

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Fábio Vinícius Silva dos Santos

**UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA
PARA O ENSINO MÉDIO BASEADA EM PROJETOS**

Rio de Janeiro
2019



Fábio Vinícius Silva dos Santos

**UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA
PARA O ENSINO MÉDIO BASEADA EM PROJETOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof.(a). Dra. Andreia Carvalho Maciel Barbosa

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

S237 Santos, Fábio Vinicius Silva dos
Uma proposta de aprendizagem matemática para o ensino médio baseada em projetos / Fábio Vinicius Silva dos Santos. – Rio de Janeiro, 2019.
81 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Andreia Carvalho Maciel Barbosa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aprendizagem baseada em projetos. I. Barbosa, Andreia Carvalho Maciel. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB7 5692.

Fábio Vinícius Silva dos Santos

**UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA
PARA O ENSINO MÉDIO BASEADA EM PROJETOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____ / ____ / ____.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Andreia Carvalho Maciel Barbosa (Orientadora)
Colégio Pedro II

Prof^a. Dr^a. Liliana Manuela Gaspar Cerveia da Costa
Colégio Pedro II

Prof^a. Dr^a. Dora Soraia Kindel
UFRRJ

Rio de Janeiro
2019

Dedicada à minha esposa, Vívian Dias, com muito amor. Ao meu filho e eterno amigo, João Vinícius, pelo carinho de todas as horas. À minha filha, Cecília, que acabou de chegar para construir a sua própria história.

AGRADECIMENTOS

A Deus que sempre esteve guiando a minha caminhada.

Aos meus amigos espirituais que sabiamente ilustram e enriquecem a minha jornada trazendo esclarecimento e comunhão ao próximo.

À minha amada esposa Vívian Dias pelo companheirismo e generosidade ao longo de todo o curso.

Ao meu filho João Vinícius pelo seu olhar, pela sua vivacidade e por esse amor puro que torna a minha vida mais recompensadora.

À minha menina Cecília que mesmo recém chegada já vem mudando os meus sentimentos, os meus pensamentos e a minha maneira de enxergar o mundo.

Aos meus pais Maurício e Vera Lúcia que se doaram e renunciaram seus sonhos para me ensinar a viver com dignidade.

Ao meu irmão Marcos Paulo, por compreender a minha ausência em muitos momentos.

Aos meus sobrinhos João Pedro, João Vitor, João Gabriel, João Henrique e João Phelipe pelos diversos momentos de alegria e muita diversão.

À minha orientadora Andreia Maciel pelo apoio nessa empreitada, pela excelência na orientação, por sua generosa disponibilidade e pelas reuniões bem humoradas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Brasil – CAPES) pelo apoio ao presente trabalho realizado sob o código de financiamento 001.

À coordenação e aos professores do PROFMAT – CPII pelos ensinamentos proporcionados em especial aos professores Daniel Felipe Neves Martins, Liliana Manuela Gaspar Cerveia da Costa e Patrícia Erthal de Moraes.

Aos membros da banca examinadora dessa presente dissertação a professora Dora Soraia Kindel e a professora Liliana Manuela Gaspar Cerveia da Costa.

À equipe da Biblioteca Professora Silvia Becher pelo cuidado e carinho na etapa conclusiva desta presente dissertação em especial à bibliotecária Simone Alves.

À minha ex-aluna do Ensino Médio Gabriela Oliva Cardial e hoje aluna do curso Letras–Tradução da PUC–RIO pela tradução para o inglês do resumo deste trabalho.

Aos diretores, coordenadores e colegas professores dos colégios em que leciono pelo incentivo e em especial o meu amigo André Luiz Gomes Augusto.

Aos meus queridos alunos do Colégio Estadual Conselheiro Macedo Soares que colaboraram como sujeitos dessa dissertação.

A cada um dos meus alunos e ex-alunos que são os grandes motivadores do meu progresso profissional.

*“Focado no seu mundo qualquer homem
Imagina muito menos do que pode ver
No escuro do seu quarto ignora o céu lá fora
E fica claro que ele não quer perceber
Viver é uma questão de início, meio e fim
Pra quê a solidão, é simples assim”.*
Lenine e Dudu Falcão

RESUMO

SANTOS, Fábio Vinícius Silva dos. **Uma proposta de aprendizagem em matemática para ensino médio baseada em projetos.** 2019. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Este trabalho apresenta uma proposta de aprendizagem matemática para ensino médio baseada em projetos por meio de algumas práticas didáticas utilizadas com alunos de um colégio estadual localizado no município de Niterói no estado do Rio de Janeiro. São apresentados em seu desenvolvimento os tipos de projetos como também as características e as etapas da aprendizagem baseada em projetos e uma breve comparação com a aprendizagem convencional. A presente proposta foi implementada por meio de um projeto chamado de Matemática Além dos Números (MAN) que tem como objetivo a busca do saber matemático por meio de uma aprendizagem diferenciada que integra as tecnologias digitais e as não digitais. O trabalho realizado contemplou o tema da Semana Nacional de Ciências e Tecnologia (SNCT) do ano de 2017 que foi “A Matemática está em tudo!” onde os alunos exploraram os conceitos da disciplina por meio de atividades lúdicas e recreativas. Além dessa mudança de olhar apresentada para o desenvolvimento da aprendizagem da Matemática e o seu entorno, o trabalho relaciona as habilidades das competências específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com as propostas desenvolvidas e os seus possíveis ajustes para as versões futuras. E neste sentido, concluímos o trabalho com o profundo interesse de sua continuidade e progresso.

Palavras-chave: Aprendizagem matemática; Aprendizagem baseada em projetos; Matemática além dos números; Semana Nacional de Ciências e Tecnologia; Habilidades das competências específicas.

ABSTRACT

SANTOS, Fábio Vinícius Silva dos. **Uma proposta de aprendizagem em matemática para ensino médio baseada em projetos.** 2019. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

This dissertation presents a proposal for Mathematics learning for High School students, based on projects featuring didactic practices used with students of a State School located in the city of Niterói in the state of Rio de Janeiro. In the body of the essay are presented the types of projects, as well as their characteristics and the stages of the project-based learning, and a brief comparison with conventional learning. This proposal was implemented through a project called “Mathematics Beyond Numbers” (MAN) that aims to search for mathematical knowledge through a differentiated learning method that integrates digital and non-digital technologies. This project work has contemplated the theme of the National Science and Technology Week (SNCT) of 2017, which was "Mathematics is in everything!". There, the students explored the concepts of the discipline through fun and recreational activities. In addition to this different view of learning for the development of Mathematics learning and its surroundings, this project work correlates the capabilities of the specific competences of the National Common Curricular Base (BNCC) with the proposals developed and their possible adjustments for their future versions. And in this sense, we conclude the work with the deep interest of its continuity and progress.

Keywords: Mathematics learning; Project-based learning; Mathematics Beyond Numbers; National Science and Technology Week; Capabilities of specific competences.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABP	Aprendizagem Baseada em Projetos
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEB	Câmara de Educação Básica
CECMS	Colégio Estadual Conselheiro Macedo Soares
CEFET-MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CNE	Conselho Nacional de Educação
CPF	Cadastro de Pessoa Física
CPII	Colégio Pedro II
DV	Dígito Verificador
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MAN	Matemática Além dos Números
MCTIC	Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
MP	Metodologia de Projetos
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PBL	Project-Based Learning
PROGPPEC	Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
RG	Registro Geral
RJ	Estado do Rio de Janeiro
SEEDUC/RJ	Secretaria de Estado e Educação do Rio de Janeiro
SENAI-RIO	Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial do Rio de Janeiro
SNCT	Semana Nacional de Ciência e Tecnologia
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TNT	Tecido Não Tecido
UF	Unidade da Federação

LISTA DE DIAGRAMAS

Diagrama 1 – O projeto MAN e os seus segmentos.....	18
Diagrama 2 – Tipos de projetos.....	22
Diagrama 3 – Fases de um projeto de ABP.....	25
Diagrama 4 – O projeto e suas versões.....	36
Diagrama 5 – Principais características de uma ABP.....	43
Diagrama 6 – Propostas de ABP para o Projeto SNCT 2017 CECMS.....	44
Diagrama 7 – Propostas de ABP para o Projeto SNCT 2018 CECMS.....	72
Diagrama 8 – Os primeiros passos para o desenvolvimento das propostas.....	76
Diagrama 9 – Conteúdos primários e secundários.....	76
Diagrama 10 – Fases e as principais etapas de um projeto de ABP.....	79

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Seção atual do Projeto MAN.....	31
Figura 2 – Tela do Resta um na versão online com as regras do jogo	45
Figura 3 – Tela do Resta um na versão offline.....	46
Figura 4 – Como resolver o Resta um de uma maneira simples	47
Figura 5 – Uma versão assimétrica para o tabuleiro do resta um.....	47
Figura 6 – Tabuleiro do resta um mapeado	48
Figura 7 – Artefato da equipe A do resta um	49
Figura 8 – Artefato da equipe B do resta um 1º quadrante.....	50
Figura 9 – Artefato da equipe B do resta um 2º quadrante.....	50
Figura 10 – Artefato da equipe B do resta um 3º quadrante.....	50
Figura 11 – Artefato da equipe B do resta um 4º quadrante.....	50
Figura 12 – A versão para os dígitos verificadores do CPF utilizando planilhas.....	54
Figura 13 – A versão para os dígitos verificadores do CPF (as planilhas criadas)	55
Figura 14 – A versão para os dígitos verificadores do CPF utilizando o Scratch	56
Figura 15 – Tela inicial da proposta do CPF utilizando o Scratch	56
Figura 16 – Tela final da proposta do CPF utilizando o Scratch.....	56
Figura 17 – Fase de preparação para a determinação dos DV's do CPF.....	58
Figura 18 – Fase final para a determinação dos DV's do CPF.....	59
Figura 19 – Cartela utilizada no dia da apresentação para a determinação dos DV's do CPF.....	59
Figura 20 – Cartões mágicos binários utilizados na Matemática	60
Figura 21 – Representação binária dos números de 0 a 63	62
Figura 22 – Cartões mágicos binários com destaque para o número 50	63
Figura 23 – Recorte do manual do ventilador com controle de combinação binária	63
Figura 24 – Detalhe das alavancas do controle que usa a combinação binária	63
Figura 25 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch	64
Figura 26 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch tela inicial.....	64
Figura 27 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch 1º cartão	65
Figura 28 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch tela de resultado	65
Figura 29 – Os cartões mágicos binários para o dia de nascimento	66
Figura 30 – Os cartões mágicos binários para o mês de nascimento	66
Figura 31 – Os cartões mágicos binários para a idade	66

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Âncoras do projeto.....	38
Quadro 2 – Opções de temas a serem escolhidos	38
Quadro 3 – Opções de propostas de trabalho por equipes.....	39
Quadro 4 – Modelos de CPF	52
Quadro 5 – Funções utilizadas na planilha dos dígitos verificadores do CPF	55
Quadro 6 – As minilições relacionadas com a equipe D.....	57
Quadro 7 – Habilidades da competência específica 1 envolvidas nas experiências de ABP ...	68
Quadro 8 – Habilidades da competência específica 2 envolvidas nas experiências de ABP ...	68
Quadro 9 – Habilidades da competência específica 3 envolvidas nas experiências de ABP ...	68
Quadro 10 – Habilidades da competência específica 4 envolvidas nas experiências de ABP .	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Um modelo de aprendizagem e suas características.....	23
Tabela 2 – Comparando a aprendizagem convencional versus ABP	28
Tabela 3 – Os movimentos das peças no tabuleiro do resta um mapeado.....	48
Tabela 4 – A relação do 9º dígito do CPF com o estado de origem do documento	52
Tabela 5 – Escrevendo de 1 a 10 utilizando a adição de diferentes potências de 2	61

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 A APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS (ABP)	20
2.1 Os tipos de projetos educacionais	21
2.2 O porquê da escolha da ABP	22
2.3 As características essenciais da ABP	24
2.4 As etapas de ensino na experiência de ABP	25
2.5 Uma comparação entre a aprendizagem convencional e a ABP	28
3 A PROPOSTA E SUAS PRIMEIRAS VERSÕES	30
3.1 Primeira versão: Versão incubadora	30
3.2 Segunda versão: Versão experimental	34
3.3 Terceira versão: Matemática Além dos Números (MAN)	36
3.4 Descrição das fases e etapas da ABP no contexto do projeto	37
4 AS PROPOSTAS DO PROJETO E AS HABILIDADES MATEMÁTICAS ENVOLVIDAS ..	44
4.1 Proposta 1: O jogo do Resta um	45
4.1.1 Equipe A – Usando o painel vertical de TNT.....	46
4.1.2 Equipe B – Usando uma base giratória de madeira	49
4.2 Proposta 2: Os dígitos verificadores do CPF	51
4.2.1 Equipe C – Usando o Scratch e Planilhas	54
4.2.2 Equipe D – Usando cartelas.....	57
4.3 Proposta 3: Os Cartões Mágicos Binários	60
4.3.1 Equipe E – Usando as Cartelas Binárias e o Scratch	62
4.3.2 Equipe F – Usando as Cartelas Binárias com performance	65
4.4 As habilidades Matemáticas envolvidas nas propostas do projeto	67
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
REFERÊNCIAS	73
APÊNDICE A – OS PRIMEIROS PASSOS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS PROPOSTAS	75
APÊNDICE B – O DESENVOLVIMENTO DAS PROPOSTAS DE UM PROJETO DE ABP ..	78

1 INTRODUÇÃO

[...] Isto levou Vygotsky à sua hipótese principal: o ensino só é efetivo quando aponta para o caminho do desenvolvimento. A criança que frequenta escola, disse ele, empregando uma vez mais termos hegelianos, tem que aprender a transformar uma capacidade “em si” em uma capacidade “para si”. ... O professor, portanto, cria basicamente as condições para que determinados processos cognitivos se desenvolvam, sem implantá-los (pivô) diretamente na criança. (VYGOTSKY, 1933 apud VERR; VALSINER, 2009, p. 358).

Este trabalho apresenta em seu desenvolvimento uma proposta de aprendizagem Matemática para o ensino médio baseada em projetos desenvolvida pelo professor/pesquisador. A motivação para esta pesquisa surgiu do interesse do professor/pesquisador de investigar, de forma mais específica, o desenvolvimento e a relevância de suas práticas em seu cotidiano junto com os alunos.

Paralelamente à elaboração do trabalho com os alunos, ocorriam os encontros de orientação na Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura (PROPGPEC) do Colégio Pedro II, em São Cristóvão/RJ. Em um desses encontros, a orientadora disse que “*a minha proposta de trabalho era um projeto e que se explorássemos o tema para o TCC poderia ficar bom*”.

Nessa busca, o modelo da Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) ou Project-Based Learning (PBL) se sobressaiu em relação aos demais consultados durante a nossa pesquisa bibliográfica e foi escolhido como estratégia pedagógica para a construção de uma arquitetura de ensino.

Diariamente, muitos profissionais de diversas áreas de atuação e chefes de família devem se perguntar: Como potencializar aquilo que faço? Como reduzir o consumo da conta de energia da minha casa? Saindo da esfera do “*Como*” e passando para a esfera do “*Por que*”, poderíamos ter: Por que o cliente final não tem interesse pelo nosso produto? Por que levamos duas horas no mercado fazendo uma compra? E são por esses desejos e desafios, disfarçados de perguntas, que os projetos surgem.

Diversas obras já foram publicadas com experiências na área de educação destacando o potencial da ABP e a sua contribuição no processo de aprendizagem. Neste presente trabalho, foram escolhidas referências de dois professores brasileiros que são Eduardo F. Barbosa e Dácio G. de Moura, ambos do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), além do norte americano Willian N. Bender.

Como as escolas hoje enfrentam dificuldades para ensinar em um mundo de motivações e distrações múltiplas, este trabalho apresenta uma possibilidade de ações que conecta essas motivações, que, por muitas vezes, se encontram perdidas.

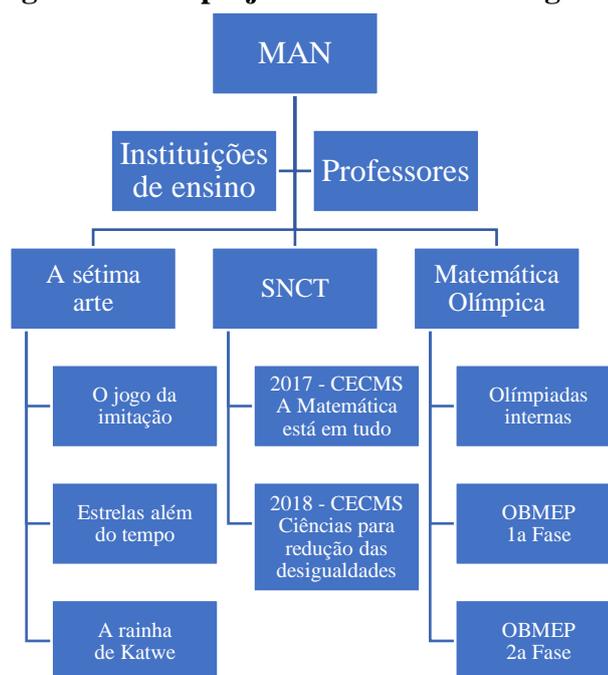
O presente trabalho, é um dos segmentos de um projeto apresentado como “Matemática Além dos Números” (MAN). O MAN é um projeto que o professor/pesquisador desta dissertação realiza nas instituições de ensino onde leciona e que tem como objetivo criar, por meio de situações propostas pelo professor ou trazidas pelos próprios alunos, a possibilidade de se enxergar a Matemática para além dos números.

O nome do projeto foi inspirado em uma das falas do personagem Al Harrison, interpretado pelo ator Kevin Costner no filme bibliográfico “Estrelas Além do Tempo”, “Hidden Figures” título original em inglês, lançado no Brasil em fevereiro de 2017.

Atualmente, o projeto MAN está dividido em três segmentos expostos no Diagrama 1. Um dos segmentos foi identificado como a “A sétima arte”, que é realizado por meio de apresentações e discussões ao longo do ano letivo, utilizando as diversas produções do cinema e que conta com a participação e a colaboração de professores de outras disciplinas do Ensino Médio nas instituições onde o professor/pesquisador deste trabalho leciona.

O outro segmento, assunto de estudo desde trabalho, está relacionado com a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), e é realizado nos dois últimos bimestres do ano letivo. Este segmento acontece hoje e exclusivamente no Colégio Estadual Conselheiro Macedo Soares (CECMS) localizado no município de Niterói/RJ em turmas do Ensino Médio.

O terceiro segmento está relacionado a Matemática Olímpica onde prestigiamos os alunos que possuem um interesse diferenciado para a disciplina de Matemática por meio de uma Olimpíada Interna envolvendo apenas os alunos das próprias instituições. Um outro ponto deste segmento é a preparação para a 1ª fase e para a 2ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que acontece de forma paralela aos bimestres ou trimestres letivos em horários alternativos.

Diagrama 1 – O projeto MAN e os seus segmentos

Fonte: O autor, 2018.

É importante deixar claro que as propostas do projeto MAN não deixam de lado a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com toda a sua estrutura dividida em competências gerais e específicas, como também os demais documentos oficiais que norteiam o ensino em seu nível básico e o ensino da Matemática na Educação Básica no Brasil.

E sendo assim, é por meio desses múltiplos olhares, que o objetivo geral deste trabalho é o de apresentar uma proposta de um projeto educacional, em desenvolvimento, para alunos do Ensino Médio de Matemática utilizando a ABP.

Sobre os aspectos próprios, citados anteriormente, em relação à prática vivenciada nesta pesquisa, os objetivos específicos são:

- Investigar as etapas da ABP desenvolvidas pelos alunos;
- Investigar a evolução do engajamento dos alunos durante a ABP;
- Identificar as aprendizagens e as habilidades matemáticas do Ensino Médio desenvolvidas por meio da ABP;
- Relatar os diferentes resultados de uma proposta da ABP e relacioná-los com o produto final desenvolvidos e apresentados pelos alunos.

Para atingir os objetivos traçados, organizamos essa dissertação em 4 capítulos além do capítulo referente a introdução. No capítulo 2 a seguir, temos em suas linhas, o desenho das etapas da ABP vividas na prática. Estratégias específicas são apresentadas e discutidas, bem

como, algumas questões teóricas subjacentes, mas a ênfase maior está em como a ABP pode ser aplicada em um ambiente escolar.

Incluimos, neste capítulo, orientações sobre como a ABP foi acontecendo em relação ao seu formato e a sua prática. Iniciamos falando de projetos em forma geral e depois tecemos uma conversa breve sobre os tipos de projetos. Apresentamos a ABP por meio das suas ideias centrais e como ela se apresenta em relação às suas principais características, fases e etapas para uma primeira aplicação para um professor ainda tímido no processo.

No capítulo 3, abrimos o álbum de recordações e desviamos um pouco o nosso olhar para as primeiras versões do projeto de trabalho em questão e suas lembranças mais saudosistas. Relatamos o ponto de partida do projeto e que com tempo foi ganhando corpo, forma e maturidade. Descrevemos aqui, a evolução das etapas da pesquisa realizada e o envolvimento engajado dos seus agentes diretos e indiretos.

Nos três primeiros tópicos do capítulo 4, apresentamos a proposta de projeto no seu formato atual onde a pesquisa aconteceu verdadeiramente. Neste ponto do trabalho, relatamos com objetividade, as seis experiências realizadas no CECMS para os alunos do 3º ano do Ensino Médio no ano de 2017. Tivemos nesse momento, o desabrochar real do uso da ABP por meio de práticas simples, mas bem curiosas em relação ao ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática.

Concluimos o capítulo mostrando nossa satisfação pela realização do trabalho e dos resultados colhidos ao longo de todo o processo. Estabelecemos aqui, uma análise entre os pontos conceituais apresentados nas propostas de trabalho junto com as competências específicas da Matemática na BNCC.

Nas considerações finais, relatamos os pontos em que o trabalho em questão nos permitiu, em relação às suas propostas, explorar ainda mais o saber matemático e as inúmeras possibilidades de compreensão desse saber por parte dos alunos.

2 A APRENDIZAGEM BASEADA EM PROJETOS (ABP)

[...] formar para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa: saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir; enfrentar problemas de diferentes naturezas; participar socialmente, de forma prática e solidária; ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e, especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado. (BRASIL, 2002, p. 9)

Para realizar uma tarefa, seja ela simples ou sofisticada, o homem se organiza em função daquilo que ele tem como objetivo. Isso significa ter em mente, um “planejamento que se faz com a intenção de realizar ou desenvolver alguma coisa” (DICIONÁRIO, 2018, não paginado). Caso isso seja o que o indivíduo realmente quer, podemos dizer então que, e de forma geral, este indivíduo deseja desenvolver um projeto.

Na literatura, são intermináveis os tipos de projetos para as diferentes necessidades e áreas de conhecimento. Existem os projetos pessoais onde incluímos os projetos de vida, os projetos de casa e os projetos de decoração. Pensando no aspecto profissional, além dos projetos de casa e os projetos de decoração, pois estes necessitam também de um profissional, temos os projetos corporativos e os projetos de tecnologias digitais. No segmento das ciências, devemos incluir os projetos de reprodução humana assistida e os projetos espaciais, etc.

Mas não só de diferenças existem os projetos, eles possuem muitas coisas em comum. Segundo Maximiano (1997, p. 20) todo projeto “é um empreendimento finito, com objetivos claramente definidos em função de um problema, oportunidade ou interesse de uma pessoa ou organização”. Para Baker e Baker (1998, p. 5) “é uma sequência de tarefas com um início e um fim que são limitados pelo tempo, pelos recursos e resultados desejados. Um projeto possui um resultado desejável específico, um prazo para execução e um orçamento que limita a quantidade de pessoas, insumo e dinheiro que podem ser usados para completar o projeto”.

Na concepção de Moura e Barbosa (2017, não paginado), um projeto é classificado como educacional quando ele é dado por “um empreendimento ou conjunto de atividades com objetivos claramente definidos em função de problemas, necessidades, oportunidades ou interesses de um sistema educacional, de um educador, grupos de educadores ou de alunos, com a finalidade de realizar ações voltadas para a formação humana, construção do conhecimento e melhoria de processos educativos”.

2.1 Os tipos de projetos educacionais

Podemos dizer, que além de diferentes em relação aos seus propósitos, os projetos também são diferentes em relação às suas características. Além disso, entre os tipos de projetos, existem os projetos educacionais que são aqueles destinados ao ambiente acadêmico ou escolar que é o foco deste presente trabalho.

Na concepção de Moura e Barbosa (2018, não paginado), a classificação geral que apresentamos a seguir contempla, de forma ampla, os vários tipos de projetos que ocorrem na área educacional.

Projetos de Intervenção: São projetos desenvolvidos no âmbito de contextos ou organizações, com vistas a promover uma intervenção, visando a introdução de modificações na estrutura e/ou na dinâmica (operação) da organização ou contexto, afetando positivamente seu desempenho. Os projetos de intervenção visam a solução de problemas ou o atendimento de necessidades identificadas. Este tipo de projeto ocorre em instituições sociais, educacionais e no setor produtivo, comercial, etc.

Projetos de Pesquisa: São projetos que têm como principal finalidade a obtenção de conhecimentos sobre determinado problema, questão ou assunto, com garantia de verificação experimental. Existem diversos tipos de projetos de pesquisas, próprias dos setores acadêmicos e de instituições de pesquisa.

Projetos de Desenvolvimento (ou de Produto): São projetos que ocorrem no âmbito de uma organização com a finalidade de produção de novos serviços, atividades ou “produtos”. Exemplos de projetos deste tipo são: desenvolvimento de novos materiais didáticos; desenvolvimento de nova organização curricular; desenvolvimento de um novo curso; desenvolvimento de softwares educacionais; produção de livro didático; etc. Este tipo de projeto é muito comum também em outras organizações e contextos como o setor produtivo, comercial, serviços, etc.

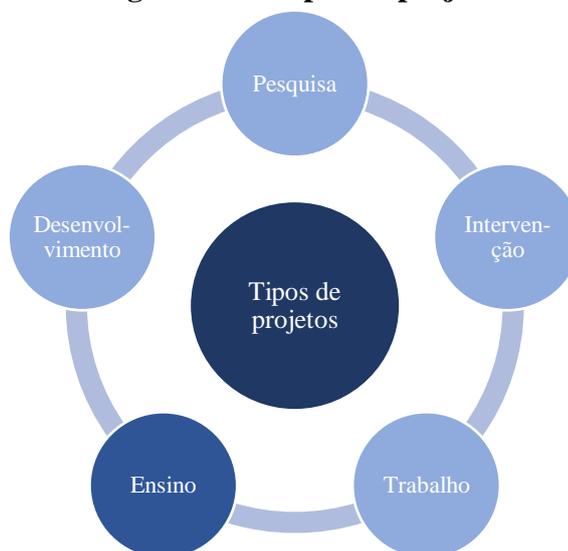
Projetos de Ensino: São projetos elaborados dentro de uma (ou mais) disciplina(s) ou conteúdo(s) curricular(es), dirigidos à melhoria do processo ensino-aprendizagem. Este tipo de projeto é próprio da área educacional e refere-se ao exercício das funções do professor. Exemplos deste tipo de projeto são: desenvolvimento de um método de ensino de Geometria utilizando animação gráfica; desenvolvimento de um software para apoiar o ensino de Eletricidade Básica.

Projetos de Aprendizagem (ou Trabalho): São projetos desenvolvidos por alunos em uma (ou mais) disciplina(s) ou conteúdo(s) curricular(es), no contexto escolar, sob a orientação de professor, e têm por objetivo, a aprendizagem de conceitos e desenvolvimento de competências e habilidades específicas. A principal diferença entre esses dois últimos tipos é que, enquanto os projetos de ensino são desenvolvidos pelo professor, os projetos de trabalho (ou de aprendizagem) são desenvolvidos pelos alunos sob orientação do professor.

Moura e Barbosa (2018, não paginado) destacam também que os cinco tipos de projetos assinalados não são excludentes, e que para efeito de classificação proposta, a atividade predominante é a que contribui para classificar o tipo de projeto. Afirmam que tal classificação apresentada é geral e pode, se necessário, ser desdobrada para incluir ou explicitar aspectos mais específicos da área educacional, criando-se subcategorias.

Segue abaixo o Diagrama 2 com os tipos de projetos especificados acima com destaque para o projeto de ensino que é o objeto principal deste presente trabalho.

Diagrama 2 – Tipos de projetos



Fonte: O autor, 2018.

2.2 O porquê da escolha da ABP

A educação em seu caráter máximo, deve ter como objetivo, proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa e produtiva por meio de suas tecnologias. Deve gerar competências e habilidades criativas em resolver problemas e conduzir projetos nos seus diversos segmentos.

Para Moura e Barbosa (2014, p. 1), um dos desafios atuais no ensino de Engenharia é conceber e implementar sistemas de ensino capazes de prover uma formação profissional em

sintonia com tempos de mudanças tecnológicas cada vez mais intensas e surpreendentes. Como preparar engenheiros para a próxima década se não temos ideia clara sobre como será a economia mundial nem a tecnologia dominante daqui a alguns meses? Que mudanças devem ocorrer no contexto escolar, especialmente na prática docente, para que o ensino de Engenharia atenda às necessidades atuais do mundo do trabalho?

Embora esta seja uma visão específica, de seus autores em relação a formação de engenheiros, tais considerações aplicam-se também à Educação Básica, pois o modelo educacional vigente tende a ser reproduzido nos diferentes tipos e níveis de ensino. São esses os desafios e as escolhas dessas mudanças, que justificam a presente proposta de trabalho em relação as práticas de aprendizagem de uma forma geral, e mais especificamente, as práticas de aprendizagem no ensino médio da Matemática.

Na BNCC, temos em suas competências gerais da educação básica que:

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. (BRASIL, 2018, p. 9)

Além de propor:

[...] a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida. (BRASIL, 2018, p. 15)

Sendo assim, podemos dizer que estamos em busca de um modelo de aprendizagem que valorize e proponha as características segundo a Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 – Um modelo de aprendizagem e suas características

Valorize	Proponha
a diversidade de saberes e vivências culturais;	a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento;
o apropriar-se de conhecimento e experiências;	o estímulo à sua aplicação na vida real;
o fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania;	a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende;
o fazer escolhas alinhadas ao seu projeto de vida com liberdade e autonomia;	o protagonismo do estudante em sua aprendizagem;
o fazer escolhas com consciência crítica e responsabilidade.	o protagonismo do estudante na construção do seu projeto de vida.

Fonte: O autor, 2018.

Em um contexto mais minucioso, na busca de encontrar um modelo de aprendizagem que tenha todas ou quase todas as características listadas nas competências gerais da educação básica da BNCC, pode-se dizer que a ABP exerce um papel satisfatório em seu cumprimento.

A ideia de trabalhar com a ABP como recurso pedagógico na construção de conhecimentos remonta ao final do século XIX, a partir de ideias enunciadas por John Dewey em 1897. Entretanto, o trabalho com a Metodologia de Projetos (MP) remonta ao final do século XVII na Itália, sob uma perspectiva de ensino profissionalizante, especificamente na área da Arquitetura, segundo as conclusões de Knoll (2004).

John Dewey e William H. Kilpatrick, ambos do início do século XX, são considerados os precursores da ABP na era contemporânea que foi originalmente aplicada no ensino de medicina. Na visão de Kilpatrick, o projeto com fins educacionais teria quatro fases essenciais: intenção, planejamento, execução e julgamento segundo levantamento feito por Moura e Barbosa (2014, p. 4).

2.3 As características essenciais da ABP

A aprendizagem baseada em projetos é um modelo de ensino que consiste em permitir que os alunos confrontem as questões e os problemas do mundo real que consideram significativos, determinando como abordá-los e, então, agindo cooperativamente em busca de soluções afirma Barell (2010 apud BENDER, 2014, p. 9).

Além disso, a ABP é considerada um caminho para o ensino diferenciado, altamente recomendável para as salas de aula do século XXI. Os professores estão aplicando cada vez mais a ABP em todos os anos escolares e explorando as formas como essa abordagem de ensino funciona em sala de aula real diz Bender (2014, p. 10).

Devemos destacar, neste momento, que a ABP herdou características inerentes da aprendizagem significativa e que, segundo Gadotti (1994 apud MOURA; BARBOSA, 2017, não paginado) e Aguiar (1995 apud MOURA; BARBOSA, 2017, não paginado), esta aprendizagem é adquirida por meio de atos. Métodos de aprendizagem significativa permitem maior envolvimento do aluno com seu processo de aprendizagem. Nesse contexto, o aprendiz tem maior independência possibilitando a identificação do material a estudar com os seus próprios objetivos, promove a criatividade e desenvolve autoconfiança e autocrítica, tendo a avaliação feita por outros importância secundária. Nesse contexto, a aprendizagem é mais exploradora e durável.

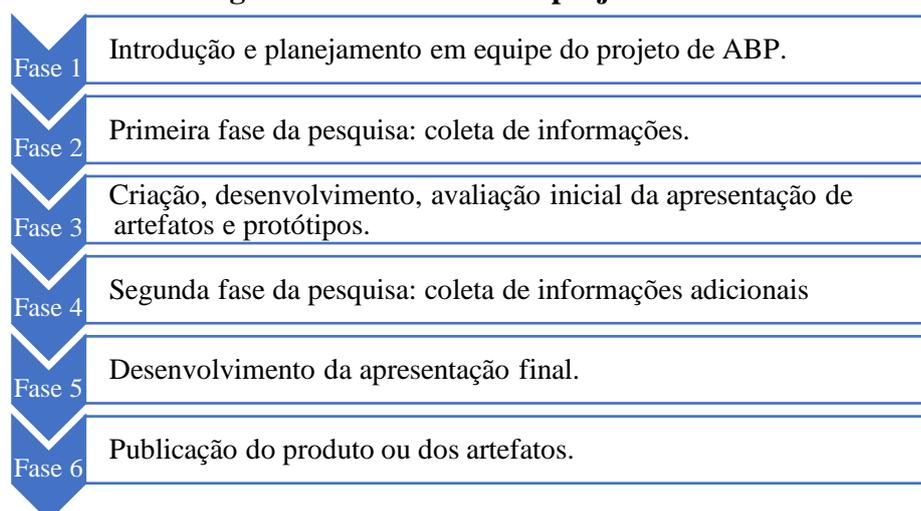
Relacionada à aprendizagem significativa, está a aprendizagem ativa. Ambas envolvem o aprender fazendo e consideram que os alunos devem fazer algo mais do que simplesmente ouvir, para ter uma aprendizagem efetiva. Métodos de aprendizagem ativa dão ao aluno a oportunidade de realizar tarefas mentais de alto nível, como análise, síntese e avaliação. Envolvem, portanto, estratégias que ocupam o aluno em fazer alguma coisa e, ao mesmo tempo, pensar sobre as coisas que está fazendo. Por meio desse método de aprendizagem, ocorre maior interação do discente com o assunto em estudo. Ele ou ela constrói o conhecimento ao invés de recebê-lo de forma passiva. Nesse contexto, o professor atua como orientador, supervisor, facilitador do processo de aprendizagem, e não como fonte única de informação e conhecimento (Moura e Barbosa, 2017, não paginado).

A sociedade contemporânea impõe um olhar inovador e inclusivo nas questões centrais do processo educativo: o que aprender, quando aprender, para que aprender, como promover um ambiente colaborativo e descentralizado para uma aprendizagem contextualizada e como avaliar este aprendizado na forma individual e coletiva.

2.4 As etapas de ensino na experiência de ABP

Como é de sua característica, a ABP pode ser planejada de forma específica e individual por um único professor de uma instituição de ensino, ou por um corpo de professores onde estes recebem a colaboração dos colegas e de toda equipe de apoio pedagógico. As fases descritas no Diagrama 3 podem orientar um professor ou um corpo de professores para a primeira experiência de projetos de ABP.

Diagrama 3 – Fases de um projeto de ABP



Explorando cada uma das fases

A seguir, apresentamos um roteiro com a divisão das fases do diagrama 3 anterior dividido em dez encontros. Gostaríamos de pontuar que a estrutura da ABP é bem dinâmica e flexível e que este número de encontros só foi definido assim para que o projeto se encaixasse com a organização bimestral da unidade escolar em questão e as suas demais atividades.

Embora a listagem de fases e encontros em ordem sequencial pretenda ajudar a compreensão do processo inicial da ABP, devemos lembrar que essa sequência não passa de diretrizes gerais, e sendo assim, destacamos a total flexibilidade por parte do professor que terá em sua prática a autonomia necessária para a execução desses encontros.

No primeiro encontro da fase 1, devemos apresentar a âncora (*o cenário*) e seus personagens, em forma de vídeos ou textos, para apresentar a proposta geral e encorajar o interesse dos alunos. Em seguida, devemos desenvolver, junto com os alunos, a questão motriz (*elemento motivacional*) que é a etapa mais importante dessa fase. Uma questão motriz eficaz resume uma situação-geradora, que por meio de uma linguagem atraente motiva os alunos e aponta questões suplementares ou secundárias que precisam ser abordadas. Os alunos devem refletir sobre a questão motriz e debatê-la (*brainstorming*) por alguns minutos com a turma inteira.

No segundo encontro da fase 1, dividimos a turma em equipes entre 7 a 12 alunos. Depois da formação das equipes, um pouco mais de brainstorming pode ser necessário para gerar questões específicas que os alunos sentem que devem ser abordadas. O próximo passo é a definição de tarefas e metas a serem desenvolvidas na linha do tempo por cada um dos membros das equipes e a promoção de ideias para a elaboração dos artefatos. Por fim, cada equipe deverá escrever um breve resumo estruturado do seu planejamento e das tarefas a serem cumpridas.

Iniciamos a fase 2, no terceiro dia do projeto, apresentando as fontes de pesquisa iniciais para cada proposta do projeto em forma de websites (*lista de sites*). É provável, que para cada proposta de projeto de ABP, sejam solicitadas webquests (*pequena lista de perguntas*) para ajudar os alunos em sua pesquisa e, na maioria dos casos, elas são solicitadas a todos eles, com a expectativa de que sejam completadas nessa fase de pesquisa inicial.

O quarto encontro do projeto e também o segundo da fase 2, é utilizado para que a proposta do projeto seja explorada na própria comunidade escolar e para a continuação da pesquisa por meio de outras fontes e veículos de comunicação. É nesse encontro que alguns

professores apresentam as minilições sobre o tema geral e sobre os tópicos específicos para cada uma das propostas do projeto de ABP.

No quinto dia do projeto e o terceiro e último dia da fase 2, avaliam-se as informações coletadas até o presente momento e a forma como essas informações se conectaram com o projeto como um todo e com a proposta específica do projeto em questão.

Ao iniciarmos a fase 3, podemos dizer que chegamos na metade do projeto em seu sexto dia e que nesta fase cada equipe deverá finalizar a sua apresentação e o artefato protótipo ou inicial. Nesse mesmo dia, o professor deverá estimular a criação e o desenvolvimento de produtos como textos, planilhas, imagens, gráficos, apresentações e vídeos.

Entre algumas considerações gerais a respeito das etapas de algumas das fases do projeto, gostaríamos de registrar que algumas etapas das fases 2 e 3 poderão se sobrepor, em algum grau, assim como as fases ou etapas posteriores no processo de ABP. Destacamos também, a existência natural de uma sobreposição considerável entre as fases de pesquisa e a criação de artefatos.

No segundo dia da fase 3, cada uma das propostas do projeto será avaliada pela própria equipe e pelas demais equipes envolvidas. É nesse sétimo dia também que as equipes devem apresentar as tarefas que foram concluídas, quais trabalhos ou propostas que abordam a questão motriz foram executados e quais informações adicionais deveriam ser coletadas e incorporadas ao projeto.

A fase 4 tem o papel de promover uma nova oportunidade de procurar informações adicionais para desenvolver o artefato protótipo de forma mais completa e procurar enriquecer a apresentação em busca de novos elementos se assim jugarem necessário. Nesse momento é importante que o professor responsável pelo projeto de ABP proporcione novas minilições sobre os tópicos específicos a cada uma das propostas. Visto que equipes diferentes podem e devem procurar abordagens distintas para a resolução da proposta definida, nesta fase, é provável que várias equipes buscarão informações diferentes.

A fase 5 é realizada no nono e penúltimo dia do projeto de ABP e tem o objetivo de permitir o desenvolvimento da apresentação final envolvendo as revisões e os acréscimos significativos para a sua conclusão. É nessa hora que as equipes deverão se preocupar com a escrita e a edição da apresentação e o registro das atividades realizadas em forma de relatório.

A fase 6 conclui o projeto de ABP em seu décimo dia e tem o papel fundamental de realizar a publicação das apresentações e dos artefatos. É nesta fase que as equipes avaliam umas às outras e é também nesta fase que a comunidade escolar é convidada a participar da conclusão do projeto e de suas propostas.

Na pesquisa feita em questão, esses encontros aconteceram de forma semanal entres os 3º e 4º bimestres do ano letivo de 2017. É válido ressaltar que na proposta de experiência de ABP aplicada pelo professor/pesquisador desta dissertação, ele deixou uma opção na avaliação feita pela equipe que realizou a proposta o registro de possíveis melhorias e desdobramentos em relação ao desenvolvido.

Hoje, na concepção de Bender (2014, p. 10), as aplicações do conceito de ABP parecem ser muito diferentes daquelas iniciais, já que as tecnologias de ensino modernas amadureceram e hoje desempenham um papel decisivo na ABP.

Devido a essas tecnologias de ensino, pode-se destacar que:

Assim, propostas de trabalho que possibilitem aos estudantes o acesso a saberes sobre o mundo digital e as práticas da cultura digital devem também ser priorizadas, já que impactam seu dia a dia nos vários campos de atuação social. Sua utilização na escola não só possibilita maior apropriação técnica e crítica desses recursos, como também é determinante para uma aprendizagem significativa e autônoma pelos estudantes. (BRASIL, 2018, p. 478)

2.5 Uma comparação entre a aprendizagem convencional e a ABP

A ABP procura transformar o conteúdo fixado em padrões, originado na aprendizagem convencional, em um projeto com base em uma situação-geradora como o objetivo de construir um ambiente voltado para o conhecimento autônomo e coletivo. A ABP difere dos modelos convencionais de aprendizagem tirando os professores e os alunos de suas funções tradicionais e rotineiras. A Tabela 2 ilustra algumas dessas diferenças.

Tabela 2 – Comparando a aprendizagem convencional versus ABP

Aprendizagem convencional	Aprendizagem baseada em projetos
Tem origem no conteúdo	Tem origem na situação-geradora
Planejamento fixo	Planejamento dinâmico
Organizada em aulas expositivas	Organizada em problemas reais
Produtos previsíveis	Produtos incertos
Processos estáveis	Criação de novos processos
Conhecimento específico	Conhecimento multidisciplinar
Professor autoridade formal	Professor como orientador e consultor
Executa e mantém padrões	Altera e cria padrões
Atividade repetitiva	Atividade inovadora

Elevado nível de automação	Baixo nível de automação
Aprende antes de executar	Aprende durante a execução
Trabalho isolado	Trabalho em equipe
Tarefas muito detalhadas	Atividades com poucos detalhes
Avaliações somativas feitas apenas pelo professor	Equipe(s) e membro(s) avaliam com contribuições
Tem a avaliação como produto	Produto a ser avaliado

Fonte: Adaptado de Moura e Barbosa, 2018.

Elaborar um projeto não se constitui apenas em criar um documento que descreve várias etapas de um planejamento baseado em um resumo de condições e ações. Elaborar um projeto, significa planejar caminhos específicos (*previsíveis*) e dinâmicos (*não previsíveis*) com a proposta de que os elementos envolvidos fiquem sempre conectados tendo a transformação como o seu maior comprometimento. Em seu sentido mais amplo, um projeto é movido por ações estruturadas que fazem com que o produto seja a causa de todas as transformações sejam elas sociais, emocionais, profissionais e pessoais.

Em relação aos projetos educacionais, vale ressaltar, que eles são fruto de uma aprendizagem individual, feita de necessidades, significados, experiências e reflexões críticas e que por algum motivo te levam até o projeto.

3 A PROPOSTA E SUAS PRIMEIRAS VERSÕES

[...] A cognição humana é fruto da interação entre cérebro, corpo e ambiente físico e cultural, e que todos esses elementos precisam ser considerados nas análises e explicações que orientam as práticas educacionais. (BANNELL, 2016, p. 8)

O trabalho que estamos apresentando é fruto de alguns anos de atividades iniciadas pelo professor/pesquisador desta dissertação no Colégio Estadual Conselheiro Macedo Soares (CECMS), localizado no município de Niterói/RJ. Nos tópicos a seguir, apresentamos o relato de dois momentos onde o trabalho apresentava os seus primeiros passos.

Nesse momento, se faz necessário o registro de que todas as atividades envolvidas aconteceram em uma mesma unidade escolar onde as condições de trabalho eram idênticas. Destacamos também que o foco e o público da primeira versão comparados com as duas últimas versões eram diferentes em relação a natureza do curso pois, na primeira versão, os alunos já tinham concluído o Ensino Médio e estavam cursando o pós-médio técnico em administração de um curso noturno, nas demais versões, os alunos estavam no terceiro ano do Ensino Médio de um curso regular matutino.

Nos dois próximos tópicos, o professor/pesquisador desta dissertação relata duas de suas experiências preliminares em relação a versão atual do projeto. Chamamos a primeira versão de versão incubadora e a segunda de versão experimental. Nessas linhas, justificaremos parte das ações mais relevantes conforme apresentamos.

3.1 Primeira versão: Versão incubadora

Um pouco antes de 2015, quando lecionava no terceiro turno as disciplinas de Informática, Estatística e Matemática Financeira para as turmas dos três módulos do Curso Técnico em Administração no CECMS, o professor/pesquisador desta dissertação começou a projetar os encontros com os seus alunos, de forma que a disciplina de Informática, nos seus módulos II e III, tivesse o papel de auxiliar na prática, os conteúdos que envolvessem as outras disciplinas tais como Contabilidade, Economia, Estatística e Matemática Financeira, por meio do uso de planilhas eletrônicas.

No início, os conteúdos e as planilhas, ambos no formato PDF, eram compartilhadas por meio de *Bluetooth* para os celulares dos alunos. Com a chegada da Internet no laboratório de informática e das primeiras versões dos *Smartphones*, o compartilhamento foi ficando mais rápido pois, nesses casos, o conteúdo e as planilhas eram disponibilizadas em uma página

pessoal de endereço eletrônico¹, que é utilizada até hoje, e distribuídos entre eles conforme destacamos na Figura 1 a seguir.

Figura 1 – Seção atual do Projeto MAN



Fonte: O autor, 2018.

Na ocasião, o laboratório de informática apresentava um bom estado de uso e as atividades eram divididas em dois grupos grandes. Um grupo ficava na sala de aula regular e outro acompanhava o professor até o laboratório de informática e ele, por sua vez, ficava alternando entre os dois ambientes.

O fato de os alunos buscarem o curso técnico como uma extensão de sua formação, já indicava para o professor e os demais membros da equipe, que mesmo diante algumas dificuldades, eles estavam ali porque queriam e, sendo assim, apresentavam uma postura madura e saudável para a prática das atividades.

Tanto na sala de aula, como também no laboratório de informática, os alunos se organizavam em grupos menores com dois ou três alunos no máximo, pelo simples critério de afinidade. Executavam as tarefas propostas e, na semana seguinte, os grupos trocavam de ambiente.

É importante destacar que nesse momento, todos os alunos tinham uma mesma tarefa a ser executada e o conteúdo em questão tinha sido trabalhado em sua forma teórica, duas ou três semanas antes daquele encontro prático.

As questões iniciais relacionadas a logística e execução de todo o processo, em relação ao uso do laboratório de informática, tiveram um papel que, no primeiro momento, trouxeram uma dose de desânimo que logo em seguida foi superada com o apoio da direção do colégio e

¹ <http://www.fabiovinicius.mat.br/> É o endereço eletrônico do professor/pesquisador dessa dissertação utilizado para compartilhar trabalhos e atividades com os alunos, colegas de trabalho e instituições.

o interesse dos alunos para que tais atividades no laboratório de informática fossem realizadas com mais frequência.

Como a quantidade de funcionários de apoio era e ainda é, na maioria dos colégios públicos restrita, o professor contava com a espontânea generosidade dos alunos, que chegavam cedo e o ajudava na preparação do laboratório de informática. A tarefa era simples, eles iniciavam o sistema operacional e atualizavam as pastas de arquivos quando necessário usando a internet, quando esta estava funcionando, ou copiando os arquivos por meio de um *pendrive*.

E nessa prática, concordamos com Pais, quando afirma:

A inserção dos recursos tecnológicos da informática na educação escolar pode contribuir para a melhoria das condições de acesso à informação, minimiza restrições relacionadas ao tempo e ao espaço e permite agilizar a comunicação entre professores, alunos e instituições [...] (PAIS, 2008, p. 29).

Na disciplina de Informática, trabalhávamos com as funções relacionadas com os cálculos das medidas de tendência central (média, moda e mediana) e de dispersão (máximo, mínimo, amplitude, variância e desvio padrão) e na construção de Tabelas de frequência, Gráficos e Histogramas. Construíamos também tabelas de Fluxo de Caixa ou Bancário e as Tabelas Price e SAC.

A aprendizagem baseada com certa relatividade com o uso de softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica está presente na BNCC do Ensino Médio e é o que afirma Penteado já em 1999:

[...] o trabalho com o computador provoca uma mudança na dinâmica da aula, a qual exige do professor novos conhecimentos e ações. Não se trata de considerar que todas as ações do professor estarão centralizadas no computador, mas, também, não se trata de considerá-lo como um instrumento cujo uso será submetido aos elementos usualmente presentes na profissão. (PENTEADO, 1999).

Neste sentido, a BNCC do Ensino Médio refere-se ao uso de tecnologia em sua introdução nas competências gerais da Educação Básica, item 5, como:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9)

Nas competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, a BNCC diz, no seu item 5, que:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 523)

Foi depois de construir essa corrente positiva de trabalho, que o professor começou a propor para os alunos problemas ou situações-geradoras desafiadoras que envolvessem os grupos de alunos e os pares de disciplinas de Informática e Estatística ou as disciplinas de Informática e Matemática Financeira. O objetivo era que eles se aprofundassem nos temas e trouxessem situações práticas de um futuro profissional de administração em relação a tudo que fora apresentada pelos professores do curso.

Entre as tarefas propostas tivemos:

- uma análise dos financiamentos apresentados pelas redes de lojas de eletro e eletrônico divulgadas pelos jornais de grande circulação;

E com base nessa tarefa proposta temos o que afirma o Conselho Nacional de Educação (CNE) e suas Resoluções dada pela Câmara de Educação Básica (CEB) em que diz que bem como saúde, vida familiar e social, educação para o consumo, educação financeira e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural. BRASIL (2010)

- uma análise dos resultados dos primeiros 1.500 sorteios da Mega-sena onde a Lei dos Grandes Números foi explorada;

E que nessa perspectiva, temos da BNCC o destaque para a habilidade que o estudante deve desenvolver no sentido de construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. (BRASIL, 2018, p. 531).

- a elaboração de tabelas de frequências e histogramas na análise do perfil de usuários de uma academia de ginástica.

Segundo Bicudo e Borba,

Daí o crescente interesse pelo processo de ensino e aprendizagem de Estatística nas últimas décadas do século passado, principalmente na Europa e nos Estados Unidos. Esse interesse é justificável, pois através do desenvolvimento do raciocínio estatístico tem-se uma maneira própria de organizar e analisar informações, possibilitando a compreensão de sua estrutura e interpretações adequadas. (BICUDO; BORBA 2009, p. 232)

E depois desta e de tantas outras ações isoladas realizadas pela a equipe de professores deste curso, a equipe pedagógica do colégio criou a Semana do Curso Técnico. A semana teve uma dinâmica diferenciada que era o revezamento de apresentações que envolviam os alunos e também os professores que sempre se apresentavam em dupla.

Por essa prática, temos o que sustenta a BNCC:

Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar-se ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas pelos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua nativa, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros. (BRASIL, 2018, p. 519)

Diversos são os fatores necessários para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da matemática e suas tecnologias, mas dentre eles, podemos relacionar com destaque, os eventos envolvendo a relação professor-aluno e as práticas cognitivas dentro do ambiente escolar e suas pluralidades. Sendo assim, dentro do cenário da observação, concluímos que depois dessa semana, os alunos e os professores voltaram para trabalhar na semana seguinte de forma diferente.

3.2 Segunda versão: Versão experimental

Em maio de 2015, a direção do colégio recebeu um e-mail da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ), solicitando que os professores de Matemática de suas respectivas unidades escolares, se mobilizassem em prol do novo projeto proposto. Identificado como “Matemática 360”, o projeto rapidamente agradou aos olhares de alguns professores de matemática do colégio e principalmente o olhar da diretora da unidade escolar que já tinha sido professora da disciplina.

O objetivo do projeto em questão é definido em:

[...] é estimular o desenvolvimento de atividades que promovam o engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem da disciplina, tendo como foco o desenvolvimento das habilidades relacionadas ao raciocínio lógico e à resolução de problemas para a formação plena do aluno enquanto cidadão. (RIO DE JANEIRO, 2015, não paginado)

Entre as estratégias descritas pela SEEDUC/RJ, em documento enviado, foi a disponibilidade de um “*Cardápio de Ações*” contendo sugestões para as atividades a serem desenvolvidas de forma contínua e a orientação para uma dinâmica a ser realizada no início do 3º bimestre e uma culminância do projeto na metade do 4º bimestre do ano letivo em questão.

Depois de algumas conversas com a equipe pedagógica e os demais professores de Matemática, o professor/pesquisador desta dissertação concluiu que o objetivo principal desse projeto era de proporcionar aos alunos uma oportunidade exploradora de se construir a Matemática em seu ambiente de aprendizagem.

Tal objetivo é encontrado no texto citado na BNCC em:

[...] ao desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à autonomia pessoal, profissional, intelectual e política e do estímulo ao protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e na construção de seus projetos de vida. (BRASIL, 2018, p. 465)

A condução para essa versão da proposta foi realizada nos anos de 2015 e 2016, por meio de sugestões apresentadas pelo professor/pesquisador desta dissertação, e que estas deveriam ter alguma relação com os conteúdos já trabalhados nas turmas do ano letivo em questão, ou seja, os alunos do 2º ano tinham os conteúdos essencialmente do 2º ano para explorar e o mesmo aconteceu com os alunos do 3º ano.

O professor/pesquisador percebeu que os alunos apresentaram uma questão bem interessante de analisar que foi a oportunidade de amadurecer os conteúdos de forma prática. Alguns se aventuraram em fazer relações usando a Matemática em uma outra disciplina como Física, Biologia e Química, mas no geral, eles produziram algo dentro de um formato comum às outras atividades.

Um outro ponto favorável desse formato de trabalho foi a apresentação. Ela aconteceu em dois momentos, no primeiro, os alunos apresentavam a versão preliminar do seu trabalho para os alunos da própria turma e, no segundo momento, a apresentação final foi realizada com os demais alunos da escola. A alegria na expressão deles quando estavam apresentando o

resultado do seu trabalho para os demais alunos do colégio foi muito positiva e determinante para fazer o professor perceber que tinha algo a mais por trás de tudo isso.

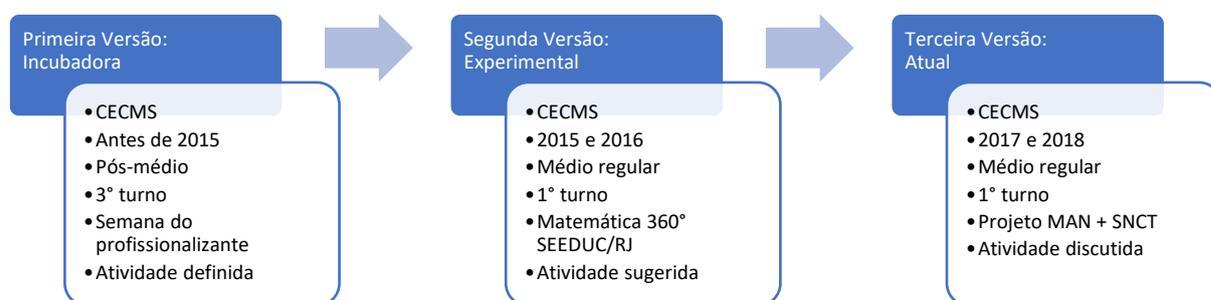
Foi exatamente a possibilidade de uma exploração não convencional da Matemática que levou o professor/pesquisador desta dissertação a organizar e repensar a proposta para o ano de 2017. Nessa linha de pensamento, foram realizados os seguintes questionamentos: e se os alunos escolhessem a proposta dado o assunto; e se eles fossem levados a produção de alguma proposta tomando como base uma simples pergunta; e se eles produzissem um objeto para a representação do resultado da proposta desenvolvida; e se eles pegassem algo de um trabalho já realizado e apresentasse uma proposta ainda melhor.

Pensando nessas múltiplas possibilidades, foi necessário aguardar o ano letivo de 2017 e lançar a proposta para os alunos no início do ano letivo elaborando a proposta de forma a favorecer o surgimento de novos horizontes.

3.3 Terceira versão: Matemática Além dos Números (MAN)

Depois das experiências anteriores que nutriram e motivaram algumas reflexões por parte de professor/pesquisador desta dissertação, esta terceira versão descreve uma experiência que diz respeito ao uso da ABP vivenciada em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio durante às aulas de Matemática no ano letivo de 2017 no CECMS. Neste relato, o professor destaca a formatação que o projeto foi recebendo até o momento que se observou a relação do mesmo com um projeto de ABP como destacado no Diagrama 4.

Diagrama 4 – O projeto e suas versões



Fonte: O autor, 2018.

O projeto envolveu várias equipes, mas por questões práticas para esta presente pesquisa, o professor/pesquisador selecionou seis equipes em que três equipes pertenciam a turma 3001 e as outras três equipes pertenciam a turma 3002. Duas equipes, sendo uma de cada

turma decidiram por uma mesma proposta e, deveriam, de uma forma até natural e particular, direcionar a proposta com o máximo de identidade possível conforme as habilidades dos seus participantes. Isso foi feito para as três propostas apresentadas nesta terceira versão como veremos no capítulo 4.

3.4 Descrição das fases e etapas da ABP no contexto do projeto

Iniciado o 2º semestre de 2017, o professor/pesquisador desta dissertação tinha que apresentar o projeto MAN + SCNT para os seus alunos que dentro do ponto de vista prático ele poderia ser muito bom em sua produtividade e muito carente em relação ao seu determinismo. O projeto tinha o papel de preencher algumas lacunas, citadas anteriormente durante as aulas, presentes na formação daqueles alunos e de atender as demandas do colégio em relação ao projeto da SEEDUC/RJ titulado como Matemática 360º e o tema da SNCT que era “*A Matemática está em tudo!*” promovido pelo Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC).

Envolver os alunos no projeto de forma engajada era o principal para o sucesso do mesmo. E sendo assim, o professor se recordou que em conversas anteriores, junto com esses mesmos alunos, eles relataram para o professor que resolver algumas questões, como as do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) por exemplo, era difícil pelo simples fato de não conseguirem, em seu primeiro momento, entenderem exatamente o que tem que ser feito.

Em contrapartida, com o interesse de confortá-los e encorajá-los, o professor disse que isso fazia parte do desenvolvimento do projeto e que era só uma questão de hábito. E foi a partir desse comentário, que o professor/pesquisador desta dissertação propôs aos alunos que a palavra superação seria o lema mediante os desafios do ambiente escolar por meio da Matemática.

Após essas exposições de ideias e principalmente de sentimentos, ficou definido que iríamos todos nos empenhar e vencer cada um dos desafios futuros. A meta era superar as barreiras relacionadas à disciplina por meio de uma aprendizagem baseada em projetos e que aquelas os deixariam mais ativos, autônomos e críticos. E que depois de tudo pronto, eles levariam essa experiência e deixariam para o colégio, um legado de materiais a serem explorados e melhorados, na medida do possível, por outras equipes de turmas futuras.

Nos itens abaixo apresentaremos uma adaptação das fases e das etapas da ABP no contexto do projeto supracitado empregado nas turmas e nas equipes acima relacionadas.

Apresentação da âncora do projeto de ABP

Uma vez entendido o objetivo do projeto, a condução da escolha da proposta central foi feita utilizando o aplicativo *WhatsApp*. Foram utilizados os dois vídeos citados no Quadro 1 a seguir que serviram como âncora. Em seguida, foram encaminhados alguns temas gerais, apresentados no Quadro 2, como sugestões de propostas de trabalho. Foi solicitado que eles fizessem a escolha do tema e, em outro momento, a escolha da proposta de trabalho para cada uma das equipes.

Quadro 1 – Âncoras do projeto

<p>Matemática no nosso cotidiano.</p>  <p>Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=JYtDvRrEG-w</p>	<p>Eu vejo Matemática o tempo todo!</p>  <p>Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=6j1Rq2Zowlw</p>
--	---

Fonte: O autor, 2017.

Nesse momento, é válido destacar que o uso dos meios de comunicação em diferentes contextos e suas linguagens se fundem em explorar as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), compreendendo seus princípios e funcionalidades, e mobilizá-las de modo ético, responsável e adequado as práticas de linguagem em diferentes contextos. (BRASIL, 2018, p. 489)

Quadro 2 – Opções de temas a serem escolhidos

 <p>Artes</p>	 <p>Códigos</p>
 <p>Comunicação</p>	 <p>Construção</p>
 <p>Esportes</p>	 <p>Jogos de raciocínio</p>
 <p>Natureza</p>	 <p>Truques</p>

Fonte: O autor, 2017.

Os temas escolhidos pelos alunos foram Artes, Códigos, Jogos de raciocínio, Natureza e Truques. Uma vez escolhido os temas, eles deveriam entrar num acordo com a outra equipe que fez a mesma escolha e definirem uma proposta de trabalho em comum. O

professor/pesquisador fez essa pequena exigência para mostrar para os alunos que de uma mesma proposta de trabalho poderíamos ter resultados distintos e ambos absolutamente genuínos e bem-sucedidos.

Foi enfatizado às equipes que a produção de um artefato era imprescindível para a conclusão da proposta de trabalho e que as etapas intermediárias seriam também levadas em consideração, além disso, eles deveriam desde aquele momento pensarem em suas possibilidades de planejamento e execução.

Por questões práticas, para o desenvolvimento do presente trabalho, foram escolhidas seis equipes de três temas diferentes que são eles Códigos, Jogos de raciocínio e Truques que serão destaques no capítulo seguinte.

Nesse momento, a voz e a escolha do aluno foram imprescindíveis, pois só a partir desta possibilidade em suas tarefas de aprendizado podemos cumprir as estratégias de ensino que facilitam a ABP e os seus componentes cruciais. É descentralizando o processo que a pluralidade de ideias se manifesta de forma concreta e significativa.

Em relação as escolhas das propostas de trabalho de cada uma das equipes tivemos os desdobramentos apresentados no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 – Opções de propostas de trabalho por equipes

	Jogos de raciocínio	Os quebra-cabeças, os jogos de solidão como o resta um , paciência, torre de Hanói, os jogos senha e hex, os jogos geométricos, ...
	Códigos	As placas dos veículos, o número do CEP, os códigos de barras dos produtos, os números de documentos como RG e CPF , ...
	Truques	Com baralho, sequências numéricas e de figuras, com cartelas numéricas ou figuras, de movimentação de peças, ...

Fonte: O autor, 2017.

O modelo de ABP apresentado se fez por meio de uma educação diferenciada, pelo fato de num mesmo ambiente e sobre as mesmas condições de trabalho, os alunos realizam propostas de trabalho diferentes.

Superados esses dois primeiros momentos, definimos os próximos pontos do planejamento da ABP.

Definição da Questão Motriz do projeto de ABP

Depois de alguns minutos de discussão, os representantes de cada uma das equipes e mais dois membros de cada uma delas se reuniram com o professor/pesquisador desta dissertação para definirem em conjunto a questão motriz do projeto. Finalizada essa etapa, concluiu-se que a questão que nortearia as demais fases do projeto e sua execução seria: “*Como podemos explorar e compreender a Matemática existente em cada um dos objetos de estudo propostos?*”. Devemos lembrar que pautados no tema da SNCT de 2017 que foi “*A Matemática está em tudo!*” podemos dizer que a questão motriz não fugiu ao tema principal e que a mesma só ganhou uma dose de especificidade.

Definição das tarefas do projeto de ABP a serem cumpridas

Os alunos irão trabalhar em equipes para cumprir as seguintes tarefas:

- Processos específicos para investigação e pesquisa
 1. Fazer uma pesquisa bruta da proposta definida;
 2. Buscar o maior entendimento possível da proposta definida por meio de uma pesquisa mais refinada;
- Investigação e inovação dos alunos
 3. Estabelecer por meio de competências, uma relação entre a proposta definida e a Matemática;
 4. Classificar o conceito matemático de maior relevância identificado nessa relação;
 5. Apresentar a relação encontrada por meio da linguagem Matemática e suas propriedades;
- Cooperação e trabalho em equipe
 6. Discutir de forma coletiva o estudo sobre a proposta definida e por meio de estratégias estabelecidas propor a elaboração de um produto;
 7. Elaborar o produto preliminar por meio de um artefato;
- Feedback e revisão
 8. Apresentar o estudo realizado por meio da apresentação do produto preliminar elaborado;
- Oportunidade para reflexão
 9. Rediscutir e avaliar as etapas anteriores de forma coletiva buscando o seu aperfeiçoamento;

- Apresentação pública dos resultados do projeto
 10. Apresentar o estudo da proposta de trabalho realizada por meio da apresentação do produto elaborado e aperfeiçoado.
- Feedback e revisão
 11. Fazer uma autoavaliação e avaliar as demais propostas em seus diferentes momentos por meio de conceitos.

Além das tarefas relacionadas acima, destacam-se como elementos importantes de um projeto de ABP as *Webquets* com suas perguntas orientadoras e os *Websites* com as informações para o desenvolvimento da proposta. Computadores para a confecção e impressão de materiais e uma papelaria básica disponível na unidade escolar também são necessidades elementares para a execução do projeto.

O professor/pesquisador desta dissertação entende que os alunos, em todos os níveis, precisam de alguma estrutura para o desenvolvimento de um projeto de ABP. E é por esta razão que em sua descrição inicial, um projeto de ABP possui uma lista de *Webquest* que deve ser respondida pelos alunos e uma lista de *Websites* que deverá ser acessada e completada, na medida do possível, pelos alunos durante o desenvolvimento das propostas.

As Webquests sobre as propostas

Segue abaixo a lista de *Webquests* respondida pelos alunos no desenvolvimento das propostas de ABP.

1. Qual é o contexto histórico central da proposta?
2. Quais são as versões existentes similares à da proposta?
3. Quais são as aplicações imediatas dos recursos apresentados na proposta?
4. Quais são as sugestões para a continuação da proposta?

Os Websites sobre as propostas

Segue abaixo a lista de alguns *Websites* utilizada pelas equipes para cada uma das propostas escolhidas pelos alunos no desenvolvimento das propostas de ABP.

Proposta do Resta um – Equipes A e B

Os links abaixo apresentam um pouco da história do jogo Resta um; um vídeo com uma solução padrão dada por rotações de 90 graus do tabuleiro em relação a sua base de apoio; uma versão digital para o jogo e algumas curiosidades sobre o tabuleiro do Resta um dada a solução padrão apresentada por meio de figuras.

- <https://super.abril.com.br/comportamento/jogo-resta-um/>
- <https://www.youtube.com/watch?v=19pcqO4yTIs>
- <http://www.divertudo.com.br/restaum/restaum.html>
- <https://pt.wikihow.com/Ganhar-no-Resta-Um>

Proposta do CPF – Equipes C e D

Os links abaixo falam um pouco sobre a importância do CPF na vida de um cidadão; faz um resumo histórico sobre o CPF e da importância do 9º dígito, como também faz, a apresentação do algoritmo numérico e do algoritmo computacional para o cálculo dos dígitos verificadores; apresenta por meio de uma discussão plausível uma página utilizada para gerar números válidos de CPF e para verificar a validade de um CPF.

- <http://idg.receita.fazenda.gov.br/>
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Cadastro_de_pessoas_físicas
- https://www.4devs.com.br/gerador_de_cpf
- https://www.4devs.com.br/validador_cpf

Proposta das Cartelas binárias – Equipes E e F

Os links a seguir exploram o tema das Cartelas binárias por meio da representação binária de um número natural e também por meio de um tradutor de códigos de diferentes bases.

- https://www.dcc.fc.up.pt/~nam/aulas/0102/pi/trabp1/trabp1_enu/Cartoes_magicos.html
- <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfFgEAI/tela-magica-das-cartelas-experimento>
- https://www.4devs.com.br/tradutor_codigo_binario

Artefatos previstos

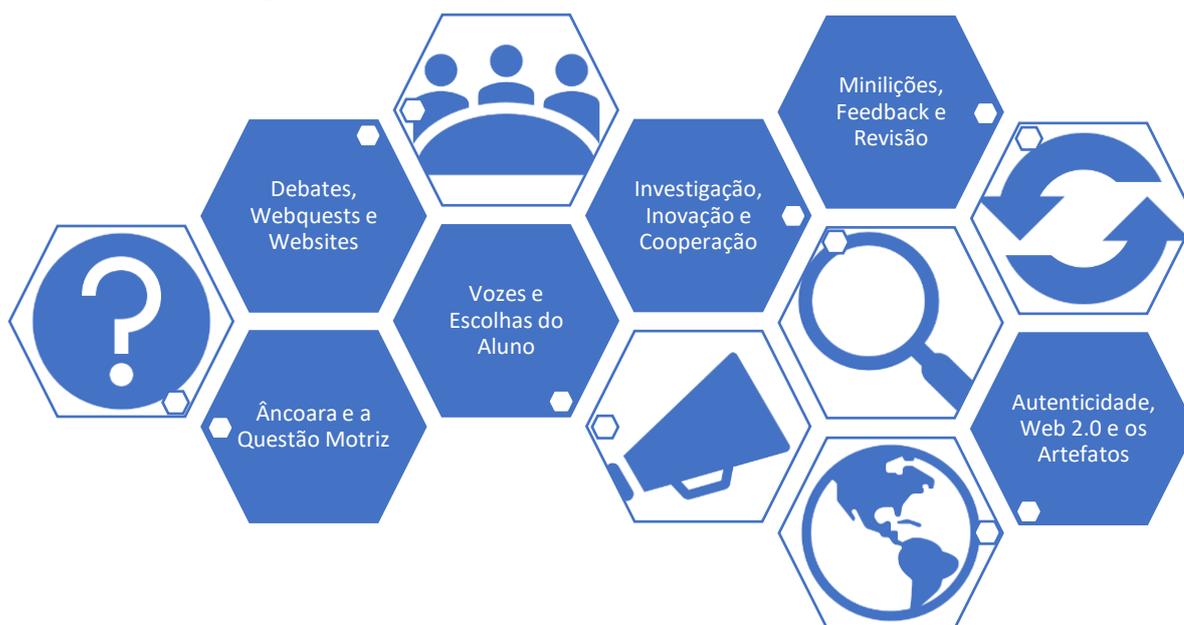
A produção dos artefatos e a publicação por meio de apresentações ou algo similar são exemplos autênticos dos tipos de problemas que os alunos enfrentam no mundo real e é, portanto, um ponto crucial dentro da ABP.

- Quatro relatórios curtos que abordem questões internas da equipe e da proposta;
- Elaboração de um ou mais produtos.

Podemos identificar, de forma positiva, que algumas questões da ABP também podem ser encontradas e relacionadas em outros modelos de aprendizagem tais como: sócio emocional, autêntica, diferenciada, por descoberta, ativa, baseada em tecnologia, baseada em problemas, investigativa, integrada, integrada virtual e a híbrida.

No Diagrama 5 ilustramos as principais características de um projeto de ABP dentro dos moldes utilizados na presente pesquisa.

Diagrama 5 – Principais características de uma ABP



Fonte: O autor, 2018.

4 AS PROPOSTAS DO PROJETO E AS HABILIDADES MATEMÁTICAS ENVOLVIDAS

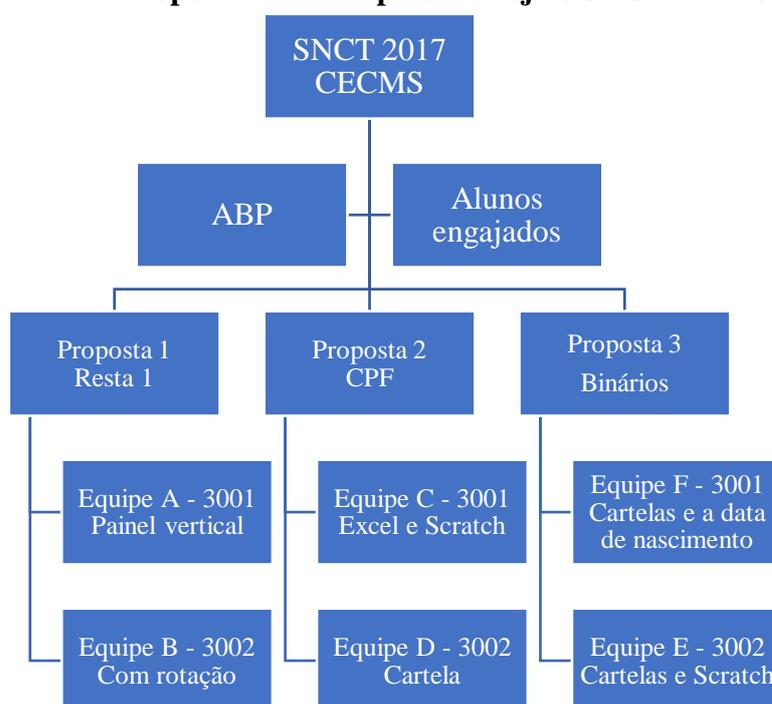
[...] O aprender envolve simultaneamente a inteligência, os desejos e necessidades; através do cognitivo busca-se generalizar, classificar, ordenar, identificando-se semelhanças, enquanto que através dos desejos e necessidades busca-se o individual, o subjetivo e o diferente. (FERNANDEZ, 1990 apud FUNAYAMA, 2008, p. 67).

Neste capítulo, apresentamos as seis propostas do projeto de ABP observados pelo professor/pesquisador desta dissertação. Devemos ressaltar, que cada uma das três propostas foi desenvolvida, no mesmo período, por duas equipes de duas turmas diferentes do 3º ano do Ensino Médio de uma mesma unidade escolar (CECMS) e ambas do 1º turno.

Um outro ponto a ser destacado, é que todas as equipes, sejam elas de propostas iguais ou não, receberam inicialmente as mesmas orientações do professor/pesquisador desta dissertação e, que depois disso, cada uma das equipes seguiu o seu próprio caminho e o seu próprio jeito de caminhar.

Para facilitar a visualização dos tópicos a seguir, apresentamos o Diagrama 6 que tem como objetivo, explicitar a estrutura utilizada no projeto de ABP em questão e as suas seis propostas de trabalho onde estas serão apresentadas nos tópicos adiante.

Diagrama 6 – Propostas de ABP para o Projeto SNCT 2017 CECMS



Fonte: O autor, 2018.

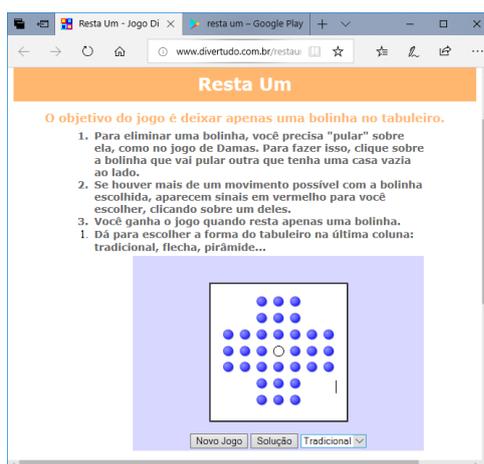
4.1 Proposta 1: O jogo do Resta um

Entre os itens sugeridos no desenho inicial do projeto, os jogos de tabuleiro ganharam destaque devido a curiosidade dos alunos em relação as práticas de passatempo utilizadas nas gerações anteriores. Pensando nisso, o jogo do resta um foi escolhido como uma boa opção de trabalho, devido a exploração da sua versão original e das diversas possibilidades que eles poderiam encontrar por meio de pesquisa.

Deve-se destacar que o tema chamou a atenção de duas equipes, sendo uma equipe formada apenas por meninas da turma 3001 do 3º ano do Ensino Médio e a outra equipe formada por vários meninos e uma única menina da turma 3002 também do 3º ano do Ensino Médio.

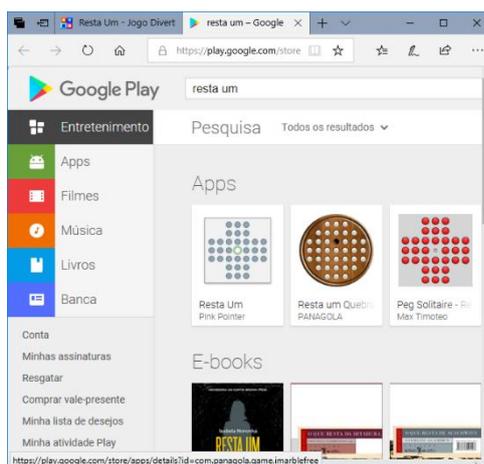
Na semana seguinte, os alunos de uma das duas equipes que fizeram a escolha da proposta do resta um apresentaram algumas versões do jogo em sua forma digital. Na Figura 2 apresentamos a versão online (ou Web App) que tem que ser acessada por meio de um navegador onde não há necessidade de instalar um novo aplicativo no dispositivo. Na Figura 3 temos a versão offline (ou App Nativo) que possui a necessidade de ser instalado em um dispositivo móvel e executado como aplicativo e que nesse caso não faz uso de um navegador.

Figura 2 – Tela do Resta um na versão online com as regras do jogo



Fonte: <http://www.divertudo.com.br/restaum/restaum.html>, 2017.

Figura 3 – Tela do Resta um na versão offline



Fonte: <https://play.google.com/store/search?q=resta%20um&hl=pt-BR>, 2017.

Depois de apresentarem as suas versões, os alunos iniciaram um intenso debate entre as vantagens e desvantagens nas versões digitais encontradas. Nesse momento, destacamos a exploração livre, de um produto que já existe, feita pelos alunos e o registro da importância da análise e da compreensão feita em relação ao material e o quanto importante esse momento é para a continuidade e o crescimento do projeto.

Passados os primeiros minutos de euforia, o professor afirmou que: *“Para começar, estes dois exemplos estão bons, mas temos muito ainda o que fazer”*. Entendemos que a provocação sadia em caráter de motivação é uma das características relevantes no processo de aprendizagem de uma proposta de ABP.

Foi nesse momento, que o professor/pesquisador desta dissertação, reforçou junto com a equipe em questão e as demais equipes, a principal diferença da proposta do projeto, que tem como base a elaboração de algum produto que possa agregar valor e conhecimento ao invés de explorar algo pronto e já disponível em alguma fonte. Isso não nega a importância de tais fontes e a relevância daquilo que já tenha sido produzido até o presente momento, mas não é essa a finalidade daquilo que foi proposto inicialmente.

Uma vez reforçada a proposta do projeto, as equipes começaram a tecer o trabalho atentos aos seus principais objetivos mostrando a cada nova etapa uma postura madura e sadia.

4.1.1 Equipe A – Usando o painel vertical de TNT

Dentro do ponto de vista do projeto, a proposta em questão se destaca pela atuação de superação contínua e coletiva das alunas envolvidas, em construírem o artefato que, entre muitos, tenha sido considerado um dos melhores. Pelo olhar da Matemática, o destaque fica por

conta dos vídeos apresentados pela equipe em relação aos movimentos de uma solução padrão observada no vídeo da Figura 4 e pela falta de simetria observada no vídeo da Figura 5.

Figura 4 – Como resolver o Resta um de uma maneira simples



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=19pcqO4yTIs>, 2017.

**Figura 5 – Uma versão assimétrica para o tabuleiro do resta um
Psicopedagogia na Sala de Aula**



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=p4AbzR0p8bw>, 2017.

Depois de algumas observações e tentativas para a solução do jogo, os membros da equipe identificaram propriedades envolvendo simetria, rotação e reconhecimento de padrão. Relacionaram a solução apresentado do jogo com o conteúdo que estava sendo trabalhado em sala de aula que era o estudo de vetores, onde envolvíamos o estudo do vetor direcional e o vetor normal de uma reta.

Em nossa interpretação, a dificuldade apresentada pelo professor/pesquisador ao não permitir nesse caso, a rotação do tabuleiro e nem do movimento do jogador em relação a base de apoio, foi um fortíssimo fator motivador para que tal busca fosse realizada.

A forma com que o tabuleiro foi mapeado, para que as posições fossem devidamente identificadas, foi uma sugestão despreziosa feita por um aluno membro de uma outra equipe, cuja a proposta de trabalho era totalmente diferente. Tal fato mereceu o devido destaque do

professor/pesquisador desta dissertação, em relação aos alunos das duas turmas inseridas em tal contexto.

Segue abaixo na Figura 6, o tabuleiro mapeado pelas meninas da equipe e a sequência de jogadas definidas e representadas por setas na Tabela 3. Destacamos que a nomenclatura utilizada na identificação de cada posição parte do centro do tabuleiro para a sua extremidade utilizando as letras A, B, C e D e depois, as filas adjacentes utilizando as letras E, F e G.

Figura 6 – Tabuleiro do resta um mapeado

		G2	D2	G3		
		F2	C2	F3		
G1	F1	E1	B2	E2	F4	G4
D1	C1	B1	A0	B3	C3	D3
G8	F8	E4	B4	E3	F5	G5
		F7	C4	F6		
		G7	D4	G6		

Fonte: A equipe A, 2017.

Tabela 3 – Os movimentos das peças no tabuleiro do resta um mapeado

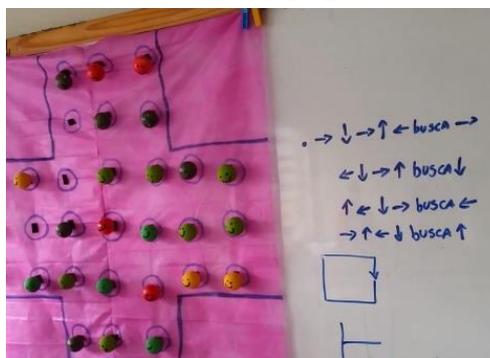
Momento	Movimentos por coordenadas	Movimentos por vetores						
1	C1 → B1 → A0	→						
2	F2 → E1 → B1, G1 → F1 → E1 G8 → D1 → G1, B2 → E1 → F1 G1 → F1 → E1	↓	→	↑	←	→		↻
3	F4 → E2 → B2, G3 → F3 → E2 G2 → D2 → G2, B3 → E2 → F3 G3 → F3 → E2	←	↓	→	↑	↓		↻
4	F6 → E3 → B3, G5 → F5 → E3 G4 → D3 → G5, B4 → E3 → F5 G5 → F5 → E3	↑	←	↓	→	←		↻
5	F8 → E4 → B4, G7 → F7 → E4 G6 → D4 → G7, B1 → E4 → F7 G7 → F7 → E4	→	↑	←	↓	↑		
6	B3 → E2 → F3, F3 → C2 → F2 F2 → E1 → B1, B1 → E4 → F7 F7 → C4 → F6, F6 → E3 → B3	↑	←	↓	↓	→	↑	
7	A0 → B4 → C4, C3 → B3 → A0 B2 → A0 → B4, C4 → B4 → A0	↓	←	↓	↑			

Fonte: A equipe A, 2017.

Nesse momento, precisamos esclarecer que os movimentos por coordenadas no momento 1 relacionado acima mostra que a peça na posição C1 pula a peça na posição B1 com destino à posição A0 e que a peça B1 pulada é retirada do jogo e que o mesmo será feito nos demais movimentos. Devemos observar também que na última coluna da Tabela 2 temos o símbolo “ \cup ” que mostra a rotação de -90 graus feita pelos vetores na representação dos movimentos feitos.

O artefato projetado para a representação do jogo, foi sugerido por uma das alunas da equipe A que trabalhava no segundo turno como auxiliar de turma de uma escola de educação infantil. Nesse caso, habilidades não lhe faltaram para o uso dos instrumentos necessários para a execução do artefato produzido conforme observado na Figura 7 a seguir.

Figura 7 – Artefato da equipe A do resta um



Fonte: A equipe A, 2017.

Quando questionadas em relação a marcação dos pontos no TNT (Tecido Não Tecido), elas riram de nervoso e confessaram que a primeira ficou muito ruim e que depois elas resolveram dobrar o TNT para depois marcarem os pontos utilizando o conceito de simetria. Destacamos assim, um ponto positivo para o desenvolvimento do projeto e da proposta por parte dos membros da equipe.

4.1.2 Equipe B – Usando uma base giratória de madeira

Analisando a apresentação da equipe B pelas características do projeto, destacamos a atuação impecável da única menina da equipe em relação a cobrança da postura por parte dos meninos e a sua altíssima habilidade em resolver o jogo utilizando um aplicativo no smartphone em tempo recorde.

No aspecto da Matemática, o artefato construído pela equipe chamou atenção por ter a base do tabuleiro giratória nos dois sentidos. Um outro ponto de destaque da proposta da equipe

foi colorir as bolas de forma distinta em relação a sua posição no tabuleiro. E nesse aspecto, os alunos perceberam que a sua maior dificuldade era descartar as bolas coloridas de amarelo localizadas nas extremidades do tabuleiro e que novas estratégias deveriam ser tomadas.

A primeira apresentação modelo, encontrada para representar o jogo dessa equipe foi feita de papelão. Mas devido a fragilidade do material, os próprios membros da equipe observaram, em um evento teste, que tal escolha não foi positiva em relação ao seu manuseio.

Depois da troca em relação ao material utilizado pela equipe em questão, os alunos revelaram que eles tinham recebido a ajuda do tio de um deles em sua oficina de marcenaria. Disseram também, que o croqui da base construída foi feito por um deles, e que, o profissional em questão anteriormente citado, apenas o executou e assim observamos o resultado final nas figuras 8, 9, 10 e 11 a seguir.

Figura 8 – Artefato da equipe B do resta um 1º quadrante



Fonte: A equipe B, 2017.

Figura 9 – Artefato da equipe B do resta um 2º quadrante



Fonte: A equipe B, 2017.

Figura 10 – Artefato da equipe B do resta um 3º quadrante



Fonte: A equipe B, 2017.

Figura 11 – Artefato da equipe B do resta um 4º quadrante



Fonte: A equipe B, 2017.

Podemos observar que as figuras 8, 9 e 10 acima apresentam uma distorção nas regiões ao redor da bola vermelha posicionada no centro do tabuleiro. Essa distorção é provocada pelo movimento de rotação feito pelo aluno no momento do registro da foto.

Destacamos que o leitor interessado encontrará os links para os vídeos das propostas das equipes A e B e os materiais desenvolvidos pelas demais equipes relacionadas a este trabalho na seção MAN na página pessoal do professor/pesquisador.

Uma questão particular sobre essa proposta foi em relação a mudança de atitude por parte de duas alunas, sendo uma de cada uma das equipes. Por terem um comportamento acanhado, na maioria das aulas, essas alunas foram extrovertidas em boa parte dos momentos dedicados ao projeto e, assim, permaneceram até o fim do ano letivo mais participantes em seus respectivos processos de aprendizagem.

Sobre a continuidade da proposta, os alunos das duas equipes sugeriram que as regras do jogo fossem apresentadas formalmente por meio de um folheto, com uma pequena introdução histórica, na hora da apresentação para a comunidade, pois uma boa parte das pessoas não tinham conhecimento formal do jogo.

A equipe A sugeriu que o quadro com o mapeamento e os movimentos também estivessem presentes em um outro folheto. A equipe B sugeriu que as bolinhas tivessem uma outra distribuição em relação as cores em função dos movimentos definidos na estratégia, e que as bolinhas que ficassem para o fechamento do jogo tivessem todas uma mesma cor. Disseram também que fazer isso rápido era difícil para aquele momento do projeto.

Além de pensar em estratégias em relação a continuidade de propostas iniciadas, o professor já observou que um grupo de alunos do presente ano letivo gosta de brincar de jogo da velha e de forca e, nesse caso, os dois itens podem virar propostas de trabalho com riquíssimos desdobramentos.

4.2 Proposta 2: Os dígitos verificadores do CPF

Depois de alguns acordos e desacordos, ao longo de mais uma sessão inspiradora, finalmente, outras duas equipes conseguiram direcionar e fechar as suas propostas de trabalho com o tema relacionado ao número do CPF.

Segundo os alunos, por meio de uma consulta no Dicionário Online de Português, sugerida pelo professor, em <https://www.dicio.com.br/>, a sigla significa “*o Cadastro de Pessoas Físicas, documento que simboliza o registro de cidadãos brasileiros ou estrangeiros legais e armazena informações pessoais do contribuinte no sistema da Receita Federal*”. (DICIONÁRIO, 2019, não paginado).

Foi discutido na ocasião, a possibilidade de se utilizar o Algoritmo de Euclides junto com as regras, abaixo apresentadas, que constituem a estrutura de formação e validação de um CPF.

Na semana seguinte, alguns alunos das duas equipes foram até a mesa do professor/pesquisador no início do intervalo e apresentaram os modelos de CPF do Quadro 4 abaixo com as suas respectivas particularidades. Apresentaram também, uma tabela que relacionava o 9º dígito do CPF com o estado de origem do documento e uma folha, sem formalidade alguma e que segue reproduzida na Tabela 4 a seguir.

O documento e suas fases.

Quadro 4 – Modelos de CPF



Fonte: <https://bettencourt.jusbrasil.com.br>, 2017; e <http://aprenda2.org/blog/portugues/>, 2017.

Tabela 4 – A relação do 9º dígito do CPF com o estado de origem do documento

Dígito	Estado(s) ou Unidade(s) da Federação (UF)
1 →	Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins
2 →	Amazonas, Pará, Roraima, Amapá, Acre e Rondônia
3 →	Ceará, Maranhão e Piauí
4 →	Paraíba, Pernambuco, Alagoas e Rio Grande do Norte
5 →	Bahia e Sergipe
6 →	Minas Gerais
7 →	Rio de Janeiro e Espírito Santo
8 →	São Paulo
9 →	Paraná e Santa Catarina
0 →	Rio Grande do Sul

Fonte: <http://verificador.blogspot.com/p/cpf-validacao.html>, 2017.

Além das imagens e da tabela das unidades da federação, os alunos apresentaram uma explicação do método encontrado para a determinação dos dois dígitos verificadores, conhecidos também como DV. Segue abaixo o método apresentado depois de alguns encontros e uma configuração padrão definida para as duas equipes por meio de algumas minilições.

Primeiro passo: Identificar cada dígito do CPF pelo formato estabelecido tal como *ABC.DEF.GHI – JK*.

Segundo passo: Determinar o dígito *I* por meio da tabela que relaciona o dígito com a Unidade da Federação (UF) de origem do documento.

Terceiro passo: Determinar o dígito *J* por meio do resto da divisão por 11 da expressão

$$1 \cdot A + 2 \cdot B + 3 \cdot C + 4 \cdot D + 5 \cdot E + 6 \cdot F + 7 \cdot G + 8 \cdot H + 9 \cdot I$$

Quarto passo: Determinar o dígito *K* por meio do resto da divisão por 11 da expressão

$$1 \cdot B + 2 \cdot C + 3 \cdot D + 4 \cdot E + 5 \cdot F + 6 \cdot G + 7 \cdot H + 8 \cdot I + 9 \cdot J$$

Observou-se pela regra que os valores de *J* ou de *K* são iguais a zero quando a divisão por 11 deixara resto zero ou dez.

Passados os primeiros minutos da conversar, e com uma considerável dose de discrição, vem o professor e mais uma vez e diz: *“Para começar, estes quatro passos estão bons, mas temos muito ainda o que fazer”*. Dessa maneira, tal como já ocorrido, no coletivo com as equipes anteriores, o professor precisou reforçar a proposta do projeto.

Apresentando uma pequena dose de frustração, uma aluna da equipe D em questão, perguntou *“se não seria melhor o professor falar o que deveria ser feito, pois assim, seria tudo mais rápido”*.

Retornando aos princípios do modelo apresentado na aprendizagem baseada em projetos, o professor respondeu que: *“Querida, fundamentalmente, é meu dever nesse momento, tirar o melhor que vocês têm sem saber qual é esse melhor, pois nem vocês sabem. Comecem buscando entre vocês, práticas adquiridas dentro e fora dos limites do colégio que estarão num bom caminho.”*

Depois de tudo entendido por alguns membros das duas equipes, a conversa continuou num tom menos formal. As possibilidades entres eles foram aparecendo e o resultado disso veremos logo a seguir com a apresentação individual de cada uma das propostas.

4.2.1 Equipe C – Usando o Scratch e Planilhas

Dando continuidade ao desafio proposto, foi observado que os alunos dessa equipe apresentavam uma inclinação para o uso das TDIC's, pois eles já estavam falando em planilhas e que uma das alunas da equipe, a mais tímida de todas, fazia programação no segundo turno no Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial do Rio de Janeiro (SENAI-RIO). E com um largo sorriso no rosto, o professor/pesquisador percebeu que tinha encontrado um viés muito promissor e que tudo aquilo era só o começo de uma bela história que gerou os frutos abaixo.

Depois de tudo isso, o professor/pesquisador precisou fazer o dever de casa, e no encontro seguinte, entregou uma folha com uma lista bem particular de funções, que seria útil para a elaboração de uma planilha eletrônica. Apresentou também, para a aluna que tinha conhecimento em programação o Scratch, levando para o colégio o seu computador e alguns links como sugestões as necessidades propostas para o trabalho.

A Figura 12 a seguir representa o artefato, em sua versão final, desenvolvido pelos membros da equipe em forma de planilha eletrônica. Já no Quadro 5 encontramos as funções utilizadas na planilha desenvolvida para a verificação do 9º dígito e dos dois dígitos verificadores.

Figura 12 – A versão para os dígitos verificadores do CPF utilizando planilhas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1			Digite a sigla do estado de origem do CPF:							RJ		
2												
3	0	1	2	6	7	3	6	2	7	8	2	
4												
5			1o dígito verificador				2o dígito verificador					
6			Soma produto:	206		Soma produto:	244					
7			Módulo 11:	8		Módulo 11:	2					
8			Módulo 10:	8		Módulo 10:	2					

Fonte: A equipe C, 2017.

Quadro 5 – Funções utilizadas na planilha dos dígitos verificadores do CPF

$I3: = PROCV(I1; 'Estado de origem'!A2:B28; 2; FALSO)$
 $J3: = MOD(MOD(SOMARPRODUTO(A2:I2; A3:I3); 11); 10)$
 $K3: = MOD(MOD(SOMARPRODUTO(B3:J3; B4:J4); 11); 10)$
 $E6: = SOMARPRODUTO(A2:I2; A3:I3)$
 $E7: = MOD(E6; 11)$
 $E8: = MOD(E7; 10)$
 $I6: = SOMARPRODUTO(B4:J4; B3:J3)$
 $I7: = MOD(I6; 11)$
 $I8: = MOD(I7; 10)$

Fonte: A equipe C, 2017.

O nome da planilha identifica por '*Estado de origem*!', presente na fórmula da célula I3, identifica a planilha auxiliar criada para relacionar a sigla do estado de origem do CPF com o seu dígito referente.

Veja na Figura 13 a seguir a estrutura da pasta de trabalho final criada.

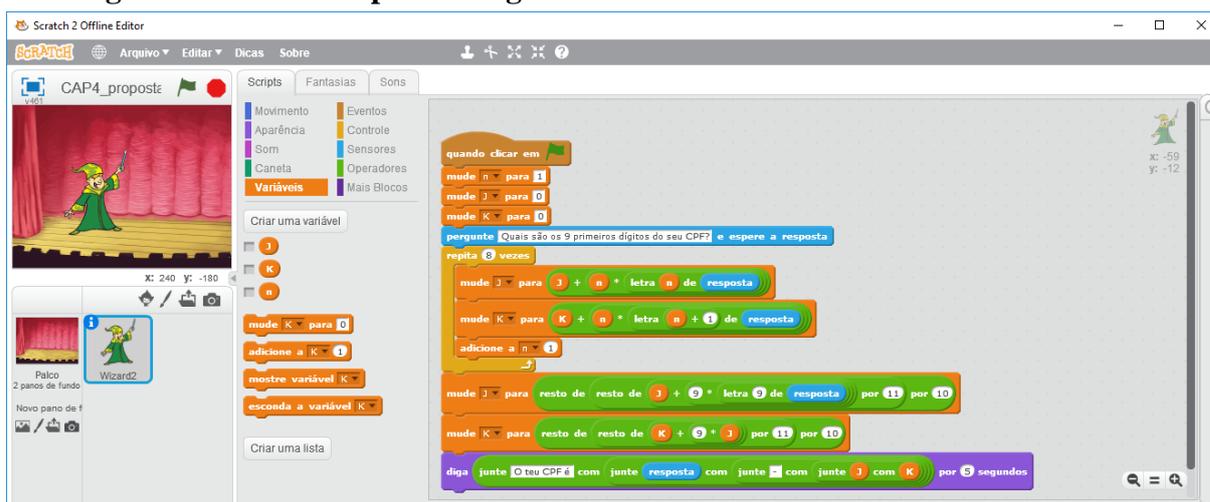
Figura 13 – A versão para os dígitos verificadores do CPF (as planilhas criadas)

UF	Dígito
DF	1
GO	1
MT	1
MS	1
TO	1
AM	2
PA	2

Fonte: A equipe C, 2017.

Na Figura 14 encontramos uma imagem referente a área de trabalho do programa Scratch e o código desenvolvido para os dígitos verificadores.

Figura 14 – A versão para os dígitos verificadores do CPF utilizando o Scratch



Fonte: A equipe C, 2017.

Nas Figuras 15 e 16 apresentamos, respectivamente, a tela inicial e a tela final da proposta desenvolvida no Scratch pela aluna que já tinha feito programação no SENAI-RIO.

Figura 15 – Tela inicial da proposta do CPF utilizando o Scratch



Fonte: A equipe C, 2017.

Figura 16 – Tela final da proposta do CPF utilizando o Scratch



Fonte: A equipe C, 2017.

No dia da apresentação, os alunos utilizaram uma versão mais ajustada da planilha eletrônica para ser utilizada no celular e um computador pessoal para rodar a versão feita no Scratch.

Esta apresentação chamou a atenção de um professor de Matemática do colégio, que ficou intrigado com o uso da função *mod* em uma planilha eletrônica. Segundo ele, aquele termo parecia familiar com alguma coisa que ele tinha visto durante a sua graduação. E como este professor, é muito querido por parte dos alunos do ensino fundamental e médio deste colégio, os alunos ficaram todos orgulhosos.

Um outro ponto positivo da apresentação, foi o contato que os alunos tiveram com a escrita do algoritmo reproduzido pela aluna no Scratch, e o quanto que aquela linguagem causava estranheza para a grande maioria do público presente.

4.2.2 Equipe D – Usando cartelas

Observando o perfil da equipe D, o professor concluiu que a proposta apresentada por eles teria um direcionamento diferente e que o trabalho proporcionado seria outro. O tamanho das contas a serem feitas, era algo que incomodava esses alunos, e eles não sabiam como fazer todas aquelas contas no dia da apresentação.

O professor se propôs a ajudá-los e comentou o quanto seria importante que a partir daquele momento as equipes C e D não trocassem informações entre si. Vale apenas ser destacado que essas equipes também pertenciam a turmas diferentes. Ele acreditava que nesse caso as ações já definidas pela equipe C poderiam contagiar as ações da equipe D.

A cada novo encontro que o professor tinha com a equipe D, eles manifestavam uma insatisfação e para cada ponto de insatisfação o professor dava uma dica em relação ao que poderia ser feito como alternativa. Podemos observar que nesses momentos, de forma não programada, o professor/pesquisador desta dissertação fez uso das minilições específicas para as necessidades desta equipe, mas que em troca, o professor solicitava que a sugestão, dada em forma de minilição, fosse justificada por eles em um outro encontro para eles terem direito a uma nova.

A seguir, apresentamos no Quadro 6 os pontos citados pelos alunos da equipe D e as sugestões em forma de minilições feitas pelo professor/pesquisador aplicadas em relação ao número 206 apenas como exemplo.

Quadro 6 – As minilições relacionadas com a equipe D

Insatisfação da equipe	Sugestão do professor
1. O cálculo do resto da divisão por 11.	Use a calculadora para determinar esse resto. $\frac{206}{11} = 18,\overline{72} = 18 + 0,\overline{72}$ $\rightarrow r = \frac{72}{9} = 8.$
2. Vai ficar chato no dia nós usarmos a calculadora na frente das pessoas.	Veja a regra de divisibilidade por 11. $6 - 0 + 2 = 8$

Insatisfação da equipe	Sugestão do professor
3. Somar as sucessivas multiplicações para depois encontrar o resto está dando muito trabalho.	<p>Encontre os restos das sucessivas multiplicações para depois somar esses restos e encontrar o resto final.</p> $7 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 7 = \underbrace{42}_{r_1=9} + \underbrace{16}_{r_2=5} + \underbrace{63}_{r_3=8}$ $\rightarrow r_p = 9 + 5 + 8 = 22 \rightarrow r = 0$
4. Ainda está dando muito trabalho.	<p>Junte a sugestão 2 com a sugestão 3 e leve em consideração os valores negativos e veja o que fazer.</p> $7 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 7$ $\rightarrow r_p = -2 + 5 - 3 = 0 \rightarrow r = 0$

Fonte: O autor, 2017.

Bender (2014, p. 48) afirma que além dos procedimentos de ensino e das etapas que os alunos devem completar, alguns professores podem querer usar minilições, no contexto da ABP, para apresentar informações à turma ou a uma única equipe. Afirma também, que uma minilição é uma lição em tópicos, bastante curta, na qual um professor ou uma equipe apresenta uma instrução específica e direta sobre informações de que todas as equipes ou para uma equipe de ABP podem necessitar para completar o seu projeto.

Depois de algum tempo, os alunos concluíram a etapa em questão colocando em prática as minilições durante aquele período. Em seguida, definiram a proposta de trabalho utilizando as Figuras 17 e 18 para ilustrar o avanço que eles tiveram.

Destacamos que na Figura 17, os alunos ilustraram as etapas realizadas por meio de uma multiplicação feita mentalmente registrada na linha J1 e K1, e que na linha J2 e K2, temos o resto da divisão desses números por 11. Já na Figura 18, os alunos apresentaram apenas aquilo que o participante tinha acesso aos cálculos para despertar ainda mais a curiosidade.

Figura 17 – Fase de preparação para a determinação dos DV's do CPF

J2	0	2	6	2	2	7	-2	5	-3	8	
J1	0	2	6	24	35	18	42	16	63	↓	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	0	1	2	6	7	3	6	2	7	J	K
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	↑
K1	1	4	18	28	15	36	14	54	72		
K2	1	4	7	6	4	3	5	-1	-5	2	

Fonte: A equipe D, 2017.

Figura 18 – Fase final para a determinação dos DV's do CPF

0	2	6	2	2	7	-2	5	-3	8	
0	1	2	6	7	3	6	2	7	J	K
	1	4	7	6	4	3	5	-1	-5	2

Fonte: A equipe D, 2017.

Depois de praticarem bastante, eles fizeram uso de uma cartela, como mostra a Figura 19, que segundo eles era mais completa, e que após o preenchimento dos voluntários, eles realizavam os cálculos.

Figura 19 – Cartela utilizada no dia da apresentação para a determinação dos DV's do CPF

Qual a sigla do estado de origem do CPF:										
1o dígito verificador					2o dígito verificador					
Soma produto:					Soma produto:					
Módulo 11:					Módulo 11:					
Módulo 10:					Módulo 10:					

Fonte: A equipe D, 2017.

Um dos destaques desta proposta, foi o despertar investigativo que os alunos tiveram em relação as possibilidades sejam elas do ponto de vista da construção dos artefatos tecnológicos digitais ou não digitais e a descoberta Matemática que os alunos tiveram para um conteúdo fundamental que estava repleto de incertezas e lacunas.

Um aluno perguntou ao professor/pesquisador, se nesse presente ano letivo, o de 2018, eles fariam algum tipo de projeto igual aos alunos do ano passado que fizeram o trabalho relacionado ao CPF. Imediatamente, o professor respondeu que sim, e que uma nova equipe iria partir de onde os alunos pararam e que teriam que avançar melhorando a proposta em sua análise, execução e apresentação.

Sobre a continuidade da proposta, os alunos das duas equipes sugeriram que um folheto com o mapa do Brasil fosse apresentado formalmente, com o objetivo de dar um esclarecimento maior para o dígito relacionado à UF de origem do CPF e, que nesse mapa, a questão

populacional fosse levada em consideração para que todos entendessem melhor o motivo da distribuição dos números.

A equipe C sugeriu que fosse feito uma proposta análoga para o Registro Geral (RG) ou Carteira de identidade, e que a versão do Scratch, questionasse o estado de origem do CPF do voluntário. A equipe D sugeriu que fosse feita uma análise em relação a soma de todos os dígitos do CPF, pois existe um padrão que envolve os múltiplos do número 11 e os seus respectivos vizinhos.

Uma outra possibilidade pensada pelo professor/pesquisador, seria o de determinar um dos oito primeiros dígitos do CPF conhecendo os outros dez ou conhecendo apenas os dois dígitos verificadores. A sugestão seria começar com uma conta bancária, que tem uma quantidade menor de dígitos e depois ampliar para o CPF.

4.3 Proposta 3: Os Cartões Mágicos Binários

Depois do jogo do resta um e do algoritmo dos dígitos verificadores do CPF, chegou a vez da Matemática. Esta foi a proposta de trabalho escolhida por duas outras equipes dentro do projeto. Foi escolhida a Matemática que utiliza os Cartões Mágicos Binários, usando o seguinte roteiro.

O matemático escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 63, sem revelá-lo. Em seguida, são apresentados os 6 cartões da Figura 20 e o matemático faz 6 perguntas. O número que você pensou está no primeiro cartão? está no segundo cartão? E assim por diante. Ao final das 6 perguntas o matemático revela o número que a pessoa pensou. Após realizar a mágica umas quatro ou cinco vezes, a plateia é desafiada em deduzir o truque utilizado e por que ele sempre funciona.

Figura 20 – Cartões mágicos binários utilizados na Matemática

A				B				C			
1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31
33	35	37	39	34	35	38	39	36	37	38	39
41	43	45	47	42	43	46	47	44	45	46	47
49	51	53	55	50	51	54	55	52	53	54	55
57	59	61	63	58	59	61	63	60	61	62	63

D				E				F			
8	9	10	11	16	17	18	19	32	33	34	35
12	13	14	15	20	21	22	23	36	37	38	39
24	25	26	27	24	25	26	27	40	41	42	43
28	29	30	31	28	29	30	31	44	45	46	47
40	41	42	43	48	49	50	51	48	49	50	51
44	45	46	47	52	53	54	55	52	53	54	55
56	57	58	59	56	57	58	59	56	57	58	59
60	61	62	63	60	61	62	63	60	61	62	63

Fonte: O autor, 2017.

E para explorar matematicamente este tema, o seguinte teorema abaixo foi enunciado.

“Teorema: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos, denominada representação binária.” (STEFFENON, 2017, p. 11).

Com a proposta em mãos, as equipes começaram a explorá-la tentando entender o seu funcionamento. O primeiro passo foi listar os dez primeiros números inteiros positivos, conforme mostramos da Tabela 5, utilizando o teorema apresentado.

Tabela 5 – Escrevendo de 1 a 10 utilizando a adição de diferentes potências de 2

Número	Representação		Presente na(s) cartela(s)
1	2^0	1	1
2	2^1	2	2
3	$2^0 + 2^1$	1 + 2	1 e 2
4	2^2	4	3
5	$2^0 + 2^2$	1 + 4	1 e 3
6	$2^1 + 2^2$	2 + 4	2 e 3
7	$2^0 + 2^1 + 2^2$	1 + 2 + 4	1, 2 e 3
8	2^3	8	4
9	$2^0 + 2^3$	1 + 8	1 e 4
10	$2^1 + 2^3$	2 + 8	2 e 4

Fonte: A equipe D, 2017.

O segundo passo, foi o de observar a tabela de valores de 0 até 63. Utilizou-se a representação binária por meio de zeros e uns, como temos na Figura 21.

Figura 21 – Representação binária dos números de 0 a 63

Valores	1	2	4	8	16	32	Valores	1	2	4	8	16	32	Valores	1	2	4	8	16	32	Valores	1	2	4	8	16	32	
0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	0	1	0	32	0	0	0	0	0	0	1	48	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	17	1	0	0	0	1	0	33	1	0	0	0	0	0	1	49	1	0	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0	18	0	1	0	0	1	0	34	0	1	0	0	0	0	1	50	0	1	0	0	1	1
3	1	1	0	0	0	0	19	1	1	0	0	1	0	35	1	1	0	0	0	0	1	51	1	1	0	0	1	1
4	0	0	1	0	0	0	20	0	0	1	0	1	0	36	0	0	1	0	0	0	1	52	0	0	1	0	1	1
5	1	0	1	0	0	0	21	1	0	1	0	1	0	37	1	0	1	0	0	0	1	53	1	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	22	0	1	1	0	1	0	38	0	1	1	0	0	0	1	54	0	1	1	0	1	1
7	1	1	1	0	0	0	23	1	1	1	0	1	0	39	1	1	1	0	0	0	1	55	1	1	1	0	1	1
8	0	0	0	1	0	0	24	0	0	0	1	1	0	40	0	0	0	1	0	0	1	56	0	0	0	1	1	1
9	1	0	0	1	0	0	25	1	0	0	1	1	0	41	1	0	0	1	0	0	1	57	1	0	0	1	1	1
10	0	1	0	1	0	0	26	0	1	0	1	1	0	42	0	1	0	1	0	0	1	58	0	1	0	1	1	1
11	1	1	0	1	0	0	27	1	1	0	1	1	0	43	1	1	0	1	0	0	1	59	1	1	0	1	1	1
12	0	0	1	1	0	0	28	0	0	1	1	1	0	44	0	0	1	1	0	0	1	60	0	0	1	1	1	1
13	1	0	1	1	0	0	29	1	0	1	1	1	0	45	1	0	1	1	0	0	1	61	1	0	1	1	1	1
14	0	1	1	1	0	0	30	0	1	1	1	1	0	46	0	1	1	1	0	0	1	62	0	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	0	0	31	1	1	1	1	1	0	47	1	1	1	1	0	0	1	63	1	1	1	1	1	1

Fonte: A equipe D, 2017.

Depois da tabela, o entendimento da Matemática ficou a um passo de ser revelado. Foi observado, que na coluna do 1, os zeros e uns estão alternando de um em um; que na coluna do 2, os zeros e uns estão alternando de dois em dois; que na coluna do 4, os zeros e uns estão alternando de quatro em quatro e assim por diante.

Utilizando este raciocínio, os alunos concluíram que, o que determina a presença de cada valor no cartão é a indicação do 1 na coluna que o identifica por meio do seu primeiro número, que é representado por uma potência de 2, que corresponde à primeira entrada de cada cartão.

É de extrema importância relatar, que tais conclusões foram realizadas depois de muitas turbulentas e frustradas tentativas e que o avanço da proposta só foi permitido pelo professor após o entendimento da relação entre os valores dos cartões e a tabela binária.

4.3.1 Equipe E – Usando as Cartelas Binárias e o Scratch

A presente equipe utilizou-se do tema de uma forma surpreendente e pitoresca. Eles tomaram a iniciativa de reproduzir os cartões de forma individual e desordenada, com a intenção de iludir os participantes durante a brincadeira.

Elegeram uma das meninas da equipe para representar a Matemática, e após recrutarem uma certa quantidade de pessoas, eles começavam a atuação de forma lúdica e intrigante. Era só esperar um ou dois minutos para que as pessoas se manifestassem em tom de revolta por não terem explicações lógicas para o ocorrido.

Uma outra dinâmica que eles fizeram, foi a de formar duas filas com quatro alunos em cada uma e distribuir os cartões em ordem aleatória como destacado na Figura 22 Depois, recolheram aqueles cartões que o número estava presente das mãos dos meninos e os cartões que o número não estava presente das mãos das meninas. Esta simples estratégia deixaram os

alunos voluntários ainda mais perturbados tentando entender a lógica dessa relação entre as distintas ações.

Figura 22 – Cartões mágicos binários com destaque para o número 50

E	A	D	B	F	C
16 17 18 19	1 3 5 7	8 9 10 11	2 3 6 7	32 33 34 35	4 5 6 7
20 21 22 23	9 11 13 15	12 13 14 15	10 11 14 15	36 37 38 39	12 13 14 15
24 25 26 27	17 19 21 23	24 25 26 27	18 19 22 23	40 41 42 43	20 21 22 23
28 29 30 31	25 27 29 31	28 29 30 31	26 27 30 31	44 45 46 47	28 29 30 31
48 49 50 51	33 35 37 39	40 41 42 43	34 35 38 39	48 49 50 51	36 37 38 39
52 53 54 55	41 43 45 47	44 45 46 47	42 43 46 47	52 53 54 55	44 45 46 47
56 57 58 59	49 51 53 55	56 57 58 59	50 51 54 55	56 57 58 59	52 53 54 55
60 61 62 63	57 59 61 63	60 61 62 63	58 59 61 63	60 61 62 63	60 61 62 63

Fonte: A equipe E, 2017.

Vejamos os dois exemplos abaixo para o número 50.

Menino: $16 + 2 + 32 = 50$

Menina: $63 - (1 + 8 + 4) = 50$

Pensando em explorar ainda mais o tema e sua proposta de trabalho, o professor levou para o colégio, o recorte de um manual do usuário de um ventilador, ver Figuras 23 e 24, e o seu controle remoto. Pediu para que eles analisassem o uso das 4 alavancas posicionadas na parte traseira do controle remoto e determinassem o número de configurações possíveis com a sua devida justificativa. E mais uma vez, o professor ouviu de um dos seus alunos “*Que aqueles botões localizados na parte traseira do controle não tinham nada a ver com a proposta do trabalho deles*”.

Figura 23 – Recorte do manual do ventilador com controle de combinação binária

Caso sejam instalados mais de um ventilador de teto Arno Ultimate em uma mesma residência, o usuário deverá codificar os aparelhos para que cada controle comande especificamente o seu respectivo ventilador. O procedimento é o seguinte:

1. Abra a tampa da bateria do “controle remoto” de acordo com a figura 10.
2. Localize uma pequena caixa com 4 alavancas como mostrado na figura 11.
3. Desloque uma ou mais alavancas para cima. Escolha seu código.
4. Desligue o interruptor de parede.

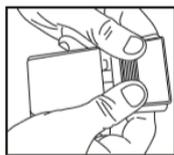


Figura 10

5. Aguarde no mínimo 15 segundos.
6. Ligue novamente o interruptor de parede.
7. Desligue e ligue duas vezes o interruptor.
8. Pressione o botão Exaustão/Ventilação várias vezes até que o aparelho emita 3 “bips” rápidos indicando o reconhecimento da nova codificação. Caso não escuta (ou “o aparelho não emita”) os bips, faça novamente o procedimento a partir do item 4.

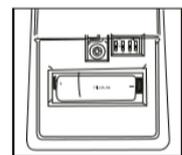
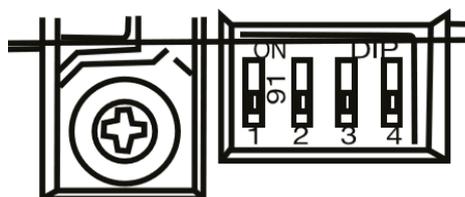


Figura 11

Fonte: <https://www.arno.com.br/>, 2018.

Figura 24 – Detalhe das alavancas do controle que usa a combinação binária

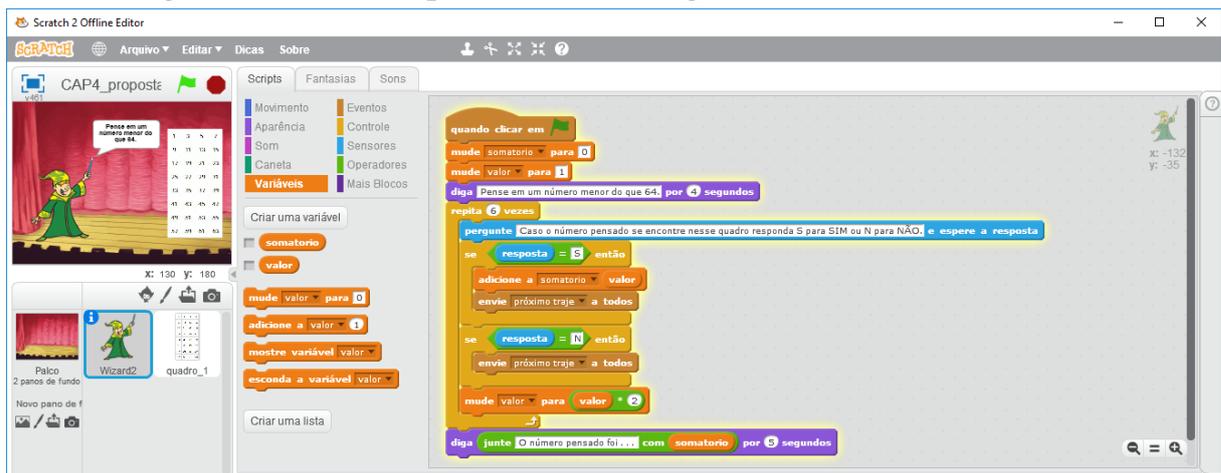


Fonte: <https://www.arno.com.br/>, 2018.

Feita a análise, com um pouco mais de prudência, os alunos relacionaram o posicionamento de cada uma das quatro chaves com o ZERO, para baixo, e com o UM, para cima, totalizando as 16 combinações de chaveamentos possíveis por meio do princípio fundamental da contagem.

Com o interesse de valorizar ainda mais o trabalho da equipe E, o professor solicitou a aluna e programadora teen da equipe C, envolvida em outra proposta, que desenvolvesse uma pequena aplicação no Scratch para a proposta em questão como segue na Figura 25 abaixo.

Figura 25 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch



Fonte: A equipe E, 2017.

As Figuras 26, 27 e 28 a seguir, compõe as telas apresentadas pela pequena aplicação criada no Scratch para melhor ilustrar o tema da proposta de trabalho da equipe E.

Figura 26 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch tela inicial



Fonte: A equipe E, 2017.

Figura 27 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch 1º cartão



Fonte: A equipe E, 2017.

Figura 28 – A versão para os cartões mágicos binários feita no Scratch tela de resultado



Fonte: A equipe E, 2017.

4.3.2 Equipe F – Usando as Cartelas Binárias com performance

Paralelamente em relação aos acontecimentos das outras equipes, a equipe F foi trabalhando dentro de sua proposta, e nos trouxe uma iniciativa ousada, mas totalmente viável. A ideia foi a de desenvolver três conjuntos distintos de cartões, para determinar a data de nascimento do voluntário. O primeiro conjunto de cartões seria para determinar o dia do nascimento, o segundo conjunto, o mês do nascimento, e o terceiro conjunto, o ano do nascimento por meio da idade do voluntário.

Vale ressaltar, que os cartões para determinar a idade do voluntário, seguem o modelo do nosso problema inicial de determinar um número inteiro positivo menor do que 64. Os demais cartões, foram pensados e criados por dois membros da equipe depois que estes

compreenderam o processo de formação dos números e sua representação em cartões por meio dos cálculos binários.

Determinando o dia do nascimento do voluntário utilizando os cartões da Figura 29.

Figura 29 – Os cartões mágicos binários para o dia de nascimento

A				B				C			
1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31

D				E			
8	9	10	11	16	17	18	19
12	13	14	15	20	21	22	23
24	25	26	27	24	25	26	27
28	29	30	31	28	29	30	31

Fonte: A equipe F, 2017.

Determinando o mês de nascimento do voluntário utilizando os cartões do Figura 30.

Figura 30 – Os cartões mágicos binários para o mês de nascimento

A				B			
1	3	5	7	2	3	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15

C				D			
4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	12	13	14	15

Fonte: A equipe F, 2017.

Determinando a idade do voluntário utilizando os cartões da Figura 31.

Figura 31 – Os cartões mágicos binários para a idade

A				B				C			
1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31
33	35	37	39	34	35	38	39	36	37	38	39
41	43	45	47	42	43	46	47	44	45	46	47
49	51	53	55	50	51	54	55	52	53	54	55
57	59	61	63	58	59	61	63	60	61	62	63

D				E				F			
8	9	10	11	16	17	18	19	32	33	34	35
12	13	14	15	20	21	22	23	36	37	38	39
24	25	26	27	24	25	26	27	40	41	42	43
28	29	30	31	28	29	30	31	44	45	46	47
40	41	42	43	48	49	50	51	48	49	50	51
44	45	46	47	52	53	54	55	52	53	54	55
56	57	58	59	56	57	58	59	56	57	58	59
60	61	62	63	60	61	62	63	60	61	62	63

Fonte: A equipe F, 2017.

O professor alertou aos alunos da equipe para tomar o devido cuidado no momento do cálculo do ano do nascimento da pessoa pois este deveria levar em consideração o dd/mm de aniversário do voluntário.

Um dos destaques no desenvolvimento dessa proposta, foi a inquietude dos alunos em querer saber como tal coisa funcionava, seguida da empolgação pela descoberta feita, e da capacidade em remodelar a proposta inicial.

Sobre a continuidade da proposta, os alunos das duas equipes sugeriram uma extensão do uso dos conceitos aprendidos para uma outra aplicação. A equipe F sugeriu que uma versão no Scratch para adivinhar a data de nascimento da pessoa fosse elaborada como extensão da proposta de trabalho em questão.

4.4 As habilidades Matemáticas envolvidas nas propostas do projeto

Na concepção de Bender (2014, p. 55), depois dos professores determinarem como trabalharão uma experiência de aprendizagem de ABP em seu cronograma curricular para um determinado ano, a próxima questão envolve quais competências e habilidades devem ser unidas à experiência de ABP.

Desse modo, ao se prepararem para a ABP, é recomendável que os professores se foquem na BNCC. À medida que os professores contemplem os tipos de produtos ou artefatos necessários em uma unidade de ABP, eles podem anexar duas ou três competências àquele produto ou experiências de aprendizagens.

A partir disso, relacionamos 9 das 45 habilidades específicas da Matemática e suas tecnologias do Ensino Médio que foram contempladas nas seis experiências de ABP apresentadas nos itens anteriores e as destacamos nos Quadros 7, 8, 9 e 10 a seguir.

**Quadro 7 – Habilidades da competência específica 1
envolvidas nas experiências de ABP**

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.			
Habilidades	R1	CPF	Cartela
(EM13MAT103) Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.			●
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.	●		

Fonte: Brasil, (2018, p. 483).

**Quadro 8 – Habilidades da competência específica 2
envolvidas nas experiências de ABP**

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.			
Habilidades	R1	CPF	Cartela
(EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.	●	●	●

Fonte: Brasil, (2018, p. 484).

**Quadro 9 – Habilidades da competência específica 3
envolvidas nas experiências de ABP**

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
--

Habilidades	R1	CPF	Cartela
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.		●	●
(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.		●	●
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.		●	●
(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.	●	●	●

Fonte: Brasil, (2018, p. 485).

Quadro 10 – Habilidades da competência específica 4 envolvidas nas experiências de ABP

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.			
Habilidades	R1	CPF	Cartela
(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.		●	●
(EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.	●		

Fonte: Brasil, (2018, p. 486).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

[...] Vivemos num ambiente de informação que recobre e mistura vários saberes e formas muito diversas de aprender, ao mesmo tempo em que se encontra fortemente descentrado em relação ao sistema educativo que ainda nos rege, organizado em torno da escola e do livro. (MARTIN-BARBERO, 2006, p. 56, apud BANNELL, 2016, p. 77)

Este presente trabalho ofereceu ao leitor uma apresentação seguida de uma aplicação da ABP, como suplemento de um modelo de ensino baseado em unidades, na disciplina de Matemática em seu nível médio. É relevante destacar, que a adoção do ensino na ABP pode causar, em seu início, uma dose de desconfiança por parte do professor. Em contrapartida, pesquisas já demonstraram que está prática tem envolvido cada vez mais os alunos aumentando a sua motivação e o seu rendimento de modo que todos participem de forma autêntica e significativa da construção do processo de aprendizagem.

Com o fim dos relatos das propostas, destacamos de forma positiva, que a ABP conseguiu por meio desta pesquisa, mobilizar os alunos de forma estruturada e criativa, disponibilizando para eles e também para o professor/pesquisador desta dissertação uma experiência de ensino e aprendizagem diferenciada e coletiva.

Observou-se também, que o conteúdo da disciplina ficou em segundo plano em cada uma das equipes analisadas e que o projeto já tinha virado o protagonista do processo. Neste momento, na concepção do aluno, o conhecimento matemático era apenas um degrau a ser superado e que o mais importante era concluir a proposta do projeto.

Considerando o maior envolvimento por parte dos alunos em relação aos conteúdos de aprendizagem, concluímos por meio desta pesquisa, que tal experiência foi extremamente válida para todos os sujeitos envolvidos. Pois neste caso, a relação entre professor-aluno ganhou mais afinidade e a relação aluno-aluno ficou mais produtiva, respeitosa e criativa, e com isso, ficaram todos mais motivados e preparados para os desafios futuros.

Um outro ponto positivo das propostas de projeto de ABP vivenciadas nesta pesquisa, é que os conteúdos envolvidos ganharam um nível mais elevado de compreensão por partes dos alunos, pois estes, tiveram um contato mais aprofundado e mais crítico com os conteúdos em questão. A ABP provocou nos alunos tipos de habilidades que permitiram que eles desenvolvessem estratégias eficazes na resolução de cada um dos problemas conforme estes surgiram.

Fazendo uma análise particular, o professor/pesquisador desta dissertação evidencia a ampla utilização de forma saudável, de tecnologias aplicadas ao ensino pelos estudantes e o

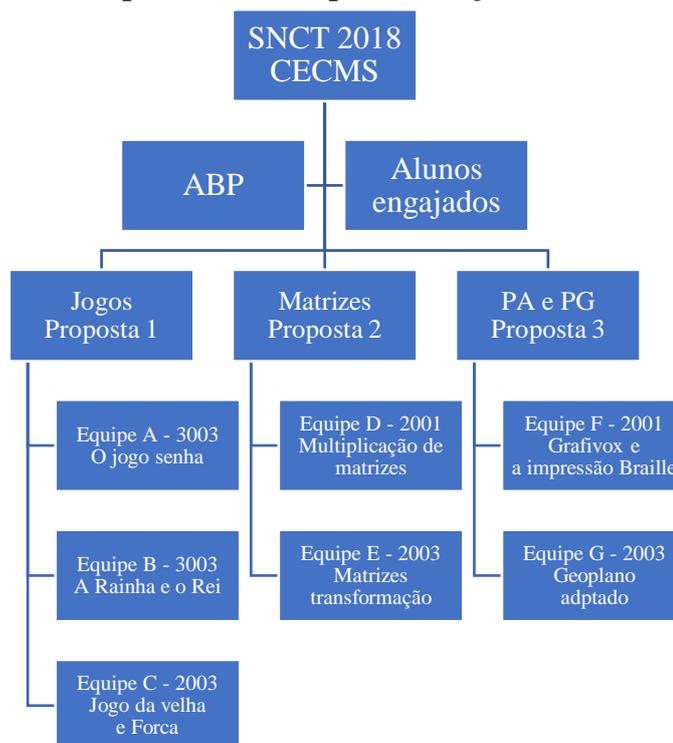
crescimento alcançado por parte dos alunos de baixo rendimento, sejam por apresentarem reais dificuldades com o conteúdo da disciplina ou por aqueles que se sentem desmotivados pelo formato das aulas mais conteudistas. E por essas questões, devemos primar cada vez mais pelos processos de aprendizagem que sejam voltados para o ensino diferenciado e que entre eles destacasse a ABP.

Para o professor/pesquisador desta dissertação, este processo foi acontecendo aos poucos dentro de sua prática profissional até que a ABP se tornou uma consequência de tudo aquilo que ele vinha exercendo. E voltando à meta inicial do projeto, que era o de *“superar as barreiras relacionadas a disciplina por meio de uma aprendizagem em projetos e que estas os deixariam mais ativos, autônomos e críticos”* podemos dizer que esta foi alcançada.

A presente proposta de aprendizagem apresentou por meio de um processo de investigação as etapas da ABP e o seu desenvolvimento por parte do professor/pesquisador dessa dissertação, dos alunos envolvidos e o seu engajamento. Por meio de relatos do cotidiano escolar apresentamos as experiências alcançadas pelos alunos que resultaram em propostas de trabalhos singulares e produtos diferentes.

Além disso, o trabalho apresentou também uma investigação de um projeto educacional em desenvolvimento para alunos do Ensino Médio de Matemática utilizando a ABP fazendo um link direto as competências e habilidades hoje outorgadas pela BNCC como acontece em outros países em relação aos seus padrões ou referenciais comuns.

Para instigar aqueles que são mais curiosos apresentamos no Diagrama 7 o layout do projeto para o ano letivo de 2018 que traz o tema “Ciência para redução de desigualdades”. Neste presente projeto, daremos o devido destaque as tecnologias assistivas voltadas para proporcionar ou ampliar habilidades funcionais de pessoas com visão subnormal ou cegos e consequentemente promover vida independente e inclusão para os estudantes nessas condições que é o item 10 dos 20 assuntos que podem ser abordados na SNCT 2018.

Diagrama 7 – Propostas de ABP para o Projeto SNCT 2018 CECMS

Fonte: O autor, 2018.

Acerca da continuidade desta pesquisa, nos colocamos a disposição de sua continuação em trabalhos futuros como o objetivo de aprimorar e expandir a proposta de aprendizagem matemática baseada em projetos. Destacamos que até o presente momento, a proposta ainda não foi aplicada para um mesmo grupo de alunos por dois anos letivos consecutivos e nem mesmo para alunos do ensino fundamental II.

Contamos que a nossa contribuição para o ensino da matemática tenha sido no mínimo satisfatória e que outros trabalhos similares possam contribuir ainda mais com as nossas expectativas acadêmicas e profissionais.

REFERÊNCIAS

- BAKER, S.; BAKER, K. E. **Project management**. New York: Alpha Books, 1998.
- BANNELL, Ralph I. et al. **Educação no Século XXI: cognição, tecnologia e aprendizagem**. Petrópolis: Vozes, 2016; Rio de Janeiro. Editora PUC, 2016.
- BENDER, Willian N. **Aprendizagem baseada em projetos: educação diferencia para o século XXI**. Porto Alegre: Penso, 2014. Obra originalmente publicada sob o título Project-Based Learning: Differentiating Instruction for the 21st Century. 1st Edition.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. (orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 3ª edição. São Paulo: Cortez, 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2 ed. Brasília, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 29/07/2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 7/2010**, 14 de dezembro de 2010. Brasília, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CEB nº 11/2010**, de 7 de julho de 2010. Brasília, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2002.
- DICIONÁRIO Online de Português. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/projeto>>. Acesso em: 29/07/2018.
- FUNAYAMA, Carolina Araújo Rodrigues. **Problema de aprendizagem: enfoque multidisciplinar**. 3ª edição. Campinas, SP: Editora Alínea, 2008.
- KNOLL, M. D., “**The Project Method: Its Vocational Education Origin and Development**”. Virginia, EUA: Universidade de Bayreuth, 2004. Disponível em: <<http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JITE/v34n3/Knoll.html>>. Acesso em: 29/07/2018.
- LENINE; DUDU FALCÃO. **Simples assim**. Universal Music, Carbono, 2015. Disponível em: <<https://www.letras.mus.br/lenine/simples-assim/>>. Acesso em: 14/11/2018.
- MAXIMIANO, A. C. A. **Administração de projetos: transformando ideias em resultados**. São Paulo: Atlas, 1997.
- MOURA, Dácio; BARBOSA, Eduardo. Metodologias ativas de aprendizagem no ensino de engenharia. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION*, 13., 2014, Portugal. **Anais [...]** Portugal: COPEC, 2014. p. 1-7. Disponível em: <<http://www.tecnologiadeprojetos.com.br/?>>. Acesso em: 29/07/2018.
- MOURA, Dácio; BARBOSA, Eduardo. **Trabalhando com projetos: Planejamento e gestão de projetos educacionais**. Edição digital. Petrópolis, RJ: Vozes, 2017.

MOURA, Dácio; BARBOSA, Eduardo. **Uma proposta de tipologia de Projetos Educacionais**. 2011. Disponível em: <<http://www.tecnologiadeprojetos.com.br/?>>. Acesso em: 29/07/2018.

PAIS, Luiz C. **Educação escolar e as tecnologias da informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PENTEADO, Miriam Godoy. **Novos atores, novos cenários**: discutindo a inserção dos computadores na profissão do docente. São Paulo: Ed. Unesp, 1999.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro. **Secretaria de Educação cria projeto ‘Matemática 360°’**. 2015. Disponível em: <<http://www.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=2421640>>. Acesso em: 24 de julho de 2018.

STEFFENON, Rogério Ricardo. **Belos problemas**: Indução e princípio das gavetas de Dirichlet. Edição eletrônicas. Rio de Janeiro: SBM; IMPA; UFRJ. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/BELOS%20PROBLEMAS.pdf> >. Acesso em: 29 de julho de 2018.

VERR, René V. D.; VALSINER, Jaan. **Vygotsky**: Uma síntese. 6ª edição. São Paulo: Edições Loyola, 2009.

APÊNDICE A – OS PRIMEIROS PASSOS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS PROPOSTAS

Este apêndice surgiu da necessidade de compartilharmos as primeiras ações em relação a dinâmica de trabalho realizada e a sua condução em direção às propostas de aprendizagens matemática envolvidas nessa dissertação que é o objeto de estudo do professor/pesquisador e autor.

Gostaríamos de iniciar essa breve apresentação por meio de uma postura que é tomada pelo professor/pesquisador desde suas primeiras aulas no início do ano letivo. Nas primeiras semanas de aula, o professor/pesquisador faz uma análise do perfil dos alunos e das turmas em que leciona utilizando uma tabela simples onde ele registra pelo menos três aptidões que os alunos possuem. Entre elas, o professor/pesquisador tem relacionado os seguintes itens:

- bom desenvolvimento com a escrita;
- boa interpretação, comunicação e apresentação;
- organização, criatividade e liderança;
- habilidades manuais para corte e colagem;
- conhecimento de um outro idioma;
- habilidades com as artes tais como: música, canto, ilustração, pintura, fotografia e encenação;
- interesse por livros, filmes, séries e esportes;
- habilidades no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação.

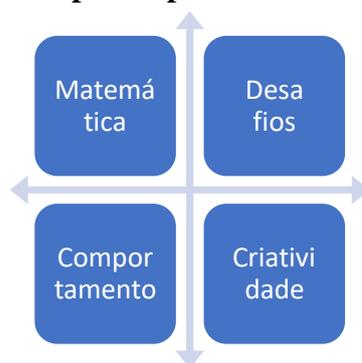
Depois desse pequeno raio X, o professor/pesquisador começa a organizar, em suas anotações, as equipes que deverão ser formadas para o desenvolvimento das futuras propostas do projeto.

O próximo passo é apresentar o problema dos quatro quattros para as turmas. Nesse momento, os alunos são desafiados a escrever expressões numéricas que resultem em valores de 0 a 20 utilizando a regra dos quatro quattros. O professor/pesquisador acredita que tal desafio além de permitir uma avaliação preliminar sobre as dificuldades dos alunos em relação as operações fundamentais, essa pequena atividade avalia também o comportamento dos alunos perante novos desafios.

E nesse sentido, o professor/pesquisador apresenta um lado curioso da matemática e, desde já, começa a propor aos alunos o desenvolvimento de seu lado criativo.

O diagrama 8 destaca os quatros elementos trabalhados na ação acima envolvendo a criação das expressões numéricas.

Diagrama 8 – Os primeiros passos para o desenvolvimento das propostas



Fonte: O autor, 2019.

Um outro ponto que é desenvolvido junto com os alunos, é a existência dos conteúdos primários que necessitam do conhecimento de outros conteúdos secundários. Vejamos um exemplo: Se considerarmos a Matemática Financeira como sendo o conteúdo primário a ser trabalhado durante um certo período letivo, devemos considerar as progressões aritmética e geométrica, as funções afim e exponencial, as equações exponenciais e logarítmicas e as tabelas e gráficos como sendo os conteúdos secundários conforme ilustrado no diagrama 9.

Diagrama 9 – Conteúdos primários e secundários



Fonte: O autor, 2019.

Destacamos que nesse momento, o interesse do professor/pesquisador é de mostrar, para os alunos, que para se ter o domínio de um conteúdo relevante é necessário o conhecimento de outros conteúdos a ele relacionado. E que esse tipo de postura é extremamente saudável para a exploração do tema e das propostas do projeto.

E com essas pequenas ações, o professor/pesquisador consegue traçar de forma definitiva, e junto com os alunos, as equipes que serão formadas justificando, segundo a sua análise, o porquê que esse ou aquele aluno permaneceram em uma mesma equipe ou não.

Formadas as equipes, o professor/pesquisador apresenta o tema depois do seu anúncio feito pelo Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações por meio da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia. Em seguida, ele faz o desdobramento do tema utilizando as etapas da ABP por meio de um vídeo Âncora e uma Questão Motriz que servem para inspirar e nortear todas as propostas.

APÊNDICE B – O DESENVOLVIMENTO DAS PROPOSTAS DE UM PROJETO DE ABP

O objetivo deste apêndice é de compartilhar a nossa proposta de aprendizagem matemática para o ensino médio baseada em projetos, de maneira que o professor ainda tímido em relação ao processo, possa apresentar e convidar os seus alunos para participar.

Na concepção de Bender (2014, p. 16), a ABP pode ser definida pela utilização de projetos autênticos e realistas, baseados em uma questão, tarefas ou problema altamente motivador e envolvente, para ensinar conteúdos acadêmicos aos alunos no contexto do trabalho cooperativo para a resolução de problemas.

Acreditamos que o primeiro passo para uma aprendizagem baseada em projetos, seja a definição individual, de um único professor, coletiva e/ou institucional de um tema central e que este por sua vez, atenda, preferencialmente, uma necessidade da comunidade local, podendo ou não este tema, suprir as necessidades dos personagens envolvidos diretamente no desenvolvimento das propostas do projeto.

A escolha de um tema central que não seja do domínio do professor é muito positiva neste momento, pois, nesse caso, ele terá que se preparar e se envolver com o tema tal como o seu aprendiz. Uma das vantagens desse tipo de escolha, é que ao se preparar para o desenvolvimento do projeto por meio do tema central escolhido, o professor vai perceber, em sua busca, as reais necessidades e as maiores dificuldades encontradas pelos alunos no avançar de suas atividades.

Uma vez desenvolvido o tema central, ainda de forma embrionária, por parte do professor, este deverá apresentar e discutir as possibilidades de seus desdobramentos junto com os alunos. Devemos lembrar que nesse momento, o olhar e a opinião do aluno e a sua verdadeira identificação com a proposta a ser desenvolvida é de extrema importância pelo simples fato dele se achar pertencente à proposta do projeto definida e vice-versa.

Definidas as propostas, o próximo passo é a formação das equipes levando em consideração a afinidade e as habilidades em relação aos membros envolvidos em cada uma das equipes. Destacamos que quanto mais heterogênea forem as características dos membros das equipes melhor será para as equipes. Recomendamos equipes com 7 a 12 membros.

Dentro do nosso atual cenário, devemos olhar para a sala de aula como uma comunidade de aprendizagem, onde todos os personagens envolvidos participam ativamente, sendo alguns com intensidades diferentes, contribuindo com aquilo que ele sabe fazer de melhor e se ajustando sempre ao projeto.

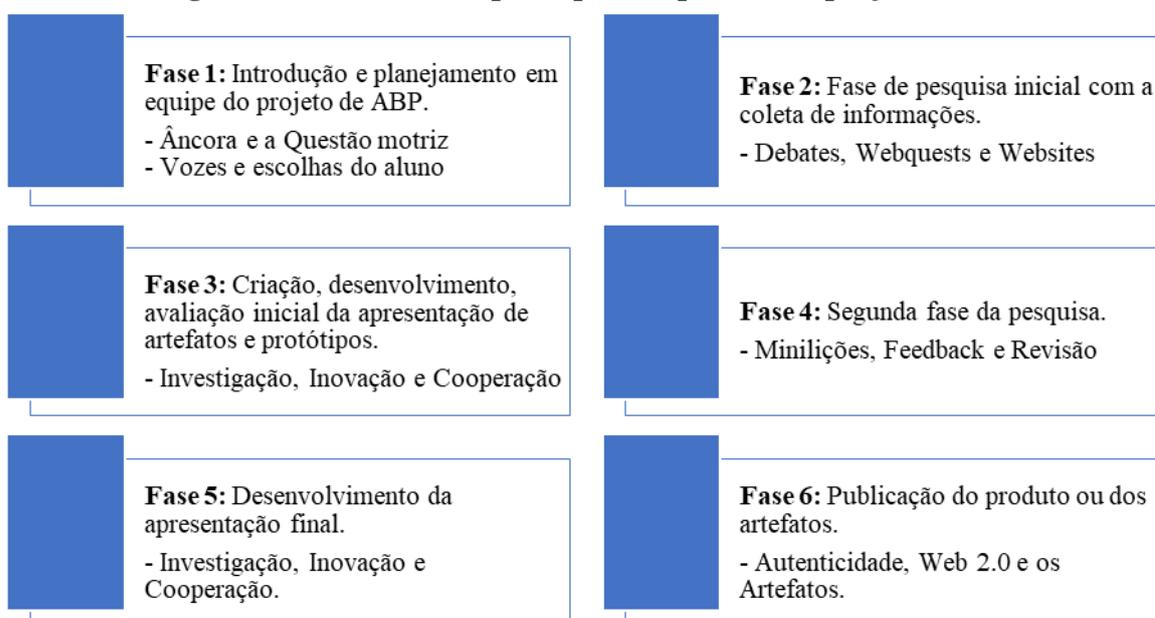
Entendemos que os alunos apresentam algumas habilidades potenciais ou já desenvolvidas e que somadas só tendem a fortalecer o todo. Temos alunos que escrevem bem, outros que leem e falam muito bem, outros que se destacam nos desenhos, na organização e planejamento, outros por sua vez são líderes natos e outros mais que dominam as TICD's.

Falando das tecnologias de informação e comunicação ou das tecnologias digitais ou até mesmo as não digitais, gostaríamos de destacar que cabe aos formadores dessa atual geração o ajuste necessário em relação ao seu avanço e o baixo desenvolvimento das habilidades mais fundamentais. Precisamos de tecnologias, mas precisamos muito mais de pessoas com habilidades de produzirem com o suporte dessa tecnologia.

Voltando aos projetos, precisamos agora ressaltar que o papel do professor não é o de servir como fornecedor de informações, na ABP, os professores devem atuar como orientadores, à medida que os alunos avancem em suas atividades. Em seguida, o professor precisará definir um cronograma a ser definido junto com os alunos e respeitando o calendário letivo da instituição.

Devemos lembrar que nesse momento o professor já deverá ter em seu planejamento uma organização definida em relação as fases e as etapas de um projeto de ABP conforme apresentado no diagrama 10 a seguir.

Diagrama 10 – Fases e as principais etapas de um projeto de ABP



Fonte: O autor, 2018.

Apresentamos abaixo uma descrição sobre as etapas de um projeto de ABP presente no diagrama 10.

- **Âncora:** Essa é a base para perguntar. Uma âncora serve para fundamentar o ensino em um cenário do mundo real. Ela pode ser um artigo de jornal, um vídeo interessante, um problema colocado por um político ou grupo de defesa, ou uma apresentação multimídia projetada para "preparar o cenário" para o projeto (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1992a, 1992b; GRANT, 2002, apud BENDER, 2014, p. 16).
- **Questão motriz:** É a questão principal, que fornece a tarefa geral ou a meta declarada para o projeto de ABP. Ela deve ser explicitada de maneira clara e ser altamente motivadora; deve ser algo que os alunos considerem significativo e que desperte sua paixão (GRANT, 2002; LARMER; MERGENDOLLER, 2010, apud BENDER, 2014, p. 17).
- **Voz e escolha do aluno:** Essa expressão é usada para representar o fato de que os alunos devem ter algum poder de decisão (alguns proponentes da ABP diriam que eles devem ter o poder exclusivo de decisão) sobre a escolha do projeto e a especificação da questão fundamental (LARMER; MERGENDOLLER, 2010, apud BENDER, 2014, p. 17).
- **Brainstorming:** O processo de brainstorming pelo qual os alunos passam para formular um plano para tarefas de projeto é semelhante a outras atividades de brainstorming, em que a meta é produzir o máximo possível de ideias para a resolução de tarefas sem descartar, inicialmente, nenhuma delas. Em muitos casos, esse processo precisa ser ensinado diretamente aos alunos, já que alguns encontrarão problemas nas ideias de outros imediatamente, a menos que sejam devidamente instruídos sobre o processo de brainstorming (GRANT, 2002, apud BENDER, 2014, p. 17).
- **Webquests:** São considerados um meio de auxílio à pesquisa.
- **Websites:** Fornecem informações ou exemplos de projetos de ABP que o professor deve examinar, bem como informações sobre como planejar um projeto de ABP.
- **Investigação e inovação:** Dentro da questão motriz abrangente, a equipe precisará gerar questões adicionais focadas mais especificamente nas tarefas do projeto.
- **Cooperação:** É crucial para as experiências de ABP como forma de tornar as experiências de aprendizagem mais autênticas.
- **Minilições:** É uma lição em tópicos, bastante curta, na qual o professor ou uma equipe apresenta uma instrução específica.
- **Feedback e revisão:** A assistência estruturada deve ser rotineiramente proporcionada pelo professor/mediador. O feedback pode ser baseado nas avaliações do professor ou dos colegas.
- **Autenticidade:** Os projetos de ABP pretendem ser exemplos autênticos dos tipos de problemas que os alunos enfrentam no mundo real, de modo que algum tipo de apresentação pública dos resultados do projeto é fundamental dentro da ABP.

- **Web 2.0:** recentemente, o termo web 2.0 passou a ser usado para mostrar que a instrução baseada nas tecnologias já foi muito além do mero acesso às informações pela internet (FERRITER; GARRY, 2010, apud BENDER, 2014, p. 17). mais do que isso, as ferramentas web 2.0 salientam o fato de que os alunos, ao trabalharem de forma colaborativa em modernos ambientes de tecnologia instrucional, na verdade estão criando conhecimento em vez de simplesmente usar a tecnologia de forma passiva para adquiri-lo. dessa forma, a web 2.0 não é uma coleção de novas aplicações tecnológicas, mas uma forma de utilizar os aplicativos atuais para ajudar os alunos a resolverem problemas e a se tornarem contribuintes do conhecimento.
- **Artefatos:** São itens criados ao longo da execução de um projeto e que representam possíveis soluções, ou aspectos da solução, para o problema.

Explorando ainda mais o conceito de artefato encontramos que: O termo artefato é usado para enfatizar que nem todos os projetos resultam em um relato escrito ou em uma apresentação. Os artefatos podem incluí-los, mas também podem abranger vídeos digitais, portfólios, podcasts, websites, poemas, músicas ou cantos que ilustrem o conteúdo, projetos de arte que resultem do projeto, interpretação de papéis ou peças de um único ato que representem soluções de problemas, artigos para o jornal da escola ou para jornais locais, relatórios apresentados oralmente para vários órgãos governamentais ou para outras organizações e recomendações ou diretrizes para ações com relação a certas questões. Em resumo, um artefato pode ser praticamente qualquer coisa de que o projeto necessite, dada a expectativa de que os artefatos representem coisas necessárias ou usadas no mundo real (GRANT, 2002, apud BENDER, 2014, p. 16). Além disso, na maior parte das instruções de ABP, há ênfase nas habilidades do século XXI, de modo que muitos artefatos envolvem o desenvolvimento ou a criação com o uso das tecnologias digitais.

Para finalizar, podemos dizer que a aprendizagem, seja ela escolar ou não escolar, caminha hoje com uma pré-disposição em relação a flexibilidade cognitiva, onde o resultado final do processo de aprendizagem é muito mais importante do que a forma com que essa aprendizagem aconteceu. Ela pode ser centralizada, descentralizada, individual, coletiva, por descoberta (imprevista/livre-exploração/guiada/intrínseca), exposição (indutiva/dedutiva) colaborativa, corporal, mental, invertida, criativa, diferenciada e tantos outros, isso não importa, o que importa é que ela tem que acontecer de alguma forma.