Pode-se descrever a reflexão de um raio luminoso num espelho plano mediante o princípio do mínimo.

—HERON DE ALEXANDRIA

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Triângulos órticos e interferômetros: Uma abordagem interdisciplinar

Pedro José da Silva Santos Júnior

Dissertação de Mestrado

Recife-PE
15 de março de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática

Pedro José da Silva Santos Júnior

Triângulos órticos e interferômetros: Uma abordagem interdisciplinar

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues*

Recife-PE
15 de março de 2013

SANTOS JR, Pedro José da Silva
Triângulos órticos e interferômetros: Uma abordagem interdisciplinar
45 páginas
Trabalho de Conclusão (Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

1. Triângulos Órticos
2. Interferometria

Universidade Federal Rural de Pernambuco.
Departamento de Matemática.

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues - DM UFRPE
Presidente (orientador)

Prof. Dr. Rodrigo Gondim - DM UFRPE
Membro

Prof. Dr. Wictor Carlos Magno - DF UFRPE
Membro

Prof. Dr. Cesar Augusto Rodrigues Castilho - DMat UFPE
Membro

Dedico este trabalho à minha família que, durante esses dois anos, abdicaram de momentos de lazer para que este trabalho fosse concluso.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por permitir que este trabalho fosse concluido, aos meus pais Pedro e Rosania, à minha esposa Andréa e aos meus filhos Pedro Henrique e Thaís pela compreensão e apoio, aos meus comandantes e chefes que compreenderam a importância deste programa, ao meu orientandor, Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues, pelos ensinamentos, retificações e direcionamento para consecução deste trabalho, aos professores integrantes do PROFMAT, pelo profissionalismo, dedicação e atenção dispensada a turma durante todo o curso, ao Prof. MSc. Ronaldo Pereira Melo Jr. pela colaboração e verdadeira coorientação no que tange aos conceitos relacionados à Física, aos senhores Anderson Monteiro Amaral da UFPE e Whualkuer Enrique Lozano Bartra da Universidad Nacional Del Callao, U.DEL CALLAO, Peru, pela colaboração na construção do interferômetro, aos meus colegas de turma com os quais aprendi bastante durante o curso e aos meus amigos e companheiros de estudo Darlei Miranda, José Ribamar que me ajudaram a manter o estímulo para continuar nesta empreitada.

Voar ou correr ou andar, ou ainda arrastar-se,
não importa.
Importa prosseguir.
—O AUTOR

Resumo

Este trabalho tem por finalidade elaborar uma sequência didática relacionando os conceitos e propriedades do triângulo órtico com as propriedades de reflexão e transmissão da luz de forma interdisciplinar combinando a Matemática e a Física. Bem como construir um interferômetro e estudar as diversas interferências obtidas através de sua construção. Nele são utilizados os resultados sobre minimalidade do perímetro de triângulos inscritos em triângulos acutângulos, para a construção interdisciplinar de um interferômetro buscando associar as propriedades reflexivas do triângulo órtico ao conceitos de transmissão e reflexão da luz. Além da abordagem de estudo teórico, há a proposta de uma sequência didática abordando aplicação prática dos conceitos estudados, culminando na análise do funcionamento do interferômetro. Por fim, será estimulado o estudo das propriedades reflexivas da luz, através de uma variação na construção do interferômetro, utilizando o mesmo triângulo matriz e projetando a luz de um ponto distinto de quaisquer pés de altura, observando e tabulando os resultados.

Palavras-chave: Triângulo, triângulo acutângulo, triângulo órtico, interferômetro, simetrias, óptica, reflexão, transmitância, interdisciplinaridade.

Abstract

This study aims to develop a didactic sequence relating the concepts of Orthic Triangle properties with the reflection and light transmission properties as an interdisciplinary linking between Mathematics and Physics. Building an interferometer and studying of several interferences obtained through construction. It is also used minimal results on the perimeter of triangles inscribed in acute triangles, for the construction of an interdisciplinary interferometer seeking associate the reflective properties of an Orthic Triangle to the concepts of transmission and light reflection. Besides the theoretical study approach, there is the proposal of a didactic sequence addressing practical application of studied concepts, culminating in the analysis of the interferometer operation. Finally, it will be stimulated the study of reflective light properties through a variation in the interferometer construction using the same triangle matrix and projecting light from a distinct point of any feet tall, observing and tabulating the results.

Keywords: Triangle, acute triangle, Orthic triangle, interferometer, symmetry, optical, reflection, transmission, interdisciplinarity.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

"A mente que se abre a uma nova ideia,
jamais voltará ao seu tamanho original.
Albert Einstein

A construção desse trabalho deu-se de forma metamórfica, no início, por sugestão do meu orientador[1], ele versaria sobre inscrição de triângulos em triângulos com minimalidade de perímetro. Esse estudo nos levou a alguns resultados conhecidos e outros que se conhecidos, são pouco explorados, pelo menos na literatura nacional. Como exemplos dos resultados conhecidos temos:

- os triângulos órticos resolvem o **Problema de Fagnano**, isto é, o problema de minimalidade de inscrição de triângulos em triângulos acutângulos. Esse resultado nos levou a estudar as propriedades do triângulo órtico:
    1. os lados de um triângulo (acutângulo) são as bissetrizes exteriores do seu triângulo órtico;
    2. os vértices de um triângulo são os exincentros do seu triângulo órtico;
    3. as alturas de um triângulo são as bissetrizes do triângulo órtico;
    4. o ortocentro de um triângulo acutângulo é o incentro do seu triângulo órtico;
    5. a área de um triângulo é dada por $p.R$, isto é, o produto do semi-perímetro p do triângulo órtico pelo raio R do círculo circunscrito;
    6. os vértices de um triângulo acutângulo e seu ortocentro gozam da propriedade seguinte: qualquer um deles é ortocentro do triângulo formado pelos outros três.
- dentre os triângulos com mesma base e mesma altura, o de menor perímetro é o triângulo isósceles, isso é consequência do Problema de Heron;

Dos resultados que, se conhecidos são pouco divulgados, temos:

1. o perímetro de todo triângulo órtico $\triangle DEF$, inscrito ao triângulo $\triangle ABC$, não é maior que $2h$ onde h é a menor das alturas do triângulo $\triangle ABC$;

2. para triângulos retângulos ou obtusângulos, não existem triângulos inscritos de perímetro mínimo.

Tais resultados mostraram-se promissores, entretanto precisávamos de algo mais, pois a coordenação do PROFMAT sugere que o trabalho não seja feito com caráter meramente acadêmico e sim com uma abordagem de cunho didático como prevê a proposta do curso. Para nos dar um maior suporte, a coordenação disponibiliza o Banco Indutor de Trabalhos direcionando-nos para outro caminho.

Aquela situação nos fez mudar de direção e, por sugestão do orientador, deveríamos elaborar uma aplicação didática usando os resultados dos estudos obtidos no decorrer do trabalho.

Após contato com o professor de Física [2] do Colégio Militar do Recife, idealizou-se que a aplicação didática fosse feita de forma interdisciplinar. Desta forma, o Prof. Ronaldo, após perceber as propriedades do triângulo órtico, sugeriu a construção de um interferômetro em que a luz pudesse ser refletida em espelhos planos e percorresse um caminho triangular.

[1] Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues
[2] Prof. MSc. Ronaldo Pereira Melo Júnior

Essa conversa trouxe novos direcionamentos que ampliaram sobremaneira os campos de pesquisa, tanto na área pedagógica, quanto na área acadêmica.

Na área pedagógica

A construção de um interferômetro através de reflexões da luz em espelhos planos e transmissão da luz por superfícies transparentes para, em uma aula interdisciplinar, utilizar as propriedades do triângulo órtico a fim de observar o que chamaremos de princípio da mínima ação da luz e os padrões das franjas de interferência.

Na área acadêmica

Temos:

1. **franjas de interferências:** Houve um comportamento inesperado nas franjas de interferência, que podem permitir um estudo mais avançado sobre conceitos ópticos. Esperava-se que as franjas de interferências fossem circulares, entretanto as franjas mostraram-se retilíneas e paralelas;

2. **possível ineditismo do interferômetro:** Não foi encontrado na literatura interferômetro com aa mesmas propriedades do interferômetro triangular;

3. **transmitância luminosa:** A transmitância ideal para o beam splitter[3] está relacionado com o **número de ouro** (Φ).

Vale ressaltar que, nesse trabalho mostraremos ambas as partes, mas com objetivo principal na pedagógica, construindo uma sequência didática que aborde os conceitos matemáticos e físicos estudados.

Para tanto, reportaremos a matemáticos e físicos como Aristóteles, Heron, Apolônio, Fermat e Schwarz, dentre outros, que se interessaram pelos conceitos de triângulo, simetrias e óptica geométrica, estudando o comportamento da luz e os conceitos geométricos.

As simetrias são objetos de curiosidade humana desde a antiguidade. Na matemática, na física, na biologia, na arte e até na literatura encontramos simetrias. Dentre as simetrias, trabalharemos com os princípios da reflexão de pontos sobre uma reta. Os conceitos de reflexão, em conjunto com a desigualdade triangular, serão amplamente utilizados para resolver o Problema de Fagnano e, como consequência da solução do problema em conjunto com os conceitos ópticos de reflexão e transmissão da luz, aplicar os conhecimentos no experimento físico que consiste na construção do interferômetro triangular.

Para uma melhor apresentação, este trabalho foi subdividido em três capítulos.

No capítulo 1 (Conceitos e fundamentações), apresentamos três problemas motivadores (dentre os quais o Problema de Fagnano), os conceitos e as fundamentações teóricas necessários à compreensão dos resultados, bem como a compilação das propriedades do triângulo órtico. Ainda neste capítulo conceituamos interferometria e interferômetros, além de listar alguns tipos de interferômetros. Nessa parte do trabalho o docente poderá se familiarizar com os assuntos a serem abordados por ocasião do experimento.

No capítulo 2 (Sequência didática) mostramos como se dá o experimento e a sequência didática a ser aplicada em sala de aula. Nessa parte do trabalho apresentamos ao docente uma orientação detalhada para que a sequência seja aplicada.

[3]Dispositivo óptico , que divide um feixe de luz em dois

Por último, na conclusão, há indicações sobre possíveis trabalhos futuros no que concerne às propriedades do do triângulo órtico.

CAPÍTULO 1
Conceitos e fundamentações

"*Nunca houve noite*
que pudesse impedir
o nascer do sol e a esperança."
Voz da Verdade

Este capítulo é direcionado aos professores-mediadores que aplicarão a sequência didática interdisciplinar. Nele serão abordados os conceitos formais relativos às propriedades do triângulo órtico, principalmente no que concerne as propriedades reflexivas. No ramo da Física, abordaremos os conceitos e fundamentos da Óptica Geométrica no que tange à reflexão e transmitância da luz, introduzindo os conceitos de interferometria, de modo a substanciar os conhecimentos do docente, para que haja uma otimização na aplicação da sequência didática.

1.1 Problemas motivadores

Em geometria, o conceito de congruência está intimamente ligado à definição de isometria.

Definição 1.1. *Define-se* **isometria** *como uma tranformação T que satisfaz*

$$d(T(P),T(Q)) = d(P,Q),$$

para quaisquer pontos P e Q.

Em outras palavras, a isometria preserva distâncias. Dentre as isometrias, as reflexões serão nossos objetos de estudos.

Em Física o fenômeno da reflexão consiste na mudança da direção de propagação da energia (desde que o ângulo de incidência não seja 0º). Consiste no retorno de parte da energia incidente em direção à região de onde ela é oriunda, após entrar em contato com uma superfície refletora.

A energia pode tanto estar manifestada na forma de ondas como transmitida através de partículas. Por isso, a reflexão é um fenômeno que pode se dar por um caráter eletromagnético ou mecânico.

Vejamos alguns problemas motivadores cujas soluções estão intimamente ligados aos conceitos de reflexão.

Problema de Heron

Sejam r uma reta no plano, A e B pontos de um mesmo semiplano determinado por r. O problema de Heron consiste em encontrar X em r tal que $AX + XB$ seja mínimo.

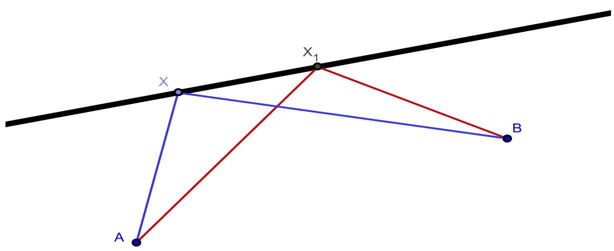

Figura 1.1 Problema de Heron

Problema de Fagnano

O problema de Fagnano consiste em inscrever num triângulo acutângulo $\triangle ABC$ um triângulo $\triangle PQR$ de perímetro mínimo [4].

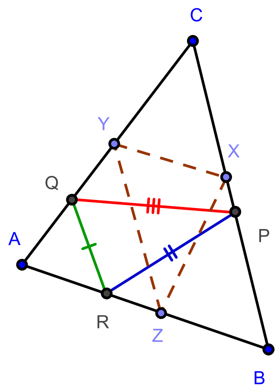

Figura 1.2 Problema de Fagnano

No século XVIII, Fagnano resolveu esse problema usando métodos analíticos. Entretanto, mostraremos mais adiante duas soluções, a solução proposta por H. Schwarz [6] que utiliza sucessivas reflexões para se chegar ao resultado e a solução sugerida por Fejér.

Problema de Fermat

Dados três pontos $A, B\ e\ C$ no plano, o problema de Fermat consiste em determinar um ponto P para o qual $AP + BP + CP$ seja mínimo.

Este problema, com solução também baseada em reflexões, representa mais um ponto interessante a ser abordado em sala de aula. Entretanto, nesse trabalho não abordaremos a solução, mas indicamos a referência [6] para leitura dos interessados.

Antes de definirmos o triângulo órtico daremos aqui a **Solução do Problema de Heron**. Considere a figura 1.3.

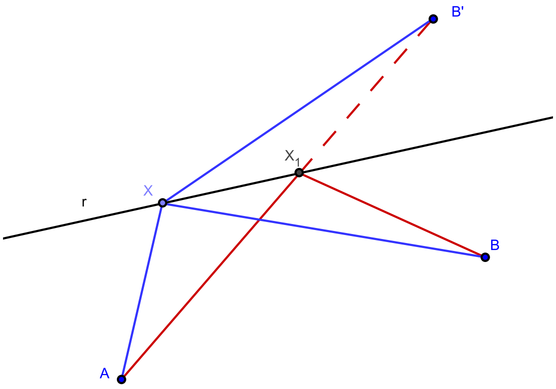

Figura 1.3 Solução do Problema de Heron

Seja B' a reflexão do ponto B sobre a reta r. Tome

$$X_1 = \overline{AB'} \cap r.$$

X_1 é a solução do problema de Heron. De fato, observe que, por construção, A, X_1 e B' estão alinhados e tome $X \in r$, com $X \neq X_1$.

Pela desigualdade triangular temos que $AX + XB' > AB'$. Isso mostra o resultado. $\square$

Corolário 1.2. *Dentre os triângulos com mesma base e mesma altura, o de menor perímetro é o isósceles.*

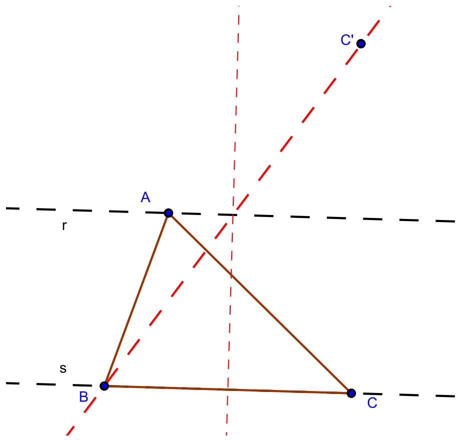

Figura 1.4 Consequência do Problema Heron

Prova

Considere a figura 1.4, sejam r a reta suporte ao lado BC dado e $s//r$ com $d(s,r) = h$ altura dada.

Seja ainda C' reflexão do ponto C sobre a reta s. O ponto $A = s \cap \overline{BC'}$ é o vértice que minimiza o perímetro do triângulo com base BC e altura h. Observe que, para o caso particular em que $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{BC}$ teremos o triângulo equilátero como solução. □

1.2 Triângulo Órtico

Desde a antiguidade, o triângulo é um elemento base nos estudos da Matemática, Engenharia, dentre outros ramos. Tales, Pitágoras, Aristóteles, Aristarco de Samos e tantos outros pesquisaram e utilizaram o triângulo como objeto de estudo, ou ainda, como ferramenta para obtenção de novos resultados através de pesquisas em diversas áreas.

Pode-se dizer que o triângulo é um "objeto" fundamental para a construção da Matemática, que, sem ele, grande parte da teoria se desmoronaria, ou deveria ser revista.

Sendo um dos fundamentos de toda a Matemática, o estudo sobre triângulos torna-se vasto e inesgotável. Sendo assim, focaremos um dentre os inúmeros pontos que podem ser abordados sobre o estudo de triângulos, a saber, o uso da minimalidade de inscrição de triângulos em triângulos acutângulos (triângulo órtico) para a construção de um interferômetro.

1.2.1 O triângulo órtico e suas propriedades

Definição 1.1 (Triângulo Órtico). *Dado um triângulo $\triangle ABC$, define-se o triângulo órtico $\triangle DEF$ como o triângulo formado por pelos pés das alturas do triângulo $\triangle ABC$.*

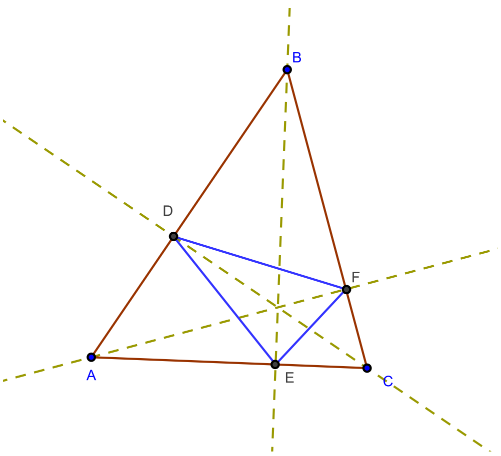

Figura 1.5 Triângulo Órtico 1

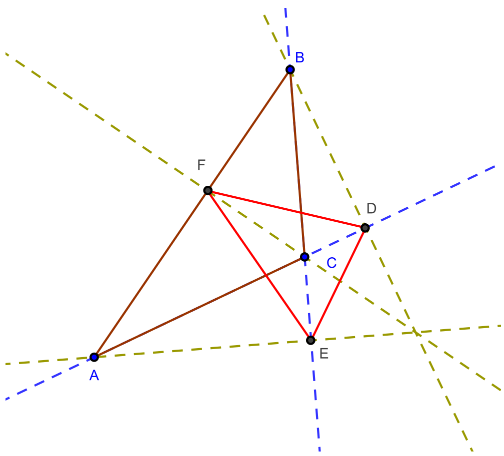

Figura 1.6 Triângulo Órtico 2

As figuras 1.5 e 1.6 mostram exemplos em que o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo e obtusângulo, respectivamente.

Claramente percebe-se que o triângulo retângulo não possui triângulo órtico, pois os pés das alturas, relativas aos catetos coincidem .

O triângulo órtico possui propriedades que podem ser exploradas em sala de aula e aplicadas, de maneira interdisciplinar, a alguns ramos, dentre os quais o ramo da Física Óptica.

1.2.2 Teoremas e Propriedades

Teorema 1.3. *Dado um triângulo acutângulo e seu triângulo órtico, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(i) *Os lados do triângulo são bissetrizes exteriores do seu triângulo órtico;*

(ii) *As alturas do triângulo são as bissetrizes do seu triângulo órtico;*

(iii) *O ortocentro do triângulo é incentro do seu triângulo órtico;*

(iv) *Os vértices do triângulo são os exincentros*[1] *do seu triângulo órtico;*

(v) *Os vértices do triângulo e seu ortocentro gozam da propriedade seguinte: qualquer um deles é ortocentro do triângulo formado pelos outros três;*

(vi) *A área do triângulo é dada por $p \cdot R$, produto do semi-perímetro p do triângulo órtico pelo raio R da circunferência circunscrita.*

Antes de demonstrar este teorema vejamos o seguinte lema:

Lema 1.4. *Seja $\triangle DEF$ o triângulo órtico do $\triangle ABC$, então os quadriláteros $FAEO, ECDO$ e $DBFO$ são inscritíveis, cada um, a uma circunferência [11].*

De fato, considere a figura 1.7.

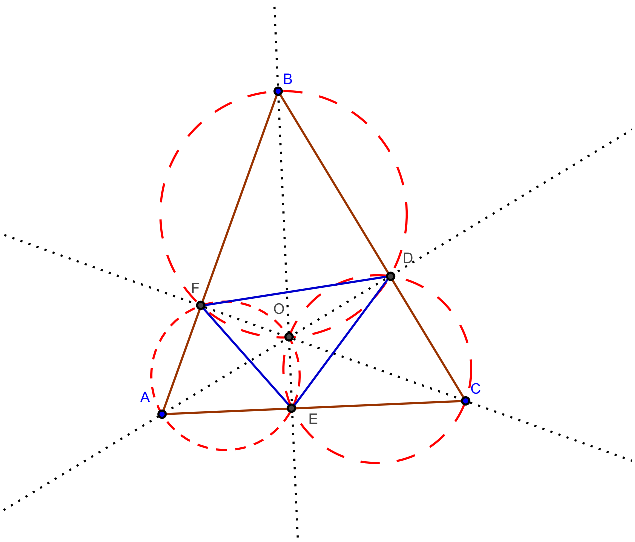

Figura 1.7 Bissetriz Externa

Temos que

$$\angle OFA = \angle AEO = \angle CEO = \angle CDO = \angle BDO = \angle BFO = 90^o.$$

[1]Um exincentro é um ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo qualquer.

Ora, o quadrilátero $OFAE$ possui ângulos opostos suplementares, condição necessária e suficiente para que seja inscritível a uma circunferência. Analogamente prova-se que o mesmo ocorre com os quadriláteros $EODC$ e $DBFO$.

Isso garante o resultado. □

Prova (Teorema 1.3)

Propriedade (i)

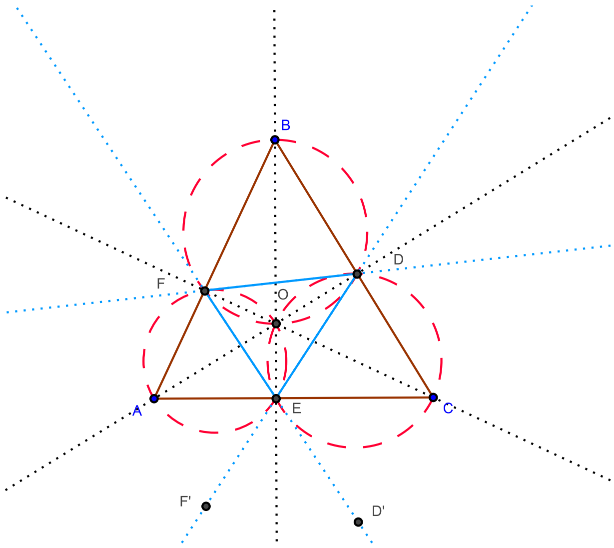

Figura 1.8 Demonstração da Propriedade (i)

Considere a figura 1.8 e observe as circunferências C_1 e C_2 definidas, respectivamente, pelos triângulos $\triangle OEA$ e $\triangle OEC$.

Temos:

1. que $\angle AEF = \angle AOF$, pois são compreendidos pelo arco $\overset{\frown}{FA}$ em C_1;
2. que $\angle AOF = \angle COD$, pois são opostos pelo vértice O;
3. que $\angle COD = \angle CED$, pois são compreendidos pelo arco $\overset{\frown}{DC}$ em C_2;
4. por último, que $\angle CED = \angle AEF'$, pois são opostos pelo vértice E.

Portanto, $\angle AEF = \angle AOF = \angle COD = \angle CFD = \angle AEF'$, ou seja, $\overline{AC}$ é uma bissetriz externa do triângulo $\triangle DEF$. Analogamente mostra-se que os outros lados também são bissetrizes externas.

Propriedades (ii),(iii) e (iv)

Claramente, $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

Propriedade (v)

De fato, por construção é claro que O é ortocentro do triângulo $\triangle ABC$. Basta mostrar que o mesmo ocorre com os outros pontos. Sem perda de generalidade, consideraremos o triângulo $\triangle OBC$. Observe que RB *e* QC são as alturas do triângulo $\triangle OBC$ relativas, respectivamente aos vértice B *e* C. Tomando as retas suportes de RB *e* QC, vemos que se intersectam em A, o que garante o resultado.

<u>Propriedade (vi)</u>

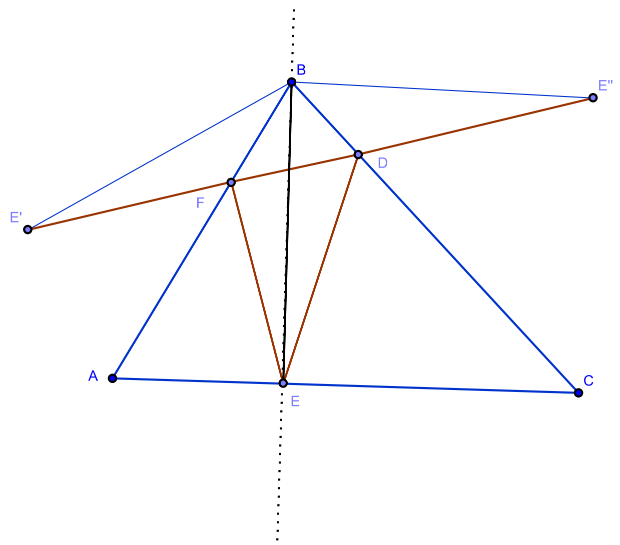

Figura 1.9 Área de um triângulo

Considere o triângulo acutângulo $\triangle ABC$ e seu triângulo órtico $\triangle DEF$ com $E \in \overline{AC}$. Ver figura 1.9.Sejam E' e E'', reflexões do ponto E sobre os outros dois lados do triângulo$\triangle ABC$. Observe que o triângulo $\triangle E'BE''$ é isósceles com $BE' = BE = BE''$ e, por construção,

$$S\angle E'BE'' = 2 \cdot \angle ABC.$$

Seja M o ponto médio do lado $E'E''$, então,

$$E'M = E''M = BE \cdot senB \Rightarrow E'E'' = 2 \cdot BE \cdot senB.$$

Ora,

$$E'E'' = 2 \cdot BE \cdot senB \Rightarrow AD = \frac{E'E''}{2 \cdot senB} \tag{1.1}$$

e, pela lei dos senos,

$$\frac{AC}{senB} = 2R \Rightarrow AC = 2R \cdot senB. \tag{1.2}$$

Mas a área S do triângulo $\triangle ABC$ é dado por

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BE}{2}.$$

Das equações (1.1) e (1.2), temos

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2R \cdot senB \cdot \dfrac{E'E''}{2 \cdot senB}}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{E'E''}{2} \cdot R \Rightarrow S_{\triangle ABC} = p \cdot R.$$

$\square$

Observações:

1. Na Seção 1.3 veremos uma demonstração da propriedade (i), considerando o Princípio da Mínima Ação (Definição 1.9);

2. Essa propriedade do triângulo órtico obedece às leis de reflexão da luz em espelhos planos, definidas em 1.9. Como consequência, faz-nos crer que o triângulo órtico é o triângulo de perímetro mínimo inscritível a um triângulo acutângulo.

Teorema 1.5 (Solução do Problema de Fagnano)**.** *O triângulo órtico é o triângulo de perímetro mínimo que pode ser inscrito em um triângulo acutângulo.*

Prova (Schwarz)

Para resolvermos o problema de Fagnano trabalharemos com simetrias por reflexões, conforme solução sugerida por H. Schwarz [6].

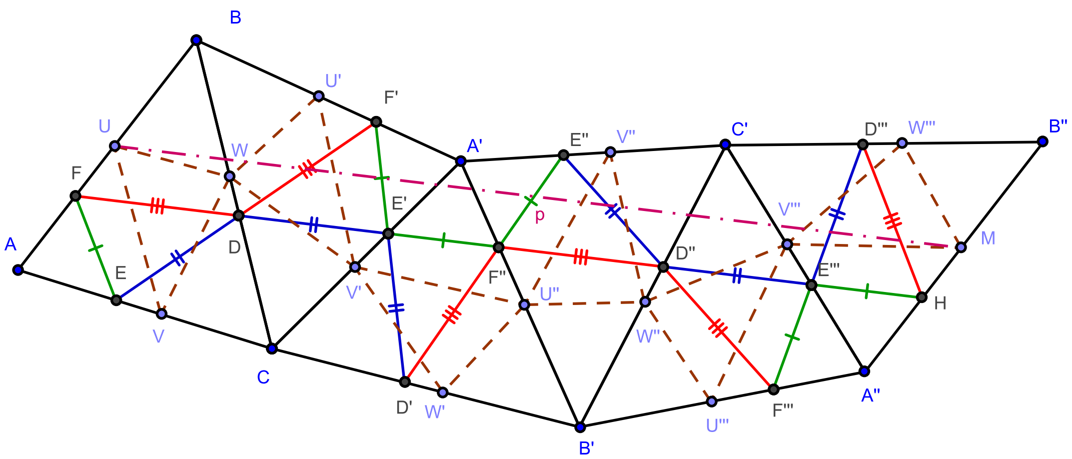

Figura 1.10 Solução do Problema de Fagnano (Schwarz)

Considere o triângulo acutângulo $\triangle ABC$ e seu triângulo órtico $\triangle EDF$ na figura 1.10. Considere ainda um outro triângulo $\triangle UVW$ inscrito ao triângulo $\triangle ABC$. Refletindo o triângulo $\triangle ABC$ e todos os seus elementos sobre o lado BC formando o triângulo $\triangle A'BC$, faça o mesmo com o triângulo $\triangle A'BC$ sobre o lado $A'C$ formando o triângulo $\triangle A'CB'$. Repita esse procedimento por mais três vezes.

Afirmação 1 os pontos F, D *e* E' estão alinhados.

Prova

De fato, pelo teorema 1.3 (ii) temos que

$$\angle CDE = \angle BDF$$

e, por simetria,

$$\angle CDE = \angle CDE''$$

ou seja,

$$\angle BDF = \angle CDE'$$

o que comprova o alinhamento dos pontos F, D e E'.

De semelhante modo temos que $F, D, E', F'', D'', F''', H$ estão alinhados.

Afirmação 2 $UF = MH$.

De fato, por reflexão temos $UF = U'F' = U''F'' = U'''F''' = HM$.

Afirmação 3 $A''B''//AB$.

Com efeito, os ângulos alternos internos $\angle A''HF''$ e $\angle BFD$, por construção (reflexão), são congruentes.

Afirmação 4 $UM = FH$.

Imediato das afirmações anteriores.

O menor caminho de U a M é o segmento UM que representa o dobro do perímetro do triângulo órtico. O caminho $UHV'U''W''V''M$ mede o dobro do perímetro do triângulo $\triangle UVW$. Isso resolve o problema de Fagnano.[2] $\square$

Pode-se verificar outra solução creditada a Lipót Fejér [3].

Prova (Fejér)

Esta solução também utiliza, fortemente, os conceitos de reflexão e desigualdade triangular.

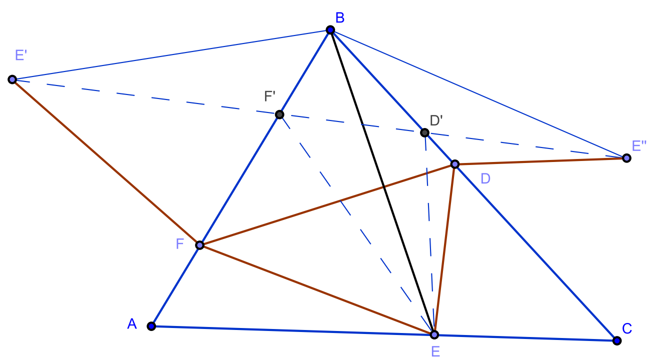

Figura 1.11 Solução do Problema de Fagnano (Fejér)

Considere o triângulo $\triangle DEF$ inscrito ao triângulo acutângulo $\triangle ABC$ com $E \in \overline{AC}$, conforme figura 1.11. Sejam E' e E'', reflexões do ponto E sobre os outros dois lados do triângulo $\triangle ABC$.

[2]Ver animação em http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fagnano.shtml

[3]Matemático húgaro, 1880 - 1959, foi membro da academia húngara de ciências

Sejam $D' = \overline{E'E''} \cap \overline{BC}$ e $F' = \overline{E'E''} \cap \overline{AB}$, temos que $FE' = FE$ e $DE'' = DE$. Sendo assim, fixando E e considerando a desigualdade triangular, temos que o perímetro do triângulo $\triangle DEF$ é minimizado quando $F = F'$ e $D = D'$, pois o menor caminho de E' a E'' é o segmento $E'E''$ cujo comprimento coincide com o perímetro do triângulo $\triangle EF'D'$.

Ora, pela equação (1.1)

$$E'E'' = 2 \cdot BE \cdot senB$$

e o perímetro será mínimo quando BE for a menor das cevianas partindo de B e a menor das cevianas é a altura do triângulo $\triangle ABC$. Portanto BE é altura do triângulo. □

Corolário 1.6. *O perímetro do triângulo órtico $\triangle DEF$ de um triângulo acutângulo $\triangle ABC$, não é maior que o dobro de qualquer altura do triângulo $\triangle ABC$.*

Esse resultado é imediato da equação (1.1). Entretanto, mostraremos aqui uma prova geométrica.

Prova geométrica do Corolário 1.6

Considere a figura 1.12. Sejam E' e E'' reflexões do ponto E com relação a $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$,

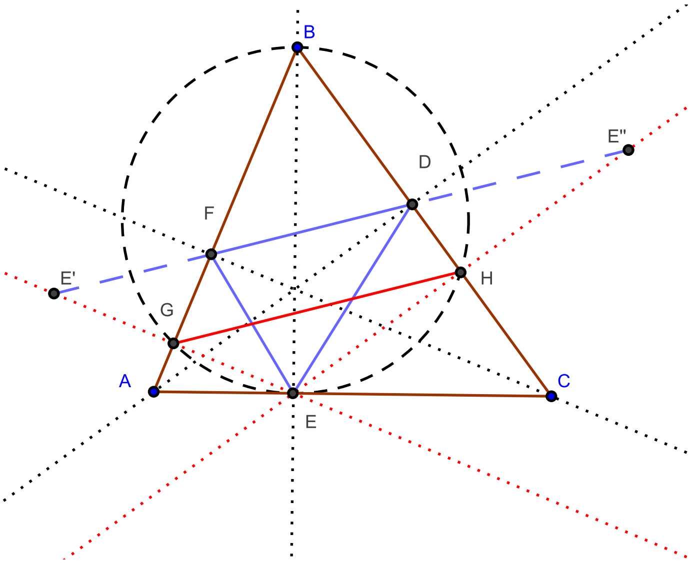

Figura 1.12 Corolário 1.6

respectivamente, então E', F, D e E'' estão alinhados.

De fato, sabemos que $\angle DFB = \angle EFA = \angle AFE'$, portanto E', F e D estão alinhados. De mesmo modo, prova-se que E'', D e F estão alinhados.

Sejam $G = \overline{EE'} \cap \overline{AB}$ e $H = \overline{EE''} \cap \overline{BC}$, então $\overline{GH}$ é o semiperímetro do triângulo órtico. De fato, os triângulos $\triangle EGH$ e $\triangle EE'E''$ são semelhantes e como $\overline{EG} = \overline{E'G}$ e $\overline{EH} = \overline{E''H}$, temos que $2\overline{GH} = \overline{E'E''}$, mas $\overline{E'E''}$ é o perímetro do triângulo órtico.

Observe que o quadrilátero $EGBH$ é circunscritível, pois $\angle EGB = \angle EHB = 90^o$ e BE (altura do triângulo $\triangle ABC$) é o diâmetro da circunferência definida por $EGBH$ enquanto GH é só uma corda da circunferência e isso mostra o resultado. □

Teorema 1.7. *Para triângulos retângulos ou obtusângulos, não existem triângulos inscritos de perímetro mínimo;*

Prova

1º caso - $\triangle ABC$ é <u>retângulo</u> em B. Ver figura 1.13.

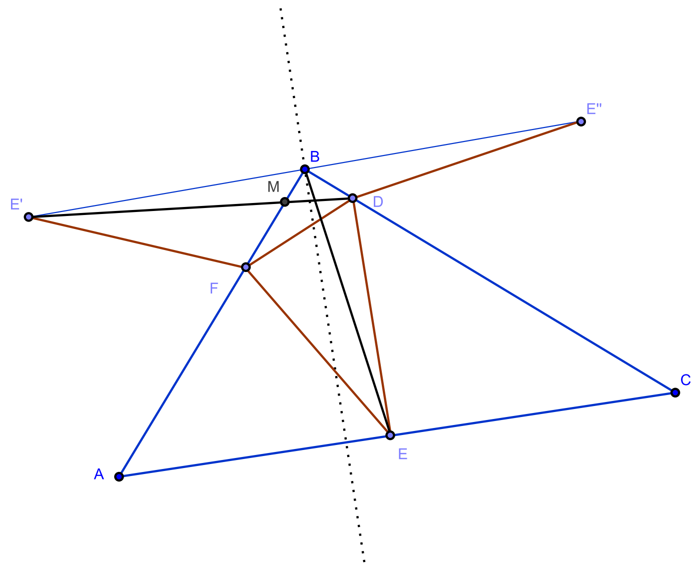

Figura 1.13 Teorema 1.7 triângulo retângulo

Vamos mostrar que dado um triângulo inscrito a um triângulo retângulo, é possível construir outro com perímetro menor.

Sendo E' e E'' reflexões do ponto E sobre os lados $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$, respectivamente, temos que E', B *e* E'' estão alinhados, pois $\angle E'BE'' = 2\widehat{B} = 180^o$.

Escolha, dentre as diagonais do quadrilátero $E'FDE''$, aquela cuja reta suporte deixa um vértice do quadrilátero e B em semiplanos distintos. Sem perda de generalidade suponha que essa diagonal seja $E'D$ e seja $M = \overline{E'D} \cap \overline{FB}$ então o perímetro do triângulo $\triangle DEM$ é menor que o perímetro do triângulo $\triangle DEF$, pois $ME' = ME$ e, pela desigualdade triangular

$$E'D < E'F + FD$$

. Como o perímetro do triângulo

$$\triangle DEM = E'D + DE''$$

e o do triângulo

$$\triangle DEF = E'F + FD + DE,''$$

segue o resultado.

2º caso - $\triangle ABC$ é <u>obtusângulo</u>. temos duas possibilidades:

1. se uma das diagonais do quadrilátero $E'FDE''$ intersecta um dos lados AB ou BC então a demonstração é análoga ao caso em que $\triangle ABC$ é retângulo. Caso contrário, consideraremos o seguinte lema:

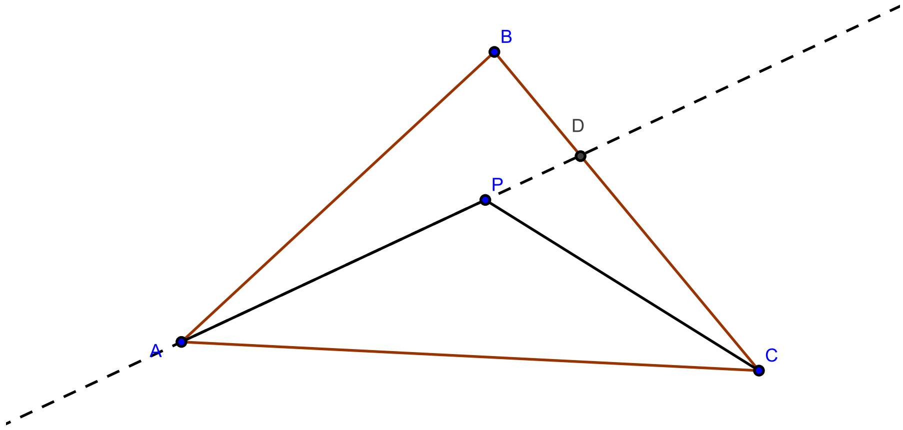

Figura 1.14 Prova do Lema 1.8

Lema 1.8. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P em seu interior, então $AP + PC < AB + BC$.*

Prova
Seja D a interseção entre o prolongamento do segmento $\overline{AP}$ e o lado $\overline{BC}$.
Pela desigualdade triangular temos que

$$PC < PD + DC \tag{1.3}$$

e que

$$AP + PD < AB + BD. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4), segue que

$$AP + PC < AB + BD + DC = AB + BC.$$

□

2. Para o caso em que as diagonais do quadrilátero $E'FDE''$ não intersectam quaisquer dos lados AB ou BC, considere o triângulo $\triangle E'DF$. Ver figura 1.15. Tome $O \in BF$. Pelo Lema 1.8 $E'O + OD < E'F + FD$, como $E'O = EO$ segue que o perímetro do triângulo $\triangle DEO$ é menor que o perímetro do triângulo $\triangle DEF$. $\square$

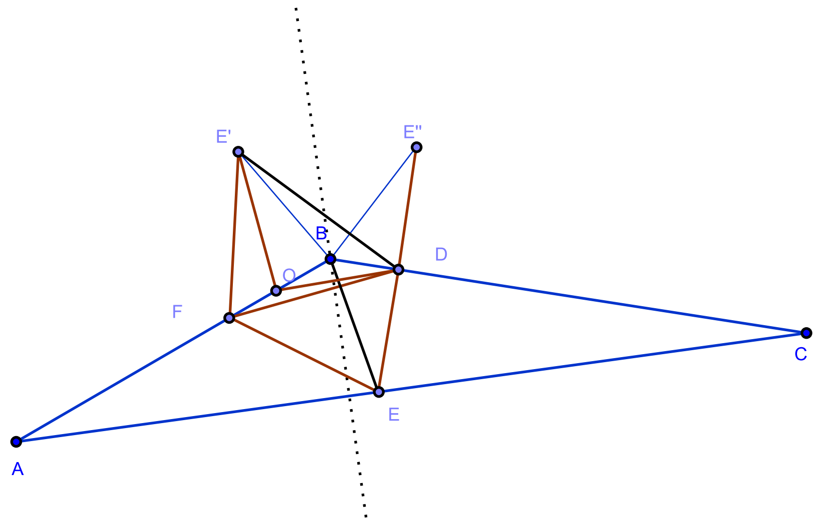

Figura 1.15 Teorema 1.7 triângulo obtusângulo

1.3 Princípio da Mínima Ação

1.3.1 Histórico

No século 1º d.C. **Heron de Alexandria** demonstrou, em seu livro *Catóptrica*, com um argumento simples, que o caminho percorrido pela luz refletida em um espelho tem ângulos de incidência e reflexão iguais.

Como consequência Heron mostrou que o caminho percorrido pela luz, ao ir de um ponto P a um ponto Q com reflexão no espelho, é o menor entre todos os caminhos que saem do ponto P, refletem no espelho e atingem o ponto Q **(ver 1.1)**.

Heron mostrou ainda que se o meio for homogêneo, a velocidade da luz é constante e que ela percorre o caminho que leva o menor tempo.

Com base nos problemas de reflexão, os filósofos do período pós-grego estenderam esse princípio de otimização e propuseram a doutrina de que a natureza age sempre da melhor maneira possível, nada fazendo de supérfluo ou desnecessariamente.

No século 17, **Fermat** (1601-1665) postulou o Princípio do Tempo Mínimo e, a partir dele, deduziu os princípios da refração da luz.

No início do século 18 os matemáticos tinham muitos exemplos de que a natureza empreende a otimização de algumas quantidades importantes. Os exemplos sugeriam que deveria haver um princípio geral, segundo o qual toda dinâmica ocorre na otimização quantitativa de algo: tempo, distância, trabalho, energia etc. Restava saber se havia algo universal cuja otimização quantitativa fosse capaz de reger todas as dinâmicas.

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) propôs em 1744 o **Princípio da Mínima Ação**. Segundo esse princípio, qualquer dinâmica na natureza deve minimizar a Ação: a quantidade de movimento vezes a distância percorrida.

Em 1744, **Euler** reformulou a definição de Ação, introduzindo a variável temporal. Como $ds = vdt$, ao substituir a igualdade na equação que define a Ação, obteve $A = \int mv^2 dt$.

Ele percebeu então que a Ação é a quantidade total de força viva durante a trajetória, isto é, a Ação é a soma da força viva da massa em cada instante do movimento ao longo de uma curva. Força viva era o termo usado na época de Euler; depois, por questão de compatibilidade com as leis de Newton e com a conservação da energia, $\frac{1}{2}mv^2$, metade da força viva, passou a se chamar energia cinética da massa m.

Em 1752, **D'Arcy**[4], ratificado por D'Alembert em sua obra *Encyclopédie* [5], apresentou seu primeiro artigo criticando o princípio da ação mínima de Maupertuis. D'Arcy mostrou mais tarde que o Princípio da Mínima Ação, não funcionava para reflexão em espelhos côncavos, mas valia para espelhos planos e convexos.

1.3.2 Princípio da Mínima Ação da Luz

Este subtítulo não parece ser o mais adequado devido aos fatos registrados na subseção 1.3.1, entretanto, para os nossos propósitos, ele é bem oportuno, pois há uma forte relação entre a minimalidade de perímetro e percurso mínimo percorrido pela luz.

[4]Patryck d'Arcy (1723-1779), nobre irlandês, entusiasta pela Matemática.

Definição 1.9. *Para efeitos deste trabalho, chamaremos de* **Princípio da Mínima Ação** *da Luz o fato de que, na reflexão em espelhos planos e convexos o caminho do raio é o mais curto possível.*

Esta definiçao é equivalente ao que diz as duas **Leis de Reflexão**. São elas:

Primeira: O raio incidente, a reta normal que passa pelo ponto de incidência e o raio refletido estão contidos em um mesmo plano, o plano de incidência.

Segunda: A medida do ângulo de incidência é igual a medida do ângulo de reflexão. Ver figura 1.16.

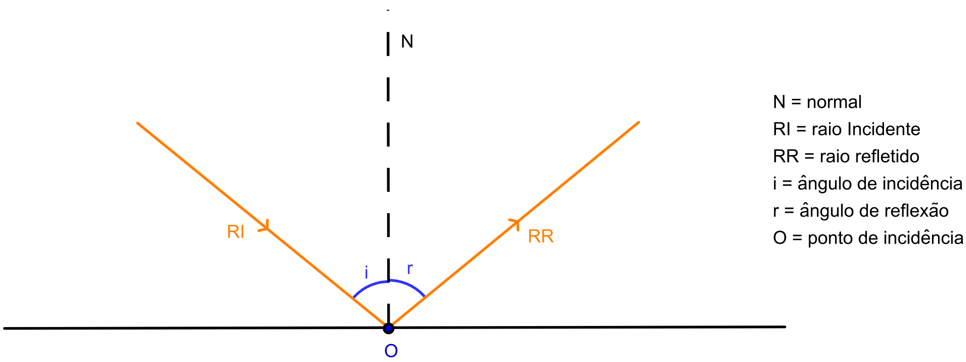

Figura 1.16 Leis de reflexão

São esses os fundamentos que serão utilizados como conceitos para alcançar os objetivos finais desse trabalho [9].

Vejamos agora a demonstração da Propriedade (i) do teorema 1.3 utilizando o Princípio da Mínima Ação da Luz.

Para tanto, considere a figura 1.8 e a reta suporte do raio de reflexão. Pela segunda lei da reflexão, temos que os ângulo de incidência e reflexão são congruentes.

1.4 Interferometria

1.4.1 Conceitos

Interferometria é a ciência e técnica da sobreposição de duas ou mais ondas (de entrada), o que cria como resultado uma nova e diferente onda que pode ser usada para explorar as diferenças entre as ondas de entrada. Uma vez que a interferência é um fenômeno geral entre ondas, a interferometria é aplicável a um largo espectro de campos, incluindo astronomia, fibras ópticas, metrologia óptica, oceanografia, sismologia e mecânica quântica.

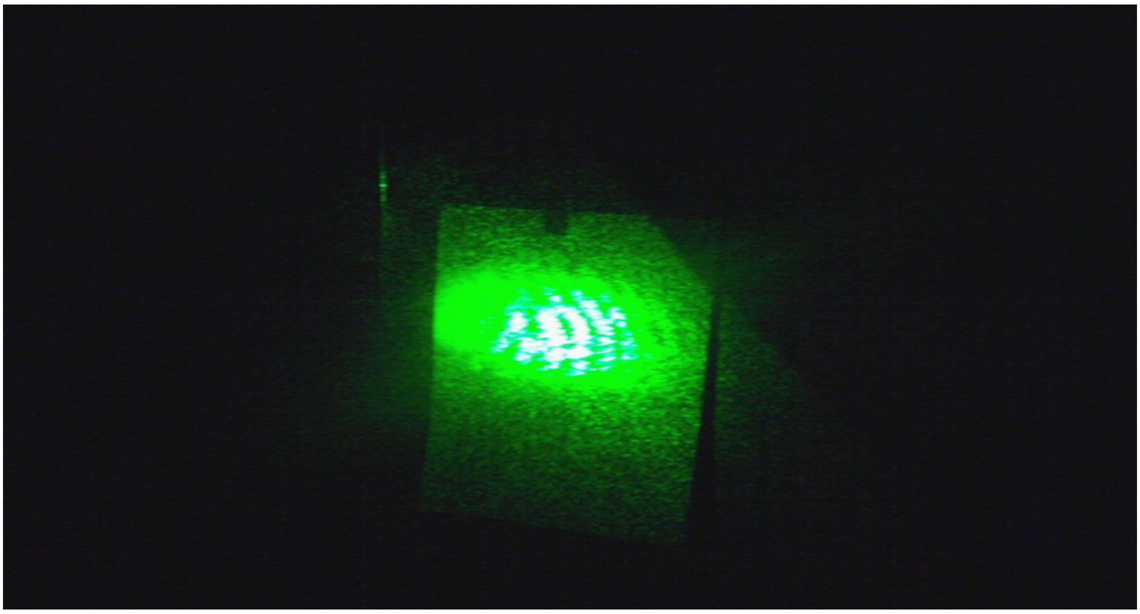

Figura 1.17 Padrão de Interferência 1

Interferômetro de luz é um aparelho utilizado para efetuar medidas de ângulos e distâncias aproveitando a interferência de ondas eletromagnéticas (luz) que ocorre quando estas interagem entre si.

Funcionamento Geral: Um feixe luminoso emitido por uma fonte coerente é dividido em dois. Cada um percorre um caminho óptico diferente. A interação entre as duas ondas luminosas produzirá regiões de interferências construtivas e destrutivas. No caso da luz, percebe-se as regiões de interferências construtivas são claras e as regiões de interferências destrutivas são escuras. Esta sequência de claros e escuros é chamada de padrão de interferência.

1.4.1.1 Alguns tipos de interferômetros

Interferômetro de Michelson: Este é o mais conhecido dos interferômetros. Ele foi utilizado por Michelson e Morley na tentativa de detectar o éter. Acreditava-se que o espaço, fora da atmosfera terrestre, era totalmente preenchida por éter, que era o meio físico no qual as ondas eletromagnéticas deveriam se propagar. Os cientistas idealizaram um aparelho com o qual tentaria estabelecer a influência do movimentos da Terra, com relação ao éter, sobre a velocidade da luz.

Esperava-se que o padrão de interferência do experimento sofresse alguma alteração devido ao movimento relativo da Terra com o éter. Entretanto, após o experimento, não se percebeu alterações significativas na interferência.

Este experimento serviu de base para a Teoria da Relatividade de Einstein desenvolvida no início do século XX.

Nesse aparelho um feixe de luz é dividido pelo semi-espelho (beam splitter) em duas partes. Uma parte é refletida pelo beam splitter e direcionada a um espelho móvel e a outra parte é transmitida pelo beam spliter e direcionada a um espelho fixo. As duas partes são recombinadas depois de percorrerem diferentes caminhos ópticos. O padrão de interferência encontrado, vem na forma de anéis concêntricos.

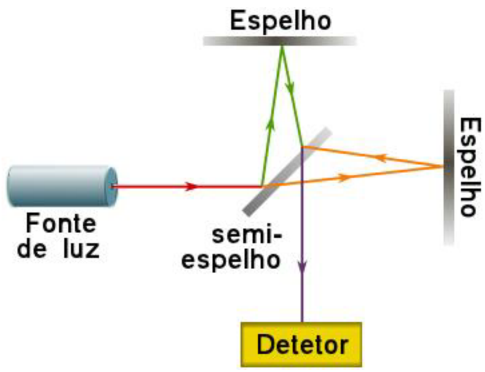

Figura 1.18 Interferômetro de Michelson

Interferômetro de Fabry-Perot: Instrumento óptico cujo funcionamento está baseado fundamentalmente no fenômeno de interferência da luz e nas reflexões múltiplas que ocorrem no espaço entre as lâminas planas espelhadas paralelas que estão no centro do equipamento.

Amplamente utilizados em telecomunicações, lasers e espectroscopia para controlar e medir os comprimentos de ondas de luz com grande precisão.

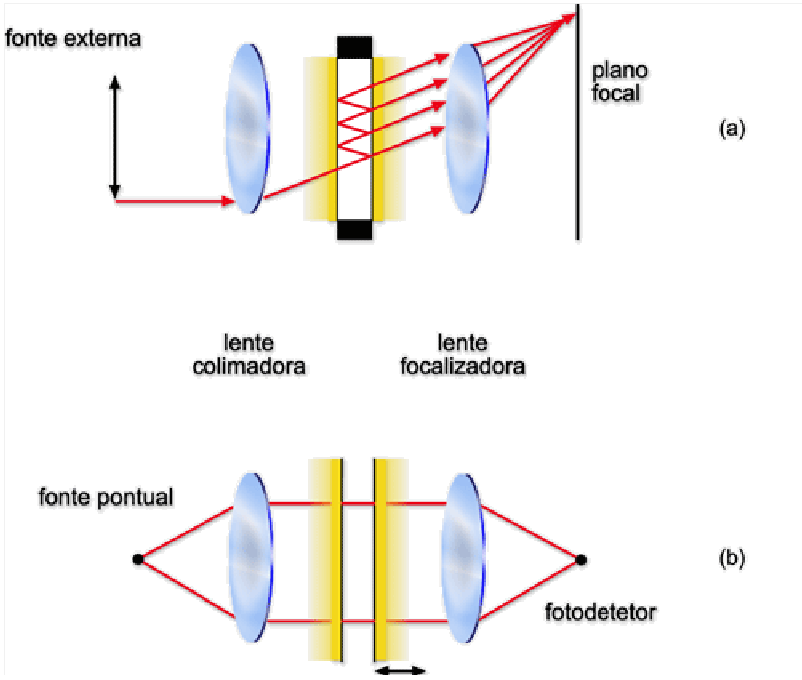

Figura 1.19 Interferômetro de Fabry-Perot

Interferômetro de Mach-Zehnder: A característica principal deste instrumento é que variando-se a diferença de caminhos ópticos é possível fazer com que a luz comute entre uma e outra saída. Isto tem importância em comunicações ópticas porque possibilita alterar a direção de tráfego de sinal.

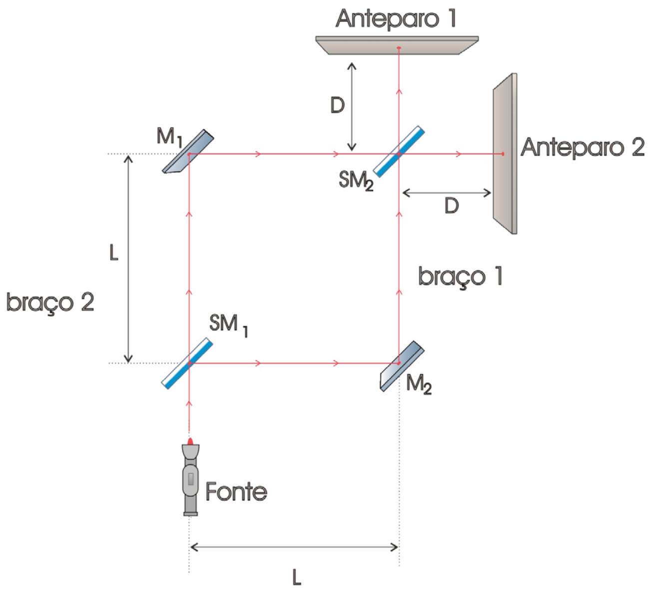

Figura 1.20 Interferômetro de Mach-Zehnder

Interferômetro de Jamin: Interferômetro de dois feixes especialmente para medir o índice de refração de um gás.

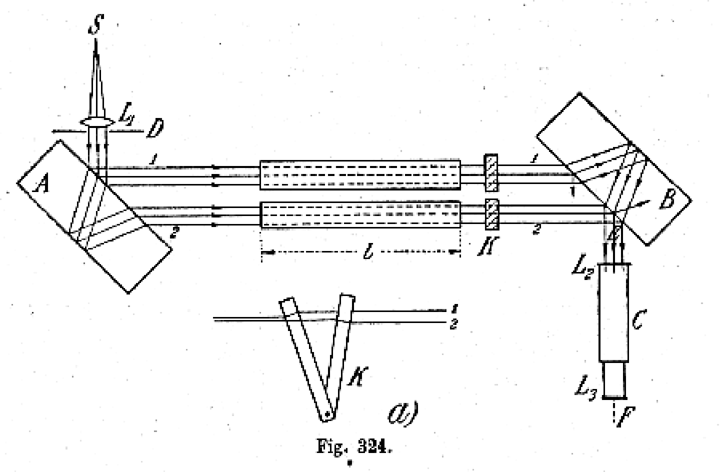

Figura 1.21 Interferômetro de Jamin

Interferômetro de Sagnac (interferômetro de anel): O feixe incidente é dividido em dois, estes percorrem caminhos identicos, porém em setidos opostos até que se recombinam no mesmo ponto do divisor do feixe.

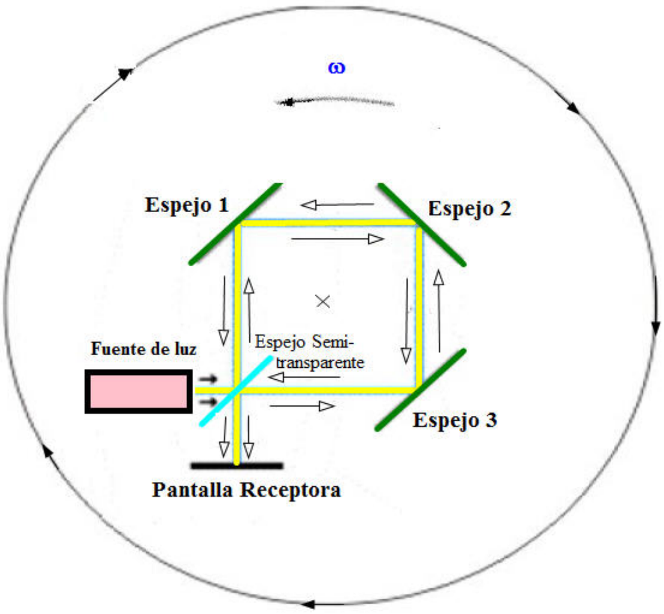

Figura 1.22 Interferômetro de Sagnac

Interferômetro triangular[5]

A finalidade inicial da construção deste interferômetro era aplicar, concretamente, as propriedades reflexivas do triângulo órtico e fazer um paralelo com os conceitos de reflexão da luz por espelhos planos. Entretanto, após construção do interferômetro triangular, algumas propriedades e potencialidades de aplicações foram levantadas e mostraram-se bastante promissoras.

Nesse interferômetro o feixe incidente é dividido em dois e o caminho óptico do feixe transmitido é o triângulo órtico relativo ao triângulo acutângulo base.

Dentre as propriedades do interferômetro triangular podemos citar:

1. Grande possibilidade de variação do ângulo de entrada do feixe de luz;
2. Caminho óptico percorrido em um único sentido exclusivamente por uma das parcelas do feixe inicial (não foi encontrada na literatura outro interferômetro com essa propriedade);
3. A transmitância ideal para o beam splitter (lente específica para construção de interferômetros profissionais) está relacionado com o número de ouro.

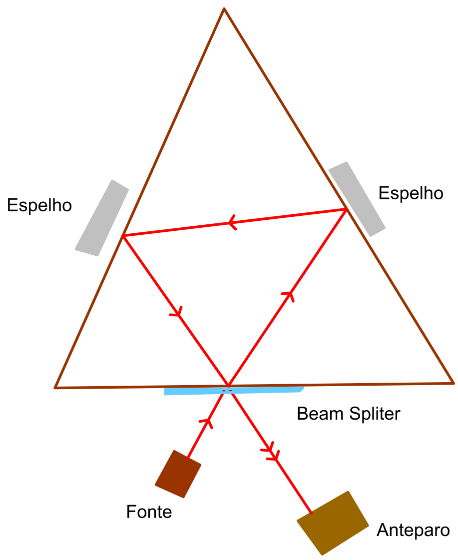

Figura 1.23 Interferômetro triangular

[5]Interferômetro construído pelo autor e pelos físicos Anderson Monteiro Amaral, Ronaldo Pereira Melo Júnior, Whualkuer Enrique Lozano Bartra no Laboratório de Óptica Não-Linear e Optoeletrônica do Departamento de Física da UFPE.

Demonstraremos agora a propriedade 3. do interferômetro de triangular.

Prova

Para que o padrão da interferência seja mais nítido, deve-se ter que o feixe refletido na primeira interface possui intensidade igual a do feixe que passa pelo interferômetro. Consideremos I_0 a intensidade da luz incidente, e R e T os coeficientes de reflexão e transmissão.

Por definição,

$$R+T=1.$$

Após uma volta no interferômetro, o feixe transmitido possui intensidade $T^2 I_0$, enquanto o refletido tem intensidade RI_0.

A igualdade das intensidades implica que

$$R\cdot I_0 = T^2\cdot I_0.$$

Usando que

$$R = 1-T,$$

temos

$$T^2+T-1=0.$$

A solução é

$$T=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pois, a transmissão só é física se $0 \leq T \leq 1$.

Sabemos que

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Sendo assim,

$$T=\Phi-1.$$

As figuras 1.17 e 2.1 mostram os resultados das franjas de interferências, obtidas por ocasião da construção do interferômetro triangular.

CAPÍTULO 2

Sequência didática com experimento

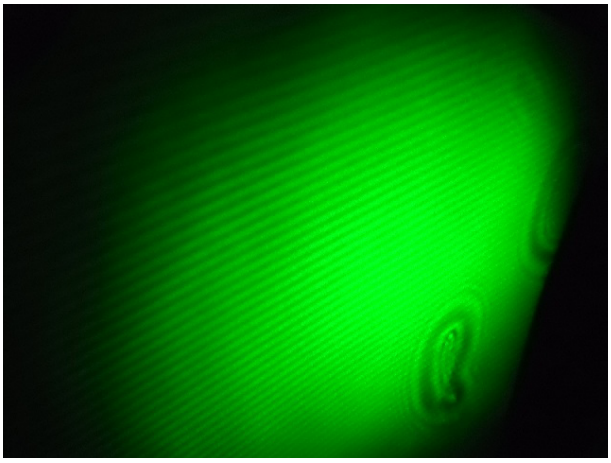

Figura 2.1 Padrão de Interferência 2

Neste capítulo é apresentada a sequência didática a ser aplicada com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental ou do 2º Ano do Ensino Médio. A sequência nos possibilitará relacionar os conceitos e propriedades do triângulo órtico com as propriedades de reflexão e transmitância da luz de forma interdisciplinar - Física e Matemática -, bem como construir um interferômetro e estudar as diversas interferências obtidas através de sua construção.

2.1 Preparando a Sequência

2.1.1 Providências e considerações iniciais

As propriedades reflexivas que gozam o triângulo órtico nos permite garantir que a sua minimalidade de perímetro coincida com o caminho percorrido pela luz, visto que, esta, pelo Princípio da Mínima Ação da Luz , percorre o menor dos caminhos, quando consideramos um mesmo meio. É nessa perspectiva que se inicia a nossa sequência didática.

O experimento

Objetivos:

- Construir um interferômetro triângular;
- Estudar os efeitos da reflexão em espelhos planos;
- Estudar as propriedades reflexivas do triângulo órtico;
- Relacionar o princípio da mínima ação da luz com as propriedades do triângulo órtico;
- Intuir que o triângulo órtico é o triângulo de perímetro mínimo inscritível a um triângulo acutângulo;
- Solucionar o Problema de Fagnano;
- Estudar os efeitos ópticos do interferômetro e compreender sua funcionalidade.

Público Alvo:
Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental ou do 2º Ano do Ensino Médio.

- A sequência didática aplicada aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental: Em geral, no Brasil, é no 9º ano que os alunos têm seu primeiro contato formal com a disciplina de Física, momento em que, de forma superficial, os conteúdos relativos a essa disciplina são abordados no decorrer do ano. Mais precisamente, nos últimos bimestres do ano é visto parte do conteúdo de ótica geomérica. Concomitantemente, há uma continuidade no ensino da geometria euclideana plana, fortalecendo os conceitos adquiridos em outros anos e ampliando o conhecimento a partir de novos conteudos, a exemplo, relações trigonométricas em um triângulo. Tal cenário propicia a inserção de uma sequência didática interdisciplinar, abordando conteúdos de Física e de Matemática que se relacionam de forma indissolúvel, culminando em experimentos bastantes tangíveis aos alunos em questão.
- A sequência didática aplicada aos alunos do 2º ano do Ensino Médio: As justificativas para aplicação da sequência didática a este público são, de certo modo, semelhantes às anteriores tendo como principal diferença a maturidade do público alvo. Isto se dá pelo fato de ser no 2º ano do Ensino Médio o momento em que os alunos aprofundam o conhecimento de ótica na Física, revisam os conceitos de geometria euclideana plana na Matemática e abordam, mais profundamente, os conceitos de geometria espacial.

Pré-Requisitos:

- Conhecer a definição e os conceitos de triâgulo órtico;
- Conhecer conceitos de bissetrizes, incentro e ortocentro;
- Identificar simetrias por reflexão;
- Conhecer conceitos de reflexão em espelhos planos;
- Conhecer conceitos de refração e transmitância em superfícies planas.

Materiais e Tecnologias:

- Espelhos;
- Lente;
- Divisor de feixes;
- Fonte de laser;
- Suportes para espelhos e lentes;
- Moldes de triângulos acutângulos.

Recomendações Metodológicas:

1. Preparação da sala: O ambiente ideal para construção de um interferômetro é um laboratório de Física, entretanto, se não existir tal laboratório na escola, a sala de aula poderá ser adaptada para uso, afastando cadeiras e colocando uma mesa plana para realização do experimento.

2. Organização da turma: É interessante que a turma seja dividida em grupos de até 5 *cinco* pessoas, a fim de que haja o *Brain Storm*[1] e, dessa forma uma maior interação entre os alunos.

3. Materiais Necessários:

   (a) 01 folha papel [qualquer]
   (b) Régua
   (c) Lápis
   (d) Transferidor
   (e) Fonte de laser
   (f) 02 espelhos

[1]tempestade ideias

(g) 01 divisor de feixe (lâmina de vidro)

(h) 01 lente de expansão

(i) 03 suportes para espelhos e vidros

Dificuldades Previstas:

1. **Montagem da Sala** é importante que haja na escola suportes para fixar espelhos e lentes bem como uma mesa plana;
2. Alinhamento de lentes e espelhos: é comum não haver total alinhamento entre espelhos e lentes, entretanto o erro é mínimo e tal erro servirá de ilustração para se perceber o *looping* do caminho percorrido pela luz;
3. Sincronismo de calendários escolares dos professores de física e matemática;
4. Imaturidade Matemática (para alunos do 9º ano);
5. Imaturidade dos conceitos físicos (para os alunos do 9º ano).

Descrição Geral:

A sequência didática deve ser realizada em três partes, cada parte com 2 (duas) horas aulas, totalizando 6 (seis) horas aula, conforme proposto na Seção 2.2.

2.2 Aplicando a Sequência

Parte 1 (Problema de Heron e Princípio da Mínima Ação da Luz)

Nesse momento serão introduzidos os conceitos físicos de reflexão da luz em espelhos planos.

Tais conceitos serão abordados em sala de aula, definindo-se **ângulo de incidência e ângulo de reflexão** da luz em espelhos planos enfatizando o Princípio da Mínima Ação. Em seguida serão propostos alguns problemas a serem resolvidos em sala de aula:

Atividades Propostas

1. Construa, utilizando o *Geogebra*[2], reflexões de pontos relativos a:
   (a) um ponto fixo dado;
   (b) uma reta dada;
   (c) o ponto fixo dado, e em seguida a reta dada.
2. Resolva o Problema de Heron (Seção 1.1).
   (a) Qual a relação entre o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão do caminho escolhido para o problema de Heron?
   (b) Que relação pode ser feita entre os conceitos de reflexão da luz e a solução do problema de Heron?

Considerações para o professor

1. São objetivos particulares dessa aula:
   (a) trabalhar os conceitos de simetria (reflexão);
   (b) correlacionar as propriedades reflexivas da luz em espelhos planos, com as propriedades geométricas;
   (c) propor uma solução para o problema de Heron;
   (d) concluir que o princípio da mínima ação da luz resolve o problema de Heron.
2. O professor poderá aplicar algumas variações de modo a adaptar à realidade da escola. São exemplos:
   (a) caso não haja disponibilidade de trabalho com o GeoGebra, pode-se utilizar régua e compasso para construir as reflexões.
   (b) dependendo da resposta da turma, pode-se acrescentar como proposta, resolver o problema de Heron generalizalizado.

[2] software matemático livre, http://www.geogebra.org/cms/en/download

Parte 2 (Construção do interferômetro)

A construção do interferômetro representa a parte lúdica e prática da sequência. Há aqui a materialização dos conceitos, para o professor é partir do abstrato ao concreto, para o aluno a abordagem será contrária, partindo do concreto e chegando ao abstrato. Antes da construção do interferômetro o professor deverá:

- definir o triângulo órtico;
- definir a interferometria e listar alguns tipos de interferômetros;
- elencar as aplicações da interferometria, como metrologia, astronomia, precisão, dentre outras.
- explicar as etapas de construção do interferômetro.

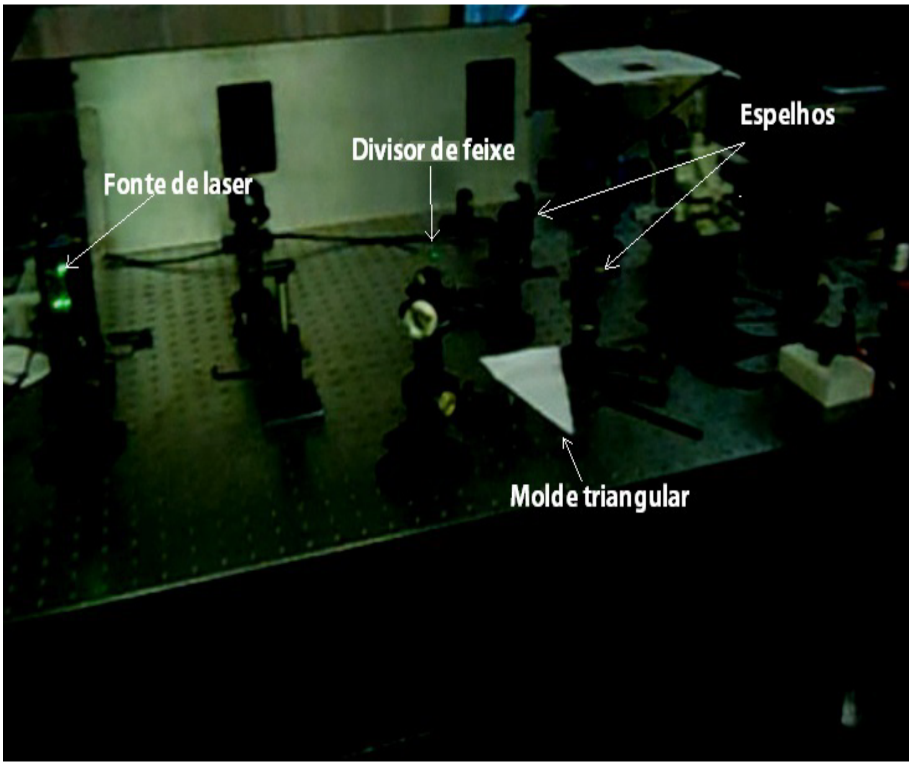

Figura 2.2 Montagem do interferômetro triangular: Foto retirada no Laboratório de Óptica Não-Linear da UFPE

Etapas de construção:

1. recorte o papel em formato triangular de modo a se obter um triângulo acutângulo, que doravante chamaremos de **triângulo base**;
2. utilize dobraduras para marcar os pés das alturas do triângulo;

Figura 2.3 Vista superior da montagem: Foto retirada no Laboratório de Óptica Não-Linear da UFPE.

3. trace, para fins de referência, o triângulo formado pelos pés das alturas do triângulo base (triângulo órtico);

4. posicione dois espelhos e a lente nos vértices do triângulo órtico, alinhando os espelhos e as lente com os lados do triângulo base;

5. direcione o laser de modo que a luz sobreponha um dos lados do triângulo órtico. Deve-se por a fonte de laser antes da lente, para que haja transmissão e reflexão da luz pela lente;

6. coloque um anteparo (papel por exemplo) para visualizar os feixes;

7. alinhe os espelhos de modo a deixar os feixes sobrepostos.

Atividades Propostas

1. Como realizar a etapa 2?

2. Observando o triângulo base, qual o caminho percorrido pela luz? Faça um esboço indicando o caminho percorrido pela luz.

3. Quantos feixes são visualizados na etapa 6?

4. Considerando o princípio da mínima ação da luz, o que se pode concluir sobre o triângulo órtico?

Considerações para o professor

1. São objetivos particulares dessa aula:
   (a) reconhecer o triângulo órtico;
   (b) aplicar as propriedades reflexivas da luz;
   (c) identificar que esse interferômetro permite que a luz entre em *looping*;
   (d) concluir o caminho mínimo percorrido pela luz coincide com o triângulo órtico;
   (e) identificar as franjas de interferência produzidas pelo interferômetro.
2. Como sugestão o professor poderá:
   (a) direcionar os alunos a responder alguns questionamentos relativos às interferências encontradas;
   (b) acrecentar uma lente de aumento no percurso da luz a fim de melhor visualizar as franjas de interferências.

Parte 3 (Por que funciona?)

No interferômetro triangular a parte do feixe refletida é sobreposta pela parte do fixe transmitida que percorre o caminho óptico coincindente com o triângulo órtico, produzindo o padrão de interferência observado.

Sendo assim, responder à pergunta consiste em solucionar o problema de Fagnano 1.5, para tanto faz-se necessário retomar os resultados obtidos na aula anterior, relembrando o princípio da mínima ação, o conceito do triângulo órtico e a solução do problema de Heron, além de demonstrar as propriedades do triângulo órtico.

Atividades Propostas

1. Mostre que:
   (a) Os lados do triângulo acutângulo $\triangle ABC$ são bissetrizes exteriores do seu triângulo órtico $\triangle PQR$.
   (b) As alturas de um triângulo acutângulo são as bissetrizes do seu triângulo órtico.
   (c) O ortocentro de um triângulo é incentro do seu triângulo órtico.
   (d) Os vértices do triângulo e seu ortocentro gozam da propriedade seguinte: qualquer um deles é ortocentro do triângulo formado pelos outros três.
2. Resolvendo o problema de Fagnano
   (a) construa um triângulo acutângulo $\triangle ABC$ (triângulo base), seu respectivo triângulo órtico $\triangle PQR$ e um outro triângulo $\triangle XYZ$, inscrito ao triângulo base.
   (b) faça a reflexão de todos os elementos do item 2a sobre o lado BC.

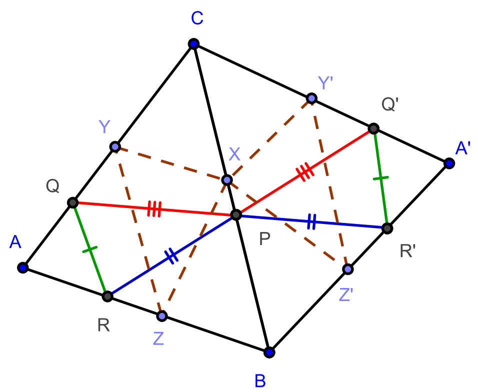

Figura 2.4 Um exemplo de reflexão do item 2.(b)

   (c) considerando a figura 2.4 mostre que Q, P e R' estão alinhados.
   (d) faça mais duas reflexões como em 2.(b) e resolva o problema de Fagnano.

(e) relacione o princípio da mínima ação da luz com a minimalidade de perímetro do triângulo órtico.

Considerações para o professor

1. São objetivos particulares dessa aula:

   (a) reconhecer e aplicar as propriedades do triângulo órtico;

   (b) resolver o problema de Fagnano;

   (c) relacionar o princípio da mínima ação da luz com a minimalidade de perímetro do triângulo órtico.

   (d) intuir que o caminho mínimo percorrido pela luz coincide com o triângulo órtico;

2. Como sugestão o professor poderá:

   (a) propor uma solução para o Problema de Fermat;

   (b) investigar a existência de um triângulo de perímetro mínimo inscritível a um triângulo não acutângulo.

CAPÍTULO 3

Conclusão

"*Nada se cria, nada se perde, tudo se transforma.*"
Lavoisier

A proposta mostra uma forma de trabalhar a interdisciplinaridade entre Física e Matemática no ensino básico.

Tais características tornaram-se possíveis por conta das propriedades do triângulo órtico, listadas na apresentação deste TCC.

3.1 Conclusões e trabalhos futuros

A sequência didática apresentada, em particular a construção do interferômetro triangular, nos permite dar continuidade ao trabalho.

Na vertente didática pode-se:

1. explorar as propriedades do triângulo órtico que não foram abordadas na sequência didática proposta, gerando um aprofundamento nos estudos relativos a triângulos órticos;
2. investigar a existência de um triângulo mínimo, inscritível a um triângulo não acutângulo;
3. abordar o Problema de Fermat e, novamente, utilizar o princípio da mínima ação para visualizar uma solução;
4. visualizar o padrão de interferência de um interferômetro.

Como contribuição, além de uma sequência didática interdisciplinar, mostramos nesse trabalho uma caracterização do triângulo acutângulo.

Caracterização

Um triângulo é acutângulo se, e somente se, é possível inscrever nele um triângulo de perímetro mínimo.

Referências Bibliográficas

[1] Ricardo Barthem. *Temas atuais de Física: A luz*. Editora Livraria da Física, Sociedade Brasileira da Física, São Paulo, 1 edition, 2005. 114 p.

[2] Francisco Javier Garcia Capitán. El triángulo órtico en el court. *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericano*, 37:18, febrerero 2009.

[3] R. Courant, H. Robbins, and I. Stewart. *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford Paperbacks.

[4] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer. *Geometry Revisited*. Number v. 19, 85-89 in New Mathematical Library. Mathematical Assn of Amer, 1967.

[5] Roberto Anadrade Martins; Ana Paula Bispo da Silva. Maupertuis, d´arcy, d´alembert e o princípio de ação mínima na óptica: uma análise crítica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(3):455–463, 2007.

[6] C.C. de Sá e Jorge Rocha. *Treze Viagens Pelo Mundo da Matemática*. Universidade do Porto.

[7] H. Dörrie. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publ., 1965.

[8] Eugene Hecht. *Óptica 2*. Ed Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002. 720 p.

[9] H.K. Milleson, R. Woods, and State University of Iowa. Dept. of Mathematics. *Properties of the Orthic Triangle*. 1937.

[10] André Koch Torres (Trad.) Newton, Isaac; Assis. *Óptica*. EDUSP: Editora da Universidade de São Paulo, 1996. 293 p.

[11] N. A. Court Reviewed. Isogonal conjugate points for a triangle. *The Mathematical Gazette*, 36(317):167–170, Sep. 1952. Published by: The Mathematical AssociationStable URL: http://www.jstor.org/stable/3608249 .Accessed: 24/01/2013 14:31.

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).