

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Vitor Hugo Justino Carvalho

**UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE
PROBABILIDADE DO NOVO ENEM POR MEIO DE UMA
VISÃO DO PCNEM E TRÊS LIVROS DIDÁTICOS**

Rio de Janeiro
2018



Vitor Hugo Justino Carvalho

**UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE PROBABILIDADE DO NOVO ENEM
POR MEIO DE UMA VISÃO DO PCNEM E TRÊS LIVROS DIDÁTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. D.Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

C331 Carvalho, Vitor Hugo Justino

Uma análise das questões de probabilidade do novo ENEM por meio de uma visão do PCNEM e três livros didáticos / Vitor Hugo Justino Carvalho. – Rio de Janeiro, 2018.

84 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Probabilidade - Teoria. 3. ENEM. I. Martins, Daniel

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB7 5692.

Vitor Hugo Justino Carvalho

**UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE PROBABILIDADE DO NOVO ENEM
POR MEIO DE UMA VISÃO DO PCNEM E TRÊS LIVROS DIDÁTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Prof. D.Sc. Daniel Felipe Neves Martins (Orientador)
PROFMAT- CPII

Prof. Dr. Gisela Maria da Fonseca Pinto
DEMAT-UFRRJ

Prof. D.Sc. Nei Carlos dos Santos Rocha
IM-UFRJ

Prof. D.Sc. Patrícia Erthal de Moraes
PROFMAT- CPII

Rio de Janeiro
2018

Dedico esse trabalho a toda a minha família,
pois sem o seu apoio seria impossível chegar
até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de ter cursado esse mestrado e poder concluí-lo em meio a tantas dificuldades; sem o seu sustento seria impossível chegar até o seu fim e obrigado por ter me dado o meu tesouro, meu filho Bernardo, durante essa trajetória.

Agradeço em especial a minha esposa Ingrid Martins por sempre ter me apoiado durante o curso e por me incentivar a todo o momento, a minha mãe que sem seu apoio não teria chego nem a graduação, a minha irmã por ter me dado uma sobrinha linda nesse período e me convidar para ser padrinho da pequena Helena e a todos os meus familiares que sempre foram a minha base de vida.

Agradeço a todos os meus amigos: pessoais, de trabalho, da graduação e do mestrado por toda a força que me deram até a esse momento, sem dúvidas a amizade é um dos bens mais preciosos que podemos ter.

Deixo também meu muito obrigado a todos os meus professores que sempre me ensinaram o que era certo e errado e me inspiraram a seguir os seus passos pelo magistério. Em destaque aos professores Cleber Haubrichs por ter sido meu orientador durante o curso da graduação e sem dúvidas foi mais que isso, foi quase um pai, durante aquele período, me motivando e me dando muitas broncas e puxões de orelha quando necessários.

Ao meu orientador Daniel Martins por ter topado ser meu orientador no mestrado e mais ainda: ter aceitado a troca de tema quando falei que não estava confortável com o tema anteriormente escolhido. De coração muito obrigado pela compreensão, você nesse momento se tornou um exemplo de um professor que se importa de verdade com seus alunos.

Por fim e não por menos importantes, aos professores: Gisela Pinto, Nei Rocha e Patrícia Erthal que aceitaram o meu convite de comporem a banca de defesa desse trabalho.

A gente tem coragem pra vencer
A gente não se cansa de lutar
A gente corre atrás e manda ver
Se tem objetivo, vai buscar

Não há nada pra nos abater
Deus está aqui para nos guiar
Quem sabe faz a vida acontecer
A gente precisa ter fé
E nunca reclamar de dor
Sempre de pé
Mesmo existindo algum dissabor

As pedras não vão impedir
O destino que Deus reservou
Saber resistir
É o segredo de um bom vencedor

Pra que chorar, melhor sorrir
Perseverar, não desistir
E ter um pouquinho só de malandragem
A vida vai te balançar
Te questionar, te sacudir O que ela quer da gente é coragem”

Diogo Nogueira - Coragem

RESUMO

CARVALHO, Vitor Hugo J. **Uma análise das questões de probabilidade do Novo Enem por meio de uma visão do PCNEM e três livros didáticos**. 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Esse trabalho tem por objetivo observar, relatar e analisar as questões de probabilidade presentes no ENEM, entre os anos de 2009 e 2017, a fim de verificar se somente de posse da definição formal de probabilidade por Laplace o aluno da rede pública do Estado do Rio de Janeiro é capaz de resolver tais questões corretamente. Para compor à resposta a questão levantada, esse trabalho descreve um breve resumo histórico de como o estudo da probabilidade se desenvolveu, a fim de verificar se autores de livros didáticos importaram algum aspecto relacionado ao tema da História da Matemática. Expõe as principais recomendações para o ensino de probabilidade segundo os parâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCNEM), assim como apresenta as orientações mais relevantes que o ENEM indica para o estudo da probabilidade. A fim de verificar se o material didático escolhido pelos professores da escola pública do Estado do Rio de Janeiro está em consonância com as propostas do exame, estuda-se detalhadamente o capítulo de probabilidade dos três livros didáticos mais adotados por esta rede que fazem parte do plano nacional do livro didático (PNLD) com o intuito de verificar qual ou quais abordagens para o ensino de probabilidade estão presentes nestes livros. Encontram-se nesse texto também as resoluções das questões propostas dos anos supracitados e suas classificações segundo níveis de dificuldade de maneira autoral, obviamente sendo a classificação baseada nos referenciais teóricos estudados e diferindo muitas vezes, da classificação adotada pelos idealizadores de tais questões no órgão público responsável pela confecção do ENEM, a saber o INEP. A pesquisa é de caráter bibliográfico.

Palavras-chave: Probabilidade; História da Probabilidade; ENEM; PCNEM; Livros Didáticos.

ABSTRACT

CARVALHO, Vitor Hugo J. **.Uma análise das questões de probabilidade do Novo Enem por meio de uma visão do PCNEM e três livros didáticos.** 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

This dissertation aims to figure out if the traditional definition of probability by Laplace is sufficient to solve probability questions from ENEM, the Brazilian national high school exam for accessing undergraduate courses, by senior high school students from public schools. The research is descriptive and of a bibliographical character. To answer the purposed question, the three most chosen math books collections by teachers were studied, as well as the subject development through the History of Mathematics to check out if authors made use of its sources to compose the books chapters. It is important to remark that these book analysis helped to identify how probability is presented to the students. The text also describes how probability is presented by the Brazilian board of education guide for teachers and presents the ENEM's recommendations like index to catch up good goals. To compose a good theoretical foundation, students' books were strongly used, especially in statistical, combinatorics and probability sections. All questions from the exams between 2009 and 2017 are solved and an authoring rating was created, different from that one that has been created by INEP organizers staff.

Keywords: Probability; History of Probability; ENEM; PCNEM; Math Books on Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 UM BREVE PANORAMA DO DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DA PROBABILIDADE	12
2.1 O nascer do estudo da probabilidade no século XVI	12
2.2 O início da teoria da probabilidade moderna	13
2.3 O desenvolver da probabilidade ao longo do Século XVIII	15
3 UMA VISÃO DO ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO DA ÓTICA DO PCNEM, DO NOVO ENEM E DE TRÊS LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS PELO PNLD	19
3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)	19
3.2 A reestruturação do ENEM e suas orientações para o estudo da probabilidade	22
3.3 Uma breve descrição de três livros didáticos adotados pelo PNLD	24
3.3.1 Descrição do capítulo 11: Probabilidade do livro ‘Matemática, ciência e aplicações’	24
3.3.2 Descrição do capítulo 10 do livro ‘Matemática, contextos e aplicações’	27
3.3.3 Descrição do Capítulo 1 do livro: Matemática Paiva de Manoel Paiva	32
4 UMA VERIFICAÇÃO DE COMO O TÓPICO PROBABILIDADE É ABORDADO NO NOVO ENEM	35
4.1 Apresentação dos critérios classificatórios para o nível de dificuldade das questões analisadas	35
4.2 Exposição das questões de probabilidade do ENEM dos anos de 2009 a 2017	39
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	79
REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Ao pesquisar sobre o ensino de probabilidade destaca-se, como principais abordagens adotadas em livros didáticos do Ensino Médio, o seu ensino via a definição tradicional de Laplace (a probabilidade calculada em espaço amostral equiprováveis é dada pela razão do número de casos favoráveis para os possíveis), a abordagem frequentista e associação da probabilidade ao conceito de função. Mas, **qual ou quais dessas abordagens estão presentes nos principais livros didáticos adotados pela rede pública do Estado do Rio de Janeiro? Conhecer somente a definição tradicional de Laplace é suficiente para resolver as questões de probabilidade no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)¹? Os alunos dessa rede, de posse dos livros analisados, são capazes de resolver tais questões?**

A fim de responder às perguntas apresentadas, essa pesquisa descreve o capítulo de probabilidade em três livros didáticos selecionados pelo pesquisador. Tais livros foram aprovados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático)², os mesmos, foram escolhidos e adotados pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro para serem usados em suas aulas durante três anos letivos consecutivos.

Além da análise citada, foram retirados do ENEM as questões que envolvem probabilidade no recorte dos anos de 2009 a 2017 e a motivação para este corte temporal reside no fato de que a partir do ano de 2009 o ENEM sofreu uma reformulação em relação aos anos anteriores, passando a ser conhecido como Novo ENEM.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo esta introdução o primeiro capítulo, que apresenta o objeto desta pesquisa. O capítulo dois, intitulado “Um breve panorama do desenvolvimento do estudo da probabilidade” mostra ao leitor um resumo de como o estudo da probabilidade se desenvolveu a partir do século XVI, até os dias atuais.

¹“ O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) tem como finalidade principal a avaliação do desempenho escolar e acadêmico ao fim do Ensino Médio. O exame é realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) e Ministério da Educação (MEC)”. (INEP,2015, não paginado). Disponível em: < <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem> > . Acesso em: 11/11/2018.

²“O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.(...) Os materiais distribuídos pelo MEC às escolas públicas de educação básica do país são escolhidos pelas escolas, desde que inscritos no PNLD e aprovados em avaliações pedagógicas coordenadas pelo Ministério da Educação e que conta com a participação de Comissões Técnica específica, integrada por especialistas das diferentes áreas do conhecimento correlatas, cuja vigência corresponderá ao ciclo a que se referir o processo de avaliação.”. (BRASIL, [2018], não paginado). Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>>. Acessado em: 19/09/2018.

O capítulo três “Uma visão do ensino de probabilidade no ensino médio através das óticas do PCNEM³, do Novo ENEM e de três livros didáticos aprovados pelo PNLD”, objetiva apresentar as orientações que PCNEM e o ENEM indicam para o estudo da probabilidade, além de descrever o capítulo que aborda probabilidade nos livros didáticos: Matemática, ciência e aplicações, de Gelson Iezzi; Matemática, contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante e Matemática Paiva, de Manoel Paiva.

O capítulo “Uma verificação de como o tópico probabilidade é abordado no Novo ENEM”, o quarto dessa pesquisa, apresenta as questões que envolvem probabilidade neste exame entre os anos de 2009 a 2017. Nele encontramos, pelo menos, uma solução e uma classificação em nível de dificuldade fácil, médio e difícil, segundo um critério autoral que será apresentado nesse capítulo, para cada questão. Além de destacar os principais recursos teóricos contidos na grade de conteúdos que o aluno deve utilizar para conseguir resolvê-las. Parte da novidade desta pesquisa reside no fato de que a classificação dada às questões é autoral e no texto estão especificados quais os critérios utilizados para adotar a classificação proposta.

O trabalho se encerra no capítulo cinco onde as considerações finais respondem claramente às questões propostas nesta pesquisa que ainda não foram respondidas ao longo dos demais capítulos e sugere o uso deste texto como material de apoio ao professor do Ensino Médio das escolas públicas brasileiras que se dedicam a trabalhar com seus alunos exercícios temáticos do ENEM.

³ “Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM . As Orientações Curriculares para o Ensino Médio foram elaboradas a partir de ampla discussão com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica. O objetivo deste material é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. A qualidade da escola é condição essencial de inclusão e democratização das oportunidades no Brasil, e o desafio de oferecer uma educação básica de qualidade para a inserção do aluno, o desenvolvimento do país e a consolidação da cidadania é tarefa de todos.” (BRASIL, [2018], não paginado). Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33672>>. Acessado em: 19/09/2018.

2 UM BREVE PANORAMA DO DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DA PROBABILIDADE

Apresentamos nesse capítulo um breve resumo do desenvolvimento histórico do estudo da probabilidade, objetivando relatar alguns personagens relevantes e algumas de suas contribuições de destaque para esse campo de estudo.

2.1 O nascer do estudo da probabilidade no século XVI

Durante o século XVI um dos principais entretenimentos eram os jogos de azar⁴ e graças a eles, alguns brilhantes matemáticos tiveram seus olhos voltados para o estudo da probabilidade, quase sempre com o intuito de aumentarem suas chances de ganho.

O primeiro nome que merece destaque é de Luca Pacioli (1445-1517), frade franciscano, nascido na cidade de Borgo San Sepolcro, na Toscana. Foi professor de matemática e pode ser considerado um dos pioneiros no cálculo de probabilidade. Uma de suas contribuições de destaque é sua técnica aplicada na divisão do prêmio em um jogo de dados inacabado, o que futuramente vem a ser conhecido como problema dos pontos⁵ e é estudado por dois matemáticos franceses do século XVII, Blaise Pascal e Pierre de Fermat.(MOL,2013)

Pacioli realizava a divisão do prêmio de maneira proporcional à probabilidade de vitória de cada jogador. Sendo assim, o mesmo introduziu a noção de esperança matemática de maneira intuitiva, que futuramente vem ser apresentado formalmente por Christiaan Huygens, onde esperança matemática ou valor esperado é o valor médio obtido por uma experiência repetida diversas vezes. A esperança matemática pode ser calculada $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$ sendo $E(X)$ é a esperança de uma variável aleatória ocorrer e $p(x_i)$ a probabilidade da variável aleatória assumir o valor x_i ocorra, sendo $i = 1,2,3 \dots, n$ em que cada x_i é um possível resultado de X . (SILVEIRA, 2001).

Girolamo Cardano (1501 - 1576), matemático italiano, assumidamente um viciado em jogos de azar, tem sua atenção voltada para o estudo da probabilidade, com o intuito de

⁴ Segundo o Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa (HOUAISS; VILLAR, 2009, p. 1134) jogo de azar é: “aquele em que o ganho ou a perda estão na dependência exclusiva da sorte (como roleta) ou dela dependem mais do que o cálculo ou da habilidade do jogador (como os jogos carteados em geral).”

⁵ O problema mencionado é apresentado pelo historiador Howard Eves (2011, p. 393), no qual relata: “Determine a divisão das opostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo”.

maximizar seus ganhos. Seu estudo tem início com o arremesso de dois dados, onde conclui que há 36 pares ordenados de resultados possíveis no lançamento dos mesmos e não apenas 21 pares (não ordenados). (PAULO, 2013).

Cardano pode ser visto como o pioneiro no uso de técnicas de contagem para o cálculo da probabilidade da ocorrência de um evento. Porém, o mesmo não produziu resultados expressivos registrados relativos ao estudo de probabilidade, limitando-se a resolver problemas concretos. Suas contribuições para o cálculo de probabilidade estão presentes num pequeno manual de jogos, intitulado, *Liber de Ludo Aleae* (o livro dos jogos de azar) publicado postumamente em 1663. (ROTUNNO,2007).

Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1577) nasceu na Itália e recebe o apelido de gago (Tartaglia) por ter sua fala prejudicada após sofrer com golpes de espada durante uma invasão francesa a sua cidade, Brescia (GODOY; MATTOS,2007). Sua principal contribuição ao estudo da probabilidade é o triângulo aritmético que futuramente vem ser conhecido como triângulo de pascal, presente na figura 1. (PAULO,2013).

Figura 1 – Triângulo de Pascal

	Col. 0	Col. 1	Col. 2	Col. 3		Col. 0	Col. 1	Col. 2	Col. 3
Linha 0	C_0^0				Linha 0	1			
linha 1	C_1^0	C_1^1			linha 1	1	1		
linha 2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		linha 2	1	2	1	
linha 3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	linha 3	1	3	3	1
			

Fonte: O autor, 2018.

Dessa maneira o estudo da probabilidade no século XVI ocorre informalmente, não tendo nenhuma publicação que apresente teoremas ou definições formais relacionadas a esse campo.

2.2 O início da teoria da probabilidade moderna

Pierre de Fermat (1601-1665), francês, nascido em Beaumont-de-Lomagne, era advogado e foi matemático por hobby. Apesar da matemática ser apenas sua diversão nas

horas vagas, ele tem profundas contribuições em diversos campos. Entre eles destacam-se a teoria dos números, o cálculo, a geometria analítica e a probabilidade. (PAULO,2013).

Apesar de sua genialidade, Fermat não se preocupava em publicar seus resultados, compartilhava suas ideias por meio de correspondências com seus contemporâneos e fazia suas anotações em bloco de notas. É justamente em uma de suas correspondências com o também francês Blaise Pascal (1623-1662), que lhe é apresentado o problema dos pontos, problema esse que desperta sua atenção e que por meio dele, Fermat e Pascal desenvolvem os alicerces da teoria da probabilidade moderna. Essa teoria é registrada em sete cartas, nas quais os matemáticos trocam informações e soluções para o problema dos pontos e suas variações. Nas mesmas cartas Fermat e Pascal registram novos conceitos e métodos clássicos de contagens. (PAULO,2013).

Muitos estudiosos apontam Pascal e Fermat como os pais da teoria da probabilidade, tendo sua origem nas correspondências mencionadas. Outros não lhes dão esse crédito, uma vez que as correspondências só foram publicadas após suas mortes. (PAULO,2013).

Segundo Paulo (2013, p.5) “Tão importante quanto estes dois grandes estudiosos foi Christiaan Huygens. Ele é apontado como o primeiro pesquisador que deu tratamento científico à probabilidade.”

Christiaan Huygens (1629-1695) apesar de ter suas principais pesquisas no campo da astronomia e da física, podemos dizer que ele também tem grande contribuição no ramo da probabilidade. (ROTUNNO, 2007).

[...] O impulso definitivo ao nascimento e expansão do cálculo das probabilidades só foi dado em 1657, por Huygens. Estimulado pela leitura da correspondência entre os dois matemáticos, publica um pequeno folheto, o primeiro tratado dedicado exclusivamente à Teoria das Probabilidades, chamado “De ratiociniis in ludo aleae” (Sobre o raciocínio nos jogos de azar), em que relata o conteúdo das cartas e evidencia o grande mérito das reflexões nelas contidas. (ROTUNNO, p.18, 2007).

Assim, pode-se dizer que:

Durante o século XVII novas formulações sobre aplicações do Cálculo de Probabilidades foram apresentadas. Os estudos dos jogos de azar despertaram a possibilidade de prever, em certo grau, acontecimentos futuros a partir de dados que podemos observar. Inicia-se, nessa fase, a busca por uma organização de informações do passado que permitissem prever o futuro e, conseqüentemente, interferir nele. (ROTUNNO, 2007, p.19)

Apresentaremos a seguir, em breves linhas, o desenvolvimento da probabilidade no século XVIII destacando as formulações sobre as aplicações do cálculo das probabilidades.

2.3 O desenvolver da probabilidade ao longo do Século XVIII

O início do século XVIII é marcado pelo acúmulo de conhecimento científico produzido no século XVII, sendo o estudo da probabilidade uma das áreas de conhecimento em grande expansão. Facilmente aplicável ao cotidiano, a teoria das probabilidades acaba atraindo muitos matemáticos, marcando áreas como o que hoje conhecemos por ciências atuariais⁶ e estatística. (ROTUNNO,2007).

O primeiro nome que merece destaque é Jakob Bernoulli (1654 - 1705). Apesar de ter vivido grande parte no século XVII, tem sua obra, *Ars Conjectandi*, publicada postumamente em 1713. Este livro é considerado por muitos autores, um marco primeiro acerca do estudo exclusivo da probabilidade, contendo uma reedição do trabalho de Huygens sobre jogos de azar. (ROTUNNO,2007).

Bernoulli também apresenta sua versão própria da Lei dos Grandes Números⁷ que chama de “Teorema Áureo”, onde segundo Coutinho (2007, p.61) : “(...) este teorema mostra que as frequências relativas, em um certo sentido, convergem para a probabilidade subjacente, o que justifica a utilização da probabilidade em outros contextos além dos jogos de azar.”

O matemático francês, Abraham De Moivre (1667-1754), é considerado o pioneiro a trabalhar o uso da integral em cálculos probabilísticos. Em duas de suas obras, *Théorie Du Hasard* (1718), e *Miscellanea Analytica*⁸ (1730), encontramos um material muito rico referente ao estudo de probabilidade. Nesta última, destaca-se o interesse e a acuidade em desenvolver métodos matemáticos e generalizações para a teoria das probabilidades. (UNIVERSIDADE SÃO PAULO, 2009a).

⁶ “As Ciências atuariais são as ciências que estudam e analisam riscos dentro da área de Economia e Finanças.” Disponível em:< <https://www.guiadacarreira.com.br/guia-das-profissoes/ciencias-atuarias/>> Acesso em: 29/08/2018.

⁷ Este teorema descreve o resultado da realização de uma mesma experiência repetidas vezes, sendo tão grande quanto se queira a quantidade de repetições. De acordo com esta lei a média aritmética dos resultados da realização de uma mesma experiência repetidas vezes tende a se aproximar do valor esperado à medida que mais tentativas ocorram, isto é, quanto mais vezes o experimento é realizado, mais a probabilidade da média aritmética dos resultados observados irá se aproximar da probabilidade real. A importância desta lei está na garantia de resultados estáveis a longo prazo para a média de eventos aleatórios. A lei dos grandes números é um teorema matemático e garante que a frequência relativa de um evento ocorrer sempre irá convergir para um determinado número.

⁸ Neste texto a fórmula de Stirling já aparece como já conhecemos nos dias de hoje. De Moivre utilizou esta fórmula para descrever a Lei Normal (curva normal de Gauss) como uma aproximação da Lei Binomial em 1733. Na segunda edição desse texto em 1738, De Moivre, melhora a compreensão da fórmula de Stirling dando a este matemático escocês o devido crédito, ainda nesta segunda edição encontrasse a gênese do Teorema Central do Limite, um dos dois principais teoremas em teoria das probabilidades. (SÓ MATEMÁTICA, [2018], não paginado)

Thomas Bayes (1701-1761), pastor e matemático inglês, conhecido pelo teorema de Bayes, tem um papel de muito destaque quando pesquisamos cálculo das probabilidades (PENA,2006). Destaque-se que :

[...] o estudo significativo foi o deixado por Bayes, em 1763. Este autor analisou o problema de se determinarem as probabilidades das causas de um evento – problema este que foi observado por meio de seus resultados (SILVA, I. de A., 2002). Isso permite determinar a probabilidade de um sucesso a posteriori em função de uma probabilidade a priori. Bayes foi o primeiro a utilizar a probabilidade matemática no raciocínio indutivo e seus estudos abriram um novo horizonte de aplicação. Na época, iniciaram-se várias investigações de compilação de informações referentes ao censo populacional. Eram registros referentes a nascimentos, casamentos, mortalidades, etc. apoiados no desenvolvimento da Estatística Descritiva. (ROTUNNO,2007, p.20)

Daniel Bernoulli (1700-1782), cria o conceito de esperança moral e aplicou-o na área de seguros. Ele também influencia Leonhard Euler (1707-1783), o melhor aluno de seu pai, Jacques Bernoulli, a estudar probabilidade , que contribui com algumas notações ao escrever sobre expectativa de vida e valor de uma anuidade , por exemplo. (UNIVERSIDADE SÃO PAULO, 2009b).

O italiano, Joseph Louis Lagrange (1736-1813), aplica o cálculo diferencial ao cálculo probabilístico na teoria matemática do som, indo além dos conceitos deixados por Newton. Ele retira o tema do campo da mecânica dos fluidos para a mecânica do sistema de partículas elásticas e contribui na gênese dos sistemas dinâmicos ao contribuir para solução do Problema dos Três Corpos de Euler. (ROTUNNO,2007)

Coutinho (2007) apresenta o momento histórico de introdução à probabilidade geométrica.

[...] A noção de probabilidade geométrica foi introduzida por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, matemático e naturalista francês do séc. XVIII. Em um contexto social no qual os jogos de azar proliferavam muito, após a morte de Luiz XIV, Buffon apresenta na França o jogo de Franc Carreau em um trabalho endereçado à Academia Real de Ciências, em 1733. Este jogo consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas entre lajotas? (COUTINHO,2007, p.63)

Nesse contexto, observa-se que a probabilidade geométrica é inserida por meio do jogo de azar citado. Antes dele os conceitos geométricos eram quase que irrelevantes para os jogos de azar, mas diante do *Franc Carreau* algumas informações geométricas são relevantes para definição dos casos favoráveis ou não, como por exemplo, o diâmetro da moeda que é lançada, o formato das lajotas, etc.

2.4 A importância da probabilidade para os Séculos XIX e XX

O século XIX tem suas atenções do estudo da probabilidade voltados para suas aplicações como podemos observar em :

[..] Nesta etapa, início do séc. XIX, multiplicaram-se os estudos sobre as aplicações da Probabilidade e suas possíveis interpretações na sociedade. Os estudos dessas informações permitiam conhecer condições e funcionamentos próprios da sociedade. No entanto, alimentou-se a idéia de que, como na Física, o comportamento humano poderia ser regido por leis estatísticas e probabilísticas. Como consequência, muitas aplicações foram efetuadas de modo incorreto, provocando juízos sem fundamento e conclusões errôneas. Além disso, os trabalhos desenvolvidos anteriormente continham estudos teóricos muitos avançados para as idéias da época. Esses fatores influenciaram diretamente na reputação na Teoria das Probabilidades e em seu aparente abandono. (ROTUNNO,2007, p.21)

Destaca-se que na primeira metade do século XIX, mais precisamente em 1812, o matemático francês, Pierre- Simon Laplace (1749-1827) publica “Teoria Analítica de Probabilidade”. Apesar do estudo da probabilidade não ser o seu principal campo de pesquisa, seu interesse pelo cálculo probabilístico se fez necessário para apoiar suas outras pesquisas, como os estudos relativos à astronomia. (PAULO,2013)

Em 1825 Laplace publica o “*Ensaio Filosófico sobre Probabilidade*”, no qual apresenta suas contribuições à teoria da probabilidade, discutindo as bases desse ramo. Além de apresentar aplicações. Nessa obra, também apresentou contribuições para o ramo da estatística. (PAULO,2013)

No século XX, o matemático russo Andrei Kolmogorov (1903 - 1987) publica em 1933 a primeira edição do “*Fundamentos de Teoria das Probabilidades*”, obra essa que apresenta de forma inédita a teoria das probabilidades de forma axiomática (PAULO,2013).

Na sua formulação, os conjuntos de resultados são interpretados como eventos e a probabilidade propriamente dita como uma medida numa classe de conjuntos. Sendo assim, uma probabilidade é um número entre 0 e 1; a probabilidade de um evento ou proposição e seu complemento, se somados, valem até 1; a probabilidade condicionada ou conjunta de dois eventos ou proposições é o produto da probabilidade de um deles e a probabilidade do segundo, na primeira. Como se nota, esses axiomas formam a base para a teoria da probabilidade matemática. (PAULO, 2013, p.8)

Observa-se ainda que:

Os axiomas de Kolmogorov tornaram a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta

área, sobretudo sob o aspecto teórico. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico, seja nas ciências humanas ou nas políticas. (ROTUNNO, 2007, p.22)

No próximo capítulo veremos como este assunto está inserido na matemática escolar por meio da análise das orientações curriculares para o ensino médio, o exame nacional do ensino médio e três livros didáticos adotados pela rede pública do Rio de Janeiro. Essa análise é feita a fim de responder as questões que justificam esta dissertação.

3 UMA VISÃO DO ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO DA ÓTICA DO PCNEM, DO NOVO ENEM E DE TRÊS LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS PELO PNLD

Uma vez que esse trabalho tem por objetivo analisar as questões de probabilidade do ENEM dos anos 2009 à 2017, é necessário pensar em que perspectiva as questões serão analisadas. Para fazer essa análise, esse capítulo apresentará de forma breve uma visão para o ensino de probabilidade por meio do PCNEM, as orientações do NOVO ENEM para o estudo da probabilidade e uma descrição de três livros didáticos que fazem parte do PNLD, adotados na rede pública do Rio de Janeiro.

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)

O PCNEM apresenta orientações complementares em relação aos parâmetros curriculares nacionais (PCN's), como foco está voltado para o Ensino Médio. Sua motivação está no fato de que :

[...] o ensino médio tem se caracterizado por uma ênfase na estrita divisão disciplinar do aprendizado. Seus objetivos educacionais se expressavam e, usualmente, ainda se expressam em termos de listas de tópicos que a escola média deveria tratar, a partir da premissa de que o domínio de cada disciplina era requisito necessário e suficiente para o prosseguimento dos estudos. Dessa forma, parecia aceitável que só em etapa superior tais conhecimentos disciplinares adquirissem, de fato, amplitude cultural ou sentido prático. Por isso, essa natureza estritamente propedêutica não era contestada ou questionada, mas hoje é inaceitável. (BRASIL, 2006,p.8)

Assim, o PCNEM :

[...] pretende discutir a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de forma a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a educação básica.” (BRASIL, 2006, p.7)

Sua proposta para o ensino da matemática é que seja sistematizado por meio de três eixos (chamados de temas estruturais), sendo eles:

- Eixo 1 - Álgebra: números e funções
- Eixo 2 - Geometria e medidas
- Eixo 3 - Análise de dados .

Os três eixos devem permitir articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos a fim de gerar, mais ganhos a aprendizagem, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível e

preparar melhor o aluno no seu caminhar em direção às competências matemáticas. (BRASIL,2006)

Uma vez, que:

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL,2006,p.111)

O tema estrutural que será norteador na perspectiva desse trabalho será a Análise de Dados, organizado em três unidades temáticas: estatística, contagem e probabilidade. Assim,

uma das grandes competências propostas pelos PCNEM diz respeito à contextualização sócio-cultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade. (BRASIL,2006,p.126)

O tema estrutural norteador também aponta que matemática do ensino médio pode ser um determinante para a eficaz leitura de informações midiáticas assim como em outras áreas do conhecimento através da interpretação correta dos dados tratados e apresentados em tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico. Além de refletir criticamente sobre seus significados. Espera-se que o aluno do ensino médio atinja após investigação crítica sobre esses dados, o hábito de tomada de decisões, fazendo da estatística e da probabilidade um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a matemática em questões do mundo real. Uma vez que

Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente. Cabe à Estatística, por exemplo, analisar a intenção de voto em uma eleição ou o possível êxito do lançamento de um produto no mercado, antes da eleição em si e da fabricação do produto. Isso é feito através da pesquisa estatística, que envolve amostras, levantamento de dados e análise das informações obtidas. Da mesma forma, a Probabilidade acena com resultados possíveis, mas não exatos. Ao afirmar que o resultado 1 tem $1/6$ de probabilidade no lançamento de um dado, não há certeza de que em seis lançamentos do dado o número 1 sairá exatamente uma vez. Assim como ao afirmarmos que determinado tratamento médico tem 90% de probabilidade de cura para uma doença, não garante que em um grupo de 10 pessoas submetidas a este tratamento exatamente uma pessoa continuará doente. (BRASIL,2006,p.126)

É importante destacar, que encontramos em (Brasil, 2006) a fala de que a contagem é apenas o instrumental para o desenvolvimento da estatística e da probabilidade, já que lidam

com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e a mobilidade desses dados.

A organização e exposição de como os assuntos serão trabalhados ao longo do ensino médio são de grande relevância para o processo de ensino e aprendizagem uma vez que o PCNEM informa que :

[...] os temas de estudo da primeira série deveriam tratar do entorno das informações que cercam os alunos, numa visão contextualizada, colocando-os em contato com as primeiras idéias e procedimentos básicos para ler e interpretar situações simples. Na segunda série, já poderia haver uma mudança significativa no sentido de que cada disciplina mostrasse sua dimensão enquanto Ciência, com suas formas características de pensar e modelar fatos e fenômenos. A terceira série ampliaria os aprendizados das séries anteriores com temas mais abrangentes que permitissem ao aluno observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos, aprofundando sua compreensão sobre o que significa pensar em Matemática e utilizar os conhecimentos adquiridos para análise e intervenção na realidade. (BRASIL,2006,p.127 e 128)

Uma sugestão de abordagem encontrada do tema estrutural análise de dados seria trabalhar no primeiro ano do ensino médio estatística por meio de descrição de dados e representações gráficas; no segundo ano, abordar novamente estatística com enfoque em análise de dados e contagem, e, no terceiro, ano realizar o estudo da probabilidade. (BRASIL,2006)

Como esse trabalho centra-se em probabilidade, serão destacados a seguir as competências e habilidades enfatizadas pelo PCNEM dentro da unidade temática probabilidade. Assim:

Probabilidade: possibilidades; cálculo de probabilidades.

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. (BRASIL,2006,p.127 e 128)

3.2 A reestruturação do ENEM e suas orientações para o estudo da probabilidade

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) a partir do ano de 2009 sofreu alterações em relação aos exames aplicados nos anos anteriores, esse novo modelo passou a ser conhecido como NOVO ENEM. Sua reestruturação tem como destaque sua matriz de referência, onde:

O termo matriz de referência é utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala, para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas. Além disso, também indica a construção de escalas de proficiência que definem o que e o quanto o aluno realiza no contexto da avaliação. A matriz de competências e habilidades que estrutura o Enceja considera, simultaneamente, as competências relativas às áreas de conhecimento e as que expressam as possibilidades cognitivas de jovens e adultos de compreender e realizar tarefas relacionadas a essas áreas (competências do sujeito). As competências do sujeito são eixos cognitivos que, associados às competências apresentadas nas disciplinas e áreas do conhecimento do Ensino Fundamental e Médio, referem-se ao domínio de linguagens, compreensão de fenômenos, enfrentamento e resolução de situações-problema, capacidade de argumentação e elaboração de propostas. Dessas interações resultam, em cada área, habilidades que serão avaliadas por meio de questões objetivas (múltipla escolha) e pela produção de um texto (redação). (INEP, 2017, não paginado).

Será apresentada a seguir a tabela da matriz de referência do ENEM, elaborada pelo INEP, na qual a competência de área 7 (na tabela a seguir, representado por M7) se destaca, uma vez que esse trabalho tem por um dos seus objetivos analisar as questões de probabilidade referente ao NOVO ENEM.

Tabela 1 – Matrizes de referência do ENEM

EIXOS COGNITIVOS COMPETÊNCIAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS	I - Dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica.	II - Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.	III - Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.	IV - Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.	V - Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.
M4 Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H15 Identificar leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre duas grandezas.	_____	H16 Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais.	H17 Utilizar informações expressas em forma de juros (simples ou composto) como recurso para a construção de argumentação (aumentos e descontos sucessivos).	H18 Avaliar propostas de intervenção na realidade, utilizando cálculos de porcentagem e/ou juros.
M 5 Aplicar expressões algébricas para modelar e resolver problemas, envolvendo variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas.	H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação de interdependência entre duas grandezas.	H20 - Identificar gráfico cartesiano que represente a relação de interdependência entre duas grandezas (variação linear).	H21 - Resolver situação-problema cujos dados estejam expressos em gráfico cartesiano que mostre a variação de duas grandezas.	_____	_____
M6 Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	H22 - Identificar informações apresentadas em tabelas ou gráficos (de coluna, de setores e de linha).	H23 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.	H24 - Resolver situação-problema com dados apresentados em forma de tabela de dupla entrada ou gráfico.	H25 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.	H26 - Avaliar propostas de intervenção na realidade, utilizando informações expressas em gráficos ou tabelas.
M7 Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas e cálculos de probabilidade, para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	_____	H27 - Calcular a média aritmética de um conjunto de dados expressos em uma tabela de freqüências de dados agrupados (não em classes) ou gráficos de colunas.	H28 - Resolver situação-problema que envolva processos de contagem ou noções de probabilidade.	H29 - Utilizar médias aritméticas, noção de probabilidade ou conhecimentos estatísticos como recurso para a construção de argumentação.	H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando probabilidade e/ou conhecimentos estatísticos (porcentagem, gráficos, médias).

Fonte: INEP (http://download.inep.gov.br/educacao_basica/encceja/matriz_competencia/Mat_Mat_Tec_EM.pdf)

Com esse breve panorama das orientações do ENEM, para o estudo da probabilidade, pode-se observar que a sua visão está alinhada com o PCNEM.

3.3 Uma breve descrição de três livros didáticos adotados pelo PNLD

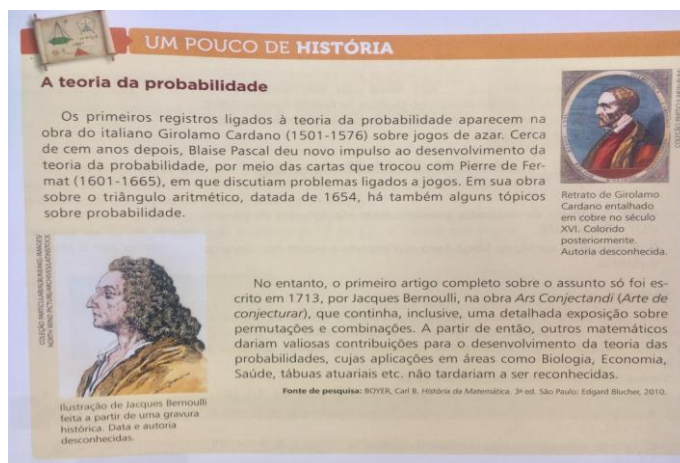
Os capítulos de probabilidade que serão descritos fazem parte dos livros didáticos: *Matemática, Ciência e Aplicações*, de Gelso Iezzi (2017); *Matemática, Contexto e Aplicações* de Luiz Roberto Dante (2017) e *Matemática Paiva*, de Manoel Paiva (2015).

3.3.1 Descrição do capítulo 11: Probabilidade do livro ‘Matemática, ciência e aplicações’

O assunto probabilidade é apresentado no capítulo 11 do volume 2 dessa coleção. Ao longo de 24 páginas, o tema é desenvolvido logo após um capítulo dedicado aos problemas de contagem e análise combinatória.

Gelson Iezzi (2017) inicia o capítulo fazendo uma contextualização ao se referir ao sorteio da mega sena. Nesse contexto apresenta e define o que é um experimento aleatório e apresenta exemplos desse tipo de experimento. Em seguida, apresenta um breve panorama da história da probabilidade e segue definindo espaço amostral e evento, destacando também o que é um evento certo, impossível e complementar. Nesse momento disponibiliza o primeiro bloco de 12 exercícios.

Figura 2 – Um pouco de história



Fonte: IEZZI (2017, p.253)

Após o primeiro bloco de exercícios, ele apresenta e define frequência relativa, fazendo uma abordagem de probabilidade frequentista, por meio de um exemplo de lançamento de moedas e segue definindo probabilidade e apresentando exemplos.

É importante destacar que o autor chama a atenção para o espaço amostral correspondente ao experimento do exemplo 3, mostrando que todos têm mesma chance de ocorrer, definindo assim intuitivamente o conceito de espaço amostral equiprovável.

É natural encontrar em classes de alunos mais interessados o seguinte questionamento: ‘devemos considerar todo espaço equiprovável?’ O Autor antecipando a dúvida do que é um espaço amostral não equiprovável, destaca em forma de observação, como se configura esse espaço amostral, após o exemplo 3, no qual consiste no lançamento de um dado não viciado e observar as chances de cada uma das faces voltadas para cima, exemplo esse, em que se trabalha com espaço amostral equiprovável. Fala em jogos de azar onde devemos considerar, eventualmente, a existência de algum fator que influencia o resultado, como os dados viciados em vez de cubos perfeitos.

Segue destacando o cálculo de probabilidade em espaços amostrais equiprováveis e algumas propriedades, apresenta uma sequência de 4 exercícios resolvidos e um novo bloco de exercícios, contendo 19 exercícios. É importante notar a variedade de abordagens entre os exercícios numerados de 13 a 31. Há dados, expressões em tabelas de dupla entrada, há gráficos de linhas, uso da teoria de conjuntos, o conceito de raízes de uma equação do primeiro e do segundo grau, logaritmos, e, no último exercício, a ideia intuitiva de probabilidade geométrica.

Após o segundo bloco de exercícios, os autores convidam o leitor a observar novos exercícios resolvidos, em que o objetivo é usar conhecimentos de combinatória para resolver os problemas. A seguir encontramos no terceiro bloco de exercícios 18 atividades, também com abordagens variadas sobre o tema.

Segue apresentando a definição da probabilidade da união de eventos, destacando em eventos mutuamente exclusivos, dando apenas um exemplo (que consideramos insuficiente para a resolução dos exercícios propostos futuramente, visto a quantidade e a dificuldade do exemplo) e depois em eventos que possuem ocorrências simultâneas, seguindo de 7 exercícios propostos.

Adiante temos a apresentação da probabilidade condicional por meio de um exemplo, cuja solução é realizada por meio da redução do espaço amostral. Além disso, é apresentada uma fórmula para a realização do cálculo da probabilidade condicional, apresentando uma observação que, na prática, os problemas de condicionais têm sua solução feita com maior frequência pelo método da redução do espaço amostral.

Numa conversa em particular com o leitor, o autor sugere ao aluno que estiver resolvendo problemas de probabilidade condicional a lançar mão da praticidade em reduzir o

espaço amostral segundo o enunciado do problema e então, calcular as probabilidades pedidas nesse novo espaço. Esta abordagem contribui, segundo o autor, para o mais amplo entendimento de conceitos, como eventos independentes e que vem a chamar de Teorema da Multiplicação, quando resolve problemas que envolvem probabilidade da interseção de dois eventos.

A parte teórica do capítulo é encerrada com a exposição da probabilidade da interseção de dois eventos, apresentando o teorema da multiplicação, eventos independentes e a probabilidade de eventos dessa natureza, usando exemplos e mais três exercícios resolvidos seguidos de 11 exercícios propostos.

No fechamento do capítulo encontramos ainda uma seção chamada “aplicação” na qual fala um pouco sobre o uso da probabilidade na Loteca (antiga loteria esportiva).

Figura 3 – Matemática, futebol e loteria

Aplicações

Matemática, futebol e loteria

Uma das loterias mais populares entre os brasileiros é a Loteca (antiga loteria esportiva).

A Loteca lista 14 partidas de futebol. O apostador arrisca um palpite para o resultado de cada partida: vitória de um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou empate (coluna do meio).

Há várias possibilidades de aposta. A aposta mínima é um duplo, isto é, em um único jogo assinalam-se duas opções: coluna 1 e coluna 2, coluna 1 e coluna do meio ou coluna 2 e coluna do meio. Nos demais 13 jogos assinala-se um único palpite para cada jogo. Há também apostas em um triplo, isto é, em um único jogo assinalam-se as três opções, obviamente, o acerto do resultado daquele jogo.

Entre muitas opções de aposta, podemos citar: 2 duplos; 1 triplo e 1 duplo; 6 triplos; 3 triplos e 5 duplos (aposta máxima).

Ganha quem acertar os resultados de 13 ou 14 partidas.

Mas, afinal, quais são as chances de se ganhar nessa loteria com a aposta mínima?

A teoria de probabilidades nos ajuda a calcular tais chances, a partir da hipótese de que o espaço amostral é equiprovável, isto é, em cada uma das 14 partidas, cada possível resultado (coluna 1, coluna do meio e coluna 2) tem probabilidade $\frac{1}{3}$ de ocorrer.

Observe, também, que o resultado de um jogo não interfere no resultado dos demais jogos, garantindo, desse modo, independência entre os eventos (cada jogo está associado a um evento).

Imagine que você irá preencher um volante dos 14 jogos, concorrendo com a aposta mínima, isto é, você assinala um duplo em um jogo, digamos o primeiro, e nos demais jogos (2º ao 14º) um palpite simples (uma coluna por jogo).

A probabilidade de acertar os 14 jogos pode ser expressa por:

$p(\text{acertar o 1º jogo e acertar o 2º e acertar o 3º e ... e acertar o 14º jogo})$

Usando o teorema da multiplicação e lembrando a independência dos eventos, temos:


$$p = \underbrace{p(\text{acertar o 1º jogo})}_{\text{duplo}} \cdot \underbrace{p(\text{acertar o 2º jogo}) \cdot \dots \cdot p(\text{acertar o 14º jogo})}_{\text{13 fatores simples}}$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{\text{13 fatores}} = \frac{2}{3^{14}} = 0,000042\%$$

Achou muito pequena a chance de ganhar?

Lembre-se, contudo, de que esse é um modelo teórico em que são feitas previsões. Na prática, em vários jogos, o apostador tem conhecimento prévio sobre os times e acompanha o desempenho das equipes no campeonato. Isso pode aumentar a chance de acerto do resultado de um jogo.

Mas no futebol são 11 contra 11 e tudo pode acontecer...



Placar do jogo durante partida entre Vasco da Gama e Joinville, 2015.

Fonte: IEZZI (2017, p.273)

Há ainda, outra seção, chamada Troque Ideia em que fala sobre a mega sena e apresenta um desafio.

Figura 4 – Troque Ideias

TROQUE IDEIAS

As chances na Mega-Sena


Vamos voltar à introdução do capítulo, na qual citamos a Mega-Sena.

O volante da Mega-Sena, formulário em que os números da aposta são anotados, contém 60 números, de 1 a 60. Para concorrer, pode-se apostar em seis números (aposta mínima), sete, oito, ..., até 15 números (aposta máxima). A cada rodada, são sorteados seis números entre os 60. Há prêmios em dinheiro para quem acertar quatro números (quadra), cinco números (quina) e os seis números (sena).

Mas, afinal, se alguém fizer a aposta mínima, que chance tem de ganhar?

a) Qual é a probabilidade de acertar a sena com a aposta mínima?
b) Qual é a probabilidade de se fazer uma quadra (isto é, acertar exatamente 4 números) com a aposta mínima?
c) Qual é a probabilidade de se fazer a quina (isto é, acertar exatamente 5 números) com a aposta mínima?
d) Qual é a probabilidade de não se acertar qualquer número fazendo a aposta mínima?
e) Em janeiro de 2016, a aposta mínima custava R\$ 3,50; já a aposta em 8 números custava R\$ 98,00.
 i) Quem aposta em 8 números está concorrendo com quantas senas?
 ii) Há proporcionalidade entre os valores dessas apostas e as chances de acertar a sena?
 iii) Apresente um cálculo que justifique a resposta anterior.
f) A aposta máxima consiste na escolha de 15 dezenas. Ao se optar pela aposta máxima, em quantas vezes aumenta-se a chance de acertar a sena?
g) Em janeiro de 2016, Aurélio possuía R\$ 24,50 para apostar na Mega-Sena. Como ele sabia que a chance de acertar a sena é muito pequena, pensou em maximizar as chances de acertar a *quina*. Ele ficou em dúvida se valia a pena fazer 7 apostas mínimas ($7 \cdot R\$ 3,50 = R\$ 24,50$) ou uma única aposta em 7 números, que também custava R\$ 24,50. Para acertar a *quina*, qual era a melhor opção para Aurélio?

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.



APENAS MAIORES DE 18 ANOS PODEM APOSTAR, CONFORME O ARTIGO 81, INCISO IV, DA LEI Nº 8.069/90.

DESAFIO

Alguns bancos usam o seguinte sistema complementar de segurança para digitação de senhas na internet: Na hora de digitar a senha, o usuário encontra, na tela do computador, cinco "botões", cada qual contendo um par de algarismos, colocados em ordem crescente. A composição dos "botões" é gerada aleatoriamente pelo sistema e não há repetição de algarismos. Veja a figura seguinte, que mostra uma possível configuração visualizada na tela:

Se a senha do usuário for 350161, ele deve pressionar, sucessivamente: 2º, 2º, 3º, 1º, 1º e 1º "botões".

a) Ao acessar uma conta desse banco pela internet, qual é a probabilidade de que o usuário encontre a configuração

Admita que o sistema possa gerar, ao acaso, qualquer configuração.

b) Qual é a probabilidade de alguém que não conhece a senha de 6 dígitos de uma conta ter acesso a ela, nesse sistema, "chutando" todos os "botões" nos quais se encontra cada algarismo da senha?

Fonte: IEZZI (2017, p.275)

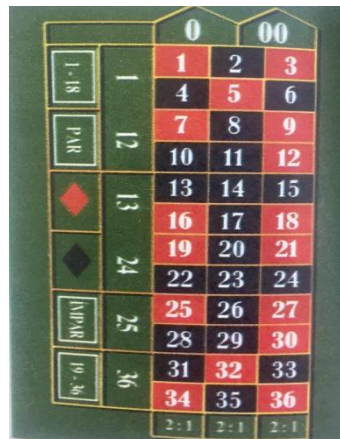
3.3.2 Descrição do capítulo 10 do livro 'Matemática, contextos e aplicações'

Assim como no livro anterior, o assunto Probabilidade, vem em sequência ao estudo da Análise Combinatória. O mesmo é presente no volume 2 da coleção e sua abordagem é feita ao longo de 33 páginas.

O capítulo é iniciado com a definição e seguida de exemplos de fenômenos aleatórios. Também é apresentada uma atividade para ser feita em sala de aula em que o autor apresenta o jogo da roleta⁹ adaptado e propõe reflexões em relação à atividade que será desenvolvida em sala de aula.

⁹ "Jogo de Azar que um número premiado é indicado pela parada de uma pequena bola em uma das casa numeradas de uma roda girante". (HOUAISS; VILLAR, 2009, p. 1676).

Figura 5 – Jogo da roleta



Fonte: DANTE (2017, p.232).

Após abordagem citada encontramos definições de espaço amostral e evento, expondo ainda dois exercícios resolvidos. Segue definindo eventos: certo, impossível e mutuamente excludentes, além de união e intersecção de eventos. Explica o que são eventos complementares, e ainda destaca o que é um espaço amostral equiprovável além de realizar o cálculo da probabilidade nesse espaço. Encerra essa abordagem teórica mostrando que a probabilidade de um evento ocorrer é um valor localizado no intervalo fechado 0 e 1 .

Após todas essas definições, o capítulo segue com quatro exercícios resolvidos e o primeiro bloco de exercícios propostos contém 12 atividades. Neste grupo de atividades, destacam-se três exercícios que envolvem noções de contagem, um que usa teoria de conjuntos e os oito restantes são aplicações diretas da definição tradicional de probabilidade, segundo Laplace.

Após tais exercícios, o autor apresenta uma definição axiomática de probabilidade associada ao conceito de função definindo-a como uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $P(A)$ deve pertencer ao intervalo real $[0,1]$.
- ii) Dado um espaço amostral Ω , então $P(\Omega) = 1$.
- iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, para eventos mutuamente excludentes.

A verificação dessas propriedades é realizada ao analisar o fenômeno aleatório do lançamento de uma moeda perfeita. As consequências da definição apresentada são desdobradas em três propriedades: a impossibilidade de um evento, a probabilidade de um

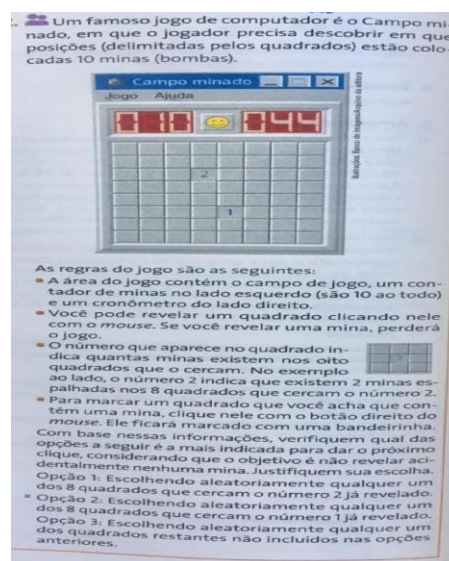
evento complementar e probabilidade da união de dois eventos. Na página 239 encontramos o primeiro esboço de demonstração, formal para as três propriedades citadas. É interessante notar que, nesta demonstração, além da simbologia formal usada, o autor usa como recurso visual os diagramas de Venn para destacar a interseção entre conjuntos dados ($A \cap B$) e regiões que representam as diferenças entre esses conjuntos ($A \cap \bar{B}$ e $\bar{A} \cap B$).

Segue com mais seis exercícios resolvidos, nos quais se observa a ênfase em questões que trabalham com a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade da união de eventos. Um recurso interessante presente na resolução do exercício resolvido 8 é o uso da tabela de dupla entrada para destacar o número de resultados favoráveis em relação ao total possível. A seguir nenhum dos exercícios apresentados faz alusão a definição de probabilidade como uma função. Ainda nesta seção de exercícios resolvidos, a qualidade do texto através dos exemplos dados é rico em diversidade.

Um dos exercícios resolvidos é uma questão do ENEM, cuja solução é esmiuçada e ainda é explorado seu enunciado para ampliar a compreensão do problema. É sugerido uma discussão em equipe e um pequeno projeto de pesquisa contextualizando socialmente o assunto .

Um quadro resumo contendo a definição por Laplace, a probabilidade de um complementar e a probabilidade da união de dois eventos antecede um bloco de dez exercícios propostos, que é apresentado segundo abordagens similares aos últimos exercícios resolvidos citados. Nessa bateria, o último exercício chama atenção por envolver um jogo famoso, conhecido por campo minado, como pode-se observar abaixo.

Figura 6 – Campo minado

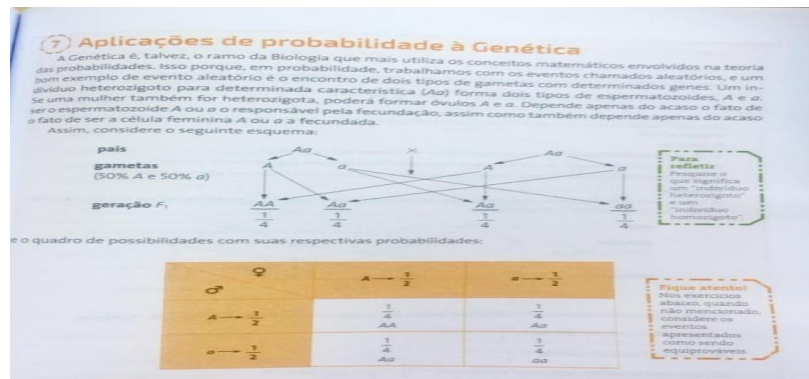


Depois apresenta probabilidade condicional acompanhado de cinco exemplos, fala de eventos independentes e de como calcular a probabilidade desse tipo de evento. Expõe mais cinco exercícios resolvidos e fecha essa sequência de atividades com quinze exercícios propostos, variados e de qualidade.

Após o estudo da probabilidade condicional há um tópico que o autor classifica como opcional para ser trabalhado em sala: o uso do método binomial para o cálculo da probabilidade. Para isso retoma o conhecimento dos binômios de Newton, apresenta exemplo de aplicação através de três exercícios resolvidos e cinco exercícios propostos.

Na última abordagem teórica apresenta aplicações de probabilidade à genética com seis exercícios resolvidos e encerra com quatro exercícios propostos que destacamos a seguir.

Figura 7 – Aplicações de probabilidade à genética



Fonte: DANTE (2017, p.253).

Ao fim do capítulo é ofertado ao aluno textos complementares. Uma das seções é intitulada “pensando no ENEM”, que apresenta duas questões que seguem o modelo do Novo ENEM.

Figura 8 – Pensando no ENEM

Pensando no Enem

Assim, considere o seguinte esquema:

1. Leia o texto e resolva o problema abaixo

Telefônicas investem em internet para enfrentar concorrência de apps

Popularização de aplicativos de troca de mensagens reduz receita dos operadores com serviços de voz e SMS. Atleta agora e focar na venda de pacotes para web.

A difusão do acesso e conexões de banda larga colocou o modelo de negócios das empresas de telefonia contra a parede. Com a competição de aplicativos que substituem linhas telefônicas fixas e serviços de envio de mensagens de texto (SMS), as operadoras estão apostando todas as suas fichas na venda de pacotes de dados para a internet.

As operadoras não revelam a parcela de receita referente a cada serviço, mas quem acompanha o setor vê o foco nos pacotes de dados como definitivo. Apesar de ainda serem o principal serviço de receitas de voz das operadoras na telefonia móvel estão cada vez em menor destaque e, no Brasil, parecendo de crescer. As operadoras já vêm investindo cada vez mais em banda larga fixa e móvel, que é onde está vindo o crescimento da receita, diz o presidente da consultoria Telco, Eduardo Tude.

Uma empresa de telefonia tem como argumento em uma campanha publicitária de seus diversos tipos de planos o fato de que algumas pessoas preferem usar o celular para enviar mensagens (M), outras estão sempre conectadas à internet (I), outras ainda usam o celular para conversar pelo celular (C). Considerando esses três usos, o número de pacotes diferentes com apenas um, ou apenas dois ou os três funcionalidades que a empresa pode oferecer é:

a) 3 c) 15
b) 7 d) 5

2. Leia o texto e resolva o problema abaixo

Como a internet está mudando a amizade

Nunca foi tão fácil manter contato e conhecer gente nova pela internet. Com as redes sociais, nunca tivemos tantos amigos. Mas isso está transformando a própria definição de amizade.

Em determinada rede social, Elisa tem 500 amigos. Ela tem 450 amigos nessa mesma rede. João também está nessa rede e tem 550 amigos. Ela e João têm 30 amigos comuns. Elisa e João têm 45 amigos em comum.

Elas fizeram uma festa de aniversário presencial e a festa para a qual convidaram todos – e apenas – os seus amigos dessa rede social.

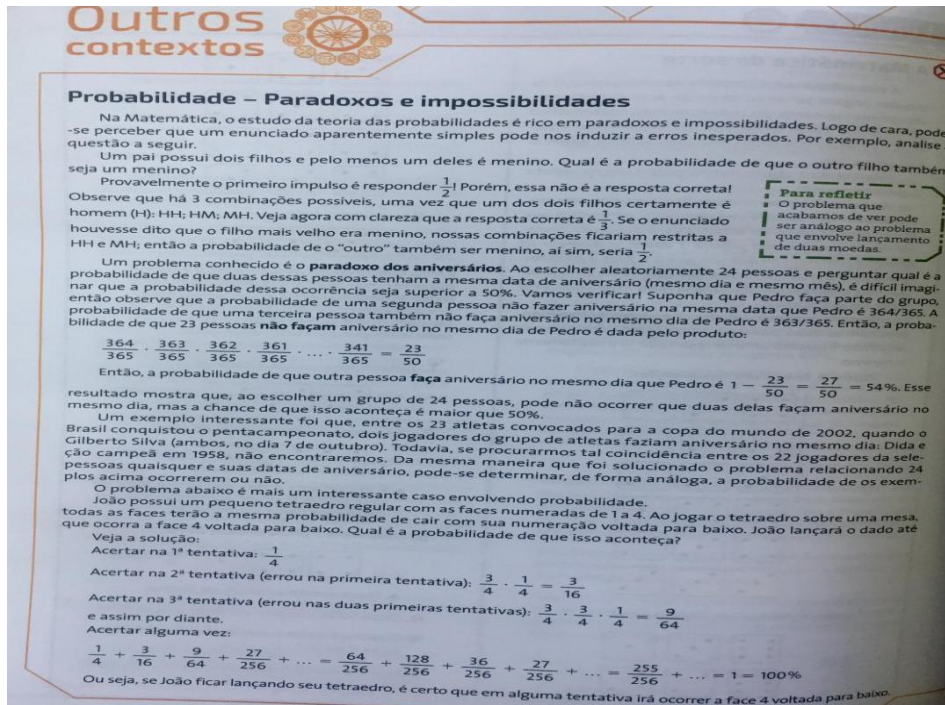
Sabendo que todos os convidados compareceram e na festa 432 amigos exclusivos de Elisa, qual é a probabilidade de encontrar amigos nessa festa um amigo que seja amigo dos três?

a) $\frac{3}{174}$ c) $\frac{502}{1500}$ e) $\frac{1}{31}$
b) $\frac{427}{1530}$ d) $\frac{5}{153}$

Fonte: DANTE (2017, p.256)

A Segunda seção apresenta uma conexão da probabilidade com outros ramos do saber como o paradoxo dos aniversários, conhecido da Filosofia da Matemática.

Figura 9 – Paradoxos e impossibilidades



Fonte: DANTE (2017, p.258)

Uma terceira seção situa o aluno num recorte histórico da Matemática.

Figura 10 – Um pouco mais sobre probabilidade



Fonte: DANTE (2017, p.260)

O capítulo de probabilidade é encerrado com a seção “Vestibulares de Norte a Sul”, na qual apresenta 10 questões dos principais vestibulares do Brasil.

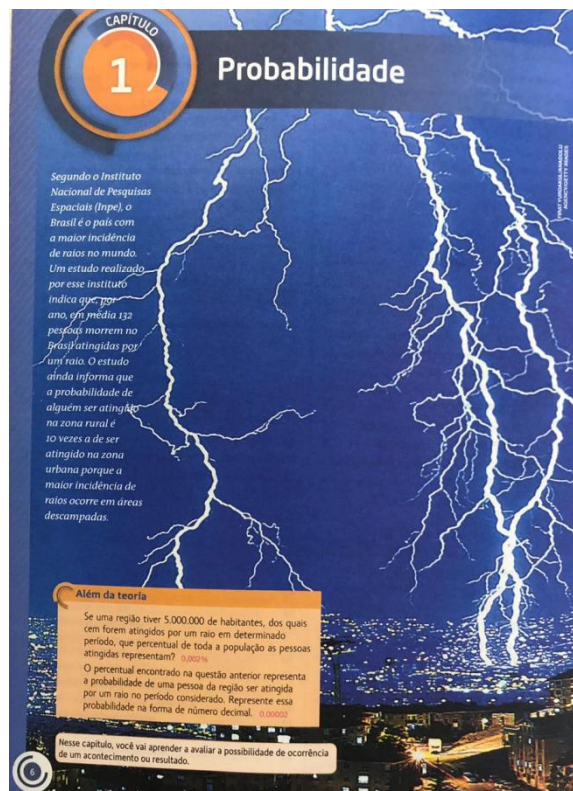
Essa coleção também possui um capítulo especial, que expõe algumas questões do ENEM separadas por tópicos abordados em cada unidade. Os conteúdos da unidade 4 desse livro são oriundos dos capítulos 9 (Análise Combinatória) e 10 (Probabilidade). Há 8 exercícios referentes a estes conteúdos.

3.3.3 Descrição do Capítulo 1 do livro: Matemática Paiva de Manoel Paiva

O assunto probabilidade é encontrado no volume 3 da coleção, no primeiro capítulo, sendo abordado em um total de 26 páginas.

Manoel Paiva (2015) inicia sua apresentação sobre o tema, apresentando exemplos do cotidiano a fim de estimular uma noção intuitiva de probabilidade, como por exemplo, citando que em uma pesquisa realizada, as chances de um raio vir a cair num zona rural são 10 vezes maiores que as chances do mesmo cair numa zona urbana. Em seguida, faz uma breve abordagem histórica narrando de forma sucinta o problema dos pontos.

Figura 11 - Probabilidade



Fonte: PAIVA (2015, p.6)

A abordagem teórica é iniciada com a definição e exemplos de experimento aleatório, espaço amostral e evento, destacando o que é um espaço amostral equiprovável, falando um pouco sobre frequência absoluta e frequência relativa para então apresentar a definição clássica de probabilidade definida por Laplace. A seguir, encontram-se 4 exercícios resolvidos e 7 propostos. Vale destacar que, dos mesmos, duas questões são do Enem, dos anos de 2012 e 2015.

Em sequência uma nova abordagem teórica é feita e são definidos eventos complementares seguidos de exemplos. Ainda expõe algumas propriedades sobre probabilidade e desenvolve a demonstração das mesmas. A definição adotada de probabilidade serve de base para a resolução dos exercícios apresentados em sequência, sendo três exercícios já resolvidos e oito propostos que ficam a cargo do leitor.

Segue apresentando adição de probabilidades e destaca o teorema da adição tal como trabalhado quando efetuado cálculos com eventos mutuamente exclusivos. A fixação da teoria é realizada por meio de dois exercícios resolvidos e seis exercícios propostos.

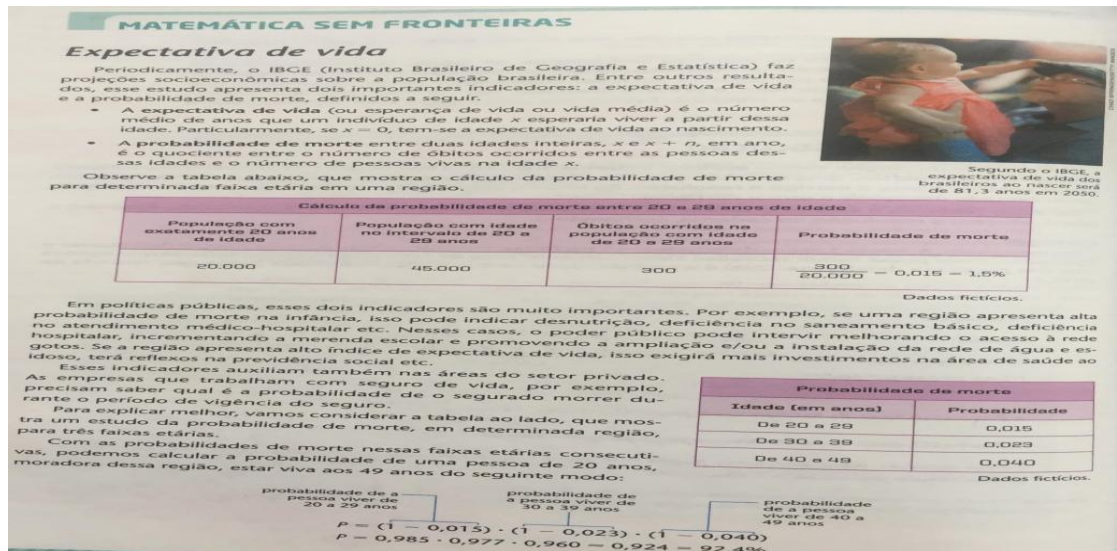
Por meio de uma situação problema envolvendo um grupo de consórcio, Manoel Paiva (2015) informa que a probabilidade condicional é a probabilidade de ocorrer um evento condicionado à ocorrência de outro evento. Informa que a garantia de um número sorteado ser par reduz o espaço amostral do evento A e cria uma ligação com o que chama de resolução genérica. O uso de diagramas e tabelas reforça a diversidade de soluções.

A exploração incipiente do tema probabilidade condicional por meio da sua fórmula é fixada com dois exercícios resolvidos e cinco exercícios propostos, depois apresenta eventos independentes e propõe três outros exercícios. Encerra a parte teórica tratando de multiplicação de probabilidades em retiradas simultâneas, finaliza com mais dois exercícios resolvidos e nove exercícios propostos.

Ao final do capítulo há quinze exercícios complementares, nos quais, três exercícios do ENEM dos anos de 2005, 2007 e 2013, sendo que apenas um pertence ao Novo ENEM. Também apresenta uma análise dos pré requisitos para o próximo capítulo (Noções de Estatística) e sugestões de atividades para trabalhos em equipe por meio de 3 textos de apoio. Destacamos o primeiro deles que fala sobre a expectativa de vida e como o cálculo probabilístico é relevante nessa análise e que perpassa por disciplinas para além da matemática. O tratamento da informação é organizado por meio de tabelas de dupla entrada e a interpretação e solução do problema remetem ao conceito de multiplicação de

probabilidades complementares. A atividade que se propõe a fazer sobre o conteúdo requer do aluno habilidade leitora e interpretativa.

Figura 12 – Matemática sem fronteiras



Fonte: PAIVA (2015, p.30).

É importante notar que a organização didática dos manuais não acompanha o desenvolvimento do tema em termos de historiografia. Esta organização é aquela que melhor estrutura o assunto e permite o melhor desenvolvimento em sala de aula segundo os autores dos livros didáticos analisados nessa pesquisa.

Os livros descritos não seguem a sequência didática orientada pelo PCNEM, uma vez que em todos os livros didáticos apresentados, o estudo da estatística ocorre após o estudo da probabilidade.

Após a apresentação dos três livros, será apresentando a seguir uma tabela que indica quais abordagens do estudo da probabilidade os mesmos apresentaram.

Tabela 2 - A abordagem da probabilidade via definição de Laplace, frequentista e por função presente nos livros didáticos

	Laplace	Frequentista	Função
Paiva	X	X	X
Dante	X		X
Iezzi	X	X	X

Fonte: O autor, 2018.

No próximo capítulo serão apresentadas as questões que envolvem probabilidade do Novo ENEM dos anos de 2009 à 2017 junto com possíveis soluções para elas.

4 UMA VERIFICAÇÃO DE COMO O TÓPICO PROBABILIDADE É ABORDADO NO NOVO ENEM

Esse capítulo tem por objetivo apresentar o enunciado das questões que envolvem probabilidade do ENEM dos anos de 2009 a 2017 com possíveis soluções, destacando os recursos que foram necessários no desenvolvimento das soluções apresentadas e ainda uma classificação do nível de dificuldade segundo o critério que será apresentado.

4.1 Apresentação dos critérios classificatórios para o nível de dificuldade das questões analisadas

Esta seção tem por objetivo apresentar e analisar as questões sobre probabilidade do Novo ENEM, sempre mostrando pelo menos uma solução para cada questão e classificando-as em três níveis de dificuldade: fácil, médio e difícil¹⁰.

Nesse trabalho uma questão será classificada como fácil quando apenas a definição de Laplace sobre probabilidade é suficiente para executar sua solução. Nestas questões, basta que o aluno domine o vocabulário do tema, isto é, saber o significado de casos prováveis e casos possíveis em eventos equiprováveis.

A seguir apresentam-se três questões resolvidas retiradas dos livros didáticos analisados a fim de ilustrar o que é uma questão fácil segundo a classificação apresentada.

Figura 13 – Exemplo I - Questão fácil resolvida

1 Uma urna contém 15 bolas de mesmo tamanho e mesma massa numeradas de 1 a 15. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?

Solução:

Temos:

- $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$; observe que esse espaço amostral é equiprovável.
- Seja o evento **E** "o número da bola sorteada é maior ou igual a 11". Temos: $E = \{11, 12, 13, 14, 15\}$.

Assim:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$$


Fonte: IEZI (p.259)

¹⁰ Alguns conhecimentos serão necessários para que os alunos percorram os três níveis de dificuldades das questões, os principais tópicos que se destacam são: domínio em operar com números racionais (tais como operações fundamentais, simplificação de números fracionários, construções de frações equivalentes, etc), cálculo de porcentagens, cálculo de razões e interpretação matemática para os conectivos 'e' e 'ou'.

Figura 14 – Exemplo II - Questão fácil resolvida

1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara?

Resolução
Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, o espaço amostral desse experimento é:
 $E = \{C, K\}$, em que $n(E) = 2$
O evento que esperamos ocorrer é $A = \{C\}$, em que $n(A) = 1$.
Logo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$
Ou, ainda, $P(A) = 50\%$.

 A probabilidade pode ser apresentada na forma fracionária, decimal ou percentual.

Fonte: PAIVA (p.10)

Figura 15 – Exemplo III - Questão fácil resolvida

4. No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de sair número maior do que 4?

Resolução:
Nesse caso, temos:
espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$
evento A: ocorrência de número maior do que 4 $\rightarrow A = \{5, 6\} \rightarrow n(A) = 2$
Logo, $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Como $\frac{1}{3} = 1 : 3 \approx 0,33$, então $\frac{1}{3} = 33\%$. Portanto, a probabilidade de obtermos número maior do que 4 no lançamento de um dado é de $\frac{1}{3}$ ou 33%, aproximadamente.

Fonte: DANTE (p.235)

Questões classificadas com médias são questões para as quais o aluno deve dominar ferramentas como: construção de diagrama de árvores, aplicação do conceito de complementar, técnicas elementares de contagem, leitura e interpretação de dados em tabelas e gráficos, produto de probabilidades, cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais.

Abaixo, seguem três questões resolvidas dos livros didáticos destacados para ilustrar o que foi definido por questão média.

Figura 16 – Exemplo I - Questão média resolvida

8 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um lançamento ocorra a face 2?

Solução:
Vamos reduzir o espaço amostral.
Com a informação dada, o número de casos possíveis passa a ser 10:
 $\Omega^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$
Dos elementos de Ω^* , é preciso selecionar os pares em que pelo menos um dos resultados é 2.
Há 5 casos favoráveis: (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3) e (3, 2).
Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Fonte: IEZZI (p.268)

Figura 17 – Exemplo II - Questão média resolvida

6. Considere todos os números naturais de 4 algarismos distintos que é possível formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de sair um número que comece por 3 e termine em 7?

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} ? \quad ? \quad ? \quad ? \\ \hline 3 \quad ? \quad ? \quad ? \end{array} \rightarrow n(\Omega) = A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \\ \rightarrow n(A) = A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \end{array} \right\} p(A) = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$$

Fonte: DANTE (p.236)¹¹

Figura 18 – Exemplo III - Questão média resolvida

7. Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da urna, a probabilidade de sair uma bola azul é o quádruplo da probabilidade de sair uma branca. Qual é a probabilidade de sair uma bola branca?

Resolução

Sejam os eventos $A = \{x \mid x \text{ é bola azul da urna}\}$ e $B = \{y \mid y \text{ é bola branca da urna}\}$, temos: $P(A) = 4P(B)$. Como a urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis, concluímos que A e B são eventos complementares e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$.

Assim, resolvendo o sistema $\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases}$, obtemos $P(B) = \frac{1}{5}$, ou seja, a probabilidade de sair uma bola branca é $\frac{1}{5}$.

Fonte: PAIVA (p.13)

As questões classificadas com difíceis são questões que os conceitos matemáticos mais comuns são: a construção de tabelas, cálculos de probabilidades complementares, técnicas não elementares de contagem (como: combinações, permutações com repetição de elementos, permutações circulares, permutações caóticas, etc), leitura e interpretação de dados contidos em imagens, noções da teoria de conjuntos, cálculo de probabilidade em espaços não equiprováveis, análise e comparação de dados probabilísticos, generalização do Teorema de Bayes e cálculo em exercícios sofisticados de probabilidades condicionais.

As três questões apresentadas a seguir foram retiradas dos livros didáticos que compõem esta pesquisa e foram classificadas como difíceis.

¹¹ A questão apresentada pode ter sua solução desenvolvida apenas usando o princípio multiplicativo, que é uma técnica de contagem elementar, assim tornando a classificação da questão como média segundo a classificação apresentada e, além disso, na solução observamos um erro, na segunda linha deveria estar : $\begin{array}{c} ? \quad ? \quad ? \quad ? \\ \hline 3 \quad ? \quad ? \quad 7 \end{array}$.

Figura 19 – Exemplo I – Questão difícil resolvida

6 Um ônibus de excursão com vinte brasileiros e seis estrangeiros é parado pela Polícia Rodoviária para vistoria de documentos. O funcionário escolhe, ao acaso, três passageiros para terem os documentos conferidos. Qual é a probabilidade de que todos sejam brasileiros?

Solução:
O espaço amostral é formado por todos os grupos de três passageiros quaisquer que podemos formar com os 26 turistas. Temos, então:

$$n(\Omega) = C_{26,3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} = 2\,600$$

O evento **E** que nos interessa é formado pelos grupos de três turistas brasileiros que podemos formar. Temos:

$$n(E) = C_{20,3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1\,140$$

Por fim, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1\,140}{2\,600} \approx 0,438 = 43,8\%$.

Fonte: IEZZI (p.262 e 263)

Figura 20 – Exemplo II – Questão difícil resolvida

7. Em um grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte; e 5 jovens gostam somente de leitura.

a) Qual é a probabilidade de, ao apontar ao acaso um desses jovens, ele gostar de música?
b) Qual é a probabilidade de, ao apontar ao acaso um desses jovens, ele não gostar de nenhuma dessas atividades?

Resolução:
Nesse caso, elaboramos o diagrama de Venn ao lado, considerando $M =$ música, $E =$ esporte e $L =$ leitura.
Observamos que:

- $6 + 8 + 16 + 14 = 44 \rightarrow 44$ gostam de música.
- $75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = 11 \rightarrow 11$ não gostam de nenhuma dessas atividades.

Como $n(\Omega) = 75$, temos:

a) probabilidade de gostar de música: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{75} \approx 0,586 = 59\%$

b) probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades: $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{75} \approx 0,146 = 15\%$

Logo, ao se apontar ao acaso um desses jovens, a probabilidade de ele gostar de música é $\frac{44}{75} \approx 59\%$, e a probabilidade de ele não gostar de nenhuma dessas atividades é de $\frac{11}{75} \approx 15\%$.

Fonte: DANTE (p.236)

Figura 21 – Exemplo III - Questão difícil resolvida

25. Uma prova é constituída de 10 exercícios em forma de teste com 5 alternativas em cada teste. Se um aluno "chutar" (escolher aleatoriamente) todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar 6 exercícios?

Resolução:
Probabilidade de acertar, em cada questão:
 $p = \frac{1}{5}$
Probabilidade de errar (não acertar), em cada questão: $q = 1 - p = \frac{4}{5}$
Probabilidade de acertar 6 das 10 questões:
 $\binom{10}{6} \left(\frac{1}{5}\right)^6 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{10!}{6!4!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4$

Fonte: DANTE (p.252)¹²

¹² Outra solução para essa questão seria calcular a probabilidade dele acertar 6 e errar 4 questões nessa ordem e ao fim calcular o número de formas que se pode arrumar essa sequência de acertos e erros por meio da permutação com repetição de elementos.

4.2 Exposição das questões de probabilidade do ENEM dos anos de 2009 a 2017

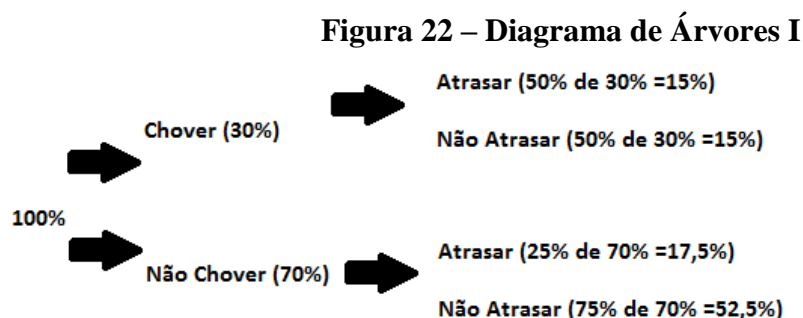
- ENEM 2017/2018 – 1ª aplicação

1) (ENEM-2017/2018) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- a) 0,075 b) 0,150 c) 0,325 d) 0,600 e) 0,800

Gabarito: Letra C

Solução:



Fonte: O Autor, 2018.

Logo, a probabilidade pedida é $15\% + 17,5\% = 32,5\% = 0,325$.

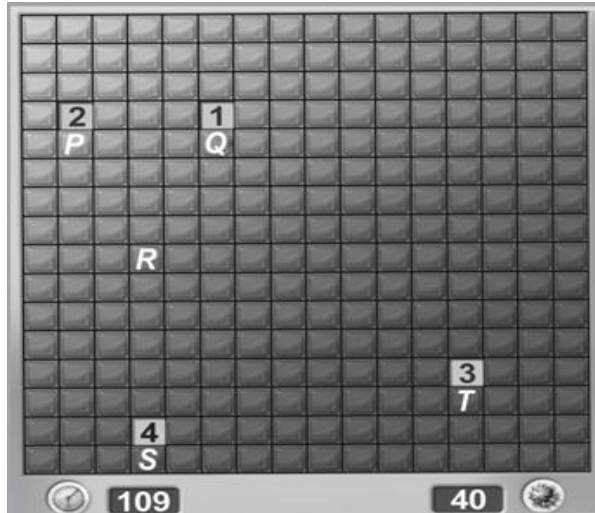
Recursos¹³: construção de diagrama de árvores e aplicação do conceito de complementar.

Nível: Médio

2) (ENEM-2017/2018) A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro de 16x16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos

¹³ Nessa sessão sempre que destacado “recursos”, será uma referência os conteúdos específicos e as habilidades necessárias para o desenvolvimento da solução do problema apresentado.

contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



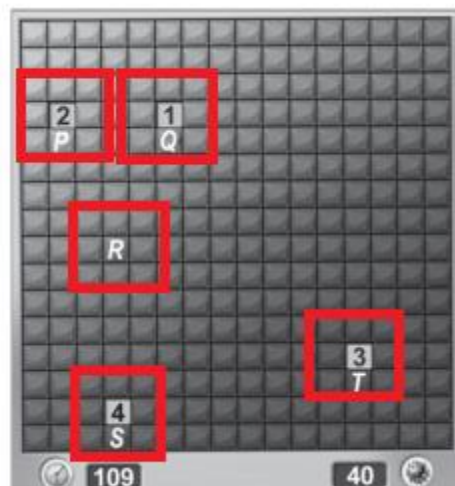
Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina. O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

- a) P b) Q c) R d) S e) T

Gabarito: Letra B

Solução: Observando a figura abaixo podemos calcular as probabilidades.

Figura 23 – Campo minado



Vamos escrever na sequência a probabilidade P, Q, S e T encontrarmos uma bomba ao abrir um dos quadradinhos $\frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{4}{8}$ e $\frac{3}{8}$. Assim, por enquanto, já podemos dizer que Q é o que tem menor chance de ter uma bomba. A probabilidade de R ter uma bomba é $\frac{30}{220} = \frac{3}{22}$. Comparando Q e R temos que $\frac{1}{8} = \frac{22}{192} < \frac{3}{22} = \frac{24}{192}$. Assim Q apresenta menor chance de ter uma bomba.

Recursos: Definição de probabilidade segundo Laplace e leitura e interpretação de dados contidos em imagens.

Nível: Difícil.

3) (ENEM-2017/2018) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em Verde ou Vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos. Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

- a) $\frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$ b) $\frac{10 \cdot 2^9}{3^{10}}$ c) $\frac{2^9}{3^{10}}$ d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$ e) $\frac{2}{3^{10}}$

Gabarito: Letra A

Solução: A probabilidade de ter um verde é $\frac{2}{3}$ e nove vermelhos $\left(\frac{1}{3}\right)^9$. Além disso, precisamos pensar na arrumação da sequência dos 10 sinais. Logo a probabilidade é $\frac{10!}{9!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

Recursos: Técnicas de Contagem não elementares e produto de probabilidades.

Nível: Difícil.

- **ENEM 2017/2018 – 2ª aplicação**

4) (ENEM-2017/2018) Um programa de televisão criou um perfil em uma rede social, e a ideia era que esse perfil fosse sorteado para um dos seguidores, quando esses fossem em

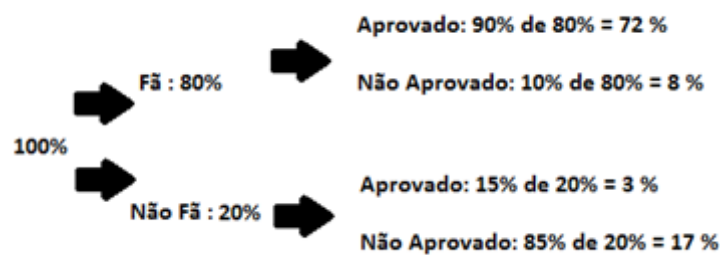
número de um milhão. Agora que essa quantidade de seguidores foi atingida, os organizadores perceberam que apenas 80% deles são realmente fãs do programa. Por conta disso, resolveram que todos os seguidores farão um teste, com perguntas objetivas referentes ao programa, e só poderão participar do sorteio aqueles que forem aprovados. Estatísticas revelam que, num teste dessa natureza, a taxa de aprovação é de 90% dos fãs e de 15% dos que não são fãs. De acordo com essas informações, a razão entre a probabilidade de que um fã seja sorteado e a probabilidade de que o sorteado seja alguém que não é fã do programa é igual a

- a) 1 b) 4 c) 6 d) 24 e) 96

Gabarito: Letra D

Solução:

Figura 24 – Diagrama de árvores II



Fonte: O Autor, 2018

Assim, a razão pedida é $\frac{72\%}{3\%} = 24$.

Recursos: construção de diagrama de árvores e aplicação do conceito de complementar.

Nível: Médio

5) (ENEM-2017/2018) Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala. Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

- a) 1/3 b) 1/18 c) 1/40 d) 1/54 e) 7/18

Gabarito: Letra D

Solução:

A probabilidade da sala C ser escolhida é $\frac{1}{3}$.

A probabilidade da aluna ser a escolhida da sala C é $\frac{1}{8}$.

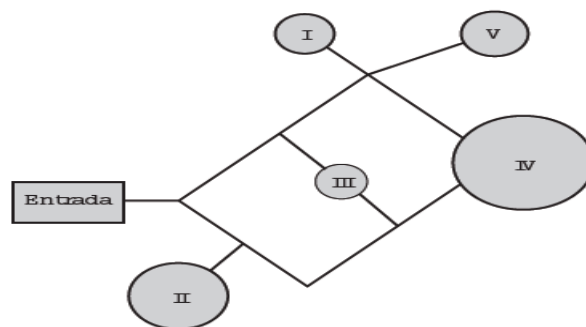
Assim, temos que a probabilidade de ocorrer esse evento é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{54}$.

Recursos: Definição de probabilidade segundo Laplace e multiplicação de probabilidades.

Nível: Médio

• **ENEM 2016/2017 – 1ª aplicação**

6) (ENEM-2016/2017) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



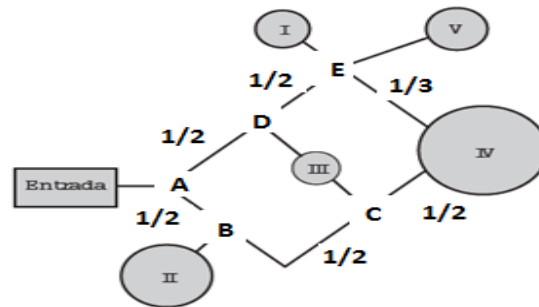
Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna. Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

- A)1/96 B)1/64 C)5/24 D)1/4 E)5/12

Gabarito: Letra C

Solução: Usando a figura abaixo, podemos destacar os caminhos possíveis.

Figura 25 – Diagrama de caminhos



Fonte: O Autor, 2018

1º caminho (ABC): a probabilidade será de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2º caminho (ADE): a probabilidade será de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$.

Nível: Difícil

Recursos: leitura e interpretação de dados contidos em imagens e definição de probabilidade segundo Laplace.

• **ENEM 2016/2017 – 2ª aplicação**

7)(ENEM-2016/2017) Uma caixa contém uma cédula de R\$ 5,00, uma de R\$ 20,00 e duas de R\$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior. A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R\$ 55,00 é

- A)1/2 B)1/4 C)3/4 D)2/9 E)5/9

Gabarito: Letra C

Solução:

Pares menores que 55 são: (5,20) , (20,5) , (20,20) e (5,5)

Cada par tem a probabilidade de ocorrer $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ totalizando $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.

Assim, pelo evento complementar temos $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, produto de probabilidades e aplicação do conceito de complementar.

Nível: Médio

8) (ENEM-2016/2017) Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisa, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos. Qual é essa probabilidade?

- A) 50% B) 44% C) 38% D) 25% E) 6%

Gabarito: Letra B

Solução:

Nenhum dos dois chegam: $80\%(H) \cdot 70\%(M) = 56\%$

Pelo evento complementar, temos: $100\% - 56\% = 44\%$

Nível: Médio

Habilidades: aplicação do conceito de complementar e produto de probabilidades.

• **ENEM 2016/2017 – 3ª aplicação**

9) (ENEM-2016/2017) Em um campeonato de futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate 1 ponto e a derrota zero ponto. Ganha o campeonato o time que tiver maior número de pontos. Em caso de empate no total de pontos, os times são declarados vencedores. Os times R e S são os únicos com chance de ganhar o campeonato, pois ambos possuem 68 pontos e estão muito à frente dos outros times. No entanto, R e S não se enfrentarão na rodada final. Os especialistas em futebol arriscam as seguintes probabilidades para os jogos da última rodada: R tem 80% de chance de ganhar e 15% de empatar; S tem 40% de chance de ganhar e 20% de empatar. Segundo as informações dos especialistas em futebol, qual é a probabilidade de o time R ser o único vencedor do campeonato?

- a) 32% b) 38% c) 48% d) 54% e) 57%

Gabarito: Letra D

Solução: R tem 80% de chances ganhar, 15% de empatar e 5% de perder, já S tem 40% de chances ganhar, 20% de empatar e 40% de perder. Agora vamos dividir em casos favoráveis:

1º caso (R ganha e S empatada) : $80\% \cdot 20\% = 16\%$

2º caso (R ganha e S perde) : $80\% \cdot 40\% = 23\%$

3º caso (R empatada e S perde) : $15\% \cdot 40\% = 6\%$

Assim o total é de $54\%(16\% + 23\% + 6\%)$

Recursos: produto de probabilidades.

Nível: Médio

• **ENEM 2015/2016 – 1ª aplicação**

10) (ENEM-2015/2016) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

- A) 23,7% B) 30,0% C) 44,1% D) 65,7% E) 90,0%

Gabarito: Letra D

Solução:

Nenhum responder $70\% \cdot 70\% \cdot 70\% = 34,3\%$

Evento complementar $100\% - 34,3\% = 65,7\%$

Recursos: aplicação do conceito de complementar e produto de probabilidades.

Nível: Médio

11) (ENEM-2015/2016) O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.

Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.

Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.

Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.

Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virus HPV.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).

A proposta implementada foi a de número

A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

Gabarito: Letra A

Solução:

Pensando na primeira proposta, vamos dividir em casos:

1º caso (toma vacina, ela é ineficaz e tem contato) : $90\% \cdot 2\% \cdot 50\% = 0,9\%$

2º caso (não toma vacina e tem contato) : $10\% \cdot 50\% = 5\%$

Total: 5,9% que é o limite esperado

Recursos: produto de probabilidades, análise e comparação de dados probabilísticos.

Nível: Difícil.

12) (ENEM-2015/2016) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância

proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame antidoping. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

A) $P(I) < P(III) < P(II)$

B) $P(II) < P(I) < P(III)$

C) $P(I) < P(II) = P(III)$

D) $P(I) = P(II) < P(III)$

E) $P(I) = P(II) = P(III)$

Gabarito: Letra E

Solução:

$$P(I) = \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{199} \cdot \frac{198}{198} \cdot 3 = \frac{3}{200}$$

$$P(II) = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8} \right) \cdot 3 = \frac{3}{200}$$

$$P(III) = 3 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{20} \cdot \frac{19}{19} \cdot \frac{18}{18} \right)}_{\text{Probabilidade de escolher as equipes}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} \right)}_{\text{Probabilidade de escolher os participantes}} = \frac{3}{200}$$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace e produto de probabilidades, técnicas não elementares de contagem, análise e comparação de dados probabilísticos.

Nível: Difícil.

13) (ENEM-2015/2016) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

A) $1/100$

B) $19/100$

C) $20/100$

D) $21/100$

E) $80/100$

Gabarito: Letra C

Solução: A probabilidade buscada é $\frac{20}{100}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace.

Nível: Fácil.

• **ENEM 2015/2016 – 2ª aplicação**

14) (ENEM-2015/2016) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%. A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de

- A) 5,0% B) 7,5% C) 22,5% D) 30,0% E) 75,0%

Gabarito: Letra C

Solução: Para ocorrer a aula no domingo é preciso que chova no sábado e no domingo não chova. Assim a probabilidade desejada é de $30\% \cdot 75\% = 22,5\%$.

Recursos: produto de probabilidades e aplicação do conceito de complementar.

Nível: Médio

15) (ENEM-2015/2016) Um protocolo tem como objetivo firmar acordos e discussões internacionais para conjuntamente estabelecer metas de redução de emissão de gases de efeito estufa na atmosfera. O quadro mostra alguns dos países que assinaram o protocolo, organizados de acordo com o continente ao qual pertencem.

Países da América do Norte	Países da Ásia
Estados Unidos da América	China
Canadá	Índia
México	Japão

Em um dos acordos firmados, ao final do ano, dois dos países relacionados serão escolhidos aleatoriamente, um após o outro, para verificar se as metas de redução do protocolo estão sendo praticadas. A probabilidade de o primeiro país escolhido pertencer à América do Norte e o segundo pertencer ao continente asiático é

- A) $1/9$ B) $1/4$ C) $3/10$ D) $2/3$ E) 1

Gabarito: Letra C

Solução: A probabilidade buscada é $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.

Recursos: leitura e interpretação de dados em tabelas, definição de probabilidade segundo Laplace e produto de probabilidades.

Nível: Médio

16) (ENEM-2015/2016) Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos Quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto que, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%. Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista. A probabilidade de ela ser vegetariana é

- A) $\frac{2}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

Gabarito: Letra D

Solução: Das 5000 pessoas temos que 1000 são veganos e desses 400 esportistas (40% de 1000), assim 4000 pessoas não são veganas das quais 800 são esportistas (20% de 4000) sendo assim temos um total de 1200 esportistas e a probabilidade buscada é de

$$\frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$

Recursos: Cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais.

Nível: Médio

• **ENEM 2014/2015 – 1ª aplicação**

17) (ENEM-2014/2015) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20. A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

- A) 0,02048. B) 0,08192. C) 0,24000. D) 0,40960. E) 0,49152.

Gabarito: Letra B

Solução: Uma das formas do teste terminar seria ele acertar as 3 primeiras e errar as duas últimas assim a probabilidade seria $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048$ mas essa sequência

seria apenas uma das possíveis, é necessário pensar também na arrumação dessa sequência, sendo que o segundo erro precisa aparecer de fato na última posição. Assim essa arrumação pode ser calculada como $p_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$. A probabilidade buscada é $0,02048.4 = 0,08192$.

Recursos: aplicação do conceito de complementar e técnicas de contagem não elementares.

Nível: Difícil

18) (ENEM-2014/2015) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

- 1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- 2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
- 3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- 4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença. O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. Epidemiologia: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

- A) 47,5%. B) 85,0%. C) 86,3%. D) 94,4%. E) 95,0%.

Gabarito: Letra E

Solução: A probabilidade buscada é $\frac{95}{100} = 95\%$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em tabelas e cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais.

Nível: Médio.

• **ENEM 2014/2015 – 2º aplicação**

19) (ENEM-2014/2015) A probabilidade de um empregado permanecer em uma dada empresa particular por 10 anos ou mais é de $1/6$. Um homem e uma mulher começam a trabalhar nessa companhia no mesmo dia. Suponha que não haja nenhuma relação entre o trabalho dele e o dela, de modo que seus tempos de permanência na firma são independentes entre si. A probabilidade de ambos, homem e mulher, permanecerem nessa empresa por menos de 10 anos é de

- A) $60/36$ B) $25/36$ C) $24/36$ D) $12/36$ E) $1/36$

Gabarito: Letra B

Solução: Como a probabilidade de não permanecer é de $\frac{5}{6}$, temos que a probabilidade buscada é de $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Recursos: aplicação do conceito de complementar e produto de probabilidades

Nível: Médio

20) (ENEM-2014/2015) O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

- A) 3%. B) 7%. C) 13%. D) 16%. E) 20%.

Gabarito: Letra E

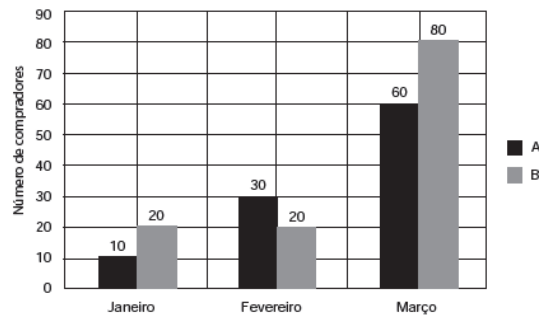
Solução: A probabilidade buscada é de $0,13 + 0,03 + 0,03 + 0,01 = 0,20 = 20\%$

Recursos: leitura e interpretação de dados em tabelas.

Nível: Médio

• **ENEM 2013/2014 – 1ª aplicação**

21) (ENEM-2013/2014) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

- A) 1/20 B) 3/242 C) 5/22 D) 6/25 E) 7/15

Gabarito: Letra A

Solução: A probabilidade do produto A é de $\frac{30}{100}$ e a probabilidade do produto B é de $\frac{20}{120}$. Assim a probabilidade buscada é de $\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{1}{20}$.

Recursos: Definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em gráficos

Nível: Médio

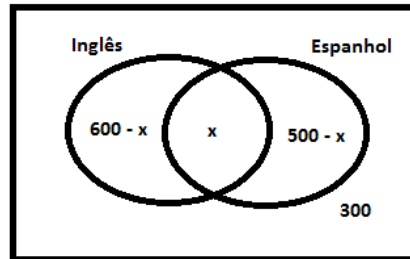
22) (ENEM-2014/2014) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- A) 1/2 B) 5/8 C) 1/4 D) 5/6 E) 5/14

Gabarito: Letra A

Solução: Usaremos o diagrama de Venn para resolver esse problema.

Figura 26 – Diagrama de Venn I



Fonte: O Autor, 2018

Pelo diagrama podemos escrever que $1200 = 600 - x + x + 500 - x + 300$. Assim $x = 200$, logo a probabilidade buscada é de $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$.

Recursos: Definição de probabilidade segundo Laplace, noções da teoria de conjuntos e cálculo em exercícios sofisticados de probabilidades condicionais.

Nível: Difícil

23) (ENEM-2014/2015) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

A) excelente. B) bom. C) regular. D) ruim. E) péssimo

Gabarito: Letra B

Solução: Para resolvermos essa questão vamos ter que pensar em casos.

$$1^{\circ} \text{ caso (MI produz um parafuso defeituoso): } \frac{25}{1000} \cdot \frac{54}{100} = 1,35\%$$

$$2^{\circ} \text{ caso (MI produz um parafuso defeituoso): } \frac{38}{1000} \cdot \frac{46}{100} = 1,748\%$$

Assim $p = 1,35\% + 1,748\% = 3,098\%$ então como $2\% < p < 4\%$ o desempenho é classificado como bom.

Recursos: produto de probabilidades e aplicação do conceito de complementar

Nível: Médio

24) (ENEM-2013/2014) Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R\$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R\$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

A) Caio e Eduardo. B) Arthur e Eduardo. C) Bruno e Caio.

D) Arthur e Bruno. E) Douglas e Eduardo.

Gabarito: Letra B

Solução:

Arthur: 250 chances

Bruno: $41 \cdot C_{7,6} + 4 = 291$ chances

Caio: $12 \cdot C_{8,6} + 10 = 346$ chances

Douglas: 4. $C_{9,6} = 336$ chances

Eduardo: 2. $C_{10,6} = 420$ chances

Recursos: Técnicas não elementares de contagem e Leitura e interpretação de dados tabelas.

Nível: Difícil

• **ENEM 2013/2014 – 2º aplicação**

25) (ENEM-2013/2014) Uma fábrica possui duas máquinas que produzem o mesmo tipo de peça. Diariamente a máquina M produz 2 000 peças e a máquina N produz 3 000 peças. Segundo o controle de qualidade da fábrica, sabe-se que 60 peças, das 2 000 produzidas pela máquina M, apresentam algum tipo de defeito, enquanto que 120 peças, das 3 000 produzidas pela máquina N, também apresentam defeitos. Um trabalhador da fábrica escolhe ao acaso uma peça, e esta é defeituosa. Nessas condições, qual a probabilidade de que a peça defeituosa escolhida tenha sido produzida pela máquina M?

A) 3/100 B) 1/25 C) 1/3 D) 3/7 E) 2/3

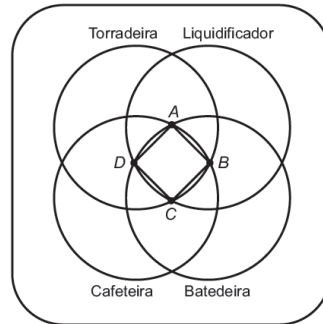
Gabarito: Letra C

Solução: A probabilidade buscada é de $\frac{60}{180} = \frac{1}{3}$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace e cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais.

Nível: Médio

26) (ENEM-2013/2014) Ao realizar uma compra em uma loja de departamentos, o cliente tem o direito de participar de um jogo de dardo, no qual, de acordo com a região do alvo acertada, ele pode ganhar um ou mais prêmios. Caso o cliente acerte fora de todos os quatro círculos, ele terá o direito de repetir a jogada, até que acerte uma região que dê o direito de ganhar pelo menos um prêmio. O alvo é o apresentado na figura:



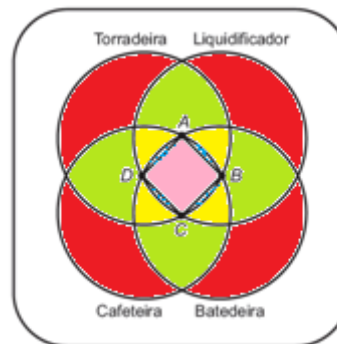
Ao acertar uma das regiões do alvo, ele terá direito ao(s) prêmio(s) indicado(s) nesta região. Há ainda o prêmio extra, caso o cliente acerte o dardo no quadrado ABCD. João Maurício fez uma compra nessa loja e teve o direito de jogar o dardo. A quantidade de prêmios que João Maurício tem a menor probabilidade de ganhar, sabendo que ele jogou o dardo aleatoriamente, é exatamente:

- A) 1. B) 2. C) 3. D) 4. E) 5.

Gabarito: Letra D

Solução:

Figura 27 – Diagrama de Venn II



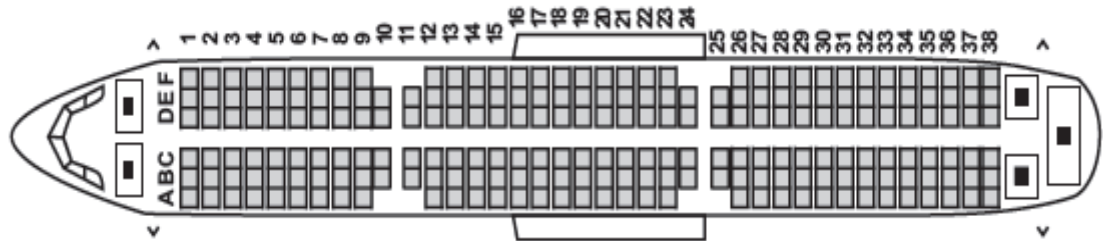
Fonte: O Autor, 2018

Cada cor vai representar uma quantidade de prêmio: Vermelho 1 primeiro, verde 2 prêmios, amarelo 3 prêmios, azul 4 prêmios e rosa 5 prêmios. Como a menor região é a azul esta é a que tem menor probabilidade de ganhar.

Recursos: noções da teoria de conjuntos, leitura e interpretação de dados contidos em imagens.

Nível: Difícil

27) (ENEM-2013/2014) Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura mostra a posição dos assentos no avião:



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%. Avaliando a figura, o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é mais aproximada de

- A) 31%. B) 33%. C) 35%. D) 68%. E) 69%.

Gabarito: Letra A

Solução: Nesse avião há 68 fileiras de 3 lugares e 8 fileiras de 2 totalizando assim 220 lugares. Assim a probabilidade de ter uma poltrona entre duas pessoas é $\frac{68}{200} \cong 30,9$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, Técnicas elementares de contagem, leitura e interpretação de dados contidos em imagens.

Nível: Difícil

28) (ENEM-2013/2014) A tabela apresenta os registros de ocorrência de acidentes de trabalho por categorias econômicas no Brasil, no mês de julho de 2001:

Afastamentos por acidentes de trabalho por atividades econômica — julho de 2001 (em valores aproximados)		
Atividades Econômica	Quantidade de Empregados	Afastamentos por Acidente de Trabalho
Agropecuária e extrativismo	1 414 000	8 000
Indústria leve	2 031 000	24 000
Indústria pesada	2 455 000	33 000
Construção civil	1 105 000	14 000
Comércio	4 097 000	24 000
Serviços	6 241 000	34 000
Transportes	1 278 000	13 000
Crédito	524 000	6 000
Administração pública	1 138 000	2 000
Não classificado	33 000	30
Total	20 316 000	158 030

Fonte: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Caderno de teoria e prática 2 – TP2: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília, 2008 (adaptado).

Considerando os dados dispostos na tabela, uma pessoa que pretende ingressar no mercado de trabalho decide pela ocupação de menor grau de risco de acidente de trabalho. Sabendo que o grau de risco é a probabilidade de ocorrência de acidentes de trabalho em categorias de atividade econômica, sua opção é se empregar na atividade econômica

- A) crédito, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 1,15%.
- B) crédito, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 2,58%.
- C) crédito, pois apresenta o menor registro de quantidade de empregados.
- D) administração pública, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 0,18%.
- E) administração pública, pois apresenta o menor registro de afastamento por acidente de trabalho.

Gabarito: Letra D

Solução:

Para fazer a comparação vamos calcular a probabilidade de cada atividade citada

$$1^\circ) \text{Crédito} : \frac{6000}{524000} \cong 1,15\%$$

$$2^\circ) \text{Administração Pública} : \frac{2000}{1138000} \cong 0,18\%$$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em tabelas.

Nível: Médio

• ENEM 2012/2013 – 1ª aplicação

29) (ENEM-2012/2013) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar ?

- A) Azul. B) Amarela. C) Branca. D) Verde. E) Vermelha.

Gabarito: Letra E

Solução:

Vamos pensar nos casos possíveis

$$1^\circ) \text{ Amarela : } \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{11} = \frac{4}{110}$$

2º) Azul: Temos dois casos , primeiro retirando uma bola azul em cada e segundo retirando apenas a bola azul na segunda retirada. Assim a probabilidade será $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{11} =$

$$\frac{13}{110} .$$

3º) Branca: Temos dois casos , primeiro retirando uma bola branca em cada e segundo retirando apenas a bola azul na segunda retirada. Assim a probabilidade será $\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{11} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{22}{110}$.

4º) Verde: Temos dois casos , primeiro retirando uma bola verde em cada e segundo retirando apenas a bola verde na segunda retirada. Assim a probabilidade será $\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{11} = \frac{31}{110}$.

4º) Vermelho: Temos apenas um casos , retirando apenas a bola vermelha na segunda retirada. Assim a probabilidade será $\frac{10}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{40}{110}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, Leitura e interpretação de dados em tabelas, produto de probabilidades e análise e comparação de dados probabilísticos.

Nível: Difícil

30) (ENEM-2012/2013) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

- A) 0,09. B) 0,12. C) 0,14. D) 0,15. E) 0,18.

Gabarito: Letra D

Solução: Assim a probabilidade desejada é $\frac{12\%}{79\%} \cong 0,15$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, cálculo em exercícios simples simples de probabilidade condicional, leitura e interpretação de dados em gráficos.

Nível: Médio

31) (ENEM-2012/2013) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Gabarito: Letra D

Habilidades: Usaremos uma tabela para contabilizar os casos possíveis.

Tabela 3 – Resultados da soma do lançamento de dois dados cúbicos

D2 / D1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: O Autor, 2018.

Recursos: construção de tabelas, análise e comparação de dados probabilísticos.

Nível: Díficil

• **ENEM 2012/2013 –2º aplicação**

32) (ENEM-2012/2013) Uma coleta de dados em mais de 5 mil sites da internet apresentou os conteúdos de interesse de cada faixa etária. Na tabela a seguir estão os dados obtidos para a faixa etária de 0 a 17 anos.

Preferências	Porcentagem
Música	22,5
Blogs	15,0
Serviços Web*	10,2
Games	10,0
Horóscopo	9,0
Games on-line	7,4
Educação **	6,5
Teen	4,0
Compras	3,4
Outras	12,0

* Serviços web: aplicativos on-line, emoticons, mensagens para redes sociais, entre outros.

** Sites sobre vestibular, ENEM, páginas com material de pesquisa escolar.

Considere que esses dados refletem os interesses dos brasileiros desta faixa etária.

Disponível em: www.navegg.com. Acesso em: 12 nov. 2011(adaptado).

Selecionando, ao acaso, uma pessoa desta faixa etária, a probabilidade de que ela não tenha preferência por horóscopo é

- A) 0,09. B) 0,10. C) 0,11. D) 0,79. E) 0,91.

Gabarito: Letra E

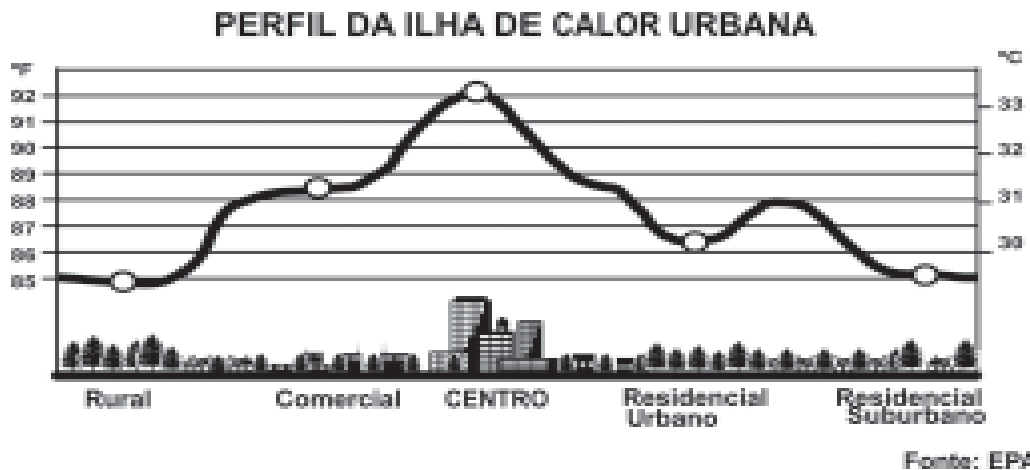
Solução: $100\% - 9\% = 91\% = 0,91$

Recursos: aplicação do conceito de complementar, Leitura e interpretação de dados tabelas.

Nível: Médio

• ENEM 2011/2012 –1ª aplicação

33) (ENEM-2011/2012) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C . Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- A) $1/5$ B) $1/4$ C) $2/5$ D) $3/5$ E) $3/4$

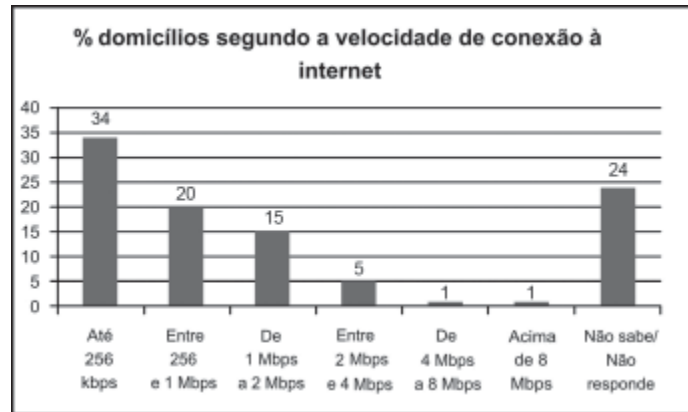
Gabarito: Letra E

Solução: Casos favoráveis: Residencial urbano, residencial suburbano e rural e caso não favorável: comercial. Assim a probabilidade será de $\frac{3}{4}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em gráficos.

Nível: Médio

34) (ENEM-2011/2012) O gráfico mostra a velocidade de conexão utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio ?

- A) 0,45 B) 0,42 C) 0,30 D) 0,22 E) 0,15

Gabarito: Letra D

Solução: A probabilidade buscada será $15\% + 5\% + 1\% + 1\% = 22\% = 0,22$.

Recursos: Leitura e interpretação de dados em gráficos.

Nível: Médio

35) (ENEM-2011/2012) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

- A) 8%. B) 9%. C) 11%. D) 12%. E) 22%.

Gabarito: Letra C

Solução: Para determinar a probabilidade precisamos buscar o total que é: $42 + 22 + 56 + 30 + 50 = 200$. Assim a probabilidade será $\frac{22}{200} = 11\%$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em tabelas.

Nível: Médio

36)(ENEM-2011/2012) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

A) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.

B) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

C) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

D) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.

E) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Gabarito: Letra C

Solução: Vamos contar os casos favoráveis de cada um:

Arthur: (1,11);(2,10);(3,9);(4,8);(5,7)

Bernardo: (2,15);(3,14);(4,13);(5,12);(6,11);(7,10);(8,9)

Caio: (7,15);(8,14);(9,13);(10,12)

Recursos: Técnicas elementares de Contagem .

Nível: Médio

• ENEM 2011/2012 – 2ª aplicação

37) (ENEM-2011/2012) José e Antônio discutiam qual dos dois teria mais chances de acertar na loteria. José tinha gasto R\$ 14,00 numa aposta de 7 números na Mega-Sena, enquanto Antônio gastou R\$ 15,00 em três apostas da quina, não repetindo números em suas apostas. Na discussão, eles consideravam a chance de José acertar a quadra da Mega-Sena e de Antônio acertar o terno da Quina.

PROBABILIDADE DE ACERTO NA MEGA-SENA				
Quantidade Nº Jogados	Valor de Aposta (R\$)	Probabilidade de acerto (1 em ...)		
		Sena	Quina	Quadra
6	2,00	50 063 860	154 518	2 332
7	14,00	7 151 980	44 981	1 038
8	56,00	1 787 995	17 192	539
9	168,00	595 998	7 791	312
10	420,00	238 399	3 973	195
11	924,00	108 363	2 211	129
12	1 848,00	54 182	1 317	90
13	3 432,00	29 175	828	65
14	6 006,00	16 671	544	48
15	10 010,00	10 003	370	37

PROBABILIDADE DE ACERTO NA QUINA				
Quantidade Nº Jogados	Valor de Aposta (R\$)	Probabilidade de acerto (1 em ...)		
		Quina	Quadra	Terno
5	0,50	24 040 016	64 106	866
6	2,00	4 006 669	21 657	445
7	5,00	1 144 762	9 409	261

Disponível em: <http://www.caixa.com.br>. Acesso em: 29 abr. 2010 (adaptado).

Nessas condições, a razão entre as probabilidades de acerto de José e de Antônio nos menores prêmios de cada loteria é

- A) $\frac{261}{3114}$, o que mostra que Antônio tem mais chances de acertar.
 B) $\frac{783}{1038}$, o que mostra que Antônio tem mais chances de acertar.
 C) $\frac{1038}{261}$, o que mostra que José tem mais chances de acertar.
 D) $\frac{3114}{261}$, o que mostra que Antônio tem mais chances de acertar.
 E) $\frac{3114}{261}$, o que mostra que José tem mais chances de acertar.

Gabarito: Letra A

Solução: A probabilidade de José ganhar é $\frac{1}{1038}$ e de Antônio ganhar é de $\frac{3}{261}$. Assim temos que a razão é $\frac{1}{1038} : \frac{3}{261} = \frac{261}{3114}$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, Leitura e interpretação de dados em tabelas.

Nível: Médio

38) (ENEM-2011/2012) Observe os dados da tabela seguinte, sobre o número de ocorrências de acidente de trabalho no Brasil em 2004.

Quantidade de acidentes de trabalho registrados no Brasil por sexo, segundo os grupos de idades em 2004			
Grupos de Idade	Total	Masculino	Feminino
Até 19 anos	17 027	14 334	2 693
20 a 24 anos	86 834	70 907	15 927
25 a 29 anos	88 463	69 561	18 902
30 a 34 anos	72 943	56 236	16 707
35 a 39 anos	63 082	47 675	15 407
40 a 44 anos	52 003	38 440	13 563
45 a 49 anos	38 400	28 294	10 106
50 a 54 anos	23 685	17 398	6 287
55 a 59 anos	11 219	8 486	2 733
60 a 64 anos	3 860	3 200	660
65 a 69 anos	964	803	161
70 anos e mais	344	274	70
TOTAL	458 824	355 608	103 216

Fonte: DATAPREV, CAT.

Nota: Os dados são preliminares, estando sujeitos a correções.

Revista Proteção, Abr. 2010. Disponível em: <http://www.protecao.com.br> (adaptado).

O risco de acidente de trabalho de grupos de estudo é o resultado da probabilidade experimental calculada a partir de dados estatísticos. Assim sendo, considerando o disposto na tabela, qual o risco aproximado de um acidentado ser um homem com idade entre 25 e 29 anos?

- A) 15% B) 18% C) 20% D) 78% E) 79%

Gabarito: Letra A

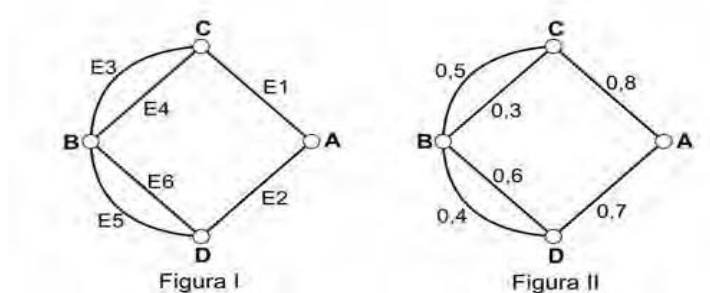
Solução: A probabilidade buscada é de $\frac{69561}{458824} \cong 0,15 \cong 15\%$

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, Leitura e interpretação de dados em tabelas.

Nível: Médio

• ENEM 2010/2011 – 1ª aplicação

39) (ENEM-2010/2011) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

- A) E1E3. B) E1E4. C) E2E4. D) E2E5. E) E2E6.

Gabarito: Letra D

Solução:

Vamos começar calculando a probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhum dos dois:

$$1^\circ) E3E1 : (1 - 0,5) \cdot (1 - 0,8) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,10$$

$$2^\circ) E4E1 : (1 - 0,3) \cdot (1 - 0,8) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$$

$$3^\circ) E6E2 : (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

$$4^\circ) E5E2 : (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,7) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$$

Diante dessas informações, conseguimos saber a probabilidade de ter pelo menos um dos caminhos engarrafados em cada trajeto, sendo suas probabilidade de :

$$1^\circ) E3E1 : 1 - 0,10 = 0,90$$

$$2^\circ) E4E1 : 1 - 0,14 = 0,86$$

$$3^\circ) E6E2 : 1 - 0,12 = 0,84$$

$$4^{\circ}) E5E2 : 1 - 0,18 = 0,82$$

Assim, o caminho com menor chance de pegar um engarrafamento seria E5E2.

Recursos: leitura e interpretação de dados contidos em imagens, produto de probabilidades e aplicação do conceito de complementar.

Nível: Difícil

40) (ENEM-2010/2011) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

- A) $1/3$ B) $1/5$ C) $2/5$ D) $5/7$ E) $5/14$

Gabarito: Letra D

Solução:

Vamos separar as mulheres que calçam mais de 36: 3 mulheres calçam 37, 10 calçam 38 e uma calça 39. Logo a probabilidade pedida é $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Recursos: leitura e interpretação de dados em tabelas, cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais e definição de probabilidade segundo Laplace.

Nível: Médio

- **ENEM 2010/2011 – 2º aplicação**

41) (ENEM-2010/2011) Em uma reserva floresta existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

- A) 63,31% B) 60,18% C) 56,52% D) 49,96% E) 43,27%

Gabarito: Letra D

Solução:

Nessa floresta temos o total de 2266 ($263+122+93+1132+656$), temos, portanto, que a probabilidade pedida é de $\frac{1132}{2266} \approx 49,96\%$.

Habilidades: definição de probabilidade segundo Laplace

Nível: Fácil

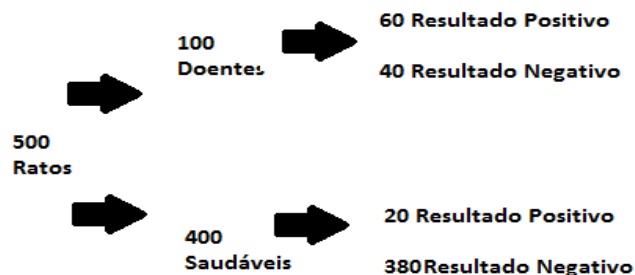
42) (ENEM-2010/2011) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo. Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é

- A) 1/5 B) 4/5 C) 19/21 D) 19/25 E) 21/25

Gabarito: Letra C

Solução:

Figura 28 – Diagrama de árvores III



Fonte: O Autor, 2018

Observando o diagrama notamos que há 420 (40+380) resultados negativos. Então a probabilidade pedida é de $\frac{380}{420} = \frac{19}{21}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, construção de diagrama de árvores e cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais.

Nível: Médio

43) (ENEM-2010/2011) Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas culturas de cebola, conforme a tabela. Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra escolhida germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à Cultura A é de:

Culturas	Germinação		TOTAL
	Germinaram	Não Germinaram	
A	392	8	400
B	381	19	400
TOTAL	773	27	800

BUSSAB, W. O; MORETIN, L. G. *Estatística para as ciências agrárias e biológicas* (adaptado).

- A) $\frac{8}{27}$ B) $\frac{19}{27}$ C) $\frac{381}{773}$ D) $\frac{392}{773}$ E) $\frac{392}{800}$

Gabarito: Letra D

Solução: A probabilidade é $\frac{392}{773}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em tabelas e cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais.

Nível: Médio

44) (ENEM-2010/2011) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o rock e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1 000 alunos de uma escola. Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos. Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

preferência musical	rock	samba	MPB	rock e samba
número de alunos	200	180	200	70

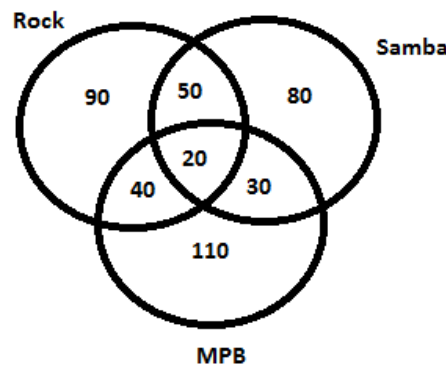
preferência musical	rock e MPB	samba e MPB	rock, samba e MPB
número de alunos	60	50	20

- A) 2% B) 5% C) 6% D) 11% E) 20%

Gabarito: Letra D

Solução: Vamos recorrer ao uso do diagrama de Venn para resolver essa questão

Figura 29 – Diagrama de Venn III



Fonte: O Autor, 2018

Temos que a probabilidade pedida é de $\frac{110}{1000} = \frac{11}{100} = 11\%$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em tabelas e noções da teoria de conjuntos.

Nível: Difícil

- **ENEM 2009/2010 – 1ª aplicação (fraudada)**

45) (ENEM-2009/2010) Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no ranking de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: <http://www.ipea.gov.br>. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é

- A) 1/24 B) 3/24 C) 1/3 D) 1/4 E) 12/17

Gabarito: Letra E

Solução: segundo o texto, podemos concluir que de 34 atropelamentos 24 não vêm a falecer. Assim temos que essa probabilidade é de $\frac{24}{34} = \frac{12}{17}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace e aplicação do conceito de complementar.

Nível: Médio

46) (ENEM-2009/2010) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa. Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

- A) 1/25 B) 1/16 C) 1/9 D) 1/3 E) 1/2

Gabarito: Letra B

Solução: A probabilidade encontrar um sinal verde é de $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Então a probabilidade de dois semáforos estarem verdes é de $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Recursos: definição de probabilidade segundo Laplace e produto de probabilidades.

Nível: Médio.

47) (ENEM-2009/2010) Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R\$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira 5, ele ganharia R\$ 2,00 de desconto. Qual a probabilidade de um consumidor não ganhar desconto?

- A) 1/24 B) 3/24 C) 1/3 D) 1/4 E) 1/2

Gabarito: Questão seria anulada já que não apresenta resposta nas alternativas.

Solução: Vamos apresentar aqui duas soluções possíveis.

1º Solução: Como queremos arrumar os 4 dígitos vamos fazer uma $p_4 = 4! = 24$ e agora vamos escrever todas as possíveis permutações desses dígitos

Figura 30 – Sequência numérica

0125	1025	2051	5012
0152	1052	2015	5021
0215	1205	2105	5120
0251	1250	2150	5102
0512	1502	2501	5201
0521	1520	2510	5210

Fonte: O Autor, 2018

Assim podemos observar que somente as permutações em azul são relevantes. Logo a probabilidade pedida é de $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

2º Solução: Para achar os casos favoráveis vamos utilizar o conceito de permutação caótica, cujo objetivo é arrumar os elementos de forma que nenhum elemento fique em sua posição original. Temos que a fórmula da mesma é :

$$D_n = n! \cdot \left[\frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right], \text{ onde } n \text{ é o número de elementos.}$$

Pelo enunciado queremos permutar 4 elementos sem estarem em sua posição original.

$$D_4 = 4! \cdot \left[\frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] = 24 \cdot \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right] = 9$$

Como temos um total de $p_4 = 4! = 24$, logo a probabilidade é $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

Recursos: Técnicas não elementares de Contagem e definição de probabilidade segundo Laplace.

Nível: Difícil

48) (ENEM-2009/2010) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

- A) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
- B) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
- C) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
- D) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
- E) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

Gabarito: Letra E

Solução: A probabilidade de ter um filho é de $\frac{1}{2}$ e a probabilidade de ter uma filha é de $\frac{1}{2}$. Assim a probabilidade de ter 2 filhos e uma filha é de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Mas nesse caso estaríamos considerando o primeiro e o segundo filho sendo homem e o último sendo uma mulher, agora é preciso pensar na arrumação desses casos que é $p_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$. Assim temos como resposta $3 \cdot \frac{1}{8} = 37,5\%$.

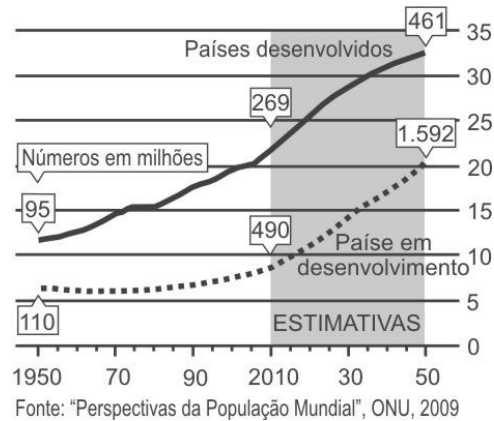
Recursos: Técnicas não elementares de Contagem e definição de probabilidade segundo Laplace.

Nível: Difícil

- **ENEM 2009/2010 – 2ª aplicação**

49) (ENEM-2009/2010) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os

números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

- A) $1/2$ B) $7/20$ C) $8/25$ D) $1/5$ E) $3/25$

Gabarito: Letra C

Solução: A probabilidade buscada é um valor que está entre 30% e 35%. Assim vamos analisar as alternativas. Na letra A temos que $1/2$ é 50% e não serve, na letra B $7/20$ é 35% e não serve, na letra C temos que $8/25$ é de 32% que é um valor dentro desse intervalo.

Recursos: leitura e interpretação de dados em gráficos.

Nível: Médio

50) (ENEM-2009/2010) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

- A) $2 \times (0,2\%)^4$. B) $4 \times (0,2\%)^2$. C) $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$.
 D) $4 \times (0,2\%)$. E) $6 \times (0,2\%) \times (99,8\%)$.

Gabarito: Letra C

Solução: A probabilidade ter um defeituoso é de 0,2% e um não defeituoso é de 99,8%. Assim a probabilidade de ter 4 aparelhos, sendo dois bons e dois defeituosos é de 0,2%. 0,2%. 99,8%. 99,8% mas nesse caso estamos considerando os dois primeiros bons e os dois últimos defeituosos. Assim é necessário pensar na permutação dessa sequência, $p_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Assim a resposta é $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$.

Recursos: aplicação do conceito de complementar e técnicas não elementares de contagem.

Nível: Difícil

51) (ENEM-2009/2010) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto $\{01, 02, 03, \dots, 59, 60\}$, custava R\$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R\$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

- A) $1\frac{1}{2}$ vez menor. B) $2\frac{1}{2}$ vezes menor. C) 4 vezes menor.
D) 9 vezes menor. E) 14 vezes menor.

Gabarito: Letra C

Solução: No primeiro caso é possível construir 6 quinias ($C_{6,5}$). Assim com 84 jogos temos 504 quinias possíveis. No segundo caso é possível construir 126 quinias diferentes ($C_{9,5}$). Assim comparando o primeiro caso com o segundo temos $\frac{504}{126} \cong 4$.

Recursos: Técnicas não elementares de Contagem .

Nível: Difícil

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para a realização das considerações finais serão apresentadas duas tabelas para ajudar na interpretação das questões de probabilidade do Novo ENEM. Na primeira tabela, tem-se a separação das questões pelo nível de dificuldade segundo a classificação apresentada no capítulo anterior.

Tabela 4 – Distribuição das questões analisadas segundo seu nível de dificuldade

Nível	Nº de questões	Porcentagem (Aproximada)
Fácil	2	3,9%
Médio	31	60,8%
Difícil	18	35,3%
TOTAL	51	100%

Fonte: O autor, 2018.

Com essa primeira tabela, a primeira conclusão é que conhecer apenas a definição de probabilidade segundo a definição tradicional de Laplace é insuficiente para que o aluno do ensino médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro consiga resolver a maioria das questões que envolvam probabilidade do Novo ENEM, uma vez que as questões de nível fácil foram classificadas quando apenas a definição de Laplace para probabilidade era suficiente para apresentar suas soluções.

Ainda observa-se que há maior concentração de questões classificadas no nível médio. Assim, qual ou quais habilidades extras o aluno deve possuir para conseguir resolver tais questões, uma vez que nem todas habilidades são inerentes ao conteúdo de probabilidade? Este questionamento gerou a necessidade de tabular a distribuição das questões segundo o(s) recurso(s) necessário(s) para estas soluções.

O tratamento desta informação ajuda o leitor deste trabalho compreender melhor os critérios adotados na classificação do nível de dificuldade das questões.

Tabela 5 – Distribuição das questões analisadas segundo as habilidades necessárias para sua solução

Recursos	Nº de questões	Porcentagem (Aproximada)
Análise e comparação de dados probabilísticos	4	7,8%
Aplicação do conceito de complementar	12	23,5%
Cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais	7	13,7%
Cálculo em exercícios sofisticados de probabilidades condicionais	1	2%
Construção de diagrama de árvores	3	5,9 %
Construção de tabelas	1	2%
Definição de probabilidade segundo Laplace	25	49%
Leitura e interpretação de dados em imagens	5	9,9%
Leitura e interpretação de dados em gráficos	6	11,8%
Leitura e interpretação de dados em tabela	12	23,5%
Noções da teoria de conjuntos	3	5,9 %
Produto de probabilidades	13	25,5%
Técnicas elementares de contagem	2	3,9%
Técnicas não elementares de contagem	7	13,7 %
Total ¹⁴ :	51	100%

Fonte: O autor, 2018.

¹⁴ Foram analisadas 51 questões, se somado o número de questões por habilidades será obtido um número superior a esse assim como se somar as porcentagens será maior que 100% ,isso ocorre porque em muitas questões são necessárias mais de uma habilidade para apresentar a solução da mesma.

Nessa segunda tabela nota-se que em quase metade das questões é necessário o conhecimento da definição de probabilidade segundo Laplace mas como destacado anteriormente somente este conhecimento não se faz suficiente para resolvê-las.

Nesse momento serão separados os recursos de acordo com suas frequências e classificados como: de baixa incidência, média incidência e alta incidência. Uma incidência será classificada como baixa se variar de 1% à 10% . Assim as habilidades de **baixa incidência** são análise e comparação de dados probabilísticos, cálculo em exercícios sofisticados de probabilidades condicionais, construção de diagrama de árvores, construção de tabelas, leitura e interpretação de dados em imagens, noções da teoria de conjuntos e técnicas elementares de contagem.

Se a frequência de uma habilidade variar a partir de 10% até 20%, será dita de **média incidência**, nesse caso as habilidades que se enquadram são: cálculo em exercícios simples de probabilidades condicionais, leitura e interpretação de dados em gráficos e técnicas não elementares de contagem.

Já se uma habilidade tiver uma frequência superior a 20%, será classificada como de **alta incidência**. Tais habilidades são: aplicação do conceito de complementar, definição de probabilidade segundo Laplace, leitura e interpretação de dados em tabela e produto de probabilidades.

Mas o que é necessário refletir nesse momento é se de fato os alunos da rede pública do Rio de Janeiro de posse dos materiais didáticos analisados são capazes de resolver as questões do ENEM ? A minha resposta para essa pergunta é NÃO. Mas a questão agora é por que NÃO ? Cabe lembrar que não estamos deixando a cargo do livro didático a responsabilidade de conduzir teoricamente a matéria pelo professor. Entendemos o livro didático como um material de apoio ao professor. O ideal seria que este material auxiliasse o professor a ponto de não haver necessidade de criar materiais alternativos, como listas de exercícios para suprir o livro didático escolhido.

A maior falha na formação desses alunos no estudo probabilidade, pautados nos livros didáticos analisados, reside na pouca incidência de trabalhar exercícios que o aluno precise ter habilidade de realizar a leitura e interpretação de textos não literais, isto é, ler e interpretar informações contidas em tabelas, gráficos e imagens, uma vez que observando a tabela 4 conclui-se que em 45,2% das questões do ENEM são necessárias tais habilidades.

Em todos os livros didáticos analisados nos exercícios resolvidos encontramos pouquíssimos exercícios onde a leitura e a interpretação de dados em tabelas se fez presente e mais grave ainda, não encontramos um exercício que trabalhe a leitura a interpretação de

dados contidos em gráficos ou em imagens nos exercícios resolvidos, quando há imagens nesses problemas são apenas a fim de ilustrar a situação narrada no texto. Nos exercícios propostos encontramos alguns que trabalham a leitura e a interpretação de dados não literais mas numa incidência muito baixa. Como exigir que os alunos sejam capazes de resolver tais exercícios se essas habilidades não foram desenvolvidas ?

Nesse momento um novo questionamento deve ser feito, por que os livros didáticos analisados não trabalham a leitura e interpretação de dados não literais quando trabalham o assunto probabilidade? E a minha resposta para esse questionamento é que tais habilidades citadas tem seu desenvolvimento enfatizado quando os alunos realizam o estudo da estatística. O estudo da estatística deve ser explorado pelos professores dès das séries iniciais do ensino fundamental, em consonância com o conceito de alfabetização estatística. Essa prática gera ganhamos futuros tanto para o aluno, quanto o professor nas séries mais avançadas.

Em todos os livros citados, tal estudo ocorre após o estudo da probabilidade. Assim acredito que se o estudo da estatística fosse realizado antes do estudo da probabilidade, o professor poderia explorar com maior eficiência a leitura e a interpretação de dados contidos em textos não literais, seguindo dessa maneira a sugestão do PCNEM para trabalhar o tema análise de dados. Dessa maneira trabalhar a probabilidade no terceiro ano do ensino médio se justifica com mais propriedade uma vez que o aluno está de posse de uma série de conhecimentos necessários para compreender de forma mais clara o tema independente da abordagem feita pelo professor. Por exemplo, falar de probabilidade frequentista se torna mais claro uma vez que o aluno já domina conceitos simples como os de frequência absoluta e frequência relativa.

Estamos diante de uma reforma da educação, mas a mesma não será eficiente no tocante à estrutura curricular, caso os livros didáticos não se adaptarem de forma esperada. Sustento essa crítica após observar que os livros didáticos utilizados nessa pesquisa, já estão no mercado, em média, 10 anos após a publicação do PCNEM e não seguem suas orientações.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da educação. **PCN+Ensino médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília,2006. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> >. Acesso em: 07/11/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD.** [2018]. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>>. Acessado em: 19/09/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Políticas do ensino médio: Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM.** [2018]. Disponível em:< <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33672>>. Acessado em: 19/09/2018.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Conceito probabilísticos: quais contextos a história nos aponta ?, **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catatina, v.2, n.3, p.50-67. 2007

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações.** 3. Ed. São Paulo: Editora Ática, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, [2011].

GODOY, Kleytyin Vinicyus; MATTOS, Adriana César de. Tartália e o método de resolução das equações de terceira grau. In: MOSTRA ACADÊMICA UNIMEP, 5., 2007, Piracicaba, SP. **Anais...** Piraciba,SP: Universidade Metodista de Piracicaba, 2007. P.01-04.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** 1.ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

IEZZI,Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.

INEP. **Matriz de referência.** 2017. disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em: 19/10/2018.

INEP. **O que é o Enem.** 2015. Disponível em: Disponível em: < <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem> > . Acesso em: 11/11/2018.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva: 3 ensino médio**. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PENA, Sérgio Danilo. Thomas Bayes: o ‘cara’!, **Ciência Hoje**, Rio de Janeiro, v. 38, n. 288, p. 22-29, jul. 2006.

PAULO, Francisco Ferreira de. **Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino**. 2013. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, João Pessoa, 2013.

ROTUNNO, Sandra A. Martins. **Estatística e probabilidade: um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental**. 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação, Curitiba, 2007.

SILVEIRA, J. F. Porto da. **Início da matematização das probabilidades**. 2001. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa6a.html>>. Acesso em: 29/10/2018.

SÓ MATEMÁTICA. **Abraham de Moivre**. [2018]. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/biograf/moivre.php#fimPag>>. Acesso: 07/11/2018

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Matemática e Estatística. **E-Cálculo: Mapa da história: Abraham de Moivre**. 2009a. Disponível em: <<http://ecalculo.if.usp.br/historia/bernoulli3.htm>>. Acesso em: 29/10/2018

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Matemática e Estatística. **E-Cálculo: Mapa da história: Daniel Bernoulli**. 2009b. Disponível em: <<http://ecalculo.if.usp.br/historia/bernoulli3.htm>>. Acesso em: 29/10/2018