Uma vez habituado a uma escala, o ouvido humano, principalmente os mais bem treinados, tende a considerar desagradáveis quaisquer pequenas variações, mais evidente em altas frequências, uma vez que essas variações geram diferenças substanciais na conversão para frequências, soando desafinado.

3.4. Relação entre logaritmos e escala temperada

Tomando como definição de logaritmos o apresentado no seção 2.3.2 e da definição da escala musical temperada é possível estabelecer uma relação entre progressões.

Como a nota musical gerada está diretamente associada à frequência de vibração da corda (ou do ar em um tubo sonoro que será discutido adiante) os resultados apresentados na Tabela 8 – Relação entre posição da nota musical na escala e frequência gerada relacionam a posição da nota na escala com a proporção de sua frequência sua em relação à frequência fundamental produzida, ou seja, a tônica da escala.

No apêndice D consta a relação de notas musicais e suas respectivas frequências para todo o espectro audível.

Adotando uma relação entre as notas de uma escala (da tônica à oitava) com uma PA de termo inicial 0 e razão 1, e a proporção da corda que se deve tomar para produzir certa nota numa progressão geométrica de termo inicial 1 e razão $2^{\frac{1}{12}}$ para obter notas mais graves, ou $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$ para obter notas mais agudas.

PA (nota)	PG (freq.)	
0	1	**Tônica**
1	$2^{1/12}$	
2	$2^{2/12}$	
3	$2^{3/12}$	
4	$2^{4/12}$	
5	$2^{5/12}$	
6	$2^{6/12}$	
7	$2^{7/12}$	
8	$2^{8/12}$	
9	$2^{9/12}$	
10	$2^{10/12}$	
11	$2^{11/12}$	
12	$2^{12/12}$	**Oitava acima**

PA (nota)	PG (freq.)	
0	1	**Tônica**
1	$(1/2)^{1/12}$	
2	$(1/2)^{2/12}$	
3	$(1/2)^{3/12}$	
4	$(1/2)^{4/12}$	
5	$(1/2)^{5/12}$	
6	$(1/2)^{6/12}$	
7	$(1/2)^{7/12}$	
8	$(1/2)^{8/12}$	
9	$(1/2)^{9/12}$	
10	$(1/2)^{10/12}$	
11	$(1/2)^{11/12}$	
12	$(1/2)^{12/12}$	**Oitava abaixo**

Tabela 8 – Relação entre posição da nota musical na escala e frequência gerada

Observe que em ambos os casos, o número 0 da PA se relaciona com o 1 da PG, ou seja, a primeira nota (frequência) obtida se dá a partir da extensão completa da corda. As próximas notas vão assumindo a extensão equivalente a porções medidas a partir da corda (frequência) inicial por meio de sucessivas multiplicações por uma mesma razão fixa. Ou seja, atende plenamente às definições de logaritmo.

4. ANÁLISE FÍSICA DAS ONDAS SONORAS

Uma vez feita a análise das escalas musicais é importante para o desenvolvimento da atividade de criação do instrumento musical, conhecer como as ondas sonoras podem ser produzidas sob o ponto de vista físico.

Será dada ênfase à analise das ondas produzidas em tubos sonoros, uma vez que a proposta da atividade é produzir um instrumento musical de sopro. É fundamental analisar a relação entre comprimento do tubo e a frequência sonora gerada por ele, de modo a verificar se as notas musicais produzidas são condizentes com as esperadas em função dos cálculos da escala musical.

4.1. Relação matemática entre frequência e comprimento de onda

A velocidade média é a razão entre a distância percorrida e pelo tempo gasto para percorrer essa distância, que aplicado ao contexto de propagação de ondas pode ser descrito a partir da expressão

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

sendo v a velocidade de propagação da onda no meio (m/s), λ o comprimento da onda (m) e T o período da onda (s). Como o período é o inverso da frequência, é possível modificar a expressão para

$$v = \lambda \cdot f \tag{7}$$

sendo f a frequência da onda.

Tal expressão será importante para os cálculos dos comprimentos dos tubos da flauta, uma vez que ela evidencia a relação entre comprimento de onda e frequência associada a esse comprimento.

4.2. Ondas estacionárias

Ondas estacionárias são produzidas a partir da sobreposição de duas ondas que, apesar de vibrarem em sentidos opostos, possuem características de frequência e amplitude idênticas. A soma algébrica das pressões geradas por essas ondas criam uma nova que não se propaga, daí o nome estacionária (ROEDERER, 2002, p. 124).

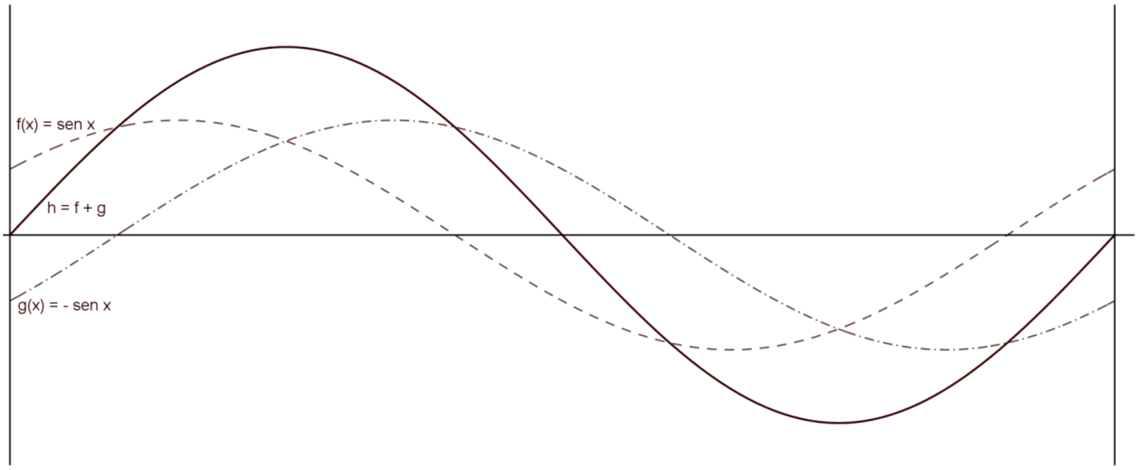


Figura 10 – Exemplo de onda estacionária

Os pontos que permanecem com amplitude nula são chamados de nodos. A onda permanece presa entre dois nodos consecutivos, vibrando com amplitudes variadas, de modo que o ponto central entre esses dois nodos, chamada de antinodo ou ventre, será a posição em que a onda atingirá sua a máxima amplitude, sendo o dobro da amplitude das ondas que a compõe.

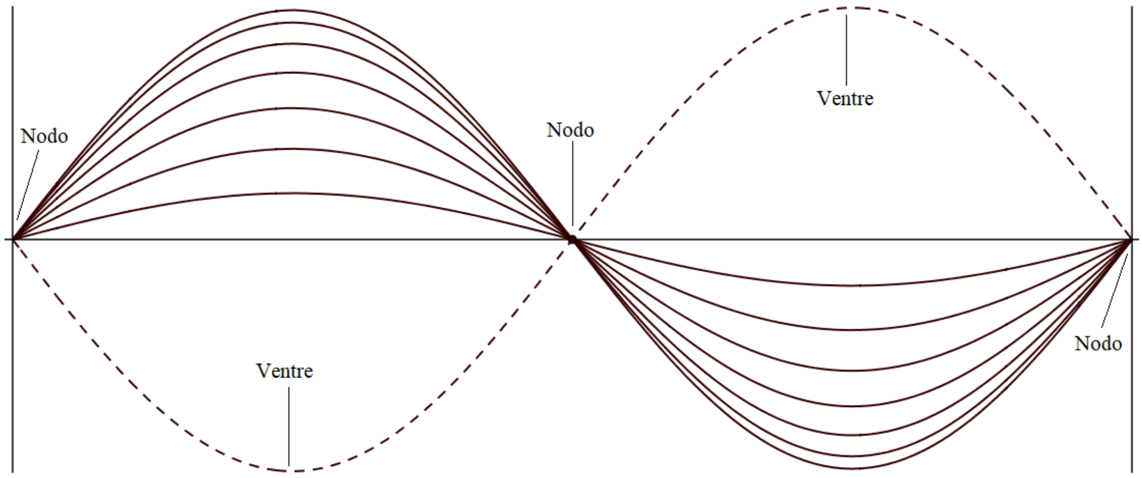


Figura 11 – Vibrações sucessivas / Nodos e Ventres

Esse tipo de comportamento é gerado a partir da reflexão (sem absorção) de uma onda em uma superfície, de modo a gerar sobreposição a si mesma no sentido contrário ao da propagação original.

O comprimento de onda λ deve ser calculado a partir da simples manipulação das expressões que definem a distância das abcissas de dois nodos (ou ventres) consecutivos (ROEDERER, 2002). Adotando a notação D_N para representar a distância entre nodos (ou, de forma análoga, D_V para representar distância entre ventres), tem-se que

$$D_N = \frac{\lambda}{2}$$

A distância entre as abcissas de nodo e ventre consecutivos, definida pela notação $D_{N,V}$, se dá por

$$D_{N,V} = \frac{\lambda}{4}$$

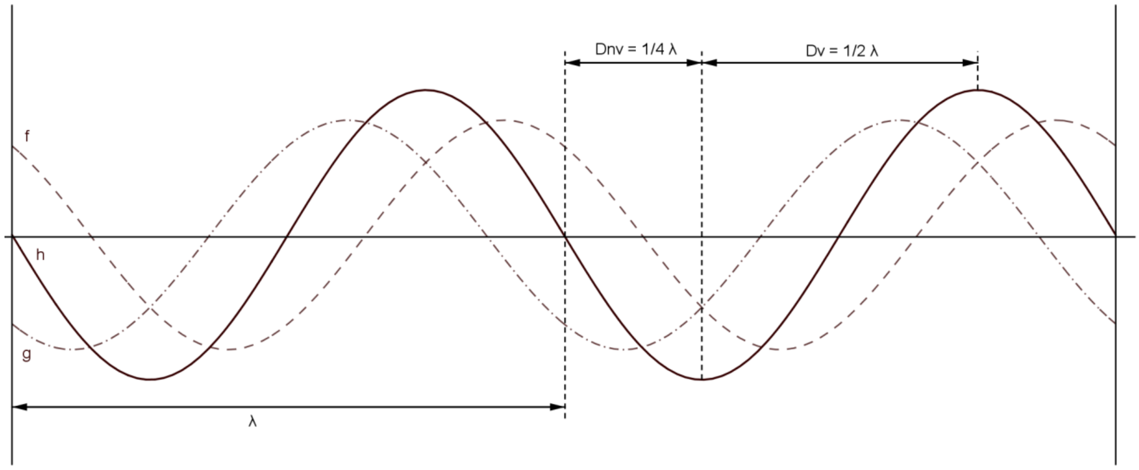


Figura 12 – Cálculo do comprimento de onda (onda estacionária h dada por h = f + g)

4.2.1. Harmônicos

A vibração de uma corda, ou de uma coluna de ar, apresenta uma composição complexa de vários modos de vibração que ocorrem simultaneamente. Essas vibrações são chamadas de harmônicos e podem ser calculados a partir da frequência fundamental do elemento vibrante.

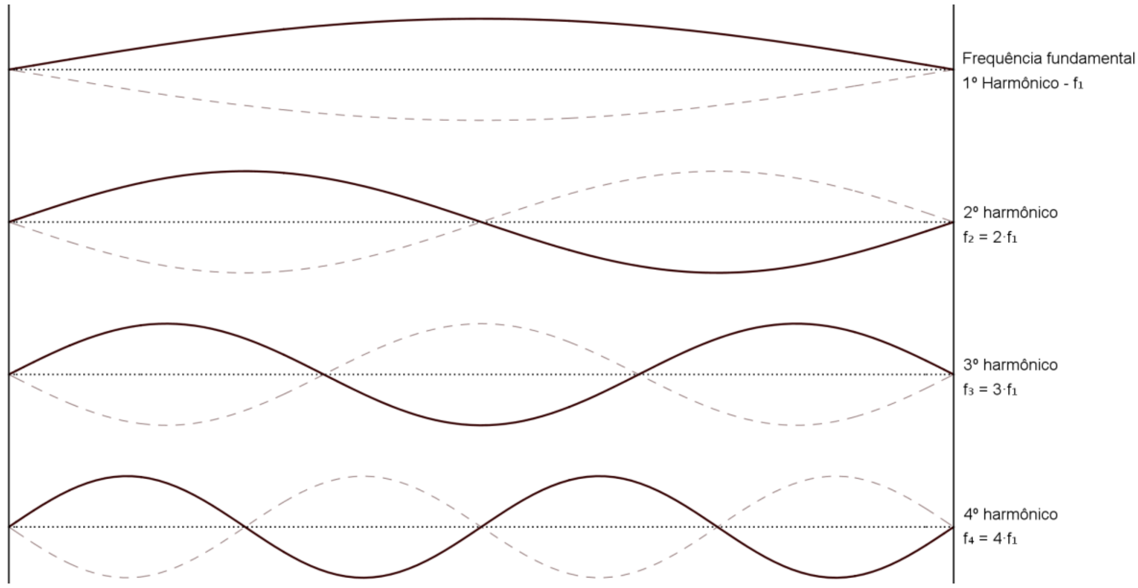


Figura 13 – Frequência fundamental e harmônicos

O cálculo dos harmônicos será abordado com mais detalhes na próxima seção, quando forem analisadas as frequências geradas por um tubo sonoro. São esses harmônicos que, uma vez compostos, geram características sonoras do instrumento, como timbre.

Para calcular os harmônicos basta multiplicar a frequência da onda fundamental, a qual produz apenas um ventre na onda, pela quantidade de ventres gerados pelo harmônico, o qual está sendo analisado, conforme apresentado na Figura 13 – Frequência fundamental e harmônicos.

4.2.2. Ondas estacionárias em tubos fechados

Alguns instrumentos musicais de sopro utilizam o princípio das ondas estacionárias para produzir som. Nesse caso específico, é interessante analisar como se comportam ondas estacionárias em tubos fechados, uma vez que o instrumento que será produzido, a flauta pan, consiste em uma sequência de tubos fechados em uma de suas extremidades.

Na extremidade fechada do tubo se forma um nodo enquanto na extremidade aberta se forma um ventre (ROEDERER, 2002, p. 191). Essa característica faz com que sempre haja alguma onda incompleta se formando no interior do tubo. Assim, o cálculo da frequência produzida no tubo sempre é calculado a partir de uma fração do comprimento de onda.

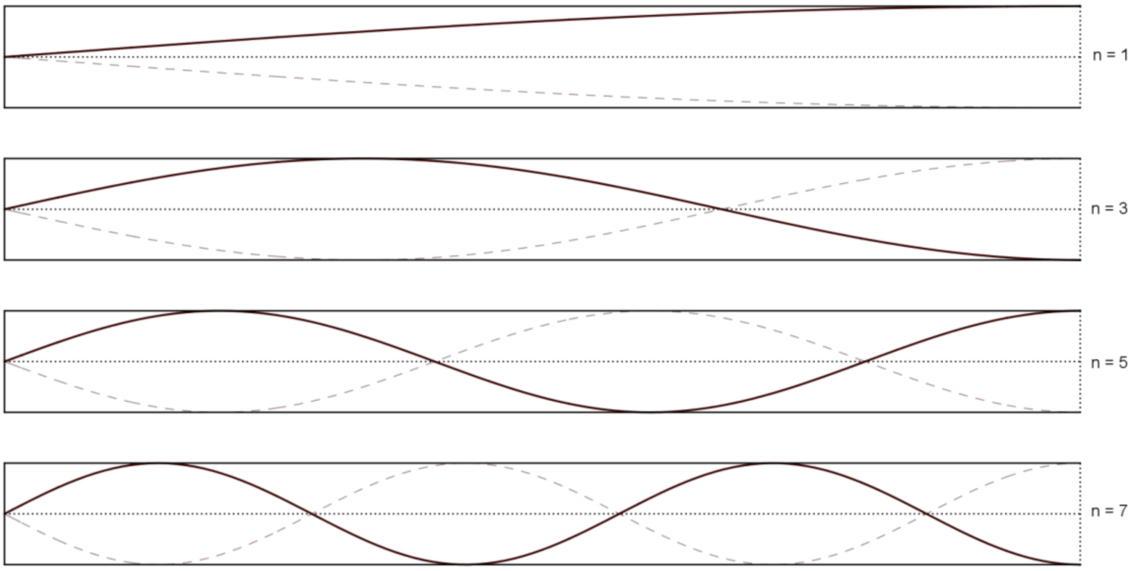


Figura 14 – Ondas estacionárias em tubos fechados e seus harmônicos

De acordo com o que se pode observar na Figura 14, a quantidade de trechos determinados pela distância entre um nodo em um ventre consecutivo é sempre determinado a partir de um número ímpar. A onda inicial produzida em um tubo tem extensão de $\frac{1}{4}$ do comprimento de onda; a segunda possui metade do comprimento de uma onda completa a mais em relação à anterior, ou seja, $\frac{3}{4}$ do comprimento de onda. As demais se caracterizam por terem $\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$ e, sucessivamente, frações de denominador quatro e numerador ímpar, podendo ser escritas como

$$D_{N,V} = \frac{n \cdot \lambda}{4} \tag{8}$$

sendo $D_{N,V}$ a distância entre as abcissas de nodo e ventre consecutivos. Organizando a expressão de modo a isolar o comprimento de onda, obtém-se

$$\frac{4 \cdot D_{N,V}}{n} = \lambda.$$

A apresentação dessas informações deve gerar um questionamento importante para a continuidade da análise dos tubos fechados:

"Mas na prática como é possível calcular o comprimento de onda?"

Observe que, de acordo com o apresentado na Figura 14, para a frequência fundamental, o quarto de onda produzido no interior do tubo corresponde exatamente ao comprimento do tubo, então, pela (8) pode-se afirmar que para $n = 1$

$$D_{N,V} = C = \frac{1 \cdot \lambda}{4},$$

sendo C o comprimento do tubo, em metros.

Uma possível variação dessa expressão é dada isolando o comprimento de onda

$$\lambda = 4C. \tag{9}$$

Uma vez obtida uma relação entre o comprimento do tubo e o comprimento da onda fundamental, basta buscar uma relação entre esse comprimento e a frequência fundamental para que se saiba qual nota musical é produzida nele.

Tomando como base a equação fundamental da ondulatória, (7)

$$v = \lambda \cdot f$$

e pela (9) substituindo λ obtido a partir do comprimento do tubo, obtém-se

$$v = 4 \cdot C \cdot f.$$

Reorganizando as variáveis, obtém-se a fórmula para cálculo da frequência fundamental

$$f = \frac{v}{4 \cdot C}.$$

O cálculo inverso também pode ser realizado, caso se queira calcular o comprimento do tubo que gerará determinada frequência, modificando apenas a organização das variáveis.

$$C = \frac{v}{4 \cdot f}\,. \tag{10}$$

Essa expressão é a base para o cálculo dos tubos apresentados na próxima seção, tendo em vista que o propósito da atividade do capítulo 5 é produzir uma flauta com tubos fechados.

4.3. Relação entre logaritmos e tubos sonoros

De acordo com o que foi apresentado na seção 4.2, a relação entre frequência fundamental da onda estacionária produzida e o comprimento de um tubo fechado em uma das extremidades pode ser definido pela (10).

Além disso, vale ressaltar que está se considerando apenas o harmônico fundamental produzido no tubo, ou seja, a variável n que determina o harmônico analisado será omitida por se tratar do elemento neutro da multiplicação.

- para calcular a frequência fundamental gerada por um tubo sonoro é necessário considerar $n = 1$. As demais frequências geradas a partir dos harmônicos serão definidas a partir desse valor inicial.

Considere que serão produzidos diversos tubos, que uma vez tocados em sequência devem gerar a escala musical. Para evidenciar a posição do tubo na sequência será utilizada a letra k como índice das variáveis C e f na (10), ou seja,

$$C_k = \frac{v}{4 \cdot f_k}.$$

Convém evidenciar que a velocidade de propagação do som no ar varia de acordo com a temperatura das moléculas (ROEDERER, 2002, p. 112), porém, será levado em consideração um ambiente sem variações de temperatura, ou seja, com velocidade de propagação constante. Assim é possível afirmar que $\frac{v}{4} = c$ assume um valor constante. Em outras palavras,

$$C_k = \frac{v}{4 \cdot f_k}$$

pode ser reescrito como

$$C_k = \frac{c}{f_k}. \qquad (11)$$

A partir da definição de f_k por meio de uma progressão geométrica (capítulo 3), é possível afirmar que C_k segue o mesmo padrão, porém, a partir de uma relação inversamente proporcional às frequências calculadas anteriormente. De acordo com a Tabela 8, f_k pode ser substituído por uma potência de base 2 ou $\frac{1}{2}$, caso se queira calcular a sequência indo para notas mais graves ou mais agudas. Sem perda de generalidade, substituindo f_k por q^k, conforme termo definido na Tabela 3 é possível reescrever a (11) da relação entre comprimento do tubo e frequência como

$$C_k = \frac{c}{q^k}$$

ou ainda

$$C_k = c \cdot q^{-k} \tag{12}$$

Com q sendo a razão da PG e k a posição do tubo na sequência.

Assim, a partir da (12) é possível estabelecer uma relação entre a nota a desejada e o comprimento do tubo que produzirá o som, exatamente nos mesmos moldes determinados na Tabela 8.

Observe que na Tabela 8 o termo inicial da PA é o 0, e ele se relaciona com o termo inicial da PG, que é o 1, respeitando a proposição 4.

Na prática essa informação revela que a primeira nota de uma escala será obtida a partir da extensão completa de um tubo tomado como referência inicial. As próximas notas se darão a partir de tubos determinados por meio de sucessivas multiplicações do comprimento do referencial inicial por uma razão fixa. Isso nos mostra que a sequência de comprimentos dos tubos atende plenamente às definições de logaritmo apresentadas no capítulo 2, e abre caminho para o início da execução da atividade prática que será discutida no próximo capítulo.

5. CONSTRUÇÃO DO INSTRUMENTO MUSICAL COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DE LOGARITMOS.

A proposta para apresentação do conceito de exponencial e logaritmo será realizada em uma oficina de luteria, na qual os alunos construirão seus próprios instrumentos musicais. Para isso será necessário utilizar de conceitos teóricos a respeito da escala musical e também a medição de instrumentos previamente preparados como modelo para medições, seja para validação ou criação de uma hipótese a respeito da distribuição das notas na escala musical. Esse trabalho trata de uma atividade de descoberta orientada, ou seja, os estudantes devem trilhar o caminho da descoberta da informação desejada, seguindo passos e orientações para que descubra, passo a passo, os princípios necessários para a construção do instrumento musical.

Buscando a viabilidade da realização da atividade, é necessário que a construção do instrumento musical seja realizada seguindo dois critérios principais: baixo custo e praticidade de produção. Diversos instrumentos interessantes poderiam ser construídos, mas a maior parte deles esbarra em algum desses critérios. Dessa maneira, o instrumento escolhido foi a flauta pan, que pode ser construída usando apenas canudos plásticos e materiais escolares comuns como tesoura e fita adesiva.

Esse instrumento consiste em uma sequência de tubos fechados, os quais podem ser ordenados seguindo diversas escalas distintas. Como visto no capítulo 4, a variação do comprimento dos tubos é responsável pela diferença de tom em cada um dos tubos.

Este capítulo está organizado do seguinte modo:

- PLANO DE AULA - MATERIAL DO PROFESSOR

Esta seção traz orientações práticas para o encaminhamento da atividade sob uma perspectiva predominantemente pedagógica, como por exemplo, sugestões da maneiras de iniciar a discussão em cada aula, apontamento de possíveis questionamentos que podem surgir durante o desenvolvimento da atividade e alertas a respeito de pontos do desenvolvimento da atividade, os quais merecem atenção redobrada para que se possa atingir os objetivos desejados.

- MATERIAL PARA OS ALUNOS

Esta seção traz o material que deverá ser entregue aos alunos no início de cada aula. Ele servirá como guia do caminho a se percorrer e apresenta as principais questões a se discutir. Além disso, serve como espaço de registro de ideias, cálculos e também, como referencial para a retomada da discussão no início de cada aula.

- PEQUENO APORTE TEÓRICO

Esta seção traz orientações teóricas para o encaminhamento da atividade sob uma perspectiva predominantemente técnica. Se trata de um resumo dos capítulos 2, 3 e 4, trazendo informações as quais poderão ser uteis para o desenvolvimento prático das aulas. A proposta é que o professor leve consigo esse material para a sala de aula durante o desenvolvimento da atividade, para que sirva como um guia para consultas rápidas.

O plano de aula para o professor e o material do aluno, apresentado na seção 5.1 e 5.2, respectivamente, foram planejados, executados e revistos. A atividade foi proposta para alunos de ensino médio em uma escola particular do município de Campinas (SP), no contra turno das aulas regulares. Participaram do desenvolvimento da atividade alunos das três séries do ensino médio, sendo predominantemente alunos de 1º ano, incentivados a participar, e alguns poucos alunos de 2º e 3º anos, os quais aderiram à atividade por iniciativa própria e interesse no aprofundamento de seus conhecimentos.

A versão inicial do material do aluno, aplicada nessa ocasião, encontra-se no Apêndice. As modificações realizadas nesse material e as experiências e reflexões que levaram a essas mudanças encontram-se na seção 5.2 e no capítulo 6.

Por questões de praticidade, na explicação do encaminhamento das atividades, será considerado que o instrumento apresentado aos estudantes como base de medição e comparações será um violão, tendo em vista que tratar-se de um instrumento acessível e conhecido.

5.1. PLANO DE AULA - MATERIAL DO PROFESSOR

Tema: Noções de definição e propriedades de exponenciais e logaritmos por meio do estudo da escala musical.

Tempo previsto: 4 aulas de 100 minutos cada.

Turma: 1º ano do ensino médio

Conhecimentos prévios:

- Potenciação com expoentes racionais

- Progressão aritmética

- Progressão geométrica

- Definição de função

- Função inversa

5.1.1. ATIVIDADE

A atividade consiste na busca por padrões matemáticos na escala musical por meio da medição e da análise de instrumentos musicais e, a partir das hipóteses criadas para justificar a formação dessa escala, reproduzir essas informações criando um instrumento musical.

Sob um ponto de vista conceitual, o propósito da atividade é fazer com que os alunos apliquem o método científico, e a partir dele concluam que a escala musical se forma por meio da relação de uma progressão aritmética com uma progressão geométrica, abrindo caminho para que os exponenciais e logaritmos sejam apresentados posteriormente como uma maneira de formalizar a formação da escala.

A atividade se divide em quatro passos principais, sendo:

- Apresentação de noções iniciais a respeito da escala musical e relações fundamentais entre matemática e música.

- Medição de instrumentos musicais como forma de coleta de dados que servirão de base para a criação de hipóteses a respeito da formação da escala musical.

- Criação de hipóteses a respeito da formação da escala musical por meio de relações matemáticas.

- Construção de um instrumento musical (flauta) como teste prático para validação das hipóteses criadas.

5.1.2. DINÂMICA BÁSICA DAS AULAS

Neste tópico serão apresentadas sugestões para cada momentos das aulas, com base no encaminhamento previsto para o material do estudante. Todas as aulas foram elaboradas a partir de uma estrutura, única dividida em quatro partes:

1. Introdução: cada uma destas aulas se inicia com uma apresentação. Em algumas aulas o professor apresenta os conceitos necessários para o encaminhamento da aula em outras os estudantes apresentam as hipóteses ou conclusões obtidas na aula anterior.

2. Questão norteadora: a partir dos elementos apresentados no início da aula surgem questões que devem servir como referência para guiar os estudantes na busca das conclusões previstas para a aula.

3. Desenvolvimento: os estudantes se reúnem em grupos e colocam em prática medições, cálculos e discussões propostos através das questões norteadoras.

4. Conclusão: momento em que os estudantes organizam os resultados obtidos e recebem do professor orientações que servirão como base para a apresentação da aula seguinte (exceto na última aula, em que os estudantes farão a apresentação do resultado final aos colegas).

AULA 1 - HISTÓRIA DA MÚSICA E TEORIA MUSICAL

A primeira servirá como momento de apresentação da proposta da atividade e discussão inicial sobre o significado de música.

1. Introdução:

A apresentação inicial na primeira aula deve ser utilizada como um momento de introdução a respeito da concepção geral sobre o significado de música. Devem ser apresentadas músicas de diversos estilos e épocas. Algumas possibilidades para condução da atividade são:

- apresentação de história da música, mostrando o surgimento da estrutura da escala pitagórica e a sua influência no desenvolvimento da música ocidental.

- apresentação de estilos musicais de lugares e épocas diferentes ao que estão habituados, como música árabe, chinesa, celta, entre outras.

- apresentação de informações a respeito das raízes de um estilo musical ao qual estejam habituados, como nascimento do rock, do rap, do samba, entre outros gêneros.

- apresentação da história da música eletrônica, e análise desse estilo enquanto uma nova vertente, tendo em vista que em toda a história da humanidade, apenas com o recente desenvolvimento tecnológico, se fez possível a criação de tal estilo.

Em seguida deve-se propor a discussão a respeito das características do que lhes foi apresentada e incentivar a análise das diferenças e semelhanças entre as músicas e os estilos mais conhecidos pelos estudantes.

2. Questão norteadora:

No momento de discussão inicial devem ser propostas questões a respeito das características das músicas apresentadas. Algumas sugestões são:

- que instrumentos musicais você conseguiu identificar nas músicas apresentadas?

- as músicas apresentam sonoridade agradável?[5]

- que características fazem com que você ache uma música agradável (ou desagradável)?[6]

- Por que uma música pode ser considerada agradável por um grupo e desagradável por outro? (O termo 'grupo' pode se referir desde conjuntos na sala de aula até povos de culturas diferentes e que viveram em momentos diferentes. A discussão pode se pautar em diferenças que vão de idade dos ouvintes até elementos culturais impostos por questões geográficas ou diferentes épocas).

Num segundo momento, os estudantes devem ser apresentados a instrumentos musicais e a noções iniciais de teoria musical, como por exemplo, a escala com doze notas e ao caráter cíclico das escalas musicais. Neste ponto, duas perguntas presentes no material do estudante deverão guiar a análise e medição dos instrumentos musicais:

- Como são produzidas variações de som em uma mesma corda?

- Qual é a relação entre o comprimento da corda que gera uma tônica e o comprimento da corda que gera sua oitava?

[5] A questão possui resposta subjetiva e foi proposta como forma de incentivar a discussão e partilha de opiniões subjetivas.
[6] Novamente se trata de uma questão com grande carga de subjetividade, proposta apenas com a intenção de incentivar a discussão, sem a pretensão de obter respostas definitivas.

3. Desenvolvimento:

Cada grupo deve ter acesso a um instrumento musical que permita uma fácil análise dos sons e dos comprimentos que geram esses sons. Por exemplo, uma flauta transversal ou um violino não são bons instrumentos para se apresentar inicialmente, pois exigem conhecimentos específicos e treinamento para produzir sons. O ideal é apresentar instrumentos populares de cordas, como um violão ou uma guitarra, pois esses permitem uma clara visualização da sequência responsável por produzir a escala musical, além de não exigir habilidade específica para conseguir produzir sons simples.

Os grupos devem ter alguns minutos livres para explorar os instrumentos. É comum alguns alunos nunca terem observado detalhes a respeito da estrutura dos instrumentos, como por exemplo, onde as cordas se prendem, como as tarraxas para afinação funcionam e até mesmo noções sobre o peso do instrumento e a posição que se deve segurá-lo.

Para que o desenvolvimento da atividade corra como esperado, é importante que todos tenham alguma noção a respeito do funcionamento do instrumento, inclusive no que se refere a questões que muitas pessoas julgam aparentemente óbvias, como por exemplo '*Quando uma corda é pressionada em alguma posição do braço do violão e tocada, que parte dela é responsável por produzir o som desejado: A porção mais próxima da cabeça do violão, ou a porção mais próxima do corpo do violão?*'

Uma vez que os grupos já tenham alguma familiaridade com os instrumentos, deve-se propor as questões apresentadas no material do estudante – seção 5.2.

A primeira pergunta, *'Como são produzidas variações de som em uma mesma corda?'* tem o propósito de fazer que os estudantes percebam que variações no comprimento de uma corda, prendendo e soltando porções dela no braço do violão, são responsáveis por gerar variações nos sons produzidos. Além disso, essa pergunta pode revelar a olhares mais atentos, que a sequência de notas possíveis de se obter nesse instrumento ocorrem independentemente da afinação estabelecida para a corda solta.

A segunda pergunta, *'Qual é a relação entre o comprimento da corda que gera uma tônica e o comprimento da corda que gera sua oitava?'* é apresentada com a intenção de fazer com que os estudantes realizem uma primeira análise dos comprimentos do instrumento e que perceba que a relação entre tônica e oitava está na razão de 2:1.

4. Conclusão:

A aplicação desta atividade evidenciou que os estudantes tendem a fazer as medições tomando a tônica como a extensão completa da corda. Consequentemente, a oitava consiste na décima segunda casa do braço do instrumento. Entretanto, que os termos 'tônica' e 'oitava' se referem a notas produzidas em uma mesma corda, que estão a doze casas de distância. Portanto, 1ª e 13ª, 2ª e 14ª, e assim por diante, apresentam o mesmo padrão. Alguns estudantes podem já ter percebido isso, mas a prática das atividades mostrou que normalmente isso não ocorre. Sabendo disso, antes de encerrar o primeiro dia de atividade, deve-se propor a seguinte questão:

'Dados quaisquer duas casas que se encontram a doze semitons de distância, é possível estabelecer uma relação entre os comprimentos das cordas relacionadas a elas. Que relação é essa?'

Observe que na verdade essa pergunta é uma possível interpretação para a segunda questão posta no material do estudante, porém, o fato de estar explícito que não se trata apenas da relação entre o comprimento total da corda e sua oitava, sugere aos estudantes que existe a possibilidade de haver um padrão relacionando semitons consecutivos, independentemente de suas posições no braço do instrumento.

AULA 2 - MEDIÇÕES/ORGANIZAÇÃO DE DADOS

A segunda aula deverá se iniciar com a análise e medição dos instrumentos musicais e se encaminhar para a busca das primeiras noções de algum tipo de padrão que relacione os comprimentos das cordas com a sequência de notas musicais da escala.

1. Introdução:

O início da segunda aula deve servir como um momento de discussão a respeito das perguntas feitas no final da aula anterior. O material do estudante traz as resposta para as questões, portanto é esperado que sua entrega seja realizada após a discussão.

Nesse momento deve ficar explícito que a diferença de doze semitons consecutivos necessariamente estabelece uma relação entre tônica e oitava, independentemente da posição em que foi tomada a tônica na corda do instrumento.

Uma vez percebida a relação entre tônica e oitava, é comum surgirem dúvidas a respeito do posicionamento das notas intermediárias. Neste ponto serão apresentadas as orientações para a continuação das medições nos instrumentos.

2. Questão norteadora:

Neste ponto da atividade será apresentada a seguinte orientação sobre como realizar as medições nos instrumentos:

'Escolha uma corda e, começando em uma posição qualquer do braço do instrumento, verifique as notas emitidas por treze posições subsequentes. Anote as distâncias entre cada traste pressionado e o cavalete, utilizando uma casa decimal no resultado.'

Em seguida é solicitado que a mesma sequência de medições seja realizada novamente, começando em outra posição do braço do instrumento. As medições podem ser realizadas em outro instrumento caso haja algum disponível.

Para facilitar a visualização das medições e das relações entre os valores obtidos, sugere-se que cada grupo faça as medições dos treze intervalos utilizando pedaços de barbante os quais serão cortados e colados em sequência, de modo a evidenciar a relação entre os comprimentos que determinas uma sequência de cordas que formam uma escala completa. É esperado que o resultado obtido seja semelhante à sequência apresentada na Figura 15.

É esperado que, a partir dessa construção, os estudantes percebam que a sequência dos comprimentos das cordas se dá a partir de uma relação não-linear. Além disso, é possível reforçar a resposta da segunda questão posta na primeira aula, na qual se pede uma relação entre os comprimentos das cordas que formam tônica e oitava.

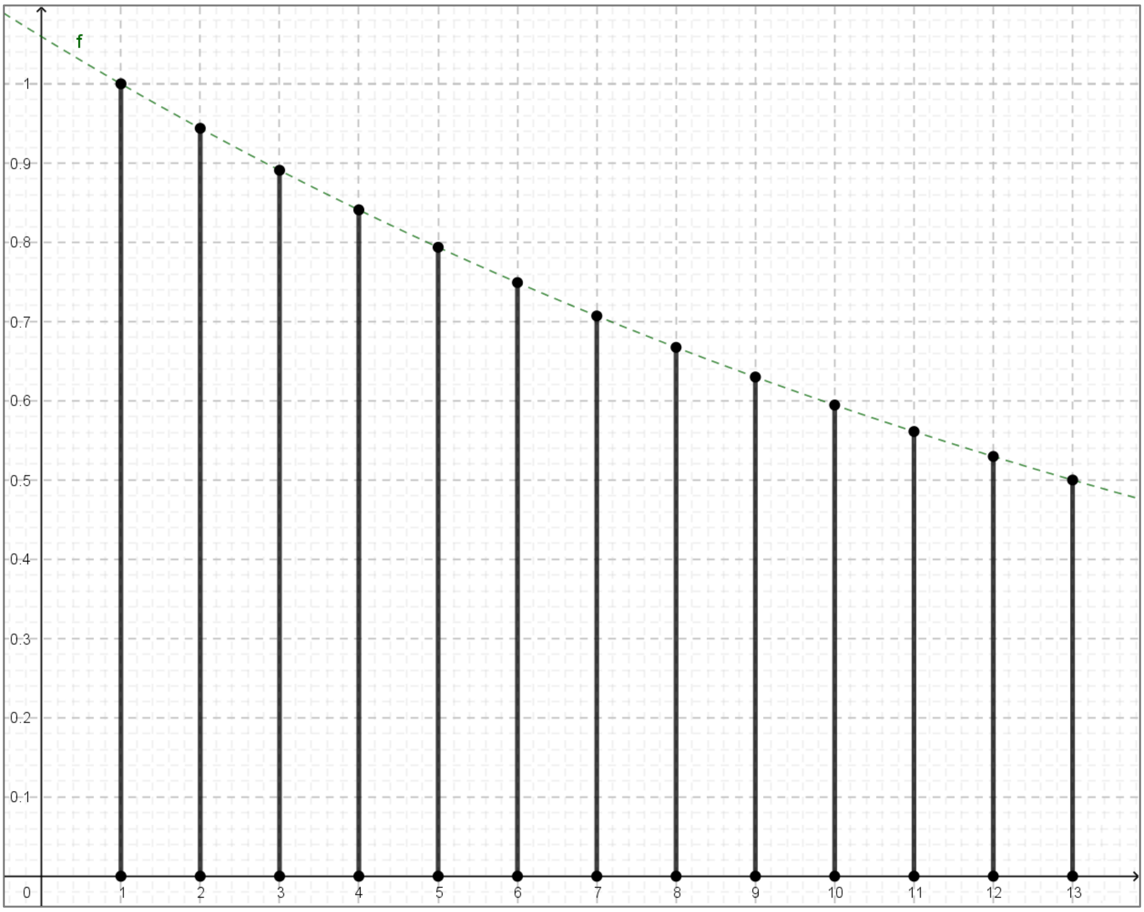


Figura 15 – Representação gráfica da razão entre as medidas das cordas de uma escala em relação à tônica

3. Desenvolvimento:

Para que as medidas sejam cuidadosamente realizadas é necessário que os estudantes sejam precisos com o posicionamento da fita métrica em relação aos trastes e ao cavalete. O início da medição deve se dar exatamente no topo do traste: nem antes, nem depois. O dedo que pressiona a corda pode ficar em qualquer posição da casa, porém, a extensão da corda responsável por emitir o som se inicia exatamente na posição do traste. O término da medição deve ocorrer exatamente sobre a posição em que as cordas tocam o cavalete, e não até a posição final que são presas no instrumento.

O verso da folha de orientação dos alunos apresenta duas tabelas, nas quais devem ser anotados os comprimentos das cordas responsáveis por gerar cada uma das treze notas subsequentes em dois instrumentos diferentes. Neste momento os estudantes devem realizar as medições sem a preocupação de estabelecer relações entre os valores obtidos. O objetivo desta aula é coletar e organizar dados.

A Tabela 9 - Exemplo de medição - Violão - 6º Corda (Mi) apresenta um exemplo de resultados obtidos na medição das 6ª corda de um violão.

O professor deve orientar os estudantes a conferir quais são as notas musicais geradas em cada posicionamento do braço do instrumento, o que pode ser feito facilmente utilizando aplicativos para smartphones voltados à afinação de instrumentos musicais e reconhecimento de frequências sonoras, os quais podem ser obtidos gratuitamente. A escolha do meio de verificação, ou do aplicativo fica livre e a cargo do professor, entretanto, alguns exemplos disponíveis são o ‘n-Track tuner’ e o ‘Da tuner lite’.

Nota musical (n)	**Comprimento** (C_n)
1 – Mi	65,0 cm
2 – Fá	61,2 cm
3 - Fá #	57,6 cm
4 – Sol	54,6 cm
5 - Sol #	51,5 cm
6 – Lá	48,7 cm
7 - Lá #	45,7 cm
8 – Si	43,4 cm
9 – Dó	40,9 cm
10 - Dó #	38,5 cm
11 – Ré	36,4 cm
12 - Ré #	34,4 cm
13 – Mi	32,5 cm

Tabela 9 - Exemplo de medição - Violão - 6º Corda (Mi)

4. Conclusão:

O encerramento dessa aula tem por objetivo sugerir aos estudantes que existe uma relação oculta entre os valores obtidos nas medições. Essa apresentação deve ser feita de maneira informal, com o propósito de instigar a curiosidade e definir que a terceira aula será desenvolvida com o propósito de buscar e formalizar essa regra.

A sugestão de teste de medições surge a partir da seguinte sequência de perguntas:

'A partir de suas medições faça o que se pede:

1) Escolha duas posições da primeira tabela, por exemplo: $a = 3$ (3ª linha) e $b = 10$ (10ª linha).

2) Dados os valores escolhidos no item 1, divida o que tem maior comprimento pelo que tem menor comprimento.

3) Faça o mesmo para a segunda tabela, escolhendo os valores que estão nas mesmas posições escolhidas no item 1 (seguindo o exemplo: 3ª linha e 10ª linha)

Comparando os resultados, o que é possível observar?'

É esperado que os estudantes obtenham dois resultados muito próximos entre si. Tomando como exemplo a sugestão de medição da 3ª e da 10ª casa, é esperado que o resultado seja 1,5, ou algum valor muito próximo, conforme é possível observar na oitava posição da primeira coluna da Tabela 7. Para ser mais preciso, ao dividir quaisquer valores de medições que estejam a 7 posições de diferença, é esperado que o resultado se aproxime de 1,5 e com isso essa informação sirva como incentivo à curiosidade para entender por que esse padrão se mantém.

AULA 3 - CRIAÇÃO DE HIPÓTESES / TESTE TEÓRICO

A terceira aula deverá servir como momento de exploração de dos resultados obtidos na segunda aula e criação de hipóteses a respeito da regra de formação da escala musical.

1. Introdução:

No final da segunda aula foi proposto um teste por meio do cálculo da razão entre dois valores da tabela de obtida por meio das medições dos instrumentos. O início da terceira prevê uma breve discussão a respeito dos resultados obtidos.

Deve ficar claro aos estudantes que os resultados esperados com o cálculo da razão entre dois valores que se encontram a uma determinada distância sempre se repete, independentemente da posição tomada como ponto de partida para o cálculo. Uma vez que os estudantes tenham conhecimento a respeito dessa informação, novas questões e exemplos podem ser propostos com a finalidade de buscar uma justificativa para esses resultados.

2. Questão norteadora:

O próximo passo da atividade pretende evidenciar aos estudantes que a relação obtida no final da segunda aula pode ser reproduzida para qualquer intervalo entre posições e para qualquer ponto de partida.

É obvio que nem sempre será possível realizar esse teste para qualquer combinação, pois imagine tomar como base a vigésima casa do braço de um violão e buscar a relação de nove casas a frente, uma vez que os violões usualmente possuem entre vinte e duas a vinte e quatro casas. Impossível! Portanto é importante atentar a necessidade de escolha de posições e intervalos possíveis no braço do violão.

No material do estudante seguem estas orientações:

'- Calcule a razão entre os comprimentos correspondentes a duas notas com 'intervalo entre as posições' igual a 4. Repita o procedimento quaisquer outros dois valores que também possuam intervalo igual a 4.

- Repita o procedimento do passo anterior tomando outro valor para o intervalo entre as notas.'

- Repita o procedimento do passo anterior tomando o valor para o intervalo entre as notas igual a 1 (notas subsequentes).'

3. Desenvolvimento:

Os estudantes devem, em grupo, realizar os cálculos sugeridos nas três questões, as quais foram propostas intencionalmente, sugerindo que a relação procurada pode ser encontrada a partir do cálculo de razões. Essa intencionalidade se mostrou necessária após uma aplicação de teste da atividade para um grupo de alunos, os quais receberam apenas a orientação de que deveriam procurar por uma relação entre os valores obtidos nas medições. A maioria dos grupos iniciou o processo calculando a diferença entre os comprimentos. Os que perceberam que poderiam calcular a razão entre os comprimentos tiveram dificuldades em perceber que intervalos constantes geram razões constantes. O grande número de combinações possíveis fez com que tivessem dificuldade em perceber os padrões contidos no conjunto de valores.

Para evidenciar os resultados obtidos e promover a reflexão em grupo, deve-se solicitar aos estudantes que partilhem os resultados dos cálculos. Para que isso seja feito de forma organizada e padronizada, o professor pode produzir um cartaz com uma tabela, na qual cada grupo deve escrever os valores obtidos como no exemplo da Figura 16.

Resultado dos cálculos - Diferenças e razões entre as cordas

Grupo	Intervalo entre as posições: (b - a = 4)	Razão obtida (C_a / C_b =)	Intervalo entre as posições: (b - a =)	Razão obtida (C_a / C_b =)	Intervalo entre as posições: (b - a = 1)	Razão obtida (C_a / C_b =)
1	4				1	
2	4				1	
3	4				1	
4	4				1	
5	4				1	

Figura 16 - Tabela de partilha de resultados

4. Conclusão:

É esperado que os estudantes cheguem gradativamente às seguintes conclusões:

- A razão entre os comprimentos correspondentes à separação por quatro casas de distância é um valor constante, independentemente da posição de partida.

- A razão entre os comprimentos correspondentes a uma separação com valor fixo sempre um resultado constante, independentemente da posição de partida.

- A razão entre os comprimentos correspondentes a duas casas subsequentes corresponde a um valor constante, correspondente a aproximadamente 1,059, quando calculada a razão do maior pelo menor, ou 0,944 quando calculada a razão do menor pelo maior.

Por fim, a aula deve terminar com uma breve apresentação da proposta de atividade da que será desenvolvida na quarta e última aula: a construção da flauta. É importante ter uma flauta pronta para mostrar aos estudantes, pois a percepção de que todo o trabalho realizado e o conhecimento adquirido serão materializados em um instrumento musical, deve servir como elemento motivador para o engajamento na conclusão da atividade.

AULA 4 - CONSTRUÇÃO DO INSTRUMENTO

A quarta e última aula deve ser o momento de aplicação das hipóteses criadas para a lei de formação da escala musical. É esperado que ao final dessa aula, cada aluno tenha construído uma flauta a partir de cálculos realizados com base nas conclusões obtidas na terceira aula.

1. Introdução:

A quarta aula deve ser iniciada com a retomada da questão posta ao final da terceira aula, de modo a elucidar possíveis dúvidas a respeito da regra de formação da escala musical. É importante que os estudantes tenham clareza a respeito do resultado esperado de modo a permitir que a última parte do processo, ou seja, a construção da flauta possa ser realizada corretamente.

Para dar sequência à atividade, deve ser feita uma breve apresentação a respeito do que é uma flauta pan. Características da flauta, como por exemplo, o fato de possuírem uma extremidade fechada, ou a possibilidade de construção em diversas escalas ajustando apenas os comprimentos e a quantidade de tubos que se pretende tocar, são informações interessantes para introduzir noções a respeito do instrumento que se pretende construir. Vídeos com apresentações de artistas tocando esse instrumento são facilmente encontrados na internet, e servem como referência para que os estudantes identifiquem a sonoridade esperada e percebam particularidades como, por exemplo, a maneira que se deve soprar o tubo para obter sons.

Ao final da atividade todos devem ter instrumentos que permitam a execução das músicas de teste.

2. Questão norteadora:

Para o desenvolvimento dessa atividade, é importante que os estudantes percebam a relação entre os cálculos realizados e as medidas de cada tubo da flauta.

Cada participante da atividade dispõe de 13 canudos de mesmo comprimento, os quais serão preparados para produzir os sons correspondentes a uma escala completa, mais a oitava. Sabendo que tubos sonoros se comportam de maneira equivalente às cordas no que diz respeito a seus comprimentos e notas musicais produzidas, as perguntas a seguir servirão como base para o cálculo dos comprimentos necessários para que cada canudo produza a nota desejada dentro da sequência da escala.

'Se o maior tubo da escala (tônica) tiver exatamente o comprimento de um canudo inteiro, qual deve ser o comprimento do canudo que representa a 13ª nota da escala (oitava)?'[7]

'Com base nos cálculos realizados nas aulas anteriores, qual deve ser a razão esperada entre os comprimentos de dois canudos consecutivos?'

Essas questões são suficientes para que os estudantes saibam onde começar, onde terminar e quanto variar para realizar a medição de cada canudo.

3. Desenvolvimento:

As flautas serão construídas seguindo as orientações apresentadas nos planos de aula entregues aos estudantes. As medidas de cada canudo da sequência devem ser anotadas na tabela apresentada ao lado do desenho da flauta pan que aparece na primeira página da atividade.

Como exemplo, seguem as medidas feitas a partir de um canudo de 20 cm:

[7] A sugestão inicial é que todos os alunos considerem que a nota mais grave da escala será obtida a partir do comprimento de um canudo inteiro, entretanto, é possível sugerir que cada um crie pequenas variações no comprimento deste primeiro tubo cortando alguns poucos centímetros. Dessa maneira, a partir de tônicas distintas, serão criadas flautas afinadas em escalas diferentes.

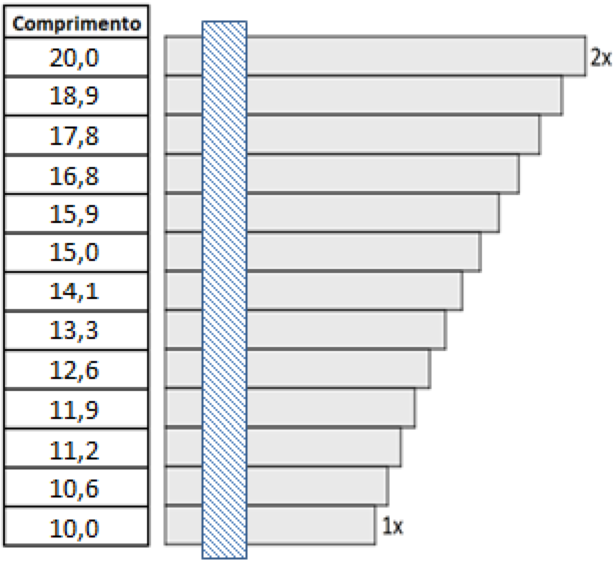


Figura 17 - Exemplos de comprimentos para os canudos da flauta pan.

4. Conclusão:

O encerramento da atividade deve ser feito de modo que os estudantes possam aproveitar o produto criado por eles. O material do estudante traz duas músicas para serem utilizadas como testes para verificar se os sons produzidos por cada tubo estão de acordo com a sequência esperada conforme apresentado na figura 5.

1	1	3	1	6	5	
1	1	3	1	8	6	
1	1	13	10	6	5	3
11	11	10	6	8	6	

1	8	6	5	3	13
	8	6	5	3	13
	8	6	5	6	3

Figura 18 - Tablatura de músicas para teste.

As músicas apresentadas para os testes são, respectivamente, *'Parabéns a você'* e um trecho do tema de filme *'Star Wars'*. A escolha delas se deu a partir de dois fatos: tratam-se de músicas bastante conhecidas e também e de fácil reconhecimento.

Para ler e compreender a tablatura siga as orientações:

- Numere os tubos de 1 a 13, sendo 1 o maior tubo e 13 o menor.

- Realize a leitura por linhas, da esquerda para a direita.

- Os intervalos na escrita dos números sugerem a duração das notas: intervalos curtos representam notas tocadas rapidamente em sequência enquanto intervalos longos representam maior duração na execução da nota.

5.2. MATERIAL PARA OS ALUNOS

Nesta seção serão apresentados os materiais que devem ser entregues aos estudantes como pauta e base de registros. As descrições contidas nessas orientações são sucintas e faz-se necessária a ação direta dos docentes na condução da atividade.

Por questões de praticidade e economia, cada aula foi planejada para se adequar a uma única folha, frente e verso.

AULA 1: HISTÓRIA DA MÚSICA E TEORIA MUSICAL

O propósito da primeira aula é apresentar informações básicas a respeito de teoria musical para que todos os estudantes adquiram conhecimentos essenciais para o desenvolvimento das atividades que serão propostas nas próximas aulas.

Introdução

A música é uma das mais profundas representações da identidade humana. Nos mais diversos locais e momentos da história, ela foi parte marcante da cultura dos povos, seja com propósito de entretenimento, louvor às divindades ou registros históricos de seus feitos e conquistas. Erudita ou popular é difícil imaginar uma forma de representação das emoções humanas tão universal quanto a música, dada sua capacidade de transcender a língua.

Alguns animais são capazes de produzir melodia, harmonia e ritmo, porém, apenas os humanos conseguem registrá-los, e estudá-los de modo a permitir que gerações futuras tenham acesso a sua própria história e origens.

Um dos elementos que permitiu que isso fosse possível foi o estudo da música por meio de uma interpretação matemática do significado das notas musicais. A percepção de que as notas musicais se repetem em intervalos bem determinados foi importante para que se percebesse que era possível registrar a música e reproduzi-la com os mais diversos instrumentos, e que, apesar de modificações de sonoridade trata-se essencialmente da mesma música.

Música e matemática na Grécia antiga

Um dos primeiros registros teóricos a respeito da música vem da Grécia antiga com a escola dos pitagóricos. Acreditavam que a matemática era a representação do divino, e que, dada uma corda, determinadas frações de seu comprimento original produziam sons que foram consideradas agradáveis à percepção dos indivíduos daquela civilização. Esses intervalos serviram como base para a criação das escalas musicais que ainda hoje caracterizam a música ocidental.

Figura 19 - Mulher grega tocando lira

Escala Musical

A escala musical é composta por 7 notas principais e 5 acidentes que são notas intermediárias, ou seja, que estão no intervalo entre duas notas principais. Ao término dessa sequência de 12 notas, a escala volta se repetir ciclicamente, de modo que em uma sequência com 13 notas musicais, a primeira e a última, chamadas respectivamente *tônica* e *oitava*, representam a mesma nota musical. Por exemplo, se a primeira for um Dó, a décima terceira também será um Dó, e o que as diferencia é a frequência de cada uma, sendo uma mais aguda que a outra.

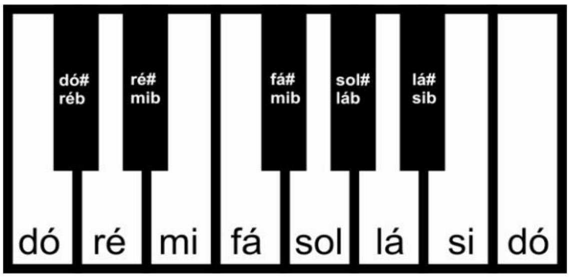


Figura 20 - Escala musical e oitava representada no teclado do piano

Início do desenvolvimento da atividade

A proposta da atividade que começa a ser desenvolvida nesta primeira aula buscar um padrão matemático que permita calcular a relação entre as frequências sonoras que geram as notas musicais. A partir das conclusões obtidas criaremos um instrumento musical.

Para isso iniciaremos esse processo com duas perguntas: 'Considerando um instrumento de cordas ...'

1) Como são produzidas variações de som em uma mesma corda?

____

____

____

____

2) Qual é a relação entre o comprimento da corda que gera uma tônica e o comprimento da corda que gera sua oitava?

____

____

____

____

____

Orientações para a próxima aula:

- Iniciaremos a atividade a partir da solução das duas questões propostas aqui.

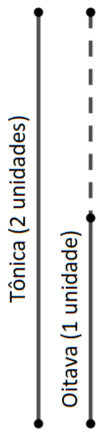
- Será necessário o uso de trena, ou fita métrica;

- Será necessário o uso de um analisador de frequências (afinador). Sugere-se a utilização de aplicativos de para celular (buscar como tuner ou frequency generator).

AULA 2: MEDIÇÕES / ORGANIZAÇÃO DE DADOS

O propósito dessa segunda aula é, a partir da análise e medição de instrumentos musicais, coletar dados que permitam a criação de hipóteses para explicar como é possível localizar todas as 12 notas de uma escala musical no intervalo de uma oitava utilizando recursos matemáticos.

Respostas para perguntas da aula passada:



'Considerando um instrumento de cordas ...'

1) Como são produzidas variações de som em uma mesma corda?

Fazendo com que apenas parte da corda possa vibrar. Isso pode ser feito simplesmente pressionando-a em algum ponto de sua extensão, de modo a permitir que uma porção vibre quando tocada enquanto outra parte permaneça estática.

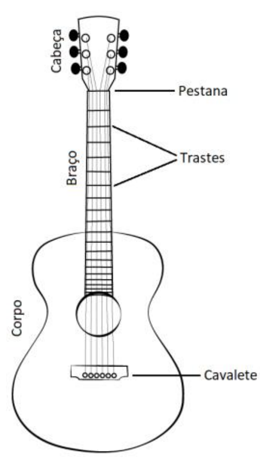
2) Qual é a relação entre o comprimento da corda que gera uma tônica e o comprimento da corda que gera sua oitava?

A oitava é produzida tocando uma corda com metade da extensão da original, ou seja, a relação entre os comprimentos é de 2 para 1.

Análise de instrumentos musicais / Distribuição das notas em relação ao tamanho da corda:

Após a discussão a respeito da relação entre tônica e oitava no braço do instrumento musical, o próximo passo é buscar uma relação entre as demais notas que formam a escala. Os estudantes devem se distribuir em grupos para continuação da análise alguns instrumentos musicais com escala temperada (que possuem claras subdivisões indicando a posição exata de cada uma das notas musicais da escala). Cada grupo deverá executar as medições a partir das orientações apresentadas a seguir e coletar dados para tentar descobrir como as notas musicais se distribuem. Para isso podem utilizar analisadores de frequência (afinadores de instrumentos).

Orientações para medições (instrumentos de corda):



- Escolha uma corda e, começando em uma posição qualquer do braço do instrumento, pressione um traste e toque a parte da corda que fica entre o traste e o cavalete. Verifique as notas emitidas por treze posições subsequentes.

- Meça os comprimentos entre cada traste pressionado e o cavalete, utilizando um barbante. Corte um pedaço de barbante para cada uma das medições e anote a medida obtida na tabela do verso dessa folha.

- Coloque os barbantes paralelamente uns aos outros sobre uma cartolina e alinhe suas pontas. Cole um ao lado do outro de modo a estabelecer a sequência de comprimentos que representam as cordas.

- Repita o procedimento dos itens anteriores começando em outra posição, outra corda ou outro instrumento.

Medições:

Instrumento:

Nota musical (n)	**Comprimento (C_n)**
1 -	
2 -	
3 -	
4 -	
5 -	
6 -	
7 -	
8 -	
9 -	
10 -	
11 -	
12 -	
13 -	

Instrumento:

Nota musical (n)	**Comprimento (C_n)**
1 -	
2 -	
3 -	
4 -	
5 -	
6 -	
7 -	
8 -	
9 -	
10 -	
11 -	
12 -	
13 -	

Por favor, realize as anotações à caneta.

Preparação para terceira aula

A partir de suas medições faça o que se pede:

1) Escolha duas posições da primeira tabela, por exemplo: $a = 3$ (3ª linha) e $b = 10$ (10ª linha).

2) Dados os valores escolhidos no item 1, divida o que tem maior comprimento pelo que tem menor comprimento.

3) Faça o mesmo para a segunda tabela, escolhendo os valores que estão nas mesmas posições escolhidas no item 1 (seguindo o exemplo: 3ª linha e 10ª linha)

Comparando os resultados, é possível observar alguma relação entre os valores obtidos? Se desejar, realize novamente o processo utilizando um intervalo diferente.

Espaço para cálculos

Teste 1:

$$posição\ a - posição\ b = \qquad \Bigg| \ \frac{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ a}{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ b} = \underline{\qquad\qquad} =$$

Teste 2:

$$posição\ a - posição\ b = \qquad \Bigg| \ \frac{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ a}{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ b} = \underline{\qquad\qquad} =$$

AULA 3: CRIAÇÃO DE HIPÓTESES / TESTE TEÓRICO

O propósito dessa terceira aula é criar hipóteses a respeito de uma regra matemática de formação das notas da escala musical com base nos dados coletados na segunda aula.

Retomando a aula anterior

Ao final da aula anterior foi proposta uma pequena análise para comparação entre valores da tabela de medições do instrumento musical, como consta a seguir:

"1) Escolha duas posições da primeira tabela, por exemplo: $a = 3$ (3ª linha) e $b = 10$ (10ª linha).

2) Dados os valores escolhidos no item 1, divida o que tem maior comprimento pelo que tem menos comprimento.

3) Faça o mesmo para a segunda tabela, escolhendo os valores que estão nas mesmas posições escolhidas no item 1 (seguindo o exemplo: 3ª linha e 10ª linha)

Comparando os resultados, o que é possível observar?"

É esperado que os resultados sejam iguais, ou muito próximos entre si. Mas por que isso acontece? Será um caso válido apenas para sete casas de distância, conforme proposto no teste? Será que essa relação é válida sempre que comparamos a razão entre posições equivalentes nas duas tabelas?

Para buscar a resposta para essas perguntas realizaremos outros cálculos em busca do padrão que relaciona as notas musicais. Seguem no próximo tópico algumas propostas de testes.

Orientações para criação de hipóteses

Dando sequência às questões do final da aula anterior, novas questões podem ser propostas para que possamos buscar a relação matemática existente entre as notas musicais.

A partir das anotações realizadas nas tabelas de medição dos instrumentos musicais, chamaremos de *'intervalo entre as posições'*, a diferença entre a posição correspondentes a dois valores que estão na coluna 'nota musical'. Por exemplo: o intervalo entre as posições 10 e 3 é 7. Por questões de praticidade, sempre consideraremos a diferença do maior para o menor. A partir disso, faça o que se pede a seguir:

Teste 1: Calcule a razão entre os comprimentos correspondentes a duas notas com 'intervalo entre as posições' igual a 4. Repita o procedimento em quaisquer outros dois valores que também possuam intervalo igual a 4.

Exemplo

As posições 9 e 5 tem intervalo entre as notas igual às posições 12 e 8, afinal, $9-5=4$ e $12-8=4$

$a-b=4$ $\qquad \dfrac{C_a}{C_b} = \text{Razão entre os comprimentos corespondentes às posições a e b}$

$$posição\ a - posição\ b = \mathbf{4} \qquad \left| \frac{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ a}{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ b} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \right.$$

Teste 2: Repita o procedimento do passo anterior tomando outro valor para o intervalo entre as notas.

$$posição\ a - posição\ b = \qquad \left| \frac{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ a}{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ b} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \right.$$

Teste 3: Repita o procedimento do passo anterior tomando o valor para o intervalo entre as notas igual a 1 (notas subsequentes).

$$posição\ a - posição\ b = \mathbf{1} \qquad \left| \frac{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ a}{Comprimento\ da\ corda\ da\ posição\ b} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \right.$$

A partir dos cálculos realizados discuta em grupo e procure formalizar uma hipótese para a regra de formação da escala musical.

Hipótese do grupo:

____

____

____

____

____

____

AULA 4: CONSTRUÇÃO DO INSTRUMENTO MUSICAL

O propósito dessa aula é criar instrumentos que sirvam como testes para as hipóteses criadas na terceira aula e verificar se produzem a sequência de notas musicais na escala temperada. Por questões de praticidade e custo o instrumento escolhido foi a flauta pan, feita de canudos.

Para a realização da atividade é importante saber que tubos sonoros se comportam de maneira equivalente às cordas, no que diz respeito a seus comprimentos e notas musicais produzidas.

Retomando a aula anterior

Na aula anterior foram postas algumas questões como encaminhamento para criação de hipóteses sobre a regra matemática para a formação da escala musical. Era esperado que se chegasse aos seguintes resultados:

a) Dados intervalos iguais entre duas notas, a razão entre os comprimentos correspondentes às cordas que geram essas notas devem ser um resultado fixo.
b) A razão obtida entre comprimento de cordas que geram notas subsequentes, considerando a divisão do maior comprimento pelo menor, deve sempre gerar o resultado $\sqrt[12]{2}$, ou seja, algo próximo de 1,0594.

Mas como justificar esses resultados a partir de cálculos?

A partir das informações obtidas ao longo das últimas aulas sabemos que:

- Um ciclo completo da escala musical é formado por 12 intervalos;

- os comprimentos das cordas que geram tônica e oitava estão em uma relação de 2:1.

Como a hipótese é que intervalos fixos entre notas geram razões fixas entre os comprimentos das cordas que os representam, então notas consecutivas possuem sempre uma mesma razão, a qual chamaremos de r.

Aplicando r por 12 vezes consecutivas é possível percorrer um ciclo completo da escala indo da tônica (que possui comprimento C_0) até a oitava (que possui comprimento C_1, de modo que $C_1 = 2C_0$)

Como

$$\begin{cases} C_1 = 2C_0 \\ C_1 = r^{12}C_0 \end{cases},$$

concluímos que $r^{12} = 2$ e, portanto, $r = \sqrt[12]{2}$.

TESTE DAS HIPÓTESES – CONSTRUÇÃO DA FLAUTA PAN

Uma vez criada à hipótese sobre a relação estabelecida entre as notas musicais de uma escala, chega a hora de realizar o teste de verificação. Para isso, o instrumento escolhido foi a flauta pan.

O que é flauta pan?

É um tipo de flauta constituído por uma sequência de tubos fechados que são tocados soprando a extremidade aberta com os lábios em posição tangente em relação aos tubos. Bastante utilizadas na música folclórica, a flauta pan fez parte da cultura da antiguidade grega e ainda hoje tem sua sonoridade muito destacada na música romena e andina. Comumente feitas de bambu, aproveitando o fato de serem tubos fechados, essas flautas podem ter sua afinação ajustada colocando ou retirando materiais nos fundos dos tubos, como cera de abelha.

Figura 21 - Flauta Pan
Fonte: (https://visualhunt.com, 2018)

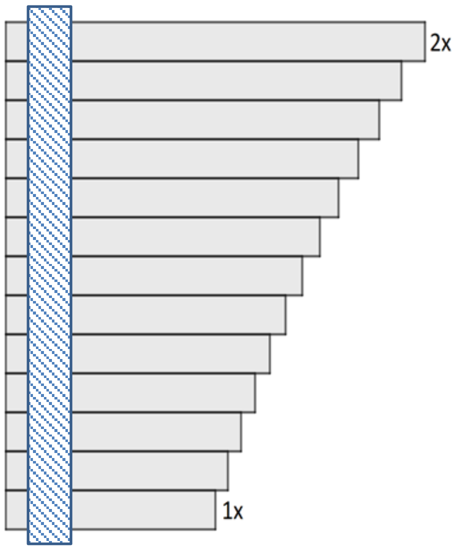
Construção

Para construir a flauta, cada grupo deverá realizar os cálculos dos comprimentos de cada tubo da flauta, seguindo os valores obtidos como hipótese para a relação entre os comprimentos. Em seguida, Acompanhem os procedimentos de construção apresentados na próxima seção.

Materiais

- Cola quente;
- Caneta;
- Régua;
- Tesoura;
- Palitos de sorvete;
- Cola branca;
- Fita adesiva.

Comprimento



A tabela acima deve ser preenchida seguindo a hipótese para a criação da relação entre os comprimentos associados às notas da escala musical. Dados os 13 tubos, e o primeiro e o última possuem marcações indicando a relação de 2 para 1 (tônica e oitava).

Procedimento:

- Com base nas conclusões obtidas na terceira aula, calcule a medida de cada um dos treze tubos da sequência e anote os resultados no quadro ‘Comprimentos’ presente no verso desta folha.

- Meça os tubos de acordo com as treze medidas anotadas no quadro e faça uma marca de caneta indicando o comprimento desejado.

- Corte os tubos sobre a marca;

- Feche uma das extremidades do tubo com uma leve camada de cola quente (apenas o suficiente para vedar o tubo. Não exagere para não encurtar a extensão da coluna de ar dentro do tubo);

- Organize os tubos em ordem crescente;

- Fixe os tubos um ao lado do outro usando fita adesiva ou cola sobre palitos de sorvete.

OBSERVAÇÕES:

As extremidades fechadas serão a parte inferior da flauta, e extremidades abertas deve ficar alinhadas uma ao lado da outra.

Os palitos de sorvete servem para criar espaçamento entre os tubos e para deixar a flauta rígida. Tubos muito próximos dificultam tocar a flauta, pois acaba soando mais de uma nota a cada sopro.

Fase de testes:

Uma vez criada a flauta é necessário conferir se as notas que ela emite são realmente a sequência que representa a escala. Para isso será necessária utilizar o gerador de frequências para comparar os sons produzidos.

Para finalizar, nada mais interessante do que colocar em prática a finalidade para qual o instrumento foi desenvolvido. Seguem duas sugestões de músicas para testes. Ambas são extremamente populares e por isso não serão apresentados seus nomes. Toque e tente descobrir quais são. Para tocar numere os tubos, do maior para o menor com a sequência de 1 a 13.

1	1	3	1	6	5	
1	1	3	1	8	6	
1	1	13	10	6	5	3
11	11	10	6	8	6	

1	8	6	5	3	13
	8	6	5	3	13
	8	6	5	6	3

Leitura em linhas, da esquerda para a direita. Longos espaços entre os números representam breves pausas entre uma nota e outra.

5.3. PEQUENO APORTE TEÓRICO

A prática da docência exige certa agilidade na preparação de aulas e materiais. Nem sempre há tempo disponível para grandes aprofundamentos conceituais, portanto, apresentações simplificadas podem viabilizar o desenvolvimento de certas atividades. Pensando nisso, este trabalho conta com um pequeno aporte teórico que visa apresentar informações fundamentais para o desenvolvimento da atividade de maneira ágil e simples.

Algumas justificativas apresentadas neste capítulo estão bastante resumidas. Caso necessite de explicações mais detalhadas a respeito da teoria, seja matemática, física ou musical, consulte os capítulos 2, 3 e 4 desta dissertação.

5.3.1. ALGUNS ASPECTOS SOBRE A ESCALA MUSICAL

Para o desenvolvimento dessa atividade são necessários alguns conhecimentos a respeito da estrutura da escala musical. Dessa maneira serão apresentados a seguir uma breve explicação a respeito dos primórdios da música ocidental com o surgimento da 'escala pitagórica' (cíclica, com 12 notas), e logo em seguida serão apresentados os elementos que levaram à sua substituição pela 'escala de igual temperamento'.

Contextualização histórica - Surgimento da escala musical na Grécia antiga

Pitágoras é conhecido mundialmente pelo teorema que carrega seu nome, porém essa foi apenas uma entre inúmeras contribuições trazidas à humanidade por sua escola. Uma das mais marcantes contribuições foi o desenvolvimento de teorias a respeito da escala musical. Assim como os gregos buscavam estéticas visualmente agradáveis, também buscavam relações entre sons que pudessem ser consideradas agradáveis e perceberam que segurando uma corda em algumas posições específicas, gerava sons agradáveis quando tocados em sequência (FERGUSON, 2011). Atualmente conhecemos essa sequência como Escala Diatônica.

Essa escala foi criada a partir da repetição de um intervalo considerado agradável aos ouvidos conhecido atualmente como ‘quinta’, ou, em termos matemáticos, $\frac{3}{2}$ da extensão da corda tocada inicialmente. O problema dessa relação é que seguindo a razão de $\frac{3}{2}$ em uma progressão geométrica, após algumas poucas passagens, o tamanho das cordas começaria a ser inviável para fabricação de um instrumento. Para produzir 12 cordas em sequência com os semitons conhecidos atualmente na escala ocidental, a última corda precisaria ter aproximadamente 86 vezes o comprimento da primeira. Ou a primeira corda precisaria ser pequena a ponto de tornar difícil o dedilhado, ou a última seria longa demais a ponto de impossibilitar a construção do instrumento. Além disso, cordas muito curtas ou muito longas geram frequências que normalmente não são claramente perceptíveis aos ouvidos humanos. Para resolver esse problema, os gregos perceberam que era possível criar intervalos mais próximos entre as notas que soavam de maneira consonante com as notas produzidas através do intervalo de quintas. Essas subdivisões se deram a partir da concepção da ‘oitava’, que será discutida no tópico a seguir.

Um pouco de teoria musical – Por que 12 notas?

Para conduzir essa atividade é necessário algum conhecimento a respeito de escalas musicais, porém sem necessidade de saber tocar qualquer instrumento. A construção teórica da escala musical será realizada a partir de cálculos de frações e sua verificação prática pode ser feita utilizando afinadores de instrumentos musicais, sem a necessidade de conhecimentos prévios a respeito de percepção musical.

A escala musical ocidental se divide em 12 semitons, ou seja, em 12 subdivisões mínimas para se diferenciar os sons. Após o término dessa sequência, ela torna a se repetir de modo que esse ciclo se repita indefinidamente, tendo como único limitante a restrição da capacidade auditiva humana, que se estende de 20 hertz até 20.000 hertz. Isso corresponde a pouco mais de nove ciclos completos.

Oitava: O intervalo de 12 semitons representa o início de um novo ciclo e é chamado de oitava. A principal característica entre duas notas que se encontram a uma oitava de distância é que quando tocadas juntas soam consonantes, ou seja, representam uma mesma nota, porém uma delas é mais aguda que a outra.

Encontrar a oitava em uma corda é bastante simples: basta tomar metade do comprimento da corda original. O som produzido pela corda toda ou produzido por apenas metade representa a diferença de uma oitava entre elas, sendo a menor mais aguda. Caso haja interesse em produzir oitavas ainda mais aguda, basta continuar a sequência de subdivisões em metades, ou ainda, caso haja interesse em produzir oitavas mais graves, basta tomar cordas com o dobro do comprimento da original.

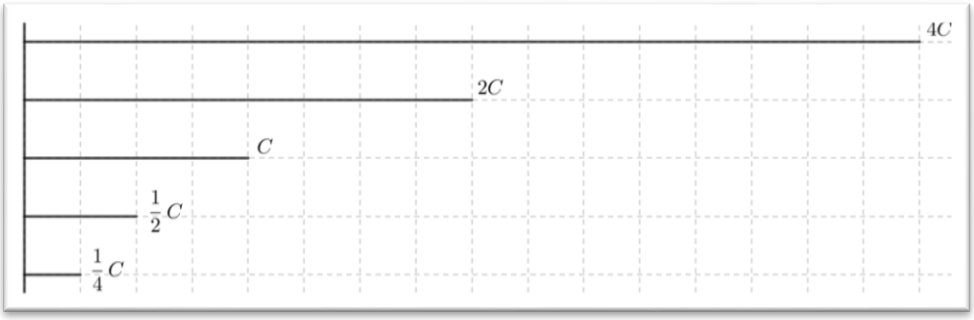


Figura 22 - Representação de uma sequência de oitavas (duas acima e duas abaixo do comprimento C)

Esse recurso foi utilizado para resolver o problema apresentado no tópico anterior, da seguinte maneira: quando uma multiplicação por $\frac{3}{2}$ ultrapassasse o dobro do comprimento da corda inicial, bastava dividir o resultado obtido por 2 para conseguir uma oitava com menor comprimento. A figura 2 explicita esses cálculos com aproximação de 4 casas decimais.

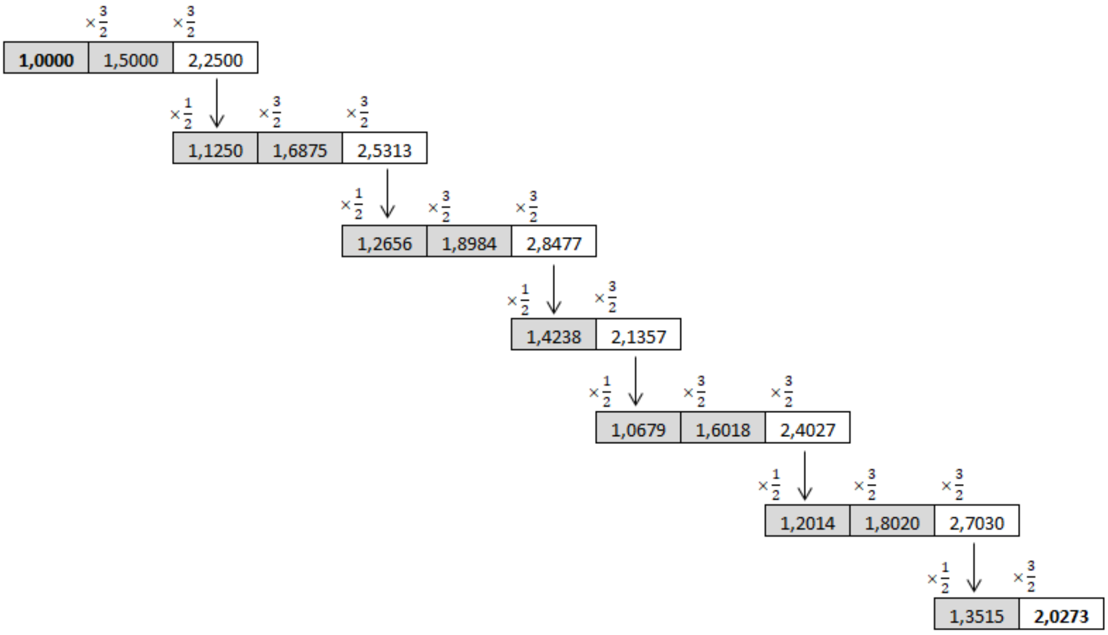


Figura 23 - Ciclo de quintas em uma oitava completa

Observe na Figura 23 que no intervalo de 1 a 2 existem 12 comprimentos indicados por retângulos pintados em cinza. Cada um desses comprimentos representa uma das 12 notas musicais. Além disso, perceba, que o último retângulo com valor 2,0273 passa o limite de 2 unidades de extensão. Calculando a metade desse comprimento obtém-se 1,0136, ou seja, um comprimento tão próximo do valor inicial (1,3% de variação) que pode ser considerado como o reinício do ciclo de quintas. Dessa forma, a partir de conceitos estéticos definidos pelos gregos da era clássica, temos uma noção inicial da razão pela qual a escala musica está dividida em 12 intervalos.

O problema da escala pitagórica (Coma Pitagórica)

Com o avanço da teoria musical e dos instrumentos, a escala pitagórica começou a apresentar alguns problemas: instrumentos musicais que possuíam muitas cordas, como pianos e harpas, apresentavam dificuldades de afinação. Como a razão entre os comprimentos da oitava e da tônica apresentavam uma leve variação para mais do que o dobro, o acumulo dessa diferença após diversas oitavas começava a apresentar variações perceptíveis aos ouvidos.

A grande questão posta nesse momento foi "Como corrigir este problema?". A solução proposta, e utilizada até os dias atuais, se deu através do uso da escala igualmente temperada.

Escala igualmente temperada

Buscando eliminar a diferença presente na escala pitagórica, a escala igualmente temperada pretendia distribuir a margem de erro contida na primeira oitava entre as 12 notas. Para isso, era necessário garantir que dadas quaisquer duas notas com intervalo de 12 semitons entre si, seus comprimentos estariam sempre na razão de 2:1. Entretanto, ainda era necessário localizar o posicionamento das onze notas contidas nesse intervalo. Para resolver essa questão, foi utilizada a interpolação de onze termos entre os valores 1 e 2.

Em termos de progressão geométrica temos que o termo inicial é $a_1 = 1$ e o décimo terceiro termo é $a_{13} = 2$. Sabendo que a fórmula do termo geral da P.G. é definida pela fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{13-1} \text{ ,}$$

portanto

$$2 = 1 \cdot q^{12} \text{ ,}$$

que nos leva a concluir que a razão da P.G. é

$$\sqrt[12]{2} = q \text{ ,}$$

o que corresponde a aproximadamente a $q = 1{,}05946$.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado caso haja a intenção seja buscar oitavas de menor extensão, basta realizar os cálculos invertendo a proporção, ou seja 1:2

$$\sqrt[12]{\frac{1}{2}} = q^{-1}$$

que corresponde a aproximadamente a $q^{-1} = 0{,}94387$.

A tabela 2 apresenta a proporção dos comprimentos das cordas a partir da tônica que possui 1 unidade de comprimento.

	ESCALA TEMPERADA		
Tônica	1,000000	0,500000	**Oitava acima**
	1,059463	0,529732	
	1,122461	0,561231	
	1,189206	0,594604	
	1,259919	0,629960	
	1,334837	0,667420	
x $\sqrt[12]{2}$	1,414210	0,707107	x $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$
	1,498303	0,749153	
	1,587396	0,793700	
	1,681787	0,840896	
	1,781791	0,890898	
	1,887741	0,943874	
Oitava abaixo	2,000000	1,000000	**Tônica**

Tabela 10 – Proporção do comprimento das notas pertencentes ao intervalo entre tônica e oitava na escala temperada (oitava acima: sons mais agudos; oitava abaixo: sons mais graves).

5.3.2. ALGUNS ASPECTOS SOBRE A MATEMÁTICA DA ESCALA MUSICAL

A proposta dessa atividade é apresentar os logaritmos, tanto por suas propriedades operatórias quanto por sua curva característica. Essas informações serão importantes no desenvolvimento da atividade de construção do instrumento musical.

Além disso, com base nas informações apresentadas nessa seção será possível estabelecer uma relação entre a definição de logaritmos e a escala igualmente temperada.

Logaritmos

Assim como discutido no capítulo 2, a definição de logaritmo pode ser dada a partir da função inversa à exponencial ou como uma relação entre progressões. Tendo em vista que a produção pretendida neste projeto é a construção de um instrumento musical no qual as notas musicais são obtidos a partir de uma sequência de tubos cujos comprimentos são representados por valores discretos, o principal foco desta análise será em relacionar os logaritmos com progressões.

De acordo com informações apresentadas no capítulo 2, a definição de logaritmo pode ser dada da seguinte maneira:

Uma função real $L: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:

$$L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$A)\ \ x < y\ \Rightarrow L(x) < L(y)$$
$$B)\ \ L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$$

para quaisquer $x\ e\ y\ \in \mathbb{R}^+$

A partir dessa definição e das proposições demonstradas no capítulo 2 é possível estabelecer a relação entre logaritmos e progressões. A explicação está apresentada na Proposição 11:, do capítulo 2, e em termos práticos apresenta que.

$$L(q^{n-1}) = (n-1) \cdot r \,,$$

ou seja, a função logarítmica L estabelece uma relação entre uma PG de termo inicial 1 e razão q e uma PA de termo inicial zero e razão r, conforme apresentado na Tabela 11.

n	PA	PG
1	0	1
2	r	q
3	$2r$	q^2
4	$3r$	q^3
...	...	...
n	$(n-1) \cdot r$	q^{n-1}

Tabela 11 – Logaritmo dado a partir da relação entre PA e PG

Uma vez estabelecida a relação entre logaritmos e progressões, deve-se estabelecer a relação entre progressões e a escala musical, conforme apresentado na próxima seção.

Interpretação da escala musical como relação entre progressões

Como visto na seção 5.3.1, no tópico ‘Escala igualmente temperada’, essa escala foi criada a partir da interpolação de termos em uma progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$ (no caso da busca por cordas maiores que a tônica) o que permite o estabelecimento de uma relação entre as posições das notas e comprimentos das cordas como uma relação entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, como apresentado na Tabela 12.

PA (nota) n	PG (comprimento) $(1/2)^{n/12}$	
0	1	**Tônica**
1	$2^{1/12}$	
2	$2^{2/12}$	
3	$2^{3/12}$	
4	$2^{4/12}$	
5	$2^{5/12}$	
6	$2^{6/12}$	
7	$2^{7/12}$	
8	$2^{8/12}$	
9	$2^{9/12}$	
10	$2^{10/12}$	
11	$2^{11/12}$	
12	$2^{12/12} = 2$	**Oitava abaixo**

Tabela 12 - Relação entre PA e PG na escala musical (Posição da nota x Proporção do comprimento da corda)

Dessa maneira, as propriedades operatórias de exponenciais e logaritmos podem ser exploradas a partir da contextualização por meio da escala musical. Observe os dois exemplos apresentados a seguir:

1. Determine a razão entre os comprimentos das cordas correspondentes ao 6º e o 2º semitons de uma escala. Em seguida faça o mesmo para o 11º e o 7º semitom dessa mesma sequência. Comparando os resultados obtidos, é possível fazer alguma afirmação a respeito da relação entre esses pares de notas?

Entre 6º e 2º semitom: $6 - 2 = 4 \quad e \quad \frac{2^{6/12}}{2^{2/12}} = 2^{4/12}$

Ambos apresentam razões iguais.

Entre 11º e 7º semitom: $11 - 7 = 4 \ e \ \frac{2^{11/12}}{2^{7/12}} = 2^{4/12}$

Como ambos os cálculos apresentaram o mesmo resultado, isso significa que intervalos com dados por notas que se encontram em posições que possuem diferenças iguais, possuem mesma razão entre os comprimentos das cordas.

Em termos de PA e PG, tomando como referência a Tabela 11, temos que:

Seja a_j, a_i e r respectivamente o 'j'-ésimo, 'i'-ésimo termos e a razão da PA e seja g_j, g_i e q respectivamente o 'j'-ésimo, 'i'-ésimo termos e a razão da PG, então

$$a_j - a_i = (j-1) \cdot r - (i-1) \cdot r = (j-i)r$$

e

$$\frac{g_j}{g_i} = \frac{q^{j-1}}{q^{i-1}} = q^{j-i}$$

portanto a diferença entre os termos a_j e a_i da PA corresponde ao expoente da razão entre os termos g_j e g_i da PG, revelando assim a propriedade operatória dos logaritmos .

Assim, dados dois termos de cada progressão que se encontrem a uma distância '$j - i$' entre si, a diferença entre dois termos de uma PA gera um resultado constante e a razão entre dois termos da PG também gera um valor constante, de modo que ambas as constantes mantenham uma relação entre si.

2. A partir do resultado obtido na questão '1' responda: Uma corda de piano possui comprimento C_0 = 78 cm. Utilizando o mesmo material, ou seja, com as mesmas propriedades sonoras, pretende-se fabricar uma nova corda, mas essa deve emitir uma nota correspondente a quatro semitons mais grave do que a primeira. Sabendo quanto maior a corda, mais grave será seu som, qual deve ser o comprimento da nova corda?

Sabendo que quatro semitons de distância correspondem a uma razão de $2^{4/12}$ entre as cordas, basta calcular:

$$\frac{C_4}{C_0} = 2^{4/12}$$

portanto

$$C_4 = 78 \cdot 2^{4/12} \cong 98{,}3\ cm$$

Ou seja, o padrão percebido através do exemplo 1 serve de base para o cálculo da relação de comprimentos entre duas cordas quaisquer que estejam a quatro semitons de distância. A relação entre progressões define que dada a diferença de quatro vezes a razão da PA, também é necessário varia quatro vezes a razão da PG, conforme apresentado na Tabela 12

Dessa maneira, propriedades de exponenciais e logaritmos podem ser exploradas de forma prática, atribuindo sentido às regras estudadas e facilitando a compreensão e a memorização.

5.3.3. ALGUNS ASPECTOS FÍSICOS SOBRE A ESCALA MUSICAL

Até este ponto todo o desenvolvimento da explicação foi baseado na análise de cordas vibrantes. Isso se deve ao fato de que as cordas servem como bons exemplos para apresentar a relação entre seus comprimentos e as notas musicais geradas, porém, essa teoria não se aplica apenas às cordas, mas também a instrumentos de sopro, ou seja, colunas de ar que vibram dentro de tubos. Detalhes sobre esta explicação serão omitidos neste capítulo visando gerar agilidade na leitura e caso haja interesse em maiores detalhes a respeito dessa afirmação, consulte o capítulo 4. Este tópico apresentará argumentos para evidenciar a relação entre sons produzidos em tubos sonoros e a interpretação da escala logarítmica a partir da comparação entre duas progressões.

Ondas sonoras em tubos fechados

As ondas sonoras são criadas a partir de perturbações no meio, de modo a criar sequências de compressão e rarefação das partículas, as quais são capazes de transportar energia.

A interpretação matemática da onda se dá a partir de uma senoide. Especificamente, para a compreensão das ondas estacionárias formadas no interior de um tubo fechado, frações de senoides podem ser utilizadas para representar as possíveis frequências produzidas por uma flauta.

Um ciclo completo de uma senóide corresponde ao intervalo necessário para que a onda passe por seus valores de máximo, mínimo e retorne a condição inicial. Dessa maneira, de acordo com a Figura 24, o valor apresentado como ‘n’ corresponde à quantidade de quartos de onda presentes em cada harmônico produzido no tubo. Essa definição se dá pelo fato de que o harmônico fundamental ($n = 1$) corresponde a um quarto de onda, e os próximos harmônicos são sempre representados como múltiplos ímpares desse valor inicial.

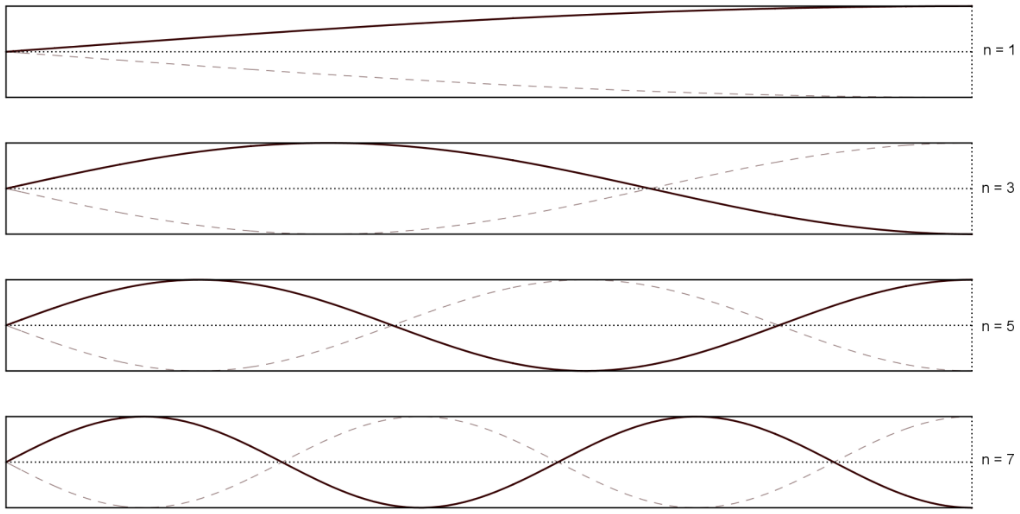


Figura 24 - Ondas estacionárias em tubos fechados e seus harmônicos

O harmônico fundamental é o responsável por definir a frequência principal produzida pelo tubo, enquanto os harmônicos secundário (n = 3), terciário (n = 5), e assim por diante, são responsáveis por criar frequências que ficam menos evidentes no som, mas servem como sustentação para a nota principal e também definem características relacionadas ao timbre do instrumento.

Para este estudo é fundamental saber o comprimento necessário para que cada tubo produza a frequência sonora (nota musical) desejada. Para isso faremos uma análise da relação entre velocidade em que o som percorre o ar e comprimentos de ondas relacionados a cada frequência sonora.

Velocidade e frequência

É sabido que o comprimento de uma onda pode ser calculado a partir da equação

$$D = \frac{n \cdot \lambda}{4}$$

sendo λ o comprimento de onda, n a quantidade de quartos de onda relativos a cada harmônico, conforme exemplo de valores apresentados na Figura 24, e D a distância entre as abcissas relativas a um ponto de nodo (amplitude zero) e um ponto de ventre (amplitude máxima/mínima) consecutivos, ou seja, o necessário para representar um quarto de onda.

Considerando $n = 1$, pois no momento nos interessam apenas a frequência sonora relacionada ao harmônico principal, sendo esse o responsável pela definição da nota musical produzida.

$$D = \frac{\lambda}{4}$$

Observe que há uma relação de proporcionalidade direta entre o comprimento de onda e o comprimento necessário para gerar o primeiro harmônico no tubo. Como o comprimento de onda está diretamente relacionado a valores de uma progressão geométrica, assim como apresentado na Tabela 12 - Relação entre PA e PG na escala musical (Posição da nota x Proporção do comprimento da corda), então os comprimentos dos tubos estarão necessariamente relacionados aos valores de uma progressão geométrica.

É sabido também que a velocidade de uma onda pode ser calculada a partir da fórmula

$$v = \lambda \cdot f$$

de modo que v e f representam, respectivamente, velocidade e frequência da onda.

Combinando a fórmula do comprimento de onda com a de velocidade obtém-se

$$v = 4 \cdot D \cdot f$$

Como se deseja conhecer o comprimento do tubo responsável por criar a frequência relacionada ao harmônico principal, a variável D será isolada. Além disso, a velocidade do som depende do meio de propagação e de sua temperatura. Assumindo que estes testes serão realizados em ambientes controlados, é possível considerar a temperatura como uma constante. Consequentemente, a velocidade também assume essa característica.

Assim, obtém-se

$$\frac{v}{4f} = D$$

o que evidencia a relação inversa de proporcionalidade entre comprimento do tubo e frequência sonora produzida. Como o comprimento dos tubos se dá em progressão geométrica, as frequências sonoras geradas também respeitarão essa regra.

6. RELATO PESSOAL: SURGIMENTO DA IDEIA, EXPERIÊNCIAS OBTIDAS A PARTIR DA PRÁTICA E REFORMULAÇÃO DA ATIVIDADE.

Os planos de aula, material para os alunos e material de apoio aos professores apresentados no capítulo 5 são frutos de uma experiência de aula efetiva, que realizei com meus alunos de 1º ano do ensino médio, em uma escola privada, no município de Campinas. As atividades foram planejadas e redigidas na forma de planos de aula e estes foram revistos e aprimorados após o seu uso efetivo. Para que possam ser percebidas as mudanças, os planos de aula originais estão inclusos como anexos no A – Material do aluno – primeira versão.

Uma vez reformulada a atividade, havia o desejo de aplica-la novamente para verificar seus possíveis resultados. Para isso seria necessário esperar até o ano seguinte, quando novas turmas de 1º ano de ensino médio estariam estudando logaritmos. Entretanto, por razões circunstanciais, não foi possível prosseguir com esse plano, uma vez que a partir do ano seguinte à aplicação inicial da atividade, precisei assumir aulas apenas em turmas de ensino fundamental 2, mais especificamente em salas de 6º e 7º ano. Desde então a atividade não foi posta em prática novamente.

Neste capítulo pretendo relatar brevemente algumas experiências vividas durante a aplicação da versão inicial da atividade, a qual está apresentada integralmente no Apêndice. Serão apresentadas também motivações práticas que me levaram a estruturar a atividade da maneira que é apresentada na seção 5.2

6.1. Surgimento da ideia da atividade

Durante uma aula numa turma de 8º ano de ensino fundamental uma aluna me questionou a respeito da utilidade prática dos números irracionais. A motivação da estudante em fazer esse questionamento residia no fato de que ela ainda não havia compreendido o motivo prático para se utilizar números desse conjunto, uma vez que, de acordo com ela, aparentemente não representavam elementos reais do cotidiano. Justificativas baseadas em medidas, como por exemplo, como calcular o comprimento da diagonal de um quadrado não foram suficientes para sanar as dúvidas. Além disso, percebi que se tratava de uma dúvida comum entre os estudantes. Dessa maneira criei a atividade de construção de uma flauta como tentativa de tornar palpável a ideia de números irracionais.

A atividade consistia em tomar um tamanho padrão de canudo e, a partir de um valor pré-estabelecido, multiplicar esse comprimento por doze vezes até atingir o dobro tamanho do canudo original. Dessa maneira, por meio de uma equação obtivemos o valor em questão, que no caso seria $\sqrt[12]{2}$e criamos uma aproximação para esse valor com três casas decimais.

Uma vez prontos os valores da sequência, os estudantes construíram as flautas utilizando canudos e cola quente e ao final, puderam verificar que a flauta produzia uma sequência de sons agradáveis e conhecida. Verificamos se a sequência de fato representava a escala musical por meio de um aplicativo de afinação de instrumentos musicais.

É importante deixar claro que a atividade não pressupunha descoberta por parte dos estudantes, e sim a apresentação de um padrão seguido da confecção do instrumento como forma de aplicação prática desse conceito.

Após a aplicação da atividade de construção da flauta para a turma de 8º ano, percebi a melhora na compreensão do tema e também da postura e participação dos estudantes em sala de aula. A atividade havia servido não somente para sanar dúvidas, mas também para engajar e motivar os estudantes. A partir dessa experiência, iniciei a busca de maneiras de levar essa atividade a turmas de outras séries.

Tendo em vista a relação entre escala musical e logaritmos, e também o estigma criado sobre esse tema como sendo difícil e distante da realidade cotidiana, escolhi testar essa atividade em turmas de ensino médio. Tendo em vista a diferença de profundidade e complexidade na abordagem do tema, seria mais interessante se os alunos tivessem que buscar por uma relação ente escala musical e logaritmos e não simplesmente recebessem os dados prontos para efetuar os cálculos finais, assim como na aplicação realizada na turma de 8º ano.

A ideia inicial era que os estudantes pudessem medir uma flauta, buscar o padrão estabelecido entre as medidas de tubos consecutivos, e por fim montar sua própria flauta a partir do padrão encontrado. Entretanto, essa sequência era limitada e não compreendia a uma percepção abrangente sobre a relação entre logaritmos e escala musical. Da forma que foi posta inicialmente, a atividade previa uma análise muito superficial dessa relação de modo a se assemelhar muito com a atividade proposta para o ensino fundamental.

A evolução da ideia se deu a partir do momento em que a proposta da atividade passou a se basear na medição de um instrumento de cordas e construção de instrumento de sopro. A diferença entre as estruturas, tamanhos e funcionalidade dos instrumentos permitiram que a exploração da escala musical através uma perspectiva matemática mais abrangente fosse possível, uma vez que seria necessária a transposição das notas musicais entre estruturas diferente, evidenciando o conceito comum que os relacionam.

6.2. Aplicação da versão inicial da atividade

A atividade inicial foi proposta como uma sequência de quatro aulas, organizadas da seguinte forma:

- Aula 1: Apresentação de conceitos básicos sobre teoria musical;

- Aula 2: Medições de instrumentos musicais e elaboração de hipóteses sobre a relação contida entre os comprimentos de cordas responsáveis pela geração da escala musical;

- Aula 3: Teste teórico das hipóteses por meio de cálculos e comparação com os valores medidos;

- Aula 4: Teste prático das hipóteses por meio da construção do instrumento musical.

Os planos de aula entregues aos estudantes se encontram no Apêndice desse trabalho exatamente da maneira em que foi apresentado em seu teste inicial.

A atividade foi aplicada no contra turno escolar para um grupo de cerca de quinze estudantes das três séries do ensino médio, sendo em sua maioria, alunos do 1º ano, os quais estavam começando a estudar logaritmos exatamente naquela semana. Vale deixar claro que essa concomitância foi intencional.

O primeiro dia de atividade foi bastante focado em apresentar a música enquanto construção humana relacionada a questões sociais e temporais. Sem dúvidas foi a aula em que os estudantes mais participaram. Iniciamos com a apresentação de exemplos de música e sons de instrumentos ao longo da história da humanidade. Essa apresentação gerou uma breve discussão sobre a música enquanto representação do momento em que foi concebida e da sociedade que a concebeu, o que nos levou a música nos dias atuais. Um ponto de bastante relevância na conversa foi a análise de música eletrônica como concepção atual e representação da sociedade contemporânea, de modo a ser absolutamente inconcebível em épocas anteriores à atual, tendo em vista a necessidade de desenvolvimento de recursos tecnológicos os quais não haviam sido criados ou não estavam disponíveis à população até poucas décadas atrás.

Nesta primeira aula a escala pitagórica foi apresentada. Conceitos formais de teoria musical foram apresentados: Notas, tons e semitons, escala, tônica, oitava, entre outras informações foram abordadas de maneira superficial com a intenção de fornecer um breve repertório sobre elementos que formariam a estrutura do que seria analisado nas próximas aulas. Um dos pontos mais discutidos e apresentados na prática por meio do exemplo com um violão foi a relação entre tônica e oitava. A razão de 2 para 1 presente entre tônica e oitava foi apresentada explicitamente e enfatizada, de modo a deixar claro que o esforço da próximas aulas estaria em buscar uma forma de representar matematicamente uma maneira de encontrar as onze notas intermediárias faltantes.

Na segunda aula os estudantes tiveram contato direto com os instrumentos e iniciaram o processo de medições. Havia disponível um violão e um baixo elétrico. Muitos estudantes nunca haviam manuseado nenhum desses instrumentos e, em função disso a aula foi bastante interessante: a descoberta dos detalhes como o peso dos instrumentos, a espessura das cordas e as marcações no braço foram pauta da discussão inicial. Ao iniciar o processo de medição percebi que as orientações do material do aluno eram abrangentes demais e, em função disso, a maioria dos estudantes teve dificuldade em saber como realizar as medições:

“É necessário media a corda inteira?”

“Podemos medir qualquer corda?”

“Ao pressionar a corda em uma certa posição devemos medir a parte que fica acima ou abaixo do ponto em que meu dedo está?”

“Posso medir só o comprimento da corda no braço do instrumento?”

A falta de especificidade nas orientações escritas haviam sido pensadas propositalmente como uma forma de permitir que os estudantes tivessem liberdade em realizar as medidas da maneira que julgassem interessante, entretanto essa estratégia acabou se mostrando falha para o correto encaminhamento da atividade. A falta de familiaridade com os instrumentos musicais, que num primeiro momento gerou tanta curiosidade, acabou sendo o ponto de fragilidade na hora das medições. Para corrigir essa questão passei pelos grupos dando orientações diretas e específicas sobre o que deveriam medir.

Para encerrar essa segunda aula, os estudantes tabelaram as informações obtidas e conferiram as notas musicais produzidas por cada trecho da corda medida por meio de um aplicativo de afinação de instrumentos musicais.

A terceira aula, sem dúvidas foi a mais difícil de todas. Assim como a segunda aula, a terceira havia sido planejada para que os alunos tivessem liberdade de criar suas próprias hipóteses a respeito da regra de formação das notas da escala musical, sem orientações específicas ou sugestões sobre que caminho seguir. Essa liberdade acabou se apresentando como falta de referência de um ponto de partida. Alunos do 3ª ano do ensino médio conseguiram criar algumas relações e perceber o padrão matemático determinado entre notas consecutivas, entretanto, estudantes do 1º e 2º ano apresentaram profunda dificuldade em elaborar qualquer tipo de hipótese para a regra de formação. Após sugerir algumas possíveis hipóteses para a regra de formação, percebi que para que esse ciclo da atividade pudesse ser concluído seria necessária uma intervenção direta, uma vez que as sugestões não estavam sendo o suficiente para que conseguissem estabelecer a relação esperada. Por fim, sugeri explicitamente a relação de uma sequência de multiplicações por um mesmo fator. Após algum esforço de cálculo, parte dos estudantes conseguiu concluir que o fator desejado seria $\sqrt[12]{2}$. Vale ressaltar que as progressões estavam previstas como tema a ser estudado no 2º ano do ensino médio, e por esse motivo me referi à solução como uma sequência de multiplicações por um mesmo fator.

Por fim, na 4ª aula os estudantes fizeram os cálculos das medidas de cada um dos canudos a partir da sequência de proporções obtidas na aula anterior, e dividindo a sala em três estações (medição, corte e colagem) os estudantes se revezaram e se ajudaram de modo que ao término da aula todos tinham em mãos suas flautas. Como maneira de conferir se os cálculos haviam sido feitos corretamente, os estudantes mediram as frequências produzidas em cada tubo por meio de um aplicativo de afinação de instrumentos musicais.

Para encerrar atividade, o grupo tentou tocar algumas músicas simples e de conhecimento popular como ‘atirei o pau no gato’ e ‘parabéns a você’, conforme sugerido no material de orientação.

6.3. Fechamento da atividade:

Após todo esse percurso vale destacar que os logaritmos não foram citados explicitamente em nenhum momento da atividade. Para evidenciar a relação entre escala musical e logaritmos optei por reunir os participantes da atividade, por cerca de 15 minutos, em um momento de aula regular, no qual os demais estudantes estavam em processo de resolução de individual de exercícios sobre logaritmos e apontei as relações entre o que havíamos realizado durante a atividade e os conhecimentos adquiridos durante as aulas regulares.

6.4. Reflexão a respeito da prática da atividade

Ao concluir a atividade fui tomado por um sentimento de profunda insatisfação. Enquanto a prática no 8º ano do ensino fundamental havia atingido seu objetivo, a prática das turmas de ensino médio terminou com um sentimento de conclusão apenas por obrigação. Os estudantes haviam compreendido que a escala musical é formada a partir de uma sequência bem estabelecida de cálculos, entretanto, a relação entre essa sequência e os logaritmos não havia ficado explícita. Minha intenção era que essa relação ficasse clara a partir das medições realizadas nos instrumentos e da construção dos gráficos previstos na aula 3 do material apresentado no Apêndice, porém, dadas as dificuldades em medir os instrumentos e estabelecer relações entre os valores medidos, a produção do gráfico ficou comprometida. Dessa maneira cheguei a duas conclusões principais:

1º - A relação entre escala musical e logaritmos não poderia se pautar apenas na comparação entre o gráfico dos logaritmos e a curva formada pelos comprimentos dos tubos das flautas.

2º - Seria necessário evidenciar a relação entre escala musical e logaritmos através do percurso da atividade, e não apenas da conclusão.

A partir dessas conclusões, percebi que seria necessário realizar também uma adequação na abordagem do tema dos logaritmos durante as aulas regulares. Normalmente minhas as aulas eram pautadas na definição do logaritmo como função inversa da exponencial e, para que a atividade pudesse ser explorada de maneira proveitosa, a abordagem dos logaritmos como relação entre progressões precisaria ficar explícita. Vale citar que essa relação é apresentada aos estudantes de maneira muito discreta, na forma de propriedade operatória dos logaritmos e abordada como consequência da definição.

Após alguma reflexão cheguei a conclusões sobre possíveis correções e ajustes para que a atividade pudesse atingir o objetivo esperado em uma nova oportunidade de aplicação. De forma bastante ampla as principais considerações foram:

- A atividade inicial, aplicada ao 8º ano, havia sido pensada com o propósito de elucidar e motivar, enquanto a versão aplicada ao ensino médio deveria servir como atividade de descoberta dirigida.

- Deveria haver uma abordagem contínua e gradual da definição de logaritmos como relação entre progressões;

- Ao final de cada aula deveria ser proposta alguma questão para reflexão e encaminhamento da atividade na aula seguinte;

- Questões propostas na aula anterior deveriam ser retomadas logo no início de cada aula, contando com um momento de discussão e resposta antes de iniciar o próximo passo;

- Orientações sobre realização de medições e cálculos deveriam ser claras e objetivas;

- Exemplos e questões condutoras deveriam ser apresentados de modo a guiar os estudantes pelo caminho desejado, porém, sem entregar as respostas, preservando o sentimento de descoberta.

- Menos ênfase deveria ser dada em questões sobre teoria musical e nomenclaturas;

6.5. Correções e ajustes em relação à versão inicial

A segunda versão da atividade, apresentada na seção 5.2 (Plano de aula do aluno) foi criada a partir da estrutura da versão inicial, na qual se previam quatro aulas, seguindo a ordem apresentada na seção Aplicação da versão inicial da atividade, entretanto, contando com as mudanças citadas na seção anterior, como apresentadas a seguir:

Aula 1:

- Retirada a referência ao filme ‘Donald no País da Matemágica’;

- Inclusão da questão ‘Como são produzidas as variações de som em uma mesma corda?’. A intenção dessa questão é levar os estudantes a pensar a respeito da porção da corda responsável por produzir a o som desejado, de modo que essa reflexão seria importante para minimizar as dúvidas no momento de medição das cordas, previsto para a segunda aula;

- Relação entre tônica e oitava não foi apresentada explicitamente. Essa relação foi posta na forma de questionamento, o qual deve ser explorado a partir de uma breve pesquisa extraclasse, como preparação para a próxima aula;

- A intenção da atividade em buscar uma relação entre as 12 notas musicais da escala cromática foi apresentada de maneira bastante superficial, sem a preocupação de tentar estabelecer qualquer relação nesse momento inicial, focando apenas na relação entre tônica e oitava. Pelo mesmo motivo, a lista de vocábulos relacionados à teoria musical foi retirada do final da folha de orientações;

Aula 2:

- A aula 2 se inicia com a retomada das questões propostas no final da aula 1, de modo a garantir que todos os estudantes estão em posse do conhecimento necessário para a condução da atividade;

- Imagem foi trocada de modo a apresentar todo o corpo do instrumento de corda. Essa imagem apresenta os nomes das partes principais do instrumento, as quais serão utilizadas como referências para as medições ainda na segunda aula;

- As orientações para medições dos instrumentos musicais apresentam informações claras sobre como medir a porção da corda responsável por emitir o som desejado. Além disso, é apresentada a informação de eu serão necessárias as anotações sobre os comprimentos de cordas responsáveis por treze notas subsequentes, de modo a formar um ciclo completo da escala;

- As tabelas de anotações foram modificadas para apresentar claramente o que deveria ser anotado em cada posição, além de apresentar exatas treze linhas, conforme exposto no item anterior;

- Como preparação para a aula 3, são apresentadas propostas de cálculos que estabelecem relações entre os valores medidos nas duas tabelas. As intenções desses cálculos são: (a) despertar a curiosidade dos estudantes, evidenciando que algum tipo de padrão pode ser determinado a partir da razão entre porções bem estabelecidas das cordas; (b) apresentar a definição dos logaritmos de maneira gradual e indireta, de modo a explorar suas características, porém, sem enunciar sua definição;

- O espaço para anotações foi transferido para o final da folha, como um campo para cálculos e anotações relativas às perguntas de reflexão e preparação para a terceira aula.

Aula 3:

Esta foi a aula que sofreu as alterações mais significativas. Isso se deve à constatação de que orientações claras e objetivas a respeito do caminho a ser trilhado se mostraram fundamentais para conduzir os estudantes às conclusões desejadas. Entre as alterações e ajustes estão:

- Retomada da atividade anterior, com apresentação da resposta à questão proposta, de modo a evidenciar que as razões calculadas em intervalos fixos das tabelas dos comprimentos das cordas geram resultados iguais;

- Definição da expressão 'intervalo entre posições' como a diferença entre as posições das notas musicais nos treze intervalos apresentados nas tabelas de anotações da aula anterior;

- Inclusão de quadro de exemplo evidenciando a existência de uma relação entre diferenças entre as posições das notas e a razão dos comprimentos das cordas, dado um 'intervalo fixo entre posições';

- Inclusão de questões que buscam evidenciar a relação entre diferenças entre as posições das notas e a razão dos comprimentos das cordas;

- Retirada dos planos cartesianos contidos na atividade anterior, evitando assim, a busca pela relação entre logaritmos e escala musical por meio da estética da curva logarítmica.

As primeiras questões devem guiar o estudante à conclusão de que há uma relação bem estabelecida entre a distância entre duas notas e a razão entre os comprimentos das cordas responsáveis pela emissão dessas notas.

A última questão proposta pede para que se calcule a razão entre dois comprimentos de cordas que produzam notas consecutivas na escala. A intenção dessa questão é buscar evidenciar a razão definida no menor intervalo possível, e consequentemente, explicitar a razão que define toda a escala musical. Vale citar que as orientações sugerem que as razões sejam calculadas de modo que o numerador seja sempre o maior valor, gerando assim o resultado $\sqrt[12]{2}$

Aula 4:

O material da quarta aula foi a que menos sofreu modificações estruturais. A principal diferença é que o material dos alunos recebeu uma seção de retomada das questões postas ao final da terceira aula, de modo a garantir que todos os participantes tenham acesso a um gabarito com as conclusões esperadas até então. A partir desse material os estudantes poderão conferir seus resultados e fazer os devidos ajustes para que seja possível seguir com o último passo da atividade. A construção da flauta deve ser vista como a materialização e o teste de suas hipóteses.

Foi incluída a seção de ‘procedimento’ na qual são apresentados detalhes práticos para a produção da flauta.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desafio da docência requer a escolha de estratégias que aproximem os estudantes dos objetivos de aprendizagem. A principal intenção desse trabalho é apresentar uma possibilidade de atividade que busque viabilizar esse objetivo, levando em consideração, tanto aspectos conceituais da matemática, quanto a perspectiva do indivíduo enquanto cidadão inserido num contexto sócio-cultural. A possibilidade de realizar atividades como esta pode ser importante para motivar a participação dos estudantes nas atividades escolares, e também, de maneira mais ampla, levar a reflexão a respeito da relação entre a matemática e os elementos que definem nossa identidade enquanto seres humanos.

A prática desta atividade demanda recursos materiais simples e, visto sob esse aspecto, trate-se de uma proposta acessível às escolas. Entretanto, exige muita preparação por parte do docente, principalmente no que diz respeito a se deslocar do papel de protagonista do processo de aprendizagem, para a posição de mediador na relação entre os alunos e o conhecimento, permitindo assim que, a partir de suas práticas, os estudantes assumam papéis de exploradores do tema, de modo a construir conhecimentos mais cheios de significados e relações com suas vidas.

Bibliografia

AULAS DE GAITA. **Aulas de Gaita**, 2016. Disponivel em: <http://www.aulasdegaita.com/p/iniciante-ii.html>. Acesso em: 2016.

BACKUS, J. **The acoustical Fouundations of music**. 1ª. ed. Nova York: [s.n.], 1969.

BENSON, D. J. **Music:** A mathematical offering. 1ª. ed. Nova York: Cambridge University Press, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**, 2018. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 2 novembro 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação. **PNLD2018**, 2018. Disponivel em: <http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/>. Acesso em: 2 novembro 2018.

DEHAENE, S. et al. Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures. **Science**, 30 Maio 2008.

DRAWING TUTORIALS 101. **Drawing Tutorials 101**, 2018. Disponivel em: <https://www.drawingtutorials101.com/drawing-tutorials/Others/Musical-Instruments/acoustic-guitar/how-to-draw-an-acoustic-guitar-step-0.png>. Acesso em: 3 novembro 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. 1ª reimpressão. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

FERGUSON, K. **Pythagoras:** His Lives and the Legacy of a Rational Universe. 1ª. ed. [S.l.]: Icon Books Ltd, v. Único, 2011.

GEAR 4 MUSIC. **Gear 4 Music**. Disponivel em: <https://www.gear4music.es/es/Guitarra-y-bajo/Fender-Stratocaster-Neck-with-Maple-Fingerboard-22-Med-Jumbo-Frets/1ROL>. Acesso em: 2016.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar - Sequências**. 5ª. ed. São Paulo: Atual, v. 4, 1985.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; DOLCE, O. **Fundamento de Matemática Elementar - Logaritmos**. 3ª. ed. São Paulo: Atual, v. 2, 1977.

KAHNEMAN, D. **Rápido e devagar:** duas formas de pensar. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 1996.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 2007.

LUTHIEROS MUSIC INSTRUMENTS. **Luthieros Music Instruments**. Disponivel em: <http://en.luthieros.com/wp-content/uploads/2014/02/img51.jpg>. Acesso em: 3 novembro 2018.

MACHADO, A. D. S. **Matemática na escola do segundo grau**. 1ª. ed. São Paulo: Atual, v. 1, 1996.

NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY, U.S. GOVERNMENT - PUBLIC DOMAIN. Common logarithm. **The Free Encyclopedia**, 2001. Disponivel em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:APN2002_Table_1,_1000-1500.agr.tiff#/media/File:APN2002_Table_1,_1000-1500.agr.tiff>. Acesso em: 2 novembro 2018. Original: Bowditch, Nathaniel (1773 - 1838).

NETO, A. F. B. **Potência de expoente irracional: Uma aula para os alunos da 3ª série do ensino médio.** Dissertação (Dissertação em Educação Matemática) - UFJF. Juiz de Fora. 2013.

OLSON, H. F. **Elements of acoustical engeneering**. 1ª. ed. Nova York: [s.n.], 1940.

PÚBLICO, D. https://visualhunt.com. **Visualhunt**, 2018. Disponivel em: <https://visualhunt.com/photo/185015/>. Acesso em: 3 novembro 2018.

ROEDERER, J. G. **Introdução à física e psicofísica da música**. 1ª. ed. Nova York: [s.n.], 2002. 1ª reimpressão.

Apêndice

A – Material do aluno – primeira versão

Nas páginas a seguir será apresentado o material do aluno em sua versão inicial, exatamente da forma que foi apresentado aos estudantes, como referência para a discussão apresentação na seção 5.2.

Aula 1: História da música e teoria musical

O propósito da primeira aula é apresentar informações básicas a respeito de teoria musical para que todos os estudantes adquiram conhecimentos essenciais para o desenvolvimento das atividades que serão propostas nas próximas aulas.

Introdução

A música é uma das mais profundas representações da identidade humana. Nos mais diversos locais e momentos da história, ela foi parte marcante da cultura dos povos, seja com propósito de entretenimento, louvor às divindades ou registros históricos de seus feitos e conquistas. Erudita ou popular, é difícil imaginar uma forma de representação das emoções humanas tão universal quanto a música, dada sua capacidade de transcender a língua.

Alguns animais são capazes de produzir melodia, harmonia e ritmo, porém, apenas os humanos são conseguem registra-los, e estudá-los de modo a permitir que gerações futuras tenham acesso a sua própria história e origens.

Um dos elementos que permitiu que isso fosse possível foi o estudo da música por meio de uma interpretação matemática do significado das frequências sonoras. A percepção de que as notas musicais se repetem em intervalos bem determinados foi importante para que se percebesse que era possível registrar a música e reproduzi-la com os mais diversos instrumentos, e que, apesar de modificações de timbre (cujo significado será explicado ainda nesta aula), tratam-se essencialmente da mesma música.

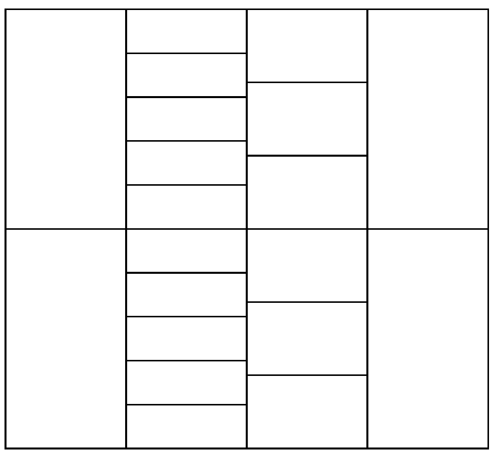
Música e matemática na Grécia antiga

Um dos primeiros registros teóricos a respeito da música vem da Grécia antiga com a escola dos pitagóricos. Acreditavam que a matemática era a representação do divino, e que, dada uma corda, determinadas frações de seu comprimento original produziam harmonias que foram consideradas agradáveis à percepção dos indivíduos daquela civilização. Esses intervalos serviram como base para a criação das escalas musicais que ainda hoje caracterizam a música ocidental.

Trecho de filme: Donald no país da Matemágica (1959)

Preencha a tabela ao lado com as frações que representam os intervalos musicais dos gregos.

Observe a imagem formada pela sequência. Você imagina alguma maneira de representar essa sequência matematicamente?



Teoria Musical

A escala musical é composta por 7 notas principais e 5 acidentes, que são notas intermediárias, ou seja, que estão no intervalo entre duas notas principais.

Ao término dessa sequência de 12 notas, a escala volta se repetir, indefinidamente (por isso há 13 teclas na imagem), de modo é possível determinar aonde uma escala começa e outra termina por meio de subdivisões simples do objeto que produz o som.

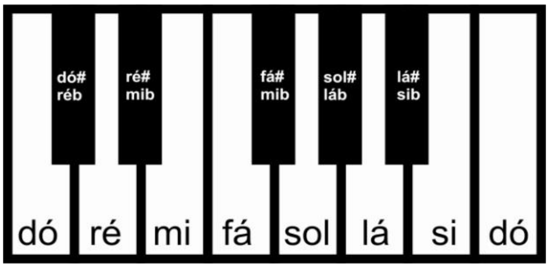


Figura 25 - Escala completa no teclado do piano
Fonte: (AULAS DE GAITA, 2016)

Imagine uma corda de violão afinada na nota Dó. Se tomarmos metade do comprimento dessa corda, essa subdivisão gerará novamente uma nota dó uma oitava acima da original, ou seja, com o dobro da frequência da original, ou, de maneira mais simples, uma nota 'Dó' mais aguda que a original. Se tomarmos metade da metade da corda, voltaremos a ter uma nota 'Dó' ainda mais aguda que as anteriores, e assim sucessivamente.

Fica evidente que a nota produzida ao tocar uma corda de certo comprimento e outra com metade do comprimento da primeira é exatamente o mesmo, porém com frequências diferentes.

Dessa forma, fica posta a questão central a ser discutida nessa atividade:

- Como é possível localizar todas as 12 notas de uma escala cromática sabendo apenas os comprimentos que geram a nota tônica e a oitava nota da escala?

- Como é possível definir esses intervalos utilizando recursos matemáticos

Orientações para a próxima aula:

- Será necessário o uso de régua ou trena;

- Será necessário o uso de um gerador de frequências (afinador/diapasão). Sugere-se a utilização de aplicativos de para celular (buscar como tunner).

- será necessário o uso de softwares para organização e análise de dados, ou plotagem de gráficos (sugere-se Excel e/ou Geogebra).

Vocabulário:

Timbre: característica sonora que permite distinguir qual é o instrumento que está produzindo o som	**Altura:** característica sonora que o define como grave (Baixa frequência) ou agudo (alta frequência)
Intensidade: Comumente chamado de volume. Caracteriza a amplitude da vibração do som, consequentemente, a pressão exercida no ar.	**Oitava:** décima terceira nota de uma sequência, a qual possui o mesmo tom que a tônica, porém, com dobro da frequência.
Tom: altura de uma nota na escala musical.	**Tônica:** Primeira nota de uma escala.
Escala diatônica: Escala definida por 7 notas dadas a partir da sequência: tom, tom, semitom, tom, tom ,tom	**Escala cromática:** Escala musical definida por 12 notas separadas por semitons. É composta por 7 notas principais e mais 5 tons intermediários.

C	C#/Db	D	D#/Eb	E	F	F#/Gb	G	G#/Ab	A	A#/Bb	B
Dó		Ré		Mi	Fá		Sol		Lá		Si

Aula 2: Medições / Coleta de dados / Cálculos

O propósito dessa segunda aula é, a partir da análise e medição de instrumentos musicais, coletar dados que permitam a criação de hipóteses para explicar como é possível localizar todas as 12 notas de uma escala cromática no intervalo de uma oitava utilizando recursos matemáticos.

Alunos devem se dividir em grupos de no máximo 4 pessoas.

Apresentação e análise de instrumentos musicais:

Serão apresentados aos grupos alguns instrumentos musicais com escala temperada, ou seja, instrumentos que possuem claramente subdivisões indicando a posição exata de cada uma das notas musicais da escala. Cada grupo terá 20 minutos com cada instrumento e deverão executar as medições que julgarem necessárias para coletar dados que possivelmente forneçam pistas para descobrir como as notas musicais se distribuem no instrumento. Para isso podem utilizar geradores de frequência, e softwares para análise de dados.

Sugestão de medidas e questionamentos:

a) Com auxílio de um gerador de frequência verifique a nota gerada por uma corda solta;

b) Com auxílio de um gerador de frequência verifique a nota gerada por uma corda presa em sua metade;

c) Realize as verificações dos itens ‘a’ e ‘b’ em mais de uma corda;

d) Verifique a frequência de uma sequência de notas em uma mesma corda;

e) Crie um gráfico com a sequência de medidas encontradas;

f) O gráfico criado se assemelha a alguma relação / regra matemática conhecida?

Figura 26 - Braço de guitarra
Fonte: (GEAR 4 MUSIC)

GRUPO

____________________________ ____________________________

____________________________ ____________________________

Anote todas as medições no verso da folha.

Instrumentos:

Observações que o grupo julgar pertinente na análise dos instrumentos:

Medições:

<u>Por favor, realize as anotações à caneta.</u>

Para a próxima aula: traga seu laptop com geogebra e excel instalados.

Aula 3: Criação / Teste teórico de hipóteses

O propósito dessa terceira aula é criar hipóteses a respeito de uma regra de formação das notas da escala musical com base nos dados coletados na segunda aula.

Criação de hipóteses:

Uma vez realizadas medições dos instrumentos musicais chega a hora de criar hipóteses a respeito da existência de uma regra matemática que determine como se estabelece a sequência de notas de uma escala. Para isso, algumas orientações serão importantes:

- Organize as medições em sequência (crescente ou decrescente);

- Siga sua intuição. Ela pode ser um excelente ponto de partida para a busca de uma resposta;

- Fundamente e justifique suas respostas com base em cálculos matemáticos: a intuição é importante, mas não é suficiente para comprovar se suas ideias estão corretas.

Perguntas auxiliares:

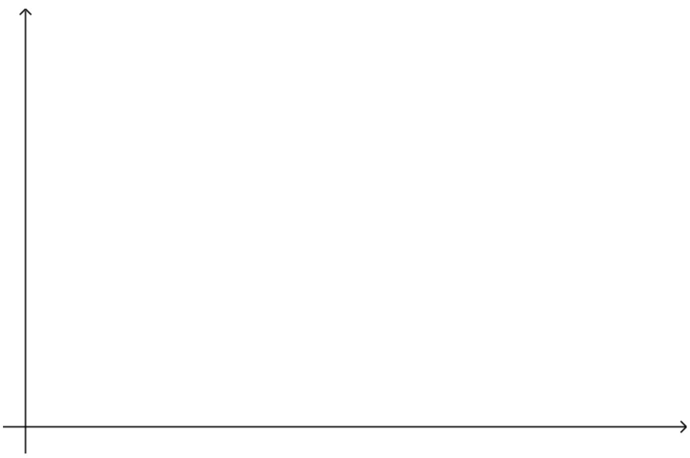
- Existe um valor fixo variando no intervalo entre notas subsequentes?

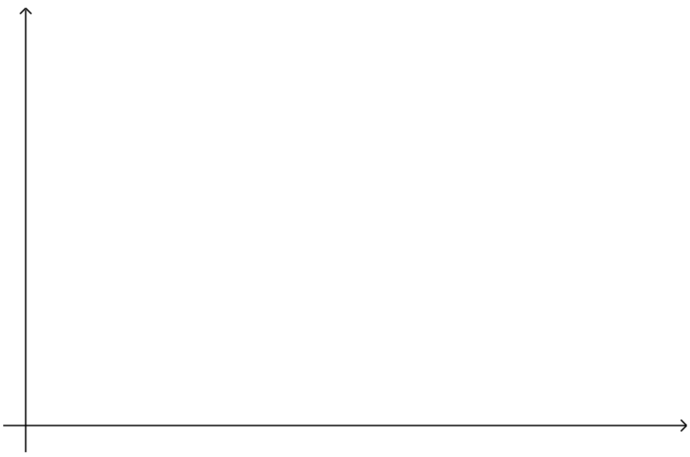
- Existe um padrão na variação do intervalo entre notas subsequentes?

- Como a física explica a relação entre notas subsequentes e a frequência que as representa?

- Crie gráficos com os valores obtidos e verifique se eles se assemelham a algum padrão conhecido.

Plano cartesiano: Represente a relação entre notas (eixo x) e comprimentos das cordas (eixo y).





Anotações:

Hipóteses:

1.

2.

3.

Aula 4: Construção de instrumentos

O propósito dessa aula é criar instrumentos que testem as hipóteses criadas na terceira aula e verificar se produzem a sequência de notas musicais da escala cromática.

Flauta Pan

O que é flauta pan?

Tipo de flauta constituído por uma sequência de tubos fechados que são tocados soprando a extremidade aberta com os lábios em posição tangente em relação aos tubos. Bastante utilizadas na música folclórica, a flauta pan fez parte da cultura da antiguidade grega e ainda hoje tem sua sonoridade muito destacada na música romena e andina. Comumente feitas de bambu, aproveitando o fato de serem tubos fechados, essas flautas podem ter sua afinação ajustada colocando ou retirando materiais nos fundos dos tubos, como cera de abelha.

Figura 27 - Flauta pan
Fonte: (PÚBLICO)

Construção:

Materiais:

- Canudos;
- Cola quente;
- Caneta;
- Régua;
- Tesoura;
- Palitos de sorvete;
- Cola branca;
- Fita adesiva.

Procedimento:

- Meça e marque os tubos utilizando o padrão encontrado nas medições da aula anterior;

- Corte os tubos sobre a marca;

- Feche uma das extremidades do tubo com uma leve camada de cola quente;

- Organize os tubos na ordem crescente, alinhando as extremidades abertas;

- Fixe os tubos um ao lado do outro usando fita adesiva ou cola sobre palitos de sorvete.

Fase de testes:

Uma vez criada a flauta, é necessário conferir se as notas que ela emite são realmente a sequência que representa a escala cromática. Para isso será necessária utilizar o gerador de frequências para comparar os sons produzidos.

Para finalizar, nada mais interessante do que colocar em prática a finalidade para qual o instrumento foi desenvolvido. Seguem duas sugestões de músicas para testes. Caso conheça as notas de alguma outra música, você pode tocá-la ou pedir para o professor por mais sugestões.

Exemplos:

Atirei o pau no gato

sol fa mi re mi fa sol sol sol

la sol fa fa fa

sol fa mi mi mi

do do la la la

si la sol sol sol

mi fa sol mi fa sol mi fa sol fa mi re do

do do

Parabéns a você

re re mi

re sol fa#

re re mi

re la sol re

re re Re

si sol fa# mi

Do Do si sol la sol sol

B – Relação de notas musicais compreendidas no espectro audível (Afinação a partir de 440 Hz)

E 0	20,602 Hz
F 0	21,827 Hz
# / b 0	23,125 Hz
G 0	24,5 Hz
# / b 0	25,957 Hz
A 0	27,5 Hz
# / b 0	29,135 Hz
B 0	30,868 Hz

C 1	32,703 Hz
# / b 1	34,648 Hz
D 1	36,708 Hz
# / b 1	38,891 Hz
E 1	41,203 Hz
F 1	43,654 Hz
# / b 1	46,249 Hz
G 1	48,999 Hz
# / b 1	51,913 Hz
A 1	55 Hz
# / b 1	58,27 Hz
B 1	61,735 Hz

C 2	65,406 Hz
# / b 2	69,296 Hz
D 2	73,416 Hz
# / b 2	77,782 Hz
E 2	82,407 Hz
F 2	87,307 Hz
# / b 2	92,499 Hz
G 2	97,999 Hz
# / b 2	103,826 Hz
A 2	110 Hz
# / b 2	116,541 Hz
B 2	123,471 Hz

C 3	130,813 Hz
# / b 3	138,591 Hz
D 3	146,832 Hz
# / b 3	155,563 Hz
E 3	164,814 Hz
F 3	174,614 Hz
# / b 3	184,997 Hz
G 3	195,998 Hz
# / b 3	207,652 Hz
A 3	220 Hz
# / b 3	233,082 Hz
B 3	246,942 Hz

C 4	261,626 Hz
# / b 4	277,183 Hz
D 4	293,665 Hz
# / b 4	311,127 Hz
E 4	329,628 Hz
F 4	349,228 Hz
# / b 4	369,994 Hz
G 4	391,995 Hz
# / b 4	415,305 Hz
A 4	**440 Hz**
# / b 4	466,164 Hz
B 4	493,883 Hz

C 5	523,251 Hz
# / b 5	554,365 Hz
D 5	587,33 Hz
# / b 5	622,254 Hz
E 5	659,255 Hz
F 5	698,456 Hz
# / b 5	739,989 Hz
G 5	783,991 Hz
# / b 5	830,609 Hz
A 5	880 Hz
# / b 5	932,328 Hz
B 5	987,767 Hz

C 6	1046,502 Hz
# / b 6	1108,731 Hz
D 6	1174,659 Hz
# / b 6	1244,508 Hz
E 6	1318,51 Hz
F 6	1396,913 Hz
# / b 6	1479,978 Hz
G 6	1567,982 Hz
# / b 6	1661,219 Hz
A 6	1760 Hz
# / b 6	1864,655 Hz
B 6	1975,533 Hz

C 7	2093,005 Hz
# / b 7	2217,461 Hz
D 7	2349,318 Hz
# / b 7	2489,016 Hz
E 7	2637,02 Hz
F 7	2793,826 Hz
# / b 7	2959,955 Hz
G 7	3135,963 Hz
# / b 7	3322,438 Hz
A 7	3520 Hz
# / b 7	3729,31 Hz
B 7	3951,066 Hz

C 8	4186,009 Hz
# / b 8	4434,922 Hz
D 8	4698,636 Hz
# / b 8	4978,032 Hz
E 8	5274,041 Hz
F 8	5587,652 Hz
# / b 8	5919,911 Hz
G 8	6271,927 Hz
# / b 8	6644,875 Hz
A 8	7040 Hz
# / b 8	7458,62 Hz
B 8	7902,133 Hz

C 9	8372,018 Hz
# / b 9	8869,844 Hz
D 9	9397,273 Hz
# / b 9	9956,063 Hz
E 9	10548,082 Hz
F 9	11175,303 Hz
# / b 9	11839,822 Hz
G 9	12543,854 Hz
# / b 9	13289,75 Hz
A 9	14080 Hz
# / b 9	14917,24 Hz
B 9	15804,266 Hz

C 10	16744,036 Hz
# / b 10	17739,688 Hz
D 10	18794,545 Hz
# / b 10	19912,127 Hz