



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Matemática Financeira: uma proposta utilizando a BNCC

Mariane Rodrigues Regonha

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2019

R343m Regonha, Mariane Rodrigues
Matemática Financeira: uma proposta utilizando a BNCC/ Mariane Rodrigues Regonha- Rio Claro: [s.n.], 2019.
93 f.: fig., tab.

Orientadora: Marta Cilene Gadotti

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

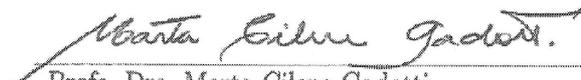
1. Base Nacional Comum Curricular - BNCC. 2. Educação Financeira. 3. Ensino Fundamental. 4. Ensino Médio. 5. Matemática Financeira. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Mariane Rodrigues Regonha

MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA PROPOSTA UTILIZANDO A BNCC

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora



Prof. Dra. Eliris Cristina Rizzioli
Departamento de Matemática - IGCE - Unesp - Rio Claro - SP



Prof. Dra. Vanessa Rolnik Artioli
Departamento de Computação e Matemática - FFCLRP - USP - Ribeirão Preto - SP

Rio Claro, 21 de fevereiro de 2019

A Deus, minha família e meu noivo.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ser tão bom o tempo todo.

À Professora Doutora Marta Cilene Gadotti por todo empenho, atenção, paciência e amizade nessa orientação.

Aos professores, colaboradores e funcionários do Departamento de Matemática juntamente com o Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE-UNESP) pelo suporte em todos esses anos, desde quando ingressei na graduação.

Aos colegas do PROFMAT Alex, Alexandre, Cássio, Fabiana, Lucas, Paula, Wagner, Walter, José Roberto e Tiego pelo companheirismo e ajuda sinceros.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro prestado no início dessa etapa.

Às escolas em que passei nesse tempo: Escola Municipal Professora Maria Arlete Angeleli e Escola Municipal Professora Ignez Brioschi Rubim e Instituto Atlântico de Ensino, especialmente agradeço seus gestores, professores e funcionários que me auxiliaram sempre que precisei.

Não posso deixar de agradecer também aqui minhas amigas Ana Paula, Edna e Luciana pelo apoio, conselhos e risadas nas horas mais fáceis e também nas difíceis. Teacher Lu, obrigada por toda ajuda com o inglês e conversas sérias e divertidas.

Aos demais que presentes ou distantes sempre confiaram em meu trabalho, Fernanda, Bruna, Marcelino, entre outros.

À minha família, pai, mãe e irmã pela paciência nos tempos mais conturbados e todo apoio moral, afetivo e financeiro. Obrigada por tudo. Amo vocês!

Ao meu amor, futuro esposo Lucas, pela compreensão, amizade, amor e pelo apoio em todos os momentos desde 2012. E também à sua família que me acolheu tão bem.

Enfim, muito obrigada a todos que me auxiliaram direta ou indiretamente nesse trabalho.

O exemplo causa impressão muito maior que as palavras no coração e na mente das crianças. É preciso que vossos exemplos instruem vossos alunos muito mais que vossas palavras.

São João Batista de La Salle

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar um panorama geral da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por meio de uma breve análise deste documento e propor atividades para cada objeto de conhecimento nela indicado que pode ser ligado à Matemática Financeira. Também deseja-se apresentar conceitos básicos sobre Matemática Financeira, visando uma preparação inicial do professor para a abordagem do tema. Esse trabalho é voltado para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, geralmente formados em pedagogia ou no antigo magistério, Ensino Fundamental - Anos Finais e Ensino Médio, em geral, licenciados em Matemática. Nos últimos anos, o tema desse trabalho têm aparecido com frequência em vestibulares e Exames Nacionais do Ensino Médio (ENEM) e deverão ser ainda mais frequentes em suas próximas edições.

Palavras-chave: Base Nacional Comum Curricular - BNCC, Educação Financeira, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Matemática Financeira.

Abstract

This work aims to show a general overview of the National Curricular Common Base (BNCC) through a brief analysis of it and suggests activities for each object of knowledge indicated that can be linked to Financial Mathematics. It also wants to present basic concepts of Financial Mathematics, aiming at an initial preparation of the teacher to approach the theme. This work is aimed at teachers of the initial years of Elementary School, usually trained in pedagogy or former teaching degree, Elementary School - Final Years and High School, generally, teachers graduated in Mathematics. In the past years, the theme of this paper have appeared frequently in vestibular and National Exams of the Secondary School (ENEM) and should be even more frequent in their next editions.

Keywords: Common National Curricular Basis, Financial Education, Elementary School, High School, Financial Math.

Lista de Figuras

2.1	Cédulas e moedas do real	18
2.2	Balanco das vendas da loja de Caio	20
2.3	Cheques recebidos na loja de Ivone	22
2.4	Pesquisa sobre os depósitos no Banco Gama	25
2.5	Recibos da Casa das Tintas	27
2.6	Panfleto da oferta da TV	28
2.7	Preços de materiais escolares	31
2.8	Cardápio	37
2.9	Variações do IPCA em setembro de 2018	41
2.10	Fluxo de caixa de uma empresa	43
2.11	Gráfico da planilha de gastos ideal	44
2.12	Gráfico da planilha de gastos da família de Yuri	45
2.13	Gráfico em noticiário	49
2.14	Planilha de orçamento pessoal	52
3.1	Modelo de diagrama do fluxo de caixa	57

Lista de Tabelas

2.1	Bom Princípio de Ano Novo	18
2.2	Pesquisa sobre os depósitos no Banco Gama	24
2.3	Resultados da pesquisa sobre mesada	26
2.4	Números racionais: representação decimal para valores do sistema monetário brasileiro	29
2.5	Pesquisa de preços de materiais escolares	31
2.6	Juros para parcelamento do computador	33
2.7	Saldo da poupança de Patrícia	36
2.8	Unidades de tempo	39
2.9	Convertendo unidades de tempo	40
2.10	Divisão em classes sociais com base na renda familiar	42
2.11	Dados encontrados na pesquisa	42
3.1	Exemplo de regime de capitalização simples	58
3.2	Exemplo de regime de capitalização composta	58
3.3	Exemplo do cálculo da taxa inflacionária	79

Sumário

1	Introdução	10
2	Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	12
2.1	A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	12
2.2	A Matemática na Base Nacional Comum Curricular	13
2.3	Estudo da BNCC e atividades propostas	16
2.3.1	1º Ano do Ensino Fundamental	17
2.3.2	2º Ano do Ensino Fundamental	19
2.3.3	3º Ano do Ensino Fundamental	21
2.3.4	4º Ano do Ensino Fundamental	26
2.3.5	5º Ano do Ensino Fundamental	32
2.3.6	6º Ano do Ensino Fundamental	37
2.3.7	7º Ano do Ensino Fundamental	43
2.3.8	8º Ano do Ensino Fundamental	45
2.3.9	9º Ano do Ensino Fundamental	47
2.3.10	Ensino Médio	50
3	Conceitos básicos de Matemática Financeira	56
3.1	Juros simples	56
3.2	Taxa proporcional e taxa equivalente	60
3.3	Equivalência financeira e aplicações	62
3.4	Juros compostos e taxas	62
3.5	Fracionamento do prazo e equivalência financeira	65
3.6	Convenção linear e convenção exponencial para períodos não inteiros	67
3.7	Descontos	70
3.8	Taxa efetiva de desconto linear	72
3.9	Taxa efetiva de desconto exponencial	73
3.10	Títulos públicos	75
3.11	Inflação	78
3.12	Caderneta de poupança	86
4	Considerações finais	89
	Referências	90

1 Introdução

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [7], cabe às escolas e aos sistemas e redes de ensino incluir em seus currículos e propostas pedagógicas temas atuais, que tangem à toda a população, como educação para o consumo, financeira e fiscal. Assim, podem ser discutidos assuntos tais como impostos, inflação, taxas de juros e aplicações financeiras. Neste trabalho inclui-se rentabilidade e liquidez de um investimento. Acredita-se que essas questões são capazes de construir excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira.

Alguns pontos motivaram a escolha do tema Matemática Financeira para esse trabalho. São eles:

- um trabalho de iniciação científica desenvolvido pela autora em 2015, denominado "*Matemática Financeira e Introdução à Teoria dos Jogos*";
- relatos de professores e alunos que a professora autora encontrou estando à frente de salas de aula da educação básica, que percebem como é mais fácil ensinar e compreender conceitos da matemática quando são traçados paralelos com questões financeiras;
- a inclusão desse tema na Base Nacional Comum Curricular;
- o número crescente de pesquisas desenvolvidas em torno do assunto. Somente na base de dados do PROFMAT há cerca de cento e sessenta trabalhos nesse tema em diversas vertentes;
- a relevância desses conhecimentos para a formação do cidadão.

A importância dessa dissertação foi reforçada quando, ao pesquisar novamente no acervo de dissertações do Programa PROFMAT, identificou-se a existência de apenas dois trabalhos, consulte [20], sobre a BNCC sendo que ambos apontam para a estatística dentro do documento.

Em vista disso, acredita-se que esse trabalho seja inovador ao conectar a Matemática Financeira à Base Nacional Comum Curricular propondo atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, de acordo com os objetos de conhecimento e as habilidades presentes no documento.

Para isso é necessário que tanto professores quanto materiais didáticos por eles utilizados estejam preparados para explorar o assunto. Então, o Capítulo 2 sugere

dezenas de atividades para as aulas buscando auxiliar tal preparação desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais, passando pelo Ensino Fundamental - Anos Finais e por fim Ensino Médio, cuja versão da base foi homologada em dezembro de 2018.

Portanto esse trabalho está construído a partir de um estudo da Base Nacional Comum Curricular, atividades propostas para cada objeto de conhecimento e habilidades do documento que apresentam ligação com o tema Matemática Financeira. Em seguida, no Capítulo 3 apresentamos conceitos básicos de Matemática Financeira: Juros simples e compostos, descontos, índices de preços e inflação, visando uma preparação inicial do professor para a abordagem do tema.

A dinâmica escolhida para a apresentação desses conceitos é, além de defini-los, ilustrá-los através de diversos problemas e situações cotidianas, para que alunos e professores percebam a importância da Matemática Financeira, sua inserção natural na educação básica e do conhecimento de certos assuntos matemáticos. O motivo para tal escolha é o fato de esse trabalho ser voltado para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental (geralmente formados em pedagogia ou no antigo magistério), Ensino Fundamental - Anos Finais e Ensino Médio, em geral, licenciados em Matemática.

O objetivo é proporcionar uma leitura leve, objetiva e dinâmica.

Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas algumas considerações finais sobre a pesquisa e sua importância.

2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Todo esse capítulo está estruturado da seguinte forma: inicialmente apresentamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC); em seguida um panorama geral da forma como a Matemática está apresentada no documento; e por meio de atividades propostas, indicamos como e quais das habilidades da BNCC estão relacionadas à Matemática Financeira.

Consideramos esse capítulo o "*coração*" do trabalho, tendo em vista que pode ser útil a professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e também para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que não necessariamente lecionam apenas Matemática, mas também outras disciplinas, ou seja, todo o capítulo é voltado para pessoas que tiveram ou não uma formação aprofundada e específica em Matemática.

Esperamos que o conteúdo aqui apresentado possa servir como um subsídio para iniciar uma abordagem da Matemática Financeira nas aulas através das atividades aqui propostas e despertar um interesse para a criação de novas atividades derivadas das que estão presentes aqui.

Todas as informações presentes nesse capítulo foram extraídas de [7] e [8].

2.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

De acordo com [7] e [8], na Constituição de 1988, na LDB de 1996 e no Plano Nacional de Educação de 2014, estava prevista a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mas esse documento foi homologado pelo Ministério da Educação (MEC) somente em 2017, para o Ensino Fundamental, e em dezembro de 2017 para o Ensino Médio.

Segundo o Ministério da Educação, a BNCC é um documento normativo que estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que os estudantes têm direito. Com ela as redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e/ou propostas pedagógicas.

2.2 A Matemática na Base Nacional Comum Curricular

A respeito da Matemática, o documento sugere articular seus distintos campos, por exemplo: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. É claro que esses conceitos são indispensáveis para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

Além disso, nota-se uma indução para que diversas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas, trocas mercantis e representações gráficas sejam trabalhadas com maior afinco e ênfase para a aplicabilidade.

Sendo assim, a BNCC para o Ensino Fundamental propõe cinco unidades temáticas correlacionadas. São elas: *números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística*.

Números

Essa primeira unidade temática busca desenvolver o pensamento numérico, conhecimento de formas de quantificar objetos e de julgar e interpretar argumentos quantitativos.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a expectativa é que os alunos resolvam problemas com números naturais e racionais com representação decimal finita, atribuindo diferentes significados às operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a validade dos resultados encontrados. Espera-se ainda que os alunos desenvolvam estratégias distintas para a resolução dos problemas por estimativa, cálculo mental, algoritmos e calculadoras.

Ainda nessa etapa espera-se o desenvolvimento de habilidades na leitura, escrita e ordenação de números naturais e racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal e do valor posicional dos algarismos. Sugere-se proporcionar aos alunos experiências que aprofundem as noções de número e medições, evidenciando a necessidade e importância dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária.

Já nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante fornecer problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para a resolução, de modo que eles reconheçam a necessidade dos números irracionais.

Espera-se que os alunos saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais na reta numérica.

Além disso, esses alunos devem dominar o cálculo de porcentagem, porcentagem

de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, com inclusão de tecnologias digitais. Outro aspecto considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Aqui valida-se mais uma vez a proposta desse trabalho, haja visto que a Matemática Financeira contempla tais habilidades.

Portanto essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar das dimensões culturais, sociais, políticas, psicológicas e econômicas, sobre consumo, trabalho e dinheiro. Tais questões, promovem o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, constituem situações para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e proporcionam contextos para ampliação e aprofundamento desses mesmos conceitos.

Álgebra

A segunda unidade tem por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, que faz-se necessário para a compreensão, representação e análise das relações existentes entre grandezas. Sendo assim, espera-se que os alunos sejam capazes de identificar regularidades e padrões, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas e interpretem as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolução de problemas por meio de equações e inequações. Os principais conceitos matemáticos dessa unidade são equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Também é importante que os alunos saibam interpretar e traduzir as informações apresentadas através de tabelas e gráficos.

Geometria

Essa unidade temática consiste em dominar os conceitos e processos necessários para a resolução de problemas do mundo físico e de diversas áreas do conhecimento. Portanto, cabe a essa unidade temática estudar a posição e os deslocamentos de entes geométricos no espaço, as formas e relações entre os diversos elementos de figuras nos ambientes bidimensionais e tridimensionais, a fim de despertar e/ou aprimorar o pensamento geométrico dos alunos. Espera-se ainda, que os alunos sejam capazes de identificar e estabelecer referenciais para a localização e o deslocamento de objetos e estimar distâncias através do uso de mapas e outras representações (cabe aqui incluir o uso de softwares e outras ferramentas).

Outras habilidades que devem ser desenvolvidas nessa unidade, ainda nos anos iniciais, são a capacidade de associar figuras espaciais às suas planificações e vice-versa; nomear e comparar polígonos, a partir de suas propriedades quanto aos lados, vértices e ângulos; e identificar simetrias.

Já nos anos finais, essa unidade deve servir para a consolidação e ampliação dos conceitos já estudados, além de proporcionar o desenvolvimento de novas habilidades. São elas: analisar e construir transformações, ampliações e reduções de figuras geométricas planas; identificar os seus elementos e propriedades, a fim de reconhecer

as condições necessárias e suficientes para a congruência e semelhança de triângulos; realizar demonstrações simples, desenvolvendo o raciocínio hipotético-dedutivo, fundamental para o conhecimento matemático dos estudantes. Deseja-se também que Álgebra e Geometria estejam devidamente relacionadas, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica e dos conceitos de coordenadas. Portanto, não limita-se Geometria a simples aplicações de cálculo de perímetros, áreas e de volumes, nem a aplicações de teoremas como o de Pitágoras.

Grandezas e medidas

A quarta unidade temática favorece a interdisciplinaridade da Matemática com outras áreas de conhecimento ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas. Por exemplo, em Ciências quando aborda densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica; ou Geografia ao falar de densidade demográfica, escalas de mapas, etc.. Tal unidade temática auxilia também na consolidação e ampliação das noções de número, geométricas e na construção do pensamento algébrico.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, deseja-se que os alunos sejam capazes de resolver problemas de situações cotidianas envolvendo grandezas como comprimento, tempo, temperatura, área de triângulos e retângulos, capacidade e volume de sólidos formados por blocos retangulares, sem uso de fórmulas, recorrendo a estratégias mais intuitivas. Espera-se ainda, que resolvam problemas sobre situações de compra e venda e que desenvolvam atitudes condizentes com o consumo consciente. A BNCC sugere que esse processo seja iniciado através de unidades não convencionais para fazer comparações e medições, enfatizando o real sentido da ação de medir.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a expectativa é que os alunos reconheçam grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas que envolvam tais grandezas pelo uso das unidades de medida mais usuais.

Probabilidade e estatística

Na última unidade temática, Probabilidade e Estatística, são propostas abordagens de conceitos, fatos e procedimentos presentes em situações cotidianas, científicas e tecnológicas. Sabemos que todo cidadão precisa desenvolver habilidades para coleta, organização, representação, interpretação e análise de dados em diversos contextos a fim de avaliar prejuízos e benefícios, para então tomar as decisões adequadas para cada situação.

Para isso, a BNCC estimula o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, para avaliar e comparar resultados que auxiliam na construção de gráficos para as mais diversas aplicações. O uso de pesquisas e censos como os do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) pode oferecer contextos muito úteis para a abordagem desses conceitos em sala de aula. Aqui destacamos mais uma oportunidade para abordar o tema Matemática Financeira.

Para o estudo das noções de probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental sugere-se destacar que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, utilizam-se situações em que o resultado é aleatório. Já nos anos finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado através de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações com o objetivo de validar os resultados encontrados. Com relação à estatística, são propostas atividades que envolvam coleta e organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. Então estarão desenvolvendo a habilidade de construir relatórios de pesquisas, tabelas e diversos tipos de gráficos para apresentação e análise dos resultados obtidos.

Dito isso, é possível concluir que a BNCC destaca que a aprendizagem e o desenvolvimento das habilidades matemáticas estão intrinsecamente relacionados à compreensão dos significados dos objetos matemáticos juntamente com suas aplicações. Sendo assim, tais significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e seu cotidiano, desse modo, recursos didáticos como a história da matemática, malhas quadriculadas, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares têm grande importância para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Nesse trabalho propomos poucas atividades ligadas ao uso de softwares, pois o nosso objetivo é contemplar todo tipo de escolas, inclusive aquelas em que não há estrutura física e/ou suporte para tais ferramentas.

Faz-se necessário considerar as experiências e os conhecimentos matemáticos anteriormente vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam analisar e estabelecer relações quantitativas e qualitativas entre eles, desenvolvendo ideias mais complexas.

2.3 Estudo da BNCC e atividades propostas

Nesta seção deseja-se explorar os objetos de conhecimento e habilidades apresentados na BNCC que estão relacionados à Matemática Financeira, citando para cada um deles, exemplos de exercícios e atividades que podem ser aplicadas em sala de aula. Tais atividades foram elaboradas e escritas pela professora autora, salvo os dados utilizados em algumas delas, referenciados sempre que aparecerem.

Algumas atividades propostas estão apresentadas no Capítulo 3, por isso a leitura deste texto poderá ser intercalada entre os dois capítulos. Sempre que isso for necessário iremos citar além do número do exemplo, a página em que o mesmo se encontra.

Todos os tópicos emoldurados abaixo para o Ensino Fundamental são trechos retirados da BNCC, [7], e as páginas em que se encontram estão citadas junto dos mesmos, assim como para o Ensino Médio cujos trechos foram retirados de [8].

Vale destacar que as propostas para o Ensino Médio não estão organizadas com "Objetos de Conhecimento" e "Habilidades", mas sim por "Competências Específicas" e "Habilidades".

Antes de começar é preciso salientar, ainda, que cada habilidade é identificada por um código alfanumérico composto da seguinte maneira para o Ensino Fundamental:

EF01MA05

- As duas primeiras letras indicam a etapa educacional.
- Os dois algarismos seguintes referem-se ao ano para o qual se direciona a habilidade.
- O segundo par de letras indica o componente curricular.
- O segundo par de números refere-se à posição da habilidade na numeração sequencial daquele ano.

Portanto, o código EF01MA05 refere-se à quinta habilidade de Matemática para alunos do primeiro ano do Ensino Fundamental.

O Ensino Médio também tem suas habilidades identificadas por um código alfanumérico que é composto da seguinte maneira:

EM13MAT305

- As duas primeiras letras indicam a etapa educacional.
- Os dois algarismos seguintes indicam que a habilidade descrita pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio.
- As três letras seguintes indicam a área ou componente curricular.
- O primeiro número que segue refere-se à competência específica à qual se relaciona a habilidade enumerada pelos dois números seguintes.

Portanto, o código EM13MAT305 refere-se à quinta habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias relacionada à competência específica 3, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio.

2.3.1 1º Ano do Ensino Fundamental

Grandezas e Medidas

Objeto de Conhecimento

Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas.

Habilidade

(EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.

[Páginas 280 e 281]

Atividade proposta

O Sistema Monetário Brasileiro é composto pelas cédulas e moedas do Real, conforme a Figura 2.1 abaixo. Organize separadamente as cédulas e moedas em ordem crescente de valor.

Figura 2.1: Cédulas e moedas do real



Fontes: [24] e [11].

Probabilidade e Estatística

Objeto de Conhecimento

Leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples.

Habilidade

(EF01MA21) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples.

[Páginas 280 e 281]

Atividade proposta

Em São Paulo, no primeiro dia do ano, é costume as crianças pedirem aos seus familiares o que chamam de "Bom Princípio de Ano Novo". Os dados apresentados na Tabela 2.1 abaixo representam os valores arrecadados por três primos no ano passado:

Tabela 2.1: Bom Princípio de Ano Novo

Bruno	R\$15,00
Carina	R\$20,00
Diego	R\$10,00

Sabendo disso, responda:

- Qual foi a criança que ganhou mais dinheiro?
 - Qual foi a criança que ganhou menos dinheiro?
-

2.3.2 2º Ano do Ensino Fundamental

Álgebra

Objeto de Conhecimento

Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.

Habilidade

(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.

[Páginas 282 e 283]

Atividade proposta

André quer guardar dinheiro por 4 semanas. Ele tem R\$5,00 e combinou com seus pais que receberá toda semana R\$3,00 de mesada. Começando pelos R\$5,00 que ele já tem, escreva a sequência dos valores que ele terá acumulado a cada semana.

_____, _____, _____, _____, _____.

Grandezas e Medidas

Objeto de Conhecimento

Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas e equivalência de valores.

Habilidade

(EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas.

[Páginas 284 e 285]

Atividade proposta

Bárbara foi a uma lanchonete e gastou R\$14,00. Como ela poderá pagar essa conta usando cédulas e moedas da Figura 2.1 sem receber troco, ou seja, com a quantia exata? Escreva três formas diferentes.

Probabilidade e Estatística

Objeto de Conhecimento

Coleta, classificação e representação de dados em tabelas simples e de dupla entrada e em gráficos de colunas.

Habilidades

(EF02MA22) Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima.

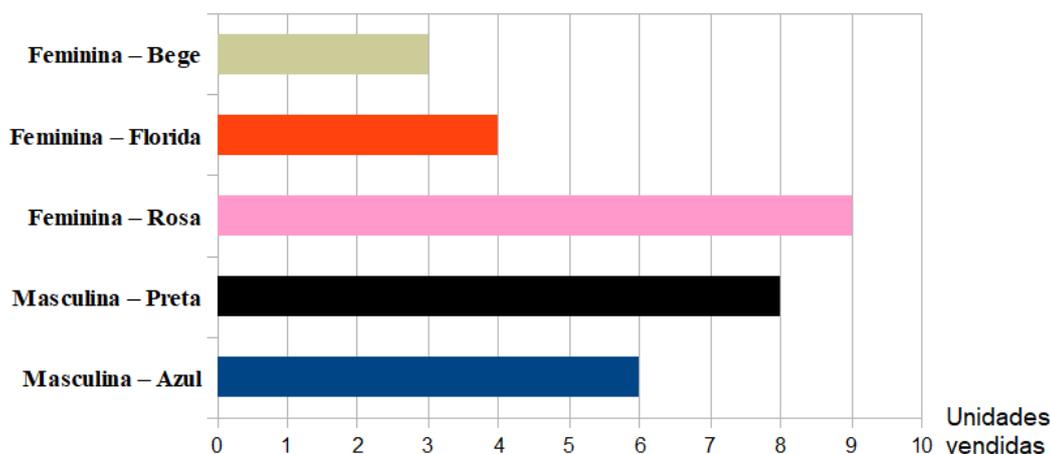
(EF02MA23) Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas e gráficos de colunas simples.

[Páginas 284 e 285]

Atividade proposta

Caio tem uma loja de chinelos. Ele fez um balanço dos produtos vendidos na semana passada de acordo com os modelos e cores conforme o gráfico da Figura 2.2.

Figura 2.2: Balanço das vendas da loja de Caio



- Qual foi o produto mais vendido?
- Qual foi o produto menos vendido?
- Quantos chinelos masculinos foram vendidos?
- Quantos chinelos femininos foram vendidos?
- Ao todo, quantos chinelos a loja vendeu na semana passada?

2.3.3 3º Ano do Ensino Fundamental

Números

Objeto de Conhecimento

Leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de quatro ordens.

Habilidade

(EF03MA01) Ler, escrever e comparar números naturais de até a ordem de unidade de milhar, estabelecendo relações entre os registros numéricos e em língua materna.

[Páginas 286 e 287]

Atividade proposta

A loja de Ivone recebeu quatro cheques como forma de pagamento de alguns clientes e em todos eles o espaço "Pague por este cheque a quantia de" onde costuma-se escrever o valor do cheque por extenso, não estava preenchido, conforme mostra a Figura 2.3.

Figura 2.3: Cheques recebidos na loja de Ivone

Comp	Banco	Agência	C1	Número da conta	C2	Número do cheque	C3	R\$
00	000	0000	0	00000-0	0	0000000	0	1.273,00

Pague por este cheque a quantia de _____

a **Ivone Cia Ltda**

 Piracicaba , 10 de maio , 2018

José Silveira
(assinatura)

FINANCER Cliente desde
CPF: 000.000.000-0 00/00/00

Comp	Banco	Agência	C1	Número da conta	C2	Número do cheque	C3	R\$
00	000	0000	0	00000-0	0	0000000	0	3.721,00

Pague por este cheque a quantia de _____

a **Ivone Cia Ltda**

 Piracicaba , 14 de maio , 2018

Maria da Graça Flores
(assinatura)

FINANCER Cliente desde
CPF: 000.000.000-0 00/00/00

Comp	Banco	Agência	C1	Número da conta	C2	Número do cheque	C3	R\$
00	000	0000	0	00000-0	0	0000000	0	7.132,00

Pague por este cheque a quantia de _____

a **Ivone Cia Ltda**

 Piracicaba , 08 de maio , 2018

Ana Pereira
(assinatura)

FINANCER Cliente desde
CPF: 000.000.000-0 00/00/00

Comp	Banco	Agência	C1	Número da conta	C2	Número do cheque	C3	R\$
00	000	0000	0	00000-0	0	0000000	0	2.317,00

Pague por este cheque a quantia de _____

a **Ivone Cia Ltda**

 Piracicaba , 17 de maio , 2018

Tiago Rocha
(assinatura)

FINANCER Cliente desde
CPF: 000.000.000-0 00/00/00

Fonte: Adaptado de [10].

Recorte os quatro cheques, complete a informação faltante em cada um deles e cole-os em seu caderno organizando-os em ordem crescente de valor.

Objeto de Conhecimento

Composição e decomposição de números naturais.

Habilidade

(EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.

[Páginas 286 e 287]

Atividade proposta

Para pagar um boleto no valor de R\$3.420,00, Eduardo tem um cheque no valor de R\$3.000,00, duas notas de R\$100,00 e três notas de R\$50,00. Ele tem algumas notas de R\$10,00 em sua carteira. Determine quantas dessas notas ele precisa para que consiga pagar a conta de forma exata (sem que ele receba troco).

Álgebra**Objeto de Conhecimento**

Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.

Habilidade

(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

[Páginas 286 e 287]

Atividade proposta

A família de Flávia está poupando dinheiro para viajar nas próximas férias que serão daqui a seis meses. Atualmente eles possuem R\$2.300,00 e guardam R\$250,00 a cada mês. Escreva uma sequência que represente o valor arrecadado por eles, começando pelo próximo mês e terminando na data da viagem.

Grandezas e Medidas**Objeto de Conhecimento**

Sistema monetário brasileiro: estabelecimento de equivalências de um mesmo valor na utilização de diferentes cédulas e moedas.

Habilidade

(EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca.

[Páginas 288 e 289]

Atividade proposta

O caixa de um supermercado está sem troco e o funcionário vai ao caixa ao lado para trocar uma nota de R\$100,00 por moedas e notas de menor valor. Dê três exemplos de possíveis trocas considerando que ao final delas ele deverá ter ao menos dois tipos de moedas e notas de R\$2,00, R\$5,00, R\$10,00, R\$20,00 e R\$50,00.

Probabilidade e Estatística**Objeto de Conhecimento**

Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras.

Habilidades

(EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas.

(EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos.

[Páginas 288 e 289]

Atividade proposta

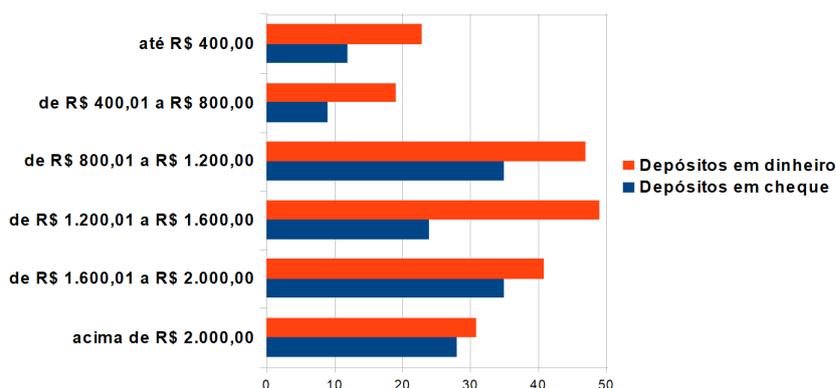
O Banco Gama fez uma pesquisa para saber se o tipo de depósito que seus clientes mais utilizaram na última semana é cheque ou dinheiro em algumas faixas de valor e obteve os seguintes resultados:

Tabela 2.2: Pesquisa sobre os depósitos no Banco Gama

Valor	Depósitos em dinheiro	Depósitos em cheque
até R\$400,00	23	12
de R\$400,01 a R\$800,00	19	9
de R\$800,01 a R\$1.200,00	47	35
de R\$1.200,01 a R\$1.600,00	49	24
de R\$1.600,01 a R\$2.000,00	41	35
acima de R\$2.000,00	31	28

Com base na Tabela 2.2, foi elaborado o gráfico da Figura 2.4:

Figura 2.4: Pesquisa sobre os depósitos no Banco Gama



Com base nos resultados apresentados, responda as perguntas abaixo:

- Qual foi a modalidade e a faixa de valor do depósito ocorrido com maior frequência na última semana?
- Qual foi a modalidade e a faixa de valor do depósito ocorrido com menor frequência na última semana?
- De acordo com a pesquisa, o que o banco pôde concluir a respeito da opção de depósito mais utilizada pelos clientes na semana passada?
- Por que você acha que esse tipo de depósito tem sido cada vez mais comum do que o outro?

Objeto de Conhecimento

Coleta, classificação e representação de dados referentes a variáveis categóricas, por meio de tabelas e gráficos.

Habilidade

(EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.

[Páginas 288 e 289]

Atividade proposta

Faça uma pesquisa com os seus colegas de classe para saber qual valor, em geral, eles recebem dos pais por mês. Para isso utilize as seguintes perguntas:

- a) Você costuma receber algum dinheiro de seus pais por mês?
- b) Se sim, qual é o valor aproximado que eles costumam te dar?

Anote os nomes dos colegas e as respostas deles. Em seguida, preencha a Tabela 2.3 abaixo.

Tabela 2.3: Resultados da pesquisa sobre mesada

	não recebem todo mês	até R\$10,00	de R\$10,01 a R\$20,00	R\$20,01 a R\$30,00	R\$30,01 ou mais
Quantidade de alunos					

Com base nos resultados obtidos por você, elabore um gráfico de barras para representá-los.

2.3.4 4º Ano do Ensino Fundamental

Números

Objeto de Conhecimento

Sistema de numeração decimal: leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de até cinco ordens.

Habilidade

(EF04MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem de dezenas de milhar.

[Páginas 290 e 291]

Atividade proposta

A Figura 2.5 abaixo apresenta três recibos emitidos pela loja Casa das Tintas. Recorte-os, complete a informação faltante em cada um deles e cole-os em seu caderno organizando-os em ordem decrescente de valor.

Figura 2.5: Recibos da Casa das Tintas

RECIBO	VALOR R\$ 10.342,00
Recebi (emos) de Araldo dos Santos	
a quantia de	
Correspondente a Nota fiscal 316.027	
e para clareza firmo (amos) o presente.	
Piracicaba , 17 de junho de 2018	
Casa das Tintas	

RECIBO	VALOR R\$
Recebi (emos) de José Tolledo	
a quantia de treze mil, quatrocentos e vinte e três reais	
Correspondente a Nota fiscal 315.986	
e para clareza firmo (amos) o presente.	
Piracicaba , 15 de junho de 2018	
Casa das Tintas	

RECIBO	VALOR R\$ 24.013,00
Recebi (emos) de Talita de Oliveira	
a quantia de	
Correspondente a Nota fiscal 320.891	
e para clareza firmo (amos) o presente.	
Piracicaba , 20 de junho de 2018	
Casa das Tintas	

Fonte: Adaptado de [21].

Objeto de Conhecimento

Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.

Habilidades

(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

[Páginas 290 e 291]

Atividade proposta

A Figura 2.6 a seguir é o panfleto de uma loja que anunciou a oferta de uma televisão com duas formas de pagamento. Helena deseja comprar a TV que está na promoção, mas antes precisa saber se pagará menos comprando à vista ou em doze parcelas. Qual das duas opções ela deverá escolher?

Figura 2.6: Panfleto da oferta da TV



Objeto de Conhecimento

Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro.

Habilidade

(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

[Páginas 290 e 291]

Atividade proposta

Sabemos que é possível escrever um número racional através da representação decimal. Para facilitar, vamos exemplificar usando nosso sistema monetário. Veja a Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Números racionais: representação decimal para valores do sistema monetário brasileiro

Número racional	Representação decimal	Representação monetária	Valor monetário
um décimo $\left(\frac{1}{10}\right)$	0,1 ou 0,10	R\$0,10	dez centavos
três décimos $\left(\frac{3}{10}\right)$	0,3 ou 0,30	R\$0,30	trinta centavos
um centésimo $\left(\frac{1}{100}\right)$	0,01	R\$0,01	um centavo
quarenta e cinco centésimos $\left(\frac{45}{100}\right)$	0,45	R\$0,45	quarenta e cinco centavos

De acordo com o que vimos anteriormente, descubra qual é a representação decimal do número racional que equivale a:

- Cinquenta centavos
- Noventa e dois centavos
- Vinte e cinco centavos
- Oitenta centavos

Grandezas e Medidas

Objeto de Conhecimento

Problemas utilizando o sistema monetário brasileiro.

Habilidade

(EF04MA25) Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável.

[Páginas 292 e 293]

Atividade proposta

Ivo está em uma loja de eletrodomésticos para comprar uma geladeira. Para o modelo desejado por ele, o vendedor ofereceu as seguintes formas de pagamento:

- R\$2.000,00 divididos em 10 parcelas sem juros;
- R\$1.783,00 à vista.

Levando em conta tais informações, responda as perguntas abaixo.

- a) Qual é o valor do desconto para o pagamento à vista?
- b) Se Ivo pagar com quinze notas de R\$100,00 e seis notas de R\$50,00, qual será o valor do troco que receberá do vendedor?

Probabilidade e Estatística

Objeto de Conhecimento

Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e colunas e gráficos pictóricos.

Habilidade

(EF04MA27) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise.

[Páginas 292 e 293]

Atividade proposta

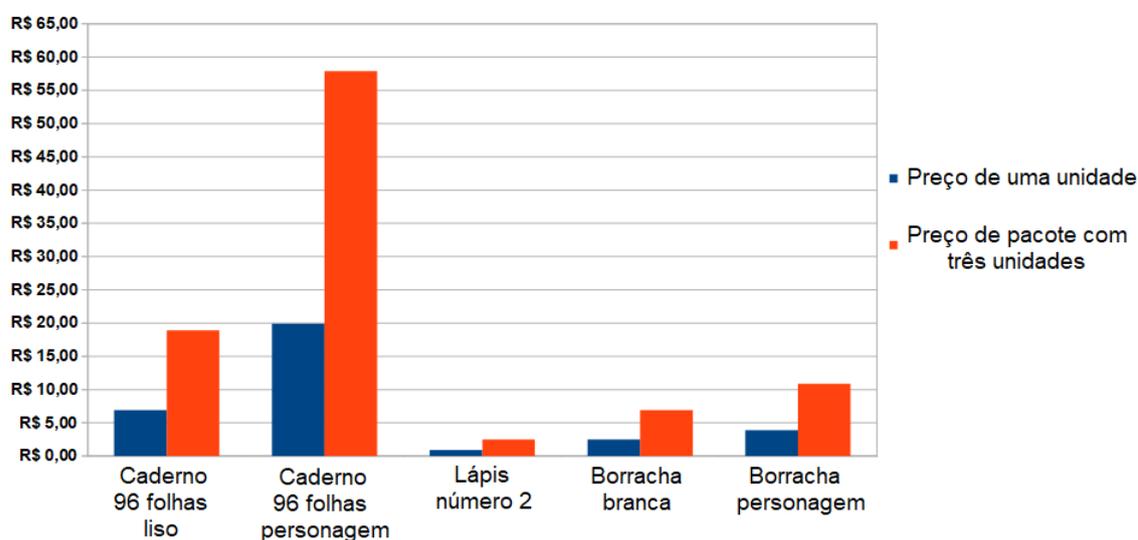
A mãe de Jairo precisa comprar os materiais escolares do filho e tentando economizar fez uma pesquisa sobre os valores de alguns produtos, conforme a Tabela 2.5 abaixo.

Tabela 2.5: Pesquisa de preços de materiais escolares

Produto	Preço de uma unidade	Preço de pacote com três unidades
Caderno 96 folhas liso	R\$6,90	R\$18,90
Caderno 96 folhas personagem	R\$19,90	R\$57,90
Lápis número 2	R\$0,90	R\$2,50
Borracha branca	R\$2,50	R\$6,90
Borracha personagem	R\$3,90	R\$10,90

Com esses dados, organizamos o gráfico da Figura 2.7:

Figura 2.7: Preços de materiais escolares



De acordo com as informações apresentadas, quais materiais a mãe de Jairo deve escolher? Escreva os motivos pelos quais você acredita que essas sejam as melhores opções.

Objeto de Conhecimento

Diferenciação entre variáveis categóricas e variáveis numéricas.

Coleta, classificação e representação de dados de pesquisa realizada.

Habilidade

(EF04MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais.

[Páginas 292 e 293]

Atividade proposta

Imagine que a sua escola está preparando uma festa e resolveu fazer uma pesquisa para decidir qual tipo de sorvete irá vender: picolé ou sorvete de massa. Imagine também que você será o responsável por fazer essa pesquisa entre seus colegas e depois elaborar um gráfico com os resultados. Então agora questione os alunos de sua turma para saber qual é a preferência de cada um, anote as respostas e mãos a obra.

Atenção: você precisará saber quantos alunos entrevistou para definir quantos preferem picolé e quantos preferem sorvete de massa, por isso não se esqueça de anotar o nome de cada participante.

2.3.5 5º Ano do Ensino Fundamental**Números****Objeto de Conhecimento**

Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica.

Habilidade

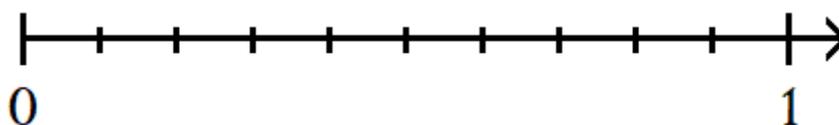
(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Katia recebe mensalmente um salário de R\$2.400,00 e gasta $\frac{1}{4}$ dele com os gastos de seu apartamento, $\frac{1}{10}$ com roupas e sapatos novos, $\frac{1}{5}$ com transporte e $\frac{1}{6}$ com alimentação. O valor restante ela usa para outras despesas e guarda o que sobra em sua poupança.

Localize as frações listadas no parágrafo anterior na reta numérica abaixo.



Objeto de Conhecimento

Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.

Habilidades

(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.

(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Katia recebe mensalmente um salário de R\$2.400,00 e gasta 0,1 dele com roupas e sapatos novos, $\frac{1}{4}$ com os gastos de seu apartamento, 0,2 com transporte e $\frac{1}{6}$ com alimentação. O valor restante ela usa para outras despesas e guarda o que sobra em sua poupança.

Identifique o valor gasto por Katia com cada despesa (em reais) e ordene-os em forma crescente.

Objeto de Conhecimento

Cálculo de porcentagens e representação fracionária.

Habilidade

(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Lucas quer comprar um computador novo que custa, à vista, R\$2.000,00, mas ele não possui esse dinheiro, portanto irá parcelar sua compra e terá que pagar juros sobre esse valor. Veja na Tabela 2.6 o percentual de juros de acordo com o número de parcelas.

Tabela 2.6: Juros para parcelamento do computador

Número de parcelas	Juros
2 ou 3	10%
4 ou 5	25%
6 ou 7	50%
8 ou 9	75%
10	100%

Use cálculos mentais, para determinar qual será o valor total pago por ele se parcelar sua compra em:

- a) 3 parcelas
- b) 4 parcelas
- c) 7 parcelas
- d) 8 parcelas
- e) 10 parcelas

Objeto de Conhecimento

Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita.

Habilidade

(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Ontem a mãe de Maria pediu para que ela fosse à padaria e comprasse algumas coisas com uma nota de R\$50,00. Ela comprou um refrigerante por R\$6,70, alguns pães por R\$8,25, frios fatiados por R\$9,15 e uma barra de chocolate por R\$4,50. Qual foi o valor total gasto por Maria? E qual foi o troco recebido por ela?

Objeto de Conhecimento

Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais.

Habilidade

(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Narciso foi ao supermercado e gostaria de comprar uma garrafa de suco e dois pacotes de bolacha para o lanche. Ele achava que cada garrafa de suco e pacote de bolacha custariam, no máximo, R\$7,00 e R\$2,00, respectivamente.

- a) Faça uma estimativa para o valor que será gasto por ele nessa compra.
- b) Se os valores reais encontrados no supermercado foram R\$6,90 para a garrafa de suco e R\$1,85 para cada pacote de bolacha, qual foi o valor total gasto por ele nessa compra?

Álgebra**Objeto de Conhecimento**

Propriedades da igualdade e noção de equivalência.

Habilidades

(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Otto quer comprar a nova camisa de seu time de futebol, que custa R\$89,00, mas ele possui apenas R\$65,00. Descubra quanto falta para que ele consiga comprar a camisa.

Objeto de Conhecimento

Grandezas diretamente proporcionais.

Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

Habilidades

(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.

(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

[Páginas 294 e 295]

Atividade proposta

Patrícia começou a poupar dinheiro. No início do ano ela tinha R\$28,00. Toda semana, ela guarda mais R\$15,00 e não retira nada, pois deseja guardar o máximo que puder. Veja a Tabela 2.7 a seguir e verifique se o saldo das economias dela é proporcional ao número de semanas desde o começo do ano. Justifique sua resposta.

Tabela 2.7: Saldo da poupança de Patrícia

Semanas	início	1	2	3	...
Saldo	R\$28,00	R\$43,00	R\$58,00	R\$73,00	...

Probabilidade e Estatística**Objeto de Conhecimento**

Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráfico de colunas agrupadas, gráficos pictóricos e gráfico de linhas.

Habilidades

(EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões.

(EF05MA25) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.

[Páginas 296 e 297]

Atividade proposta

Escolha cinco colegas de classe para realizar uma pesquisa e saber qual é o valor gasto por eles na cantina da escola a cada semana e o que eles mais gostam de comprar lá. Inicialmente peça a eles que respondam as perguntas abaixo, em seguida, elabore um gráfico com as informações obtidas sobre o gasto semanal e uma tabela com as informações sobre a preferência de cada um. Por fim faça uma breve análise dos resultados encontrados.

Questionário:

1. Qual é o seu nome?
2. Em geral, quantos reais você gasta na cantina por semana?
3. O que você mais gosta de comprar na cantina?

2.3.6 6º Ano do Ensino Fundamental

Números

Objeto de Conhecimento

Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

Habilidades

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

[Páginas 300 e 301]

Atividade proposta

Alguns amigos foram a uma lanchonete e fizeram seus pedidos de acordo com o cardápio na Figura 2.8.

Figura 2.8: Cardápio

** CASA DOS LANCHES **	
<u>Lanches:</u>	
X-Bacon.....	R\$ 12,90
X-Salada.....	R\$ 10,90
Egg-Bacon.....	R\$ 14,80
X-Burguer.....	R\$ 9,90
<u>Bebidas:</u>	
Refrigerante 2L.....	R\$ 8,00
Refrigerante 350ml.....	R\$ 3,50
Suco 300ml.....	R\$ 3,50
Água 500ml.....	R\$ 1,90

Rafaela pediu um X-Burguer e uma lata de refrigerante, Sérgio pediu apenas um Egg-Bacon, Teresa comprou um X-Salada e uma água e Ulisses quis apenas um suco. Sendo assim, responda às perguntas:

- a) Quanto cada um gastou nessa lanchonete?

b) Se cada um deles pagou sua conta com uma nota de R\$20,00, qual é o valor que cada um receberá de troco?

c) Escreva uma forma de compor o troco dado a cada um deles citando quais cédulas e moedas podem ser utilizadas em cada caso.

Objeto de Conhecimento

Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três".

Habilidade

(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

[Páginas 300 e 301]

Atividade proposta

Realizou-se uma pesquisa sobre os gastos mensais de uma empresa e as conclusões foram:

- telefone: 10%
- limpeza e manutenção: 15%
- água e energia elétrica: 25%
- salários dos funcionários: 50%

Se o valor mensal pago pela empresa nesses itens é de R\$60.000,00, use cálculo mental para determinar quantos reais são gastos com:

- a) telefone
 - b) limpeza e manutenção
 - c) água e energia elétrica
 - d) salários dos funcionários
-

Álgebra

Objeto de Conhecimento

Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Habilidade

(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

[Páginas 302 e 303]

Atividade proposta

Vitória possui R\$50,00 em seu cofre, sendo R\$30,00 em cédulas e o restante em moedas. Responda as perguntas a seguir:

- Qual é a razão entre o valor em cédulas e o valor em moedas que ela possui nesse cofre?
- Que porcentagem do valor total nesse cofre representa o valor em moedas?

Grandezas e Medidas

Objeto de Conhecimento

Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.

Habilidade

(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

[Páginas 302 e 303]

Atividade proposta

Leia a Tabela 2.8 abaixo sobre algumas unidades de medida de tempo.

Tabela 2.8: Unidades de tempo

Bimestre	2 meses
Trimestre	3 meses
Quadrimestre	4 meses
Semestre	6 meses
Ano	12 meses

Considerando cada mês com 30 dias, complete a Tabela 2.9 abaixo conforme o modelo.

Tabela 2.9: Convertendo unidades de tempo

	MESES	DIAS
2 Bimestres	4	120
3 Trimestres		
3 Semestres		
2 Quadrimestres		
4 Bimestres		
2 Trimestres		
5 Bimestres		
3 Quadrimestres		

Probabilidade e Estatística

Objeto de Conhecimento

Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas.

Habilidades

(EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico.

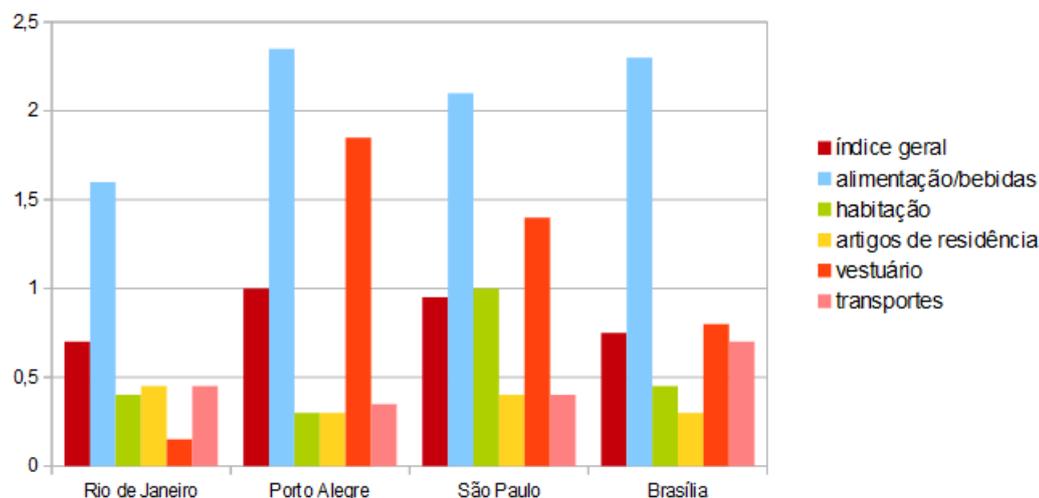
(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

[Páginas 304 e 305]

Atividade proposta

Para o cálculo da inflação utilizam-se índices de preços, por exemplo, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que baseia-se nos gastos de famílias residentes em áreas urbanas, com rendimentos mensais entre um e quarenta salários mínimos. Veja o gráfico a seguir que mostra as variações do IPCA de quatro cidades brasileiras em setembro de 2018, que influenciou na inflação do mês de outubro do mesmo ano.

Figura 2.9: Variações do IPCA em setembro de 2018



Fonte: Adaptado de [13].

Analise o gráfico e identifique qual item mais influenciou o resultado geral da inflação em outubro de 2018.

Objeto de Conhecimento

Coleta de dados, organização e registro.

Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações.

Habilidade

(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.

[Páginas 304 e 305]

Atividade proposta

A divisão em classes sociais no Brasil se dá de acordo com a renda média familiar. Considerando o valor do salário mínimo em 2018 sendo R\$954,00 temos as divisões em classes sociais de acordo com a Tabela 2.10 (valor do salário mínimo atualizado):

Tabela 2.10: Divisão em classes sociais com base na renda familiar

Classe	Número de Salários Mínimos	Renda Familiar
A	acima de 20	R\$19.080,01 ou mais
B	de 10 a 20	de R\$9.540,01 a R\$19.080,00
C	de 4 a 10	de R\$3.816,01 a R\$9.540,00
D	de 2 a 4	de R\$1.908,01 a R\$3.816,00
E	até 2	até R\$1.908,00

Fonte: [1]

Considerando a Tabela 2.10 acima, os alunos devem pesquisar no site [19] a renda bruta de cinco pessoas de diferentes cargos da Prefeitura do Município de Piracicaba. Assumindo que tais pessoas são as únicas com alguma renda em suas famílias, os alunos deverão identificar qual é a classe social em que a família de cada um desses servidores se enquadra, posteriormente, compartilhar as informações encontradas com os colegas, completar a Tabela 2.11 e responder as perguntas abaixo.

Tabela 2.11: Dados encontrados na pesquisa

Cargo do funcionário	Renda	Classe Social
⋮	⋮	⋮

- a) Qual foi a renda familiar média dos servidores pesquisados?
- b) Em qual classe social podemos dizer que eles se enquadram?
- c) Construa um gráfico de barras com os resultados obtidos relacionando as informações que desejar.

Objeto de Conhecimento

Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas.

Habilidade

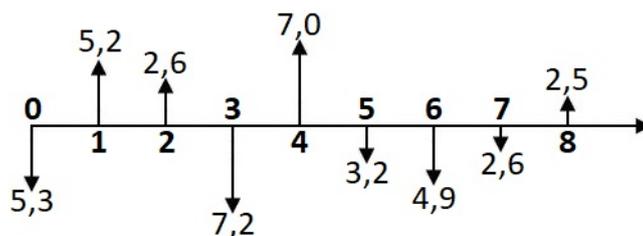
(EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

[Páginas 304 e 305]

Atividade proposta

O diagrama da Figura 2.10 abaixo representa o fluxo de caixa de uma empresa desde sua abertura até o fim do oitavo mês de funcionamento, onde 0 indica o momento de abertura e os demais pontos indicam períodos mensais, enquanto as setas para cima e para baixo representam, respectivamente, entradas (lucros) e saídas de dinheiro (prejuízo) em milhares de reais no mês indicado.

Figura 2.10: Fluxo de caixa de uma empresa



Com base nas informações apresentadas, responda:

a) Considerando todos os meses de 0 a 8, em quais as quantias de entrada superaram as de saída? Justifique sua resposta.

b) Ao final desses 8 meses, a empresa apresentou lucro ou prejuízo? De quantos milhares?

2.3.7 7º Ano do Ensino Fundamental

Números

Objeto de Conhecimento

Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples.

Habilidade

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

[Páginas 306 e 307]

Atividade proposta

Wilma recebe R\$3.600,00 mensalmente e gasta sempre 30% desse valor com as prestações de seu apartamento. Em determinado mês ela gastou 25% do valor restante em alimentação. Determine quanto ela gastou com alimentação naquele mês?

Probabilidade e Estatística

Objeto de Conhecimento

Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados.

Habilidade

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

[Páginas 310 e 311]

Atividade proposta

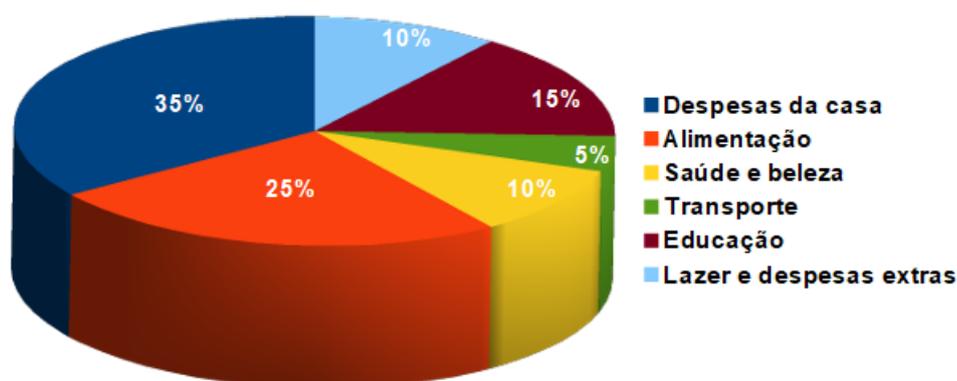
De acordo com o site [12], ter uma planilha de gastos é fundamental no controle do orçamento doméstico ainda mais em tempos difíceis da economia.

Nesse site encontramos um trecho em que o economista Samy Dana afirma:

Com as despesas da casa, como água, luz e aluguel, o ideal é gastar, no máximo, 35% do orçamento. Com alimentação, que inclui supermercado e refeições fora de casa, o percentual fica em 25%. Saúde e beleza, que compreende plano de saúde privado, remédios e salão de beleza, os gastos não devem ultrapassar 10% do orçamento. Com o transporte devem ser gastos, no máximo, 5%, com educação 15% e para o lazer e despesas extras, outros 10% do orçamento estão comprometidos. Se o percentual gasto passar desses valores é interessante rever o orçamento e tentar reduzir as despesas até atingir o patamar.

Dessa forma, o gráfico ideal seria o que está apresentado na Figura 2.11 abaixo.

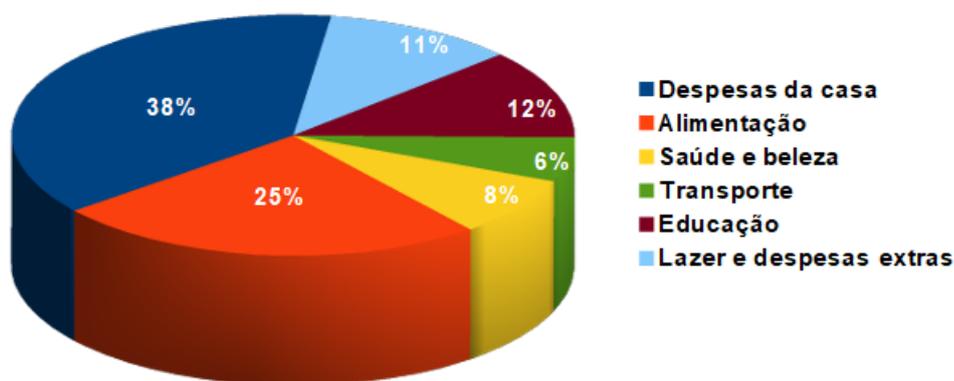
Figura 2.11: Gráfico da planilha de gastos ideal



Fonte: [12].

Yuri fez o gráfico apresentado na Figura 2.12 a partir da planilha dos gastos de sua família.

Figura 2.12: Gráfico da planilha de gastos da família de Yuri



Analise-o comparando ao gráfico da Figura 2.11 e determine quais mudanças a família dele deverá fazer em seus gastos.

2.3.8 8º Ano do Ensino Fundamental

Números

Objeto de Conhecimento

Potenciação e radiciação.

Habilidade

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

[Páginas 312 e 313]

Atividade proposta

Exemplo 3.29, página 75.

Objeto de Conhecimento

Porcentagens.

Habilidade

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

[Páginas 312 e 313]

Atividade proposta

Zeca fez um empréstimo de R\$5.000,00 com duração de um ano e juros simples de 1% ao mês. Faça uma tabela como a do Exemplo 3.3 (página 58), para descobrir o valor que pagará por todo o empréstimo (incluindo os juros).

Álgebra**Objeto de Conhecimento**

Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Habilidades

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

[Páginas 312 e 313]

Atividade proposta

Faça um gráfico no plano cartesiano para representar a situação da atividade anterior e identifique se o valor pago por Zeca é diretamente, inversamente ou não proporcional à duração do empréstimo.

Observação:

Aqui cabe ao professor trabalhar também as relações e diferenças entre gráficos contínuos e discretos, como na habilidade EF08MA23 a seguir.

Probabilidade e Estatística**Objeto de Conhecimento**

Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados.

Habilidade

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

[Páginas 314 e 315]

Atividade proposta

Explorar a aplicação sobre o empréstimo de Zeca, com o objetivo de identificar qual é o gráfico mais apropriado para ela.

Objeto de Conhecimento

Pesquisas censitária ou amostral.

Planejamento e execução de pesquisa amostral.

Habilidades

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

[Páginas 314 e 315]

Atividade proposta

Utilizar a aplicação apresentada para a habilidade EF06MA33 agora adaptando as amostras a quinze cargos distintos, ampliando os perfis analisados.

2.3.9 9º Ano do Ensino Fundamental

Números**Objeto de Conhecimento**

Potências com expoentes negativos e fracionários.

Habilidade

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

[Páginas 316 e 317]

Atividade proposta

Exemplo 3.32, página 78.

Objeto de Conhecimento

Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos.

Habilidade

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

[Páginas 316 e 317]

Atividade proposta

Exemplo 3.40, página 87.

Álgebra**Objeto de Conhecimento**

Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.

Habilidade

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

[Páginas 316 e 317]

Atividade proposta

A caderneta de poupança é uma modalidade de aplicação de liquidez imediata, ou seja, o aplicador pode sacar seu saldo a qualquer momento. Sua remuneração está fixada pela taxa referencial mais 0,5% a.m. de juros, sendo creditada mensalmente para os depositantes. O cálculo dos rendimentos tem por base o menor saldo mantido pelo aplicador no período.

Considerando uma remuneração média de 1% de juros ao mês e um depósito inicial no valor de R\$2.000,00, sem saques posteriores, determine o saldo disponível ao aplicador após n meses utilizando uma função para a resolução desse problema e faça um gráfico para representar tal situação.

Objeto de Conhecimento

Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Habilidade

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

[Páginas 316 e 317]

Atividade proposta

Aplicação 3.12, página 87.

Probabilidade e Estatística

Objeto de Conhecimento

Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação.

Habilidade

(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

[Páginas 318 e 319]

Atividade proposta

Analise o gráfico presente na Figura 2.13 abaixo, divulgado pelo Programa Conta Corrente do canal GloboNews, sobre o fechamento do índice de inflação IPCA em 2013.

Figura 2.13: Gráfico em noticiário



Fonte: Adaptado de [2].

O que você pode dizer sobre esse gráfico?

Objeto de Conhecimento

Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos.

Habilidade

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

[Páginas 318 e 319]

Atividade proposta

Utilizar os dados da Tabela 2.1 nas habilidades EF03MA26 e EF03MA27 para elaborar um gráfico que represente as informações da forma mais adequada.

2.3.10 Ensino Médio

Competência Específica 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018, p. 532).

Essa competência é bastante ampla e pressupõe habilidades que favoreçam ao estudante interpretar e compreender a realidade através dos diversos conceitos e campos da Matemática, contribuindo para a formação crítica e reflexiva dos alunos como cidadãos. Para isso, os estudantes devem ser capazes de analisar criticamente aquilo que acessam nos meios de comunicação e suas generalizações.

Competência Específica 1**Habilidades**

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

[Página 533]

Atividade proposta

Aplicação em 3.12, página 87.

Competência Específica 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 534).

O objetivo dessa competência é ampliar a anterior, haja visto que coloca os estudantes em situações que exigem tomadas de decisão conjunta para investigar questões de impactos sociais e propor e/ou participar de iniciativas para solucionar esses problemas.

Sendo assim, essa competência deve fornecer condições para planejar e executar pesquisas, discutir projetos, valorizando a diversidade de opiniões.

Competência Específica 2**Habilidades**

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

[Página 534]

Atividade proposta

Para um bom planejamento econômico pessoal ou familiar, a estratégia mais recomendada por órgãos de educação financeira é elaborar uma planilha de orçamento para que cada um saiba exatamente quanto e onde gastou, documentando as receitas e despesas, fornecendo assim uma visão geral de como a renda é distribuída.

No site [6] é possível baixar uma dessas planilhas. Veja a Figura 2.14.

Figura 2.14: Planilha de orçamento pessoal

[B] ³ EDUCAÇÃO		Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ag	Set	Out	Nov	Dez
		Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor	Valor
RECEITAS	Salário												
	Aluguel												
	Pensão												
	Horas extras												
	13º salário												
	Férias												
	Outros												
Total	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
INVESTIMENTOS													
INVESTIMENTOS Insira aqui o montante mensal que você destinará aos seus investimentos	Ações												
	Título Direto												
	Renda fixa												
Previdência privada													
Outros													
Total	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
% sobre Receita	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
DESPESAS													
FIXAS Aqueles que têm o mesmo montante mensalmente	Habituação	Aluguel											
		Condomínio											
		Prestação da casa											
	Transporte	Seguro da casa											
		Dianista											
		Mensalista											
	Saúde	Prestação do carro											
		Seguro do carro											
		Estacionamento											
	Educação	Seguro saúde											
		Plano de saúde											
	Impostos	Colégio											
		Faculdade											
	Impostos	Curso											
		IPFU											
Outros	IPVA												
	Seguro de vida												
Total despesas fixas	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
% sobre Receita	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
VARIÁVEIS Aqueles que acontecem todos os meses mas podemos tentar reduzir	Habituação	Luz											
		Telefone											
		Telefone Celular											
	Transporte	Gás											
		Mensalidade TV											
		Internet											
	Alimentação	Manutenção											
		Combustível											
		Estacionamento											
	Saúde	Supermercado											
		Feira											
		Padaria											
	Cuidados pessoais	Medicamentos											
		Cabeloneiro											
		Manicure											
Outros	Esteticista												
	Academia												
	Clube												
Total despesas variáveis	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
% sobre Receita	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
EXTRAS São as despesas extraordinárias, para as quais precisamos estar preparados quando acontecerem	Saúde	Médico											
		Dentista											
		Hospital											
	Manutenção/prevenção	Carro											
		Casa											
Educação	Material escolar												
Uniforme													
Total despesas extras	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
% sobre Receita	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
ADICIONAIS Aqueles que não precisamos acontecer todos os meses	Lazer	Vigãna											
		Cinema/teatro											
		Restaurantes/bares											
	Vestuário	Locadora DVD											
		Roupas											
Outros	Calçados												
Presentes													
Total despesas adicionais	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
% sobre Receita	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
SALDO	Receita	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	Investimentos	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	Despesas fixas	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	Despesas variáveis	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	Despesas extras	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
	Despesas adicionais	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
Saldo	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00

Fonte: [6].

Elabore uma planilha que se adeque à sua realidade de acordo com suas receitas e despesas, em seguida faça uma análise do seu orçamento pessoal.

Competência Específica 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2017, p. 535).

Para o desenvolvimento dessa competência são necessárias habilidades como interpretar, construir modelos, resolver e formular problemas matemáticos em contextos relativos às áreas científicas e tecnológicas, haja visto que nessa etapa escolar cabe aos estudantes construir significados e desenvolver habilidades que futuramente servirão para a solução de problemas do seu cotidiano e da comunidade que os rodeia, inicialmente identificando e formulando matematicamente o problema, para então aplicar os conceitos aprendidos buscando finalmente a solução para o mesmo, às vezes sendo necessário ajustar e argumentar sobre os resultados obtidos.

Competência Específica 3

Habilidades

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

[Página 536]

Atividade proposta

Exemplo 3.36, página 82.

Competência Específica 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2017, p. 538).

Conhecer o significado e dominar o uso das diversas representações matemáticas auxiliam os alunos na hora de resolver problemas, conjecturar e argumentar matematicamente sobre as estratégias utilizadas na resolução. Dito isso a BNCC sugere a inclusão de ao menos duas representações distintas para cada situação matemática sempre que possível, variando as abordagens ao longo do desenvolvimento dos assuntos, mesmo que a transição entre elas seja complexa às vezes.

Competência Específica 4**Habilidades**

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

[Página 539]

Atividade proposta

Exemplo 3.40, página 87.

Competência Específica 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 540).

Aqui destacam-se as habilidades ligadas à capacidade de investigar e formular argumentos para a resolução de problemas através de dados observados e até mesmo estratégias para a indução dos resultados por meio de distintas abordagens nas mais diversas situações. Deseja-se então que os alunos consigam validar seus resultados através de argumentações formais com ou sem o uso de demonstrações.

É possível notar que tal habilidade como está organizada, evidencia a matemática como prática sujeita a erros e acertos em sua construção, ou seja, algo que empenha processos trabalhosos antes da obtenção dos resultados finais, diferentemente do que alguns estão acostumados a ver: uma ciência exata e acabada.

Competência Específica 5**Habilidades**

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

[Página 541]

Atividade proposta

Dedução da fórmula (3.3) de juros compostos como na Seção 3.4, página 63.

Além das atividades propostas nesse trabalho, é recomendado o site Khan Academy [17], uma organização sem fins lucrativos que oferece explicações, aulas e listas de exercícios sobre diversos assuntos, como ciências e engenharia, economia e finanças, computação e matemática, e que recentemente se reestruturou de forma a evidenciar em cada tópico a quais objetos de conhecimento e habilidades este está ligado, possibilitando ainda, buscas a partir dos códigos alfanuméricos das habilidades.

3 Conceitos básicos de Matemática Financeira

Para o desenvolvimento desse capítulo, no qual discorre-se sobre conceitos básicos de Matemática Financeira, definindo e exemplificando-os, utilizou-se como referências os livros [3], [4] e [23].

Este capítulo foi escrito com o objetivo de fornecer uma introdução aos conceitos sobre Matemática Financeira a professores em geral, com ou sem formação específica em Matemática, mas que possuam habilidades básicas com cálculos fundamentais.

Vale destacar que ao longo dos exemplos apresentados neste capítulo utilizou-se aproximação na sexta casa decimal, por isso poderão acontecer pequenos desvios caso sejam utilizados truncamentos distintos. Cabe ao professor estabelecer um critério a ser seguido pelos alunos.

3.1 Juros simples

Sabe-se que receber uma quantia hoje é diferente de recebê-la no futuro, pois uma unidade monetária hoje é preferível à mesma disponível amanhã. Postergar um recebimento por um certo tempo envolve certo sacrifício, o qual deve ser recompensado com o pagamento de uma quantia extra - chamada de **juro**.

Assim, são os juros que induzem o adiamento do consumo, formando então poupanças e investimentos na economia.

Por isso eles devem remunerar o risco das operações, a perda do poder de compra do **capital** (valor monetário inicialmente aplicado) de acordo com a **inflação** (nome dado a esse fenômeno que corrói o capital, diminuindo seu poder de compra), e gerar lucro, ou seja, o valor final deve superar o capital inicialmente aplicado.

A **taxa de juro** é o coeficiente que determina o valor do juro durante um determinado período de tempo, que pode ser representado através da **taxa percentual** e da **taxa unitária** (ou **decimal**).

A taxa percentual refere-se ao valor dos juros para cada centésima parte do capital e a taxa unitária ao valor dos juros para cada unidade de capital. Antes de explorar dois exemplos, é preciso destacar que onde aparecer o símbolo \$ será representada uma

unidade monetária.

Exemplo 3.1. Um capital inicial de \$1.000,00 a uma taxa de juro percentual de 20% ao ano renderá, após um ano,

$$\frac{\$1.000,00}{100} \cdot 20 = \$200,00.$$

Exemplo 3.2. Um capital inicial de \$1.000,00 a uma taxa de juro unitária de 0,20 ao ano renderá, após um ano,

$$\$1.000,00 \cdot \frac{20}{100} = \$200,00.$$

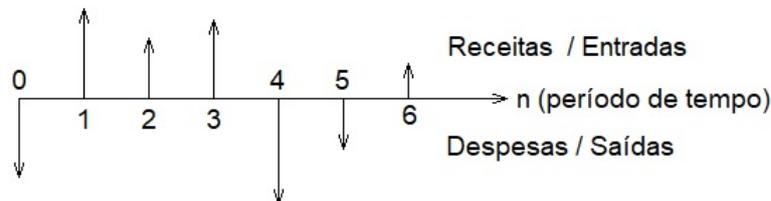
Dessa forma, tem-se:

Taxa de juro percentual	Taxa de juro unitária
20%	0,20
1,5%	0,015
120%	1,20
1500%	15,0

Um **diagrama do fluxo de caixa** representa graficamente, em uma linha horizontal, os períodos e os valores monetários envolvidos em cada um desses períodos.

Na Figura 3.1 abaixo encontra-se o exemplo de um diagrama do fluxo de caixa em que a linha horizontal registra a escala de tempo (horizonte financeiro da operação); 0 indica o momento inicial; os demais pontos indicam períodos de tempo e as setas para cima e para baixo representam, respectivamente, entradas e saídas de dinheiro.

Figura 3.1: Modelo de diagrama do fluxo de caixa



Para utilizar as fórmulas de Matemática Financeira que aparecerão nesse trabalho, é preciso que a taxa de juros e o prazo estejam expressos na mesma unidade de tempo. Caso contrário será necessário adequá-las à essa condição. Ou seja, se as taxas de juros são mensais então é preciso que os períodos de tempo sejam considerados em meses, e assim por diante.

O **regime de capitalização simples** é como uma progressão aritmética, cresce de forma linear com o passar do tempo. O exemplo a seguir pode esclarecer tal situação.

Exemplo 3.3. Em um empréstimo de \$1.000,00 com duração de 5 anos e juros simples de 10% ao ano obtém-se a seguinte tabela:

Tabela 3.1: Exemplo de regime de capitalização simples

	Juros	Dívida
Início Ano 1	\$0.000,00	\$1.000,00
Fim Ano 1	$0,10 \cdot \$1.000,00 = \$100,00$	\$1.100,00
Fim Ano 2	$0,10 \cdot \$1.000,00 = \$100,00$	\$1.200,00
Fim Ano 3	$0,10 \cdot \$1.000,00 = \$100,00$	\$1.300,00
Fim Ano 4	$0,10 \cdot \$1.000,00 = \$100,00$	\$1.400,00
Fim Ano 5	$0,10 \cdot \$1.000,00 = \$100,00$	\$1.500,00

Note que

- a) os juros não têm seu valor alterado, pois são calculados sobre o valor inicial;
- b) ainda seria possível calcular da seguinte maneira: 5 anos \times 10% ao ano = 50% em 5 anos e, se fosse o caso de calcular mensalmente, bastaria dividir a taxa anual por 12 meses:

$$\left(\frac{10\% \text{ a.a.}}{12 \text{ meses}} \right) = 0,8333\% \text{ a.m.}^1$$

O regime de capitalização composta é como uma progressão geométrica, cresce de forma não linear. Assim, os juros referentes a um momento n incidem sobre o capital inicial e os juros do momento $n-1$. É possível verificar tal fato no exemplo que segue.

Exemplo 3.4. Em um empréstimo de \$1.000,00 com duração de 5 anos e juros compostos de 10% ao ano tem-se

Tabela 3.2: Exemplo de regime de capitalização composta

	Juros	Dívida
Início Ano 1	\$0.000,00	\$1.000,00
Fim Ano 1	$0,10 \cdot \$1.000,00 = \$100,00$	\$1.100,00
Fim Ano 2	$0,10 \cdot \$1.100,00 = \$110,00$	\$1.210,00
Fim Ano 3	$0,10 \cdot \$1.210,00 = \$121,00$	\$1.331,00
Fim Ano 4	$0,10 \cdot \$1.331,00 = \$133,10$	\$1.464,10
Fim Ano 5	$0,10 \cdot \$1.464,10 = \$146,41$	\$1.610,51

Observe que

- a) os juros têm seu valor alterado, pois são calculados sobre o valor inicial somado aos juros de períodos anteriores;
- b) o crescimento dos juros evolui exponencialmente com o tempo.

¹ a.m. nesse texto significa *ao mês* e a.a. indica *ao ano*.

O uso de juros simples restringe-se principalmente às operações praticadas a curto prazo.

Outras situações em que se utilizam juros compostos são o estudo do crescimento demográfico e comportamento dos índices de preços da economia, por exemplo.

A **capitalização contínua** acontece em intervalos de tempo infinitesimais promovendo assim grande frequência de capitalização. São capitalizações que se formam continuamente e não somente ao final de um período único (mês, ano). Por exemplo, o faturamento de um supermercado.

Na **capitalização descontínua** ou **discreta** os juros são formados ao final de cada período. Por exemplo, a Caderneta de poupança que arrecada os rendimentos em um único momento (final do mês) e não distribui essa arrecadação pelo mês.

O valor dos juros simples é calculado pela expressão:

$$J = C \cdot i \cdot n, \quad (3.1)$$

em que J é valor dos juros expresso em unidades monetárias; C o capital (valor em dinheiro em determinado momento); i a taxa de juros (em forma unitária) e n o prazo. A partir de (3.1) têm-se as seguintes equivalências:

$$C = \frac{J}{i \cdot n}, \quad i = \frac{J}{C \cdot n} \quad \text{e} \quad n = \frac{J}{C \cdot i}.$$

Exemplo 3.5. *Um capital de \$40.000,00 foi aplicado em um fundo de poupança por 11 meses, produzindo um rendimento financeiro de \$9.680,00. Pede-se apurar a taxa de juros oferecida por esta operação.*

$$i = \frac{J}{C \cdot n} \Rightarrow i = \frac{9.680,00}{40.000,00 \cdot 11} \Rightarrow i = \frac{9.680,00}{440.000,00} \Rightarrow i = 0,022.$$

Assim, a taxa de juros foi de 2,2% ao mês.

Montante e capital

Montante é o nome dado ao valor resultante da soma do capital com o acumulado dos juros.

$$M = C + J.$$

Ou ainda, a partir de (3.1):

$$M = C + (C \cdot i \cdot n) \Rightarrow M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow C = \frac{M}{(1 + i \cdot n)}. \quad (3.2)$$

A expressão $(1 + i \cdot n)$ é denominada **fator de capitalização** ou **de valor futuro dos juros simples - FCS**. Esse fator corrige o valor do capital para uma data futura.

Seu inverso $\left(\frac{1}{1+i \cdot n}\right)$ chama-se **fator de atualização** ou **de valor presente - FAS**. Ao ser aplicado em um valor de uma data futura, FAS expressa o valor equivalente em uma data atual.

Exemplo 3.6. *Uma dívida de \$900.000,00 irá vencer em 4 meses. O credor está oferecendo um desconto de 7% ao mês caso o devedor deseje antecipar o pagamento para hoje. Calcular o valor que o devedor pagaria caso antecipasse a liquidação da dívida.*

Por (3.2) temos:

$$C = \frac{\$900.000,00}{(1 + 0,07 \cdot 4)} \Rightarrow C = \frac{\$900.000,00}{1,28} \Rightarrow C = \$703.125,00.$$

Assim, o valor da dívida seria \$703.125,00.

3.2 Taxa proporcional e taxa equivalente

Como já sabemos, temos dois tipos de prazos: (1) aquele a que se refere a taxa de juros e (2) o prazo de ocorrência dos juros.

Admitindo um empréstimo bancário com taxa de 24% ao ano (o prazo a que se refere a taxa de juros é anual), ao se estabelecer que os encargos incidirão sobre o capital principal somente ao final de cada ano identifica-se a periodicidade da ocorrência dos juros, assim os dois prazos considerados são coincidentes.

Mas em outros casos os prazos não são coincidentes. Por exemplo, a Caderneta de poupança, que paga uma taxa de juros de 6% ao ano, capitalizada mensalmente em 0,5%. Temos então dois prazos: o *prazo da taxa* (ano) e o *prazo de capitalização* (mês).

No regime de juros simples, diante de sua natureza linear, a transformação de períodos distintos em coincidentes é processada pela **taxa proporcional de juros** também denominada **taxa linear** ou **nominal**. Essa taxa é obtida a partir da divisão entre a taxa de juros da operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros. Por exemplo, para uma taxa de 18% ao ano, se a capitalização for definida mensalmente, o percentual de juros que incidirá sobre o capital a cada mês será a taxa proporcional mensal:

$$\frac{18\%}{12} = 1,5\%.$$

As taxas de juros simples se dizem **equivalentes** quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo volume linear de juros. Por exemplo, um capital de \$500.000,00 aplicado a 2,5% ao mês ou 15% ao semestre pelo prazo de um ano, produz o mesmo montante linear de juros:

$$J(2,5\% \text{ a.m.}) = \$500.000,00 \cdot 0,025 \cdot 12 = \$150.000,00,$$

$$J(15\% \text{ a.s.}^2) = \$500.000,00 \cdot 0,15 \cdot 2 = \$150.000,00.$$

Dessa forma, pode-se calcular a taxa anual proporcional a 6% a.m. fazendo $i = 6\% \cdot 12 = 72\% \text{ a.a.}$.

Exemplo 3.7. *Uma dívida de \$30.000,00 a vencer dentro de um ano é saldada 3 meses antes. Para sua quitação antecipada, o credor concede um desconto de 15% ao ano. Apurar o valor da dívida a ser pago antecipadamente.*

Inicialmente observemos que $\frac{15\%}{12} = 1,25\%$. Então,

$$C = \frac{\$30.000,00}{1 + 0,0125 \cdot 3} = \$28.915,66.$$

Portanto, o valor a ser pago é de \$28.915,66.

Em operações de curto prazo é comum ter o prazo definido em número de dias, que pode ser calculado de duas maneiras:

a) *tempo exato*: utiliza-se o calendário civil (365 dias). O juro calculado dessa maneira chama-se **juro exato**;

b) *ano comercial*: admite-se que cada mês tem 30 dias e o ano 360 dias. O juro calculado dessa forma é chamado **juro comercial** ou **ordinário**.

Por exemplo, 12% ao ano equivale à taxa diária de:

a) *Juro Exato*:

$$\frac{12\%}{365} = 0,032877\%,$$

b) *Juro Comercial*:

$$\frac{12\%}{360} = 0,033333\%.$$

Assim, o juro comercial diário é superior ao exato, pois diminuir o valor do denominador implica em aumentar o valor resultante e aumentar o valor do denominador implica em diminuição do valor resultante.

² a.s. nesse texto significa *ao semestre*.

3.3 Equivalência financeira e aplicações

Diz-se que dois ou mais capitais representativos de uma certa data são equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

Por exemplo, \$120,00 vencíveis daqui a um ano e \$100,00 hoje, são equivalentes a uma taxa de juros simples de 20%, uma vez que os \$100,00 capitalizados, produziram \$120,00 dentro de um ano, ou os mesmos \$120,00 ao final do primeiro ano resultariam em \$100,00 se atualizados para hoje.

Assim, na questão da equivalência financeira em juros simples, é importante ressaltar que os prazos não podem ser fracionados pois isso altera os resultados.

Por exemplo, admitamos que o montante no final de dois anos, de \$100,00 aplicados hoje, à taxa de juros simples de 20% ao ano, é igual a \$140,00. Esse processo não pode ser fracionado, pois:

$$M_1 : \$100,00 \cdot (1 + 0,2 \cdot 1) = \$120,00 \text{ e}$$

$$M_2 : \$120,00 \cdot (1 + 0,2 \cdot 1) = \$144,00. \text{ Enquanto que}$$

$$M : \$100,00 \cdot (1 + 0,2 \cdot 2) = \$140,00.$$

Exemplo 3.8. *Uma pessoa aplicou em uma instituição financeira \$18.000,00 resgatando \$21.456,00 quatro meses depois. Calcular a taxa mensal de juros simples nessa aplicação.*

$$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow \$21.456,00 = \$18.000,00 \cdot (1 + 4i) \Rightarrow \frac{\$21.456,00}{\$18.000,00} = 1 + 4i$$

$$\Rightarrow 1,192 = 1 + 4i \Rightarrow 4i = 0,192 \Rightarrow i = \frac{0,192}{4} = 0,048,$$

isso significa que a taxa de juros é 4,8% a.m..

Exemplo 3.9. *Se uma pessoa necessitar de \$100.000,00 daqui a 10 meses, quanto ela deverá depositar hoje em um fundo de poupança que remunera à taxa linear de 10% ao ano?*

$$C = \frac{M}{(1 + i \cdot n)} \Rightarrow C = \frac{\$100.000,00}{1 + 0,01 \cdot 10} \Rightarrow C = \frac{\$100.000,00}{1,10} = \$90.909,09.$$

A pessoa deverá aplicar pelo menos \$90.909,09.

3.4 Juros compostos e taxas

Suponha inicialmente uma aplicação de \$1.000,00 à taxa composta de 10% ao mês. Com PV sendo o valor presente (capital) e FV o valor futuro (montante) tem-se:

Final do 1º mês: o capital de \$1.000,00 produz juros de \$100,00 ($10\% \cdot \$1.000,00$) e um montante de \$ 1.100,00 ($\$1.000,00 + \$100,00$), ou seja, $FV = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10) = \$1.100,00$.

Final do 2º mês: o montante do mês anterior (\$1.100,00) é o capital desse segundo mês, servindo de base para o cálculo dos juros deste período. Assim,

$$FV = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10)^2 = \$1.210,00.$$

O montante do segundo mês pode ser assim decomposto:

- \$1.000,00 capital aplicado;
- \$100,00 juros referentes ao primeiro mês ($10\% \cdot \$1.000,00$);
- \$100,00 juros referentes ao segundo mês ($10\% \cdot \$1.000,00$);
- \$10,00 juros sobre os juros produzidos no primeiro mês ($10\% \cdot \$100,00$).

Final do 3º mês: dando sequência ao cálculo de juros compostos,

$$FV = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10)^3 = \$1.331,00.$$

Final do n -ésimo mês: aplicando-se a evolução dos juros compostos exposta anteriormente, o montante FV acumulado ao final do período atinge

$$FV = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) \cdot \dots \cdot (1 + 0,10) = \$1.000,00 \cdot (1 + 0,10)^n.$$

De uma forma geral, temos:

$$FV = PV(1 + i)^n \text{ e } PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}, \quad (3.3)$$

em que $(1 + i)^n$ é o **fator de capitalização dos juros compostos**, e $1/(1 + i)^n$ é o **fator de atualização dos juros compostos**.

Sabemos ainda que o valor dos juros J é dado por $J = FV - PV$. Como $FV = PV(1 + i)^n$ temos

$$J = PV \cdot [(1 + i)^n - 1]. \quad (3.4)$$

Exemplo 3.10. Se uma pessoa deseja obter \$27.500,00 em um ano, quanto deverá depositar hoje em uma alternativa de poupança que rende 1,7% de juros compostos ao mês?

$$\begin{aligned} PV &= \frac{FV}{(1 + i)^n} \Rightarrow PV = \frac{\$27.500,00}{(1 + 0,017)^{12}} \Rightarrow PV = \frac{\$27.500,00}{(1,017)^{12}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow PV = \frac{\$27.500,00}{1,224197} \Rightarrow PV = \$22.463,70. \end{aligned}$$

Portanto, a pessoa deverá depositar \$22.463,70.

Exemplo 3.11. Determinar a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de \$40.000,00 que produz um montante de \$43.894,63 ao final de um quadrimestre.

$$FV = PV(1 + i)^n \Rightarrow \frac{FV}{PV} = (1 + i)^4 \Rightarrow \frac{\$43.894,63}{\$40.000,00} = (1 + i)^4 \Rightarrow 1,097366 = (1 + i)^4$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{1,097366} = \sqrt[4]{(1 + i)^4} \Rightarrow 1 + i = 1,0235 \Rightarrow i = 0,0235.$$

Dessa maneira, a taxa é de 2,35% ao mês.

Exemplo 3.12. Determinar o juro pago de um empréstimo de \$88.000,00 pelo prazo de 5 meses à taxa composta de 4,5% ao mês.

$$J = PV[(1 + i)^n - 1] \Rightarrow J = \$88.000,00[(1,045)^5 - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \$88.000,00(0,246182) \Rightarrow J = \$21.664,02.$$

Assim, o juro pago foi de \$21.664,02.

O conceito de **taxas equivalentes** em juros simples permanece válido para o regime de juros compostos diferenciando-se, no entanto, a fórmula de cálculo da taxa de juros:

$$i_q = \sqrt[q]{1 + i} - 1,$$

em que q é o número de períodos de capitalização.

Por exemplo, a taxa equivalente composta mensal de 10,5% ao semestre é de 1,68%, ou seja,

$$i_6 = \sqrt[6]{1 + 0,105} - 1 \Rightarrow i_6 = \sqrt[6]{1,105} - 1 \Rightarrow i_6 = 1,0168 - 1 \Rightarrow i_6 = 0,0168.$$

Exemplo 3.13. Escolha a melhor opção: aplicar um capital de \$60.000,00 à taxa de juros compostos de 9,9% ao semestre ou à taxa de 20,78% ao ano.

i) 9,9% ao semestre:

$$FV(9,9\% \text{ a.s.}) = \$60.000,00(1 + 0,099)^2 = \$72.468,00,$$

ii) 20,78% ao ano:

$$FV(20,78\% \text{ a.a.}) = \$60.000,00(1 + 0,2078)^1 \Rightarrow FV = \$72.468,00.$$

Foram obtidos resultados iguais para o mesmo período, tem-se então taxas equivalentes produzindo, portanto, o mesmo rendimento nas duas opções.

Exemplo 3.14. Verificar se a taxa de juros de 11,839% ao trimestre é equivalente à taxa de 20,5% para cinco meses. Calcular também a equivalente mensal composta dessas taxas.

$$(1 + 0,11839)^5 - 1 = 74,97\% \text{ para 15 meses;}$$

$$(1 + 0,205)^3 - 1 = 74,97\% \text{ para 15 meses.}$$

As taxas de 11,839% ao trimestre e 20,5% para 5 meses são equivalentes compostas.

Taxa equivalente mensal (descapitalização):

$$i_q = \sqrt[3]{1 + 0,11839} - 1 = 3,8\% \text{ a.m.};$$

$$i_q = \sqrt[5]{1 + 0,205} - 1 = 3,8\% \text{ a.m..}$$

A **taxa efetiva** de juros compostos é a taxa apurada durante todo o prazo n , e obtida por:

$$i_f = (1 + i)^q - 1, \quad (3.5)$$

em que q representa o número de períodos de capitalização dos juros.

Por exemplo, uma taxa de 3,8% ao mês determina um montante efetivo de juros de 56,45% ao ano ($i_f = (1 + 0,038)^{12} - 1 = 56,45\% \text{ a.a.}$).

Quando se diz que uma taxa de juros é **nominal**, geralmente admite-se que o prazo de capitalização dos juros não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.

Por exemplo, em uma taxa nominal de juros de 36% ao ano capitalizada mensalmente, os prazos não são coincidentes, pois quando se trata de taxa nominal é comum admitir-se que a capitalização ocorre por juros proporcionais simples. Assim, no exemplo anterior, a taxa por período de capitalização é de $\frac{36\%}{12} = 3\% \text{ ao mês}$, enquanto a taxa efetiva de juros anual é:

$$i_f = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} - 1 = 42,6\%.$$

Exemplo 3.15. A caderneta de poupança paga juros anuais de 6% com capitalização mensal à base de 0,5%. Calcular a rentabilidade efetiva desta aplicação financeira.

$$i_f = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q - 1 \Rightarrow i_f = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 \Rightarrow i_f = (1 + 0,005)^{12} - 1 = 6,17\% \text{ a.a..}$$

Portanto, a rentabilidade anual efetiva da aplicação será 6,17%.

3.5 Fracionamento do prazo e equivalência financeira

Pode-se fracionar o prazo de uma operação no regime de juros compostos sem que isso altere os resultados de valor presente e valor futuro. O fracionamento pode ser expresso da forma $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$.

Exemplo 3.16. Calcular o montante de um capital de \$30.000,00 aplicado a 14% ao ano, pelo prazo de um ano, tendo os seguintes períodos de capitalização:

$n = 12$ meses:

$$FV = \$30.000,00 \cdot (1,14) = \$34.200,00;$$

$n = 6$ meses:

$$FV = \$30.000,00 \cdot (1,14)^{1/2} \cdot (1,14)^{1/2} = \$34.200,00;$$

$n = 4$ meses:

$$FV = \$30.000,00 \cdot (1,14)^{1/3} \cdot (1,14)^{1/3} \cdot (1,14)^{1/3} = \$34.200,00$$

e assim por diante.

Para cada período de capitalização pode-se utilizar a respectiva taxa equivalente composta ao invés de se trabalhar com expoentes fracionários:

$n = 12$ meses:

$$i = 14\% \text{ a.a.}; FV = \$30.000,00 \cdot (1,14) = \$34.200,00;$$

$n = 6$ meses:

$$i_q = \sqrt{1,14} - 1 = 6,77\% \text{ a.s.}; FV = \$30.000,00 \cdot (1,0677)^2 = \$34.200,00;$$

$n = 4$ meses:

$$i_q = \sqrt[3]{1,14} - 1 = 4,46\% \text{ a.q.}; FV = \$30.000,00 \cdot (1,0446)^3 = \$34.200,00.$$

Exemplo 3.17. Um título vencerá daqui a quatro meses, no valor nominal (resgate) de \$407.164,90. É proposta a troca desse título por outro de valor nominal de \$480.000,00 vencível daqui a 8 meses. Sendo a rentabilidade exigida pelo aplicador de 5% a.m., avalie se a troca é vantajosa.

Rentabilidade: utilizando(3.3) tem-se,

$$\$480.000,00 = \$407.164,90(1+i)^4 \Rightarrow \frac{\$480.000,00}{\$407.164,90} = (1+i)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,178884 = (1+i)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{1,178884} = \sqrt[4]{(1+i)^4} \Rightarrow 1,042 = 1+i \Rightarrow \\ \Rightarrow i = 0,042 \Rightarrow i = 4,2\%.$$

Portanto, a proposta não é vantajosa, pois oferece uma rentabilidade inferior à taxa mínima exigida pelo aplicador.

Valor Presente:

$$PV = \frac{\$480.000,00}{(1,05)^4} = \$394.899,22.$$

Verificou-se que o PV é menor que os \$407.164,90 do título proposto, indicando mais uma vez que a rentabilidade oferecida não é vantajosa.

3.6 Convenção linear e convenção exponencial para períodos não inteiros

Na **convenção linear** admite-se a formação de juros compostos para a parte inteira do prazo e juros simples para a parte fracionária,

$$FV = PV(1 + i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{m}{k}\right), \quad (3.6)$$

em que n é a parte inteira e $\frac{m}{k}$ é a parte fracionária do prazo.

Exemplo 3.18. *Seja o capital de \$100.000,00 emprestado à taxa de 18% ao ano pelo prazo de 4 anos e 9 meses. Calcule o montante desse empréstimo pela convenção linear.*

$$FV = \$100.000,00 \cdot (1 + 0,18)^4 \cdot \left(1 + 0,18 \cdot \frac{9}{12}\right) \Rightarrow$$

$$FV = \$100.000,00 \cdot 1,938778 \cdot 1,135 \Rightarrow FV = \$220.051,30.$$

Já na **convenção exponencial**, adota-se o mesmo regime de capitalização para todo o período.

$$FV = PV(1 + i)^{n + \frac{m}{k}}, \quad (3.7)$$

em que n é a parte inteira e $\frac{m}{k}$ a parte fracionária do prazo.

Para exemplificar tem-se, na mesma situação anterior:

$$FV = \$100.000,00 \cdot (1 + 0,18)^{4 + \frac{9}{12}} \Rightarrow FV = \$100.000,00 \cdot (1,18)^{4,75} \Rightarrow$$

$$FV = \$100.000,00 \cdot (1,18)^{4,75} \Rightarrow FV = \$219.502,53.$$

Nota-se que houve uma diferença de \$548,77 (0,25% em relação ao montante da convenção exponencial) entre as duas convenções. Isso se deve ao fato de que para um período de tempo menor que uma unidade, o juro simples gera um montante superior ao gerado pelo juro composto.

A convenção exponencial é a mais utilizada por um motivo simples: é a opção que gera maior lucro para as instituições financeiras.

A **taxa interna de retorno - IRR** é utilizada tanto para calcular a rentabilidade de uma aplicação, como para determinar o custo de um empréstimo ou financiamento. Assim é chamada também de **taxa interna de juros**. IRR é a taxa de juros que iguala, em uma mesma data, os fluxos de entrada e saída de caixa produzidos por uma operação financeira. Em (3.4) a IRR é o i da expressão.

Exemplo 3.19. Um imóvel no valor de \$470.000,00 é vendido com uma entrada de \$190.000,00 mais duas parcelas mensais, iguais e sucessivas de \$96.000,00 e uma parcela ao final do 5º mês de \$180.000,00. Determine a taxa de juros mensal embutida no financiamento do imóvel.

A taxa IRR no financiamento é a taxa de desconto que iguala o valor presente dos pagamentos ao valor do imóvel no momento zero:

$$\$470.000,00 - \$190.000,00 = \frac{\$96.000,00}{(1+i)} + \frac{\$96.000,00}{(1+i)^2} + \frac{\$180.000,00}{(1+i)^5}.$$

Assim, a taxa interna de retorno $i = 10,68\%$ ao mês.

Quando os juros são capitalizados de forma infinitamente grande, que ocorre a cada instante infinitesimal³, tem-se a **capitalização contínua**. Sua fórmula apresenta-se da seguinte maneira:

$$FV = PV \cdot e^{I \cdot n}, \tag{3.8}$$

em que I = taxa de juro periódica ou taxa instantânea.

Exemplo 3.20. Seja uma aplicação de \$1.000,00 por dois anos, à taxa de 10% ao ano com capitalização contínua. Qual o montante apurado ao final desse período com capitalização contínua e nas condições de capitalização discreta de juros compostos?

Capitalização contínua (3.8):

$$\begin{aligned} FV &= PV \cdot e^{I \cdot n} \Rightarrow FV = \$1.000,00 \cdot (2,7182)^{0,10 \cdot 2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow FV = \$1.000,00 \cdot (2,7182)^{0,20} \Rightarrow FV = \$1.221,40. \end{aligned}$$

Juros compostos (capitalização discreta) (3.3):

$$FV = PV \cdot (1+i)^n \Rightarrow FV = \$1.000,00 \cdot (1,10)^2 \Rightarrow FV = \$1.210,00.$$

É possível notar que a capitalização contínua eleva o valor do montante se comparada à capitalização discreta.

Exemplo 3.21. Calcular o montante de uma aplicação financeira de \$80.000,00 admitindo-se os seguintes prazos e taxas:

a) $i = 5,5\%$ a.m. e $n = 2$ anos

Sabe-se que n equivale a 24 meses. Assim,

$$\begin{aligned} FV &= PV \cdot (1+i)^n \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot (1+0,055)^{24} \Rightarrow \\ &\Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot (1,055)^{24} \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot 3,614590 = \$289.167,20. \end{aligned}$$

O montante então é de \$289.167,20.

³intervalos extremamente pequenos entre as capitalizações.

b) $i = 9\%$ a.b.⁴ e $n = 1$ ano e 8 meses

Nesse caso, n equivale a 10 bimestres. Então,

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot (1 + 0,09)^{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot (1,09)^{10} \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot 2,367364 = \$189.389,12.$$

O montante então é de \$189.389,12.

c) $i = 12\%$ a.a. e $n = 108$ meses

Agora, n equivale a 9 anos. Logo,

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot (1 + 0,12)^9 \Rightarrow \\ FV = \$80.000,00 \cdot (1,12)^9 \Rightarrow FV = \$80.000,00 \cdot 2,773079 = \$221.846,32.$$

O montante então é de \$221.846,32.

Exemplo 3.22. *Em quanto tempo duplica um capital que cresce à taxa de juros compostos de 2,2% a.m.?*

Duplicar o capital significa que $FV = 2 \cdot PV$, logo

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \Rightarrow \frac{FV}{PV} = (1 + i)^n \Rightarrow \\ 2 = (1,022)^n \Rightarrow \log 2 = \log(1,022)^n \Rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1,022 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,022} \\ \Rightarrow n = \frac{0,301030}{0,009451} = 31,85.$$

n é dado em meses, portanto, em 31 meses e 26 dias o capital duplicará.

Exemplo 3.23. *Para uma taxa de juros de 7% a.m., qual das duas alternativas de pagamento apresenta melhor custo para o devedor:*

i) *pagamento integral de \$140.000,00 à vista (na data zero):*

$$PV = \$140.000,00.$$

ou

ii) *\$30.000,00 de entrada, \$40.000,00 em 60 dias e \$104.000,00 em 120 dias.*

$$PV = \$30.000,00 + \frac{\$40.000,00}{(1,07)^2} + \frac{\$104.000,00}{(1,07)^4} \Rightarrow PV = \$30.000,00 + \$34.937,55 + \\ \$79.341,10 \Rightarrow PV = \$144.278,65.$$

Conclui-se então que a alternativa i) oferece melhor custo ao devedor.

É possível encontrar com certa frequência situações em que são anunciados descontos sob determinadas condições, como pagamentos antecipados. Por isso, faz-se necessário um estudos sobre esses descontos, como o que segue.

⁴a.b. nesse texto significa *ao bimestre*.

3.7 Descontos

Desconto é o nome dado a um abatimento que se faz quando um título de crédito é resgatado antes de seu vencimento, isto é, a "recompensa" dada a alguém que liquidou seu título antes da data de vencimento dele.

O valor do título na data dessa liquidação antecipada é chamado **valor descontado** e o valor do título em sua data de vencimento é chamado **valor nominal**. Dessa forma, o valor descontado é dado pela diferença entre o valor nominal e o desconto.

No ambiente de capitalização simples, os valores do desconto são obtidos utilizando cálculos lineares. Assim, o **desconto simples** se divide em *desconto racional simples* e *desconto comercial simples*.

Desconto racional simples, D_r , ou **desconto por dentro** tem seu valor dado pela diferença entre o valor futuro (valor nominal ou de resgate) e o valor atual (valor líquido liberado na data do desconto, ver (3.2)) calculado a juros simples:

$$D_r = N - V_r \Rightarrow D_r = N - \frac{N}{1 + i \cdot n} \Rightarrow D_r = \frac{N \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}, \quad (3.9)$$

em que i representa a taxa de juros simples, n o prazo até o vencimento do título, V_r o valor líquido liberado na data do desconto e N é o valor nominal ou de resgate.

Exemplo 3.24. *Seja um título de valor nominal de \$4.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% a.a. a taxa nominal de juros corrente, pede-se calcular o desconto e o valor descontado dessa operação.*

i) Desconto: tem-se que $N = \$4.000,00$, $i = 42\% \text{ a.a.} = 3,5\% \text{ a.m.}$, $n = 3$ meses. De (3.9),

$$D_r = \frac{\$4.000,00 \cdot 0,035 \cdot 3}{1 + 0,035 \cdot 3} = \frac{\$420,00}{1,105} = \$380,09.$$

ii) Valor descontado: tem-se que $V_r = N - D_r$, assim

$$V_r = \$4.000,00 - \$380,09 = \$3.619,91.$$

Desconto comercial simples, D_c , **desconto por fora** ou **desconto bancário** tem seu valor obtido a partir do produto do valor nominal do título pela taxa de desconto fornecida e pelo prazo até o seu vencimento:

$$D_c = N \cdot d \cdot n, \quad (3.10)$$

em que d representa a taxa de desconto comercial, n o prazo e N o valor nominal ou de resgate.

Assim é possível obter uma expressão para o valor descontado a partir da diferença $D_c = N - V_c$, assim $N - V_c = N \cdot d \cdot n$, ou seja,

$$-V_c = N \cdot d \cdot n - N \Rightarrow V_c = -N \cdot d \cdot n + N \Rightarrow$$

$$V_c = N \cdot (1 - d \cdot n). \quad (3.11)$$

Exemplo 3.25. *Seja um título de valor nominal de \$4.000,00 vencível em um ano, que será liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% ao ano a taxa de desconto adotada, pede-se calcular o desconto e o valor descontado desta operação.*

i) Desconto: tem-se que $N = \$4.000,00$, $d = 42\% \text{ a.a.} = 3,5\% \text{ a.m.}$, $n = 3$ meses e de (3.10),

$$D_c = \$4.000,00 \cdot 0,035 \cdot 3 = \$420,00.$$

O maior valor dos juros cobrado pelo título deve-se ao fato de o desconto comercial ser aplicado diretamente sobre o valor nominal e não sobre o valor atual como nas operações de desconto racional.

ii) Valor descontado: por (3.11) tem-se que

$$V_c = \$4.000,00 \cdot (1 - 0,035 \cdot 3) = \$3.580,00.$$

Note que a taxa de juros efetiva dessa operação não equivale à taxa de juros utilizada, pois se são pagos \$420,00 de juros sobre um valor atual de \$3.580,00, a taxa de juros assume o percentual efetivo de

$$i = \frac{\$420,00}{\$3.580,00} = 0,1173.$$

Ou seja, 11,73% a.t.⁵ ou 3,91% a.m.. Assim, no desconto bancário é preciso separar a taxa de desconto d e a taxa efetiva de juros i da operação.

Em operações de desconto com bancos comerciais, geralmente são cobradas outras taxas adicionais de desconto s para despesas operacionais e administrativas, assim, no desconto bancário obtém-se de (3.10):

$$D_c = (N \cdot d \cdot n) + (s \cdot N) \Rightarrow D_c = N \cdot (d \cdot n + s). \quad (3.12)$$

E, para o valor descontado, de (3.11):

$$V_c = N - D_c \Rightarrow V_c = N - N \cdot (d \cdot n + s) \Rightarrow V_c = N \cdot [1 - (d \cdot n + s)]. \quad (3.13)$$

Exemplo 3.26. *Uma duplicata de valor nominal de \$60.000,00 é descontada em um banco dois meses antes de seu vencimento. Sendo 2,8% a taxa de desconto mensal usada na operação, calcular o desconto e o valor descontado. Sabe-se ainda que o banco cobra 1,5% sobre o valor nominal do título, descontados integralmente no momento da liberação dos recursos, como despesa administrativa.*

⁵a.t. nesse texto significa *ao trimestre*.

i) Desconto: tem-se que $N = \$60.000,00$, $d = 2,8\%$ a.m., $n = 2$ meses, $s = 1,5\%$ sobre o valor nominal e de (3.12),

$$D_c = \$60.000,00 \cdot (0,028 \cdot 2 + 0,015) = \$4.260,00.$$

Portanto o valor do desconto é \$4.260,00.

ii) Valor descontado: por (3.13) tem-se

$$V_c = \$60.000,00 \cdot [1 - (0,028 \cdot 2 + 0,015)] = \$55.740,00.$$

Portanto o valor descontado é \$55.740,00.

3.8 Taxa efetiva de desconto linear

A **taxa efetiva de desconto** ou **custo efetivo do cliente** é aquela realmente cobrada na operação de desconto, ou seja, o rendimento do credor. Essa taxa aplicada sobre o valor descontado gera juros iguais ao valor do desconto.

Exemplo 3.27. *Considere uma duplicata com valor nominal de \$5.500,00 descontada 90 dias antes do vencimento à taxa simples de 40% ao ano.*

i) *Se a modalidade de desconto for o desconto racional obtém-se de (3.9):*

$$D_r = \frac{\$5.500,00 \cdot 0,40 \cdot \frac{90}{360}}{1 + 0,40 \cdot \frac{90}{360}} = \$500,00.$$

$$V_r = N - D_r = \$5.500,00 - \$500,00 \Rightarrow V_r = \$5.000,00.$$

Em três meses o banco ganha \$500,00 sobre um valor liberado de \$5.000,00, resultando na seguinte taxa efetiva de desconto d_e :

$$d_e = \frac{D_r}{V_r} = \frac{\$500,00}{\$5.000,00} = 0,1.$$

Ou seja, 10% ao trimestre ou 40% ao ano. Assim, no desconto racional a taxa efetiva de desconto é a própria taxa de desconto fornecida pelo banco, isto é, $d_e = i = 40\%$ a.a..

ii) *Tendo o desconto comercial, de (3.10) obtém-se:*

$$D_c = \$5.500,00 \cdot 0,40 \cdot \frac{90}{360} = \$550,00.$$

$$V_c = N - D_c = \$5.500,00 - \$550,00 \Rightarrow V_c = \$4.950,00.$$

É possível observar que, se aplicado, o valor liberado (\$4.950,00) à taxa de 40% a.a. durante 90 dias, produzirá um montante de

$$\$4.950,00 \cdot \left[1 + 0,40 \cdot \frac{90}{360} \right] = \$5.445,00.$$

Esse montante é menor que o valor nominal do título. Assim, no desconto comercial a taxa de desconto fornecida pelo banco não é capaz de produzir o valor nominal a partir do valor liberado, portanto, é necessário diferenciar a taxa de desconto fornecida pelo banco e a taxa de desconto efetiva da operação.

A taxa efetiva pode ser calculada da seguinte maneira:

$$d_e = \frac{D_c}{V_c} = \frac{\$550,00}{\$4.950,00} = 0,1111.$$

Ou seja, 11,11% ao trimestre ou 44,44% ao ano.

Se aplicado o valor liberado à taxa de desconto efetiva, durante o prazo da operação, produzirá um montante igual ao valor nominal:

$$V_c \cdot (1 + d_e \cdot n) = N \Rightarrow \$4.950,00 \cdot (1 + 0,1111 \cdot 1) = \$5.500,00.$$

Observação 3.1. A taxa efetiva de desconto é maior que a taxa de desconto fornecida e o valor liberado é menor que o desconto racional. Isso acontece, pois no desconto comercial os juros são pagos antecipadamente e podem ser reaplicados pelo banco, o qual obtém uma maior rentabilidade.

Assim se justifica o uso do desconto comercial com maior frequência, visto que representa maior lucro ao credor, detentor do poder de negociação.

Uma expressão para a taxa efetiva linear pode ser obtida ao levar em conta que o valor liberado resulta em um montante igual ao valor nominal. Desse modo, a partir de $V_c \cdot (1 + d_e \cdot n) = N$ e $N \cdot (1 - d \cdot n) \cdot (1 + d_e \cdot n) = N$ tem-se:

$$d_e = \frac{d}{1 - d \cdot n}. \quad (3.14)$$

É possível calcular o valor do desconto racional usando a taxa efetiva de desconto:

$$D_n = \frac{N \cdot d_e \cdot n}{1 + d_e \cdot n}. \quad (3.15)$$

Se a taxa efetiva for usada para o cálculo do valor do desconto racional, obter-se-á um valor igual ao do desconto comercial. Assim, a taxa efetiva de desconto será aquela que conduz ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial.

3.9 Taxa efetiva de desconto exponencial

O cálculo da taxa efetiva linear, visto em (3.10), não incorpora o real comportamento exponencial dos juros. Para esclarecer esse conceito segue o exemplo:

Exemplo 3.28. *Seja um título com valor nominal de \$10.000,00 descontado em um banco 60 dias antes de seu vencimento a uma taxa de desconto de 2% a.m. e com IOF (Imposto sobre Operações Financeiras - que é de responsabilidade do financiado) de 0,0041% a.d. incidente sobre a operação. O banco cobra, ainda, Taxa de Serviço Bancário - TSB de 2% sobre o valor nominal do título paga no ato da liberação dos recursos. Determine a taxa efetiva de desconto da operação.*

Valor nominal do título: \$10.000,00

Valor do desconto = \$10.000,00 · 0,02 · 2 = \$400,00

IOF = \$10.000,00 · 0,000041 · 60 = \$24,60

TSB = \$10.000,00 · 0,02 = \$200,00

Valor líquido liberado:

$$\$10.000,00 - \$400,00 - \$24,60 - \$200,00 = \$9.375,40.$$

Custo efetivo da operação:

$$i = \frac{\$10.000,00}{\$9.375,40} - 1 = 0,066621,$$

ou seja, 6,6621% ao bimestre.

$$i_m = (1,066621)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,032773,$$

ou seja, 3,2773% ao mês.

$$i_a = (1,066621)^6 - 1 = 0,472519,$$

ou seja, 47,2519% ao ano.

Dessa forma, a taxa efetiva de desconto da operação é de 3,2773% a.m., maior que os 2% a.m. que é a taxa de desconto contratada.

Uma expressão para o cálculo direto da taxa efetiva exponencial pode ser obtida ao considerar que essa taxa resulta em um montante igual ao valor nominal do título:

$$V_c \cdot (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} = N \Rightarrow d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1, \quad (3.16)$$

em que h é o período referencial da taxa efetiva ($h = 30$ para taxa mensal, etc.) e n o prazo da operação.

Observação 3.2. A taxa de desconto efetiva exponencial tem cálculos mais rigorosos quando comparados aos da taxa efetiva linear, pois incorpora o real comportamento exponencial dos juros, portanto, é a forma mais adequada de calcular o verdadeiro custo de uma operação.

Segue um exemplo interessante:

Exemplo 3.29. Uma nota promissória com valor de \$100.000,00 teve um valor líquido liberado de \$91.600,00 pelas regras do desconto bancário a uma taxa de desconto de 5% a.m.. Considerando-se que foi cobrado IOF de 1% a.m., determine o prazo da operação e as taxas de desconto efetivas linear e exponencial.

Dados: $N = \$100.000,00$, $V_c = \$91.600,00$, $d = 5\%$ a.m., $IOF = 1\%$ a.m., $h = 30$.

a) Cálculo do prazo da operação (3.12) e (3.13):

$$V_c = N \cdot (1 - d \cdot n - IOF \cdot n) \Rightarrow$$

$$\$91.600,00 = \$100.000,00 \cdot (1 - 0,05 \cdot n - 0,01 \cdot n) \Rightarrow n = 1,4.$$

Assim, n corresponde a 42 dias.

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$d_e = \frac{D_c}{V_c} \cdot \frac{30}{n} = \frac{\$100.000,00 - \$91.600,00}{91.600,00} \cdot \frac{30}{42} = 0,065502$$

ou

$$d_e = \frac{d + IOF}{1 - (d + IOF) \cdot n} = \frac{0,05 + 0,01}{1 - (0,05 + 0,01) \cdot \frac{42}{30}} = 0,065502.$$

Isso significa $d_e = 6,5502\%$ a.m..

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\left(\frac{h}{n} \right)} - 1 = \left(\frac{\$100.000,00}{\$91.600,00} \right)^{\left(\frac{30}{42} \right)} - 1 = 0,064676.$$

O que significa $d_e = 6,4676\%$ a.m..

3.10 Títulos públicos

Os governos municipais, estaduais e federais captam recursos por meio de **títulos representativos da dívida pública** ou **títulos públicos**.

Os títulos públicos são emitidos pelo *Tesouro Nacional* (o caixa do Governo, isto é, o conjunto de suas receitas disponíveis), através do *Tesouro Direto*, um programa de negociação desses títulos públicos a pessoas físicas que "emprestam" dinheiro ao Governo. O objetivo desse programa é obter recursos para a dívida pública e atividades governamentais.

Já os títulos emitidos pelo Banco Central buscam implementar e executar a política monetária do governo. Alguns títulos federais com o mesmo objetivo são:

- **Letra do Tesouro Nacional (LTN)**: título pré-fixado, ou seja, o investidor tem ciência de qual será sua rentabilidade exata a ser recebida até a data de vencimento. O pagamento do valor total investido e dos juros é realizado somente na data de vencimento do título. Esse modelo é indicado para o investidor que acredita que a taxa de juros pré-fixada superará a taxa básica de juros (SELIC⁶) ou a taxa de inflação (IGP-M⁷ ou IPCA⁸).
- **Letra Financeira do Tesouro (LFT)**: títulos com rentabilidade diária vinculada à taxa de juros básica da economia com base no sistema SELIC. É um título pós-fixado, ou seja, a rentabilidade varia até a data de vencimento e o pagamento é realizado somente no vencimento do título.
- **Nota do Tesouro Nacional - Série B principal (NTN-B Principal)**: título com rentabilidade vinculada à variação do IPCA mais os juros definidos no momento da compra. É um título pós-fixado, indicado para quem deseja uma rentabilidade ligada ao IPCA.
- **Nota do Tesouro Nacional - Série F (NTN - F)**: títulos com rentabilidade definida no momento da compra. É um título pré-fixado, indicado para quem deseja uma remuneração pré-fixada periódica e acredita que a taxa de juros pré-fixada será maior que a taxa SELIC ou a inflação.

Títulos emitidos pelo Banco Central⁹:

- **Letra do Banco Central (LBC)**: títulos pós-fixados de curto prazo emitidos pelo Banco Central com base no sistema SELIC.
- **Bônus do Banco Central (BBC)**: título pré-fixado, no qual o investidor sabe exatamente o valor de resgate. Seu risco é a oscilação das taxas de juros.
- **Nota do Banco Central (NBC)**: título de curto prazo, pós-fixado que possui várias séries com índice de atualização próprio. Basea-se na taxa SELIC, dólar, etc.

As operações com títulos públicos seguem o modelo de desconto comercial de acordo com a expressão abaixo, dessa forma faz sentido considerar o ano comercial de 360 dias.

⁶ *SELIC*: taxa de financiamento no mercado bancário para operações de um dia, é usada em negociação de títulos públicos no Sistema Especial de Liquidação e Custódia. [14][15]

⁷ *IGP-M*: índice geral de preços do mercado, registra a inflação de preços desde matérias-primas agrícolas e industriais até bens e serviços finais. É calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). [18]

⁸ *IPCA*: Índice de Preços ao Consumidor Amplo, medido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), mensalmente; para oferecer a variação dos preços no comércio para o público final. É considerado o índice oficial de inflação brasileiro. [14]

⁹ *Banco Central do Brasil*: é o principal órgão do sistema financeiro nacional. Foi criado em 1964 e é responsável pela gestão do sistema financeiro, compra e venda de títulos públicos, além da emissão de papel moeda e moeda metálica. [5]

Observação 3.3. O fator chamado de PU - preço unitário - é o valor líquido comercial de uma unidade monetária ($N = \$1$). Assim, por exemplo, uma letra com $PU = 0,95$ significa que o valor de compra da letra será de $\$0,95$ para cada $\$1$ de valor nominal.

$$V_c = N \cdot \left[1 - d \cdot \frac{n}{360} \right] = N \cdot PU, \quad (3.17)$$

assim,

$$PU = 1 - d \cdot \frac{n}{360},$$

em que d é a taxa anual de desconto, n é o prazo em dias e N é o valor de face das letras.

A taxa efetiva linear (ou taxa de rentabilidade efetiva linear da operação) pode ser calculada dividindo-se a taxa de desconto pelo PU das letras:

$$d_e = \frac{d}{1 - d \cdot \left(\frac{n}{360}\right)} = \frac{d}{PU}. \quad (3.18)$$

A taxa efetiva exponencial atualizada é dada por

$$d_e = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\left(\frac{360}{n}\right)} - 1. \quad (3.19)$$

Observação 3.4. No uso dessas fórmulas é muito importante observar a regra de proporcionalidade entre as dimensões da taxa de desconto e o prazo da operação.

Exemplo 3.30. *Uma operação com Letras do Tesouro Nacional que tem 119 dias a decorrer até o seu vencimento está sendo negociada a uma taxa de desconto de 18,9% a.a.. Calcular o preço unitário do título.*

Dados: $n = 119$ dias e $d = 18,9\%$ a.a..

$$PU = \left[1 - d \cdot \frac{n}{360} \right] = \left[1 - 0,189 \cdot \frac{119}{360} \right] = 0,937525.$$

$PU = 0,937525$ significa que o valor de compra da letra é de $\$0,937525$ para cada $\$1$ de valor nominal.

Exemplo 3.31. *Um lote de Letras do Banco Central com valor nominal de $\$3.000.000,00$ e prazo de vencimento de 90 dias é adquirido no leilão do Banco Central. Considerando que a operação foi fechada a uma taxa simples de desconto de 48% a.a., calcular o preço unitário da letra, o valor da operação (preço de compra) e a rentabilidade efetiva linear da operação.*

Dados: $N = \$3.000.000,00$, $n = 90$ dias e $d = 48\%$ a.a..

a) Cálculo do PU

$$PU = \left[1 - d \cdot \frac{n}{360} \right] = \left[1 - 0,48 \cdot \frac{90}{360} \right] = 0,880.$$

b) Valor da operação

$$V_c = N \cdot PU = \$3.000.000,00 \cdot 0,88 = \$2.640.000,00,$$

o que significa \$2.640.000,00.

c) Rentabilidade efetiva linear da operação

$$d_e = \frac{d}{PU} = \frac{0,48}{0,88} = 0,5455,$$

o que significa 54,55% ao ano.

Exemplo 3.32. *Considerando que determinado banco deseja uma rentabilidade efetiva exponencial de 36% a.a. em operações de compra de Letras do Tesouro Nacional com prazo de 60 dias, determinar o fator PU sobre o qual deve negociar em termos de desconto comercial.*

Dados: $n = 60$ dias e $d_e = 36\%$ a.a..

$$\begin{aligned} d_e &= \left(\frac{1}{PU} \right)^{\left(\frac{360}{n} \right)} - 1 \Rightarrow 0,36 = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\left(\frac{360}{60} \right)} - 1 \Rightarrow 1,36 = \frac{1}{PU^6} \\ \Rightarrow PU^6 &= \frac{1}{1,36} \Rightarrow PU = \sqrt[6]{\frac{1}{1,36}} \Rightarrow PU = 0,95004. \end{aligned}$$

3.11 Inflação

O processo inflacionário de uma economia pode ser entendido pela elevação generalizada dos preços dos vários bens e serviços. Do mesmo modo, uma baixa dos preços de mercado dos bens e serviços é um fenômeno denominado *deflação*.

O **índice de preços** resulta de um procedimento estatístico que possibilita medir as variações ocorridas nos níveis gerais de preços de um período para o outro. Um exemplo de índice de preços é o Índice Geral de Preços, citado na seção anterior.

A inflação está diretamente ligada às variações dos índices de preços e para mostrar isso segue o exemplo:

Exemplo 3.33. *Considere a evolução do índice geral de preços, IGP-M, na tabela 3.3 entre os meses de maio a dezembro de um determinado ano:*

Tabela 3.3: Exemplo do cálculo da taxa inflacionária

<i>MÊS</i>	<i>IGP-M</i>
<i>Mai</i>	<i>649,79</i>
<i>Junho</i>	<i>703,38</i>
<i>Julho</i>	<i>800,31</i>
<i>Agosto</i>	<i>903,79</i>
<i>Setembro</i>	<i>1.009,67</i>
<i>Outubro</i>	<i>1.152,63</i>
<i>Novembro</i>	<i>1.353,79</i>
<i>Dezembro</i>	<i>1.576,56</i>

Fonte: [3], p. 62.

A taxa de inflação do segundo semestre, medida pelo IGP-M, é reflexo da evolução do índice entre os meses de junho e dezembro. Dessa forma, a inflação desse período é dada por:

$$\frac{1.576,56}{703,38} - 1 = 2,2414 - 1 = 124,14\%.$$

Portanto, os preços nesse período cresceram 2,2414 vezes, indicando uma evolução de 124,14%.

A taxa inflacionária pode ser medida a partir de índices de preços, pela expressão:

$$I = \frac{P_n}{P_{n-t}} - 1, \quad (3.20)$$

em que I é taxa de inflação obtida a partir de determinado índice de preços; P_n o índice de preços utilizado para o cálculo da taxa de inflação no período final n e $n - t$ o período inicial.

Exemplo 3.34. *Um investidor aplicou \$100.000,00 e obteve, ao final de um ano, \$12.000,00 em rendimentos de juros. Sabe-se que no período da aplicação, a inflação da economia atingiu 5,6%. Pode-se desenvolver uma análise do resultado do investidor.*

O investidor apurou os seguintes resultados:

Rendimento nominal: \$12.000,00.

Inflação no período: $0,056 \cdot \$100.000,00 = \$5.600,00$.

Ganho do investidor acima da inflação: $\$12.000,00 - \$5.600,00 = \$6.400,00$.

Valor da aplicação corrigido para o final do ano:

Capital corrigido: $\$100.000,00 \cdot 1,056 = \$105.600,00$.

A taxa de *retorno nominal* do investidor é medida pela relação entre o ganho nominal e o valor histórico do capital investido, ou seja,

$$\frac{\$12.000,00}{\$100.000,00} = 12\%.$$

O *ganho real* é obtido após depurar-se os efeitos inflacionários do investimento, sendo calculado pela relação entre o rendimento real e o capital investido corrigido pela inflação, ou seja,

$$\frac{\$6.400,00}{\$105.600,00} = 6,06\%.$$

Existe um problema em comparar valores monetários de períodos distintos em condições de inflação, pois tais valores tem diferentes níveis de poder aquisitivo da moeda.

É possível ilustrar esse fato supondo que uma pessoa tenha adquirido um imóvel por \$60.000,00 em certa data, e vendido dois anos depois, por \$80.000,00. Sabendo-se que neste período a inflação atingiu 40%, qualquer avaliação superficial que leve em conta apenas o resultado auferido nesse negócio (lucro de \$20.000,00) será precipitada, principalmente ao se considerar que os preços tiveram uma elevação média de 40%. Assim, o ganho terá sido nominal, determinado pela diferença nos preços e não por uma valorização real do imóvel que supere a inflação.

Para não haver prejuízo, o imóvel deveria ser vendido por um preço 40% maior em comparação com o seu valor de compra, o que significa \$84.000,00 (\$60.000,00 · 1,4). Portanto, somente a partir de \$84.000,00 reais é que realmente haveria lucro na transação. Dessa forma, a venda do imóvel por \$80.000,00 indica um prejuízo de \$4.000,00. Assim, é preciso distinguir o ganho nominal equivalente a \$20.000,00 (ou 33,33% de rentabilidade) da venda do imóvel, daquele que é o resultado real calculado de acordo com a inflação.

Os ajustes para se conhecer a evolução real de valores monetários em inflação são processados por meio de *indexações* (inflacionamento) e *desindexações* (deflacionamento) dos valores nominais, processados a partir dos índices de preços.

A indexação é baseada na correção dos valores nominais de uma data em moeda representativa de mesmo poder de compra em um momento posterior, enquanto a desindexação envolve transformações de valores nominais em moeda representativa de mesmo poder de compra em um momento anterior.

Na situação acima, tem-se um ganho nominal de 33,33%, ou seja, o imóvel foi vendido por 1,3333 vezes o seu valor de compra, mas essa relação compara valores de diferentes datas com capacidade de compra desiguais. Para conhecer o resultado real da operação, é preciso expressar os valores monetários em moeda representativa de poder de compra de um mesmo instante.

Ao indexar os valores para a data da venda, com inflação de 40% no período, tem-se uma relação entre o preço de venda na data da venda e o preço de compra corrigido para a data da venda, ou seja,

$$\frac{\$80.000,00}{\$60.000,00 \cdot 1,40} - 1 = -4,76\%,$$

o que representa uma evolução real negativa de 4,76%.

Essa taxa real de -4,76% é obtida pelo regime de juros compostos e não pelo critério linear. Fato esse condizente com o comportamento exponencial da formação da taxa inflacionária. Portanto, é incorreto subtrair da taxa nominal encontrada de 33,33% o percentual específico da inflação de 40%.

Por outro lado, ao desindexar os valores ajustando-os para a data de compra do imóvel obtém-se, a partir da relação entre o preço de venda deflacionado para a data da compra e o preço na data da compra:

$$\frac{\$80.000,00}{\$60.000,00 \cdot 1,40} - 1 = -4,76\%.$$

Assim, tanto pelo processo de inflacionamento quanto pelo de deflacionamento, apura-se para o negócio um prejuízo real de 4,76%.

A inflação tem comportamento exponencial, com aumento de preço sobre um valor que já incorpora acréscimos apurados m períodos anteriores, assemelhando-se ao regime de juros compostos. Por exemplo, sendo de 2,8%, 1,4% e 3,0%, respectivamente, as taxas de inflação nos três primeiros meses de um ano, uma aplicação de \$12 mil no início do ano, corrigida apresentaria o seguinte desenvolvimento:

Mês	Correção	Valor corrigido
1º mês	$\$12.000,00 \cdot 1,028$	\$12.336,00
2º mês	$\$12.336,00 \cdot 1,014$	\$12.508,70
3º mês	$\$12.508,70 \cdot 1,030$	\$12.883,96

O incremento do valor da aplicação no período é de 7,37%:

$$\frac{\$12.883,96}{\$12.000,00} - 1 = 7,37\%,$$

que equivale ao produto das taxas mensais da inflação, ou seja, a inflação naquele trimestre foi de

$$[(1,028) \cdot (1,014) \cdot (1,030)] - 1 = 7,37\%.$$

A taxa equivalente mensal de inflação no período, assim como no regime de juros compostos, é apurada da seguinte maneira:

$$I_q = \sqrt[3]{1,0737} - 1 = 2,4\%.$$

Assim, são válidos para o contexto inflacionário os mesmos conceitos e expressões de cálculos enunciados para juros compostos.

Exemplo 3.35. Sendo projetada em 0,91% a.m. a taxa de inflação para os próximos cinco meses, determinar a inflação acumulada desse período.

$$I = (1,0091)^5 - 1 = 4,63\%$$

ou seja, a inflação acumulada nos cinco meses atingirá 4,63%.

Exemplo 3.36. Um certo trimestre apresenta as seguintes taxas mensais e variações nos preços gerais da economia: 7,2%, 2,9% e -1,2% (deflação). Determinar a taxa de inflação acumulada no período.

$$I = [(1 + 0,072) \cdot (1 + 0,029) \cdot (1 - 0,012)] - 1 = 8,99\%$$

Isso significa que a inflação acumulada no trimestre equivale a 8,99%.

Quando trabalha-se com informações monetárias diversas, é comum utilizar valores deflacionados para obter a evolução real de cada período. O exemplo a seguir ilustrará esse fato.

Deseja-se conhecer o crescimento real anual das vendas de uma empresa entre 2010 e 2014 em que os valores nominais e índices gerais de preços de cada ano são

Ano	Vendas Nominais(\$)	IGP-M
2010	25.715,00	100,0
2011	35.728,00	120,8
2012	47.890,00	148,6
2013	59.288,00	179,8
2014	71.050,00	227,7

Apurando a evolução nominal das vendas e o crescimento do índice de preços, tem-se:

Ano	Vendas Nominais	Evolução nominal das vendas	IGP-M	Crescimento do IGP-M
2010	\$25.715,00	–	100,0	–
2011	\$35.728,00	1,389	120,8	1,208
2012	\$47.890,00	1,340	148,6	1,230
2013	\$59.288,00	1,238	179,8	1,210
2014	\$71.050,00	1,198	227,7	1,266

A evolução das vendas e do IGP-M é determinada pela divisão entre os valores de um período e seu anterior.

Por tais resultados de 2010 a 2013 as vendas tiveram crescimento real positivo, isto é, cresceram mais do que a inflação registrada em cada ano, pois apresentaram evolução maior nas vendas do que nos índices de preços. Em 2014 o comportamento foi inverso, dessa forma, as vendas decresceram nesse ano.

Portanto, a taxa real de crescimento das vendas é determinada pela divisão do índice de evolução nominal das vendas pelo índice de evolução dos preços de cada ano, e nesse exemplo, obtém-se:

Ano	Evolução real das vendas
2011	$\frac{1,389}{1,208} - 1 = 14,98\%$
2012	$\frac{1,340}{1,230} - 1 = 8,94\%$
2013	$\frac{1,238}{1,210} - 1 = 2,31\%$
2014	$\frac{1,198}{1,266} - 1 = -5,37\%$

As vendas anuais deflacionadas e a taxa de variação real do ano são dadas a seguir:

Ano	Vendas Nominais	Evolução do Índice de Preços (BASE 2010)	Vendas Deflacionadas a Preços de 2010	Variação Real
2010	\$25.715,00	1,000	\$25.715,00	–
2011	\$35.728,00	1,208	\$29.576,16	14,98%
2012	\$47.890,00	1,486	\$32.227,46	8,94%
2013	\$59.288,00	1,798	\$32.974,42	2,31%
2014	\$71.050,00	2,277	\$31.203,34	-5,37%

Em termos acumulados, o crescimento das receitas de vendas no período atingiu 21,3%, o qual pode ser obtido do seguinte modo:

Crescimento real 2010 - 2014

$$\frac{\$31.203,34}{\$25.715,00} - 1 = 21,3\%,$$

ou ainda,

$$[(1 + 0,1501) \cdot (1 + 0,0896) \cdot (1 + 0,0231) \cdot (1 - 0,0537)] - 1 = 21,3\%.$$

A **taxa de desvalorização da moeda - TDM** mede a queda no poder de compra da moeda, causada por aumentos de preços. Assim, por exemplo, dada uma inflação de 100% em determinado período – dobrando assim os preços –, a capacidade de compra das pessoas é reduzida em 50%, caindo pela metade.

A TDM pode ser obtida a partir da fórmula:

$$TDM = \frac{I}{1 + I}, \quad (3.21)$$

em que I é a taxa de inflação registrada no período.

Logo, se a taxa de inflação alcançar 8%, então a queda na capacidade de compra registrará 7,4%:

$$TDM = \frac{0,08}{1 + 0,08} = 7,4\%.$$

Assim, quanto maior a inflação, maior será a taxa de desvalorização da moeda, o que define a diminuição do poder de compra. Para que esse último se mantenha inalterado, a renda das pessoas deve ser corrigida em valores correspondentes à inflação do período.

Se tal correção superar o valor da inflação, haverá um ganho real e aumento do poder de compra.

O cálculo da perda do poder de compra do dinheiro nas operações de venda a prazo é uma das aplicações da TDM. Já foi citado anteriormente que o dinheiro tem valores diferentes no tempo, justificados pelas taxas de juros e inflação. Considerando apenas a inflação, postergar um recebimento produz uma perda inflacionária determinada pela redução do poder de compra.

Exemplo 3.37. *Admitindo que uma empresa tenha vendido \$100.000,00 para recebimento em um prazo de 120 dias e sendo de 10% a taxa de inflação do período, a taxa de perda inflacionária assumida pela empresa na operação atinge a TDM de 9,09%:*

$$TDM = \frac{I}{1 + I} = \frac{0,1}{1,1} = 9,09\%.$$

O poder efetivo de compra do dinheiro ao final do prazo foi reduzido para 90,91% de seu valor, originando uma perda inflacionária de \$9.090,90.

Dessa maneira, a desvalorização de 9,09% apresentada no exemplo, pode ser interpretada como o desconto máximo que a empresa poderia conceder para pagamento imediato, de forma a tornar equivalente a venda à vista ou a prazo.

Exemplo 3.38. *Uma venda de \$40.000,00 foi efetuada com prazo de pagamento de 40 dias. Sendo de 2% a.m. a inflação, determinar o montante da perda inflacionária dessa venda e a taxa de redução do poder de compra do dinheiro.*

$$I = 2\% \text{ a.m. ou } (\sqrt[30]{1,02})^{40} - 1 = 2,68\% \text{ para 40 dias.}$$

$$TDM = \frac{0,0268}{1,0268} = 2,61\%.$$

Assim a taxa de redução do poder de compra é de 2,61% e o montante da perda equivale a \$1.044,00 = \$40.000,00 · 2,61%.

A **taxa nominal de juros** é a taxa normalmente adotada nas operações correntes de mercado. Ela inclui os efeitos da inflação no prazo da operação.

É preciso destacar que essa taxa mede o resultado de uma operação em valor corrente, diferindo da taxa nominal (linear) estudada anteriormente, que mede a descapitalização de juros de forma proporcional. Em termos inflacionários, a taxa nominal é prefixada e incorpora, além de efeitos da inflação, uma porção devida à **taxa real** ou **legítima**, que reflete "realmente" os juros pagos ou recebidos. Portanto, o termo "real" denota resultados apurados livres de efeitos inflacionários, ou seja, quanto se ganhou (ou perdeu) verdadeiramente.

A fórmula de apuração da taxa real é dada por:

$$r = \frac{1+i}{1+I} - 1, \quad (3.22)$$

em que r é a taxa real; i a taxa nominal e I a inflação no período. Assim, a partir de (3.22), é possível calcular a taxa nominal:

$$1+r = \frac{1+i}{1+I} \Rightarrow (1+r) \cdot (1+I) = 1+i \Rightarrow i = [(1+r) \cdot (1+I)] - 1. \quad (3.23)$$

E ainda, a taxa de inflação:

$$1+r = \frac{1+i}{1+I} \Rightarrow 1+I = \frac{1+i}{1+r} \Rightarrow I = \frac{1+i}{1+r} - 1. \quad (3.24)$$

A expressão (3.23) é conhecida por "efeito Fisher", pois foi originalmente proposta por Irving Fisher, em 1930.

A taxa real pode ser negativa, desde que a inflação supere a variação nominal dos juros, como pode-se observar no exemplo abaixo.

Exemplo 3.39. *A remuneração das aplicações em um determinado título atingiu 12,8% em um período, sendo de 9,2% a taxa de inflação desse intervalo de tempo. Assim, quem aplicou \$100.000,00 no início do período, obteve um rendimento nominal de \$12.800,00, totalizando um montante de \$112.800,00. Por outro lado, para manter o poder de compra inalterado, o capital acumulado do aplicador deve atingir, ao final do período, a soma de \$109.200,00 (considerando a taxa de inflação nesse intervalo de tempo). Como o valor de resgate é \$112.800,00 conclui-se que o lucro real foi de \$3.600,00. Dessa maneira, o aplicador teve um ganho real de \$3.600,00, o que em termos percentuais representa aproximadamente 3,2%.*

Sabe-se ainda que nesse mesmo período o dólar evoluiu 7,5% (abaixo da inflação de 9,2%). Portanto, quem aplicou \$100.000,00 nesse ativo no período, conseguiu resgatar \$107.500,00. Como precisava obter um montante de \$109.200,00 mil para manter o poder de compra da moeda, conclui-se que o aplicador teve uma perda real de \$1.700,00,

que em termos percentuais representa $-1,56\%$ (perda real). Conclui-se então que o aplicador obteve apenas $98,44\%$ do valor de seu investimento corrigido.

Pela expressão do cálculo da taxa real (3.22) tem-se:

$$r = \frac{1 + 0,075}{1 + 0,092} - 1 = -1,56\%.$$

A **taxa referencial - TR** é apurada a partir das taxas prefixadas de juros praticados pelos bancos em títulos. É utilizada como um indexador em financiamentos, pagamentos de seguros e aplicações financeiras como a caderneta de poupança.

A TR é calculada, divulgada pelo Banco Central e apurada da seguinte forma:

- Diariamente, os principais bancos captadores de recursos informam ao Banco Central suas taxas de juros pagas aos aplicadores em certificados e recibos de depósitos bancários pré-fixados, de emissão de 30 a 35 dias;
- O Banco Central calcula a média ponderada dos juros pagos pelo mercado bancário. Essa taxa média é conhecida por **taxa básica financeira TBF** e representa o custo médio de captação dos bancos na colocação de seus títulos de renda fixa no mercado;
- O Banco Central aplica sobre a TBF um redutor, obtendo então a taxa referencial - TR.

Por exemplo, se a TBF e a TR publicadas em determinado dia atingirem, respectivamente, $1,1723\%$ e $0,6787\%$, sabe-se que o redutor aplicado sobre as taxas de juros usadas na remuneração aos aplicadores de certificados de depósitos bancários - CDB será a diferença entre elas, ou seja, $0,4936\%$.

O cálculo do redutor segue os critérios de política econômica de competência do Banco Central. Ao elevar o valor do redutor, é impresso um menor custo ao tomador do empréstimo corrigido em TR e reduz os rendimentos dos aplicadores em caderneta de poupança. Assim, diminuir o valor do redutor implica uma elevação do empréstimo indexado à TR, incentivando as aplicações em caderneta de poupança pelo aumento dos seus rendimentos.

3.12 Caderneta de poupança

A caderneta de poupança é considerada a modalidade de aplicação financeira mais popular do mercado. Seus principais atrativos encontram-se na liquidez imediata, ou seja, o aplicador pode sacar seu saldo a qualquer momento; na garantia de pagamento dada pelo governo; e na isenção de impostos. Sua remuneração está fixada pela taxa referencial mais $0,5\%$ a.m. de juros, sendo creditada mensalmente para os depositantes (pessoas físicas). As contas de pessoas jurídicas têm os rendimentos creditados a cada trimestre. O cálculo dos rendimentos tem por base o menor saldo mantido pelo aplicador no período.

Exemplo 3.40. *Admita uma aplicação de \$7.500,00 em caderneta de poupança por dois meses. Sabendo que a taxa referencial definida para o primeiro e segundo meses (na data de aniversário), respectivamente, é 0,6839% e 0,7044%, pede-se determinar o saldo disponível do aplicador ao final de cada período e a rentabilidade efetiva da aplicação.*

- Saldo disponível ao final dos períodos:

Como a remuneração da caderneta de poupança é dada pela TR para a data de aniversário acrescida de juros de 0,5% a.m., temos:

$$\text{Mês 1: } FV_1 = \$7.500,00 \cdot 1,006839 \cdot 1,005 = \$7.589,05.$$

$$\text{Mês 2: } FV_2 = \$7.589,05 \cdot 1,007044 \cdot 1,005 = \$7.680,72.$$

- Rentabilidade efetiva:

i) rentabilidade acumulada do bimestre:

$$i = [(1,006839) \cdot (1,007044) \cdot (1,005)^2] - 1 = 2,41\%;$$

ii) rentabilidade mensal:

$$i = (1,0241)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,198\%.$$

A aplicação abaixo foi escrita pela professora autora e publicada no Boletim de Iniciação Científica em Matemática - BICMat, ISSN 1980-024X, volume XII de outubro de 2015 com o título "A Matemática por trás da desvalorização do dinheiro"[22].

"Sabendo-se que um aluno de graduação passou a receber, a partir de janeiro de 2013 uma bolsa mensal no valor de R\$400,00 e permaneceu recebendo tal quantia até março de 2015, deseja-se saber - considerando os efeitos inflacionários e os índices de preços nesse período - qual seria o poder de compra do valor de sua bolsa no início de segundo trimestre de 2015 e, conseqüentemente, calcular qual o reajuste ideal a ser aplicado na quantia mensal que seria recebida para que o aluno pudesse adquirir as mesmas coisas que adquiria com R\$400,00 no primeiro trimestre de 2013".

A primeira informação que deve ser levada em conta é o período compreendido entre a data inicial (primeiro trimestre de 2013) e a data final (primeiro trimestre de 2015). Feito isso, é necessário observar qual é o fator acumulado do índice de referência - em nosso caso o IGP-M - no período. É possível consultar o valor desse fator no site *Clube dos Poupadores* [9], que oferece um simulador de correção dos índices de acordo com o período e o índice de referência.

Após consultar o índice indicado para o problema obtiveram-se os seguintes dados:

Índice de correção no período: 1,1161592.

Valor percentual correspondente: 11,6159200%.

Para determinar qual seria o poder de compra do valor de sua bolsa no início de segundo trimestre de 2015, utiliza-se a expressão da TDM, considerando tal taxa como sendo igual a 11,61592%:

$$TDM = \frac{0,1161592}{1 + 0,1161592} = 10,41\%.$$

Assim, a queda no poder de compra registrada nesse período foi equivalente a 10,41%.

Pode-se concluir então que quanto maior a inflação, maior será a taxa de desvalorização da moeda, o que define a diminuição do poder de compra. Para que esse último se mantenha inalterado, a renda das pessoas deve ser corrigida em valores correspondentes à inflação do período.

Se tal correção superar o valor da inflação, haverá um ganho real e aumento do poder de compra.

O outro objetivo do problema era determinar qual seria o reajuste ideal a ser aplicado para que o aluno pudesse adquirir as mesmas coisas que adquiria com R\$400,00 no primeiro trimestre de 2013, ou seja, para recuperar o poder de compra da sua bolsa, para isso deve-se proceder da seguinte maneira:

$$R\$400,00 \cdot 1,1161592 = R\$446,46.$$

Portanto, deveria haver um reajuste de 11,61592% que é equivalente a R\$46,46.

4 Considerações finais

Finalizado esse trabalho, nota-se como são amplas as possibilidades que os professores têm para inserir a Matemática Financeira em suas aulas e atividades, independentemente da estrutura da(s) escola(s) em que se encontram. Além do quão importante a educação financeira é para todo cidadão, especialmente os alunos.

Essa inserção nas aulas pode ser feita através de distintos meios, tais como atividades em Modelagem Matemática, utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) por meio de softwares, calculadoras, sites, entre outras opções.

Sem dúvidas é possível afirmar que tudo que foi desenvolvido influenciou diretamente a formação da autora como professora, evidenciando a importância de conhecer os documentos que regem a educação brasileira e aprimorar as aulas ministradas de acordo com aquilo que os alunos apresentam maior facilidade em compreender. Porém, nem sempre é fácil identificar quando isso ocorre. É preciso que tanto o professor esteja atento aos sinais que os alunos dão e às suas manifestações verbais, quanto os alunos relatem essas sensações ao professor.

Espera-se que essa dissertação possa chegar aos professores que buscam aprimorar suas práticas e conhecimentos a partir das propostas da Base Nacional Comum Curricular, documento que deverá reger todos os currículos e projetos pedagógicos das escolas nos próximos anos e fundamentar a organização do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e dos vestibulares.

Referências

- [1] A VIDA É FEITA DE DESCONTO. **Faixas Salariais x Classe Social ? Qual a sua classe social?**. Disponível em: <<https://thiagorodrigo.com.br/artigo/faixas-salariais-classe-social-abep-ibge/>>. Acessado em 08 janeiro 2019.
- [2] ANÁLISE REAL. **Statistics - Globo News Style**. Disponível em: <<https://analisereal.com/2014/01/11/statistics-globo-news-style/>>. Acesso em: 03 janeiro 2019.
- [3] ASSAF NETO, A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.
- [4] ARAUJO, A. P. **Introdução à Economia Matemática**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [5] BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Institucional**. Disponível em <<https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/institucional>>. Acesso em: 25 agosto 2015.
- [6] BM&F BOVESPA. **Planilha de Orçamento**. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/educacional/educacao-financiera/planilha-de-orcamento/>. Acesso em: 08 janeiro 2019.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC - Ensino Fundamental**. Brasília, 2017.
- [8] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC - Ensino Médio**. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/bncc-ensino-medio>> . Acesso em: 20 janeiro 2019.
- [9] CLUBE DOS POUPADORES. **Corrigir valores pela inflação: IPCA, IGPM, IGPDI, INPC**. Disponível em: <<http://www.clubedospoupadores.com/ferramentas/corrigir-valores-pela-inflacao-ipca-igpm-igpdi-inpc.html>>. Acesso em: 19 agosto 2015.
- [10] FINANCER.COM. **Como preencher um cheque**. Disponível em: <<https://financer.com/br/como-preencher-um-cheque/>>. Acesso em: 12 janeiro 2019.
- [11] G1 ECONOMIA. **Única fora de circulação, moeda original de R\$ 1 é negociada a R\$ 10**. Disponível em: <<http://g1.globo.com/economia/seu-dinheiro/noticia/2014/07/unica-fora-de-circulacao-moeda-original-de-r-1-e-negociada-r-10.html>>. Acesso em: 03 novembro 2018.

-
- [12] G1 HORA 1. **Planilha de gastos é fundamental no controle do orçamento doméstico.** Disponível em: <<http://g1.globo.com/hora1/noticia/2015/07/planilha-de-gastos-e-fundamental-no-controle-do-orcamento-domestico.html>>. Acesso em: 02 janeiro 2019.
- [13] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. **IPCA varia 0,48% em setembro.** Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/22735-ipca-varia-0-48-em-setembro>>. Acesso em: 20 outubro 2018.
- [14] INFOMONEY. **Tudo sobre IPCA.** Disponível em: <<https://www.infomoney.com.br/tudo-sobre/ipca>>. Acesso em: 23 agosto 2015.
- [15] INFOMONEY. **Tudo sobre SELIC.** Disponível em: <<https://www.infomoney.com.br/tudo-sobre/selic>>. Acesso em: 23 agosto 2015.
- [16] INVESTPEDIA. **O que é CDB e como calcular sua rentabilidade?** <<http://www.investpedia.com.br/artigo/O+que+e+CDB+e+como+calcular+sua+rentabilidade.aspx>>. Acesso em: 19 agosto 2015.
- [17] KHAN ACADEMY. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/>>. Acesso em: 20 novembro 2018.
- [18] PORTAL BRASIL. **Índice Geral de Preços do Mercado - IGP-M.** Disponível em: <<http://www.portalbrasil.net/igpm.htm>>. Acesso em: 19 agosto 2015.
- [19] PREFEITURA DO MUNICÍPIO DE PIRACICABA. **Portal da Transparência.** Disponível em: <<http://transparencia.piracicaba.sp.gov.br/relatorio/folha-salarial-de-agentes-publicos/>>. Acesso em: 31 janeiro 2019.
- [20] PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT.** Disponível em: <<http://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=base+nacional+comum+curricular&aluno=>>>. Acesso em: 25 outubro 2018.
- [21] RECIBOS PRONTOS. **Recibo para Mão de Obra.** Disponível em: <<https://recibopronto.com/recibo-para-mao-de-obra/>>. Acesso em: 06 janeiro 2019.
- [22] REGONHA, M. R. A Matemática por trás da desvalorização do dinheiro. **Boletim de Iniciação Científica em Matemática - Bicmat.** Rio Claro, v. XII, p. 101-113, out 2015. Disponível em <<http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat/download.html>>.
- [23] SAMANEZ, C. P. **Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos.** 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.
- [24] VEJA.COM. **Banco Central lança novas cédulas de real. Modelos são mais seguros.** Disponível em: <<https://veja.abril.com.br/brasil/banco-central-lanca-novas-cedulas-de-real-modelos-sao-mais-seguros/>>. Acesso em: 19 outubro 2018.

Índice Remissivo

- Índice de preços, 78
 - ao consumidor amplo - IPCA, 76
- Atividades propostas, 16
- Bônus do Banco Central, 76
- Banco Central, 75, 76, 86
- Base Nacional Comum Curricular - BNCC, 12
- Capitais equivalentes, 62
- Capital, 56, 59
- Capitalização
 - contínua, 59, 68
 - descontínua, 59
 - discreta, 59
- Certificado de depósito bancário - CDB, 86
- Competências específicas, 16
- Convenção
 - exponencial para períodos não inteiros, 67
 - linear para períodos não inteiros, 67
- Custo efetivo do cliente, 72
- Deflação, 78
- Desconto
 - bancário, 70, 71
 - comercial, 72
 - comercial simples, 70
 - por dentro, 70
 - por fora, 70
 - racional, 72
 - racional simples, 70
 - simples, 70
- Diagrama do fluxo de caixa, 57
- Efeito Fisher, 85
- Equivalência financeira, 62
- Fórmula de juros simples, 59
- Fator de
 - atualização ou de valor presente, 60
 - capitalização dos juros compostos, 63
 - capitalização ou de valor futuro dos juros simples, 59
- Fracionamentos do prazo de uma operação financeira, 65
- Habilidades, 16
- Inflação, 56
- Juro, 56
 - comercial, 61
 - exato, 61
 - ordinário, 61
- Letra
 - do Banco Central, 76, 77
 - do tesouro nacional, 76, 77
 - financeira do tesouro, 76
- Montante, 59
- Nota
 - do Banco Central, 76
 - do tesouro nacional - série B principal, 76
 - do tesouro nacional - série F, 76
- Objetos de conhecimento, 16
- Preço unitário, 77
- Progressão
 - aritmética, 57
 - geométrica, 58
- Regime de capitalização
 - composta, 58
 - simples, 57
- Série de valores monetários deflacionados, 82
- Títulos

públicos, 75
representativos da dívida pública, 75

Taxa

básica financeira - TBF, 86
de desvalorização da moeda, 83
de rentabilidade efetiva linear, 77
efetiva de desconto, 72, 73
efetiva de desconto exponencial, 73
efetiva de desconto linear, 72
efetiva de juros compostos, 65
efetiva exponencial, 73
efetiva linear, 73, 77
equivalente de juros compostos, 64
equivalente de juros simples, 60
inflacionária, 79
interna de juros, 67
interna de retorno, 67
linear de juros simples, 60
nominal de juros, 85
nominal de juros compostos, 65
nominal de juros simples, 60
percentual, 56
proporcional de juros simples, 60
real ou legítima, 85
referencial - TR, 86
SELIC, 76
unitária ou decimal, 56

Tesouro

direto, 75
nacional, 75

Unidade monetária, 57

Unidade temática

álgebra, 14
geometria, 14
grandezas e medidas, 15
números, 13
probabilidade e estatística, 15

Valor

descontado, 70
do desconto racional, 73
nominal, 70