UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jogos de loteria: Uma aplicação de probabilidade

Angélica Pereira da Silva

RIO DE JANEIRO

2018

Angélica Pereira da Silva

JOGOS DE LOTERIA: Uma aplicação de probabilidade

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro
2018

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

S586 Silva, Angélica Pereira da
Jogos de loteria: Uma aplicação de probabilidade / Angélica Pereira da Silva. -- Rio de Janeiro, 2018.
130 f.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Contagem. 2. Probabilidade. 3. Jogos de Loteria. 4. Ensino. I. Busse, Ronaldo da Silva, orient. II. Título.

Angélica Pereira da Silva

JOGOS DE LOTERIA: Uma aplicação de probabilidade

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse - Orientador
UNIRIO

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes
UNIRIO

Prof. Dr. Orlando dos Santos Pereira
UFRRJ

Rio de Janeiro

2018

Dedico este trabalho ao meu filho, Arthur, e ao meu marido, Adilson, por estarem sempre ao meu lado me apoiando e incentivando em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por sua presença em todos os momentos. Pela oportunidade desta experiência, por ter me dado força e coragem para enfrentar os momentos difíceis e por me abençoar com tantas pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao meu marido e ao meu filho, meus companheiros de todos os momentos da minha vida, que contribuíram para que este dia fosse possível e com quem quero dividir o mérito desta conquista.

Aos Professores do PROFMAT/UNIRIO, pelos ensinamentos, contribuições e apoio disponibilizados no decorrer de todo o percurso deste mestrado.

Aos meus Companheiros de Mestrado, pela convivência, pelo aprendizado, pelas palavras de incentivo e pelos bons momentos que compartilhamos nesta caminhada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse, pela confiança, colaboração, e incentivo para conclusão deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo destacar a importância da probabilidade e a aplicação desta a alguns jogos de loteria. Neste contexto, a proposta é fazer uma análise e reflexão utilizando os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade envolvidos nos seguintes jogos: Mega-Sena, Quina, Lotofácil e Lotomania, apresentando as chances reais de se ganhar ao realizar uma aposta, justificando as contas envolvidas neste cálculo. Serão incluídos os pré-requisitos básicos para que o leitor tenha o embasamento teórico necessário para compreensão dos cálculos apresentados. As atividades propostas poderão ser realizadas também em sala de aula, como uma forma lúdica e prática de apresentar os conceitos de matemática, estabelecendo conexões entre os temas abordados e os conhecimentos relacionados ao mundo a sua volta. Desta forma, pretende-se contribuir para o estudo de professores, alunos e pessoas interessadas no conteúdo estudado e/ou interessadas apenas nos jogos de loteria apresentados.

Palavras-chaves: Contagem. Probabilidade. Jogos de loteria. Ensino.

ABSTRACT

This work has as main objective to highlight the importance of the probability and the application of this to some lottery games. In this context, the proposal is to make an analysis and reflection using the concepts of Combinatorial Analysis and Probability involved in the following games: Mega-Sena, Quina, Lotofácil and Lotomania, presenting the real chances of winning when making a bet, justifying the accounts involved in this calculation. The basic prerequisites will be included so that the reader has the theoretical basis necessary to understand the presented calculations. The proposed activities can also be carried out in the classroom as a playful and practical way of presenting the concepts of mathematics, establishing connections between the topics addressed and the knowledge related to the world around them. In this way, it is intended to contribute to the study of teachers, students and people interested in the content studied and / or interested only in the presented lottery games.

Keywords: Counting. Probability. Lottery games. Teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (2000) destacam que em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

Neste sentido, as legislações apontam que o processo de ensino-aprendizagem deve estar voltado para uma maior contextualização, com uma formação humana mais ampla, e no que diz respeito à matemática, não só técnica, orientando que haja, neste processo, uma efetiva relação entre a teoria apresentada e a prática do dia-a-dia.

Como enfatizam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), a contextualização deve ser vista como um dos instrumentos para a concretização da ideia de interdisciplinaridade e serve ainda para favorecer o aluno a atribuir significados no que se refere aos conceitos matemáticos apresentados no processo de ensino-aprendizagem.

Podemos observar que aplicar as ideias de Probabilidade e Combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas.

Neste contexto, o principal objetivo deste trabalho é destacar a importância da probabilidade e a aplicação desta a 4 jogos de loteria famosos no Brasil. Além disso, pretende-se contribuir para o estudo de professores, alunos e pessoas interessadas no conteúdo estudado e/ou interessadas apenas nos jogos de loteria apresentados.

No Capítulo 1, falaremos sobre a importância da matemática para as mais variadas áreas do conhecimento, abordaremos, principalmente, as competências e habilidades desenvolvidas com o ensino de Probabilidade. Além disso, como o livro didático tem relevante papel como material de apoio ao processo de ensino-aprendizagem realizaremos uma análise dos livros no que se refere ao conteúdo de Contagem/Análise Combinatória e Probabilidade.

No Capítulo 2, apresentaremos as noções de Análise Combinatória e Probabilidade que são os pré-requisitos básicos para que o leitor tenha o embasamento teórico necessário para compreensão dos cálculos expostos.

Finalmente no Capítulo 3, apresentaremos um breve histórico das Loterias no Brasil, descreveremos como são os seguintes jogos de loteria: Mega-Sena, Quina, Lotofácil e Lotomania e mostraremos que os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade podem nos auxiliar a compreender, por exemplo, ***se na Mega-Sena, é mais vantajoso financeiramente fazer uma aposta de 7 números ou fazer apostas de 6 números combinando esses 7 números***. Além desta, outras questões interessantes serão apresentadas ao longo do capítulo e desta forma exibiremos, através dos cálculos, as chances reais de se ganhar ao realizar uma aposta.

Capítulo 1 O ENSINO DE PROBABILIDADE

Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

A Matemática é uma área do conhecimento muito importante, uma vez que está presente nas diferentes atividades diárias do ser humano sendo utilizada para codificar, ordenar, quantificar e interpretar, além de servir como ferramenta aos mais diversos campos do saber, tais como: Medicina, Informática, Administração, Economia, dentre outros.

Como vivemos em uma sociedade onde as informações mudam a todo o momento, é de fundamental importância que a Educação priorize o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

Neste sentido, a Matemática tem muita relevância no desenvolvimento dessas capacidades, visto que, o docente, a partir de ações efetivas, poderá desempenhar bem o seu papel auxiliando o aluno na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo, que poderão ser utilizadas em situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho.

Além disso, o docente também deve ser o responsável por estabelecer conexões entre os temas matemáticos e os conhecimentos relacionados ao mundo a sua volta.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (2000) afirmam que a Matemática do Ensino Médio possui um papel formativo e um papel instrumental. No que tange ao papel formativo, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo; e com relação ao papel instrumental, é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. No entanto, não se restringe apenas a estes dois papéis, deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas, que tem funções de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros.

Conforme o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2018, pode-se dizer também que a Matemática do Ensino Médio tem a tarefa de preparar os cidadãos para uma sociedade cada vez mais permeada por novas tecnologias, e de possibilitar o acesso a patamares mais elaborados do saber.

Desta forma, o PNLD 2018 considera que o ensino de Matemática deve ser responsável por preparar os estudantes para:

- planejar ações e projetar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
- compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação;
- interpretar matematicamente situações do dia-a-dia ou do mundo tecnológico e científico e saber utilizar a Matemática para resolver situações-problema nesses contextos;
- avaliar os resultados obtidos na solução de situações-problema;
- fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;
- saber usar os sistemas numéricos, incluindo a aplicação de técnicas básicas de cálculo, regularidade das operações etc.;
- saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das equações;
- reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as representações gráficas e algébricas dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;
- compreender os conceitos fundamentais de grandezas e medidas e saber utilizá-los em situações problema;

- utilizar os conceitos e procedimentos estatísticos e probabilísticos, valendo-se, entre outros recursos, da combinatória;
- estabelecer relações entre os conhecimentos nos campos da aritmética, álgebra, geometria, grandezas e medidas, combinatória, estatística e probabilidade, para resolver problemas, passando de um desses quadros para outro, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN + (2006) destacam que aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno.

Como podemos observar o Ensino da Matemática é muito importante para as mais variadas áreas do conhecimento e para o desenvolvimento de diversas competências, como, por exemplo, podemos destacar nos PCNEM (2000) que as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas.

No entanto, estes assuntos por serem considerados muito difíceis, não estão entre os preferidos dos alunos do Ensino Médio, conforme destaca Nunes (2015),

> a probabilidade não é unanimidade na preferência dos discentes do Ensino Médio no momento em que se deparam com esse assunto em sala de aula. Seja pela forma como o professor passa o conteúdo, seja pela maneira mecânica como os livros abordam o tema, a verdade é que a maioria dos alunos têm muito pouco interesse e extrema dificuldade em aprender probabilidade. O fato é preocupante se for considerado o vasto campo de suas aplicações, tanto as clássicas, como os cálculos atuariais e jogos de azar, quanto as modernas, como probabilidades na Física, Estatística e Engenharia.

Isso mostra como se faz necessária uma abordagem mais contextualizada dos conteúdos de Contagem/Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio. Diante do exposto, falaremos de forma breve, neste capítulo, sobre o ensino destes conteúdos e realizaremos uma análise de alguns livros didáticos que abordam tais temas e que são utilizados em escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro.

1.1 Sobre o Ensino de Probabilidade

Para que se desenvolvam as competências almejadas nos PCNEM (2000), com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias, evitando a quantidade excessiva de informações, os PCN+ (2006) propõem que se faça um recorte para a escolha de temas relativos ao conteúdo específico da disciplina, usando critérios orientadores.

Podem-se destacar os seguintes critérios: os temas devem permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem; evitar excessivos detalhamentos ou nomenclaturas; dentre outros.

Nesta perspectiva, o conteúdo matemático apresenta-se sistematizado em três eixos ou temas estruturadores:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

Estudaremos neste trabalho o terceiro eixo ou tema estruturador, Análise de dados, que tem como objetos de estudo os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles dos demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades. Desta forma, temos que este eixo pode ser organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade, e neste trabalho estudaremos apenas as unidades de Contagem e Probabilidade.

Os PCN+ (2006) afirmam que a Probabilidade é vista como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões associadas à realidade, utiliza dados e informações em conjuntos finitos e usa procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados, tendo como parte instrumental a Contagem ou Análise Combinatória.

O PNLD 2018 destaca que um dos objetivos de um bom ensino de análise combinatória é desenvolver no estudante a capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução dos problemas, no entanto, se tornará prejudicial para o desenvolvimento desta capacidade e do raciocínio combinatório um ensino que habitue o estudante a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso mecânico de fórmulas.

Pode-se dizer que, no estudo da Contagem e da Probabilidade, é importante observar que aprender matemática não é memorizar fórmulas e resultados dessa ciência, como muitos pensam, a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber-fazer e de um saber-pensar matemático, conforme os PCN+ (2006):

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.

Diante do exposto, observa-se que o Ensino da Probabilidade no Ensino Médio deve ter como foco um trabalho voltado para resolução de problemas contextualizados envolvendo situações reais, este tipo de trabalho cria oportunidade de estabelecer uma articulação entre a Matemática e diferentes áreas do conhecimento. Além disso, à medida que se realiza um trabalho pedagógico próximo da realidade, é importante que se insiram outros materiais como, por exemplo, calculadoras e computadores para que o estudante tenha oportunidade de acesso às diversas tecnologias disponíveis.

Assim, espera-se que ao longo do processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Contagem e Probabilidade, os estudantes desenvolvam as seguintes habilidades, de acordo com o PCN+ (2006):

> **Contagem:** princípio multiplicativo; problemas de contagem.
> • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> • Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
> • Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.
>
> **Probabilidade:** possibilidades; cálculo de probabilidades.
> • Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
> • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
> • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

Com relação à distribuição dos temas nas 3 séries do Ensino Médio, temos como proposta dos PCN+ (2006) para uma situação de 4 aulas semanais, que o conteúdo de Contagem seja apresentado na 2ª série e o conteúdo de Probabilidade, na 3ª série. No entanto, a distribuição dos temas pode variar em função do número de aulas e do projeto da escola para aprofundamento de temas ou inclusão de outros.

No Estado do Rio de Janeiro, a Secretaria de Estado de Educação elaborou o Currículo Mínimo para a rede de ensino estadual, cuja finalidade é orientar sobre os itens que não podem faltar no processo de ensino-aprendizagem, em cada disciplina, ano de escolaridade e bimestre. Com este documento, a Secretaria afirma que se pode garantir uma essência básica comum a todos e que esteja alinhada com as atuais necessidades de ensino, identificadas não apenas nas legislações vigentes, Diretrizes e Parâmetros Curriculares Nacionais, mas também nas matrizes de referência dos principais exames nacionais e estaduais.

No que se refere aos conteúdos de Contagem e Probabilidade, no Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro, estes deverão ser apresentados na 3ª série do Ensino

Médio. As aulas de matemática são ministradas na 1ª série, em 5 aulas semanais; na 2ª série, em 4 aulas semanais e na 3ª série, em 4 aulas semanais.

Analisando o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), temos que o conteúdo da referida prova é definido a partir de matrizes de referência em quatro áreas do conhecimento. A Matemática faz parte da área do conhecimento, **Matemática e suas Tecnologias**.

Da matriz de referência, Matemática e suas Tecnologias, podem ser citados alguns itens que abordam os conteúdos de Contagem e Probabilidade, a saber:

> **Competência de área 1** - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
> **H2 -** Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
> **H3 -** Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
>
> **Competência de área 6 -** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
> **H24** - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
> **H25** - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
> **H26 -** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
>
> **Competência de área 7 -** Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
> **H28 -** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
> **H29 -** Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
> **H30 -** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

1.2 Análise de livros didáticos

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (PCN, 1997, p.67)

O Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2018 considera que a sala de aula se constitui em um cenário no qual se estabelecem inter-relações entre o professor, o estudante, o livro didático e os saberes disciplinares. Neste sentido, o livro didático, através do seu autor, se torna mais um personagem no processo de ensino-aprendizagem.

O livro didático, além de dialogar com o professor e com o aluno, carrega em suas páginas o saber a ser estudado; os métodos adotados para que o estudante consiga apreendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. Por isso, o livro tem uma função relevante no processo de ensino-aprendizagem, sendo uma importante referência a ser utilizada, mas não sendo a única, pois há uma enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias a serem utilizadas neste processo.

Desta forma, no processo de avaliação dos livros didáticos de Matemática, deve ser considerado se o ensino de Matemática, apresentado no referido material, cumpre os requisitos obrigatórios adequados para o Ensino Médio, de acordo com o PNLD 2018, são eles:

1. incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, álgebra, geometria e estatística e probabilidade;

2. privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;

3. apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros;

4. propiciar o desenvolvimento, pelo estudante, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras.

Diante da importância do livro didático como material de apoio ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, realizaremos uma análise de 3 livros didáticos utilizados em escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro que apresentam o conteúdo de Contagem e Probabilidade.

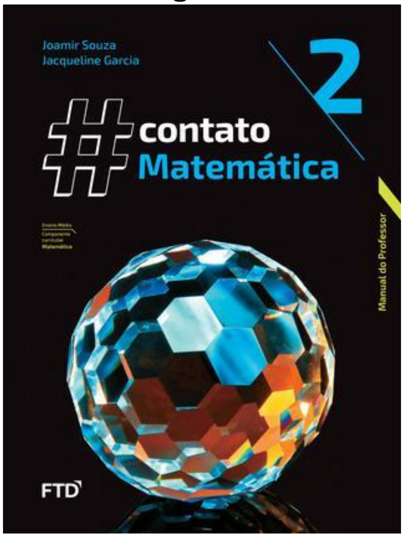
Na análise dos livros, no que se refere aos conteúdos supracitados, observaremos as principais características, a saber:

- **Quantidade de páginas** – Quantas páginas são destinadas ao capítulo do conteúdo estudado?
- **Tópicos estudados no capítulo** – Quais tópicos relativos ao conteúdo são abordados no capítulo?
- **Ordem dos tópicos** – A ordem dos tópicos apresentada é adequada e facilita o entendimento do assunto?
- **Abertura do capítulo** – Há uma introdução, através de exemplos, história etc., que crie uma conexão com o conteúdo que será estudado no capítulo?
- **Abordagem do conteúdo** – Apresenta o conteúdo a partir de exemplos, definições, dentre outros?
- **Atividades** – As questões são contextualizadas e em quantidade suficiente para assimilar o conteúdo?
- **Tecnologia** – Apresenta situações que possam usar tecnologia ou sugere o uso da mesma?
- **Contexto histórico** – Utiliza a História da Matemática para enriquecer o texto e auxiliar no desenvolvimento do conteúdo?
- **ENEM** – Inclui questões do Exame Nacional do Ensino Médio no capítulo?

1.2.1 Livro 1 – Coleção # Contato Matemática

A análise será feita no livro **# Contato Matemática** – 2 º ano, dos autores Joamir Souza e Jacqueline Garcia, da Editora FTD, que faz parte de uma coleção de 3 volumes. Neste volume, são apresentados os conteúdos de Análise Combinatória (Contagem) e Probabilidade.

Figura 1



Fonte: https://www.google.com.br

Observa-se que este livro foi elaborado para ser utilizado na 2ª série, no entanto, de acordo com o Currículo Mínimo, os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade deverão ser trabalhados na 3ª série. Neste caso, para atender as demandas deste Currículo deverão ser utilizados 2 volumes da coleção na 3ª série.

A tabela seguinte abordará as principais observações feitas no **Livro 1** pela autora desta pesquisa. Com relação à análise do Capítulo 4 – Análise Combinatória e do Capítulo 5 – Probabilidade, temos:

Conteúdo	**Análise Combinatória**	**Probabilidade**
Quantidade de páginas	28	30
Tópicos estudados no capítulo	• Princípio Fundamental da Contagem • Fatorial • Arranjo Simples • Permutação Simples • Combinação Simples • Permutação com repetição • Binômio de Newton	• Estudando Probabilidade (Experimento aleatório, espaço amostral e evento) • Calculando Probabilidades • Probabilidade da união de dois eventos • Probabilidade Condicional • Experimentos Binomiais • Estatística e Probabilidade
Ordem dos tópicos	Uma sugestão é que o tópico de Permutação Simples seja apresentado antes do Fatorial, acredita-se que facilitaria o	Observa-se que a ordem dos tópicos apresentada é coerente com o conteúdo desenvolvido.

	entendimento do Fatorial e do Arranjo Simples.	
Abertura do capítulo	A abertura desse capítulo traz como exemplo alguns jogos de loteria, cujo objetivo é estabelecer uma conexão com o assunto de Análise Combinatória. No entanto, ao ler o texto e as perguntas abordadas, observa-se que a escolha não foi pertinente, pois ao questionar, por exemplo, qual a chance de ganhar o prêmio?, temos uma ideia de probabilidade. Desta forma, não se estabelece uma conexão direta com o assunto a ser estudado.	A abertura deste capítulo traz como exemplo uma situação hipotética de analisar quantos alunos de uma turma fazem aniversário no mesmo dia. Em uma das situações apresentadas, pergunta-se: se a chance de dois ou mais alunos fazerem aniversário no mesmo dia do mês é maior ou menor que 90%? Claramente, pode-se observar que há uma conexão da abertura do capítulo com o assunto a ser estudado. Ainda na abertura, há uma situação apresentada em que o professor pode aproveitar para falar sobre o **Princípio das Gavetas ou Princípio da Casa dos Pombos.** Mesmo que este Princípio não seja apresentado no capítulo, pode ser citado como mais um método importante de contagem matemática.
Abordagem do conteúdo	Com relação ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC), apresenta-se um problema e já diz que a maneira de resolver é utilizando o PFC, não conduz o aluno a essa conclusão e não resolve o problema, apresentando outra situação que utiliza o mesmo princípio. Na representação das possibilidades, a obra apresenta duas possíveis formas: diagrama de árvore/árvore de possibilidades e tabela de dupla entrada.	A maioria dos tópicos inicia com um exemplo para depois formalizar a definição. Todos os tópicos apresentados no capítulo têm atividades resolvidas antes da lista de exercício. Apresenta gráficos, tabelas e trabalha uma pouco de Estatística. A obra apresenta atividades envolvendo os jogos que aparecem com frequência quando se trabalha com probabilidade, como por exemplo, baralho, dados e dominó, mas também, apresenta atividades envolvendo outros jogos, podem

	Em alguns tópicos, a obra começa com um exemplo para depois formalizar a definição e em outros apresenta direto a definição e depois exemplo, alguns tópicos têm atividades resolvidas antes da lista de exercícios. No geral, o texto é simples e objetivo, possui figuras ilustrando algumas partes do mesmo, proporcionando uma leitura mais leve, no entanto, observa-se que não há um incentivo a argumentação e a construção das generalizações.	ser citados: o jogo Campo Minado e o jogo *Role-playing game* [1](RPG). No geral, o texto é simples, objetivo, possui figuras ilustrando algumas partes do mesmo, proporcionando uma leitura mais leve. Apresenta o conteúdo de forma bastante abrangente e procura estabelecer conexões do assunto estudado com situações que podem ser encontradas no cotidiano do aluno.
Atividades	Apresenta questões diversificadas para desenvolver as ideias e os conteúdos, mas não há uma regularidade na quantidade de questões relativas a cada tópico, alguns tem poucas questões. Possui questões contextualizadas interessantes relacionando o conteúdo apresentado com situações cotidianas ou outras áreas do conhecimento.	Apresenta questões diversificadas para desenvolver as ideias e os conteúdos, possui uma quantidade satisfatória de questões envolvendo os tópicos apresentados. Possui questões contextualizadas interessantes relacionando o conteúdo apresentado com situações cotidianas ou outras áreas do conhecimento. No final do capítulo, apresenta uma atividade que trabalha o conteúdo estudado e possibilita uma reflexão a respeito da reciclagem.
Tecnologia	Apresenta situações que a calculadora pode ser usada para verificação de resultados, correção de erros, etc., e propõe o uso da calculadora científica em algumas questões.	Apresenta situações que a calculadora pode ser usada para verificação de resultados, correção de erros, etc., no entanto, não sugere o uso da mesma nas questões, só apresenta uma atividade resolvida em que sugere o uso.

[1] ***Role-playing game* (RPG)** é um tipo de jogo no qual os jogadores assumem papéis de personagens e criam narrativas.

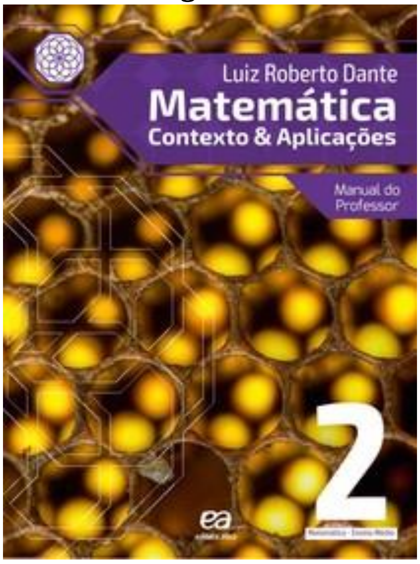
		O computador, o tablet e o celular também podem ser recursos utilizados neste capítulo.
Contexto histórico	Faz uma breve referência histórica quando apresenta os tópicos de Fatorial e de Binômio de Newton.	Faz uma breve referência sobre a origem da Teoria das probabilidades que se relaciona a jogos de azar e cita alguns matemáticos famosos que se dedicaram ao estudo destes jogos, o que propiciou grande avanço no estudo das probabilidades.
ENEM	Apresenta 3 questões aplicadas no exame.	Apresenta 2 questões aplicadas no exame.

A visão geral do PNLD 2018 sobre o livro apresentado é que:

> O incentivo a que os estudantes elaborem problemas é um destaque na coleção. Ela também se caracteriza por apresentar uma considerável variedade de textos que possibilitam contextualizações e atividades interdisciplinares. No entanto, especialmente, na abertura dos capítulos, há conexões artificiais e pouco relacionadas aos temas abordados em seguida.
>
> Os conteúdos são, frequentemente, abordados com base em definições, atividades resolvidas e propostas. São feitas generalizações, mas de maneira rápida e sem o devido rigor.
>
> O Manual do Professor contém sugestões de atividades complementares, que podem enriquecer o trabalho docente em sala de aula, como o estudo das funções quadráticas com o uso do software Geogebra. Além disso, apresenta a dedução das equações das cônicas, o que complementa o Livro do Estudante.

1.2.2 Livro 2 – Coleção Matemática: Contexto & Aplicações

Figura 2



Fonte: https://www.google.com.br

A análise será feita no livro **Matemática: Contexto & Aplicações** – Volume 2, do autor Luiz Roberto Dante, da Editora Ática, que faz parte de uma coleção de 3 volumes. Neste volume, são apresentados na Unidade 4 os conteúdos de Análise Combinatória (Contagem) e Probabilidade.

Observa-se que este livro foi elaborado para ser utilizado na 2ª série, no entanto, de acordo com o Currículo Mínimo, os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade deverão ser trabalhados na 3ª série. Neste caso, para atender as demandas deste Currículo deverão ser utilizados 2 volumes da coleção na 3ª série.

A tabela seguinte abordará as principais observações feitas no **Livro 2** pela autora desta pesquisa. Com relação à análise da Unidade 4, que contém os capítulos: 9 – Análise Combinatória e 10 – Probabilidade, temos:

Conteúdo	**Análise Combinatória**	**Probabilidade**
Quantidade de páginas	29	33
Tópicos estudados no capítulo	• Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem • Permutações simples e fatorial de um número • Permutações com repetição • Arranjos simples • Combinações simples • Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamento • Números binomiais • Triângulo de Pascal ou Triângulo aritmético • Binômio de Newton	• Fenômenos aleatórios • Espaço amostral e evento • Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos • Cálculo de probabilidades • Definição teórica de probabilidade e consequências (Probabilidade condicional e Eventos independentes) • O método binomial • Aplicações de probabilidade à Genética

Ordem dos tópicos	Observa-se que a ordem dos tópicos apresentada é coerente com o conteúdo desenvolvido.	Observa-se que a ordem dos tópicos apresentada é coerente com o conteúdo desenvolvido.
Abertura do capítulo	A abertura desse capítulo traz uma imagem de um cadeado com senha, cuja senha é formada por uma combinação de letras, números e caracteres. O objetivo desta imagem e dar uma ideia e estabelecer uma relação com o assunto de Análise combinatória. Pode-se observar que há uma conexão da abertura do capítulo com o assunto a ser estudado.	A abertura desse capítulo traz uma imagem de vários tipos de dados, o objetivo, neste caso, é associar o lançamento dos dados a um experimento aleatório. Desta forma, pode-se associar direta ou indiretamente ao assunto que será estudado, que é Probabilidade.
Abordagem do conteúdo	No geral, a obra apresenta exemplos simples e logo, em seguida, formaliza a definição. O texto é simples e direto, sem muitos atrativos, tem muitos exercícios resolvidos, no entanto, observa-se que não há um incentivo a argumentação e a reflexão. Segue o modelo de explanação teórica, exercícios resolvidos e exercícios de fixação.	Para um primeiro contato com o assunto, a obra apresenta um texto cansativo e um pouco confuso. Poderia ter exemplos mais interessantes que abordassem os tópicos apresentados, de forma a dar uma maior leveza ao texto e ao conteúdo apresentado. A obra apresenta atividades envolvendo os jogos que aparecem com frequência quando se trabalha com probabilidade, como por exemplo, baralho, dados, mas também, apresenta atividades envolvendo aplicações da probabilidade na Biologia.
Atividades	Apresenta exercícios resolvidos com formas diferentes de resolver uma mesma questão, dispõe de uma quantidade razoável de exercícios para desenvolver as ideias e os conteúdos. Ao final da Unidade 4, o livro apresenta as seções Pensando no ENEM e Vestibulares de Norte a Sul, com questões que envolvem	Possui algumas questões contextualizadas interessantes relacionando o conteúdo apresentado com situações cotidianas ou outras áreas do conhecimento, como por exemplo a Genética, que é o ramo da Biologia que mais utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na Teoria das Probabilidades.

	algumas habilidades exploradas no ENEM e vestibulares de algumas regiões do país, cujo objetivo é aprofundar os conteúdos estudados.	No que se refere a quantidade de questões, observa-se que poderia ter uma maior quantidade de questões sobre o assunto abordado. Ao final da Unidade 4, o livro apresenta as seções Pensando no ENEM e Vestibulares de Norte a Sul, com questões que envolvem algumas habilidades exploradas no ENEM e vestibulares de algumas regiões do país, cujo objetivo é aprofundar os conteúdos estudados.
Tecnologia	Apresenta situações que a calculadora pode ser usada para verificação de resultados, correção de erros, etc., mas não há no capítulo sugestão de uso de nenhuma tecnologia.	Apresenta situações que a calculadora pode ser usada para verificação de resultados, correção de erros, etc., mas não há no capítulo sugestão de uso de nenhuma tecnologia.
Contexto histórico	Ao longo do capítulo apresenta textos que abordam fatos históricos e contextualizam alguns problemas de contagem utilizados antigamente.	No capítulo não apresenta referências históricas, mas no final da Unidade 4 apresenta um texto que fala de alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das probabilidades ao longo da História.
ENEM	Possui uma seção no final do livro, *Caiu no ENEM*, que apresenta questões aplicadas no exame referente à Unidade 4.	Possui uma seção no final do livro, *Caiu no ENEM*, que apresenta questões aplicadas no exame referente à Unidade 4.

A visão geral do PNLD 2018 sobre o livro apresentado é que:

> A apresentação dos conteúdos apoia-se em imagens e textos que buscam motivar os estudantes. O desenvolvimento de

conceitos e procedimentos é feito por meio de explanações teóricas, que incluem exemplos e resolução de exercícios. Em seguida, são propostas questões de fixação ou de aplicação.

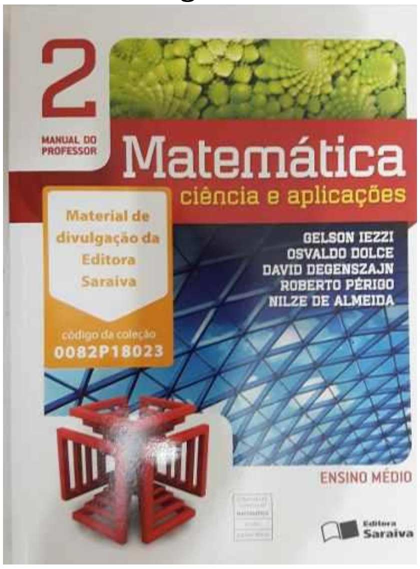
Embora essa abordagem possa limitar uma construção mais autônoma dos conhecimentos matemáticos, há questões que instigam a argumentação, a formulação de hipótese e as generalizações.

Encontram-se, também, boas articulações de conteúdos com situações da prática social, da própria Matemática, e de outras áreas do saber, em especial aquelas que compõem as Ciências da Natureza. O Manual do Professor contém discussões interessantes para a formação docente. Destacam-se, ainda, as sugestões relativas à história da Matemática, ao trabalho interdisciplinar e ao consumo responsável.

1.2.3 Livro 3 – Coleção Matemática: Ciência e Aplicações

A análise será feita no livro **Matemática: Ciência e Aplicações** – Volume 2, dos autores Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périgo e Nilze de Almeida, da Editora Saraiva, que faz parte de uma coleção de 3 volumes. Neste volume, são apresentados os conteúdos de Análise Combinatória (Contagem) e Probabilidade.

Figura 3



Fonte: https://www.google.com.br

Observa-se que este livro foi elaborado para ser utilizado na 2ª série, no entanto, de acordo com o Currículo Mínimo, os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade deverão ser trabalhados na 3ª série. Neste caso, para atender as demandas deste Currículo deverão ser utilizados 2 volumes da coleção na 3ª série.

A tabela seguinte abordará as principais observações feitas no **Livro 3** pela autora desta pesquisa. Com relação à análise do Capítulo 10 – Análise Combinatória e do Capítulo 11 – Probabilidade, temos:

Conteúdo	Análise Combinatória	Probabilidade
Quantidade de páginas	26	24
Tópicos estudados no capítulo	• Princípio Fundamental da Contagem (PFC) • Fatorial de um número natural • Agrupamentos simples: Permutações, Arranjos e combinações • Permutações com elementos repetidos	• Experimentos aleatórios • Espaço Amostral e Evento • Frequência relativa e probabilidade • Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis • Probabilidade da união de dois eventos • Probabilidade Condicional • Probabilidade da interseção de dois eventos • Eventos independentes
Ordem dos tópicos	Uma sugestão é que o tópico de Permutação Simples seja apresentado antes do Fatorial, acredita-se que facilitaria o entendimento do Fatorial.	Observa-se que a ordem dos tópicos apresentada é coerente com o conteúdo desenvolvido.
Abertura do capítulo	A abertura desse capítulo apresenta alguns problemas, como por exemplo, de quantas maneiras diferentes pode-se definir as chaves de seleções da primeira fase de uma Copa do Mundo de futebol? E depois já afirma que todas as questões apresentadas são problemas de contagem.	O capítulo não faz nenhuma introdução com exemplos, figuras e etc. para associar ao conteúdo que será estudado, já inicia o capítulo apresentando o que é um experimento aleatório.
Abordagem do conteúdo	Com relação ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC), a obra apresenta vários exemplos antes de apresentar a construção da generalização do conceito. Na representação das possibilidades, a obra apresenta o diagrama da árvore de possibilidades / diagrama da árvore e faz uma associação	Pode-se dizer que tem alguns tópicos que se iniciam com exemplos para depois formalizar a definição e outros que se iniciam com a definição e depois exemplos. Alguns tópicos apresentados no capítulo têm atividades resolvidas antes da lista de exercício. Possui

	interessante das possibilidades de escolha com pares ordenados e triplas ordenadas. Em relação aos outros tópicos, a obra segue apresentado a maioria deles da seguinte maneira: exemplo, definição e construção da generalização do conceito. Após a exposição do conteúdo de cada tópico, apresenta atividades resolvidas antes da lista de exercícios. No geral, o texto é simples e objetivo, proporcionando uma leitura mais leve. Observa-se ainda, ao longo do texto, que os autores estimulam os leitores a fazerem reflexões sobre o conteúdo estudado, seja um detalhe do texto, alguma propriedade ou alguma solução para um problema.	alguns exercícios que utilizam gráficos ou tabelas. A obra apresenta atividades envolvendo alguns jogos que aparecem com frequência quando se trabalha com probabilidade, como por exemplo, baralho e dados. Como aplicação da probabilidade, faz uma associação da matemática com o futebol e a loteria. No geral, o texto é simples, objetivo, possui figuras ilustrando algumas partes do mesmo, proporcionando uma leitura mais leve. Apresenta o conteúdo de forma bastante abrangente e procura estabelecer conexões do assunto estudado com situações que podem ser encontradas no cotidiano do aluno.
Atividades	Apresenta exercícios resolvidos, dispõe de uma quantidade razoável de exercícios para consolidar os conteúdos e conceitos abordados. Na lista de exercícios, tem algumas questões da OBMEP e apresenta apenas uma questão considerada “desafio”.	Apresenta exercícios resolvidos, dispõe de uma quantidade razoável de exercícios para consolidar os conteúdos e conceitos abordados. Na lista de exercícios, apresenta apenas uma questão considerada “desafio”.
Tecnologia	Apresenta situações que a calculadora pode ser usada para verificação de resultados, correção de erros, etc., mas não há no capítulo sugestão de uso de nenhuma tecnologia.	Apresenta situações que a calculadora pode ser usada para verificação de resultados, correção de erros, etc., mas não há no capítulo sugestão de uso de nenhuma tecnologia.
Contexto histórico	No capítulo não apresenta nenhuma referência histórica.	Faz uma referência muito sucinta sobre a origem da Teoria das probabilidades.

ENEM	Apresenta 1 questão aplicada no exame.	Não apresenta nenhuma questão do ENEM.

A visão geral do PNLD 2018 sobre o livro apresentado é que:

> Uma característica da obra é o estímulo ao desenvolvimento da argumentação em matemática. Incentiva-se, também, o estudo de inter-relações dessa área com outras disciplinas e com situações da vida cotidiana. São trabalhadas, igualmente, conexões significativas com história da Matemática. Há um equilíbrio razoável entre a exploração de noções intuitivas e a formalização dos conteúdos, embora por vezes a nomenclatura seja utilizada em excesso.
>
> O estudo das funções é bem desenvolvido, em geral, com equilíbrio e articulação entre as representações gráfica e algébrica. São exploradas conexões pertinentes com outros campos da matemática escolar e com diferentes áreas do saber, além de aplicações do conceito em situações do cotidiano.
>
> Encontram-se atividades que envolvem temas de grande relevância para a vida em sociedade. Mas as possibilidades que esses temas sejam incentivadores para a formação da cidadania não são bem exploradas. Os subsídios gerais e específicos oferecidos no Manual do Professor podem ser de grande valia para o trabalho do professor em sala de aula.

Capítulo 2 NOÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

> *A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano.*
>
> Pierre Simon Laplace

2.1 Um pouco da História

Figura 4 - Blaise Pascal

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal

Figura 5 - Pierre de Fermat

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

Alguns livros descrevem que o início da Teoria das Probabilidades se deu com Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido a curiosidade de um amigo de Pascal, o Chevalier de Méré, que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de dados. Já no que se refere à Análise Combinatória, o desenvolvimento da mesma ao longo da história deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados da Teoria das Probabilidades.

No entanto, segundo Morgado *et al* (1991), a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes. Considerando a atração que os jogos de azar sempre despertaram nos homens, não é de se espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas ou de dados tenham atraído a atenção de pessoas com mentes mais especulativas. Morgado cita, por exemplo, que na Divina Comédia, de Dante Alighieri (1265-1321), há uma referência a probabilidades em jogos de dados.

A primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades é o livro *De Ludo Aleae* (Sobre os jogos de Azar), de Jerônimo Cardano (1501-1576), publicado em 1663. Morgado acredita que o interesse de Cardano pelo assunto se deu devido à paixão do autor pelos jogos de azar.

Johannes Kepler (1571-1630) também fez algumas observações sobre probabilidades, em um livro publicado em 1606, *De Stella nova in pede Serpentarii*, em que estuda as diferentes opiniões sobre o aparecimento de uma estrela brilhante em 1604.

Já Galileu (1564-1642) preocupou-se com as probabilidades, estudando os jogos de dados para responder à pergunta de um amigo.

Apesar das investigações destes precursores, a Teoria das Probabilidades só começa a se desenvolver realmente a partir dos trabalhos de Pascal.

Christian Huygens (1629-1695) publicou em 1657 a primeira obra de Teoria das Probabilidades, o *De Ratiociniis in Ludo Aleae*.

De acordo com Morgado *et al* (1991), a Teoria das Probabilidades não despertou logo grande interesse entre os matemáticos que se seguiram a Pascal e Fermat, o interesse deles eram as investigações relativas ao cálculo, criado por Newton e Leibnitz. Contudo, logo se observou a utilidade da Teoria das Probabilidades para estudar situações como, por exemplo, taxas de mortalidade, prêmios de seguros e outras.

Podem ser citados outros matemáticos que se dedicaram aos estudos das probabilidades, tais como: Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Leonhard Euler (1707-1783), Jean-Baptiste D'Alembert (1717-1783) e Pierre Simon Laplace (1749-1827).

Figura 6 - Pierre Simon Laplace

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace

De Moivre, além das várias investigações sobre probabilidades, escreveu uma obra sobre o assunto que foi utilizada durante muito tempo, o *Doutrina do Acaso*, em que estão incluídos muitos de seus trabalhos. Em particular, ele desenvolve a teoria das sucessões recorrentes e a usa para resolver vários problemas de probabilidade.

Para Boyer (1974), a Teoria das Probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático.

A partir de 1774, Laplace escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités* de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis.

Mais recentemente, os nomes que aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria dos jogos, segundo Dante (2005), são Jules Henri Poincaré (1854-1912), Émile Borel (1871-1956) e John Von Neumann (1903-1957).

2.2 Análise Combinatória

A Análise Combinatória estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado evento sem, necessariamente, descrever todas as possibilidades e possui aplicação direta no cálculo das probabilidades.

2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo

Arthur resolveu ir ao cinema assistir um filme. No entanto, antes de entrar na sala de cinema, passou na lanchonete para escolher o lanche que iria consumir durante a sessão.

Figura 7

Fonte: http://www.historiadocinemabrasileiro.com.br/moviecom-boavista/

A lanchonete oferecia 3 tipos de comidas: pipoca salgada (PS), pipoca doce (PD) e batata frita (BF); e 4 tipos de bebidas: suco (S), refrigerante (R), água (A) e Milk-Shake (M).

De quantas maneiras diferentes Arthur poderá escolher seu lanche?

Para respondermos a esta pergunta, vamos escrever todas as possibilidades de lanches oferecidas pela lanchonete. Pode-se determinar tais possibilidades, por meio de um diagrama, onde na 1ª coluna, representaremos os possíveis tipos de comidas e na 2ª coluna, os possíveis tipos de bebidas.

1ª coluna **2ª coluna**

- Pipoca salgada (PS)
  - Suco (S) → Lanche 1
  - Refrigerante (R) → Lanche 2
  - Água (A) → Lanche 3
  - Milk-Shake (M) → Lanche 4

- Pipoca doce (PD)
  - Suco (S) → Lanche 5
  - Refrigerante (R) → Lanche 6
  - Água (A) → Lanche 7
  - Milk-Shake (M) → Lanche 8

- Batata frita (BF)
  - Suco (S) → Lanche 9
  - Refrigerante (R) → Lanche 10
  - Água (A) → Lanche 11
  - Milk-Shake (M) → Lanche 12

O diagrama construído é chamado **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore** e analisando as "ramificações" da árvore, obtemos todas as possíveis combinações de lanches, comida + bebida, oferecidas pela lanchonete.

Observa-se que, para escolher um lanche, o Arthur precisará realizar duas escolhas sucessivas. A primeira é a escolha do tipo de comida: há 3 possibilidades de fazer essa escolha. A segunda é a escolha do tipo de bebida: há 4 possibilidades de fazer essa escolha.

Desta forma, a realização da escolha do lanche pode ser feita da seguinte maneira:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Comidas}}}{\underline{\ 3\ }} \quad \text{x} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Bebidas}}}{\underline{\ 4\ }} \quad = \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lanches}}}{\underline{\ 12\ }}$$

Da árvore de possibilidades, temos as possíveis combinações de lanches.

$$(\mathrm{PS}, \mathrm{S}); (\mathrm{PS}, \mathrm{R}); (\mathrm{PS}, \mathrm{A}); (\mathrm{PS}, \mathrm{M})$$
$$(\mathrm{PD}, \mathrm{S}); (\mathrm{PD}, \mathrm{R}); (\mathrm{PD}, \mathrm{A}); (\mathrm{PD}, \mathrm{M})$$
$$(\mathrm{BF}, \mathrm{S}); (\mathrm{BF}, \mathrm{R}); (\mathrm{BF}, \mathrm{A}); (\mathrm{BF}, \mathrm{M})$$

Resposta: O total de maneiras diferentes que Arthur poderá escolher seu lanche é igual à 12.

- De acordo com o **Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo**, se uma escolha A pode ser feita de **a** maneiras diferentes, uma escolha B pode ser feita de **b** maneiras diferentes e uma escolha C pode ser feita de **c** maneiras diferentes, o número de maneiras diferentes de fazer a escolha A, seguida de B, seguida de C é:

$$\boxed{\mathbf{a.b.c}}$$

Exemplo 1: ***"Carros brasileiros terão placas do Mercosul a partir de setembro: Placas com o padrão do Mercosul deverão estar em todos os carros em até cinco anos.***

O padrão de placas de identificação de veículos dos países do Mercosul é notícia desde 2014. Ele já foi implantado por Argentina e Uruguai. Contudo, apenas agora o Brasil tem datas para adotar as novas placas.

Caberá ao órgão de trânsito de cada estado decidir quando as novas placas começarão a ser usadas. Mas a partir de 1º de setembro de 2018 todos os Detrans deverão fornecer as novas placas para automóveis novos, que passarem por transferência de município ou propriedade, ou que tiverem as placas substituídas.

Para os usados, a data limite para troca das placas é 31 de dezembro de 2023.
(**Fonte:** https://quatrorodas.abril.com.br/noticias/carros-brasileiros-terao-novas-placas-a-partir-de-setembro/)

"Os números e letras poderão ser dispostos de maneira aleatória. Na Argentina, por exemplo, adotou-se um padrão "LL NNN LL" (sendo L para letras e N para números), a fim de se evitar formação de palavras. No caso do Brasil o padrão inicial será "LLL NL NN" para carros e "LLL NN LN" para motos. O último dígito provavelmente

continuará a ser sempre um número, devido à aplicação do rodízio veicular na cidade de São Paulo (SP).”

(**Fonte:** https://carros.uol.com.br/noticias/redacao/2018/05/24/nova-placa-mercosul-vai-atrasar-de-novo-no-brasil-prazo-agora-e-dezembro.htm)

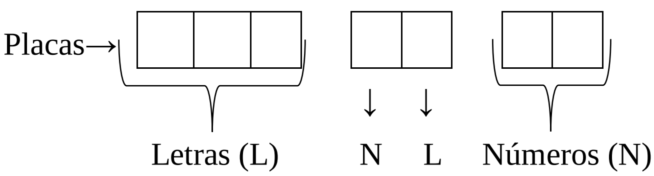
De acordo com a Resolução n° 729/2018 do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN), as placas de identificação de veículos no Brasil deverão ser fabricadas com 7 caracteres alfanuméricos[2] estampados em alto relevo, com combinação aleatória, a ser fornecida e controlada pelo Departamento Nacional de Trânsito (DENATRAN), com o último caractere obrigatoriamente numeral e com distribuição equânime[3].

Figura 8

Fonte: https://quatrorodas.abril.com.br/noticias/carros-brasileiros-terao-novas-placas-a-partir-de-setembro/

Suponhamos que a combinação aleatória seja composta de 4 letras, dentre a 26 letras do alfabeto e 3 números, do sistema decimal e considere o padrão LLL NL NN apresentado na placa para carros, L para letras e N para números, conforme mostra a figura. Quantas placas poderão ser fabricadas com este novo modelo?

<u>Solução</u>:



---

[2] **Alfanumérico –** 1. Que combina letras e algarismos para formar símbolo(s) codificado(s) ou identificar coisas ou pessoas. 2. Diz-se de sinal (letra ou algarismo) pertencente a sistema alfanumérico.

[3] **Equânime –** Que tem ou denota equanimidade (moderação).

O alfabeto possui 26 letras que poderão ser repetidas e o sistema decimal possui 10 algarismos que também poderão ser repetidos.

Placas→							
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	26	26	26	10	26	10	10

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$26\ x\ 26\ x\ 26\ x\ 10\ x\ 26\ x\ 10\ x\ 10\ = 26^4\ \ x\ 10^3\ =\ 456.976.000\ placas$$

Resposta: Poderão ser fabricadas com este novo modelo 456. 976.000 placas.

- ✓ Imagine, agora, que as placas não possam ter letras e números repetidos. Neste caso, quantas placas poderão ser fabricadas?

Solução:

Placas→							
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	26	25	24	10	23	9	8

Como não podemos repetir as letras e os números, teremos: para a 1ª letra, 26 maneiras de escolhê-la, para a 2ª letra, 25 maneiras, para a 3ª letra, 24 maneiras e para a 4ª letra, 23 maneiras. Já para os números, teremos: 10 maneiras de escolher o 1º, 9 maneiras de escolher o 2º e 8 maneiras de escolher o 3º.

Pelo PFC, obtemos:

$$26\ x\ 25\ x\ 24\ x\ 10\ x\ 23\ x\ 9\ x\ 8\ =\ 258.336.000\ placas$$

Resposta: Neste caso, poderão ser fabricadas 258.336.000 placas.

Neste exemplo, pode-se observar a importância do Princípio Fundamental da Contagem, pois os cálculos envolvem números grandes e etapas com muitas opções de escolha, o que tornaria o problema inviável de resolver sem esta ferramenta de contagem.

Figura 9

Fonte: https://mundodalogica.wordpress.com

Exemplo 2: Ao lançar uma moeda três vezes seguidas e observar a face voltada para cima. Quantos e quais são os possíveis resultados?

Solução:

Considere as faces da moeda: cara (K) e coroa (C).

Para saber quantos são os possíveis resultados, pode-se utilizar o PFC.

No primeiro lançamento, temos 2 possibilidades, ou seja, sair uma cara ou sair uma coroa, no segundo lançamento, também temos 2 possibilidades e no terceiro lançamento, 2 possibilidades. Logo, temos:

$$2 \ x \ 2 \ x \ 2 \ = \ 8 \, resultados$$

Agora, para saber quais são os possíveis resultados, pode-se construir a árvore de possibilidades.

1º Lançamento	**2º Lançamento**	**3º Lançamento**		**Possíveis Resultados**
	K	K	→	KKK
• K		C	→	KKC
	C	K	→	KCK
		C	→	KCC
	K	K	→	CKK
• C		C	→	CKC
	C	K	→	CCK
		C	→	CCC

Resposta: São 8 possíveis resultados, a saber: (KKK), (KKC), (KCK), (KCC), (CKK), (CKC), (CCK) e (CCC).

Observa-se que neste exemplo poderíamos ter utilizado apenas a árvore, pois a mesma já nos forneceria a resposta para as duas perguntas. Mas, se tivermos um problema com um número muito grande de lançamentos, o PFC será um instrumento mais adequado para utilizarmos no cálculo da quantidade dos possíveis resultados.

Exemplo 3: O Banco Minerva possui um cofre cuja senha é formada por uma sequência de cinco algarismos distintos. Supondo que o gerente do banco esqueceu a senha e considerando que o terceiro algarismo da mesma é o dobro do primeiro e o quinto algarismo é o triplo do primeiro.

Quantas tentativas o gerente terá que realizar, no máximo, para acertar a senha?

Figura 10

Fonte: https://www.walmart.com.br/

<u>Solução</u>:

Do enunciado do problema, temos que a senha é formada por cinco algarismos distintos, sendo o terceiro algarismo, o dobro do primeiro e o quinto algarismo, o triplo do primeiro.

Desta forma, utilizando os algarismos do sistema decimal, $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, vamos analisar cada caso.

Algarismo→	1º	2º	3º	4º	5º
Senha→					

1ºcaso) O primeiro algarismo não pode ser zero, porque o terceiro e o quinto seriam zero e do enunciado temos que os algarismos devem ser distintos.

2º caso) O primeiro algarismo sendo 1, o terceiro algarismo será 2 e o quinto algarismo será 3.

Algarismo→	1º	2º	3º	4º	5º
Senha→	**1**		**2**		**3**
		↓		↓	
		7		6	

Desta forma, restam 7 opções para o segundo algarismo e 6 opções para o quarto algarismo. Do PFC, obtemos:

$$7\ x\ 6\ =\ 42\ senhas$$

3º caso) O primeiro algarismo sendo 2, o terceiro algarismo será 4 e o quinto algarismo será 6.

Algarismo→	1º	2º	3º	4º	5º
Senha→	**2**		**4**		**6**
		↓ 7		↓ 6	

Neste caso, também restam 7 opções para o segundo algarismo e 6 opções para o quarto algarismo.

$$7\ x\ 6\ =\ 42\ senhas$$

4º caso) O primeiro algarismo sendo 3, o terceiro algarismo será 6 e o quinto algarismo será 9.

Algarismo→	1º	2º	3º	4º	5º
Senha→	**3**		**6**		**9**
		↓ 7		↓ 6	

Restando 7 opções para o segundo algarismo e 6 opções para o quarto algarismo.

$$7\ x\ 6\ =\ 42\ senhas$$

Observe que este caso esgota as possibilidades, visto que o quinto algarismo é 9, e não tem possibilidade de colocar um número maior do que 9.

Agora, basta somar todos os casos para sabermos de quantas maneiras podem ser formadas as senhas.

$$42\ +\ 42\ +\ 42\ =\ 126\ senhas$$

Resposta: O gerente terá que fazer, no máximo, 126 tentativas para acertar a senha.

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser considerado a ideia básica para resolução de problemas que envolvem contagem dos elementos ou cálculo dos resultados possíveis.

No entanto, existem alguns destes tipos de problemas que aparecem com frequência, mas possuem características específicas de se organizarem as contagens. Estudaremos a seguir algumas destas técnicas de contagem.

2.2.2 Permutação Simples

Considerando os algarismos 2, 4 e 7, quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com eles?

Algarismo→	1º	2º	3º
Número→			
	↓	↓	↓
	3	2	1

Observe que, de acordo com o enunciado, não se pode repetir os algarismos. Desta forma, para o 1º algarismo, temos 3 opções; para o 2º algarismo, temos 2 opções e para o 3º algarismo, temos 1 opção.

Neste caso, utilizando o PFC, obtemos:

$$3\ x\ 2\ x\ 1\ =\ 6\ números$$

- Construindo a árvore de possibilidades

1º Algarismo	**2º Algarismo**	**3º Algarismo**	**Nº formado**
• 2	4	7	→ 247
	7	4	→ 274
• 4	2	7	→ 427
	7	2	→ 472
• 7	2	4	→ 724
	4	2	→ 742

Os números formados são: 247, 274, 427, 472, 724 e 742.

Resposta: Podem ser formados 6 números com algarismos distintos.

No problema anterior, os números formados utilizam todos os algarismos apresentados no problema, realizando apenas uma troca/permutação dos algarismos entre si. Essa troca é chamada de permutação simples.

- **Permutação Simples** é o número de ordenações possíveis de **n** elementos distintos.

Observa-se que **a ordem dos elementos é relevante**, visto que no problema, por exemplo, os números formados, 247 e 472, diferem um do outro apenas pela ordem dos elementos.

- Dados **n** elementos distintos, pelo Princípio Fundamental da Contagem pode-se escolher de **n** modos o elemento que ocupará o 1º lugar da permutação, de **n – 1** modos o elemento que ocupará o 2 º lugar, de **n – 2** modos o elemento que ocupará o 3º lugar e assim sucessivamente até que a escolha do último lugar possa ser feita de apenas de 1 modo.
  Desta forma, temos que o número de ordenações possíveis de **n** elementos distintos é:

$$\boxed{\boldsymbol{P_n = n.(n-1).(n-2).\ldots.1 = n!}}$$

Exemplo 4: Considere a palavra PROFMAT. Quantos são os seus anagramas? (Um **anagrama** é qualquer permutação das letras de uma palavra, de modo que se forme uma palavra com ou sem sentido.)

Solução:

Observe que cada anagrama é uma permutação das letras P, R, O, F, M, A, T.

Como a palavra possui 7 letras distintas, utilizando a permutação simples temos:

$$P_7 = 7 \, x \, 6 \, x \, 5 \, x \, 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1 = 5.040$$

Resposta: A palavra PROFMAT possui 5.040 anagramas.

Exemplo 5: Num almoço da Família Dias, os nove irmãos resolveram tirar uma fotografia. Supondo que os irmãos ficarão lado a lado para a foto, responda:

a) de quantas maneiras eles poderão ser dispostos na fotografia?
b) de quantas maneiras eles poderão ser dispostos na fotografia, se os irmãos Adilson e Aloísio querem aparecer juntos?
c) e se Adilson e Aloísio não quisessem aparecer juntos, de quantas maneiras poderiam ser dispostos para a foto?

__Solução__:

a) Do enunciado temos que, os nove irmãos participarão da fotografia, ficando lado a lado, desta forma, podemos utilizar a permutação simples para calcular de quantas maneiras eles poderão ser dispostos.

$$P_9 = 9 \, x \, 8 \, x \, 7 \, x \, 6 \, x \, 5 \, x \, 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1 = 362.880$$

Resposta: Eles poderão ser dispostos na fotografia de 362.880 maneiras.

b) Para determinar o número de maneiras em que Adilson e Aloísio poderão aparecem juntos na foto, devemos considerá-los como **uma só pessoa**, que irá permutar com as sete restantes, ou seja, para realizarmos a permutação, consideraremos que temos oito pessoas. Logo, obtemos:

$$P_8 = 8 \, x \, 7 \, x \, 6 \, x \, 5 \, x \, 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1 = 40.320$$

No entanto, pode ser observado que para cada uma dessas maneiras, Adilson e Aloísio podem trocar de lugar entre si, ou seja, temos:

$$P_2 = 2 \, x \, 1 = 2$$

Daí, temos que o número de maneiras em que eles aparecem juntos é igual a:

$$2 \, x \, 40.320 = 80.640$$

Resposta: Adilson e Aloísio poderão ser dispostos juntos na fotografia de 80.640 maneiras.

c) Como já calculamos o número de maneiras em que Adilson e Aloísio podem aparecer juntos na foto, para determinar o número de maneiras em que eles **não** aparecem juntos, basta tirar do total de maneiras de dispor os irmãos a quantidade de maneiras em que eles aparecem juntos.

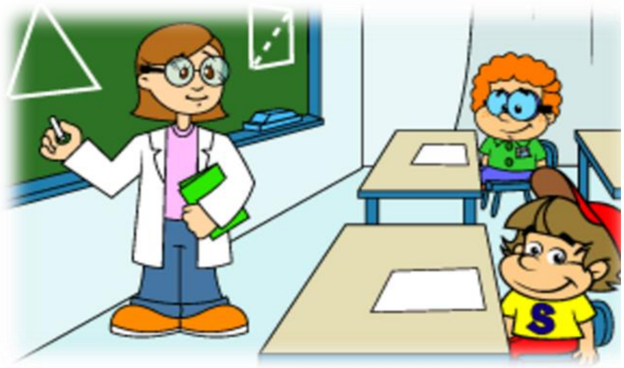
$$362.880 - 80.640 = 282.240$$

Resposta: Se Adilson e Aloísio não quisessem aparecer juntos, poderiam ser dispostos na fotografia de 282.240 maneiras.

2.2.3 Combinação Simples

Durante a aula de matemática, a professora pediu aos alunos que comprassem 3 cadernos de cores diferentes e os trouxessem na próxima aula. Mike foi à papelaria para comprar os seus cadernos, a papelaria tinha para vender 5 cadernos de cores diferentes: vermelho (V), azul (A), branco (B), preto (P) e laranja (L).

Figura 11



Fonte: https://www.smartkids.com.br/trabalho/volta-as-aulas

De quantas maneiras distintas Mike poderá escolher os seus cadernos?

Primeiro, vamos escrever todas as maneiras possíveis que Mike pode escolher 3 cadernos diferentes dentre os 5 cadernos diferentes disponíveis na papelaria.

Observa-se, por exemplo, que se Mike escolher os cadernos: vermelho (V), azul (A) e branco (B) é o mesmo que ele escolher os cadernos: azul (A), branco (B) e vermelho (V), ou seja, a ordem em que Mike escolher os cadernos não importa.

Logo, Mike tem as seguintes possibilidades de escolha:

$$(V, A, B); (V, A, P); (V, A, L); (V, B, P); (V, B, L)$$
$$(V, P, L); (A, B, P); (A, B, L); (A, P, L); (B, P, L)$$

Se utilizássemos o PFC para contar o número de possibilidades de escolher os 3 cadernos, obteríamos:

$$5\ x\ 4\ x\ 3\ =\ 60\ possibilidades,$$

que não é correto, pois a ordem neste caso não é importante.

Para resolver este problema, verificamos que para calcular o total de possibilidades para escolher 3 cadernos diferentes dentre os 5 cadernos diferentes, basta dividir o total de possibilidades de escolher os 3 cadernos (utilizando o PFC) pelo número de permutações dos 3 objetos, que passarão a formar um único elemento do conjunto.

$$C_5^3\ =\ \frac{5x4x3}{P_3} = \frac{60}{3!} = \frac{60}{3x2x1} =\ 10$$

Resposta: Mike poderá escolher seus cadernos de 10 maneiras distintas.

No problema apresentado, se fossem escolhidos, por exemplo, os cadernos: vermelho (V), azul (A) e branco (B), todas as permutações destes cadernos seriam: $(V, A, B); (V, B, A); (A, B, V); (A, V, B); (B, V, A); (B, A, V)$.

Assim, teríamos os mesmos cadernos sendo escolhido em cada caso, consequentemente, as seis permutações seriam “ equivalentes entre si”, correspondendo a uma única combinação de cadernos, determinando a escolha dos mesmos cadernos.

De modo geral, quando qualquer permutação de uma determinada sequência ordenada dá origem a uma única combinação, dizemos que é uma combinação simples.

- **Combinação Simples** é o número de possibilidades de escolhermos **p** elementos distintos dentre **n** elementos distintos. Cada um desses agrupamentos se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos.

A ordem dos elementos não é relevante.

Genericamente, a combinação de **n** elementos distintos tomados **p** a **p**, é dada por:

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Podem ser utilizadas também as notações $C_{n,p}$ e $\binom{n}{p}$ para denotar a combinação simples de **n** elementos distintos tomados **p** a **p**.

Exemplo 6: Considere um baralho comum de 52 cartas. Suponhamos que para começar um determinado jogo, devam ser distribuídas 5 cartas para o jogador. De quantas maneiras distintas o jogador pode receber estas cartas?

Solução:

Do enunciado temos que, o baralho possui 52 cartas distintas e a ordem em que as cartas serão distribuídas não é relevante, então podemos utilizar a combinação simples para calcular as possíveis maneiras de receber as 5 cartas.

Basta fazer a combinação de 52 elementos tomados 5 a 5.

$$C_{52}^5 = \frac{52!}{5!\,(52-5)!} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52x51x50x49x48x\cancel{47!}}{5x4x3x2x1x\cancel{47!}} = \frac{311.875.200}{120} = 2.598.960$$

Resposta: O jogador pode receber as cartas de 2.598.960 maneiras distintas.

Neste exemplo, verificamos que se tivéssemos que escrever todas as combinações simples do jogador receber as 5 cartas dentre as 52 cartas distintas e depois contá-las para saber a quantidade de maneiras possíveis, teríamos muito trabalho, porque o número de combinações é muito grande, por isso é muito importante o conhecimento das diversas técnicas de contagem que auxiliam na resolução dos vários problemas de combinatória.

Exemplo 7: *"Greve mostra força e gera impacto em abastecimento e transportes de pelo menos 15 Estados, mais o Distrito Federal. Os efeitos a essa altura incluem redução de frotas de ônibus, falta de combustíveis e disparada de preços em postos de gasolina, cancelamento de aulas em universidades, voos ameaçados por falta de* *combustível, prateleiras vazias em supermercados e centros de abastecimento e a interrupção da produção em fábricas. A pauta inicial dos grevistas, que estava concentrada em questões econômicas, como o custo do óleo diesel e dos fretes para a categoria, é ampliada e o discurso anticorrupção, que inclui vozes em apoio a uma "intervenção militar", ganha força."*

(**Fonte:**https://economia.uol.com.br/noticias/bbc/2018/05/30/greve-dos-caminhoneiros-a-cronologia-dos-10-dias-que-pararam-o-brasil.htm)

Supondo que para negociar o fim da greve dos caminhoneiros com o governo federal, os manifestantes decidiram formar uma comissão de 5 membros, a partir de um grupo de 10 caminhoneiros e 5 diretores sindicais. A comissão deverá ser composta por 3 representantes dos caminhoneiros e 2 representantes dos diretores sindicais. Quantas comissões diferentes poderão ser formadas?

Solução:

Neste problema, observa-se que a ordem de escolher os integrantes da comissão não é relevante, o que diferenciará as comissões serão os integrantes da mesma serem distintos, logo temos um problema envolvendo combinação simples.

Dispomos de 10 caminhoneiros e 5 diretores sindicais, dos 10 caminhoneiros, vamos escolher 3 e dos 5 diretores, vamos escolher 2.

Fazendo a combinação simples em cada caso, obtemos o total de possibilidades de escolher os 3 caminhoneiros e escolher os 2 diretores.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10x9x8x\cancel{7}!}{3x2x1x\cancel{7}!} = \frac{720}{6} = 120$$

$$C_{5}^{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5x4x\cancel{3}!}{2x1x\cancel{3}!} = \frac{20}{2} = 10$$

Desta forma, para obtermos o total de comissões basta multiplicar as possibilidades de escolher os caminhoneiros pela possibilidade de escolher os diretores.

$$C_{10}^{3} \text{ x } C_{5}^{2} = 120x10 = 1.200 \text{ comissões}$$

Resposta: Poderão ser formadas 1.200 comissões diferentes.

Figura 12

Fonte: http://asleyravel.blogspot.com/2012/07/locadora-central.html

Exemplo 8: A locadora *Final Feliz* tem à disposição dos seus sócios 16 filmes de romance e 4 filmes de suspense. De quantas formas a locadora poderá alugar 3 filmes de modo que:

a) todos sejam filmes de romance?

b) todos sejam filmes de suspense?

c) pelo menos um filme romântico seja escolhido?

<u>**Solução**</u>**:**

Como a ordem de escolher o filme não é importante, temos um problema de combinação simples.

a) Se todos os 3 filmes devem ser de romance, temos que escolher 3 filmes dos 16 de romance e nenhum filme de suspense.

$$C_{16}^{3} x\, C_{4}^{0} = \frac{16!}{3!\,(16-3)!} x \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{16!}{3!\,13!} x \frac{4!}{4!} = \frac{16x15x14x\cancel{13}!}{3x2x1x\cancel{13}!} x\, 1 = \frac{3.360}{6}$$
$$= 560$$

Resposta: Poderá alugar de 560 maneiras.

b) Se todos os 3 filmes devem ser de suspense, temos que escolher 3 filmes dos 4 de suspense e nenhum filme de romance.

$$C_{4}^{3} x\, C_{16}^{0} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} x \frac{16!}{0!\,(16-0)!} = \frac{4!}{3!\,1!} x \frac{16!}{16!} = \frac{4x\cancel{3}!}{\cancel{3!}x1} x\, 1 = 4$$

Resposta: Poderá alugar de 4 maneiras.

c) Se dos 3 filmes alugados, pelo menos 1 deve ser filme romântico, podemos fazer de duas maneiras.

- Calcular todas as combinações possíveis de escolher 3 filmes sem restrição e subtrair da combinação de não ter nenhum filme de romance.

  Para calcular todas as combinações de escolher os 3 filmes sem restrição, vamos usar o total de 20 filmes (16 de romance e 4 de suspense) e escolher 3 filmes.

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{20x19x18x\cancel{17}!}{3x2x1x\cancel{17}!} = \frac{6.840}{6} = 1.140\ maneiras$$

Daí e do item **b)**, obtemos:

$$C_{20}^{3} - C_{4}^{3}\text{x}\,C_{16}^{0} = 1.140 - 4 = 1.136 \text{ maneiras}$$

- Outra forma de fazer, é fazer a análise dos casos:

  1º caso) escolher 1 filme de romance e 2 filmes de suspense.

$$C_{16}^{1}x\,C_{4}^{2} = \frac{16!}{1!\,(16-1)!}x\,\frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{16!}{1!\,15!}x\,\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{16x\cancel{15}!}{1x\cancel{15}!}x\,\frac{4x3x\cancel{2}!}{2x1x\cancel{2}!} = \frac{192}{2}$$
$$= 96\ maneiras$$

2º caso) escolher 2 filmes de romance e 1 filme de suspense.

$$C_{16}^{2}x\,C_{4}^{1} = \frac{16!}{2!\,(16-2)!}x\,\frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{16!}{2!\,14!}x\,\frac{4!}{1!\,3!} = \frac{16x15x\cancel{14}!}{2x\cancel{14}!}x\,\frac{4x\cancel{3}!}{1x\cancel{3}!} = \frac{960}{2}$$
$$= 480\ maneiras$$

3º caso) escolher 3 filmes de romance e nenhum de suspense.

Idem item **a)**

$$C_{16}^{3}\text{ x }C_{4}^{0} = 560\ maneiras$$

Agora, basta somar o resultado dos 3 casos:

$$96 + 480 + 560 = 1.136 \text{ maneiras}$$

Resposta: A locadora poderá alugar 3 filmes, de modo que pelo menos um filme romântico seja escolhido, de 1.136 maneiras.

Nos exemplos apresentados neste capítulo, verificamos que para resolver problemas de combinatória devemos adotar algumas estratégias importantes, que segundo Morgado e Carvalho (2015), são as seguintes:

1) ***Postura.*** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

2) ***Divisão.*** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.

3) ***Não adiar dificuldades.*** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. Postergá-la só serve para causar problemas.

2.3 Probabilidade

Pode-se dizer que o estudo da probabilidade foi impulsionado pelo interesse nos jogos de azar, no entanto, a aplicação desta teoria tem grande importância em outras áreas, a saber: Biologia (principalmente na Genética), Economia, Administração, Política, dentre outras.

2.3.1 Experimento aleatório

Considere os experimentos a seguir:

1) Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.
2) Jogar um dado e conferir o número que saiu.
3) De uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 7 bolas brancas, retirar 1 bola e verificar sua cor.

No **experimento 1**, observa-se que ao lançar uma moeda, a face voltada para cima pode ser cara ou coroa.

No **experimento 2**, observa-se que ao jogar um dado, pode sair o número 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

No **experimento 3**, observa-se que ao retirar 1 bola da urna, a cor da bola pode ser: vermelha, azul ou branca.

Se repetirmos estes experimentos várias vezes, sob as mesmas condições, não apresentarão os mesmos resultados.

- Experimentos como esses são chamados de **experimentos aleatórios**, ou seja, repetidos em condições idênticas, mostram diferentes resultados.

De acordo com Giovanni e Bonjorno (2005), pode-se dizer que um experimento aleatório apresenta as seguintes características:

- pode se repetir várias vezes nas mesmas condições;
- é conhecido o conjunto de todos os resultados possíveis;
- não se pode prever o resultado.

Assim, como não sabemos o resultado exato, precisamos descobrir uma maneira de analisar as possibilidades de ocorrência de cada resultado do experimento aleatório.

Por isso, segundo Dante (2005), a Teoria das probabilidades é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

2.3.2 Espaço amostral

- O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** e este conjunto será representado por **S**. O número de elementos do espaço amostral será denotado por $\mathbf{n}(\mathbf{S})$.

Nos experimentos apresentados, anteriormente, temos os seguintes espaços amostrais:

Experimento 1 → $S = \{cara, coroa\}$
Experimento 2 → $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
Experimento 3 → $S = \{vermelha, azul, branca\}$

2.3.3 Evento

- **Evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral (S)de um experimento aleatório.

Se analisarmos o **experimento 2**, jogar um dado e conferir o número que saiu, podemos observar alguns eventos a seguir:

A: sair um número ímpar → $A = \{1,3,5\}$
B: sair um número primo par → $B = \{2\}$
C: sair um número maior que 6 → $C = \{\ \}$
D: sair um número par ou ímpar → $D = \{1,2,3,4,5,6\}$

Pode-se dizer que:

- se um evento coincide com o espaço amostral (S) é chamado de **evento certo**.
  Ex.: Evento D; sair um número par ou ímpar.

- se um evento é vazio, $\{\ \}$ ou $\emptyset$, ele é chamado de **evento impossível**.
  Ex.: Evento C; sair um número maior que 6.

- todo subconjunto unitário de S é chamado de **evento simples** ou **elementar**.
  Ex.: Evento B; sair um número primo par.

2.3.4 Probabilidade de um evento

- Considere um experimento aleatório, com espaço amostral (S) finito e equiprovável[4], **a probabilidade de ocorrer um evento A,** $A \subset S$, indicada por $P(A)$, é dada por:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}} = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

Observações:

i) Se o evento A é vazio, $A = \emptyset$, então $P(A) = 0$.
ii) Se o evento A é igual ao espaço amostral, $A = S$, então $P(A) = 1$.
iii) A probabilidade de ocorrer um evento A qualquer é no mínimo igual a zero e no máximo igual a 1, isto é,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

iv) A probabilidade do evento complementar $(\bar{A})$ é dada por:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Exemplo 9: Na aula de matemática, a professora propôs uma atividade (experimento) que consistia em lançar 1 moeda, duas vezes, e observar as faces voltadas para cima.

Após a realização da experiência, perguntou aos alunos qual seria o espaço amostral desse experimento?

Solução:

Para saber quais são os possíveis resultados do experimento, podemos construir a árvore de possibilidades, onde: cara (K) e coroa (C).

[4] **Equiprovável -** Todos os elementos têm a mesma chance de ocorrer.

1º Lançamento	**2º Lançamento**		**Possíveis Resultados**
• K	K	→	KK
	C	→	KC
• C	K	→	CK
	C	→	CC

Resposta: O espaço amostral é $S = \{KK, KC, CK, CC\}$.

Dando continuidade à atividade, a professora pediu aos alunos que determinassem os eventos adiante e calculassem suas respectivas probabilidades.

a) A: sair cara no 1º lançamento.

b) B: sair 2 coroas.

c) C: sair cara em pelo menos um dos lançamentos.

<u>**Solução**</u>**:**

Do experimento, temos que o espaço amostral possui 4 elementos, ou seja, $n(S) = 4$.

a) Temos que o evento A é igual a:

$A = \{KK, KC\}$

Logo, o número de elementos de A é igual a:

$n(A) = 2$

Assim, a probabilidade do evento A é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Resposta: A probabilidade de sair cara no 1º lançamento é igual a 50%.

b) Temos que o evento B é igual a:

$A = \{CC\}$

Logo, o número de elementos de B é igual a:

$n(B) = 1$

Assim, a probabilidade do evento B é:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Resposta: A probabilidade de sair 2 coroas é igual a 25%.

c) Temos que o evento C é igual a:

$A = \{KK, KC, CK\}$

Logo, o número de elementos de C é igual a:

$n(C) = 3$

Assim, a probabilidade do evento C é:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{4} = 75\%$$

Resposta: A probabilidade de sair cara, em pelo menos um dos lançamentos, é igual a 75%.

Exemplo 10: Num baralho de 52 cartas, são retiradas 2 cartas ao mesmo tempo, qual é a probabilidade de sair dois valetes?

Figura 13

Fonte: http://www.ring108.org/2015/10/17/scuola-della-magia-35/

<u>Solução</u>:

Primeiro vamos identificar os dados apresentados no problema.

- Experimento: retirar 2 cartas, ao mesmo tempo, de um baralho de 52 cartas.

- Espaço amostral: Neste caso, para determinar o número de elementos do espaço amostral, temos que calcular todas as possíveis maneiras de se retirar 2 cartas no baralho de 52 cartas. Como a ordem de retirada das cartas não é importante, pois as duas são retiradas ao mesmo tempo, podemos utilizar a combinação simples para realizar este cálculo.

$$C_{52}^{2} = \frac{52!}{2!\,(52-2)!} = \frac{52!}{2!\,50!} = \frac{52x51x\cancel{50!}}{2x1x\cancel{50!}} = \frac{2.652}{2} = 1.326$$

Logo, o número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n(S)} = 1.326$.

- Evento: Chamaremos de evento A, o evento sair dois valetes que é o que queremos determinar a probabilidade.
  Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 2 valetes dentre 4 valetes de naipes diferentes. Utilizando a combinação simples, obtemos:

$$C_{4}^{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4x3x\cancel{2!}}{2x1x\cancel{2!}} = \frac{12}{2} = 6$$

Logo, o número de elementos do evento A é $\mathrm{n(A)} = 6$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento A é:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{6}{1.326} = \frac{1}{221}$$

Resposta: A probabilidade de sair dois valetes é igual a $\frac{1}{221}$.

Neste exemplo, observa-se que a maior dificuldade que podemos encontrar no cálculo da probabilidade é realizar a contagem do número de elementos do espaço amostral e do número de elementos do evento, por isso é muito importante saber identificar os dados apresentados no enunciado do problema, para saber qual a técnica de contagem mais adequada a ser utilizada.

Exemplo 11: Bia tem uma gaveta com meias de várias cores, uma dessas meias foi retirada da gaveta. A probabilidade de ter sido retirada uma meia azul é $\frac{5}{33}$. Qual a probabilidade de ter sido retirada uma meia que não seja azul?

Figura 14

Fonte: https://noticias.r7.com/cidades/folha-vitoria/tem-muitas-meias-em-casa-campanha-recolhe-pares-para-doacao-no-es-veja-como-participar-26052017

Solução:

Considere que o evento A é retirar uma meia azul. Do problema, temos que a probabilidade de ter sido retirada uma meia azul é $P(A) = \frac{5}{33}$.

Como queremos saber a probabilidade de ter sido retirada uma meia que não seja azul, ou seja, queremos calcular a probabilidade do evento complementar, $P(\bar{A})$.

Assim, temos que:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{33}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{33 - 5}{33}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{28}{33}$$

Resposta: A probabilidade de ter sido retirada uma meia que não era azul é igual a $\frac{28}{33}$.

2.3.5 Probabilidade condicional

Uma pesquisa foi realizada com 160 alunos da Academia *Corpo Sarado*, o objetivo do estudo era saber como os entrevistados se locomoviam para chegar à academia.

A tabela a seguir mostra a distribuição de acordo com as respostas dos entrevistados.

	Homens	**Mulheres**	**Total**
A pé	26	11	37
Carro	45	23	68
Ônibus	10	16	26
Outros	19	10	29
Total	100	60	160

Supondo que escolhemos um dos alunos ao acaso e sabendo que o aluno escolhido é uma mulher, qual a probabilidade de que ela vá para academia de carro?

Solução:

Inicialmente, vamos observar os dados fornecidos pelo problema. Do enunciado, já obtemos a informação que o aluno escolhido é uma mulher.

Assim, temos que os casos possíveis para este experimento são iguais a 60. E das 60 alunas mulheres, 23 delas vão para academia de carro.

Agora, podemos calcular a probabilidade solicitada reduzindo o espaço amostral.

$$P = \frac{23}{60}$$

Esse valor encontrado é a probabilidade de o aluno escolhido ir para academia de carro, sabendo que esse aluno é uma mulher.

Este tipo de probabilidade é chamado de Probabilidade condicional e neste exemplo, podemos denotar por:

$$\text{P(aluno ir de carro|mulher)}$$

Leitura: Probabilidade de o aluno ir de carro **dado que** ou **sabendo que** o aluno é uma mulher.

Segundo Iezzi *et al* (2004), problemas como esse podem ser resolvidos reduzindo o espaço amostral a partir de uma informação parcial do resultado do experimento e calculando a probabilidade nesse novo espaço amostral.

Resumindo, teríamos que:

$$\text{P(aluno ir de carro|mulher)} = \frac{\text{P(aluno ir de carro} \cap \text{mulher)}}{P(mulher)}$$

- De modo geral, dados dois eventos A e B, a **probabilidade condicional** de ocorrer um evento **A** sabendo que já ocorreu o evento **B** é igual a:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{P(A|B)} = \dfrac{\text{P(A} \cap \text{B)}}{P(B)} \\[2ex] \text{P(B)} \neq 0 \end{array}}$$

Utilizando a fórmula para calcular a probabilidade do exemplo, teríamos:

$$\text{P(aluno ir de carro|mulher)} = \frac{\text{P(aluno ir de carro} \cap \text{mulher)}}{P(mulher)} = \frac{\frac{23}{160}}{\frac{60}{160}} = \frac{23}{60}$$

Resposta: A probabilidade de o aluno escolhido ir para academia de carro, sabendo que esse aluno é uma mulher é igual $\frac{23}{60}$.

Exemplo 12: Lançando, simultaneamente, dois dados e observando as faces voltadas para cima. Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 10, sabendo-se que os números obtidos são distintos?

Solução:

Observando o enunciado do problema, verificamos que se trata de um problema de Probabilidade condicional. Então, vamos escrever o espaço amostral (S) do experimento e identificar os eventos A e B.

- Espaço amostral

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6) \\ &(2,1);\ (2,2);\ (2,3);\ (2,4);\ (2,5);\ (2,6) \\ &(3,1);\ (3,2);\ (3,3);\ (3,4);\ (3,5);\ (3,6) \\ &(4,1);\ (4,2);\ (4,3);\ (4,4);\ (4,5);\ (4,6) \\ &(5,1);\ (5,2);\ (5,3);\ (5,4);\ (5,5);\ (5,6) \\ &(6,1);\ (6,2);\ (6,3);\ (6,4);\ (6,5);\ (6,6)\} \end{aligned}$$

$n(S) = 36$ elementos

- Evento A: Soma dos pontos obtidos igual a 10.

$A = \{(4,6);\ (5,5);\ (6,4)\}$

$n(A) = 3$ elementos

- Evento B: Números obtidos são distintos.

$$\begin{aligned} B = \{&(1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6) \\ &(2,1);\ (2,3);\ (2,4);\ (2,5);\ (2,6) \\ &(3,1);\ (3,2);\ (3,4);\ (3,5);\ (3,6) \\ &(4,1);\ (4,2);\ (4,3);\ (4,5);\ (4,6) \\ &(5,1);\ (5,2);\ (5,3);\ (5,4);\ (5,6) \\ &(6,1);\ (6,2);\ (6,3);\ (6,4);\ (6,5)\} \end{aligned}$$

$n(B) = 30$ elementos

Podemos resolver o problema de duas maneiras:

1ª) Reduzindo o espaço amostral.

Neste caso, o espaço amostral passa a ter 30 elementos e dentre esses elementos, os casos possíveis são 2.

A probabilidade pedida é:

$$P(A|B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

2ª) Utilizando a fórmula.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A \cap B = \{(4,6);\ (6,4)\}$

$n(A \cap B) = 2$ elementos

Precisamos calcular $P(A \cap B)$ e $P(B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$P(B) = \frac{30}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Resposta: A probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 10, sabendo-se que os números obtidos são distintos, é igual a $\frac{1}{15}$.

Exemplo 13: Duas máquinas A e B produzem 3.000 peças em um dia. A máquina A produz 1.000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2.000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?

<u>Solução</u>:

Primeiro, vamos separar os dados fornecidos pelo enunciado do problema e depois construir uma tabela.

- Total de peças produzidas: 3.000

- Total de peças Máquina A: 1.000
- Peças defeituosas – Máquina A: 1.000 x $3\% = 30$
- Total de peças Máquina B: 2.000
- Peças defeituosas – Máquina B: 2.000 x $1\% = 20$

Completando a tabela, temos:

	Peças boas (B)	**Peças defeituosas (D)**	**Total**
Máquina A	970	30	1.000
Máquina B	1.980	20	2.000
Total	2.950	50	3.000

Queremos calcular a probabilidade de a peça escolhida ter sido produzida pela máquina A, sabendo que ela é defeituosa.

$$\mathrm{P(A|D)} = \frac{\mathrm{P(A \cap D)}}{P(D)}$$

Precisamos calcular $\mathrm{P(A \cap D)}$ e $\mathrm{P(D)}$:

- O número de elementos do espaço amostral é:
  $\mathrm{n}(S) = 3.000$ peças
- O número de elementos de $\mathrm{A \cap D}$ é:
  $\mathrm{n(A \cap D)} = 30$ peças
- O número de elementos de D é:
  $\mathrm{n(D)} = 50$ peças

Desta forma, temos:

$$\mathrm{P(A \cap D)} = \frac{30}{3.000}$$

$$\mathrm{P(D)} = \frac{50}{3.000}$$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{30}{3.000}}{\frac{50}{3.000}} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

Resposta: A probabilidade de a peça escolhida ter sido produzida pela máquina A, sabendo que ela é defeituosa é igual a $\frac{3}{5}$.

2.4 Questões do ENEM

1 - (ENEM – 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0 a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{14}$

2 - (ENEM – 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência de crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

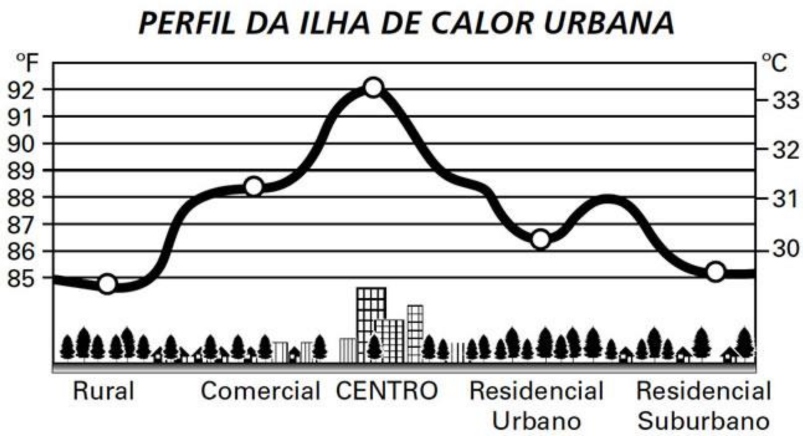
Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8% b) 9% c) 11% d) 12% e) 22%

3 - (ENEM – 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

4 - (ENEM – 2013) Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

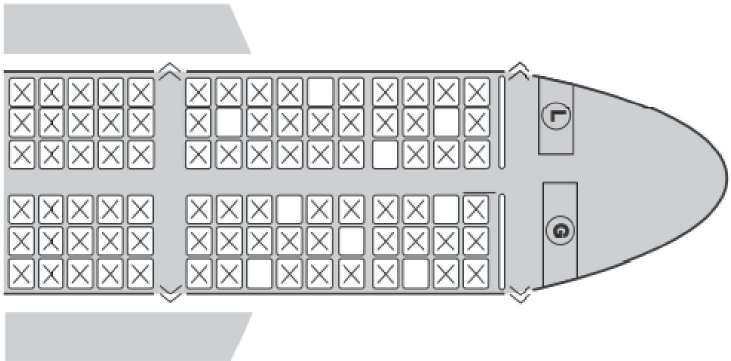
Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são:

a) Caio e Eduardo.
b) Arthur e Eduardo.
c) Bruno e Caio.
d) Arthur e Bruno.
e) Douglas e Eduardo.

5 - (ENEM – 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!2!}$ c) $7!$ d) $\frac{5!}{2!} x\ 4!$ e) $\frac{5!}{4!} x \frac{4!}{3!}$

6 - (ENEM – 2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075 b) 0,150 c) 0,325 d) 0,600 e) 0,800

7 - (ENEM – 2017) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64 b) 56 c) 49 d) 36 e) 28

GABARITO:

1 – d

2 – c

3 – e

4 – a

5 – a

6 – c

7 – e

Pode-se observar que uma característica das questões do Enem é a contextualização, as questões costumam trazer uma situação-problema que tenta estabelecer relação entre o conhecimento e o mundo a nossa volta.

Diante disso, ao analisarmos as questões do ENEM apresentadas percebemos que os jogos de apostas também representam situações-problema do nosso dia-a-dia. Como mostra a questão 4, para sabermos qual a chance de ganharmos determinado prêmio é importante que tenhamos o conhecimento da matemática envolvida neste cálculo.

No capítulo 3, apresentaremos os cálculos das chances reais de se ganhar ao realizar uma aposta em alguns jogos de loteria, justificando as contas envolvidas nestes cálculos.

Capítulo 3 A MATEMÁTICA DOS JOGOS DE LOTERIA

Segundo Canton (2010),

> Os primeiros registros existentes sobre a humanidade indicam que a superstição e a paixão pelos jogos de azar datam da pré-história e pode-se observar que não são raras as cenas imortalizadas em sítios arqueológicos mundo afora que comprovam que, desde os primórdios, o homem recorria à sorte para tomar decisões diante de questões controversas.
>
> Povos da Antiguidade, como os egípcios, os antigos chineses e os romanos, estão entre os pioneiros em matéria de jogos de azar. Faraós utilizavam tabuleiros de papiro e peças de pedra ou marfim como instrumentos divinatórios. Na China, o uso dos jogos de azar começou por volta de 2300 a.C., havendo relatos de que a construção da Grande Muralha, iniciada por volta de 221 a.C., foi em parte financiada por uma loteria.

Afinal o que são os jogos de azar?

São jogos onde aqueles que têm sorte são os que ganham com o azar dos outros. Como as chances da sorte são escassas, ou seja, têm muito mais jogadores que têm azar, por isso os jogos são sustentáveis através das perdas dos que financiam os que vão ter sorte. A sorte de ganhar ou perder não depende da habilidade do jogador, mas exclusivamente de uma contingência natural baseada numa realidade produzida chamada de probabilidades matemáticas. Neste tipo de jogo, a probabilidade de vitória é menor do que a probabilidade de derrota. Quanto menor é a probabilidade de se obter a combinação correta, maior é o prêmio porque aumenta a quantidade ou probabilidade do azar em relação à sorte.

No Brasil, a maioria dos jogos de azar são proibidos, sendo legalizados apenas os jogos de loteria. Pode-se dizer que a Loteria é uma modalidade popular de jogo de azar que consiste no sorteio aleatório de algo pré-estabelecido, normalmente um número, em troca de um prêmio.

Hoje, a Caixa Econômica Federal (CEF) ou CAIXA disponibiliza dez modalidades de loterias, que são divididas em três grupos, a saber:

- Loterias de prognósticos numéricos - São os jogos em que o apostador tenta prever quais serão os números sorteados no próximo concurso (sorteio). São eles: Quina, Mega-Sena, Lotomania, Dupla-Sena, Lotofácil e Dia de Sorte.
- Loterias de prognósticos esportivos - São aquelas em que as apostas são feitas com base nos resultados de jogos de futebol. São elas: Loteca e Lotogol.
- Loterias de bilhetes - São jogos impressos (bilhetes) vendidos nas unidades lotéricas ou por revendedores fixos e ambulantes credenciados pela CAIXA. São elas: Loteria Federal e Loteria Instantânea.

As modalidades de loterias que serão apresentadas, neste capítulo, fazem parte do grupo de Loterias de prognósticos numéricos. Estudaremos a matemática por trás de 4 jogos de loteria famosos no Brasil: Mega-Sena, Quina, Lotofácil e Lotomania.

3.1 Breve histórico das Loterias no Brasil

A história das loterias no Brasil, de acordo com Canton (2010), iniciou-se aproximadamente 300 anos após o Descobrimento, em 1784, no estado de Minas Gerais. O governador da época, Luiz da Cunha Menezes, com o objetivo de arrecadar recursos para o término das obras da Casa de Câmara e Cadeia (atual Museu da Inconfidência) de Vila Rica, hoje em dia chamada de cidade de Ouro Preto, solicitou à Presidência da Câmara Municipal autorização para promover uma loteria.

No ano de 1960, o Presidente Jânio Quadros mostrou-se insatisfeito e preocupado com o sistema de loterias vigente no país. Segundo Ribeiro (2002) *apud* Canton (2010), para o presidente, os detentores das concessões (na época, grupos privados) lucravam muito, havia denúncias de fraudes e a população não se beneficiava muito, a não ser os que ganhavam prêmios. Em 1961, o presidente, através de Decreto, rescindiu o contrato de concessão vigente e passou a administração das loterias às Caixas Econômicas Federais, por meio da Administração dos Serviços da Loteria Federal (ASLF). Além disso, o decreto determinou que a receita líquida das loterias fosse recolhida a um Fundo Especial, destinado ao financiamento de serviços públicos municipais de saneamento, assistenciais e de educação.

No entanto, a transferência da administração das loterias para as Caixas Econômicas Federais somente se efetivou no ano de 1962 e para divulgar essa nova administração das loterias, lançaram mão de uma forte campanha publicitária, cujos anúncios de jornais asseguravam, no dizer de Canton (2010), que "*não mais haveria "bilhetes em branco" (sem prêmios), pois toda a sociedade passaria a ser premiada, ou seja, se o apostador não ganhasse prêmios do sorteio, ganharia na forma de benefícios sociais gerados pelas apostas.*"

Fazendo uma análise, a partir da década de 1970 até os dias de hoje, pode-se observar que houve uma grande expansão no mercado mundial de loterias e jogos, no início da história das loterias, os recursos arrecadados eram para possibilitar a construção de cadeias públicas, igrejas, escolas e portos. Hoje, a exploração das loterias somente tem sido autorizada pelo Estado com a finalidade principal de arrecadação de recursos para serem revertidos em benefício da sociedade.

No Brasil, as loterias destinam parte de sua arrecadação para investimentos em segmentos como: seguridade social, educação, esporte, cultura, segurança pública e saúde.

3.2 Os jogos de loteria

Por que os Jogos de loteria atraem tantos apostadores?

O desejo de enriquecer, de ter uma vida melhor, de pagar as dívidas, de realizar sonhos, de ter a tão sonhada casa própria, principalmente aqui no Brasil, são alguns dos motivos que levam as pessoas a apostarem dinheiro sem sequer se darem conta da real possibilidade de ganhar envolvida em cada aposta.

Neste contexto, a proposta deste capítulo é fazer uma análise e reflexão utilizando os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade envolvidos nos jogos de loterias, apresentando as chances reais de se ganhar ao realizar uma aposta, além de contribuir para o estudo de professores, alunos e pessoas interessadas no conteúdo estudado e/ou interessadas nos referidos jogos.

De acordo com o PCN (1998),

> os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e

favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Por isso, os conceitos serão abordados através de atividades/perguntas, envolvendo os jogos de loteria, que poderão ser realizadas também em sala de aula, como uma forma lúdica e prática de apresentar os conceitos de matemática mostrando a aplicabilidade do assunto estudado no cotidiano.

3.2.1 Mega-Sena

A Mega-Sena é, atualmente, o jogo mais procurado pelos apostadores e o que geralmente paga os maiores prêmios aos ganhadores, por isso representa hoje a maior modalidade lotérica do Brasil, sendo uma entre as dez modalidades atuais das loterias da Caixa Econômica Federal. Ela foi criada no ano de 1996 e como oferecia prêmios milionários, logo caiu no gosto dos apostadores.

Figura 15 - Volante da Mega-Sena (Frente e Verso)

Fonte: Wikipedia

No ano de 2009, surgiu a Mega-Sena da Virada, que é um concurso especial da Mega-Sena, realizado no último dia do ano corrente, 31 de dezembro, com sorteio único.

3.2.1.1 Como jogar?

Para jogar, basta o apostador escolher e marcar de 6 a 15 números dentre os 60 disponíveis no volante (Figura 15). O valor a ser pago na aposta dependerá da quantidade de números escolhidos.

Valor da aposta Mega-Sena

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (em Reais)
6	3,50
7	24,50
8	98,00
9	294,00
10	735,00
11	1.617,00
12	3.234,00
13	6.006,00
14	10.510,50
15	17.517,50

Os sorteios da Mega-Sena são realizados duas vezes por semana, às quartas-feiras e aos sábados, e consiste na extração de 6 números diferentes, no universo de 01 a 60. Neste jogo, ganham prêmios os acertadores de 4, 5 ou 6 números.

3.2.1.2 Premiação

O prêmio bruto corresponde a 43,35% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Deste valor, são distribuídos:

- 35 % entre os acertadores de 6 números (sena);
- 19 % entre os acertadores de 5 números (quina);
- 19 % entre os acertadores de 4 números (quadra);
- 22 % ficam acumulados e são distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5;
- 5 % ficam acumulados para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano, de final 0 ou 5 (Mega da Virada).

3.2.1.3 Conhecendo um pouco da matemática da Mega-Sena

Atividade 1: *Sabendo que a Mega-Sena paga prêmios aos acertadores de 4 (quadra), 5 (quina) ou 6 (sena) números. Qual é a chance de ganhar cada prêmio com uma aposta simples (fazer uma aposta com 6 números)?*

Para descobrirmos qual a chance de ganhar um prêmio na Mega-Sena, temos que calcular a probabilidade deste evento ocorrer.

Primeiro, vamos identificar os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 6 números diferentes, no universo de 01 a 60.
- Espaço amostral: Neste caso, para determinar o número de elementos do espaço amostral, temos que calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega-Sena.

  Como a ordem de sorteio dos números não é importante, utilizaremos a combinação simples para realizar este cálculo.

$$C_{60}^{6} = \frac{60!}{6!\,(60-6)!} = \frac{60!}{6!\ 54!} = \frac{60x59x58x57x56x55x\cancel{54!}}{6x5x4x3x2x1x\cancel{54!}} = \frac{36.045.979.200}{720}$$
$$= 50.063.860$$

Logo, o número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n}(S) = 50.063.860$, ou seja, o número de combinações distintas possíveis no sorteio da Mega-Sena é igual a 50.063.860.

Agora, para calcular a probabilidade (chance) de ganhar cada prêmio, vamos definir os eventos:

- **Evento A**: Acertar 6 números (sena) com uma aposta simples.
- **Evento B**: Acertar 5 números (quina) com uma aposta simples.
- **Evento C**: Acertar 4 números (quadra) com uma aposta simples.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento A**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 6 números com uma aposta simples (6 números).

$$C_6^6 = \frac{6!}{6!\,(6-6)!} = \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,0!} = 1$$

Com uma aposta simples de seis números concorre-se com uma única combinação possível. Logo, o número de elementos do evento A é $\text{n}(\text{A}) = 1$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento A é:

$$\text{P}(\text{A}) = \frac{\text{n}(\text{A})}{\text{n}(S)} = \frac{1}{50.063.860}$$

Logo, a probabilidade de ganhar, acertando os 6 números (sena), é de 1 em 50.063.860.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento B**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 5 números com uma aposta simples (6 números). Para formar uma quina com uma aposta de 6 números, temos que fazer a combinação dos 6 números tomados 5 a 5 e o sexto número pode ser qualquer um dos 54 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 54 números tomados 1 a 1.

$$C_6^5 x\, C_{54}^1 = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} x \frac{54!}{1!\,(54-1)!} = \frac{6!}{5!\,1!} x \frac{54!}{1!\,53!} = \frac{6x\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,x1} x \frac{54x\cancel{53!}}{1x\cancel{53!}} = 324$$

Logo, o número de elementos do evento B é $\text{n}(\text{B}) = 324$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento B é:

$$\mathrm{P(B)} = \frac{\mathrm{n(B)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{324}{50.063.860} = \frac{1}{154.518}$$

Logo, a probabilidade de ganhar, acertando os 5 números (quina), é de 1 em 154.518.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento C**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 4 números com uma aposta simples (6 números). Para formar uma quadra com uma aposta de 6 números, temos que fazer a combinação dos 6 números tomados 4 a 4 e os dois números restantes podem ser qualquer um dos 54 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 54 números tomados 2 a 2.

$$C_6^4 x\, C_{54}^2 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} x \frac{54!}{2!\,(54-2)!} = \frac{6!}{4!\,2!} x \frac{54!}{2!\,52!} = \frac{6x5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,x2x1} x \frac{54x53x\cancel{52!}}{2x1x\cancel{52!}}$$
$$= \frac{85.860}{4} = 21.465$$

Logo, o número de elementos do evento C é $\mathrm{n(C)} = 21.465$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento C é:

$$\mathrm{P(C)} = \frac{\mathrm{n(C)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{21.465}{50.063.860} = \frac{1}{2.332}$$

Logo, a probabilidade de ganhar, acertando os 4 números (quadra), é de 1 em 2.332.

Atividade 2: *Suponhamos que um empresário resolvesse fazer uma aposta de 15 números (aposta máxima). Qual seria a chance de o empresário ganhar cada prêmio da Mega-Sena?*

Identificando os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 6 números diferentes, no universo de 01 a 60.
- Espaço amostral: O mesmo da **Atividade 1**.

O número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n}(S) = 50.063.860$.

Agora, para calcular a probabilidade (chance) de ganhar cada prêmio, vamos definir os eventos:

- **Evento D**: Acertar 6 números (sena) com uma aposta de 15 números.
- **Evento E**: Acertar 5 números (quina) com uma aposta de 15 números.
- **Evento F**: Acertar 4 números (quadra) com uma aposta de 15 números.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento D**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 6 números com uma aposta de 15 números.

$$C_{15}^{6} = \frac{15!}{6!\,(15-6)!} = \frac{15!}{6!\ 9!} = \frac{15x14x13x12x11x10x\cancel{9!}}{6x5x4x3x2x1x\cancel{9!}} = \frac{3.603.600}{720} = 5.005$$

Logo, o número de elementos do evento D é n(D) = 5.005.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento D é:

$$\mathrm{P(D)} = \frac{\mathrm{n(D)}}{\mathrm{n}(S)} = \frac{5.005}{50.063.860} = \frac{1}{10.003}$$

Logo, a probabilidade de o empresário ganhar, acertando os 6 números (sena), é de 1 em 10.003.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento E**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 5 números com uma aposta de 15 números. Para formar uma quina com uma aposta de 15 números, temos que fazer a combinação dos 15 números tomados 5 a 5 e o sexto número pode ser qualquer um dos 45 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 45 números tomados 1 a 1.

$$C_{15}^{5} x\, C_{45}^{1} = \frac{15!}{5!\,(15-5)!} x \frac{45!}{1!\,(45-1)!} = \frac{15!}{5!\,10!} x \frac{45!}{1!\,44!}$$

$$= \frac{15x14x13x12x11x\cancel{10}!}{5x4x3x2x1x\cancel{10}!} x \frac{45x\cancel{44}!}{1x\cancel{44}!} = \frac{16.216.200}{120} = 135.135$$

Logo, o número de elementos do evento E é $\mathrm{n(E)} = 135.135$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento E é:

$$\mathrm{P(E)} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{135.135}{50.063.860} = \frac{1}{370}$$

Logo, a probabilidade de o empresário ganhar, acertando os 5 números (quina), é de 1 em 370.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento F**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 4 números com uma aposta de 15 números. Para formar uma quadra com uma aposta de 15 números, temos que fazer a combinação dos 15 números tomados 4 a 4 e os dois números restantes podem ser qualquer um dos 45 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 45 números tomados 2 a 2.

$$C_{15}^{4} x\, C_{45}^{2} = \frac{15!}{4!\,(15-4)!} x \frac{45!}{2!\,(45-2)!} = \frac{15!}{4!\,11!} x \frac{45!}{2!\,43!}$$

$$= \frac{15x14x13x12x\cancel{11}!}{4x3x2x1x\cancel{11}!} x \frac{45x44x\cancel{43}!}{2x1x\cancel{43}!} = \frac{64.864.800}{48} = 1.351.500$$

Logo, o número de elementos do evento F é $\mathrm{n(F)} = 1.351.500$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento F é:

$$\mathrm{P(F)} = \frac{\mathrm{n(F)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{1.351.500}{50.063.860} = \frac{1}{37}$$

Logo, a probabilidade de o empresário ganhar, acertando os 4 números (quadra), é de 1 em 37.

Atividade 3: *Considerando o jogo da Mega-Sena, é mais vantajoso financeiramente, fazer uma aposta de 7 números ou fazer apostas de 6 números combinando esses 7 números?*

Analisando cada caso:

1) Fazer uma aposta de 7 números.

Para determinar de quantas maneiras podemos combinar 6 números com uma aposta de 7 números, basta fazer a combinação dos 7 números tomados 6 a 6.

$$C_7^6 = \frac{7!}{6!\,(7-6)!} = \frac{7!}{6!\,1!} = \frac{7x\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,x1} = 7$$

Temos uma aposta de 7 números, cujo valor é R$ 24,50 e corresponde a 7 jogos de 6 números cada.

2) Fazer apostas de 6 números combinando os 7 números.

Suponhamos que os números escolhidos na aposta de 7 números sejam $\{01, 02, 03, 04, 05, 06, 07\}$. Fazendo todas as combinações possíveis de 6 números com os elementos deste conjunto, temos:

$$01 - 02 - 03 - 04 - 05 - 06$$
$$01 - 02 - 03 - 04 - 05 - 07$$
$$01 - 02 - 03 - 04 - 06 - 07$$
$$01 - 02 - 03 - 05 - 06 - 07$$
$$01 - 02 - 04 - 05 - 06 - 07$$
$$01 - 03 - 04 - 05 - 06 - 07$$
$$02 - 03 - 04 - 05 - 06 - 07$$

Temos um total de 7 apostas com todas as combinações possíveis de 6 números dentre os 7 números escolhidos e como o valor de cada aposta de 6 números é R$3,50 pelas 7 apostas o valor seria R$ 24,50.

Observa-se nos dois casos que as duas apostas são equivalentes, ou seja, se apostar em 1 jogo com 7 números pagaremos R$ 24,50 o que corresponde a apostar em 7 jogos com 6 números que pagaremos 7 x 3,50 = R$ 24,50.

Atividade 4: *Na Mega-Sena, o valor a ser pago na aposta depende da quantidade de números escolhidos e da combinação de jogos de 6 números formados por estes números, conforme mostra a tabela.*

Considerando que seja permitido apostar no máximo em 20 números e que um apostador deseja apostar em 18 números, qual o valor a ser pago nessa aposta?

Quantidade de números jogados	**Combinação de jogos de 6 números**	**Valor da aposta (em Reais)**
6	1	3,50
7	7	24,50
8	28	98,00
9	84	294,00
10	210	735,00
11	462	1.617,00
12	924	3.234,00
13	1.716	6.006,00
14	3.003	10.510,50
15	5.005	17.517,50

Para determinar o valor da aposta, basta calcular primeiro a combinação dos 18 números escolhidos tomados 6 a 6.

$$C_{18}^{6} = \frac{18!}{6!\,(18-6)!} = \frac{18!}{6!\ 12!} = \frac{18x17x16x15x14x13x\cancel{12!}}{6x5x4x3x2x1x\cancel{12!}} = \frac{13.366.080}{720} = 18.564$$

Obtemos 18.564 jogos de 6 números numa aposta de 18 números. Como cada aposta de 6 números custa R$ 3,50, temos:

$$18.854 \text{ x } 3{,}50 \; = \; 64.974{,}00$$

O valor a ser pago na aposta é igual a R$ 64.974,00.

Sugestão: Realizar atividades relacionando o valor da aposta com o valor da Probabilidade, por exemplo, apostando 7 números, temos que a probabilidade de ganhar com esta aposta é igual a 7 vezes a probabilidade de ganhar com uma aposta simples e o valor da aposta é igual a 7 vezes o valor da aposta simples.

Apostando 8 números, temos que a probabilidade de ganhar com esta aposta é igual a 28 vezes a probabilidade de ganhar com uma aposta simples e o valor da aposta é igual a 28 vezes o valor da aposta simples.

Atividade 5: *Quantas apostas devem ser feitas para que a chance de ganhar na Mega-Sena seja maior do que a de perder?*

Analisando o problema, temos:

- Experimento: Sortear 6 números diferentes, no universo de 01 a 60.
- Espaço amostral: O mesmo da **Atividade 1**.

  O número de elementos do espaço amostral é $n(S) \; = \; 50.063.860$.

O número de combinações distintas possíveis no sorteio da Mega-Sena é igual a 50.063.860. Se quisermos que a chance de ganhar seja maior que a de perder temos que ter a probabilidade de ganhar superior a 50%, ou seja, superior a $\frac{1}{2}$.

$$P(A) > \frac{1}{2}$$

Como,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(A)}{50.063.860}$$

Desta forma, temos que:

$$\frac{n(A)}{50.063.860} > \frac{1}{2}$$

$$n(A) > \frac{50.063.860}{2}$$

$$n(A) > 25.031.930$$

Logo, para que a chance de ganhar na Mega-Sena seja maior do que a de perder, devem ser feitas no mínimo 25.031.931 apostas de seis números.

Observação:

Neste caso, se o apostador quisesse fazer as apostas de modo que a sua chance de ganhar na Mega-Sena fosse maior do que a de perder, ele precisaria pagar o seguinte valor:

$$25.031.931 \text{ x } 3{,}50 = \text{R\$ } 87.611.758{,}50$$

Seria viável fazer esta aposta?

Não. Considerando que o valor pago seria muito alto para uma aposta que não tem 100% de chance de ganhar.

Com base nesta situação, quanto um apostador deveria investir para ter 100% de chance de ganhar a sena?

Vamos utilizar a tabela a seguir e efetuar os cálculos:

Quantidade de números jogados	**Quantidade de apostas**	**Valor da aposta (em Reais)**
6	50.063.860	3,50
7	7.151.980	24,50
8	1.787.995	98,00
9	595.998	294,00
10	238.399	735,00
11	108.363	1.617,00
12	54.182	3.234,00
13	29.175	6.006,00
14	16.671	10.510,50
15	10.003	17.517,50

- Para o apostador ter a certeza que ganharia a sena com uma aposta de 6 números, ele teria que fazer 50.063.860 jogos e teria que pagar:

$$50.063.860 \text{ x } 3{,}50 \ = \ R\$ \ 175.223.510{,}00$$

- Para o apostador ter a certeza que ganharia a sena com uma aposta de 7 números, ele teria que fazer 7.151.980 jogos e teria que pagar:

$$7.151.980 \text{ x } 24{,}50 \ = \ R\$ \ 175.223.510{,}00$$

- Para o apostador ter a certeza que ganharia a sena com uma aposta de 8 números, ele teria que fazer 1.787.995 jogos e teria que pagar:

$$1.787.995 \text{ x } 98{,}00 \ = \ R\$ \ 175.223.510{,}00$$

E assim sucessivamente, calculando todos os valores temos:

Quantidade de números jogados	Quantidade de apostas	Valor da aposta (em Reais)	Investimento na aposta (em Reais)
6	50.063.860	3,50	175.223.510,00
7	7.151.980	24,50	175.223.510,00
8	1.787.995	98,00	175.223.510,00
9	595.998	294,00	175.223.412,00
10	238.399	735,00	175.223.265,00
11	108.363	1.617,00	175.222.971,00
12	54.182	3.234,00	175.224.588,00
13	29.175	6.006,00	175.225.050,00
14	16.671	10.510,50	175.220.545,50
15	10.003	17.517,50	175.227.552,50

Observa-se que para um apostador ter 100% de chance de ganhar a sena ele deverá investir mais de 175 milhões de reais.

Seria viável investir todo este dinheiro?

Vamos considerar os prêmios pagos pela Mega-Sena:

O maior prêmio já pago na história da Mega-Sena e das loterias no Brasil foi a Mega da Virada, realizado em 31 de dezembro de 2017, que teve um total de quase R$ 307 milhões distribuídos entre dezessete bilhetes premiados com cerca de R$ 18 milhões cada. No entanto, o maior prêmio pago em sorteios comuns para um único apostador, ocorreu em 25 de novembro de 2015 e teve um total de R$ 205.329.753,54.

A partir dos dados apresentados no **APÊNDICE A – ARRECADAÇÃO DA MEGA-SENA (JANEIRO A JUNHO-2018)**, observa-se que a média de arrecadação por concurso no período é igual a R$ 42.991.082,75.

Como o valor do prêmio bruto pago aos ganhadores corresponde a 43,35% da arrecadação e deste valor são distribuídos: 35 % entre os acertadores de 6 números (sena); 19 % entre os acertadores de 5 números (quina) e 19 % entre os acertadores de 4 números (quadra). Pode-se estimar que em média o valor do prêmio bruto pago por concurso é igual a R$ 18.636.634,37, com a seguinte distribuição:

- R$ 6.522.822,03 – dividido entre os acertadores de 6 números (sena);
- R$ 3.540.960,53 – dividido entre os acertadores de 5 números (quina);

- R$ 3.540.960,53 – dividido entre os acertadores de 4 números (quadra).

Analisando a estimativa de prêmios realizada e os maiores prêmios já pagos na Mega-Sena, percebe-se que não seria viável fazer um investimento tão alto, visto que os valores pagos na maioria das vezes não ultrapassam os 175 milhões e mesmo que ultrapassem corre-se o risco de haver vários ganhadores e o prêmio ter que ser dividido entre os mesmos.

Além das atividades apresentadas, podem-se utilizar as tabelas seguintes: Probabilidade de acerto na Mega-Sena e Quantidade de prêmios a receber acertando, para desenvolver diversas atividades utilizando as ideias apresentadas sobre Contagem e Probabilidade.

Probabilidades de acerto na Mega-Sena

Quantidade de números jogados	**Probabilidade de acerto (1 em)**		
	Sena	**Quina**	**Quadra**
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1.038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	3.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	29.175	828	65
14	16.671	544	48
15	10.003	370	37

Quantidade de prêmios a receber acertando

Aposta	6 números			5 números		4 números
Quantidade de números jogados	**Sena**	**Quina**	**Quadra**	**Quina**	**Quadra**	**Quadra**
6	1	0	0	1	0	1
7	1	6	0	2	5	3
8	1	12	15	3	15	6
9	1	18	45	4	30	10
10	1	24	90	5	50	15
11	1	30	150	6	75	21
12	1	36	225	7	105	28
13	1	42	315	8	140	36
14	1	48	420	9	180	45
15	1	54	540	10	225	55

3.2.2 Quina

O primeiro sorteio da Quina foi realizado em 13 de março de 1994. O novo produto substituiu a Loto oferecendo maior probabilidade de acerto com a alteração da quantidade de dezenas do volante de 100 para 80. É considerada a mais tradicional das loterias e, também, é uma modalidade de loteria muito procurada pelos apostadores.

O sorteio especial da Quina é a **Quina de São João**, que ocorre cada ano no dia 24 de Junho, exceto quando este dia cai em um domingo.

Figura 16 - Volante da Quina
(Frente e Verso)

Fonte: Wikipedia

3.2.2.1 Como jogar?

Para jogar, basta o apostador escolher e marcar de 5 a 15 números dentre os 80 disponíveis no volante (Figura 16). O valor a ser pago na aposta dependerá da quantidade de números escolhidos.

Valor da aposta Quina

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (em Reais)
5	1,50
6	9,00
7	31,50
8	84,00
9	189,00
10	378,00
11	693,00
12	1.188,00
13	1.930,50
14	3.003,00
15	4.504,50

São realizados seis sorteios semanais da Quina, às 20h, de segunda-feira a sábado, exceto em feriados nacionais. O sorteio consiste na extração de 5 números diferentes, no universo de 01 a 80. Neste jogo, ganham prêmios os acertadores de 2 (duque), 3 (terno), 4 (quadra) ou 5 (quina) números.

3.2.2.2 Premiação

O prêmio bruto corresponde a 43,35% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Deste valor, são distribuídos:

- 35% entre os acertadores de 5 números;
- 19 % entre os acertadores de 4 números;
- 20 % entre os acertadores de 3 números;
- 11 % entre os acertadores de 2 números;
- 15% acumulam para os acertadores dos 5 números da Quina de São João.

Não havendo acertador em qualquer faixa de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, nas respectivas faixas.

3.2.2.3 Conhecendo um pouco da matemática da Quina

Atividade 1: *A Quina é um jogo de loteria que paga prêmios aos acertadores de 2 (duque), 3 (terno), 4 (quadra) ou 5(quina) números. Para jogar, o apostador deverá escolher e marcar de 5 a 15 números dentre os 80 disponíveis no volante.*

José queria fazer uma "fezinha" e foi a uma Casa Lotérica para jogar na Quina, mas como só dispunha de R$ 2,00 resolveu fazer uma aposta de 5 números (aposta simples) que custava R$ 1,50. Qual é a chance de José ganhar cada prêmio da Quina com uma aposta simples?

Para descobrirmos qual é a chance de José ganhar cada prêmio da Quina, temos que calcular a probabilidade de cada evento ocorrer.

Primeiro, vamos identificar os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 5 números diferentes, no universo de 01 a 80.
- Espaço amostral: Neste caso, para determinar o número de elementos do espaço amostral, temos que calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Quina.

  Como a ordem de sorteio dos números não é importante, utilizaremos a combinação simples para realizar este cálculo.

$$C_{80}^{5} = \frac{80!}{5!\,(80-5)!} = \frac{80!}{5!\,75!} = \frac{80x79x78x77x76x\cancel{75!}}{5x4x3x2x1x\cancel{75!}} = \frac{2.884.801.920}{120}$$
$$= 24.040.016$$

Logo, o número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n}(S) = 24.040.016$, ou seja, o número de combinações distintas possíveis no sorteio da Quina é igual a 24.040.016.

Agora, para calcular a probabilidade (chance) de ganhar cada prêmio, vamos definir os eventos:

- **Evento A**: Acertar 5 números (quina) com uma aposta simples.
- **Evento B**: Acertar 4 números (quadra) com uma aposta simples.

- **Evento C**: Acertar 3 números (terno) com uma aposta simples.
- **Evento D**: Acertar 2 números (duque) com uma aposta simples.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento A**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 5 números com uma aposta simples (5 números).

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,0!} = 1$$

Com uma aposta simples de cinco números concorre-se com uma única combinação possível. Logo, o número de elementos do evento A é $\mathrm{n(A)} = 1$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento A é:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n}(S)} = \frac{1}{24.040.016}$$

Logo, a probabilidade de José ganhar, acertando os 5 números (quina), é de 1 em 24.040.016.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento B**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 4 números com uma aposta simples (5 números). Para formar uma quadra com uma aposta de 5 números, temos que fazer a combinação dos 5 números tomados 4 a 4 e o quinto número pode ser qualquer um dos 75 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 75 números tomados 1 a 1.

$$C_5^4 x\, C_{75}^1 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} x \frac{75!}{1!\,(75-1)!} = \frac{5!}{4!\,1!} x \frac{75!}{1!\,74!} = \frac{5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,x1} x \frac{75x\cancel{74!}}{1x\cancel{74!}} = 375$$

Logo, o número de elementos do evento B é $\mathrm{n(B)} = 375$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento B é:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{375}{24.040.016} = \frac{1}{64.106}$$

Logo, a probabilidade de José ganhar, acertando os 4 números (quadra), é de 1 em 64.106.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento C**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 3 números com uma aposta simples (5 números). Para formar um terno com uma aposta de 5 números, temos que fazer a combinação dos 5 números tomados 3 a 3 e os dois números restantes podem ser qualquer um dos 75 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 75 números tomados 2 a 2.

$$C_5^3 x\, C_{75}^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} x \frac{75!}{2!\,(75-2)!} = \frac{5!}{3!\,2!} x \frac{75!}{2!\,73!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,x2x1} x \frac{75x74x\cancel{73!}}{2x1x\cancel{73!}}$$
$$= \frac{111.000}{4} = 27.750$$

Logo, o número de elementos do evento C é $n(C) = 27.750$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento C é:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{27.750}{24.040.016} = \frac{1}{866}$$

Logo, a probabilidade de José ganhar, acertando os 3 números (terno), é de 1 em 866.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento D**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 2 números com uma aposta simples (5 números). Para formar um duque com uma aposta de 5 números, temos que fazer a combinação dos 5 números tomados 2 a 2 e os três números restantes podem ser qualquer um dos 75 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 75 números tomados 3 a 3.

$$C_5^2 x\, C_{75}^3 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} x \frac{75!}{3!\,(75-3)!} = \frac{5!}{2!\,3!} x \frac{75!}{3!\,72!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{2x1x\cancel{3!}} x \frac{75x74x73x\cancel{72!}}{3x2x1x\cancel{72!}}$$

$$= \frac{8.103.000}{12} = 675.250$$

Logo, o número de elementos do evento D é $\mathrm{n(D)} = 675.250$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento D é:

$$\mathrm{P(D)} = \frac{\mathrm{n(D)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{675.250}{24.040.016} = \frac{1}{36}$$

Logo, a probabilidade de José ganhar, acertando os 2 números (duque), é de 1 em 36.

Atividade 2: *Na tabela a seguir, observamos que o valor a ser pago numa aposta da Quina depende da quantidade de números escolhidos para apostar.*

Sabendo que este valor é calculado com base na quantidade de jogos de 5 números formados pelos números jogados, complete a tabela com a quantidade de jogos de 5 números que podem ser formados.

Valor da aposta Quina

Quantidade de números jogados	**Valor da aposta (em Reais)**
5	1,50
6	9,00
7	31,50

8	84,00
9	189,00
10	378,00
11	693,00
12	1.188,00
13	1.930,50
14	3.003,00
15	4.504,50

Para calcular a quantidade de jogos de 5 números que podem ser formados, temos que fazer a combinação da quantidade de números escolhidos para apostar (números jogados) tomados 5 a 5.

Considere que a quantidade de números jogados é igual a:

- **5 números.**

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = \frac{\cancel{5}!}{\cancel{5}!\,0!} = 1$$

- **6 números.**

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6x5\cancel{!}}{5\cancel{!}\,x1} = 6$$

- **7 números.**

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7x6x\cancel{5}!}{\cancel{5}!\,x2x1} = \frac{42}{2} = 21$$

- **8 números.**

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8x7x6x\cancel{5}!}{5\cancel{!}\,x3x2x1} = \frac{336}{6} = 56$$

- **9 números.**

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9x8x7x6x\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,x4x3x2x1} = \frac{3.024}{24} = 126$$

- **10 números.**

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10x9x8x7x6x\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,x5x4x3x2x1} = \frac{30.240}{120} = 252$$

- **11 números.**

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11!}{5!\,6!} = \frac{11x10x9x8x7x\cancel{6!}}{5x4x3x2x1x\cancel{6!}} = \frac{55.440}{120} = 462$$

- **12 números.**

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{12x11x10x9x8x\cancel{7!}}{5x4x3x2x1x\cancel{7!}} = \frac{95.040}{120} = 792$$

- **13 números.**

$$C_{13}^5 = \frac{13!}{5!\,(13-5)!} = \frac{13!}{5!\,8!} = \frac{13x12x11x10x9x\cancel{8!}}{5x4x3x2x1x\cancel{8!}} = \frac{154.440}{120} = 1.287$$

- **14 números.**

$$C_{14}^5 = \frac{14!}{5!\,(14-5)!} = \frac{14!}{5!\,9!} = \frac{14x13x12x11x10x\cancel{9!}}{5x4x3x2x1x\cancel{9!}} = \frac{240.240}{120} = 2.002$$

- **15 números.**

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,(15-5)!} = \frac{15!}{5!\,10!} = \frac{15x14x13x12x11x\cancel{10!}}{5x4x3x2x1x\cancel{10!}} = \frac{360.360}{120} = 3.003$$

Completando a tabela temos:

Quantidade de números jogados	**Valor da aposta (em Reais)**	**Quantidade de jogos de 5 números**
5	1,50	1
6	9,00	6
7	31,50	21
8	84,00	56
9	189,00	126
10	378,00	252
11	693,00	462
12	1.188,00	792
13	1.930,50	1.287
14	3.003,00	2.002
15	4.504,50	3.003

***Atividade 3:** Maria joga na Quina, semanalmente, fazendo sempre uma aposta simples. No último jogo, Maria conseguiu acertar um terno (3 números) e recebeu como prêmio o valor de R$ 130,30. Animada com o prêmio, Maria resolveu utilizar parte do dinheiro e fazer uma aposta com 8 números, que custa R$ 84,00. Com essa aposta, qual a probabilidade de Maria acertar 5 números (quina)? E acertar 2 números (duque)?*

Identificando os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 5 números diferentes, no universo de 01 a 80.
- Espaço amostral: O mesmo da **Atividade 1**.

Figura 17

Fonte: https://www.quina.org/noticias

O número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n}(S) = 24.040.016$.

Agora, para calcular a probabilidade de Maria acertar 5 números (quina) e acertar 2 números (duque), vamos definir os eventos:

- **Evento E**: Acertar 5 números (quina) com uma aposta de 8 números.
- **Evento F**: Acertar 2 números (duque) com uma aposta de 8 números.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento E**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 5 números com uma aposta de 8 números.

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8x7x6x\cancel{5!}}{\cancel{5!}x3x2x1} = \frac{336}{6} = 56$$

Logo, o número de elementos do evento E é $\mathrm{n(E)} = 56$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento E é:

$$\mathrm{P(E)} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{56}{24.040.016} = \frac{1}{429.286}$$

Logo, a probabilidade de Maria acertar 5 números (quina), com uma aposta de 8 números, é de 1 em 429.286.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento F**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 2 números com uma aposta de 8 números. Para formar um duque com uma aposta de 8 números, temos que fazer a combinação dos 8 números tomados 2 a 2 e os três números podem ser qualquer um dos 72 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 72 números tomados 3 a 3.

$$C_8^2\,x\,C_{72}^3 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!}x\,\frac{72!}{3!\,(72-3)!} = \frac{8!}{2!\,6!}x\,\frac{72!}{3!\,69!} = \frac{8x7x\cancel{6!}}{2x1x\cancel{6!}}x\,\frac{72x71x70x\cancel{69!}}{3x2x1x\cancel{69!}}$$

$$= \frac{20.039.040}{12} = 1.669.920$$

Logo, o número de elementos do evento F é $\mathrm{n(F)} = 1.669.920$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento F é:

$$\mathrm{P}(F) = \frac{\mathrm{n(F)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{1.669.920}{24.040.016} = \frac{1}{14}$$

Logo, a probabilidade de Maria acertar 2 números (duque), com uma aposta de 8 números, é de 1 em 14.

Atividade 4: *Januário sonhou com 11 números e queria apostá-los na Quina. Observando a tabela das cotas (quantidade) de prêmios da Quina, percebeu que as mesmas são pagas com base no número de dezenas apostadas. Mas a tabela que ele observava estava incompleta, conforme tabela a seguir.*

Apostas	5 Números			
Números jogados	1º Faixa Quina	2º Faixa Quadra	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque
5	1	0	0	0
6	1	5	0	0
7	1	10	10	0
8	1	15	30	10
9	1	20	60	40

Supondo que Januário acerte a quina com a aposta de 11 números, quantas cotas (quantidade) de prêmios da quadra, do terno e do duque ele receberá?

Observação: Antes de responder à questão, ler o **APÊNDICE B –** ***Entendendo os cálculos das cotas (quantidade) de prêmios pagos no jogo da Quina!***

- Calculando as cotas de prêmios da quadra:

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação das 6 dezenas não sorteadas tomadas 1 a 1.

$$C_5^4 x\ C_6^1 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} x \frac{6!}{1!\,(6-1)!} = \frac{5!}{4!\,1!} x \frac{6!}{1!\,5!} = \frac{5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,x1} x \frac{6x\cancel{5!}}{1x\cancel{5!}} = 30$$

Logo, se Januário acertar a quina com uma aposta de 11 números receberá 30 prêmios da quadra.

- Calculando as cotas de prêmios do terno:

Para calcular a quantidade de prêmios do terno, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 3 a 3 e multiplicar pela combinação das 6 dezenas não sorteadas tomadas 2 a 2.

$$C_5^3 x\ C_6^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} x \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{5!}{3!\,2!} x \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,x2x1} x \frac{6x5x\cancel{4!}}{2x1x\cancel{4!}} = 150$$

Logo, se Januário acertar a quina com uma aposta de 11 números receberá 150 prêmios do terno.

- Calculando as cotas de prêmios do duque:

Para calcular a quantidade de prêmios do duque, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 2 a 2 e multiplicar pela combinação das 6 dezenas não sorteadas tomadas 3 a 3.

$$C_5^2 x\ C_6^3 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} x \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{5!}{2!\,3!} x \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{2x1x\cancel{3!}} x \frac{6x5x4x\cancel{3!}}{3x2x1x\cancel{3!}} = 200$$

Logo, se Januário acertar a quina com uma aposta de 11 números receberá 200 prêmios do duque.

Atividade 5: *E se Januário tivesse acertado a quadra com esta aposta de 11 números, quantas cotas (quantidade) de prêmios da quadra, do terno e do duque ele receberia?*

- Calculando as cotas de prêmios da quadra:

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação das 7 dezenas não sorteadas tomadas 1 a 1.

$$C_4^4 x\, C_7^1 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} x \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = \frac{4!}{4!\,0!} x \frac{7!}{1!\,6!} = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,x1} x \frac{7x\cancel{6!}}{1x\cancel{6!}} = 7$$

Logo, se Januário tivesse acertado a quadra com uma aposta de 11 números receberia 7 prêmios da quadra.

- Calculando as cotas de prêmios do terno:

Para calcular a quantidade de prêmios do terno, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 3 a 3 e multiplicar pela combinação das 7 dezenas não sorteadas tomadas 2 a 2.

$$C_4^3 x\, C_7^2 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} x \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{4!}{3!\,1!} x \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,x1} x \frac{7x6x\cancel{5!}}{2x1x\cancel{5!}} = 84$$

Logo, se Januário tivesse acertado a quadra com uma aposta de 11 números receberia 84 prêmios do terno.

- Calculando as cotas de prêmios do duque:

Para calcular a quantidade de prêmios do duque, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 2 a 2 e multiplicar pela combinação das 7 dezenas não sorteadas tomadas 3 a 3.

$$C_4^2 x\, C_7^3 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} x \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{4!}{2!\,2!} x \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{4x3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,x2x1} x \frac{7x6x5x\cancel{4!}}{3x2x1x\cancel{4!}} = 210$$

Logo, se Januário tivesse acertado a quadra com uma aposta de 11 números receberia 210 prêmios do duque.

Além das atividades apresentadas, podem-se utilizar as tabelas seguintes: Probabilidade de acerto na Quina e Quantidade de prêmios a receber acertando, para desenvolver diversas atividades utilizando as ideias apresentadas sobre Contagem e Probabilidade.

Probabilidades de acerto na Quina

Quantidade de números jogados	**Probabilidade de acerto (1 em)**			
	Quina	**Quadra**	**Terno**	**Duque**
5	24.040.016	64.106	866	36
6	4.006.669	21.658	445	25
7	1.144.763	9.409	261	18
8	429.286	4.770	168	14
9	190.794	2.687	115	12
10	95.396	1.635	82	9
11	52.035	1.056	2	8
12	30.354	714	48	7
13	18.679	502	38	6
14	12.008	364	31	5,8
15	8.005	271	25	5,2

Quantidade de prêmios a receber acertando

Apostas	5 Números				4 Números			3 Números		2 Números
Números jogados	1º Faixa Quina	2º Faixa Quadra	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque	2º Faixa Quadra	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque	4º Faixa Duque
5	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
6	1	5	0	0	2	4	0	3	3	4
7	1	10	10	0	3	12	6	6	12	10
8	1	15	30	10	4	24	24	10	30	20
9	1	20	60	40	5	40	60	15	60	35
10	1	25	100	100	6	60	120	21	105	56
11	1	30	150	200	7	84	210	28	168	84
12	1	35	210	350	8	112	336	36	252	120
13	1	40	280	560	9	144	504	45	360	165
14	1	45	360	840	10	180	720	55	495	220
15	1	50	450	1200	11	220	990	66	660	286

Fonte: https://kisorte.com.br/probabilidade/

3.2.3 Lotofácil

A Lotofácil teve seu primeiro sorteio em 29 de setembro de 2003.

O sorteio especial da Lotofácil é a **Lotofácil da Independência**, que ocorre a cada ano no dia 7 de setembro, exceto quando este dia cai em um domingo.

Figura 18 - Volante da Lotofácil (Frente e Verso)

Fonte: Wikipedia

3.2.3.1 Como jogar?

Para jogar, basta o apostador escolher e marcar de 15 a 18 números dentre os 25 disponíveis no volante (Figura 18). O valor a ser pago na aposta dependerá da quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (em Reais)
15	2,00
16	32,00
17	272,00
18	1.632,00

Os sorteios da Lotofácil são realizados três vezes por semana, às segundas, às quartas e às sextas-feiras e consiste na extração de 15 números diferentes, no universo de 01 a 25. Neste jogo, ganham prêmios os acertadores de 11, 12, 13, 14 ou 15 números.

3.2.3.2 Premiação

O prêmio bruto corresponde a 43,35% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, será deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos, a saber:

- R$ 4,00 para as apostas com 11 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- R$ 8,00 para as apostas com 12 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- R$ 20,00 para as apostas com 13 prognósticos certos entre os 15 sorteados.

Após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante do total destinado à premiação será distribuído para as demais faixas de prêmios nos seguintes percentuais:

- 65% entre os acertadores de 15 números;
- 20% entre os acertadores de 14 números;
- 15% ficam acumulados para a primeira faixa (15 acertos) do concurso especial realizado em setembro de cada ano.

3.2.3.3 Conhecendo um pouco da matemática da Lotofácil

Atividade 1: *Para jogar na Lotofácil, basta o apostador escolher e marcar de 15 a 18 números dentre os 25 disponíveis no volante. Nesta modalidade de loteria, ganham prêmios os acertadores de 11, 12, 13, 14 ou 15 números. Um apostador quer ter a certeza que ganhará o prêmio máximo (acertar os 15 números sorteados). Neste caso, em quantos jogos ele deverá apostar?*

Para determinarmos em quantos jogos de 15 números (aposta simples) o apostador deve apostar para ter a certeza que ganhará o prêmio máximo (acertar os 15 números sorteados), devemos calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Lotofácil.

Como a ordem de sorteio dos números não é importante, utilizaremos a combinação simples para realizar este cálculo, ou seja, faremos a combinação das 25 dezenas tomadas 15 a 15.

$$C_{25}^{15} = \frac{25!}{15!\,(25-15)!} = \frac{25!}{15!\ 10!} = 3.268.760$$

Logo, ele deverá apostar em 3.268.760 jogos de 15 números.

Atividade 2: *Sabendo que cada jogo custa R$ 2,00, quanto este apostador gastaria se fizesse todos os jogos? Suponhamos que a estimativa de prêmio do próximo concurso seja de R$ 2.000.000,00 e que este apostador tenha muito dinheiro, é vantajoso para ele realizar esta aposta?*

Como ele deveria fazer 3.268.760 jogos, ele gastaria:

$$3.268.760 \text{ x } 2{,}00 = \text{R\$ } 6.537.520{,}00$$

Logo, como o prêmio do próximo concurso é menor do que o valor a ser apostado não é vantajoso para ele realizar esta aposta.

Atividade 3: *Se um apostador fizesse uma aposta simples de 15 números na Lotofácil, qual a probabilidade de ele acertar 13 números?*

Identificando os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 15 números diferentes, no universo de 01 a 25.

- Espaço amostral: Neste caso, para determinar o número de elementos do espaço amostral, temos que calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Lotofácil. (Cálculo efetuado na **Atividade 1**)

Logo, o número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n}(S) = 3.268.760$, ou seja, o número de combinações distintas possíveis no sorteio da Lotofácil é igual a 3.268.760.

- **Evento A**: Acertar 13 números com uma aposta simples.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento A**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 13 números com uma aposta simples (15 números). Temos que fazer a combinação dos 15 números tomados 13 a 13 e os dois números restantes podem ser qualquer um dos 10 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 10 números tomados 2 a 2.

$$C_{15}^{13} x\, C_{10}^{2} = \frac{15!}{13!\,(15-13)!} x \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{15!}{13!\,2!} x \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{15x14x\cancel{13}!}{\cancel{13}!\,x2x1} x \frac{10x9x\cancel{8}!}{2x1x\cancel{8}!}$$
$$= \frac{18.900}{4} = 4.725$$

Logo, o número de elementos do evento A é $\mathrm{n(A)} = 4.725.$

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento A é:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{4.725}{3.268.760} = \frac{1}{691}$$

Logo, a probabilidade de ganhar, acertando os 13 números, é de 1 em 691.

Atividade 4: *Complete a tabela a seguir e verifique se o valor pago na aposta da Lotofácil depende da quantidade de números escolhidos e da combinação de jogos de 15 números formados por eles.*

Quantidade de números jogados	**Combinação de jogos de 15 números**	**Valor da aposta (em Reais)**
15	1	2,00
16		32,00
17		272,00
18		1.632,00

- Calculando a combinação dos 16 números jogados, tomados 15 a 15.

$$C_{16}^{15} = \frac{16!}{15!\,(16-15)!} = \frac{16!}{15!\ 1!} = \frac{16x\cancel{15!}}{\cancel{15!}\,x1} = 16$$

Obtemos 16 jogos de 15 números numa aposta de 16 números. Como cada aposta de 15 números custa R$ 2,00, temos:

$$16 \text{ x } 2{,}00 = 32{,}00$$

- Calculando a combinação dos 17 números jogados, tomados 15 a 15.

$$C_{17}^{15} = \frac{17!}{15!\,(17-15)!} = \frac{17!}{15!\ 2!} = \frac{17x16x\cancel{15!}}{\cancel{15!}\,x2x1} = 136$$

Obtemos 136 jogos de 15 números numa aposta de 17 números. Como cada aposta de 15 números custa R$ 2,00, temos:

$$136 \text{ x } 2{,}00 = 272{,}00$$

- Calculando a combinação dos 18 números jogados, tomados 15 a 15.

$$C_{18}^{15} = \frac{18!}{15!\,(18-15)!} = \frac{18!}{15!\ 3!} = \frac{18x17x16x\cancel{15!}}{\cancel{15!}\,x3x2x1} = 816$$

Obtemos 816 jogos de 15 números numa aposta de 18 números. Como cada aposta de 15 números custa R$ 2,00, temos:

$$816 \text{ x } 2{,}00 \; = \; 1.632{,}00$$

Completando a tabela, temos:

Quantidade de números jogados	**Combinação de jogos de 15 números**	**Valor da aposta (em Reais)**
15	1	2,00
16	16	32,00
17	136	272,00
18	816	1.632,00

Desta forma, verifica-se que o valor pago na aposta da Lotofácil depende da quantidade de números escolhidos e da combinação de jogos de 15 números formados por eles.

Atividade 5: *Suponhamos que o apostador pudesse jogar 19 números, quantas apostas de 15 números ele estaria fazendo? Quanto ele pagaria por este jogo?*

- Calculando a combinação dos 19 números jogados, tomados 15 a 15.

$$C_{19}^{15} = \frac{19!}{15!\,(19-15)!} = \frac{19!}{15!\;4!} = \frac{19x18x17x16x\cancel{15!}}{\cancel{15!}\,x4x3x2x1} = 3.876$$

Ele estaria fazendo 3.876 apostas de 15 números.

Como cada aposta de 15 números custa R$ 2,00, temos:

$$3.876 \text{ x } 2{,}00 \; = \; 7.752{,}00$$

Ele pagaria por este jogo R$ 7.752,00.

Além das atividades apresentadas, podem-se utilizar as tabelas seguintes: Probabilidade de acerto na Lotofácil e Quantidade de prêmios a receber acertando, para desenvolver diversas atividades utilizando as ideias apresentadas sobre Contagem e Probabilidade.

Probabilidades de acerto na Lotofácil

Quantidade de números jogados	Probabilidade de acerto (1 em)				
	15 acertos	14 acertos	13 acertos	12 acertos	11 acertos
15	3.268.760	21.791	691	59	11
16	204.297	3.026	162	21	5,9
17	24.035	600	49	9,4	3,7
18	4.005	152	18	5	2,9

Quantidade de prêmios a receber acertando

Aposta	Acertando													
	15 números				14 números				13 números			12 números		11 números
Quantidade de números jogados	15	14	13	12	14	13	12	11	13	12	11	12	11	11
15	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
16	1	15	0	0	2	14	0	0	3	13	0	4	12	5
17	1	30	105	0	3	42	91	0	6	52	78	10	60	15
18	1	45	315	455	4	84	364	364	10	130	390	20	180	35

3.2.4 Lotomania

A Lotomania surgiu como substituta do jogo Trevo da Sorte[5]. Por ser um jogo mais simples, obteve imediata aceitação do público e seu primeiro sorteio ocorreu em 2 de outubro de 1999.

Figura 19 - Volante da Lotomania
(Frente e Verso)

Fonte: Wikipedia

3.2.4.1 Como jogar?

Para jogar, basta o apostador escolher e marcar 50 números dentre os 100 disponíveis no volante (Figura 19), outra opção é efetuar uma nova aposta com o sistema selecionando os outros 50 números não registrados no jogo original, através da Aposta-Espelho.

O valor a ser pago na aposta é único e custa R$ 1,50.

[5] O Trevo da Sorte foi uma tentativa de realizar um "game show" lotérico. O primeiro sorteio foi realizado no programa Domingão do Faustão, da Rede Globo, em 6 de dezembro de 1998. Permaneceu na TV até o concurso 17, quando passou a ser feito no auditório da CAIXA em Brasília, onde tampouco teve sucesso. (CANTON, 2010, p. 20)

Os sorteios da Lotomania são realizados duas vezes por semana, às terças-feiras e às sextas-feiras, às 20h e consiste na extração de 20 números diferentes, compreendidos entre 00 e 99. Neste jogo, ganham prêmios os acertadores de 20, 19, 18, 17, 16, 15 ou aqueles que não acertarem nenhum número.

3.2.4.2 Premiação

O prêmio bruto corresponde a 43,35% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Deste valor, são distribuídos:

- 45% entre os acertadores dos 20 números sorteados - 1ª faixa;
- 16% entre os acertadores de 19 dos 20 números sorteados - 2ª faixa;
- 10% entre os acertadores de 18 dos 20 números sorteados - 3ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 17 dos 20 números sorteados - 4ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 16 dos 20 números sorteados - 5ª faixa;
- 7% entre os acertadores de 15 dos 20 números sorteados - 6ª faixa;
- 8% entre os acertadores de nenhum dos 20 números sorteados - 7ª faixa.

3.2.4.3 Conhecendo um pouco da matemática da Lotomania

Atividade 1: *Seu Raimundo, um senhor muito "supersticioso", passava próximo a uma Casa Lotérica, quando encontrou uma nota de R$ 5,00, acreditando que este era o seu dia de sorte entrou na Lotérica e foi escolher um dos jogos para apostar.*

Observou que para jogar na Lotomania era muito fácil, bastava o apostador escolher e marcar 50 números dentre os 100 números disponíveis no volante, podendo ganhar prêmio se não acertasse nenhum número ou se acertasse 20, 19, 18, 17, 16 ou 15 números e a aposta custava apenas R$ 1,50. Resolveu então fazer uma aposta na Lotomania.

Sabendo dos prêmios disponíveis, ficou curioso em saber qual seria a sua chance de ganhar cada prêmio?

Para descobrirmos qual é a chance do Seu Raimundo ganhar cada prêmio da Lotomania, temos que calcular a probabilidade de cada evento ocorrer.

Primeiro, vamos identificar os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 20 números diferentes, no universo de 00 a 99.
- Espaço amostral: Neste caso, para determinar o número de elementos do espaço amostral, temos que calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Lotomania.

Como a ordem de sorteio dos números não é importante, utilizaremos a combinação simples para realizar este cálculo, ou seja, faremos a combinação das 100 dezenas tomadas 20 a 20.

$$C_{100}^{20} = \frac{100!}{20!\,(100-20)!} = \frac{100!}{20!\ 80!} = 535.983.370.403.809.682.970$$

Logo, o número de elementos do espaço amostral é $\mathrm{n(S)} = 535.983.370.403.809.682.970$, ou seja, o número de combinações distintas possíveis no sorteio da Lotomania é igual a 535.983.370.403.809.682.970.

Agora, para calcular a probabilidade (chance) de ganhar cada prêmio, vamos definir os eventos:

- **Evento A**: Acertar 20 números.
- **Evento B**: Acertar 19 números.
- **Evento C**: Acertar 18 números.
- **Evento D**: Acertar 17 números.
- **Evento E**: Acertar 16 números.
- **Evento F**: Acertar 15 números.
- **Evento G**: Não acertar nenhum número.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento A**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 20 números com uma aposta de 50 números.

$$C_{50}^{20} = \frac{50!}{20!\,(50-20)!} = \frac{50!}{20!\ 30!} = 47.129.212.243.960$$

Logo, o número de elementos do evento A é $\mathrm{n(A)} = 47.129.212.243.960$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento A é:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n}(S)} = \frac{47.129.212.243.960}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{11.372.635}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, acertando 20 números, é de 1 em 11.372.635.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento B**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 19 números com uma aposta de 50 números. Temos que fazer a combinação dos 50 números tomados 19 a 19 e o vigésimo número pode ser qualquer um dos 50 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 50 números tomados 1 a 1.

$$C_{50}^{19} x\, C_{50}^{1} = \frac{50!}{19!\,(50-19)!} x \frac{50!}{1!\,(50-1)!} = \frac{50!}{19!\,31!} x \frac{50!}{1!\,49!}$$
$$= 1.520.297.169.160.000$$

Logo, o número de elementos do evento B é $\mathrm{n(B)} = 1.520.297.169.160.000$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento B é:

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{n(B)}}{\mathrm{n}(S)} = \frac{1.520.297.169.160.000}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{352.551}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, acertando 19 números, é de 1 em 352.551.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento C**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 18 números com uma aposta de 50 números. Temos que fazer a combinação dos 50 números tomados 18 a 18 e os dois números restantes podem ser qualquer um dos 50 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 50 números tomados 2 a 2.

$$C_{50}^{18} x\ C_{50}^{2} = \frac{50!}{18!\,(50-18)!} x\ \frac{50!}{2!\,(50-2)!} = \frac{50!}{18!\,32!} x\ \frac{50!}{2!\,48!}$$
$$= 22.115.572.882.624.375$$

Logo, o número de elementos do evento C é $\mathrm{n(C)} = 22.115.572.882.624.375$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento C é:

$$\mathrm{P}(C) = \frac{\mathrm{n(C)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{22.115.572.882.624.375}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{24.235}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, acertando 18 números, é de 1 em 24.235.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento D**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 17 números com uma aposta de 50 números. Temos que fazer a combinação dos 50 números tomados 17 a 17 e os três números restantes podem ser qualquer um dos 50 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 50 números tomados 3 a 3.

$$C_{50}^{17} x\ C_{50}^{3} = \frac{50!}{17!\,(50-17)!} x\ \frac{50!}{3!\,(50-3)!} = \frac{50!}{17!\,33!} x\ \frac{50!}{3!\,47!}$$
$$= 193.008.636.066.540.000$$

Logo, o número de elementos do evento D é $\mathrm{n(D)} = 193.008.636.066.540.000$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento D é:

$$\mathrm{P}(D) = \frac{\mathrm{n(D)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{193.008.636.066.540.000}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{2.776}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, acertando 17 números, é de 1 em 2.776.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento E**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 16 números com uma aposta de 50 números. Temos que fazer a combinação dos 50 números tomados 16 a 16 e os quatro números restantes podem ser qualquer um dos 50 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 50 números tomados 4 a 4.

$$C_{50}^{16} x\, C_{50}^{4} = \frac{50!}{16!\,(50-16)!} x \, \frac{50!}{4!\,(50-4)!} = \frac{50!}{16!\,34!} x \, \frac{50!}{4!\,46!}$$
$$= 1.133.925.736.890.922.500$$

Logo, o número de elementos do evento E é $\mathrm{n(E)} = 1.133.925.736.890.922.500$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento E é:

$$\mathrm{P}(E) = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{1.133.925.736.890.922.500}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{472}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, acertando 16 números, é de 1 em 472.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento F**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos combinar 15 números com uma aposta de 50 números. Temos que fazer a combinação dos 50 números tomados 15 a 15 e os cinco números restantes podem ser qualquer um dos 50 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 50 números tomados 5 a 5.

$$C_{50}^{15} x\, C_{50}^{5} = \frac{50!}{15!\,(50-15)!} x \, \frac{50!}{5!\,(50-5)!} = \frac{50!}{15!\,35!} x \, \frac{50!}{5!\,45!}$$
$$= 4.768.967.670.581.251.200$$

Logo, o número de elementos do evento F é $\mathrm{n(F)} = 4.768.967.670.581.251.200$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento F é:

$$\mathrm{P}(F) = \frac{\mathrm{n(F)}}{\mathrm{n}(S)} = \frac{4.768.967.670.581.251.200}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{112}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, acertando 15 números, é de 1 em 112.

Calculando a Probabilidade de ocorrer o **Evento G**:

Vamos calcular de quantas maneiras podemos não acertar nenhum número com uma aposta de 50 números. Basta escolher os 20 números dos 50 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 50 números tomados 20 a 20.

$$C_{50}^{20} = \frac{50!}{20!\,(50-20)!} = \frac{50!}{20!\ 30!} = 47.129.212.243.960$$

Logo, o número de elementos do evento G é $\mathrm{n(G)} = 47.129.212.243.960$.

Desta forma, temos que a probabilidade de ocorrer o evento G é:

$$\mathrm{P}(G) = \frac{\mathrm{n(G)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{47.129.212.243.960}{535.983.370.403.809.682.970} = \frac{1}{11.372.635}$$

Logo, a probabilidade de Seu Raimundo ganhar, não acertando nenhum número, é de 1 em 11.372.635.

Atividade 2: *Joaquim gosta de apostar toda semana, o seu jogo preferido é a Lotomania. Já que neste jogo, o apostador deve escolher 50 números para realizar a aposta, ele sempre pode utilizar os seus 40 "números da sorte".*

Sabendo que Joaquim sempre aposta nos seus 40 números e que precisa apostar um total de 50 números, quantas combinações diferentes de jogos Joaquim pode fazer?

Analisando o problema temos que Joaquim sempre utiliza os seus 40 "números da sorte", ou seja, dos 100 números disponíveis para escolher 40 já são fixos.

Desta forma, para saber quantas combinações diferentes de jogos Joaquim pode fazer, basta escolher os 10 números dos 60 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 60 números tomados 10 a 10.

$$C_{60}^{10} = \frac{60!}{10!\,(60-10)!} = \frac{60!}{10!\ 50!} = 75.394.027.566$$

Logo, Joaquim pode fazer 75.394.027.566 combinações diferentes de jogos incluindo os seus 40 "números da sorte".

Atividade 3: *Na Lotomania, o apostador pode realizar uma Aposta-Espelho que consiste em efetuar uma nova aposta com o sistema selecionando os outros 50 números não registrados no jogo original.*

Bira tinha feito um jogo da Lotomania com uma Aposta-Espelho, quando foi conferir o resultado verificou que só tinha acertado 1 número, neste momento, Bira começou a comemorar. Por que Bira estava comemorando?

Como a Aposta-Espelho consiste em efetuar uma outra aposta selecionando os outros 50 números não registrados no jogo original e Bira acertou 1 número na aposta original, logo ele estava comemorando, pois na Aposta-Espelho ele havia acertado os outros 19 números.

Observação: Se apostar em um jogo e na Aposta-Espelho, o apostador pode ganhar se fizer menos que 5 pontos.

Se acertar no Jogo principal	Acertará na Aposta-Espelho
05 pontos	15 pontos
04 pontos	16 pontos
03 pontos	17 pontos
02 pontos	18 pontos
01 ponto	19 pontos
00 ponto	20 pontos*

* Neste caso, o apostador ganhará dois prêmios: acertando 20 pontos e não acertando nenhum ponto.

Além das atividades apresentadas, a tabela seguinte das Probabilidades de acerto na Lotomania pode ser utilizada para desenvolver diversas atividades utilizando as ideias apresentadas sobre Contagem e Probabilidade.

Probabilidades de acerto na Lotomania

Faixa	Probabilidade de acerto (1 em)
20 números	11.372.635
19 números	352.551
18 números	24.235
17 números	2.776
16 números	472
15 números	112
00 números	11.372.635

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho abordou a importância do ensino dos conceitos de Contagem/Análise Combinatória e Probabilidade. Pode-se observar, de acordo com as o Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), que ao estudar probabilidade, os alunos serão capazes de compreender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia.

Além disso, outras ideias importantes que incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance também podem ser observadas nesta pesquisa.

Observamos ainda que o início do desenvolvimento da teoria da probabilidade esteve relacionado aos jogos de azar. Como estes tipos de jogos fazem parte do dia-a-dia dos seres humanos desde a pré-história, apresentamos neste trabalho os jogos de loteria como uma das aplicações da probabilidade.

As modalidades de loterias estudadas foram: Mega-Sena, Quina, Lotofácil e Lotomania. Estas loterias fazem parte das Loterias de Prognósticos Numéricos, onde são utilizados números como fonte de aposta.

Primeiro, apresentamos os conceitos de Contagem/Análise Combinatória de forma simples com exemplos para que o leitor tivesse o embasamento teórico necessário para compreensão das contas que seriam apresentadas.

Foram elaboradas atividades/ perguntas para realizar as análises das chances reais de se ganhar ao realizar uma aposta nos jogos de loteria supracitados e foram efetuados os cálculos aplicando as técnicas de contagem e os conceitos de probabilidade estudados.

Analisando os cálculos apresentados, observamos que a chance (probabilidade) de se ganhar com uma aposta simples o prêmio máximo da Mega-Sena é igual a 1 em 50.063.860, da Quina é igual a 1 em 24.040.016, da Lotofácil é igual a 1 em 3.268.760 e a chance de se ganhar com uma aposta única o prêmio máximo da Lotomania é igual a 1 em 11.372.635, ou seja, a chance de se ganhar o prêmio máximo é muito pequena.

Segundo a CAIXA, a Mega-Sena, apesar de ser o jogo com menor chance de ter uma aposta vencedora, é a preferida dos brasileiros devido à possibilidade de ganhar milhões em uma única aposta.

No que se refere a este jogo de loteria, Rodrigues (2004) relata que uma das perguntas mais frequentes feitas a ele, é se vale a pena jogar. Respondendo a isto ele diz que: do ponto de vista teórico, é fácil ver que a resposta é não. De fato, você estaria colocando dinheiro num jogo que destina apenas 44% da arrecadação para os prêmios e no qual a sua probabilidade de ganhar alguma coisa que valha a pena é muito pequena.

No entanto, para aqueles que acreditam na sorte e gostam de arriscar de vez em quando, Rodrigues (2004) dá algumas sugestões:

a) Nunca aposte muito dinheiro. De fato, com a aposta de 15 dezenas, que custará 17.517,50 reais[6], a sua probabilidade de ganhar o prêmio é aproximadamente igual a $1/10.000$. Portanto, a probabilidade de que você perca o seu dinheiro é bem grande e, se você é capaz de perder 17.517,50 reais sem se importar, você é uma pessoa que não precisa de loterias.
b) Aposte de preferência nos concursos de final zero. Nesses concursos você não está contribuindo para o prêmio de futuros apostadores, está concorrendo a um prêmio maior e principalmente está concorrendo a quantias que outros já perderam.

Esperamos que o trabalho apresentado seja capaz de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem, que as atividades possam ser realizadas também em sala de aula, como uma forma lúdica e prática de apresentar os conceitos de matemática, estimulando as análises, as reflexões e mostrando a aplicabilidade do assunto estudado no cotidiano. Além disso, desejamos que a pesquisa consiga contribuir para o estudo de professores, alunos e pessoas interessadas no conteúdo estudado e/ou apenas interessadas nos referidos jogos.

[6] Valor atualizado consultado no site da Caixa Econômica Federal.

REFERÊNCIAS:

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática.** 1. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2004. 3 v. 240p.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher, 1974. 487p.

BRASIL**. Parâmetros curriculares nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. 126p.

______. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC / SEF, 1998. 148p.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:** Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologia. Brasília, DF: MEC, 2000.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Volume 2 - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: DF: MEC/SEB, 2006. 135p.

______. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2006.

______. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2018 – Matemática. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017. 122p.

______. **Matriz de Referência ENEM 2018**. Brasília, DF: MEC/INEP, 2018. 24p.

CAIXA. **Loteria.** Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias>. Acesso em: 15/05/2018.

CONTRAN. Conselho Nacional de Trânsito. **Resolução nº 729, de 2018**. Estabelece sistema de Placas de Identificação de Veículos no padrão disposto na Resolução MERCOSUL do Grupo Mercado Comum nº 33/2014. Disponível em: < http://www.denatran.gov.br/resolucoes>. Acesso em: 08/08/2018.

CANTON, Ana Maria. (Org.) **A Rede Lotérica no Brasil.** Brasília, DF: Ipea, 2010. 54p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** 1. ed. São Paulo, SP: Ática, 2005. 504p.

______. **Matemática:** Contexto & Aplicações – Ensino Médio – Volume 2. 3. ed. São Paulo, SP: Ática, 2016. 3 v. 280p.

ENEM 2010 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/> .Acesso em: 09/08/2018.

ENEM 2011 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/> .Acesso em: 09/08/2018.

ENEM 2013 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/> .Acesso em: 09/08/2018.

ENEM 2015 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/> .Acesso em: 09/08/2018.

ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/> .Acesso em: 09/08/2018.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio**: o dicionário da língua portuguesa. 8. ed. Curitiba, PR: Positivo, 2010.960p.

FERNANDEZ, Vicente Paz; YOUSSEF, Antonio Nicolau. **Matemática para o 2º grau.** 1. ed. São Paulo, SP: Scipione, 1991. 424p.

FREITAS, Mateus Almeida de. **Aspectos históricos e teóricos das loterias.** 2013. 42f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Goiânia.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática 2:** trigonometria, matrizes, análise combinatória, geometria. São Paulo, SP: FTD, 1992. 381p.

______. **Matemática Completa 2ª série.** 2. ed. renov. São Paulo, SP: FTD, 2005. 384p. (Coleção Matemática Completa)

IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações, 2ª série. 2. ed. São Paulo, SP: Atual, 2004. 544p.

______. **Matemática:** ciência e aplicações, Ensino Médio – Volume 2. 9. ed. São Paulo, SP: Saraiva, 2016. 418p.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio – volume 2**. 6. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006. 372p.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf>. Acesso em: 19/07/2018.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2015. 294p. (Coleção PROFMAT)

NUNES, Victor Arantes. **A utilização dos jogos lotéricos para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio**. 2015. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica.

RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo Estadual:** Matemática. Rio de Janeiro, RJ: SEEDUC, 2012. 24p.

RODRIGUES, Flavio Wagner. A mídia e a mega-sena acumulada. **Explorando o Ensino da Matemática,** Brasília, v. 1, p. 23-28, 2004.

SÁ, Ilydio Pereira de. **Raciocínio Lógico:** Concursos Públicos/Formação de Professores. Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008. 216p.

SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula:** 2ª série**.** 2. ed. renov. São Paulo, SP: FTD, 2005. 400p.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática:** ensino médio 2ª série. 5. ed. São Paulo, SP: Saraiva, 2005. 480p.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato Matemática – 2º ano**.1.ed. São Paulo, SP: FTD, 2016. 400p. (Coleção #Contato Matemática)

APÊNDICE A

ARRECADAÇÃO DA MEGA-SENA

(JANEIRO A JUNHO – 2018)

Número do concurso	Data	Arrecadação (em reais)
2001	03/01/2018	17.710.070,00
2002	06/01/2018	28.829.944,50
2003	10/01/2018	30.509.412,50
2004	13/01/2018	38.638.484,50
2005	17/01/2018	32.721.132,50
2006	20/01/2018	38.569.461,00
2007	24/01/2018	38.825.178,00
2008	27/01/2018	43.671.250,00
2009	31/01/2018	47.352.865,00
2010	03/02/2018	61.968.606,00
2011	06/02/2018	43.455.856,50
2012	08/02/2018	60.329.097,50
2013	10/02/2018	69.104.360,50
2014	14/02/2018	52.356.503,50
2015	17/02/2018	116.332.797,00
2016	21/02/2018	26.614.714,00
2017	24/02/2018	34.810.982,50
2018	28/02/2018	37.486.974,00
2019	03/03/2018	45.790.930,50
2020	07/03/2018	53.716.386,50
2021	10/03/2018	61.453.154,00
2022	14/03/2018	64.651.783,00
2023	17/03/2018	73.781.900,50
2024	21/03/2018	25.175.416,00
2025	24/03/2018	43.865.881,50
2026	28/03/2018	45.084.077,50
2027	31/03/2018	43.257.056,50
2028	04/04/2018	53.470.886,00
2029	07/04/2018	29.630.352,50
2030	11/04/2018	43.333.094,00
2031	14/04/2018	30.644.306,00
2032	17/04/2018	19.334.920,50
2033	20/04/2018	38.053.967,00
2034	25/04/2018	26.153.494,50
2035	28/04/2018	37.614.202,50

2036	02/05/2018	34.643.273,00
2037	05/05/2018	48.518.022,00
2038	08/05/2018	32.033.897,00
2039	10/05/2018	45.328.972,50
2040	12/05/2018	61.238.142,00
2041	16/05/2018	71.952.860,00
2042	19/05/2018	28.129.048,50
2043	23/05/2018	29.191.365,00
2044	26/05/2018	33.740.301,00
2045	30/05/2018	41.661.851,00
2046	02/06/2018	23.792.139,00
2047	06/06/2018	29.094.681,00
2048	09/06/2018	35.709.740,50
2049	13/06/2018	35.572.736,50
2050	16/06/2018	44.647.610,00
Arrecadação total no período		2.149.554.137,50
Média da arrecadação por concurso		42.991.082,75

APÊNDICE B

Entendendo os cálculos das cotas (quantidade) de prêmios pagos no jogo da Quina!

O pagamento das cotas de prêmios vai ser efetuado de acordo com a quantidade de números jogados e a quantidade de números acertados dentre as dezenas sorteadas.

Vamos fazer os cálculos para entender como calcular os valores das cotas apresentados na tabela a seguir:

Quantidade de prêmios a receber acertando

Apostas	5 Números				4 Números			3 Números		2 Números
Números jogados	1º Faixa Quina	2º Faixa Quadra	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque	2º Faixa Quadra	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque	3º Faixa Terno	4º Faixa Duque	4º Faixa Duque
5	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
6	1	5	0	0	2	4	0	3	3	4
7	1	10	10	0	3	12	6	6	12	10
8	1	15	30	10	4	24	24	10	30	20
9	1	20	60	40	5	40	60	15	60	35

- Suponhamos que o apostador tenha **<u>acertado a quina</u>** com uma aposta de:

  - **5 números.**

Com uma aposta simples de 5 números, temos uma única combinação possível com os 5 números sorteados.

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = \frac{5!}{5!\,0!} = 1$$

Desta forma, se acertar a quina com uma aposta de 5 números receberá 1 prêmio da quina e não receberá prêmios nas outras faixas.

- **6 números.**

Com uma aposta de 6 números, temos uma única combinação possível com os 5 números sorteados. (1 prêmio da quina)

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação da dezena não sorteada tomadas 1 a 1.

$$C_5^4 x\ C_1^1 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} x\ \frac{1!}{1!\,(1-1)!} = \frac{5!}{4!\,1!} x\ \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}x1} x\ 1 = 5$$

Desta forma, se acertar a quina com uma aposta de 6 números receberá 1 prêmio da quina, 5 prêmios da quadra e não receberá prêmios nas outras faixas.

- **7 números.**

Com uma aposta de 7 números, temos uma única combinação possível com os 5 números sorteados. (1 prêmio da quina)

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação das 2 dezenas não sorteadas tomadas 1 a 1.

$$C_5^4 x\ C_2^1 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} x\ \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = \frac{5!}{4!\,1!} x\ \frac{2!}{1!\,1!} = \frac{5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}x1} x\ 2 = 10$$

Para calcular a quantidade de prêmios do terno, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 3 a 3 e multiplicar pela combinação das 2 dezenas não sorteadas tomadas 2 a 2.

$$C_5^3 x\ C_2^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} x\ \frac{2!}{2!\,(2-2)!} = \frac{5!}{3!\,2!} x\ \frac{2!}{2!\,0!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}x2x1} x\ 1 = 10$$

Desta forma, se acertar a quina com uma aposta de 7 números receberá 1 prêmio da quina, 10 prêmios da quadra, 10 prêmios do terno e não receberá prêmios na outra faixa.

- **8 números.**

Com uma aposta de 8 números, temos uma única combinação possível com os 5 números sorteados. (1 prêmio da quina)

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação das 3 dezenas não sorteadas tomadas 1 a 1.

$$C_5^4 x\ C_3^1 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} x \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{5!}{4!\,1!} x \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{5x\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,x1} x \frac{3x\cancel{2!}}{1x\cancel{2!}} = 15$$

Para calcular a quantidade de prêmios do terno, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 3 a 3 e multiplicar pela combinação das 3 dezenas não sorteadas tomadas 2 a 2.

$$C_5^3 x\ C_3^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} x \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{5!}{3!\,2!} x \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,x2x1} x \frac{3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,x1} = 30$$

Para calcular a quantidade de prêmios do duque, basta fazer a combinação das 5 dezenas sorteadas tomadas 2 a 2 e multiplicar pela combinação das 3 dezenas não sorteadas tomadas 3 a 3.

$$C_5^2 x\ C_3^3 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} x \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{5!}{2!\,3!} x \frac{3!}{3!\,0!} = \frac{5x4x\cancel{3!}}{2x1x\cancel{3!}} x\ 1 = 10$$

Desta forma, se acertar a quina com uma aposta de 8 números receberá 1 prêmio da quina, 15 prêmios da quadra, 30 prêmios do terno e 10 prêmios do duque.

- Suponhamos que o apostador tenha **acertado a quadra** com uma aposta de:

- **5 números.**

Com uma aposta simples de 5 números, temos uma única combinação possível da quadra com os 5 números sorteados, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação da dezena não sorteada tomadas 1 a 1.

$$C_4^4 x\ C_1^1 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} x \frac{1!}{1!\,(1-1)!} = \frac{4!}{4!\,0!} x \frac{1!}{1!\,0!} = 1\ x\ 1 = 1$$

Desta forma, se acertar a quadra com uma aposta de 5 números receberá 1 prêmio da quadra e não receberá prêmios nas outras faixas.

- **6 números.**

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação das 2 dezenas não sorteadas tomadas 1 a 1.

$$C_4^4 x\ C_2^1 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} x \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = \frac{4!}{4!\,0!} x \frac{2!}{1!\,1!} = 1\ x\ 2 = 2$$

Para calcular a quantidade de prêmios do terno, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 3 a 3 e multiplicar pela combinação das 2 dezenas não sorteadas tomadas 2 a 2.

$$C_4^3 x\ C_2^2 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} x \frac{2!}{2!\,(2-2)!} = \frac{4!}{3!\,1!} x \frac{2!}{2!\,0!} = \frac{4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,x1} x\ 1 = 4$$

Desta forma, se acertar a quadra com uma aposta de 6 números receberá 2 prêmios da quadra, 4 prêmios do terno e não têm prêmio na outra faixa.

- **7 números.**

Para calcular a quantidade de prêmios da quadra, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 4 a 4 e multiplicar pela combinação das 3 dezenas não sorteadas tomadas 1 a 1.

$$C_4^4 x\ C_3^1 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} x \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{4!}{4!\,0!} x \frac{3!}{1!\,2!} = 1\ x\ 3 = 3$$

Para calcular a quantidade de prêmios do terno, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 3 a 3 e multiplicar pela combinação das 3 dezenas não sorteadas tomadas 2 a 2.

$$C_4^3 x\ C_3^2 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} x \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{4!}{3!\,1!} x \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{4x\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,x1} x \frac{3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,x1} = 12$$

Para calcular a quantidade de prêmios do duque, basta fazer a combinação das 4 dezenas sorteadas tomadas 2 a 2 e multiplicar pela combinação das 3 dezenas não sorteadas tomadas 3 a 3.

$$C_4^2 x\ C_3^3 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} x \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{4!}{2!\,2!} x \frac{3!}{3!\,0!} = \frac{4x3x\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,x2x1} x\ 1 = 6$$

Desta forma, se acertar a quadra com uma aposta de 7 números receberá 3 prêmios da quadra, 12 prêmios do terno e 6 prêmios do duque.

Com base no que foi apresentado, agora é possível fazer o cálculo de todas as cotas de prêmios pagas pela Quina, basta saber a quantidade de números jogados e a quantidade de números acertados dentre as dezenas sorteadas.