



**Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

RODRIGO PESSANHA DA CUNHA

***O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE
ESCOLAR: EXPLORANDO A ARTE
E O BELO DA MATEMÁTICA POR
MEIO DE NARRATIVAS***

Orientador:

Humberto José Bortolossi



NITERÓI
FEVEREIRO/2019

Rodrigo Pessanha da Cunha

***O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando
A Arte e O Belo da Matemática por Meio de
Narrativas***

Niterói – RJ

Fevereiro / 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

C972 Cunha, Rodrigo Pessanha da

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando A Arte e O Belo da Matemática por Meio de Narrativas / Rodrigo Pessanha da Cunha. – Niterói: [s.n.], 2019.

65 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2017.

1. Narrativas. 2. Uso de vídeos. 3. Ensino e Aprendizagem de Matemática. I. Título.

CDD: 510.7

Rodrigo Pessanha da Cunha

***O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando
A Arte e O Belo da Matemática por Meio de
Narrativas***

Dissertação apresentada à Coordenação do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT da Universidade Federal
Fluminense para a obtenção do título de Mestre
em Matemática

Orientador:

Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Fevereiro / 2019

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título “*O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando A Arte e O Belo da Matemática por Meio de Narrativas*”, defendida por Rodrigo Pessanha da Cunha e aprovada em 14 de fevereiro de 2019, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Brígida Alexandre Sartini
Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ

Dirce Uesu Pesco
Doutora em Matemática pela PUC-Rio

Fabio Luiz Borges Simas
Doutor em Matemática pelo IMPA

*Dedico este trabalho a todos os docentes comprometidos em tornar significativas
as aprendizagens realizadas por seus estudantes.*

Agradecimentos

Ao meu orientador Humberto José Bortolossi, por sua orientação, parceria, confiança e paciência.

Aos meus colegas de projeto. Suas ideias, dedicação e entrega foram essenciais para o sucesso da nossa proposta.

Aos meus colegas de turma. A parceria deles foi determinante para a conclusão do curso.

À Universidade Aberta do Brasil e à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior, por formarem a rede de instituições de ensino superior que oferecem o PROFMAT em âmbito nacional.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela coordenação do programa de mestrado profissional.

Ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada pelo apoio institucional à Sociedade Brasileira de Matemática.

À Universidade Federal Fluminense por ser instituição associada e ter disponibilizado seu corpo docente e sua estrutura física e logística para realização da pós-graduação.

A minha esposa e aos meus familiares, amigos e colegas de trabalho na educação básica, que de alguma forma me ajudaram e me incentivaram ao longo do curso.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades
para a sua produção ou sua construção.
(Paulo Freire)

Resumo

Nesta última década, ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes e curtas) relacionados com Matemática e Estatística. Com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Esta dissertação contribui, então, para esse projeto oferecendo dois roteiros detalhados para uso em sala de aula de vídeos relacionados com a temática de Arte e Matemática: “Belas Equações” e “Entre As Dobras”. Cada roteiro inclui, entre várias informações, indicações de objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo e, também, uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição de cada vídeo. Mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma. Nosso trabalho apresenta também alguns recortes teóricos que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática e da Estatística.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, uso de vídeos em sala de aula, narrativa, *storytelling*, beleza, arte.

Abstract

In the last decade, there has been a remarkable increase in the production of audiovisual materials (documentaries, animations, films and short films) related to Mathematics and Statistics. With the aim of potentializing the didactic scope beyond the simple exhibition, a group of professors, undergraduate, and graduate students has cataloged the available videos and elaborated support material in the format of guidelines by the Film Society of Mathematics and Statistics Project of the Fluminense Federal University. This dissertation contributes to this project by offering two detailed guidelines for classroom use of videos related to the theme of beauty and Art in Mathematics: “Beautiful Equations” and “Between The Folds”. Each guideline includes, among various information, indications of learning objectives that, in our opinion, can be achieved through the video and, also, suggestions of questions that can be worked out immediately after each video is exhibited. More than a definitive text, it is expected that the guideline serves as a starting point for the teacher to make adaptations and modifications according to the needs and characteristics of his/her class. Our work also presents some theoretical highlights that seek to provide different perspectives on the role of narrative (storytelling) in human society. The goal is to try to frame the reasons why a video (a powerful form of narrative that unites image and sound) constitutes a didactic instrument for the teaching and learning of Mathematics and Statistics.

Keywords: teaching and learning of Mathematics and Statistics, use of videos in the classroom, narrative, storytelling, beauty, art.

Sumário

1	Introdução	p. 9
1.1	Nossa proposta	p. 9
1.2	Vídeos em sala de aula	p. 10
1.3	Concepção e divisão deste trabalho	p. 12
2	Narrativas: Um Panorama	p. 14
2.1	Narrativas e A História da Humanidade: Harari	p. 14
2.2	Narrativas e A Neurociência: Zak	p. 15
2.3	Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado	p. 17
2.4	Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur	p. 18
2.5	Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl	p. 21
2.6	Narrativas e Propaganda	p. 23
3	Belas Equações	p. 24
4	Entre As Dobras	p. 35
5	Considerações finais	p. 56
	Referências Bibliográficas	p. 61

1 Introdução

1.1 Nossa proposta

Nesta última década ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes, curtas) relacionados com Matemática e Estatística: vídeos da TV Escola do Ministério da Educação; documentários da BBC (British Broadcasting Corporation) e PBS (Public Broadcasting Service); episódios da série “Isto é Matemática” apresentada por Rogério Martins; o canal “Numberphile” no YouTube com suporte do MSRI (Mathematical Sciences Research Institute); vídeos educacionais TED-Ed; curtas das séries “Dimensões” e “CHAOS” idealizadas e produzidas por Étienne Ghys e colaboradores; alguns vídeos de “Os Simpsons”; apenas para mencionar alguns (Figura 1.1).

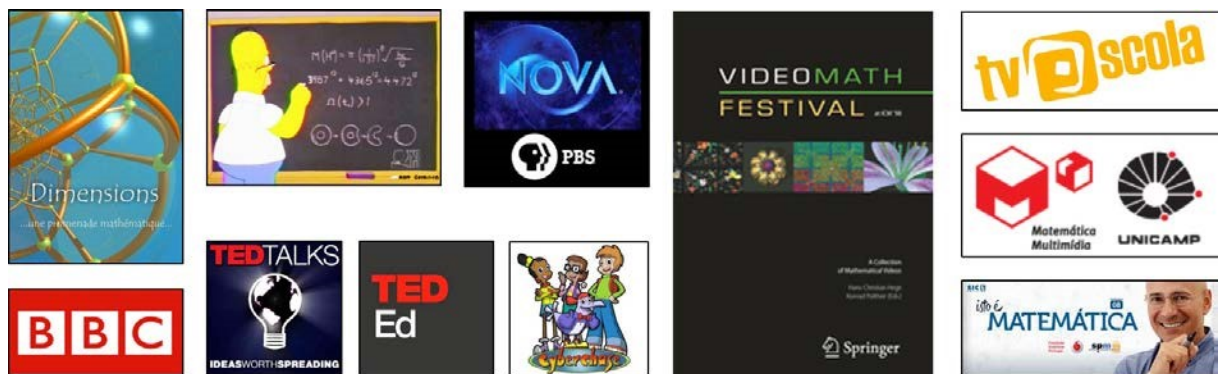


Figura 1.1: Algumas iniciativas na produção de materiais audiovisuais relacionados com Matemática e Estatística.

Nesse contexto, com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Cada roteiro é dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica:** faixa de classificação etária; idioma do áudio e das legendas; título original; gênero; duração; produtora e ano de produção; tópicos matemáticos abordados;

nível escolar sugerido; interdisciplinaridade; marcadores; competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias.

- **Imagens selecionadas:** seis imagens que permitem ao professor, visualmente, ter uma ideia do estilo do vídeo e, também, de seu conteúdo.
- **Sinopse:** uma breve descrição do conteúdo do vídeo sem *spoilers* (isto é, sem informações que poderiam estragar a apreciação do vídeo).
- **Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado:** um parágrafo indicando alguns objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo.
- **Sensibilização:** um texto e duas imagens que podem ser usadas para confeccionar um cartaz de divulgação do vídeo na escola.
- **Sugestões de questões gerais:** uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestões de questões específicas:** uma proposta de questões que para serem respondidas, se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos dos trechos são indicados no roteiro).
- **Observações para o professor:** orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais suplementares relacionados com o vídeo.
- **Outras informações:** bibliografia, agradecimentos, créditos.

Cabe ressaltar que, mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma.

1.2 Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já na época dos antigos videocassetes a questão era considerada^[a]. Moran (1995), por exemplo, já apontava para os usos inadequados, observações estas que continuam ainda válidas nos dias de hoje com vídeos *on-line*, em DVD ou *blu-ray* e em formato *streaming*:

- **vídeo tapa-buraco:** colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência do professor;
- **vídeo enrolação:** exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;
- **vídeo deslumbramento:** o professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma

^[a]Ainda que, nesta época, existisse relativamente pouco material disponível para a área de Matemática.

empolgar-se e passar vídeo em todas as aulas, esquecendo outras dinâmicas mais pertinentes;

- **vídeo perfeição:** existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem falhas de informação ou defeitos estéticos; não obstante, os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ainda ser usados para, junto com os alunos, descobrir e analisar os erros existentes;
- **só vídeo:** não é didaticamente satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto da aula, sem reproduzir trechos com momentos mais importantes.

Outra referência clássica da época dos videocassetes é Ferrés (1996). Neste livro, o autor:

- **propõe uma sistematização para o uso didático de vídeos:** videolição, videoapoio, videoprocesso, programa motivador, programa monoconceitual, vídeo interativo;
- **estabelece critérios para a utilização didática do vídeo:** mudança de estruturas pedagógicas, o papel do professor, a formação do professor frente a este tipo de mídia, a relação didática do vídeo com outras mídias, etc.;
- **categoriza as diversas funções do vídeo no ensino:** função formativa/videodocumento, função motivadora/videoanimação, função expressiva/criatividade e videoarte, função avaliadora/videoespelho, função investigativa, função lúdica/o vídeo como brinquedo, função metalinguística, combinação e interação das funções previamente citadas;
- **dá sugestões práticas e técnicas para a exibição do vídeo:** preparação antecipada do local, disposição dos alunos de acordo com o tamanho da tela do televisor, problemas técnicos frequentes;
- **sugere abordagens pedagógicas após a exibição do vídeo:** comunicação espontânea dos alunos, reflexão crítica, pesquisa final e recapitulação, nuvem de palavras, entrevista com um especialista, gravação de pesquisa de opinião pública, manipulação de objetos, palavras-chave, resumo objetivo, recontar a história em grupo, desenho livre, desenho em quadrinhos, escrever uma carta, comunicação em duplas, interpelação em duplas, expressão corporal, cartazes e trabalhos em grupo, fotografia do ambiente, elaboração de um dossiê, tribunal e julgamento, criação de um mural, realização de uma colagem, Phillips 66, primeira exibição muda (sem som), interrupção da exibição, exibição invertida;
- **sugere várias pautas para avaliação do vídeo sob o ponto de vista didático:** tema, objetivos, formulação didática, estrutura, roteiro didático, formulação audiovisual, imagem como valor técnico, faixa sonora como valor técnico, interação dos elementos.

Desde então, vários trabalhos sobre vídeos no contexto escolar têm sido produzidos. Para o leitor interessado, indicamos: Polster e Ross (2012), Sklar e Sklar (2012), Machado e Mendes (2013), Napolitano (2013, 2015), Muzás (2015), Pellicer (2015), Reiser (2015), Santos (2015),

Bulman (2017). Indicamos também quatro páginas *WEB* especializadas na Matemática dos filmes: *Mathematics in Movies* (<<http://bit.ly/2OuJOUU>>) mantida por Oliver Knill, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard (nos EUA); *Matemáticas en El Cine y en Las Series de T.V.* (<<http://bit.ly/2yPI8Aa>>), mantida por José María Sorando Muzás (na Espanha); *MMDB–The Mathematical Movie Database* (<<https://bit.ly/2HurRY8>>) mantida por Burkard Polster (Monash University) e Marty Ross na Austrália; e *Mathematical Fiction* (<<https://bit.ly/1kcpcAR>>) mantida por Alex Kasman (College of Charleston) nos Estados Unidos.

Entre as iniciativas governamentais do uso de vídeos em sala de aula, destacamos o projeto “O Cinema Vai À Escola – O Uso da Linguagem Cinematográfica na Educação” da Fundação para o Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. De acordo com o *site* oficial (<<http://bit.ly/2OnYXqT>>), o projeto procura subsidiar a rede pública de ensino com materiais, equipamentos e acervos didáticos, fornecendo às escolas de Ensino Médio um conjunto de filmes de diferentes categorias e gêneros, em DVD, acompanhado de materiais de apoio à prática pedagógica. Os vídeos são principalmente produções cinematográficas do circuito comercial e os materiais de apoio incluem roteiros no formato PDF (<<http://bit.ly/2F3hPMu>>) e, também, vídeos tratando do universo dos vídeos (<<http://bit.ly/2OorDA8>>). Não obstante, observamos que, neste projeto, temas relacionados com a Matemática estão ausentes.

Por fim, registramos que o Whittier College nos Estados Unidos oferece uma disciplina de graduação, NTD 231 – *Numb3rs in Lett3rs & Films*, que explora a conexão entre a Matemática e as Artes criativas escritas/teatrais. Segundo o catálogo da instituição (<<https://goo.gl/j5wtX4>>), nessa disciplina, os alunos leem ficção e assistem a filmes nos quais os conceitos matemáticos fornecem a estrutura ou desempenham um papel central na peça criativa. Os alunos também estudam os tópicos matemáticos relacionados a esses trabalhos para entender melhor a intenção do autor. Detalhes da iniciativa podem ser encontrados no artigo Chabán & Kozek (2015).

1.3 Concepção e divisão deste trabalho

Este texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos algumas perspectivas relacionadas com o conceito de narrativa (*storytelling*) na intenção de tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os roteiros de dois vídeos (nos moldes descritos na seção anterior) são apresentados nos Capítulos 3

e 4. Experiências de uso dos vídeos e dos roteiros junto com algumas considerações finais são o tema do Capítulo 5.

Os Capítulos 1, 2 e parte do 5 foram redigidos de forma conjunta a partir de seminários realizados pelos mestrados que trabalharam com a mesma metodologia acerca do uso didático de vídeos: André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha. Os Capítulos 3, 4 e parte do 5 têm redação individual: mestrados diferentes trabalharam com assuntos diferentes (Probabilidade e Estatística, Números e Medidas, Linguagem e Lógica Matemática, Fractais e Caos, etc.).

Por fim, indicamos que as respostas das questões propostas nos roteiros podem ser obtidas mediante solicitação para o e-mail <amec7a@gmail.com>.

2 *Narrativas: Um Panorama*

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Como aponta Gottschall (2013), *storytelling* é como gravidade: ela é esta força poderosa e abrangente que permeia nossas vidas e que acabamos por não perceber por estarmos tão habituados com ela. Vídeos (tema de nosso trabalho), quadrinhos, contos, piadas, parábolas (incluindo as religiosas), novelas, músicas, peças de teatro e videogames são, todos, formas de narrativa que nos cercam e nos ensinam.

2.1 **Narrativas e A História da Humanidade: Harari**

Harari em seu livro “Sapiens: Uma Breve História da Humanidade” coloca o papel importante que a narrativa teve na evolução histórica dos seres humanos. De acordo com o autor, foi o surgimento da ficção que permitiu a cooperação humana em grande escala: um grande número de estranhos só pode cooperar de maneira eficaz se acreditar nos mesmos mitos, ou seja, histórias que existem na imaginação coletiva das pessoas. Formigas e abelhas também podem trabalhar juntas em grandes números, mas elas o fazem de uma maneira um tanto rígida, e apenas com parentes próximos. As religiões, as nações, o dinheiro, as leis, as culturas e as marcas são apenas alguns exemplos de realidades imaginadas que foram construídas e fortalecidas baseadas em mitos partilhados. Uma realidade imaginada não é uma mentira. Pelo contrário, é algo em que muitos acreditam e por essa razão, exerce influência sobre o mundo, molda comportamentos e preferências. A imensa diversidade de realidades imaginadas que os *sapiens* inventaram e a diversidade resultante de padrões de comportamento são os principais componentes do que chamamos “culturas”. A partir da Revolução Cognitiva^[a], as narrativas históricas

^[a]Surgimento de novas formas de pensar e se comunicar, ocorrida entre 70 e 30 mil anos atrás, que pode ter sido causada por mutações genéticas acidentais que mudaram as conexões internas dos *sapiens*, possibilitando que pensassem de uma maneira sem precedentes e se comunicassem usando um tipo de linguagem totalmente novo.

substituem as narrativas biológicas como nosso principal meio de explicar o desenvolvimento do *Homo sapiens*.

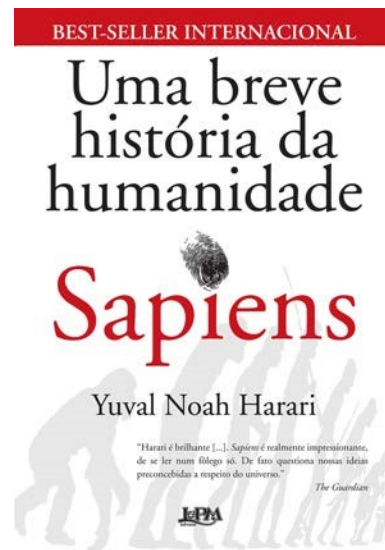


Figura 2.1: Capa do livro de Harari (2015).

2.2 Narrativas e A Neurociência: Zak

Uma outra explicação para a afinidade humana com *storytelling* se dá no campo da neurociência com a substância oxitocina^[b] (um tipo de hormônio). Um dos principais pesquisadores desta área é o neurocientista americano Paul J. Zak, fundador do campo de estudo “neuroeconomia”. Zak é diretor fundador do Centro de Estudos Neuroeconomia e professor da Universidade de Claremont Graduate. Além disso, ele é professor na Loma Linda University Medical Center. Zak possui graduação em Matemática e Economia pela Universidade Estadual de San Diego, doutorado em Economia pela Universidade da Pensilvânia e pós-doutorado em neuroimagem pela Universidade de Harvard.

O estudo do Dr. Zak busca entender um pouco mais sobre os efeitos da oxitocina. O que se sabia deste hormônio é que ele induzia as contrações no parto e a produção de leite na amamentação, além de ser liberado por ambos os sexos durante o ato sexual. Mas as perguntas que ele se fez foram: “Por que os homens também a produziam?” e “Qual era exatamente a sua importância?”. Sua busca por respostas resultaram no livro “A Molécula da Moralidade: As Surpreendentes Descobertas sobre A Substância que Desperta O Melhor em Nós”. Ele também tem divulgado seu trabalho por meio de palestras, como o vídeo TED “Confiança, Moralidade – e Oxitocina” (<<https://goo.gl/PmzKve>>).

^[b] Alguns autores escrevem ocitocina no lugar de oxitocina.



Figura 2.2: Zak, seu livro e sua palestra TED sobre a ocitocina (2015).

O laboratório de Paul Zak foi o primeiro a descobrir que a ocitocina neuroquímica é sintetizada no cérebro humano e que essa molécula motiva a reciprocidade, isto é, mesmo sem contato visual, face a face, o hormônio da ocitocina parece sinalizar que o outro é familiar e confiável. Esse pequeno peptídeo sintetizado no hipotálamo dos cérebros dos mamíferos pode ser identificado por meio das alterações no exame de sangue que refletem as alterações na produção cerebral.

Em seu trabalho *“Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative”* de 2015, Zak fez experimentos para verificar como o tipo de narrativa de um vídeo se correlaciona com a liberação de ocitocina e como a liberação de ocitocina se correlaciona com o grau de atenção de um indivíduo. A medição do nível de ocitocina foi feita por uma aferição indireta a cada milésimo de segundo via eletrocardiograma no nervo vago (descobriu-se que esse nervo está repleto de receptores de ocitocina). O nível de atenção foi medido pela aceleração do batimento cardíaco e pelo suor proveniente de glândulas écrinas na pele. O vídeo exibido contava uma história com arco dramático envolvente: um pai que aparecia falando de seu filho Ben com câncer terminal e a sua tentativa de superar seus medos e frustrações para conseguir conectar-se ao seu filho e desfrutar de sua companhia pelos meses que ainda tinha. O experimento verificou que a produção de ocitocina e a atenção estão correlacionadas com o grau de dramaticidade. Ao longo dos cem segundos do vídeo, observou-se que o nível de atenção aumentava e diminuía, com o cérebro ficando atento à história para, em seguida, fazer uma rápida pesquisa do restante do ambiente e, então, reorientar para a história à medida que a tensão aumentava. O pico de resposta da atenção ocorreu no clímax do vídeo, quando o pai de Ben revela que seu filho está morrendo.

Paul Zak (2015) conclui: “Narrativas que nos levam a prestar atenção e também nos envolvem emocionalmente são as histórias que nos movem para a ação. Isto é o que um bom

documentário faz.” (tradução nossa). Assim, segundo o pesquisador, as narrativas convincentes causam liberação de oxitocina e, portanto, elas têm o poder de afetar nossas atitudes, crenças e comportamentos.

2.3 Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado

Em sua palestra intitulada “A Narrativa em Matemática”, proferida na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da Universidade Federal Fluminense em 2016, o educador Nilson José Machado analisa as correlações entre a Língua Materna (o Português, em nosso caso) e a Matemática, mostrando como uma faz uso da outra a todo momento e o papel das narrativas neste processo.

Machado inicia observando que informações soltas, em geral, perdem o seu valor, enquanto narrativas encadeiam informações e criam elos cognitivos que constroem os significados mais marcantes, estabelecendo assim o conhecimento. Segundo Machado, a conexão entre “conhecimento” e “narrativa” é tão profunda que ambas as palavras têm um léxico comum: *gnarus*.

A ideia de narrativa, destaca Machado, surge do diálogo entre as ideias de cadeia e de rede. Na rede, tudo está ligado, articulado. O encadeamento é a ideia cartesiana que segue uma linha: “se isso, então aquilo”. Atualmente, continua o autor, as pessoas tendem a dizer que as ideias cartesianas são ultrapassadas e que tudo está em rede, porém temos que pensar que até mesmo para falar precisamos de um encadeamento de ideias; do contrário, não formamos sequer uma frase. Quem conta uma história, encadeia, pois toda narrativa é um encadeamento.

Machado, em seguida, estabelece que o *conhecimento explícito* é aquele que, quando perguntados a respeito, respondemos imediatamente. Este tipo de conhecimento, acrescenta o educador, representa uma parte muito pequena de todo o conhecimento que adquirimos na vida. A maior parte de tudo o que sabemos não conseguimos expressar claramente e este é o *conhecimento tácito*. A narrativa combina os dois tipos de conhecimento: o tácito (que ele chama de “recheio da história”) e o explícito (que é a “moral da história”). Machado prossegue: a informação sem narrativa se perde, é como se fossem cenas isoladas. Informações isoladas de nada valem. O que não vira uma história para contar, morre. É preciso “linkar” as coisas, criar um roteiro, para que elas (as informações) permaneçam na memória.

Machado destaca, então, a importância das metáforas na construção do significado: quando encontramos algo que explica tão bem o que queremos, as coisas tornam-se claras de modo que não precisamos defini-las. De acordo com o pesquisador, há vários tipos de narrativas: binárias (que são as mais simples e polarizadas entre o “bem” e o “mal”), quaternárias (que são as que

têm dois eixos) e as multifárias (mais complexas, sem definição explícita de bem e mal, e que são mais parecidas com a realidade).

Machado apresenta, na sequência, vários indícios de um “paralelismo” entre a Matemática e os Contos de Fadas em Língua Materna.

- Contos de Fadas são, em geral, binários, isto é, polarizados (o “bem” contra o “mal”); em Matemática, há também uma polarização: ou uma sentença matemática fechada é “verdadeira” ou ela é “falsa”.
- A palavra “contar” tem, por um lado, na Matemática, a noção de “enumerar” e, por outro, em Português, ela traz a ideia de “narrar” (entre outros significados).
- Os Contos de Fadas começam com “Era uma vez ...” e terminam com “E foram felizes para sempre!”; em Matemática, as demonstrações começam com “Seja ...” e terminam com “Como queríamos demonstrar!”.
- A Matemática, assim como os Contos de Fadas, fazem forte uso de abstrações. Por exemplo, não existem unicórnios nem círculos no mundo real (ambos são objetos abstratos). Contudo, frequentemente, a abstração na Matemática é vista como algo muito complicado, enquanto que, nos Contos de Fadas, ela é aceita de forma mais natural.
- Os significados, tanto na Matemática, como nos Contos de Fadas, devem passar por narrativas coerentes: é preciso contar bem a história, mesmo sendo ela uma demonstração, com começo, meio e fim.

Existem ainda outros aspectos comuns, complementa Machado: o tempo que tem que ser presente na história, mas que serve a qualquer tempo ou em qualquer época; a micromotivação que gera a macromotivação; a hermenêutica que não exclui a interpretação aberta; o genérico que trata do particular.

Por fim, Machado cita o filósofo britânico Bertrand Russell, ao colocar que o papel principal do professor é evitar duas coisas na mente dos alunos: a primeira são as *narrativas unárias*, aquelas nas quais se acredita que haja uma única verdade e que dão origem a dogmatismos e fanatismos; a segunda são as *narrativas binárias*, que levam aos extremismos ao não permitirem opções alternativas intermediárias.

2.4 Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur

O livro “Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative”, editado pelos professores Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, e publicado pela Princeton University Press,

em 2012, tem sua origem em uma conferência Mykonos, na Grécia, em 2005 com a criação do grupo THALES + FRIENDS. O grupo foi criado com o objetivo de transpor “o abismo entre a Matemática e as outras formas de atividades culturais”. A segunda conferência, que ocorreu em Delphis, em 2007, e contou com matemáticos, historiadores, filósofos, professores de Literatura e um romancista especialista em Matemática, focou em estudos sobre Matemática e Narrativa. Os trabalhos desta conferência tornaram-se a base para o referido livro, cujo título remete às palavras “Não perturbe meus círculos!” atribuída a Arquimedes antes de ser assassinado por um soldado romano em Siracusa.

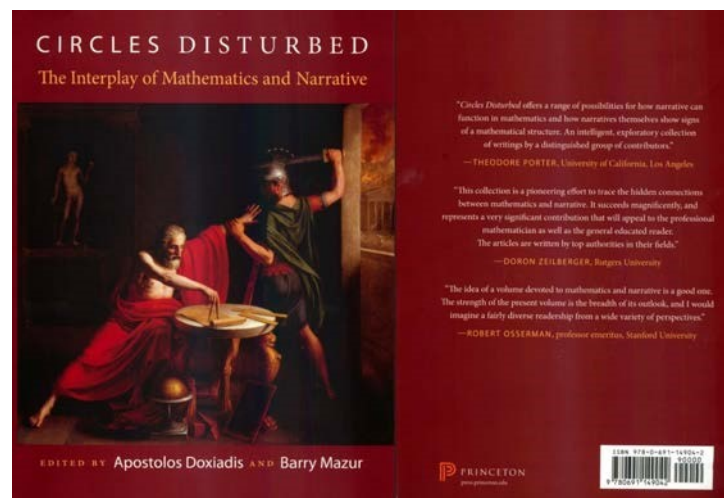


Figura 2.3: Doxiadis, Mazur e a estrutura narrativa da Matemática.

O Capítulo 10 do livro, “A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric” (“Um Bonde Chamado (entre Outras Coisas) Prova: Da Narrativa à Geometria, via Poesia e Retórica”), escrito por Apostolos Doxiadis, é o capítulo mais longo da obra, ocupando mais de cem páginas. Nele, o autor defende que a origem grega da maneira de se fazer e escrever provas que usamos hoje está relacionada com a narrativa, a narrativa poética e, sobretudo, com a retórica forense. Doxiadis sintetiza as várias conexões em um diagrama, conforme a figura a seguir. No diagrama, a flecha preta sólida denota influência direta e a pontilhada, indireta. A flecha cinza indica influências de domínio específico nos dois domínios em que a prova teve início.

Os termos “narrativa” e “história” são frequentemente usados intercambiavelmente, mas precisamos distingui-los, usando narrativa para denotar algo mais geral, ou seja, todas as histórias são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias. O termo narrativa denota um modo de comunicação cujo objetivo é representar uma ação bem como representar uma mediação simbólica entre o mundo das ações e o mundo das representações mentais. De acordo com Zacks, Tversky e Iyer (2001), “narrativas são discursos que descrevem uma série de ações”, um

ponto de vista compartilhado por Doxiadis.

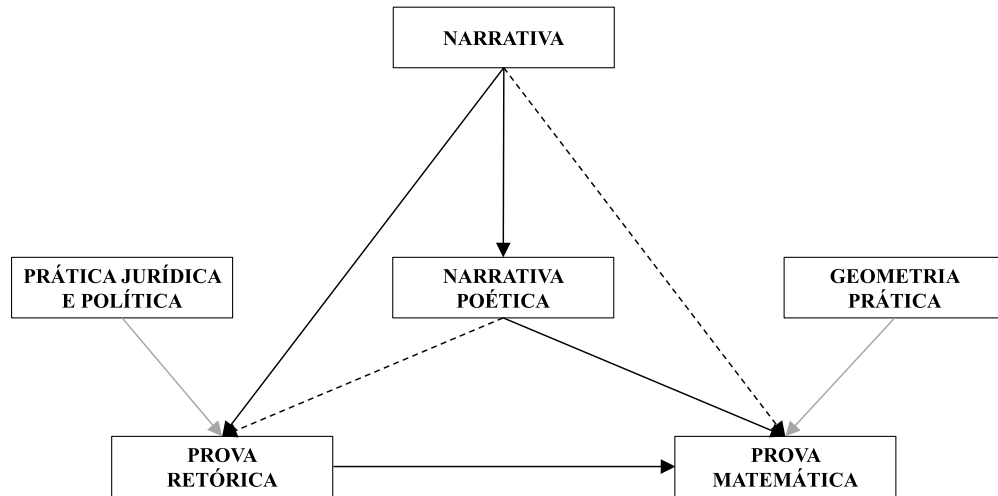


Figura 2.4: relações de práticas culturais que deram origem à prova matemática

Por narrativa poética, o autor entende como aquela narrativa em prosa e verso desenvolvida na Grécia Antiga nos séculos VI e VII a.C. da qual fazem parte as epopeias de Homero e Hesíodo. Tais formas de narrativa dominaram a cultura grega e suas características serviram para a formação das formas narrativas subsequentes.

De acordo com Doxiadis, o estilo arcaico de narrativa, especialmente aquele encontrado nas epopeias, trabalha com uma combinação de mecanismos cognitivos inatos e os hábitos de uma prática de desenvolvimento cultural, unindo sentenças narrativas curtas com o objetivo de criar uma representação viva na mente do leitor. Na Idade Clássica, surge um novo estilo narrativo, a tragédia, que dá um novo formato à representação da ação por meio do uso da mimese (figura em que o orador imita outrem, na voz, estilo ou gestos, em discurso direto). Doxiadis coloca que “o desenvolvimento conjunto da tragédia e da retórica é parte da história maior das mudanças trazidas na vida das cidades-estados gregas pela transformação política, da tirania à oligarquia, para práticas mais participativas, a mais avançada das quais é a democracia”. Central para essa transformação, continua Doxiadis, são formas de discurso culturalmente desenvolvidas cujo objetivo é a persuasão. A retórica, a arte da persuasão, também usa uma forma de prova, diferente, mas não em sua totalidade, da prova matemática. Existiram três gêneros de retórica na Antiguidade Clássica: cerimonial, política e judicial. A retórica cerimonial é usada em ocasiões festivas ou em exibições oratórias, a retórica política usada em assembleias e a retórica judicial usada pelos litigantes em uma corte judicial.

Por fim, a Geometria Prática é aquela evidenciada na Grécia Antiga, na qual as ferramentas básicas se resumiam à régua e ao compasso. Por volta do ano 900 a.C. podemos perceber a evidência de uma ferramenta semelhante a um compasso. Seria um pincel articulado que

foi utilizado para desenhar em ânforas (vasos antigos). Vale ressaltar que muitas vezes uma ferramenta é criada para um determinado propósito, mas seus usuários a tornam mais sofisticada do que para aquilo que fora criada. Esta obra artesanal acabou sendo o mesmo desenho utilizado em muitas provas geométricas realizadas séculos depois.

2.5 Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl

Rina Zazkis e Peter Liljedahl da Simon Fraser University, no Canadá, escreveram o livro “Teaching Mathematics as Storytelling” que trata especificamente do uso de narrativas (*storytelling*) no ensino da Matemática. O livro apresenta storytelling em Matemática como um meio para se criar uma sala de aula em que a Matemática seja apreciada, entendida e divertida. Os autores mostram como envolver os alunos nas atividades matemáticas por meio da narrativas. O texto apresenta vários tipos de narrativas que podem ser usadas em sala de aula: (1) narrativas que proporcionam uma trama ou plano de fundo para os problemas matemáticos; (2) narrativas que se entrelaçam profundamente com o conteúdo e que explicam conceitos e ideias; (3) narrativas que ajudam a resolver um problema ou a alcançar um melhor entendimento de uma solução; (4) narrativas na forma de problemas que propõem questões. Além disso, os autores apresentam um enquadramento teórico para a criação de novas narrativas, ideias para enriquecer e usar narrativas já existentes, bem como várias técnicas que tornam uma narrativa mais interativa e invocativa para o leitor. O livro é, assim, de interesse para quem ensina Matemática ou para quem forma professores de Matemática.

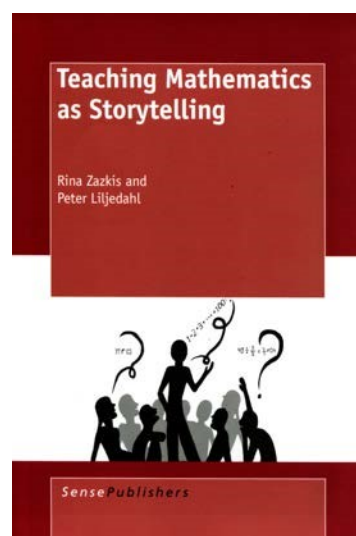


Figura 2.5: Zazkis, Liljedahl e o uso de narrativas no Ensino da Matemática.

Ao longo dos seus 12 capítulos, o livro intercala justificativas e ponderações sobre o uso de

storytelling no contexto escolar. Destacamos os seguintes trechos:

- O valor de uma história para o ensino está precisamente no poder de engajar as emoções dos estudantes e, de forma conjunta, suas imaginações no material curricular.
- O grande poder das histórias está em sua missão dupla: elas comunicam informação de uma forma memorável e delineiam os sentimentos dos ouvintes sobre a informação que está sendo comunicada.
- Contar uma história é estabelecer um significado e estabelecer significado é o fio condutor no ensino da Matemática, um assunto que é frequentemente percebido como uma mera manipulação de símbolos cujo significado está muitas vezes longe de estar claro para os estudantes.
- Usar histórias em sala de aula pode servir para muitos e diferentes propósitos. Histórias podem despertar interesse, ajudar na memorização e reduzir a ansiedade. Elas podem criar uma atmosfera confortável e de suporte na sala de aula, bem como estabelecer um relacionamento entre o professor e os estudantes.
- As escolas de hoje estão mais acostumadas com os *word problems* (problemas com palavras), primos distantes das boas histórias. Contudo, uma análise mais cuidadosa dos *word problems* revela que esses de fato não são histórias engajantes, pois foram desprovidos dos detalhes e emoções que ajudam a orientar os sentimentos dos ouvintes.

Os autores citam ainda os 10 benefícios enumerados por Haven (2000) sobre o uso de narrativas como ferramenta educacional:

- *Storytelling* é um elemento efetivo e poderoso no esforço de melhorar e desenvolver todas as quatro primeiras habilidades da linguagem (ler, escrever, ouvir e falar).
- Informações (tanto conceitos como fatos) são melhor lembradas e por mais tempo quando apresentadas em forma de narrativa.
- *Storytelling* é uma ferramenta de ensino multidisciplinar efetiva e poderosa que perpassa todo o currículo.
- *Storytelling* motiva positivamente os estudantes para o aprendizado.
- Narrativas focam a atenção e o aprendizado dos alunos e os motiva a procurarem estudar mais.
- *Storytelling* constrói efetivamente a autoconfiança e a autoestima do estudante.
- *Storytelling* envolve e desenvolve as habilidades ligadas à imaginação e à criatividade melhor do que qualquer outra atividade escolar.
- *Storytelling* envolve e entretém.

- *Storytelling* cria empatia e senso de conectividade.
- *Storytelling* melhora as habilidades de análise e resolução de problemas.
- *Storytelling* cria conexões valiosas com a comunidade e com a herança familiar.

2.6 Narrativas e Propaganda

Como coloca McSill (2013), desde tempos imemoriais, a estória^[c] é utilizada como instrumento para ensinar, informar, entreter, reforçar crenças, dominar e, como se chama hoje, “fidelizar o cliente”. Estudiosos da área de *marketing* colocam a narrativa como uma das pedras angulares da boa propaganda: se propaganda é a alma do negócio, então narrativa é a alma da propaganda.

Embora seja um livro destinado ao público de propaganda, Xavier (2015) discute as implicações educacionais de *storytelling*:

Pergunte a um professor qual é seu maior problema no exercício do magistério. A resposta mais ouvida certamente será o binômio desinteresse/desatenção. [...] Tudo começa com atenção, sem a qual o restante se inviabiliza. Se logo após a atenção inserirmos algum grau de afetividade (ou, se preferirmos, de emoção), estará aberto o caminho para uma identidade mais profunda entre comunicador e público. [...] A maneira de cumprir esse difícil percurso é contar uma boa história, que prenda a atenção, envolva com emoção, crie laços profundos com o público, una todas as pontas em um relato compreensível, seja apreciada e lembrada.

(Xavier, 2015)

Neste contexto, Xavier (2015) coloca o papel fundamental da narrativa (*storytelling*) em capturar e conduzir os capitais emocional, cultural e de atenção:


As pessoas estão à procura de conexões novas e emocionais. Elas procuram algo para amar [...] Só existe uma forma de prosperar como profissional de marketing na Economia da Atenção: parar de correr atrás de modismos e dedicar-se a estabelecer conexões consistentes e emocionais com os consumidores.

(Xavier, 2015)

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre a questão da narrativa no âmbito da propaganda, recomendamos, portanto, a leitura dos livros Xavier (2015) e McSill (2013).

^[c]Aqui, estamos usando “estória” seguindo o uso do próprio McSill (2013), mas o significado é o mesmo de “história”. De fato, atualmente, os dois termos têm sido usado como sinônimos.

3 *Belas Equações*

Faixa de classificação etária: Livre  (IMDb).

Áudio: Inglês.

Legendas: Português.

Título original: *Beautiful Equations*.

Gênero: Documentário.

Duração: 60 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: BBC-Four (2010).

Tópicos matemáticos abordados: Equações; Funções; Fórmulas; Unidades de Medida; Ordens de Grandeza; Notação Científica; Proporcionalidade.

Nível escolar sugerido: Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Física; Artes; Filosofia e História.

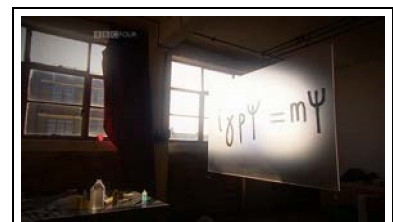
Marcadores: BBC; Equações; Documentário.

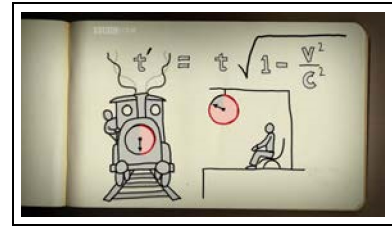
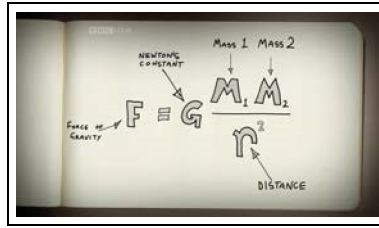
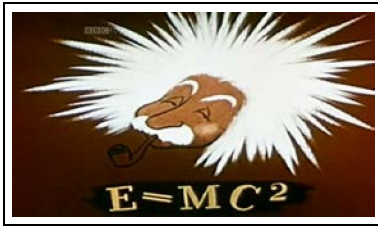
Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H10, H15, H17, H19.

Link para o arquivo da legenda: <<https://goo.gl/bnv1fa>>.

Página web oficial: <<http://www.bbc.co.uk/programmes/b00wltbm>>

Imagens selecionadas





Sinopse

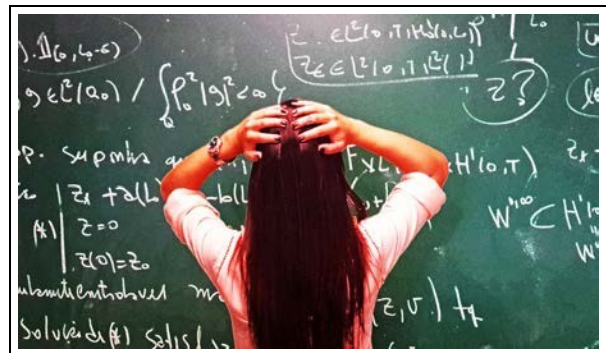
Neste documentário da BBC, acompanhado por nomes ilustres como Stephen Hawking, Albert Einstein, Isaac Newton, Esprit Jouffret, Pablo Picasso e Paul Dirac, o artista e crítico de arte Matthew Collings embarca em uma jornada buscando descobrir a importância das equações matemáticas no mundo científico e, em que sentido, elas podem ser consideradas belas.

Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

Muitos alunos acham que equações são chatas e desprovidas de vida. Neste contexto, o vídeo pode ser usado para mostrar que, de fato, uma equação pode ter, além do significado matemático e científico, aspectos culturais e de beleza.

Sensibilização (para montar um cartaz)

Para muitas pessoas, equações são apenas rabiscos chatos desprovidos de vida... Mas será só isso mesmo?



Equações podem ser úteis? Elas podem possuir algum significado cultural? Elas podem ser belas?



No documentário Belas Equações da BBC que iremos apresentar, o artista e crítico de arte

Matthew Collings tenta responder a estas perguntas com a ajuda de nomes ilustres como Hawking, Einstein, Newton, Picasso e Dirac.

Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo novo com o vídeo? O quê?
3. Ao longo do vídeo, o apresentador Matthew Collings vai colecionando motivos pelos quais uma equação pode ser bela. Quais seriam estes motivos? Você concorda com eles?
4. As belas equações apresentadas no vídeo estão fortemente ligadas à Física. Você incluiria outras belas equações da Física? Da Matemática? Da Química? Da Biologia? Quais? Por quais motivos?
5. Sempre que o apresentador Matthew Collings se depara com uma nova equação, ele tenta descobrir aplicações desta equação. Liste as aplicações que ele encontrou.
6. Na sua opinião, o apresentador Matthew Collings conseguiu entender cada uma das cinco equações apresentadas? E você?
7. Sendo um artista, ao longo do documentário, o apresentador Matthew Collings pinta em um painel translúcido cada equação que acabou de conhecer. Quais foram as cores usadas para

cada uma das cinco equações? Você acredita que essas cores possam ter alguma relação com as equações? Qual?

8. Segundo o vídeo, por que Newton é denominado o “pai” da Ciência Moderna?
9. No final do documentário, Matthew Collings apresenta em uma exposição seus painéis com motivação matemática. Faça uma lista dos atributos matemáticos que os cientistas convidados deram para estes painéis.
10. Do que você mais gostou no documentário?
11. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. Qual é a resposta dada pelo apresentador Matthew Collings à pergunta de Pedro Ferreira sobre o que é uma equação? (05:02-05:20) Você concorda com a resposta dada? Você daria uma resposta diferente?
2. No vídeo (08:05-08:42), Pedro Ferreira calcula para Matthew Collings a quantidade de energia em Joules em meio grama de massa. Ao contrário do que fez a física Ruth Gregory (19:32-20:37), Pedro Ferreira não usa a notação científica. Você vê alguma razão para Pedro não usá-la, mas Ruth sim? Escreva a resposta dada por Pedro Ferreira usando a notação científica.
3. No vídeo (12:39-13:11), afirma-se que William Blake (pintor, poeta e tipógrafo que viveu entre 1757 e 1827) desprezava Newton. Por quê? Você acha que os motivos para tal desprezo se manifestam de alguma maneira na gravura de Newton feita por Blake e apresentada no vídeo? Faça uma pesquisa para lhe ajudar a compor uma resposta.



4. No vídeo (19:02-19:20), ao calcular a força de atração entre uma maçã e a Terra usando a Lei da Gravitação Universal de Newton, o apresentador Matthew Collings estima que a massa de uma maçã típica é de 1/4 de libra. Por que a física Ruth Gregory pediu para que esta massa

- fosse convertida em quilogramas? Uma libra equivale a quantos quilogramas?
5. Segundo o vídeo (19:41-19:45), quanto vale um septilhão? Um septilhão é o mesmo que um trilhão de trilhões?
 6. No vídeo (20:44-21:01), com base na Lei da Gravitação Universal de Newton, afirma-se que a força de atração entre dois corpos aumenta com o aumento de suas massas e diminui com o aumento da distância entre eles. Por quê?
 7. No vídeo (30:34-31:38), com base na equação da Teoria Especial da Relatividade, afirma-se que, dependendo do observador, um relógio no trem com velocidade v , marcando um tempo t' , corre mais lento que um relógio marcando um tempo t na plataforma da estação. Por quê? Por que não percebemos este comportamento? Em que condições isto seria perceptível?
 8. No vídeo (51:13-51:40), Stephen Hawking aparentemente procura evitar o adjetivo “bonita” para uma equação e prefere usar o termo “elegante”. O que é uma equação “elegante” para Stephen Hawking? Quais são as distinções que você vê entre “bonita” e “elegante”?

Observações para o professor

- O cálculo da energia em 0,5 grama feito por Pedro Ferreira (08:07-08:48) pode ser usado para discutir as notações diferentes para números decimais no Brasil e na Inglaterra (no Brasil usamos a vírgula como separador decimal enquanto que, na Inglaterra e nos EUA, o separador decimal é o ponto).
- Em um trabalho interdisciplinar com o professor de Artes, os alunos podem fazer um estudo sobre o conflito no final do século XVIII nas maneiras de se ver o mundo segundo as correntes do classicismo e do romantismo (episódio Blake versus Newton). Um ponto de partida é o livro “Breve História da Ciência Moderna” (volume 3) de Marco Braga, Andreia Guerra e José Claudio Reis (Jorge ZAHAR Editor, p. 57-59, 2005).
- Ainda em um trabalho interdisciplinar com o professor de Artes, os alunos podem fazer um estudo sobre as possíveis conexões entre Albert Einstein, a Teoria da Relatividade, Pablo Picasso e o Cubismo. Um ponto de partida é o artigo “Einstein Influenciou Também As Artes” do Globo Ciência <<http://goo.gl/1KJtOd>>.
- Enquanto que as sugestões de perguntas dadas anteriormente são mais gerais, o documentário pode ser usado para analisar as equações apresentadas com mais detalhes, principalmente com a parceria de um professor de Física: significados das variáveis, suas unidades, etc.
- Caso não apareça naturalmente nas discussões com seus alunos, acreditamos que seja importante você pontuar alguns aspectos enfatizados pelo documentário:
 - (a) Equações podem prever o futuro, isto é, elas podem prever um resultado teoricamente que é comprovado experimentalmente depois.

- (b) Equações servem como modelo para descrever a natureza.
- (c) Equações são universais (a mesma equação que descreve a força de atração entre uma maçã e a Terra também descrever a força de tração entre a Lua e a Terra).
- (d) Para se apreciar a beleza das equações, se faz necessário um treinamento, pois esta beleza não pode ser apreciada de imediato.
- Atenção: no vídeo (20:56-20:58), afirma-se que quanto maior o objeto, maior a força de atração. Evidentemente, está se supondo que a densidade é sempre a mesma.
 - Atenção: note que a física Ruth Gregory, ao estimar a força de atração gravitacional entre a Terra e uma maçã de 200 gramas, substitui $5/6$ por 1 (20:26-20:30).
 - A seguir indicamos algumas frases proferidas por personalidades que relacionam Beleza e Matemática.



Beleza na Matemática é ver a verdade sem esforço.

George Pólya



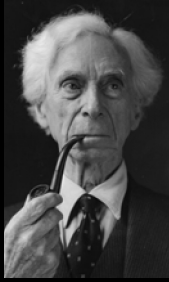
Os padrões de um matemático, como os de um pintor ou poeta, precisam ser belos. As ideias, como as cores e as palavras, precisam se encaixar de uma forma harmoniosa. A beleza é o primeiro teste: não há lugar permanente no mundo para a matemática feia.

Godfrey Harold Hardy



Deus usou matemática bela na criação do mundo.

Paul Dirac



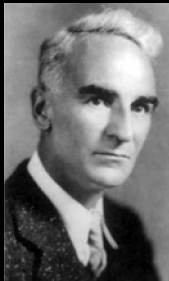
A matemática, vista de forma correta, possui não apenas verdade, mas uma beleza suprema – uma beleza fria e austera, como a de uma escultura, sem nenhum apelo à nossa natureza fraca, sem os belos ornamentos de uma pintura ou uma música, ainda assim sublimemente pura, e capaz de uma perfeição que somente a grande arte pode mostrar.

Bertrand Russell



É difícil para aqueles que não conhecem a matemática acessarem o real sentimento da beleza, da mais profunda beleza da natureza. . . Se você quer aprender sobre a natureza e apreciá-la, é necessário aprender a língua na qual ela se comunica.

Richard Feynman



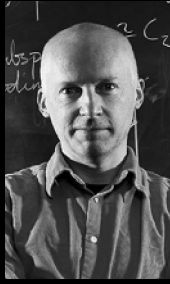
Abstração, algumas vezes considerada como algo reprovável na Matemática, é sua glória primária e sua inscrição mais garantida para um uso prático. É também a fonte de tanta beleza quanto se pode obter da Matemática.

Eric Temple Bell



Todos os matemáticos compartilham. . . um senso de assombro pela profundidade infinita, pela beleza misteriosa e pela utilidade da Matemática.

Martin Gardner



A Matemática tem beleza e romance. Não é um lugar enfadonho de se estar, o mundo matemático. É um lugar extraordinário; vale a pena passar tempo lá.

Marcus du Sautoy

- Existem acadêmicos que tentam definir o que seria “beleza” em Matemática ou abordar questões de estética em Matemática: Blåsjö (2012, 2018), Breitenbach (2013), McAllister (2005), Lange (2016), Montano (2014), Rota (1997) e o Número 2 do Volume 26 do periódico *Philosophia Mathematica* (<<https://academic.oup.com/philmat/issue/26/2>>) dedicado inteiramente à questão da Estética em Matemática
- O documentário pode ser aproveitado para levantar uma discussão sobre o que é uma equação, uma fórmula e uma igualdade. Neste contexto, os trabalhos do professor Alessandro Jacques Ribeiro podem ser úteis (ver, por exemplo, sua tese “Equação e Seus Multisignificados no Ensino de Matemática – Contribuições de Um Estudo Epistemológico” disponível em: <<http://goo.gl/6fjQ62>>).
- A equação $t' = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ da Teoria Especial da Relatividade apresentada no documentário tem uma aplicação importante na correção da medida dos intervalos de tempo do sistema GPS (Global Positioning System). Para detalhes, recomendamos o artigo “O GPS e A Teoria da Relatividade” de José Natário disponível no link <<http://goo.gl/afjRSN>>.
- Na tentativa de investigar se a beleza das equações matemáticas é comparável à experiência de apreciação de outras formas de arte, os neurocientistas Semir Zeki e John Paul Romaya, o físico Dionigi M. T. Benincasa e o matemático Michael Francis Atiyah analisaram a atividade cerebral de 15 matemáticos enquanto estes classificavam 60 equações matemáticas com “bonita”, “indiferente” e “feia”. Eles descobriram que os mesmos centros cerebrais usados para apreciar arte estavam sendo ativados pelas equações “bonitas”. A lista com as 60 equações avaliadas está disponível aqui: <<https://goo.gl/x2nfxG>>. Neste estudo, a equação mais “bonita” foi a identidade de Euler que relaciona em uma única equação cinco constantes matemáticas fundamentais:

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

A equação mais “feia”, segundo este estudo, é devida ao matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) que expressa o valor recíproco do número π em termos de uma série:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

O artigo original de Zeki, Romaya, Benincasa e Atiyah está disponível no seguinte endereço: <<http://goo.gl/kubTaO>>.

- Aqui está a Lei da Gravitação Universal de Newton, como aparece originalmente em Latim: “*Si Globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centrīs æqualiter distant, homogēnea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiae inter centra.*”. Uma tradução é a seguinte “Em duas esferas que gravitam mutuamente uma com relação a outra, se a matéria em todos lados, ao redor e equidistante dos centros é homogênea, então o peso de uma esfera com relação a outra será inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros.”. Caso haja interesse, o texto em Latim do Principia Mathematica de Newton pode ser encontrado no seguinte endereço do Projeto Gutenberg <<http://goo.gl/Mlwxjf>>. Vale a pena comentar com seus alunos que durante algum tempo era costume escrever as leis de forma retórica, isto é, sem o uso de símbolos ou expressões matemáticas.
- Na contramão do pensamento de que “beleza” é um critério de valor de uma teoria, Hossenfelder (2018), em seu livro “*Lost in Math: How Beauty Leads Physics Astray*”, argumenta que tal postura levou a Física atual em um estado de estagnação e que os cientistas deveriam, portanto, rever suas posições e seus métodos com relação a essa abordagem dogmática com base em parâmetros estéticos.

Referências relacionadas

- Blåsjö, Viktor. *A Definition of Mathematical Beauty and Its History*. Journal of Humanistic Mathematics, v. 2, n. 2, p. 93-108, 2012.
- Blåsjö, Viktor. *Mathematicians versus Philosophers in Recent Work On Mathematical Beauty*. Journal of Humanistic Mathematics, v. 8, n. 1, p. 414-431, 2018.
- Ball, Philip. *Beauty ≠ Truth*. Aeon Magazine, 2014. Disponível em: <<http://goo.gl/EnLDE7>>. Acesso em: 18 de janeiro de 2019.
- Bastos, Cleverson Leite. *A Coerência Estética como Teoria da Verdade*. Revista de Filosofia Aurora, v. 20, n. 27, p. 433-442, 2008. Disponível em: <<http://goo.gl/2g1h9d>>. Acesso em: 18 de janeiro de 2019.
- Brasil. Matriz de Referência para o ENEM. Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2009. Disponível em: <<https://goo.gl/pGfzme>>. Acesso em: 18 de janeiro de 2019.
- Breitenbach, Angela. *Beauty in Proofs: Kant On Aesthetics in Mathematics*. European Journal of Philosophy, v. 23, n. 4, p. 955-977, 2013.
- Crease, Robert P. *As Grandes Equações*. Editora Zahar, 2011.

- Farnelo, Graham (Ed.). *It Must Be Beautiful – Great Equations of Modern Science*. Granta Books, 2003.
- Garbi, Gilberto Geraldo. *O Romance das Equações Algébricas*. Editora Livraria da Física, 2009.
- Henshaw, John M. *An Equation for Every Occasion – Fifty-Two Formulas and Why They Matter*. Johns Hopkins University Press, 2014.
- Hossenfelder, Sabine. *Lost in Math: How Beauty Leads Physics Astray*. New York: Basic Books, 2018.
- Inglis, Matthew; Aberdein, Andrew. *Beauty Is Not Simplicity: An Analysis of Mathematicians' Proof Appraisals*. Philosophia Mathematica, 2014.
- Kossak, Roman; Ording, Philip. *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and The Arts*. Springer-Verlag, 2017.
- Lange, Marc. *Explanatory Proofs and Beautiful Proofs*. Journal of Humanistic Mathematics, v. 6, n. 1, p. 8-51, 2016.
- McAllister, James W.. *Mathematical Beauty and The Evolution of Standards of Mathematical Proof*. Em: Emmer, Michelle (Ed.). The Visual Mind II, p. 15-34, MIT Press, 2005.
- Marsh, James (Diretor). *A Teoria de Tudo*. Filme. Direção de James Marsh. Produção de TimBevan, Eric Fellner e Anthony McCarten. Reino Unido, 2014.
- Montano, Ulianov. *Explaining Beauty in Mathematics: An Aesthetic Theory of Mathematics*. Springer-Verlag, 2014.
- Rota, Gian-Carlo. *The Phenomenology of Mathematical Beauty*. Synthese, v. 111, n. 2, p. 171-182, 1997.
- Sinclair, Nathalie; Pimm, David; Higginson, William. *Mathematics and The Aesthetic: New Approaches To An Ancient Affinity*. Springer, New York, 2007.
- Stewart, Ian. *Dezessete Equações que Mudaram O Mundo*. Editora Zahar, 2013.

Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

Agradecimentos

Marco Moriconi (UFF), Sergio Roberto Lopes (UFPR).

Créditos das imagens de sensibilização

Hamanda de Aguiar Pereira e Humberto José Bortolossi

Concepção

Rodrigo Pessanha da Cunha, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira,
Karla Waack Nogueira e Keyla Lins Bruck Thedin

Revisão


André de Carvalho Rapozo, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas e
Oswaldo dos Santos A. Coutinho

Supervisão

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

4 *Entre As Dobras*

Faixa de classificação etária: Livre  (Amazon Prime).

Áudio: Inglês.

Legendas: Português

Título original: *Between The Folds*.

Gênero: Documentário.

Duração: 56 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: Independent Lens (2008).

Tópicos matemáticos abordados: Geometria Plana; Diagramas.

Nível escolar sugerido: Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Artes; Biologia e Física.

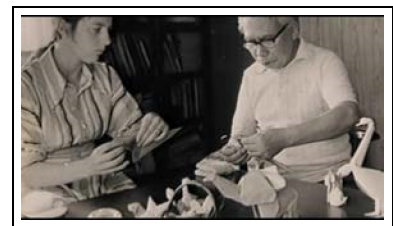
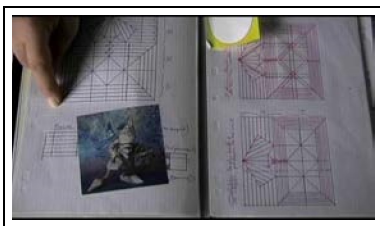
Marcadores: Origami; Independent Lens; Artes; Geometria Plana; Diagramas.

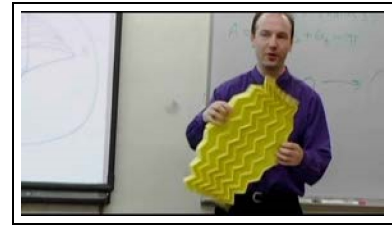
Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H7, H8 e H9.

Link para o arquivo da legenda: <<https://goo.gl/yBYyxx>>.

Página web oficial: <<https://www.betweenthefolds.com/>>

Imagens selecionadas





Sinopse (Oficial da PBS)

Origami pode ser visto com um meio pouco provável para se entender e se explicar o mundo. Porém, por todo o globo, vários bons artistas e cientistas teóricos estão abandonando carreiras mais convencionais para moldar vidas como dobradores modernos de papel. Por meio do origami, essas mentes excêntricas e provocativas estão reconfigurando conceitos de criatividade e revelando a relação entre arte e ciência.

BETWEEN THE FOLDS mostra 10 dessas histórias. Apresentando entrevistas e revelações das práticas desses intrépidos dobradores de papel, o filme começa com três dos mais renomados artistas do origami: um ex-escultor na França que dobra caricaturas em papel rivalizando as figuras de Daumier e Picasso, um hiper realista que abandonou uma carreira de sucesso na Física para desafiar a física de um quadrado dobrado; e um produtor de papel artesanal que dobra criações impressionistas criando-as do zero.

O filme então apresenta artistas menos convencionais, explorando conceitos de minimalismo, desconstrução, processo e empirismo. Artistas abstratos emergem com grande ênfase no conceito, cortando nas raízes fundamentais do realismo, as quais dominaram o origami tradicional por muito tempo. O filme também apresenta matemáticos e cientistas renomados que receberam um prêmio MacArthur Genius por sua pesquisa em origami computacional.

Enquanto o debate vai e vem sobre questões relacionadas com a técnica de dobradura, simbolismo e propósito, esse filme único mostra o quão a ciência e a arte estão interconectadas. O ato de dobrar um quadrado sem cortes, simples e em branco emerge como uma metáfora retumbante para o potencial criativo para transformação em todos nós.

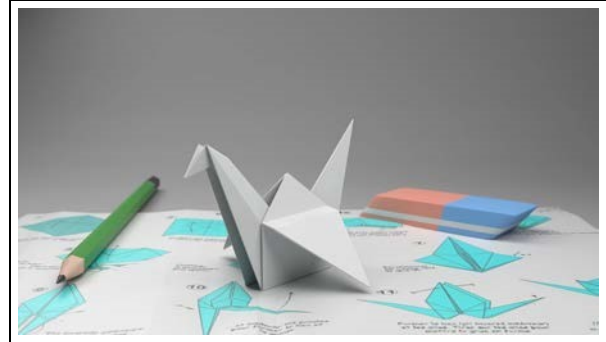
Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

Esse vídeo pode ser usado para mostrar: (1) que mesmo algo que se inicia como hobby ou arte pode vir a ser apropriado pela ciência, ter aplicações e ser utilizado em ramos da indústria; (2) que, a exemplo da Matemática e da Música, uma boa notação é fundamental para permitir a comunicação e o estudo do assunto; (3) que toda manifestação artística exige tempo,

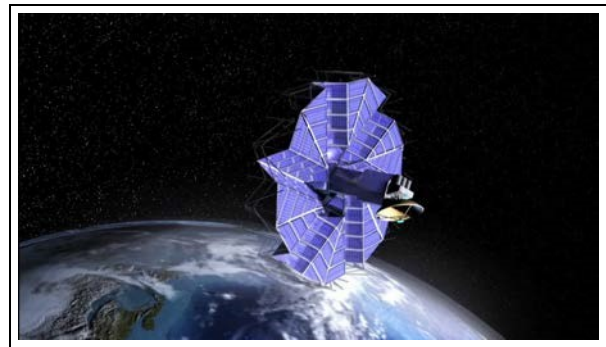
paciência, dedicação e que pode ser uma atividade muito solitária

Sensibilização (para montar um cartaz)

Quem nunca fez um pássaro, um barquinho ou um avião de papel? O processo de dobrar um quadrado de papel – origami, em japonês – evoluiu como arte e ciência, com o uso de muita matemática, muito mais do que você pode imaginar.



O documentário a que iremos assistir apresenta artistas e cientistas renomados que trabalham com origami. Você irá se surpreender com a beleza e a sofisticação dos origamis e de como eles têm sido empregados em aplicações práticas na indústria e na engenharia.



Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
3. Você já conhecia o origami? Em caso afirmativo, quando e em que situação foi o seu primeiro contato?
4. O documentário cita uma frase do artista francês Henri Matisse (1869-1954): “Muito da beleza que surge na arte vem da luta que o artista trava com o seu limitado meio.”. Origami é um exemplo desta fala, no sentido que esta arte busca transformar um quadrado de papel sem cortes, sem cola e sem fita adesiva em objetos como animais, pessoas, etc. Você conhece outras formas de arte que se enquadram na fala de Henri Matisse?
5. No início do documentário, Paul Jackson apresenta vários exemplos de onde as “dobras” aparecem no mundo que nos cerca: a dobra da gola da camisa, as dobras das pálpebras dos olhos. Você teria outros exemplos? Quais?
6. Segundo o documentário, qual é uma maneira de se medir a complexidade de construção de um origami?
7. O documentário coloca que, apesar de ter surgido como uma forma de arte, sem preocupações práticas, a técnica de origami agora tem aplicações em várias áreas. Quais seriam essas áreas?
8. Do que você mais gostou no filme?
9. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. Segundo o documentário (04:15-04:30), quais são as regras do origami? Todos os origamistas que participaram do documentário seguem essas regras estritamente?
2. Leia essas duas afirmações retiradas do documentário.

Pretendo trabalhar em qualquer coisa que me interesse, que eu considere divertido e interessante, não necessariamente útil ou aplicável. Quero dizer, algumas coisas terminam por serem úteis. Mas é um tipo de acidente ou coincidência, não porque eu planejasse que fosse útil. Sou movido pela Matemática, não pelas aplicações.

Erik Demaine (47:24-47:59)

Eu não tinha ideia alguma de que haveria uma aplicação prática. Mas isto acontece com frequência em ciência, algo é desenvolvido por razões matemáticas ou estéticas e de súbito tem uma aplicação real.

Robert Lang (50:06-50:13)

As duas falas se referem ao fazer científico e a aplicação da ciência no cotidiano. Algumas pessoas acham que todo conteúdo tem que ter uma aplicação direta no cotidiano ou na

produção industrial; porém, como os trechos acima mostram, as aplicações podem vir depois e muitos cientistas não estão preocupados se haverá uma aplicação ou não para o seu objeto de estudo. Antes desse documentário como você pensava a respeito dessa situação? O documentário mudou ou reforçou as suas convicções?

3. No que exatamente consiste o teorema do “dobre-e-corte” da família Demaine (45:35-49:05)?
4. O documentário é dividido em seções e cada seção procura evidenciar algum aspecto do origami. Preencha a tabela a seguir com uma breve descrição do aspecto apresentado em cada seção.

Título da Seção	Descrição do Aspecto Apresentado
o ARTESÃO (00:05:09)	
o ARTISTA (00:08:20)	
o ENGENHEIRO (00:12:48)	
o PAI (00:15:29)	
the BUG WARS (00:19:13)	
o PÓS-MODERNISTA (00:19:13)	
o COREÓGRAFO (00:32:15)	
os ANARQUISTAS (00:37:34)	
FORMA FUNCIONAL (00:39:29)	
a TEORIA DE TUDO (00:43:58)	

Observações para o professor

- Em um trabalho interdisciplinar com a disciplina de Arte e como preparação para a exibição do documentário, sugerimos que os alunos construam alguns origamis simples. Eles podem se reunir em grupos e cada grupo pode trabalhar com um origami diferente. Instruções para

as construções podem ser encontradas em livros (como, por exemplo, o livro “Origami: Arte e Técnica de Dobradura de Papel” por Mari Kanegae e Paulo Imanura), em sites na Internet (como o site “Como Fazer Origami” (<<https://goo.gl/M9um4E>>)) e até mesmo em aplicativos para celulares (como o “How To Make Origami” para dispositivos Android <<https://goo.gl/Fsy4zp>>).



- Um time de engenheiros usou origami para criar robôs que se montam sozinhos. Segundo o pesquisador Robert J. Wood da Universidade de Harvard o desafio primordial da pesquisa foi tornar o processo barato e rápido. No endereço <<https://goo.gl/wLX2Bd>> há um vídeo onde a equipe do Wyss Institute da Universidade de Harvard explica como criar robôs. O origami é usado pois é capaz de produzir estruturas bem complexas. Robôs que lembram os *Transformers* foram construídos utilizando impressoras 3D, sistemas elétricos e dobraduras.



Figura: a sequência de automontagem do robô-origami: método simples, barato e versátil de construir equipamentos eletromecânicos.

Fonte: Seth Kroll/Instituto Wyss.

Há também um artigo da revista da Ciência Hoje das Crianças <<https://goo.gl/F7VH91>> que trata do assunto, mais apropriado para o uso no Ensino Fundamental. Também não deixe de conferir o vídeo <<https://goo.gl/JTWVoP>>.

- Havendo tempo e interesse, sugerimos, como um complemento ao vídeo principal, a palestra

TED “Robert Lang Dobra Um Origami Completamente Novo” (<<https://goo.gl/hS8asb>>). Robert Lang é um pioneiro das novas formas de origami – ele usa princípios matemáticos e engenharia para dobrar desenhos intrincados e alucinantes que são belos e, às vezes, muito úteis. Na palestra o pesquisador apresenta aplicações inusitadas na Medicina e na exploração espacial, além de destacar a importância de uma representação para o desenvolvimento do origami.



Figura: Paleta TED de Robert Lang (<<https://goo.gl/hS8asb>>).

- A cada quadriênio ocorre a OSME (*Origami in Science, Mathematics, and Education*) que é uma conferência com cientistas que discutem as interações entre origami, matemática, ciência e educação, tendo relações com história, design e outros campos do conhecimento. A última conferência foi a 7OSME <<http://osme.info/7osme/>>, que ocorreu em Oxford, no Reino Unido, em março de 2018. Essas conferências acadêmicas produzem livros que são coletâneas de artigos sobre os assuntos citados acima e suas relações. O pesquisador Robert Lang participou da edição dos livros das três últimas conferências.



Figura: livros com coletâneas dos artigos produzidos nos encontros OSME.

A OSME teve origem em encontros internacionais de origami científico e tecnologia, cujo primeiro encontro foi na Itália em 1989 e o segundo foi no Japão em 1994. No terceiro encontro, realizado em 2001 na Califórnia, EUA a educação passou a fazer parte da conferência. A 3OSME foi patrocinada pela OrigamiUSA e organizada pelo professor Thomas

Hull. A 4OSME aconteceu novamente na Califórnia, EUA, em 2006, e desde então o encontro acontece a cada quatro anos.

- O livro “Matemática e Origami: Trabalhando Frações”, de autoria de Eliane Moreira da Costa, professora do Instituto de Educação da Universidade Federal Fluminense, é uma interessante referência para o professor que quiser fazer algumas atividades iniciais envolvendo a construção de origamis simples em conexão com o ensino de frações (representação, equivalência e operações).

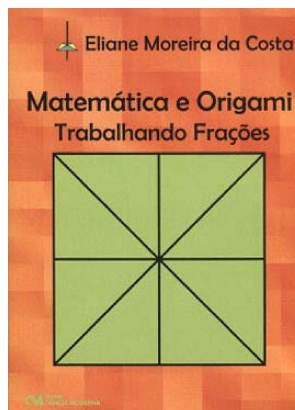


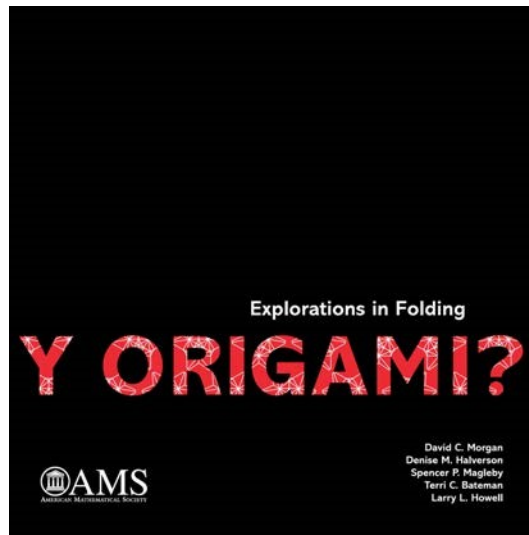
Figura: livro sobre origami e frações.

Fonte: Costa (2007).

- A apostila 9, Oficina de Dobraduras, do Programa de Iniciação Científica (PIC), da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas da OBMEP (OBMEP), de autoria de Mario Jorge Dias Carneiro e Michel Spira, é bom material de apoio para atividades antes de trabalhar com origami. Na primeira parte, são sugeridos e ilustrados alguns procedimentos, sem haver a preocupação de justificativa. Na segunda parte, é feita uma discussão sobre a geometria das dobraduras e apresentadas algumas justificativas e problemas. Devido aos conceitos e propriedades da geometria plana explorados no material, a aplicação é recomendada para alunos que tenham concluído o 8º ano, pelo menos. O texto está disponível na íntegra no endereço <<https://goo.gl/CP41zm>>.
- Uma referência que pode ser útil para se trabalhar Matemática e origami em sala de aula é o volume chamado “Explorando Geometria com Origami”, de autoria de Eduardo Cavacami e Yolanda Kioko Saito Furuya, lançado em 2010 pelo Programa de Iniciação Científica (PIC) da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Contudo, sendo um texto voltado para alunos de Olimpíadas de Matemática, nota-se a necessidade, por parte dos alunos, de um conhecimento mais sólido de Geometria Plana para a realização das atividades propostas (fato, esse, destacado na introdução do livro). O trabalho faz uma via de mão dupla ao tratar Geometria e Origami: ele apresenta resultados da Geometria através de dobraduras e usa a Geometria para justificar algumas construções. Segundo os autores: “A aplicação

de Origami no ensino da Geometria pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de um simples pedaço de papel.”. A apostila apresenta a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo, os poliedros de Platão, entre outros tópicos matemáticos. O texto está disponível na íntegra no endereço: <<https://goo.gl/GWd7Bh>>. Observamos que o trabalho foi anteriormente publicado em 2009 pelos mesmos autores pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Esta versão está disponível no seguinte endereço: <<https://goo.gl/1rDWbz>>.



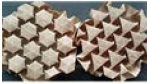


- Uma referência que pode ser útil para se aprofundar nas aplicações do Origami é o livro “Explorations in Folding: Y Origami” dos autores David C Morgan, Denise M. Halverson, Spencer P. Magleby, Terri C. Bateman Larry L. Howell e publicado em 2017 pela *American Mathematical Society*.



Na primeira parte do livro são apresentados objetos que tiveram o seu *design* baseado em origami: painel solar espacial dobrável, painel solar para mochila, barreira a prova de balas, nano injetor, mesa circular dobrável, fogão para acampamento dobrável, lâmpada de teto, mochilas, abrigos, instrumentos cirúrgicos, antena parabólica, forma de bolo dobrável, etc. também são descritas suas aplicações e a inspiração que levou a concepção do objeto. Em sua segunda parte a publicação apresenta atividades de aprendizagem: uso da fórmula de Euler ($V + F = A + 2$) no origami, padrões geométricos, cálculo de áreas (origami dobrado e aberto), volume, construção do oriceps (fôrceps, instrumento cirúrgico, com *design* baseado no origami), construção do nano injetor, construção de módulos, medição de ângulos, livros *pop-up*, parabolóide hiperbólico, etc. Na terceira parte são apresentadas atividades avançadas: dobrando ao longo de uma curva, condições para dobras planas, camadas das dobras, etc. Na última parte, o livro apresenta dois novos origamis: um do tipo *tesselation* dobrável rigidamente e o outro sob o título “mãe e criança” que tem por objetivo mostrar a importância dos

ensinamentos de uma mãe para com seu filho.

- O artigo “Origami Científico e Projetual: Inovações com Dobraduras” das autoras Thais Regina Ueno Yamada e Samanta Aline Teixeira apresentam as diferentes apropriações feitas no ocidente e oriente que transformaram o origami dividindo-o em diversos segmentos: origami tradicional, *kusudama*, *tesselation*, *kirigami* e *snapology*. O origami tradicional, primeira dobradura a ser explorada historicamente no Japão do século XIV, é feita com uma única folha de papel, sem cortes ou cola. O *kusudama*, também conhecido como origami modular, usa mais de uma folha, associa formas modulares e usa dobras, colagem, cortes e costura. Os *kusudamas* atualmente são utilizados na decoração e *design* de interiores. O *tesselation* é a dobradura feita em uma folha para representar padrões geométricos repetidos ao longo do plano. O *kirigami* (também conhecido como *pop-up*, arquitetônico ou *papercraft*), muito utilizado em design de livros e brinquedos de papel, recorre a dobras, cortes e colagem em uma folha ou mais para fazer figuras representativas ou geométricas. Por último, temos o *snapology* ou origami em tiras feito com dobras e cortes, que utiliza mais de uma folha para construir figuras modulares.

					
	Origami Tradicional	<i>Kusuduma/</i> Modular	<i>Tesselation</i>	<i>Kirigami/</i> Pop-Up/ Arquitetônico/ <i>Papercraft</i>	<i>Snapology/</i> Tiras
Forma Associada	Figuras Representativas ou Geométricas	Figuras Modulares	Padrões Geométricos	Figuras Representativas ou Geométricas	Figuras Modulares
Número de Folhas	1 Folha	2 ou Mais Folhas	1 Folha	1 ou Mais Folhas	2 ou Mais Folhas
Técnica	Dobras	Dobras, Cortes, Colagens e Costura	Dobras	Dobras, Cortes e Colagens.	Dobras e Cortes

- Na listagem a seguir, a partir da dissertação de mestrado “O Estudo das Cônicas através do

Origami” de Bruna Mayara Batista Rodrigues e do *site* do professor Erik Demaine do Departamento de Ciência da Computação do Massachusetts Institute of Technology (MIT), apresentamos, de forma resumida, alguns marcos principais da história do origami. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar a dissertação original (<<https://goo.gl/zUYKmR>>) ou o *site* (<<https://goo.gl/Gegxhx>>). Outras duas boas referências são a página web “Pequena História sobre ORIGAMI” (<<https://goo.gl/nqXptK>>) de Enio Yoshinori Hayasaka e Silvia Mitiko Nishida da UNESP, o livro “Notes On The History of Origami” de John Smith publicado pela British Origami Society.

- 1721** Publicado no Japão por Kun Chan Sen, o livro *Wakoku Chiyekurabe* (Competições Matemáticas) é a primeira referência conhecida sobre dobraduras e cortes e que tem, como principal característica, a apresentação de problemas para desenvolver o raciocínio lógico do leitor.

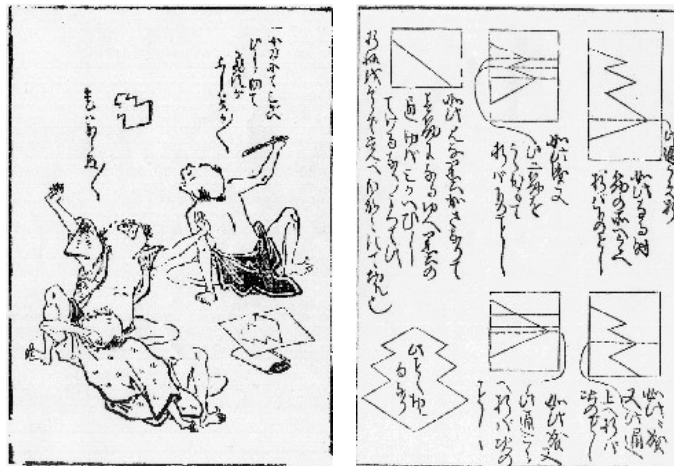


Figura: *Wakoku Chiyekurabe* por Kun Chan Sen.

Fonte: Eric Demaine.

- 1837** O origami é introduzido como uma forma de material didático pelo pedagogo alemão Friedrich Wilhelm August Fröbel (1782-1852).



Figura: Friedrich Wilhelm August Fröbel (1782-1852).

Fonte: Wikimedia Commons.

- 1873** O artigo “National Standard Emblems” da revista *Harper’s New Monthly Maga-*

zine (v. 47, n. 278) relata como um argumento de dobradura e corte foi usado para a escolha de estrelas de 5 pontas (e não de 6 pontas) para a bandeira dos EUA (a de 5 pontas poderia ser feita via dobradura com apenas um corte, a de 6 pontos não).

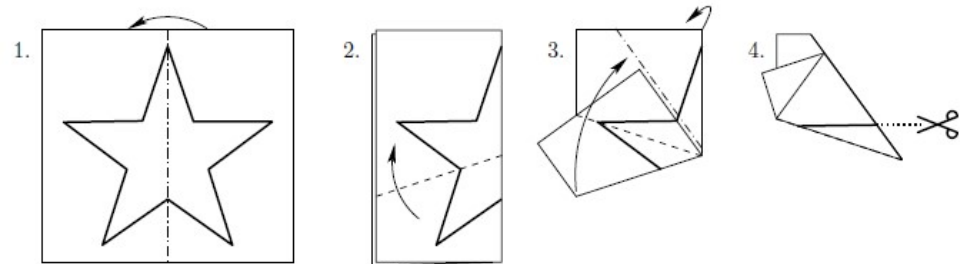


Figura: como cortar uma estrela de 5 com dobradura e um único corte.

Fonte: Eric Demaine.

- 1889** Miguel de Unamuno y Jugo (1864-1936), filósofo e escritor, considerado por muitos como um dos pensadores espanhóis mais destacados da época moderna.



Figura: pintura de Miguel de Unamuno y Jugo (1864-1936).

Fonte: Wikimedia Commons.

Foi um divulgador importante da papiroflexia (sinônimo de origami) na Espanha e na América Latina por meio do seu livro “*Amor y Pedagogía*” onde, em um anexo, redigiu notas para um tratado de cocotologia (sinônimo inventado por Unamuno para papiroflexia).

- 1908** O origami chega ao Brasil por meio da imigração japonesa.
- 1922** Harry Houdini (1874-1926), ilusionista e escapologista, lança o livro “*Paper Magic*” (E. P. Dutton & Company) onde, entre vários truques com papel, descreve um método para fazer a estrela de cinco pontas com dobradura e um único corte. O livro está disponível gratuitamente em <<https://goo.gl/GN8PWL>>.

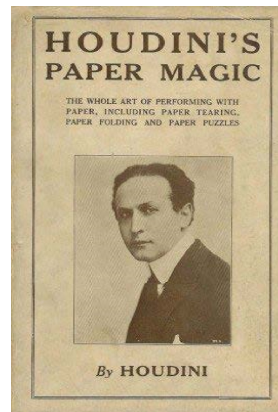


Figura: livro de truques com papel de Houdini.

Fonte: Houdini.

- 1955** O também mágico Gerald Loe (1918-2004) lança o livro “*Papers Capers*” (Magic, Inc., Chicago) onde descreve como cortar os arranjos de vários objetos geométricos, como uma corrente circular de estrelas.
- 1955** Em 25 de outubro de 1955 morre no Japão Sadako Sasaki que sofria de leucemia em decorrência da bomba de Hiroshima. Ele acreditava em uma lenda que dizia: “Se fizer mil grous de papel seu desejo se tornará realidade.”. Infelizmente ela morreu antes de atingir o feito.



Figura: Sadako Sasaki e a lenda dos 1000 grous.

Fonte: YouTube.

- 1956** O origamista japonês Akira Yoshizawa (1911-2005) cria regras para a representação gráfica das dobraduras.



Figura: Akira Yoshizawa (1911-2005).

Fonte: Wikimedia Commons.

- 1958** Lillian Rose Vorhaus Kruskal Oppenheimer (1898-1992) foi a responsável pela popularização do origami nos Estados Unidos.



Figura: Lillian Rose Vorhaus Kruskal Oppenheimer (1898-1992).

Fonte: YouTube.

Seu interesse pelo origami surgiu em 1930 para distrair a filha que estava com meningite. Ela publicou, juntamente com Shari Lewis, os livros “*Folding Paper Puppets*” em 1962, “*Folding Paper Toys*” em 1963 e “*Folding Paper Masks*” em 1965. Durante a publicidade de um de seus livros, foi convidada para um programa de TV e passou a ser conhecida como *The Origami Lady*. Ela ensinou origami para crianças do jardim de infância, tropas de escoteiros, estudantes de Yale, executivos e idosos em asilos e ministrou oficinas de dobraduras no *The Origami Center New York* (que era um apartamento particular de Lillian) criado em 1958. Logo após, ela lançou a revista especializada em origamis, “*The Origamian*”, que teve 16 edições, sendo a última em 1986.

- 1960** Na década de 1960, a professora Yachiyo Koda começa a ensinar origami pela Aliança Cultural Brasil-Japão. Com apoio do consulado do Japão em São Paulo,

ela realizou cursos em várias cidades do Brasil, organizou exposições e participou de programas de TV divulgando o origami no Brasil.

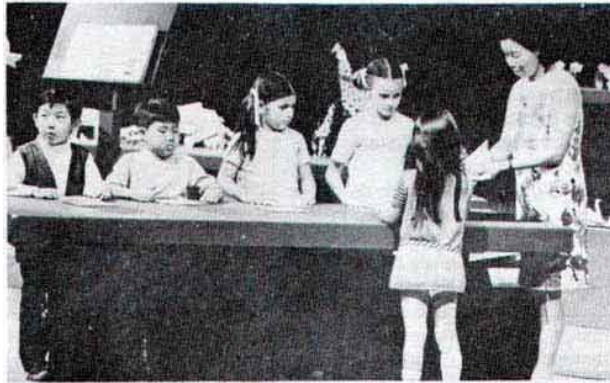


Figura: Professora Koda dando aulas de origami na TV Cultura.

Fonte: Rodrigues (2016).

- 1980** Na década de 1980, duas correntes do origami são formadas: a oriental (poucas dobras, adotada por artistas e filósofos) e a ocidental (adotada por engenheiros, físicos, matemáticos e arquitetos).
- 1995** Martin Gardner (1914-2010) foi célebre divulgador científico nos Estados Unidos. Sua atuação foi em recreações matemáticas, incluindo quebra-cabeças, enigmas e origami. Ele não se considerava um origamista, nem matemático ou cientista, mas um mágico.

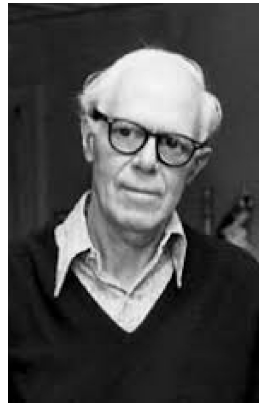


Figura: Martin Gardner (1914-2010).

Fonte: Wikimedia Commons.

Nessa época, mágica e dobraduras estavam interligadas. Martin conhecia o trabalho de Houdini com origami e o de Gerard Loe usando dobraduras e tesoura, como relata Demaine em <<https://goo.gl/4Tc95q>>. Gardner participou da exposição “*Plane Geometry and Fancy Figures*” com Lillian Oppenheimer no *Cooper Union Museum*, porém a maior contribuição dele para o desenvolvimento do origami foram seus artigos e livros. O seu artigo de estreia na *Scientific American*, no ano de 1956, foi *Flexagons*, onde discorria sobre os *hexaflexagons*, que são

dispositivos feitos com papel. Suas publicações foram até o ano 1980, quando se aposentou. Os artigos que envolviam uso de papel ou dobras foram: “*Möebius Band*” (1957), “*Tetraflexagons*” (1958), “*Origami*” (1959), “*Paperfolding and Papercutting*” (1960), “*Dragon Curve*” (1967), “*Puzzles and Tricks with A Dollar Bill*” (1968), “*The Combinatorial Richness of Folding A Piece of Paper*” (1971) e “*Plaiting Polyhedrons*” (1971). Contudo sua produção sobre truques usando papel e origami não se restringiu somente a sua coluna na conceituada revista. Em 1941 ele publicou um livreto chamado “*After Desert*” que mostra, entre outras coisas, o *Flapping Bird*. Em 1949, ele publicou outro livreto “*Over The Coffee Cups*” que tem alguns itens que se referem ao origami. Em 1949, Gardner publicou dois artigos na *Hygard’s Magic Monthly*: “*Dollar Bill Folds*” em fevereiro e “*Stunts with Paper*” em setembro. O leitor interessado pode consultar o capítulo *Martin Gardner and Paperfolding* do livro “*Mathematical Wizardry for a Gardner*” editado por Ed Pegg Jr., Alan H. Schoen e Tom Rodgers.

- O artigo “*History of Origami in The East and The West before Interfusion*” do autor Koshiro Hatori faz um contraponto ao senso comum de que o origami teve origem na China no século I. Sabe-se que os guerreiros samurais do período Edo (1603-1868) usavam dobraduras para fazer embrulhos de presentes e que haviam relatos do uso de papel antes deste período. Porém, em nenhum registro há a menção da dobradura. No ocidente, o origami teve origem nos certificados de batismo que eram feitos a partir de quadrados de papel que tinham seus vértices dobrados de maneira que coincidissem com o centro da figura, essas dobras eram feitas repetidamente. Esses certificados foram populares na Europa Central nos séculos XVII e XVIII. Há sugestões que esse tipo de dobra teve início antes da reforma protestante, logo o Origami no Ocidente data de antes do século XVI.

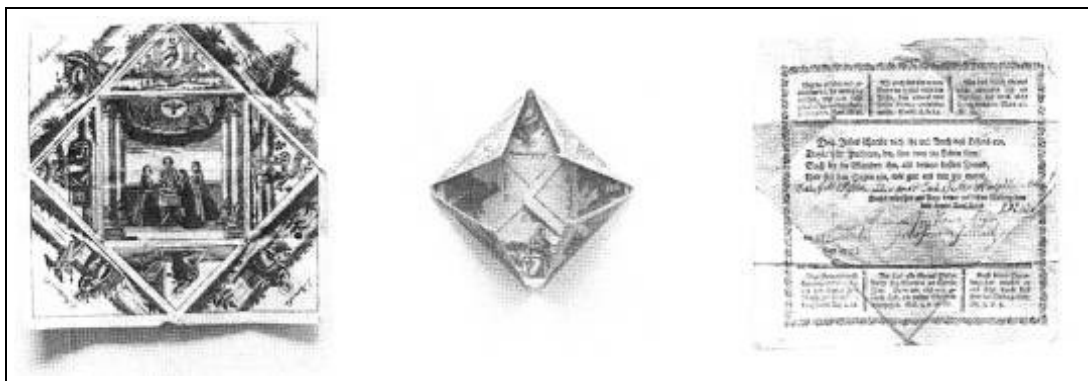


Figura: certificados de batismo alemães do século VIII.

Fonte: Hatori (2011).

Ao comparar os embrulhos de presente dos Japoneses com os certificados de batismo europeu pode-se observar a diferença entre Oriente e Ocidente. Os samurais dobravam ângulos

arbitrários enquanto os certificados eram limitados a grades quadradas e diagonais. Essas diferenças permaneceram até a segunda metade do século XIX, quando o Japão abriu suas fronteiras e começou o intercâmbio cultural com a Europa. Ao comparar centenas de modelos tradicionais feitos nos séculos XVIII e XIX, é surpreendente perceber que apenas alguns modelos são semelhantes na Europa e no Japão. Esse fato sugere, segundo o artigo, que o origami surgiu e se desenvolveu de maneira independente no Japão e na Europa, logo o origami nunca foi uma arte exclusivamente “japonesa”.

- Uma pergunta frequente nas salas de aula, tanto na Educação Básica quanto na Superior, é: “Para que serve isso?”. O documentário nos dá um exemplo de que algo que começa de forma despreziosa pode vir a ter aplicações importantes: o origami surgiu como arte, foi apropriado pela Matemática, que desenvolveu uma nomenclatura própria fundamental para o seu desenvolvimento, e hoje ele é aplicado em vários ramos do conhecimento humano. Outros exemplos da Matemática incluem a Teoria dos Números e seu uso em Criptografia, Números Complexos e sua aplicação no estudo de circuitos eletrônicos em Engenharia Elétrica, entre muitos outros.
- O site <<http://www.langorigami.com/>> do origamista Robert Lang (que aparece no documentário) é muito rico para uma pesquisa profunda sobre os aspectos matemáticos do origami. Há artigos, exposições, palestras, relação de livros publicados e um *software* chamado *Tree Maker*, que é uma ferramenta para fazer *designs* de origamis.

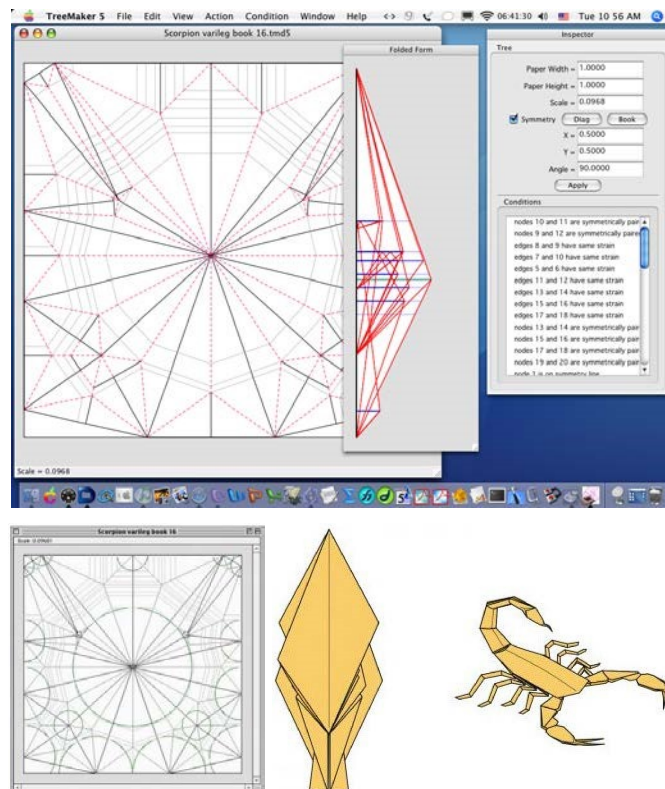


Figura: software Tree Maker para construção de origamis.

Fonte: Rober Lang.

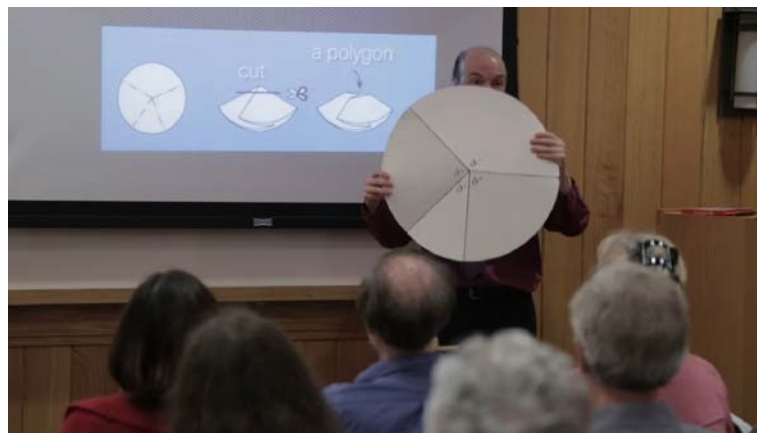
- Caso haja interesse, você pode indicar para seus alunos este vídeo do canal “Manual do Mundo” que explica como o papel é fabricado: <<https://goo.gl/u1odm9>>.



Figura: como o papel é fabricado?

Fonte: Manual do Mundo.

- O professor Tom Hull, outro pesquisador também presente no documentário, possui vídeos interessantes que podem ser úteis para se aprofundar mais no assunto.
 - (a) “*Folding A New Tomorrow: Origami meets Math and Science*” disponível no seguinte endereço: <<https://goo.gl/oDQfnT>>.



- (b) “*Tom Hull On Education with Origami: Teaching*” disponível nos seguintes endereços: <<https://goo.gl/ckDw3m>> (Parte 1) e <<https://goo.gl/YfzqFz>> (Parte 2).



- Erik Demaine (que também é apresentado no documentário) mantém uma página com vários materiais sobre o seu teorema “*fold-and-cut*” (dobre-e-corte), incluindo instruções de como usar esta técnica para fazer as letras do alfabeto: <<http://erikdemaine.org/foldcut/>>. Este vídeo (com legendas em Inglês) da série Numberphile também trata do assunto: <<https://goo.gl/CaLs4R>>.

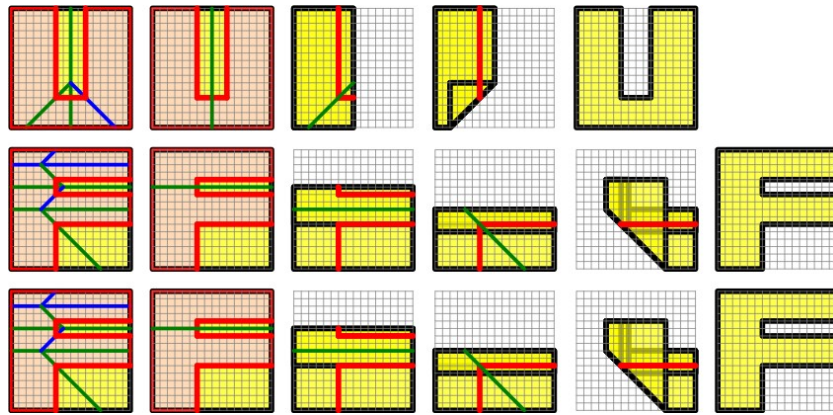


Figura: passos para dobrar e cortar as letras da palavra UFF.

Fonte: Erik Demaine.

- O termo “*protein folding*” (apresentado no documentário) é conhecido em Português por “enovelamento de proteínas” (“dobradura de proteína” também é usado). O assunto foi tema de uma palestra no IMECC-UNICAMP apresentada pelo professor Leandro Martínez do Instituto de Química: <<https://goo.gl/Y4KPth>>. Nesta reportagem de O Globo você pode conferir a contribuição de dois pesquisadores da UFRJ nesta área de investigação: <<https://goo.gl/CN11aC>>.

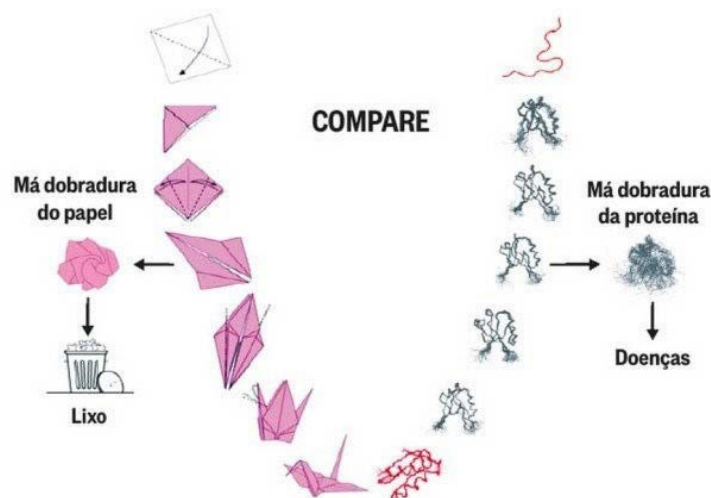


Figura: analogia entre origami e dobradura de proteína.

Fonte: O Globo.

Referências relacionadas

- Costa, Eliane Moreira da. *Matemática e Origami: Trabalhando Frações*. Ciência Moderna, 2007.
- Friedman, Michael. *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing The Margins*. Birkhäuser, 2018.
- Hatori, Koshiro. *History of Origami in The East and The West before Interfusion*. Em: Wang-Iverson, Patsy; Lang, Robert J.; Yim, Mark. *Origami⁵: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. CRC Press, 2011.
- Houdini, Harry. *Houdini's Paper Magic: The Whole Art of Performing with Paper, Including Paper Tearing, Paper Folding and Paper Puzzles*. E. P. Dutton & Company, 1922. Disponível em: <<https://goo.gl/GN8PWL>>. Acesso em: 18 de dezembro de 2018.
- Kanegae, Mari; Imamura, Paulo. *Origami: Arte e Técnica da Dobradura de Papel*. Aliança Cultural Brasil Japão, 2011.
- Morgan, David C. et al. *Y Origami?: Explorations in Folding*. American Mathematical Society, 2017.
- Pegg Jr., Ed; Schoen, Alan H.; Rodgers, Tom. *Mathematical Wizardry for a Gardner*. CRC Press, 2009.
- Rodrigues, Bruna Mayara Batista. *O Estudo das Cônicas através do Origami*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <<https://goo.gl/zUYKmR>>. Acesso em: 18 de dezembro de 2018.
- Smith, John. *Notes On The History of Origami*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014.
- Yamada, Thaís Regina Ueno; Teixeira, Samanta Aline. *Origami Científico e Projetual: Inovações com Dobraduras*. XII International Conference On Graphics Engineering for Arts and Design, 2017. Disponível em: <<https://goo.gl/nPCT4Y>>. Acesso em: 18 de dezembro de 2018.

Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

Agradecimentos

Marco Moriconi (UFF), Sergio Roberto Lopes (UFPR).

Créditos das imagens de sensibilização

TONymix (pixabay) e “Can Origami Ddvance Space Exploration?” (TEDxPeachtree)

Concepção

Rodrigo Pessanha da Cunha e Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas

Revisão

Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira,
Keyla Lins Bruck Thedin, André de Carvalho Rapozo e Oswaldo dos Santos A. Coutinho

Supervisão

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

5 *Considerações finais*

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho colaborativo, com o propósito de auxiliar nas concepções, nos testes e nos aprimoramentos dos roteiros, promovemos diversas ções de vídeos relacionados com Matemática e Estatística em vários eventos: Semana da Matemática da UFRR (2015), Programa Dá Licença da UFF (2016), Semana da Matemática da UFF (2016), Semana Pedagógica no Colégio Estadual Manuel de Abreu (2016, 2018), Festival da Matemática (2017), Simpósio ANPMat da Região Norte (2017), Semana da Ciência e Tecnologia no IMPA (2017), Semana da Matemática da UFSC em Blumenau (2017), Festival da Matemática do Rio Grande do Sul (2017), Semana Pedagógica no Instituto GayLussac (2017), Semana da Matemática da UFMS (2018), 70^a Reunião da SBPC (2018), Semana Pedagógica no Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (2018).



Figura 5.1: exibições de vídeos.

Entre estes eventos, destacamos o Festival da Matemática, uma iniciativa do IMPA e da SBM, como parte do “Biênio da Matemática 2017-2018 Gomes de Sousa”, realizado entre 27 e 30 de abril de 2017 na Escola SESC do Rio de Janeiro. Durante os quatro dias de evento foram

realizadas sessões *non-stop* de 30 em 30 minutos. Estima-se que mais de 1600 pessoas (entre alunos, professores e o público em geral) tenham participado. Após a exibição de cada vídeo, voluntários respondiam a algumas questões gerais do roteiro. Um brinde de participação (um chocolate) era dado à pessoa voluntária. Duas sessões foram especiais com as participações do matemático português Rogério Martins (do Programa “Isto é Matemática”) e do matemático francês Étienne Ghys.

Os vídeos também foram exibidos na ação de extensão “Cineclube de Matemática e Estatística” do Projeto “Dá Licença” da Universidade Federal Fluminense. Nestes eventos, filmes mais longos foram apresentados e cada sessão contou com a participação de um convidado especial que, ao final da exibição, fazia comentários e respondia às perguntas da plateia.



Figura 5.2: Exibições de vídeos (continuação).

Nossa proposta de uso didático de vídeos também foi usada em atividades de formação continuada de professores (Simpósio ANPMat da Região Norte e Instituto GayLussac) e, mais recentemente, na formação inicial de professores no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) para o núcleo da Matemática da Universidade Federal Fluminense.

Dos dois roteiros neste trabalho, conseguimos aplicar o primeiro, o de “Belas Equações”. A apresentação ocorreu no dia 29 de fevereiro de 2016, inaugurando o Cineclube de Matemática e Estatística pelo Programa Dá Licença da Universidade Federal Fluminense. Pelo formato do evento, foi criado um arquivo PowerPoint para agilizar a dinâmica com as perguntas gerais e algumas imagens retiradas da seção “Observações para o professor” do roteiro do vídeo: <<https://goo.gl/wb7y9u>>. Os espectadores (aproximadamente 40 pessoas), na entrada do auditório, receberam uma cópia das questões do roteiro e foram orientados a lê-las antes da exibição do vídeo, pois essas questões seriam discutidas no final da exibição valendo brindes (chocolates). A atividade também contou com a participação do professor Marco Moriconi do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, que fez comentários e respondeu às perguntas da plateia na parte final do evento.



Figura 5.3: o professor Marco Moriconi como convidado especial do evento.

A seguir, indicamos as questões que foram trabalhadas e algumas das respostas dadas pelos participantes.

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem (moral, conclusão, ensinamento, ...)? Qual?
“De que o belo na ciência tem uma relação direta com a simplicidade.”.
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
“Não conhecia a equação de Dirac, nem sabia da relação da teoria da relatividade com o cubismo.”.
3. Ao longo do vídeo, o apresentador Matthew Collings vai colecionando motivos pelos quais uma equação pode ser bela. Quais seriam estes motivos? Você concorda com eles?
“Por representar de maneira fiel um fenômeno da natureza.”. “Por sintetizar uma lei da natureza.”.
4. As belas equações apresentadas no vídeo estão fortemente ligadas à Física. Você incluiria

outras belas equações da Física? Da Matemática? Da Química? Da Biologia? Quais? Por quais motivos?

“Incluiria o Teorema de Pitágoras, devido a sua importância na Matemática.”.

5. Sempre que o apresentador Matthew Collings se depara com uma nova equação, ele tenta descobrir aplicações desta equação. Liste algumas aplicações que ele encontrou.

“A primeira equação foi usada para fazer a bomba atômica. A segunda equação é a da força de atração entre dois corpos. O documentário não apresentou aplicações para as outras equações.”.

6. Na sua opinião, o apresentador Matthew Collings conseguiu entender cada uma das cinco equações apresentadas? E você?

“Não, ele não conseguiu entender a Equação de Dirac. Entendi todas.”.

7. Sendo um artista, ao longo do documentário, o apresentador Matthew Collings pinta em um painel translúcido cada equação que acabou de conhecer. Quais foram as cores usadas para cada uma das cinco equações? Você acredita que essas cores possam ter alguma relação com as equações? Qual?

“Ele usou, respectivamente, as cores amarelo, vermelho, azul, preto e branco. Na minha opinião não teve relação com as equações.”.

8. Segundo o vídeo, por que Newton é denominado o “pai” da Ciência Moderna?

“Pois Newton foi o primeiro a usar equações para traduzir fenômenos.”.

9. No vídeo (12:39-13:11), afirma-se que William Blake (pintor, poeta e tipógrafo que viveu entre 1757 e 1827) desprezava Newton. Por quê? Você acha que os motivos para tal desprezo se manifestam de alguma maneira na gravura de Newton feita por Blake e apresentada no vídeo?

“Devido à frieza com que as equações de Newton traduziam a natureza. O fato de ele estar de costas para a natureza.”.

10. No final do documentário, Matthew Collings apresenta em uma exposição seus painéis com motivação matemática. Faça uma lista dos atributos matemáticos que os cientistas convidados deram para estes painéis.

“Simetrias, ordem e padrão não repetitivo.”.

11. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

“Sim, incluiria alguma equação exclusiva da matemática.”.

Além de comentar as equações e os cientistas apresentados no documentário, com auxílio da audiência, o professor Marco mostrou o truque do cinto de Dirac que se relaciona com os *spinors*, mencionado no vídeo. O cinto de Dirac é um exemplo de objeto conectados à cordas para o qual uma rotação de 360° não leva o sistema para a sua posição original, porém uma

nova rotação de 360° , totalizando 360° , leva.



Figura 5.4: o professor Marco Moriconi explicando o truque do cinto de Dirac.

Como trabalho futuro, pretendemos organizar um *blog* para melhor divulgar os roteiros dos vídeos, bem como criar um canal de comunicação com o professor de Matemática e outros profissionais interessados no uso de vídeos como instrumento de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

- Bulman, Jeannie Hill. *Children's Reading of Film and Visual Literacy in The Primary Curriculum: A Progression Framework Model*. This Palgrave Macmillan, 2017
- Chabrán, H. Rafael; Kozek, Mark. *Mathematics in Literature and Cinema: An Interdisciplinary Course*. PRIMUS, 2015.
- Doxiadis, Apostolos; Mazur, Barry. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*. Princeton University Press, 2012.
- Ferrés, Joan. *Vídeo e Educação*. Editora Artes Médicas, 1996.
- Gottschall, Jonathan. *The Storytelling Animal: How Stories Make Us Human*. New York: Harcourt Publishing Company, 2013.
- Harari, Yuval Noah. *Sapiens: Uma Breve História da Humanidade*. Porto Alegre: L&PM, 2015.
- Haven. K. *Super Simple Storytelling: A Can-Do Guide for Every Classroom, Every Day*. Englewood, CO: Teacher Ideas Press, 2000.
- Machado, Benedito Fialho; Mendes, Iran Abreu. *Vídeos Didáticos de História da Matemática: Produção e Uso na Educação Básica*. História da Matemática para Professores, Sociedade Brasileira da História da Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.
- Machado, Nilson José. *A Narrativa em Matemática*. Palestra na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da UFF, Universidade Federal Fluminense, 2016.
- McSill, James. *Cinco Lições de Storytelling: Fatos, Ficção e Fantasia*. São Paulo: DVS Editora, 2013.
- Moran, José Manuel. *O Vídeo na Sala de Aula*. Comunicação & Educação, v. 2, p. 27-35, 1995.
- Muzás, José Maria Sorando. *Aventuras Matemáticas em El Cine*. Editorial Guadalmazán, 2015.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2013.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar A Televisão na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2015.
- Pellicer, Pablo Beltrán. *Series y Largometrajes como Recurso Didáctico em Matemáticas en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales, Facultad de Educación, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2015.

Polster, Burkaro; Ross, Marty. *Math Goes To The Movies*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2012.

Reiser, Elana. *Teaching Mathematics using Popular Culture: Strategies for Common Core Instruction from Film and Television*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2015.

Santos, Rosiane de Jesus. *Uma Taxonomia para O Uso de Vídeos Didáticos para o Ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2015.

Sklar, Jessica K.; Sklar, Elizabeth S. *Mathematics in Popular Culture: Essays On Appearances in Film, Fiction, Games, Television and Other Media*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2012.

Xavier, Adilson. *Storytelling: Histórias Que Deixam Marcas*. Rio de Janeiro: BestSeller, 2015.

Zack, Paul J. *Confiança, Moralidade e Ocitocina*. TED Global 2011. Disponível em: <<https://goo.gl/tFhoqb>>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *A Molécula da Moralidade*. Elsevier, 2012.

Zack, Paul J. *Empathy, Neurochemistry, and The Dramatic Arc*. Future of StoryTelling, 2013. Disponível em: <<https://vimeo.com/61266150>>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *How Stories Change The Brain*. 17 dezembro de 2013. Disponível em: <<https://goo.gl/DgBnnB>>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *Why Your Brain Loves Good Storytelling*. HBR 28 de outubro de 2014. Disponível em: <<https://goo.gl/BVyRng>>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*. Cerebrum Jan-Feb; 2015. Disponível em: <<https://goo.gl/LPFn7P>>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zacks, J. M.; Tversky, B.; Iyer, G. 2001. *Perceiving, Remembering, and Communicating Structure in Events*. Journal of Experimental Psychology: General, v. 130, p. 29-58, 2001.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter. *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.