PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Produto de Números Negativos: Identificando um Obstáculo

por

Marcelo Luís da Cruz Lisboa

Preprint PROFMAT 2 (2013) 11 de abril, 2013

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Produto de Números Negativos: Identificando um Obstáculo

Marcelo Luís da Cruz Lisboa
Curitiba, PR Brasil
profmclisboa@gmail.com

11 de abril de 2013

Resumo

Esse trabalho representa a parte de um artigo tratando de Números Negativos, obstáculos e estratégias de ensino. A construção do conceito de número negativo deparou-se com vários obstáculos. Sabe-se que a regra dos sinais para a multiplicação foi inicialmente apresentada à comunidade científica por Diofanto de Alexandria no século III d.C. Não obstante, somente no século XIX é que Hankel apresentou sua demonstração e formalização matemática. Contudo, esse conhecimento matemático demanda uma transposição didática para a compreensão pelo discente dessa multiplicação entre números negativos, o que muitas vezes não ocorre, ou por falta do saber científico pelo professor ou pela dificuldade de elaboração de um plano de aula que realmente supere os obstáculos que se colocam. O que se pretende aqui é apresentar um estudo histórico-epistemológico da multiplicação entre números negativos, os obstáculos para a consolidação da noção de número negativo a fim de fundamentar a exploração de estratégias para a facilitação do ensino da multiplicação entre números negativos.
Palavras-chave: Números negativos; Estratégias de Ensino; Regra de Sinais

Debruçando-se sobre a história dos números negativos, observa-se que o processo de consolidação do conceito de número negativo foi lento e muito marcante. No século III d.C, Diofanto de Alexandria em sua "Aritmética" descreve a regra dos sinais para a multiplicação dos números inteiros. Somente no século XIX, é que Hankel demonstra, de forma consistente, a regra dos sinais. Matemáticos anteriores a Hankel tentaram provar a existência da multiplicação entre números negativos com exemplos práticos e fracassaram. De acordo com Glaeser [4] o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números.

Atualmente, no campo matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade para o seu entendimento. Não obstante, nos processos didático-pedagógicos muitos obstáculos necessitam ser ultrapassados. Sabe-se que, através do modelo metafórico, o aluno consegue compreender que se ele possui dez reais ($+10$) e deve sete reais (-7), ao pagar o que deve, restarão três reais ($+3$). Todavia, será difícil convencê-lo que $(-1) \times (-1) = +1$. De que forma uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? Diante desse obstáculo didático e motivador para a pesquisa e para o estudo de estratégias de ensino que venham melhorar as práticas pedagógicas do professor, propõem-se nesse excerto[1] um estudo histórico-epistemológico dos números negativos como fundamento teórico para exploração de estratégias de ensino para a transposição didática da multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$ com o objetivo de melhorar a compreensão da multiplicação entre números negativos pelos alunos.

1 Números negativos: obstáculos epistemológicos

A definição de obstáculo epistemológico foi apresentada inicialmente pelo filósofo francês Gaston Bachelard, na obra "A formação do Espírito Científico", publicada em 1938. Nessa obra, seu objetivo era interpretar as condições de evolução da ciência, descrevendo bases para realizar o que chamou de psicanálise do conhecimento objetivo. Para isso, delineou com detalhes a noção de obstáculo que é atualmente mencionada em estudos de didática.

Bachelard [2] indicou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de conhecimento passa, na maioria das vezes, pela aceitação de conhecimentos anteriores e se depara com certo número de obstáculos. Dessa forma, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, e sim, de conhecimentos antigos, estáticos, que resistem à aceitação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento.

Segundo Bachelard, a análise dos obstáculos no contexto da Matemática deveria ser tomada de maneira diferenciada, já que a evolução dessa ciência apresentaria uma interessante regularidade em seu desenvolvimento, conhecendo períodos de paradas, sem etapas de erros ou rupturas que destruíssem o saber estabelecido anteriormente. Desse modo, torna-se necessária a análise dessa regularidade e sua relação com a aprendizagem. Entretanto, ao se analisar a trajetória da história dos números negativos com relação à multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$, nota-se que a regularidade destacada por Bachelard não se verifica nesse contexto histórico-epistemológico. Na realidade o que se observa é que a ideia de obstáculo epistemológico passa por uma evolução, como é apontada por Almouloud [1] de modo que observa-se sua presença na Matemática. Isso é o que ocorre, por exemplo com o produto de números negativos, a noção de limites, os números complexos, dentre outros.

[1] Arquivo completo disponível online em http://www.mat.ufpr.br/departamento/ensino.html

Para se chegar ao saber científico apresentado por Hankel com relação à multiplicação entre números negativos e aceito pela comunidade científica, a partir do século XIX, surgiram pelo caminho obstáculos epistemológicos que precederam tal formalização da multiplicação entre números negativos.

Diante do problema, torna-se interessante a investigação dessas barreiras epistemológicas para o enriquecimento do desenvolvimento didático-pedagógico no estudo dos números inteiros. Ao se investigar o estabelecimento do conceito de número negativo como entidade matemática, e as operações multiplicativas entre esses números, observam-se profundas discussões de diferentes níveis durante um longo período. O desenvolvimento histórico dos números negativos é marcado por obstáculos epistemológicos que merecem ser estudados e analisados, pois o processo histórico apresenta, claramente, as várias formas, atitudes e conflitos em que o conhecimento matemático foi construído.

Sabe-se que as dificuldades encontradas no contexto escolar para a aprendizagem da multiplicação de números negativos são consideráveis, principalmente no que tange à multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$, considerada como obstáculo didático que precisa ser transposto com a implementação de estratégias de ensino diferenciadas.

Existem obras didáticas do Programa Nacional do Livro Didáticos (PNLD) que contemplam estratégias para o melhor entendimento da multiplicação entre números negativos, o chamado saber escolar. Apesar disso grande parte dos docentes insistem em trabalhar o saber ensinado, aquele que é registrado no plano de aula do professor. As vezes essa maneira de ensino é pouco flexível, valendo-se apenas do uso pedagógico da regra dos sinais.

Sendo assim, inicialmente far-se-á um estudo histórico-epistemológico dos números negativos e da multiplicação entre esses números, abordando o seu surgimento, desenvolvimento e sua formalização conceitual e operacional. O que se pretende é apresentar as dificuldades encontradas ao longo da história para se aceitar os números negativos como entidade matemática. Com isso, ao discutir no campo pedagógico a barreira didática apresentada pela multiplicação $(-1) \times (-1) = +1$, e criar mais um ambiente para que o leitor possa se familiarizar com as estratégias de ensino propostas nesse trabalho, tem-se uma motivação para a melhoria da prática pedagógica no ensino da multiplicação entre números negativos.

1.1 Números negativos: a história

Na antiguidade, mais especificamente na Grécia, região onde se iniciou a Matemática demonstrativa, representada pela escola pitagórica, surgiu Diofanto de Alexandria (250 d.C. - 350 d.C.). Ele é considerado o criador da álgebra por introduzir notações abreviadas para representar potências e quantidades desconhecidas, além de apresentar resoluções de equações sem utilizar a geometria. A ele ainda é atribuído a origem da regra dos sinais. Apesar de suas contribuições no campo da álgebra, ele não faz qualquer referência aos números negativos. Entretanto, no começo de sua obra, intitulada "Livro I: Aritmética", Diofanto apresenta uma declaração afirmando que aquilo que está em falta multiplicado pelo que falta resulta em algo positivo, enquanto que aquilo que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta. Nota-se que os antigos gregos já tinham contato com a regra dos sinais "menos vezes menos dá mais" e "menos vezes mais dá menos". Embora Diofanto não tratasse isoladamente os números negativos, pelo sentido prático do uso, fica sinalizada na história a necessidade do surgimento de um novo tipo de número: os números negativos.

Na Idade Média, o uso dos números negativos foi marcado por sua prática no cálculo, apesar de sempre usado pelos matemáticos com certo receio. Como afirma Glaeser em [4]:

> "Durante muito tempo eles se espantaram ao perceber que cálculos efetuados com falsos números levavam afinal ao resultado exato!".

Nesse período, também aparece a figura do indiano Brahmagupta, matemático e astrônomo que em uma de suas obras "Brahmasphutasiddhanta" fornece as regras operatórias com os números negativos isoladamente, sem se preocupar em explicar o porquê de negativo multiplicado por negativo resultar em positivo. Outro matemático hindu que trata de números negativos nessa época é Bhaskara. Em uma de suas obras, ele resolveu uma equação do 2° grau determinando duas raízes distintas: (50) e (-5). A solução negativa, (-5), ele desconsiderou justificando que as pessoas da época não a consideravam e também que um número negativo não se tratava de um quadrado.

A existência dos números negativos no período que se inicia na idade média e se estende até o início da idade moderna é marcada pelo uso operatório eficaz no campo algébrico, todavia inexplicável conceitualmente pela comunidade Matemática. Como comenta Glaeser em [4]: "Assim, a prática clandestina do cálculo dos números negativos antecedeu em 1600 anos sua compreensão".

A primeira tentativa de aceitação e incorporação dos números negativos no meio acadêmico consta dos trabalhos de Simon Stevin (1548-1620), matemático belga, que aceitou esses tipos de números como raízes e coeficientes de equações com o uso de uma proposição de que as raízes negativas das equações são as raízes positivas da equação obtida trocando-se x por $(-x)$, isto é, se -3 é raiz de uma equação $x^2 - ax = b$, então $+3$ é raiz de $-x^2 + ax = -b$. Observa-se que esse artifício criado por Stevin ainda demonstra uma forma de se evitar em assumir o negativo como um símbolo de uma quantidade, ou seja, um número propriamente dito.

É a partir do século XVIII que os números negativos aparecem naturalmente em trabalhos científicos da época, justificados pela seguinte oração: "A eficácia do cálculo é suficiente para confortar o matemático em sua fé". Todavia, no campo pedagógico, não existia naquele momento algum pesquisador que validasse os processo envolvendo os números negativos. Matemáticos como François Viète (1540-1603), René Descartes (1596-1650) e Gottfried Leibniz (1646-1716) contribuíram para o amadurecimento do conceito dos números negativos, atualmente considerados como elementos pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

Viète foi um dos primeiros matemáticos a utilizar os símbolos "+" e "−", apesar de usá-los apenas nas operações com números positivos. Ele considerava que os números negativos não possuíam um significado intuitivo ou físico; dizia "diminua 3" em vez de dizer "acrescente -3". Descartes, ao apresentar a geometria cartesiana, chamou de "falsas" as raízes negativas e desenvolveu um método para transformá-las em positivas. Leibniz mostrou que se poderia calcular com as proporções $(-1) : 1 = 1 : (-1)$, já que formalmente isso era equivalente a calcular quantidades imaginárias, introduzidas à época. O que Leibniz fez foi dar condições para validade das operações com os negativos.

Em 1748, foi publicado o "Tratado de álgebra", do matemático Colin Maclaurin (1698-1746), obra que vai marcar o início do entendimento dos números negativos, pois tratou de definições sobre quantidades negativas. Nessa obra, Maclaurin apresenta a ideia de que uma quantidade negativa é tão real quanto uma positiva, não obstante tomada em sentido oposto. Contudo, ele afirmava que essa quantidade somente existiria por comparação e não isolada. Para isto, ele enunciou que se "uma quantidade negativa não possui outra que lhe seja oposta, então não se pode dessa subtrair outra menor". Maclaurin somente admitia quantidades negativas em relação ao zero origem, o que anteriormente causava conflitos, pois não se distinguia o zero absoluto do zero origem. Ainda em sua obra, define a regra dos sinais, o que marcou o início do formalismo e a conceituação atual dos números negativos. Como afirmam Sá e Anjos em [5]:

> "Maclaurin foi o primeiro matemático moderno que chegou muito perto de compreender os números negativos tornando-se, portanto, uma importante referência para futuras gerações de matemáticos".

Leonhard Euler (1707-1783), notável matemático do século XVIII, ao tentar justificar a regra dos sinais em sua obra "Elementos de álgebra", deixa transparecer que ele entendia os números negativos apenas como uma quantidade precedida pelo sinal "−" (menos). Ele não raciocinava com negativos sendo quantidades menores que zero. Outro grande matemático que fez parte da história dos números negativos na idade moderna foi Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). Ele escreveu o artigo "Negativo", onde apresenta uma ideia equivocada no conceito de números negativos. Afirma em sua publicação científica que "Quantidades negativas encontradas no cálculo algébrico indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal de menos que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar um erro que cometemos na hipótese inicial".

Em 1821, Augustin Cauchy (1789-1857) lançou uma obra destinada à Escola Politécnica de Paris, na qual faz uma distinção entre os números reais positivos e quantidades positivas e negativas. Nessa obra, ele define as leis de crescimento e de diminuição pelos sinais "$+$" e "$-$" (operatórios) e define quantidades positivas por grandezas que aumentam representadas por um número precedido de um sinal "$+$" e quantidades negativas por grandezas que diminuem representadas por um número precedido do sinal "$-$" . No entanto, essas definições que facilitavam a compreensão das propriedades aditivas, tornavam-se um obstáculo à compreensão da multiplicação. Com relação a essa barreira didática, Glaeser relata em [4]:

> Neste último caso, pode-se diminuir um número positivo, multiplicando-o por um fator compreendido entre 0 e 1. Daí resultaria confusões entre esses dois tipos de diminuições, e numa tal situação nebulosa não se compreenderia mais por que o produto de uma diminuição por uma diminuição é um aumento. Cauchy teria podido, contudo, assimilar o número negativo a uma diminuição aditiva (mas não o fez).

Cauchy de modo formal apresenta em sua obra a multiplicação sem modelos concretos e não utiliza as explicações usadas por ele para as propriedades aditivas, o que cria uma confusão entre os sinais operatórios "$+$" e "$-$", e que adiante, irá instigar o interesse de Herman Hankel (1839-1873) pelos números negativos.

Hankel em sua obra "Teoria dos Sistemas dos Complexos", publicada em 1867, dedica-se a exposição formal da teoria dos números complexos. Todavia, nas suas considerações preliminares, finalmente formula o princípio de permanência das formas equivalentes e das leis formais que estabelecem um critério geral para algumas aplicações do conceito de número, resolvendo assim, a dificuldade encontrada anteriormente para o entendimento do conceito de números negativos. A formalização de Hankel sobre os números negativos é considerada uma revolução para aceitação da existência desses números. Ele afirma que os números não são descobertos e sim inventados, imaginados. Hankel sinaliza que aqueles que tentarem procurar todas as respostas lógicas na natureza, no cotidiano, nunca conseguirão adquirir maturidade em conceitos matemáticos que doravante, são definidos para a realidade. Diante dessa reflexão, ele abandona a idéia de se extrair da natureza exemplos práticos para explicar os números negativos de forma metafórica e adota o ponto de vista formal a partir das propriedades aditivas dos $\mathbb{R}$ e multiplicativas em $\mathbb{R}^+$, propondo a extensão das propriedades de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$.

Como afirma Glaeser em [4]:

> O Teorema de Hankel foi enunciado da seguinte forma: "A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$ respeitando as distribuições (à esquerda e à direita) é conforme a regra de sinais". A demonstração de Hankel para a regra dos sinais da multiplicação é assim apresentada:
>
> $$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{oposto } b) = ab + a \times (\text{oposto } b)$$
>
> $$0 = 0 \times (\text{oposto } b) = (\text{oposto } a) \times (\text{oposto } b) + a \times (\text{oposto } b);$$
>
> De onde
>
> $$(\text{oposto } a) \times (\text{oposto } b) = ab$$

Conclue-se da história dos números negativos que se os antecessores de Hankel tivessem desenvolvido modelos capazes de sustentarem as propriedades sobre o conjunto dos números negativos, obviamente o nível de compreensão sobre esses números negativos poderia ter ocorrido bem mais cedo. Da análise feita com relação à trajetória na história da compreensão dos números negativos, pode se considerar que o sucesso de Hankel, foi de não tentar buscar um modelo para a explicação da existência dos números negativos.

1.2 O obstáculo didático: $(-1) \times (-1) = +1$

Até o início do século XIX as duas barreiras epistemológicas envolvendo os números negativos são assim definidas por Glaeser em [4]:

> "Estagnação do estágio das operações concretas, em confronto com o estágio das operações formais, ou seja, a dificuldade de afastar-se de um sentido concreto atribuído ao seres numéricos. E a tentativa de um modelo unificador, de encontrar um "bom modelo" aditivo que fosse igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, onde esse modelo é inoperante".

A prática pedagógica mostra que ao se apresentar aos discentes os números positivos e negativos como medidas, utilizando o número positivo com a ideia de ganho e o número negativo com a de perda, consegue-se obter um bom entendimento nas operações aditivas com esses números. Contudo, como explicar que a multiplicação de uma perda por outra perda se transforma em um ganho? Estamos diante de um obstáculo didático. Nesse caso, o que antes poderia ser apresentado por meio de situações concretas, agora precisa ser entendido como uma regra sem relação nenhuma com o que foi aprendido nas operações de adição e subtração de números positivos e negativos. Hankel, em 1867, propôs uma forma de superar esse obstáculo ao mostrar que a explicação para a regra dos sinais "$-$" $\times$ "$-$" = "$+$" não poderia ser procurada na natureza, e que havia a necessidade de ser demonstrada formalmente, ou seja, justificada dentro dos princípios da consistência interna da Matemática. Ele conseguiu justificar $(-1) \times (-1) = +1$ através do princípio da extensão da propriedade da distributiva dos números positivos para o caso dos negativos. Crowley em [3] apresenta uma demonstração direta para $(-1) \times (-1) = +1$:

$$\begin{aligned}
(-1) \times (-1) &= ((-1) \times (-1)) + ((0) \times (1)) \\
&= ((-1) \times (-1)) + ((-1 + 1) \times (1)) \\
&= ((-1) \times (-1)) + ((-1) \times (1)) + ((1) \times (1)) \\
&= ((-1) \times (-1 + 1)) + ((1) \times (1)) \\
&= ((-1) \times (0)) + ((1) \times (1)) \\
&= (1) \times (1) = +1
\end{aligned}$$

Desta forma, o produto de dois números negativos resultando num valor positivo justifica-se pelo entendimento das regras consistentes da própria Matemática, decorrentes dos processos de abstrações e generalizações formalizados com rigor matemático.

No entanto, sabe-se que se na prática pedagógica ao ensinar a multiplicação de números negativos, aplicar-se somente a formalização do saber científico com relação à regra dos sinais. Provavelmente a "pirâmide" formada pela relação professor, aluno e saber matemático sofrerá rachaduras irreparáveis. Portanto, para que a estrutura desse "sólido geométrico" repleto de qualidades matemáticas diferenciadas não se desestruture, é necessário que se proponha estratégias de ensino pois o obstáculo epistemológico apontado, envolvendo $(-1) \times (-1) = +1$, materializa-se em sala de aula como obstáculo didático.

2 Considerações Finais

São perfeitamente justificáveis as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com as operações matemáticas envolvendo os números negativos. Historicamente, foram necessários séculos para que os números negativos fossem aceitos e totalmente compreendidos pela sociedade matemática, ultrapassando dessa forma, esse obstáculo epistemológico. Ainda assim, é exigida dos alunos a total compreensão desse conteúdo em poucos meses.

Com relação à adição e a subtração de números negativos, verifica-se que os livros didáticos, na maioria das vezes utilizam as mesmas táticas, bem como os professores em sala de aula. Com exemplos ilustrativos, usam a reta enumerada, a temperatura de algumas cidades (frias e quentes) e movimentação numa conta bancária fictícia, onde se debitam e creditam dinheiro.

O maior problema acontece quando o assunto passa a ser a multiplicação de números negativos, com a famosa "regra dos sinais". Verificamos que, realizar a operação $(-1) \times (-1) = +1$ não é tão simples assim, e por isso a maioria dos professores, talvez influenciados por livros mais antigos, optam por simplesmente fazer com que os seus alunos decorem a regra. Contudo, o ensino puramente expositivo destas regras, ao causar a sensação de regra outorgada pela força, cria dificuldades para a compreensão e aplicação correta nas operações. Como resultado, observa-se que os alunos chegam ao ensino médio ainda apresentando dificuldades em trabalhar com números inteiros, embora tenham decorado a "regra dos sinais".

O uso de estratégias ou artifícios simples e compreensíveis que ilustrem as regras de sinais contribui com a assimilação do conceito e dão significado a ele, sendo superado este obstáculo epistemológico-didático que costumeiramente impede a progressão dos alunos no aprofundamento na disciplina. Não que seja impossível conseguir resultados favoráveis de compreensão do conhecimento da multiplicação entre números negativos em tão pouco tempo, mas devemos sempre estar atentos para o fato de que trabalhar com esses tipos de números não é algo natural para a maioria dos alunos. Portanto, é papel do professor estar de posse do maior número de estratégias para facilitar a compreensão do conteúdo por todos os alunos.

Referências

[1] S. Almouloud. *Fundamentos da didatica da Matemática.* Editora UFPR, Curitiba, 2007.

[2] G. Bachelard. *A formação do Espírito Científico.* Contra-ponto, São Paulo, 1996.

[3] M.L. Crowley and K.A. Dunn. On multiplying negative numbers. *Mathematics Teacher*, 78(4):252–256, 1985.

[4] G. Glaeser. Epistemologia dos números relativos. *Boletim do GEPEM*, 17:29–124, 1985.

[5] P.F. Sá and L.J.S. Anjos. Números negativos: Uma trajetória histórica. In *Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática*, Aracaju, 2011.