Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

LUIS EDMUNDO CARLOS PINTO DANTAS

O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR: EXPLORANDO FRACTAIS E CAOS POR MEIO DE NARRATIVAS

Orientador:

Humberto José Bortolossi

NITERÓI

DEZEMBRO/2018

Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Fractais e Caos por Meio de Narrativas

Niterói – RJ

Dezembro / 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

D672 Dantas, Luis Edmundo Carlos Pinto
O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Fractais e Caos por Meio de Narrativas / Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas. – Niterói: [s.n.], 2018.
71 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2018.

1. Narrativas. 2. Uso de vídeos. 3. Ensino e Aprendizagem de Matemática. I. Título.

CDD: 510.7

Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Fractais e Caos por Meio de Narrativas

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Dezembro / 2018

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título *"O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Fractais e Caos por Meio de Narrativas"*, defendida por Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas e aprovada em 20 de dezembro de 2018, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Renata Martins da Rosa
Doutora em Matemática pelo IMPA

Wanderley Moura Rezende
Doutor em Educação pela USP

Dedico este trabalho à minha família,
no qual busco a todo momento apenas servir de fonte de inspiração
retribuindo todo o amor que eles sempre me dão.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por ter me guiado e me dado forças para continuar, principalmente nos momentos em que pensei em desistir.

Em segundo lugar, à minha família. Minha esposa Verônica e meus filhos Carlos Eduardo e Carlos Henrique que acreditaram em mim e me apoiaram nesta jornada e precisaram conviver com a minha ausência em diversos momentos.

Ao meu orientador Humberto Bortolossi, por sua admirável e incansável orientação, ultrapassando os limites do que eu poderia sequer imaginar.

Aos meus colegas de projeto, cada um com sua característica, tornando estes anos de trabalho inesquecíveis.

Das leis mais simples nascem infinitas maravilhas que se repetem indefinidamente.

(Benoit Mandelbrot)

Resumo

Nesta última década, ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes e curtas) relacionados com Matemática e Estatística. Com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Esta dissertação contribui, então, para esse projeto oferecendo dois roteiros detalhados para uso em sala de aula de vídeos relacionados com a temática de fractais e da teoria do caos: "Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta" e "Alta Ansiedade: A Matemática do Caos". Cada roteiro inclui, entre várias informações, indicações de objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo e, também, uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição de cada vídeo. Mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma. Nosso trabalho apresenta também alguns recortes teóricos que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática e da Estatística.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, uso de vídeos em sala de aula, narrativa, *storytelling*, fractais, caos.

Abstract

Keywords: .

Sumário

1 Introdução

1.1 Nossa proposta

Nesta última década ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes, curtas) relacionados com Matemática e Estatística: vídeos da TV Escola do Ministério da Educação; documentários da BBC (British Broadcasting Corporation) e PBS (Public Broadcasting Service); episódios da série "Isto é Matemática" apresentada por Rogério Martins; o canal "Numberphile" no YouTube com suporte do MSRI (Mathematical Sciences Research Institute); vídeos educacionais TED-Ed; curtas das séries "Dimensions" e "CHAOS" idealizadas e produzidas por Étienne Ghyz e colaboradores; alguns vídeos de "Os Simpsons"; apenas para mencionar alguns (Figura 1.1).

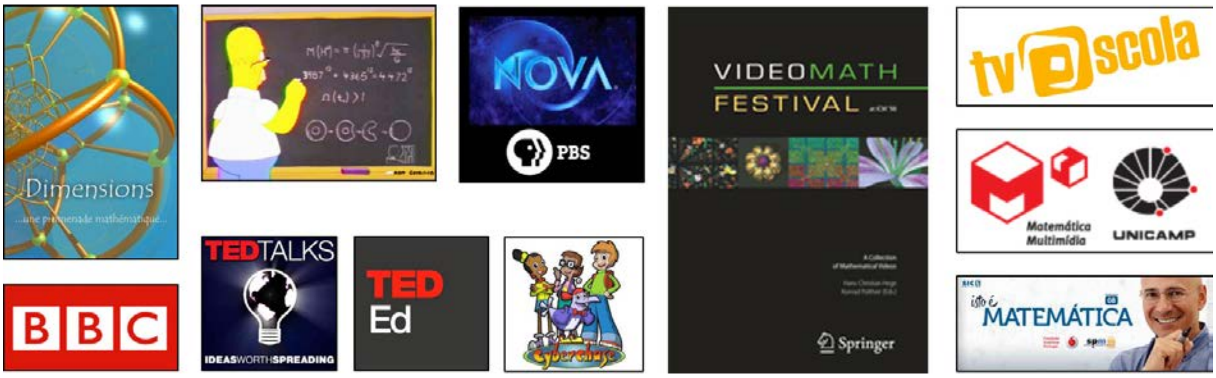


Figura 1.1: Algumas iniciativas na produção de materiais audiovisuais relacionados com Matemática e Estatística.

Nesse contexto, com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Cada roteiro é dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica**: faixa de classificação etária; idioma do áudio e das legendas; título original; gênero; duração; produtora e ano de produção; tópicos matemáticos abordados;

nível escolar sugerido; interdisciplinaridade; marcadores; competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias.

- **Imagens selecionadas**: seis imagens que permitem ao professor, visualmente, ter uma ideia do estilo do vídeo e, também, de seu conteúdo.
- **Sinopse**: uma breve descrição do conteúdo do vídeo sem *spoilers* (isto é, sem informações que poderiam estragar a apreciação do vídeo).
- **Com quais objetivos esse vídeo pode ser usado**: um parágrafo indicando alguns objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo.
- **Sensibilização**: um texto e duas imagens que podem ser usadas para confeccionar um cartaz de divulgação do vídeo na escola.
- **Sugestões de questões gerais**: uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestões de questões específicas**: uma proposta de questões que para serem respondidas, se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos dos trechos são indicados no roteiro).
- **Observações para o professor**: orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais suplementares relacionados com o vídeo.
- **Outras informações**: bibliografia, agradecimentos, créditos.

Cabe ressaltar que, mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma.

1.2 Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já na época dos antigos videocassetes a questão era considerada[a]. Moran (1995), por exemplo, já apontava para os usos inadequados, observações estas que continuam ainda válidas nos dias de hoje com vídeos *on-line*, em DVD ou *blu-ray* e em formato *streaming*:

- **vídeo tapa-buraco**: colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência do professor;
- **vídeo enrolação**: exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;
- **vídeo deslumbramento**: o professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma

[a]Ainda que, nesta época, existisse relativamente pouco material disponível para a área de Matemática.

empolgar-se e passar vídeo em todas as aulas, esquecendo outras dinâmicas mais pertinentes;

- **vídeo perfeição**: existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem falhas de informação ou defeitos estéticos; não obstante, os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ainda ser usados para, junto com os alunos, descobrir e analisar os erros existentes;
- **só vídeo**: não é didaticamente satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto da aula, sem reproduzir trechos com momentos mais importantes.

Outra referência clássica da época dos videocassetes é Ferrés (1996). Neste livro, o autor:

- **propõe uma sistematização para o uso didático de vídeos:** videolição, videoapoio, videoprocesso, programa motivador, programa monoconceitual, vídeo interativo;
- **estabelece critérios para a utlização didática do vídeo:** mudança de estruturas pedagógicas, o papel do professor, a formação do professor frente a este tipo de mídia, a relação didática do vídeo com outras mídias, etc.;
- **categoriza as diversas funções do vídeo no ensino:** função formativa/videodocumento, função motivadora/videoanimação, função expressiva/criatividade e videoarte, função avaliadora/videoespelho, função investigativa, função lúdica/o vídeo como brinquedo, função metalinguística, combinação e interação das funções previamente citadas;
- **dá sugestões práticas e técnicas para a exibição do vídeo:** preparação antecipada do local, disposição dos alunos de acordo com o tamanho da tela do televisor, problemas técnicos frequentes;
- **sugere abordagens pedagógicas após a exibição do vídeo:** comunicação espontânea dos alunos, reflexão crítica, pesquisa final e recapitulação, nuvem de palavras, entrevista com um especialista, gravação de pesquisa de opinião pública, manipulação de objetos, palavras-chave, resumo objetivo, recontar a história em grupo, desenho livre, desenho em quadrinhos, escrever uma carta, comunicação em duplas, interpelação em duplas, expressão corporal, cartazes e trabalhos em grupo, fotografia do ambiente, elaboração de um dossiê, tribunal e julgamento, criação de um mural, realização de uma colagem, Phillips 66, primeira exibição muda (sem som), interrupção da exibição, exibição invertida;
- **sugere várias pautas para avaliação do vídeo sob o ponto de vista didático:** tema, objetivos, formulação didática, estrutura, roteiro didático, formulação audiovisual, imagem como valor técnico, faixa sonora como valor técnico, interação dos elementos.

Desde então, vários trabalhos sobre vídeos no contexto escolar têm sido produzidos. Para o leitor interessado, indicamos: Polster e Ross (2012), Sklar e Sklar (2012), Machado e Mendes (2013), Napolitano (2013, 2015), Muzás (2015), Pellicer (2015), Reiser (2015), Santos (2015), Bulman (2017). Indicamos também quatro páginas *WEB* especializadas na Matemática dos filmes: *Mathematics in Movies* (<http://bit.ly/2OuJOUU>) mantida por Oliver Knill, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard (nos EUA); *Matemáticas en El Cine y en Las Series de T.V.* (<http://bit.ly/2yPI8Aa>), mantida por José María Sorando Muzás (na Espanha); *MMDB–The Mathematical Movie Database* (<https://bit.ly/2HurRY8>) mantida por Burkard Polster (Monash University) e Marty Ross na Austrália; e *Mathematical Fiction* <https://bit.ly/1kcpcAR> mantida por Alex Kasman (College of Charleston) nos Estados Unidos.

Entre as iniciativas governamentais do uso de vídeos em sala de aula, destacamos o projeto "O Cinema Vai À Escola – O Uso da Linguagem Cinematográfica na Educação" da Fundação para o Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. De acordo com o *site* oficial (<http://bit.ly/2OnYXqT>), o projeto procura subsidiar a rede pública de ensino com materiais, equipamentos e acervos didáticos, fornecendo às escolas de Ensino Médio um conjunto de filmes de diferentes categorias e gêneros, em DVD, acompanhado de materiais de apoio à prática pedagógica. Os vídeos são principalmente produções cinematográficas do circuito comercial e os materiais de apoio incluem roteiros no formato PDF (<http://bit.ly/2F3hPMu>) e, também, vídeos tratando do universo dos vídeos (<http://bit.ly/2OorDA8>). Não obstante, observamos que, neste projeto, temas relacionados com a Matemática estão ausentes.

Por fim, registramos que o Whittier College nos Estados Unidos oferece uma disciplina de graduação, NTD 231 – *Numb3rs in Lett3rs & Fi1ms*, que explora a conexão entre a Matemática e as Artes criativas escritas/teatrais. Segundo o catálogo da instituição (<https://goo.gl/j5wtX4>), nessa disciplina, os alunos leem ficção e assitem a filmes nos quais os conceitos matemáticos fornecem a estrutura ou desempenham um papel central na peça criativa. Os alunos também estudam os tópicos matemáticos relacionados a esses trabalhos para entender melhor a intenção do autor. Detalhes da iniciativa podem ser encontrados no artigo Chabán & Kozek (2015).

1.3 Concepção e divisão deste trabalho

Este texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos algumas perspectivas relacionadas com o conceito de narrativa (*storytelling*) na intenção de tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os roteiros de dois vídeos (nos moldes descritos na seção anterior) são apresentados nos Capítulos 3 e 4. Experiências de uso dos vídeos e dos roteiros junto com algumas considerações finais são o tema do Capítulo 5.

Os Capítulos 1, 2 e parte do 5 foram redigidos de forma conjunta a partir de seminários realizados pelos mestrandos que trabalharam com a mesma metodologia acerca do uso didático de vídeos: André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha. Os Capítulos 3, 4 e parte do 5 têm redação individual: mestrandos diferentes trabalharam com assuntos diferentes (Probabilidade e Estatística, Números e Medidas, Linguagem e Lógica Matemática, Fractais e Caos, etc.).

Por fim, indicamos que as respostas das questões propostas nos roteiros podem ser obtidas mediante solicitação para o e-mail <amec7a@gmail.com>.

2 Narrativas: Um Panorama

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Como aponta Gottschall (2013), *storytelling* é como gravidade: ela é esta força poderosa e abrangente que permeia nossas vidas e que acabamos por não perceber por estarmos tão habituados com ela. Vídeos (tema de nosso trabalho), quadrinhos, contos, piadas, parábolas (incluindo as religiosas), novelas, músicas, peças de teatro e vieogames são, todos, formas de narrativa que nos cercam e nos ensinam.

2.1 Narrativas e A História da Humanidade: Harari

Harari em seu livro “Sapiens: Uma Breve História da Humanidade” coloca o papel importante que a narrativa teve na evolução histórica dos seres humanos. De acordo com o autor, foi o surgimento da ficção que permitiu a cooperação humana em grande escala: um grande número de estranhos só pode cooperar de maneira eficaz se acreditar nos mesmos mitos, ou seja, histórias que existem na imaginação coletiva das pessoas. Formigas e abelhas também podem trabalhar juntas em grandes números, mas elas o fazem de uma maneira um tanto rígida, e apenas com parentes próximos. As religiões, as nações, o dinheiro, as leis, as culturas e as marcas são apenas alguns exemplos de realidades imaginadas que foram construídas e fortalecidas baseadas em mitos partilhados. Uma realidade imaginada não é uma mentira. Pelo contrário, é algo em que muitos acreditam e por essa razão, exerce influência sobre o mundo, molda comportamentos e preferências. A imensa diversidade de realidades imaginadas que os *sapiens* inventaram e a diversidade resultante de padrões de comportamento são os principais componentes do que chamamos “culturas”. A partir da Revolução Cognitiva[a], as narrativas históricas

[a]Surgimento de novas formas de pensar e se comunicar, ocorrida entre 70 e 30 mil anos atrás, que pode ter sido causada por mutações genéticas acidentais que mudaram as conexões internas dos *sapiens*, possibilitando que pensassem de uma maneira sem precedentes e se comunicassem usando um tipo de linguagem totalmente novo.

substituem as narrativas biológicas como nosso principal meio de explicar o desenvolvimento do *Homo sapiens*.

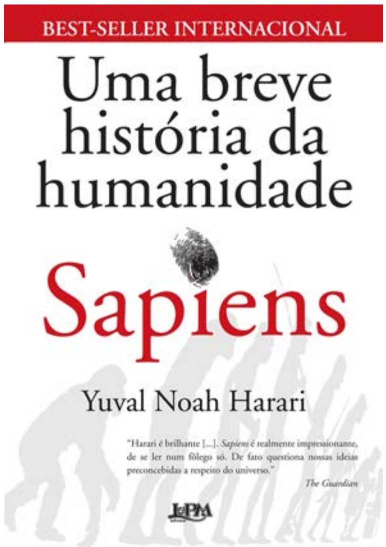


Figura 2.1: Capa do livro de Harari (2015).

2.2 Narrativas e A Neurociência: Zak

Uma outra explicação para a afinidade humana com *storytelling* se dá no campo da neurociência com a substância oxitocina[b] (um tipo de hormônio). Um dos principais pesquisadores desta área é o neurocientista americano Paul J. Zak, fundador do campo de estudo “neuroeconomia”. Zak é diretor fundador do Centro de Estudos Neuroeconomia e professor da Universidade de Claremont Graduate. Além disso, ele é professor na Loma Linda University Medical Center. Zak possui graduação em Matemática e Economia pela Universidade Estadual de San Diego, doutorado em Economia pela Universidade da Pensilvânia e pós-doutorado em neuroimagem pela Universidade de Harvard.

O estudo do Dr. Zak busca entender um pouco mais sobre os efeitos da oxitocina. O que se sabia deste hormônio é que ele induzia as contrações no parto e a produção de leite na amamentação, além de ser liberado por ambos os sexos durante o ato sexual. Mas as perguntas que ele se fez foram: ”Por que os homens também a produziam?”e ”Qual era exatamente a sua importância?”. Sua busca por respostas resultaram no livro “A Molécula da Moralidade: As Surpreendentes Descobertas sobre A Substância que Desperta O Melhor em Nós”. Ele também tem divulgado seu trabalho por meio de palestras, como o vídeo TED “Confiança, Moralidade – e Oxitocina” (<https://goo.gl/PmzKve>).

[b]Alguns autores escrevem ocitocina no lugar de oxitocina.

Figura 2.2: Zak, seu livro e sua palestra TED sobre a oxitocina (2015).

O laboratório de Paul Zak foi o primeiro a descobrir que a oxitocina neuroquímica é sintetizada no cérebro humano e que essa molécula motiva a reciprocidade, isto é, mesmo sem contato visual, face a face, o hormônio da oxitocina parece sinalizar que o outro é familiar e confiável. Esse pequeno peptídio sintetizado no hipotálamo dos cérebros dos mamíferos pode ser identificado por meio das alterações no exame de sangue que refletem as alterações na produção cerebral.

Em seu trabalho “*Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*” de 2015, Zak fez experimentos para verificar como o tipo de narrativa de um vídeo se correlaciona com a liberação de oxitocina e como a liberação de oxitocina se correlaciona com o grau de atenção de um indivíduo. A medição do nível de oxitocina foi feita por um aferição indireta a cada milésimo de segundo via eletrocardiograma no nervo vago (descobriu-se que esse nervo está repleto de receptores de oxitocina). O nível de atenção foi medido pela aceleração do batimento cardíaco e pelo suor proveniente de glândulas écrinas na pele. O vídeo exibido contava uma história com arco dramático envolvente: um pai que aparecia falando de seu filho Ben com câncer terminal e a sua tentativa de superar seus medos e frustrações para conseguir conectar-se ao seu filho e desfrutar de sua companhia pelos meses que ainda tinha. O experimento verificou que a produção de oxitocina e a atenção estão correlacionadas com o grau de dramaticidade. Ao longo dos cem segundos do vídeo, observou-se que o nível de atenção aumentava e diminuia, com o cérebro ficando atento à história para, em seguida, fazer uma rápida pesquisa do restante do ambiente e, então, reorientar para a história à medida que a tensão aumentava. O pico de resposta da atenção ocorreu no clímax do vídeo, quando o pai de Ben revela que seu filho está morrendo.

Paul Zak (2015) conclui: “Narrativas que nos levam a prestar atenção e também nos envolvem emocionalmente são as histórias que nos movem para a ação. Isto é o que um bom documentário faz.” (tradução nossa). Assim, segundo o pesquisador, as narrativas convincentes causam liberação de oxitocina e, portanto, elas têm o poder de afetar nossas atitudes, crenças e comportamentos.

2.3 Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado

Em sua palestra intitulada “A Narrativa em Matemática”, proferida na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da Universidade Federal Fluminense em 2016, o educador Nilson José Machado analisa as correlações entre a Língua Materna (o Português, em nosso caso) e a Matemática, mostrando como uma faz uso da outra a todo momento e o papel das narrativas neste processo.

Machado inicia observando que informações soltas, em geral, perdem o seu valor, enquanto narrativas encadeiam informações e criam elos cognitivos que constroem os significados mais marcantes, estabelecendo assim o conhecimento. Segundo Machado, a conexão entre “conhecimento” e “narrativa” é tão profunda que ambas as palavras têm um léxico comum: *gnarus*.

A ideia de narrativa, destaca Machado, surge do diálogo entre as ideias de cadeia e de rede. Na rede, tudo está ligado, articulado. O encadeamento é a ideia cartesiana que segue uma linha: “se isso, então aquilo”. Atualmente, continua o autor, as pessoas tendem a dizer que as ideias cartesianas são ultrapassadas e que tudo está em rede, porém temos que pensar que até mesmo para falar precisamos de um encadeamento de ideias; do contrário, não formamos sequer uma frase. Quem conta uma história, encadeia, pois toda narrativa é um encadeamento.

Machado, em seguida, estabelece que o *conhecimento explícito* é aquele que, quando perguntados a respeito, respondemos imediatamente. Este tipo de conhecimento, acrescenta o educador, representa uma parte muito pequena de todo o conhecimento que adquirimos na vida. A maior parte de tudo o que sabemos não conseguimos expressar claramente e este é o *conhecimento tácito*. A narrativa combina os dois tipos de conhecimento: o tácito (que ele chama de “recheio da história”) e o explícito (que é a “moral da história”). Machado prossegue: a informação sem narrativa se perde, é como se fossem cenas isoladas. Informações isoladas de nada valem. O que não vira uma história para contar, morre. É preciso “linkar” as coisas, criar um roteiro, para que elas (as informações) permaneçam na memória.

Machado destaca, então, a importância das metáforas na construção do significado: quando encontramos algo que explica tão bem o que queremos, as coisas tornam-se claras de modo que não precisamos defini-las. De acordo com o pesquisador, há vários tipos de narrativas: binárias (que são as mais simples e polarizadas entre o “bem” e o “mal”), quaternárias (que são as que têm dois eixos) e as multifárias (mais complexas, sem definição explícita de bem e mal, e que são mais parecidas com a realidade).

Machado apresenta, na sequência, vários indícios de um "paralelismo" entre a Matemática e os Contos de Fadas em Língua Materna.

- Contos de Fadas são, em geral, binários, isto é, polarizados (o "bem" contra o "mal"); em Matemática, há também uma polarização: ou uma sentença matemática fechada é "verdadeira" ou ela é "falsa".
- A palavra "contar" tem, por um lado, na Matemática, a noção de "enumerar" e, por outro, em Português, ela traz a ideia de "narrar" (entre outros significados).
- Os Contos de Fadas começam com "Era uma vez ..." e terminam com "E foram felizes para sempre!"; em Matemática, as demonstrações começam com "Seja ..." e terminam com "Como queríamos demonstrar!".
- A Matemática, assim como os Contos de Fadas, fazem forte uso de abstrações. Por exemplo, não existem unicórnios nem círculos no mundo real (ambos são objetos abstratos). Contudo, frequentemente, a abstração na Matemática é vista como algo muito complicado, enquanto que, nos Contos de Fadas, ela é aceita de forma mais natural.
- Os significados, tanto na Matemática, como nos Contos de Fadas, devem passar por narrativas coerentes: é preciso contar bem a história, mesmo sendo ela uma demonstração, com começo, meio e fim.

Existem ainda outros aspectos comuns, complementa Machado: o tempo que tem que ser presente na história, mas que serve a qualquer tempo ou em qualquer época; a micromotivação que gera a macromotivação; a hermenêutica que não exclui a interpretação aberta; o genérico que trata do particular.

Por fim, Machado cita o filósofo britânico Bertrand Russell, ao colocar que o papel principal do professor é evitar duas coisas na mente dos alunos: a primeira são as *narrativas unárias*, aquelas nas quais se acredita que haja uma única verdade e que dão origem a dogmatismos e fanatismo; a segunda são as *narrativas binárias*, que levam aos extremismos ao não permitirem opções alternativas intermediárias.

2.4 Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur

O livro "Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative", editado pelos professores Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, e publicado pela Princeton University Press, em 2012, tem sua origem em uma conferência Mykonos, na Grécia, em 2005 com a criação do grupo THALES + FRIENDS. O grupo foi criado com o objetivo de transpor “o abismo entre a Matemática e as outras formas de atividades culturais”. A segunda conferência, que ocorreu em Delphis, em 2007, e contou com matemáticos, historiadores, filósofos, professores de Literatura e um romancista especialista em Matemática, focou em estudos sobre Matemática e Narrativa. Os trabalhos desta conferência tornaram-se a base para o referido livro, cujo título remete às palavras “Não perturbe meus círculos!” atribuída a Arquimedes antes de ser assassinado por um soldado romano em Siracusa.

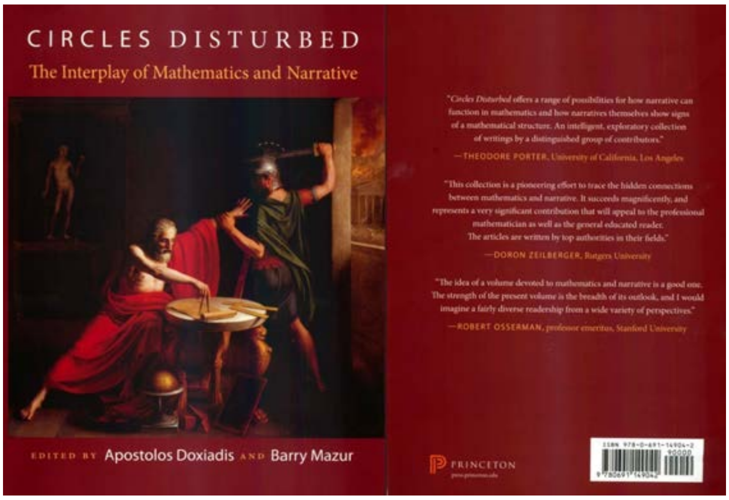


Figura 2.3: Doxiadis, Mazur e a estrutura narrativa da Matemática.

O Capítulo 10 do livro, “A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric” (“Um Bonde Chamado (entre Outras Coisas) Prova: Da Narrativa à Geometria, via Poesia e Retórica”), escrito por Apostolos Doxiadis, é o capítulo mais longo da obra, ocupando mais de cem páginas. Nele, o autor defende que a origem grega da maneira de se fazer e escrever provas que usamos hoje está relacionada com a narrativa, a narrativa poética e, sobretudo, com a retórica forense. Doxiadis sintetiza as várias conexões em um diagrama, conforme a figura a seguir. No diagrama, a flecha preta sólida denota influência direta e a pontilhada, indireta. A flecha cinza indica influências de domínio específico nos dois domínios em que a prova teve início.

Os termos “narrativa” e “história” são frequentemente usados intercambiavelmente, mas precisamos distingui-los, usando narrativa para denotar algo mais geral, ou seja, todas as histórias são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias. O termo narrativa denota um modo de comunicação cujo objetivo é representar uma ação bem como representar uma mediação simbólica entre o mundo das ações e o mundo das representações mentais. De acordo com Zacks, Tversky e Iyer (2001), “narrativas são discursos que descrevem uma série de ações”, um ponto de vista compartilhado por Doxiadis.

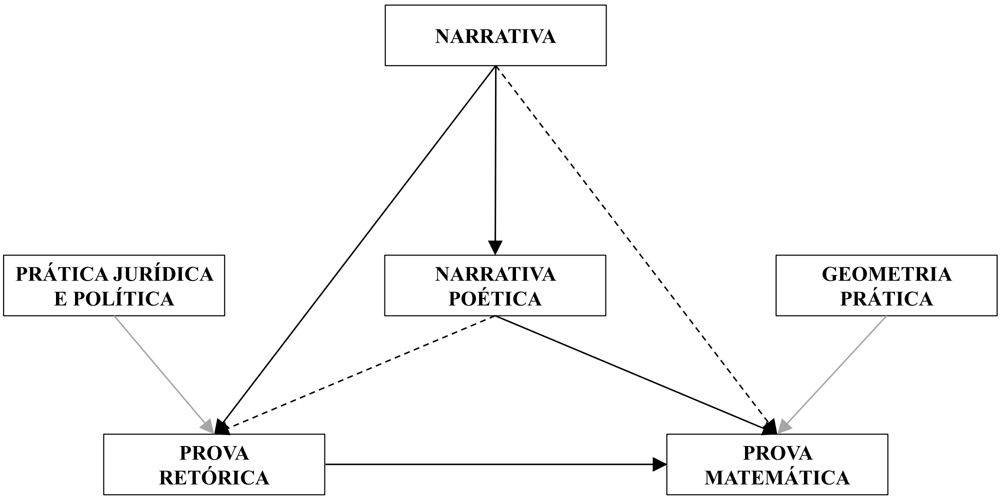


Figura 2.4: relações de práticas culturais que deram origem à prova matemática

Por narrativa poética, o autor entende como aquela narrativa em prosa e verso desenvolvida na Grécia Antiga nos séculos VI e VII a.C. da qual fazem parte as epopeias de Homero e Hesíodo. Tais formas de narrativa dominaram a cultura grega e suas características serviram para a formação das formas narrativas subsequentes.

De acordo com Doxiadis, o estilo arcaico de narrativa, especialmente aquele encontrado nas epopeias, trabalha com uma combinação de mecanismos cognitivos inatos e os hábitos de uma prática de desenvolvimento cultural, unindo sentenças narrativas curtas com o objetivo de criar uma representação viva na mente do leitor. Na Idade Clássica, surge um novo estilo narrativo, a tragédia, que dá um novo formato à representação da ação por meio do uso da mimese (figura em que o orador imita outrem, na voz, estilo ou gestos, em discurso direto). Doxiadis coloca que "o desenvolvimento conjunto da tragédia e da retórica é parte da história maior das mudanças trazidas na vida das cidades-estados gregas pela transformação política, da tirania à oligarquia, para práticas mais participativas, a mais avançada das quais é a democracia". Central para essa transformação, continua Doxiadis, são formas de discurso culturalmente desenvolvidas cujo objetivo é a persuasão. A retórica, a arte da persuasão, também usa uma forma de prova, diferente, mas não em sua totalidade, da prova matemática. Existiram três gêneros de retórica na Antiguidade Clássica: cerimonial, política e judicial. A retórica cerimonial é usada em ocasiões festivas ou em exibições oratórias, a retórica política usada em assembleias e a retórica judicial usada pelos litigantes em uma corte judicial.

Por fim, a Geometria Prática é aquela evidenciada na Grécia Antiga, na qual as ferramentas básicas se resumiam à régua e ao compasso. Por volta do ano 900 a.C. podemos perceber a evidência de uma ferramenta semelhante a um compasso. Seria um pincel articulado que foi utilizado para desenhar em ânforas (vasos antigos). Vale ressaltar que muitas vezes uma ferramenta é criada para um determinado propósito, mas seus usuários a tornam mais sofisticada do que para aquilo que fora criada. Esta obra artesanal acabou sendo o mesmo desenho utilizado em muitas provas geométricas realizadas séculos depois.

2.5 Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl

Rina Zazkis e Peter Liljedahl da Simon Fraser University, no Canadá, escreveram o livro "Teaching Mathematics as Storytelling" que trata especificamente do uso de narrativas (*storytelling*) no ensino da Matemática. O livro apresenta storytelling em Matemática como um meio para se criar uma sala de aula em que a Matemática seja apreciada, entendida e divertida. Os autores mostram como envolver os alunos nas atividades matemáticas por meio da narrativas. O texto apresenta vários tipos de narrativas que podem ser usadas em sala de aula: (1) narrativas que proporcionam uma trama ou plano de fundo para os problemas matemáticos; (2) narrativas que se entrelaçam profundamente com o conteúdo e que explicam conceitos e ideias; (3) narrativas que ajudam a resolver um problema ou a alcançar um melhor entendimento de uma solução; (4) narrativas na forma de problemas que propõem questões. Além disso, os autores apresentam um enquadramento teórico para a criação de novas narrativas, ideias para enriquecer e usar narrativas já existentes, bem como várias técnicas que tornam uma narrativa mais interativa e invocativa para o leitor. O livro é, assim, de interesse para quem ensina Matemática ou para quem forma professores de Matemática.

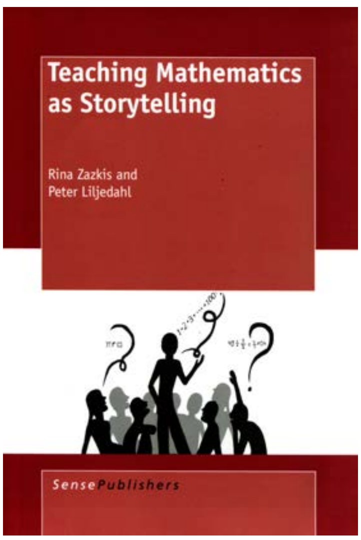


Figura 2.5: Zazkis, Liljedahl e o uso de narrativas no Ensino da Matemática.

Ao longo dos seus 12 capítulos, o livro intercala justificativas e ponderações sobre o uso de storytelling no contexto escolar. Destacamos os seguintes trechos:

- O valor de uma história para o ensino está precisamente no poder de engajar as emoções dos estudantes e, de forma conjunta, suas imaginações no material curricular.
- O grande poder das histórias está em sua missão dupla: elas comunicam informação de uma forma memorável e delineiam os sentimentos dos ouvintes sobre a informação que está sendo comunicada.
- Contar uma história é estabelecer um significado e estabelecer significado é o fio condutor no ensino da Matemática, um assunto que é frequentemente percebido como uma mera manipulação de símbolos cujo significado está muitas vezes longe de estar claro para os estudantes.
- Usar histórias em sala de aula pode servir para muitos e diferentes propósitos. Histórias podem despertar interesse, ajudar na memorização e reduzir a ansiedade. Elas podem criar uma atmosfera confortável e de suporte na sala de aula, bem como estabelecer um relacionamento entre o professor e os estudantes.
- As escolas de hoje estão mais acostumadas com os *word problems* (problemas com palavras), primos distantes das boas histórias. Contudo, uma análise mais cuidadosa dos *word problems* revela que esses de fato não são histórias engajantes, pois foram desprovidos dos detalhes e emoções que ajudam a orientar os sentimentos dos ouvintes.

Os autores citam ainda os 10 benefícios enumerados por Haven (2000) sobre o uso de narrativas como ferramenta educacional:

- *Storytelling* é um elemento efetivo e poderoso no esforço de melhorar e desenvolver todas as quatro primeiras habilidades da linguagem (ler, escrever, ouvir e falar).
- Informações (tanto conceitos como fatos) são melhor lembradas e por mais tempo quando apresentadas em forma de narrativa.
- *Storytelling* é uma ferramenta de ensino multidisciplinar efetiva e poderosa que perpassa todo o currículo.
- *Storytelling* motiva positivamente os estudantes para o aprendizado.
- Narrativas focam a atenção e o aprendizado dos alunos e os motiva a procurarem estudar mais.
- *Storytelling* constrói efetivamente a autoconfiança e a autoestima do estudante.
- *Storytelling* envolve e desenvolve as habilidades ligadas à imaginação e à criatividade melhor do que qualquer outra atividade escolar.
- *Storytelling* envolve e entretém.

- *Storytelling* cria empatia e senso de conectividade.
- *Storytelling* melhora as habilidades de análise e resolução de problemas.
- *Storytelling* cria conexões valiosas com a comunidade e com a herança familiar.

2.6 Narrativas e Propaganda

Como coloca McSill (2013), desde tempos imemoriais, a estória[c] é utilizada como instrumento para ensinar, informar, entreter, reforçar crenças, dominar e, como se chama hoje, “fidelizar o cliente”. Estudiosos da área de *marketing* colocam a narrativa como uma das pedras angulares da boa propaganda: se propaganda é a alma do negócio, então narrativa é a alma da propaganda.

Embora seja um livro destinado ao público de propaganda, Xavier (2015) discute as implicações educacionais de *storytelling*:

> *Pergunte a um professor qual é seu maior problema no exercício do magistério. A resposta mais ouvida certamente será o binômio desinteresse/desatenção. [...] Tudo começa com atenção, sem a qual o restante se inviabiliza. Se logo após a atenção inserirmos algum grau de afetividade (ou, se preferirmos, de emoção), estará aberto o caminho para uma identidade mais profunda entre comunicador e público. [...] A maneira de cumprir esse difícil percurso é contar uma boa história, que prenda a atenção, envolva com emoção, crie laços profundos com o público, una todas as pontas em um relato compreensível, seja apreciada e lembrada.*
>
> (Xavier, 2015)

Neste contexto, Xavier (2015) coloca o papel fundamental da narrativa (*storytelling*) em capturar e conduzir os capitais emocional, cultural e de atenção:

> *As pessoas estão à procura de conexões novas e emocionais. Elas procuram algo para amar [...] Só existe uma forma de prosperar como profissional de marketing na Economia da Atenção: parar de correr atrás de modismos e dedicar-se a estabelecer conexões consistentes e emocionais com os consumidores.*
>
> (Xavier, 2015)

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre a questão da narrativa no âmbito da propaganda, recomendamos, portanto, a leitura dos livros Xavier (2015) e McSill (2013).

---

[c]Aqui, estamos usando “estória” seguindo o uso do próprio McSill (2013), mas o significado é o mesmo de “história”. De fato, atualmente, os dois termos têm sido usado como sinônimos.

3 *Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta*

Faixa de classificação etária: Livre (IMDb).

Áudio: Inglês.

Legendas: Português.

Título original: *Hunting The Hidden Dimension*.

Gênero: Documentário.

Duração: 53 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: NOVA (2008).

Tópicos matemáticos abordados: Semelhança; Escalas; Função Potência; Geometria Fractal.

Nível escolar sugerido: Ensino Médio; Formação de Professores.

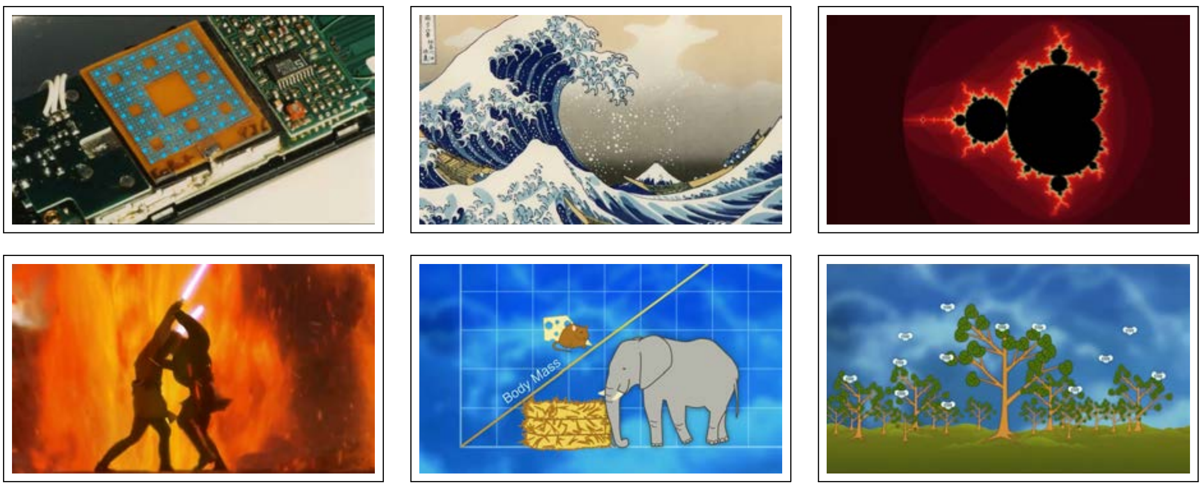
Interdisciplinaridade: Física, Biologia e Geografia.

Marcadores: Semelhança; Escalas; Fractais; Documentário; NOVA; PBS.

Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H1, H7, H9, H23.

Página web oficial: <http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/hunting-hidden-dimension.html>.

Imagens selecionadas



Sinopse

Fractais são formas geométricas irregulares especiais encontradas nas formações de nuvens, nos galhos das árvores, nas flores dos brócolis, nas montanhas escarpadas e até mesmo no ritmo do coração humano. Este documentário da série NOVA destaca cineastas, designers, médicos e pesquisadores que estão usando a geometria fractal para inovar, inspirar e entender melhor a natureza.

Com quais objetivos esse vídeo pode ser usado?

Introduzir o estudo de fractais por meio de suas aplicações na modelagem de fenômenos naturais, da sua história e de suas propriedades matemáticas.

Sensibilização

A geometria na Educação Básica se apoia em um grupo de figuras bem regulares (triângulos, quadrados, círculos) as quais, por si só, não são suficientes para retratar as diversas formas encontradas na natureza (nuvens, árvores, flocos de neve, montanhas).

Será que existe uma geometria que permite modelar e estudar estes fenômenos? Sim, a geometria fractal! Os fractais são formas geométricas irregulares especiais, que podem ser encontradas na formação de florestas, nos sinais de telecomunicações e até no ritmo cardíaco dos seres humanos.

No documentário "Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta" da série NOVA da PBS que apresentaremos, vamos acompanhar um grupo de matemáticos pioneiros determinados a decifrar as regras que governam a geometria fractal, que vem gerando inovação científica, médica e artística, atingindo desde a ecologia das florestas tropicais até a criação de modelos de roupas.

Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo novo com o vídeo? O quê?
3. Segundo o documentário, que matemático é responsável pela descoberta dos fractais?
4. Segundo o documentário, os fractais estão em tudo à nossa volta: na natureza, na computação gráfica, na medicina, na engenharia e em outras áreas. Cite alguns exemplos de aplicações dos fractais exibidos no filme.
5. Segundo o documentário, que propriedade geométrica caracteriza um fractal?
6. O documentário mostra em diversos momentos que Mandelbrot e sua nova geometria fractal foram desprezados no meio acadêmico por alguns anos. Baseado nos pontos ressaltados no vídeo, quais são os motivos que levaram a tal desprezo?
7. Com base no que foi exibido, você acha adequada a escolha do título “Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta” para o documentário? Justifique sua resposta!
8. Do que você mais gostou no filme?
9. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. Inspirado pelo livro “Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão” de Mandelbrot, o cientista de computação Carpenter propôs um método para se criar montanhas no computador (04:32-04:50). Como o método funciona? Como os matemáticos denominam esta técnica?
2. Ao tentar solucionar um problema proposto pelos colegas da IBM, Mandelbrot lembrou-se do que o documentário chama de mistério dos “monstros” (14:07-15:11). Um desses “monstros” é o conjunto de Cantor.
   (a) Segundo o documentário, por que objetos geométricos como o conjunto de Cantor foram chamados de “monstros”?
   (b) Como o conjunto de Cantor é construído?
   (c) Qual é a semelhança entre o conjunto de Cantor e o problema das linhas de transmissão apresentada no documentário?
3. Segundo o documentário (15:10-15:38), que avanço tecnológico no fim da década de 1950 e início de 1960, permitiu o avanço da teoria dos fractais e deu suporte para que fosse possível desvendar os “monstros” que tratam o documentário? Por quê?
4. O narrador no documentário afirma que o floco de Von Koch é um paradoxo matemático (16:27-17:35). Explique o porquê desta afirmação.
5. O documentário apresenta algumas aplicações dos fractais em diversas áreas.
   (a) Como e por que os fractais foram usados no filme *Star Wars III* (26:40-27:45)?
   (b) Como e por que os fractais são usados na confecção de antenas (30:50-32:36)?
   (c) Qual é a relação entre fractais e o movimento dos olhos e quais são os benefícios potenciais em se estudar tal relação (37:00-37:30)?
   (d) Como e por que os fractais podem ajudar no diagnóstico precoce de nódulos cancerígenos (40:16-41:29)?
   (e) Qual é a relação entre fractais e o consumo de energia de animais (41:40-42:59)?
   (f) Qual é a relação entre fractais e o consumo de dióxido de carbono em uma floresta (44:55-49:08)?

Observações para o professor

- Existem várias referências que abordam a questão de apresentar e explorar a geometria fractal em sala de aula. Indicamos aqui três delas.
  (a) A proposta de aula dos professores Guilherme Erwin Hartung e Rita Meirelles no Portal do Professor do MEC: <https://goo.gl/NtwsXJ>. Lá, você encontrará atividades com o *software*

educacional Fractal Tool (<https://goo.gl/w0q0qm>), material concreto e uma questão de vestibular da UFF.

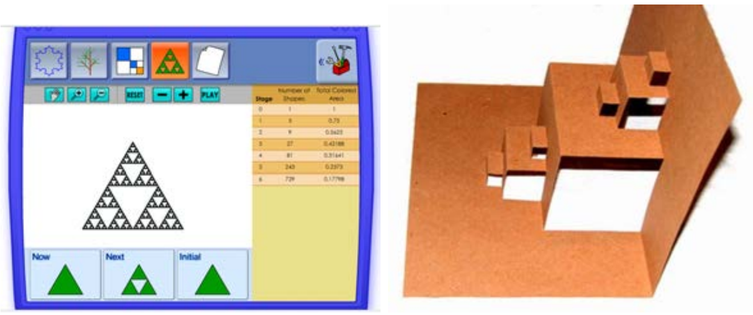


Figura: recursos digital e concreto para se trabalhar com fractais na sala de aula.
Fonte: Portal do Professor do MEC.

(b) O livro "Descobrindo a Geometria Fractal para A Sala de Aula" de Ruy Madsen Barbosa. Nele, você encontrará algumas definições propostas para fractal e dimensão fractal; descrições dos exemplos clássicos (Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, Curva de Koch, Curva, Triângulo e Tapete de Sierpiński); descrições de alguns algoritmos que geram fractais; propostas de atividades para a sala de aula envolvendo fractais, com material concreto e *softwares* educacionais.

(c) O clássico livro "Chaos and Fractals – New Frontiers of Science" por Peitgen, Jürgens e Saupe. O Capítulo 1 desta obra descreve experiências simples que podem ser feitas com seus alunos utilizando uma webcam e uma máquina de fotocopiar para explicar, de forma divertida, como alguns fractais podem ser gerados.

Figura: usando uma *webcam* para se trabalhar com fractais e recursividade (<https://goo.gl/0hMHv4>).

- Havendo tempo e interesse, sugerimos dois vídeos curtos que podem ser exibidos, como um complemento ao vídeo principal.

  (a) A palestra TED "Benoit Mandelbrot: Fractais e A Arte da Rugosidade" (<https://goo.gl/NdZoVU>), onde o próprio matemático Benoit Mandelbrot (1924-2010) aborda a complexidade extrema da rugosidade e o modo como a matemática fractal pode encontrar organização em padrões que parecem desconhecidamente complicados.

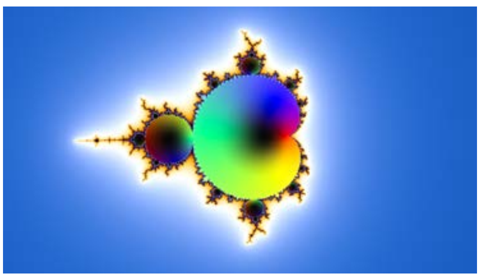
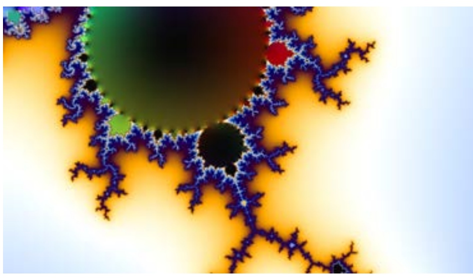
Figura: palestra TED com Benoit Mandelbrot (<https://goo.gl/NdZoVU>).
Fonte: TED.

(b) O episódio "Fractais: Recriando o Universo" (<https://goo.gl/auAfmr>) da série portuguesa "Isto é Matemática": "os fractais são giros [bonitos], naturais e úteis para jogar, entreter e entender o mundo".

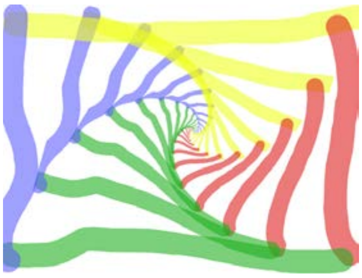
Figura: episódio da série "Isto é Matemática" sobre fractais (<https://goo.gl/auAfmr>).
Fonte: Sociedade Portuguesa de Matemática.

- Existem vários softwares gratuitos que permitem gerar fractais. Registramos aqui quatro desses softwares. Eles são excelente instrumentos para exibir a propriedade de autossemelhança (estatística) dos fractais.

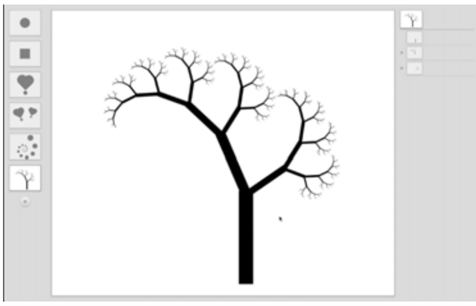
  (a) O aplicativo *Fracview* para dispositivos Android: <https://goo.gl/Qp2BZ5>. Neste *software*, é possível ampliar e reduzir a imagem (observando assim a propriedade de autossemelhança dos fractais) por meio do movimento de pinça com dois dedos na tela.

(b) O aplicativo artístico *Dood.al* para navegadores: <http://dood.al/>. Com ele, é possível criar fractais artísticos e que lembram objetos da natureza usando poucos cliques do *mouse*. Um vídeo mostrando como usar este software está disponível em <https://goo.gl/H76DM1>.

(c) O *software Recursive Drawing* para navegadores: <https://goo.gl/b1IGSp>. Este aplicativo permite criar fractais orgânicos usando, a exemplo do Dood.al, o princípio da recursão. Um vídeo tutorial está disponível em <https://goo.gl/abqzpe>.

(d) O aplicativo *Fractaline* para dispositivos Android: <https://goo.gl/W2LTSI>. Este programa tem uma interface simples e intuitiva que permite gerar e modificar facilmente fractais artísticos.

- Benoit Mandelbrot nasceu em 20 de novembro de 1924 em Varsóvia, Polônia. Vindo de família judaica da Lituânia (seu pai era comerciante e sua mãe dentista), Benoit foi apresentado à Matemática em uma idade muito precoce. Em 1936, sua família emigrou para França, onde seu tio Szolem Mandelbrot era professor de Matemática no Collège de France. Em muito, Mandelbrot foi autodidata pois, no início da Segunda Guerra Mundial, sua família precisou mudar-se e ele teve uma educação não convencional. Mostrou, em 1944, excelente resultado no teste da École Polytechnique, em Paris, onde deu continuidade e terminou seus estudos. Foi para os Estados Unidos e trabalhou na IBM, já com o título de PhD concedido pela Universidade de Paris. Além da IBM, ele também atuou como professor de Engenharia na Universidade de Yale, professor de Matemática na École Polytechnique, professor de Economia em Harvard, Professor de Fisiologia da Einstein College of Medicine. Recebeu ainda vários prêmios e medalhas como a Medalha Barnard por Serviços Meritórios à Ciência, Medalha Franklin, Prêmio Alexander von Humboldt, a Medalha Steinmetz, o prêmio Légion d'Honneur, a Medalha de Nevada, o Prêmio Wolf de Física e o Prêmio Japão por Ciência e Tecnologia. Um livro que trata sobre o trabalho de Mandelbrot e pode ser uma boa leitura para quem quer saber mais sobre o assunto: "Benoit Mandelbrot: A Life in Many Dimensions", por Michael Frame e Nathan Cohen.

- Em seu livro "Eureca!', o escritor Leslie Alan Horvitz, coloca a geometria fractal como uma das doze descobertas científicas que revolucionaram o mundo.
- O floco de neve de Koch foi idealizado pelo matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) em 1904 para dar um exemplo de uma curva que fosse contínua, mas não diferenciável em ponto algum e cuja construção usasse elementos simples de geometria. No documentário, o narrador afirma que o floco de Koch é um paradoxo matemático (16:27-17:35). O uso do termo "paradoxo" se deve ao fato do floco de Koch ser um conjunto limitado e ter um perímetro infinito, o que contraria o senso comum.

Figura: Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924).

Fonte: Wikimedia Commons.

- As Diretrizes Curriculares da Educação Básica (<https://goo.gl/iCZ3yq>) da Secretaria de Educação do Governo do Estado do Paraná, publicadas em 2008, indicam explicitamente a inclusão de geometrias não-euclidianas, incluindo noções da Geometria Fractal, no conteúdo da disciplina de Matemática.
- Uma atividade que pode ser realizada em sala de aula é o *Jogo do Caos*. À primeira vista, ele

pode parecer não ter qualquer conexão com fractais, mas o resultado final é surpreendente. Material necessário: folha de papel, caneta, régua e dado cúbico. O jogo começa marcando-se, na folha de papel, 3 pontos (A, B, C) que serão chamados de *bases*. Marca-se também um ponto inicial qualquer no interior do triângulo ABC. Este ponto será, neste momento, o nosso *ponto de trabalho*. Lança-se o dado cúbico. Se o resultado for 1 ou 2 no lançamento do dado, marca-se um novo ponto exatamente no ponto médio entre A e o ponto de trabalho, passando este ponto médio a ser o novo ponto de trabalho. Se o resultado for 3 ou 4, basta realizar o mesmo procedimento, mas utilizando o ponto B no lugar do ponto A. Por fim, caso o resultado do lançamento do dado seja 5 ou 6 utilizaríamos o ponto C. Termina-se então o primeiro ciclo do jogo. Os ciclos seguintes serão feitos do mesmo modo: rola-se o dado e desenha-se o ponto médio entre o ponto de trabalho atual e a base correspondente (A, B ou C) de acordo com o valor obtido no dado. Produz-se, portanto, uma sequência aleatória de pontos, o que pode inicialmente parecer entediante e sem propósito. Contudo, a figura obtida pelo conjunto de pontos de trabalho provavelmente irá impressionar aqueles que ainda não conhecem o jogo: ela se aproxima do fractal denominado Triângulo de Sierpiński, independentemente do ponto inicial escolhido e dos resultados dos lançamentos dos dados.

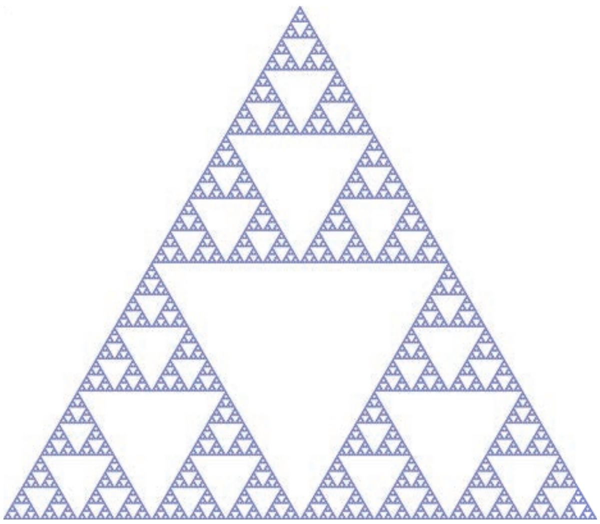


Figura: Triângulo de Sierpiński.

O Triângulo de Sierpiński é criado recursivamente da seguinte maneira: dado um triângulo equilátero inicial ABC, marque os pontos médios de seus três lados e, em seguida, una estes três pontos médios obtendo então 4 triângulos equiláteros (imagem à esquerda na figura a seguir). Agora, mantenha os três triângulos menores, aqueles que contêm os vértices A, B e C, e descarte o do meio, criando assim um "buraco". Na próxima iteração, subdivida cada um dos três triângulos equiláteros que sobraram em 4 triângulos equiláteros e descarte o do meio, obtendo assim $9 = 3^2$ triângulos equiláteros, como na imagem à direita na figura a seguir. Na n-ésima iteração, haverá um conjunto com 3^n triângulos congruentes. Fazendo n ir para infinito, o Triângulo de Sierpiński é definido como conjunto S da interseção de todos estes conjuntos: $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$.

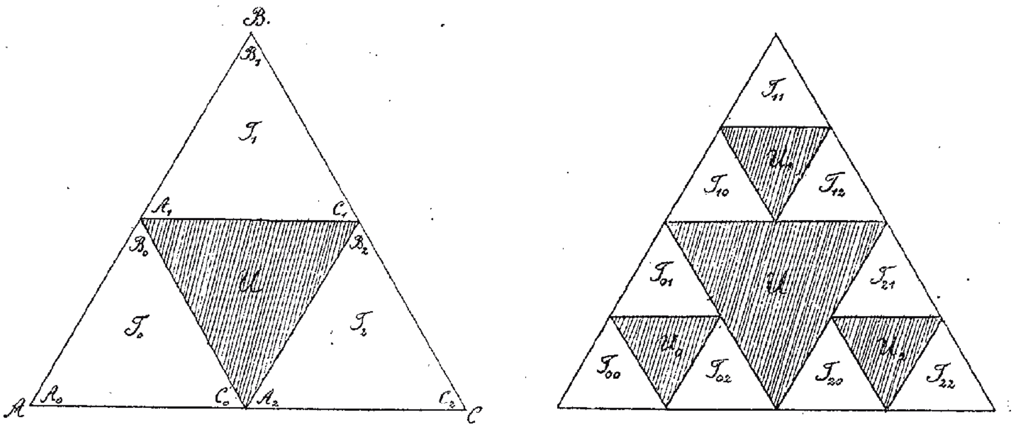


Figura: construção do Triângulo de Sierpiński (as imagens são do artigo original de Sierpiński).

Sierpiński apresentou esta construção em seu artigo “Sur Une Courbe Dont Tout Point est Un Point de Ramification” publicado na revista Comptes Rendus Mathematique Academie des Sciences, Paris, em 1915.

Figura: Wacław Sierpiński (1882-1969).
Fonte: Wikimedia Commons.

Usando a linguagem de programação Pascal, produzimos um software para a plataforma Windows que faz a simulação deste jogo: <https://goo.gl/Hi468V>. Nele, o dado foi substituído por uma função que gera números aleatórios de 1 a 6. No software, pode-se determinar quantos ciclos serão utilizados no jogo e configurar se o ponto inicial deve ser gerado dentro ou fora do triângulo inicial. Uma versão do Jogo do Caos para plataformas Linux, MacOS, Android e iOS, feitas com GeoGebra, está disponível neste endereço: <https://ggbm.at/jm8vwxv9>.

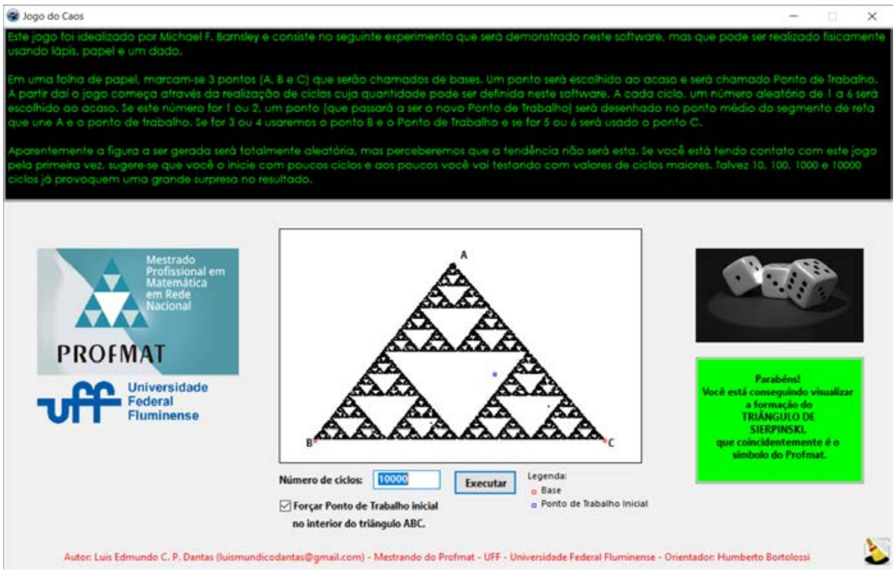
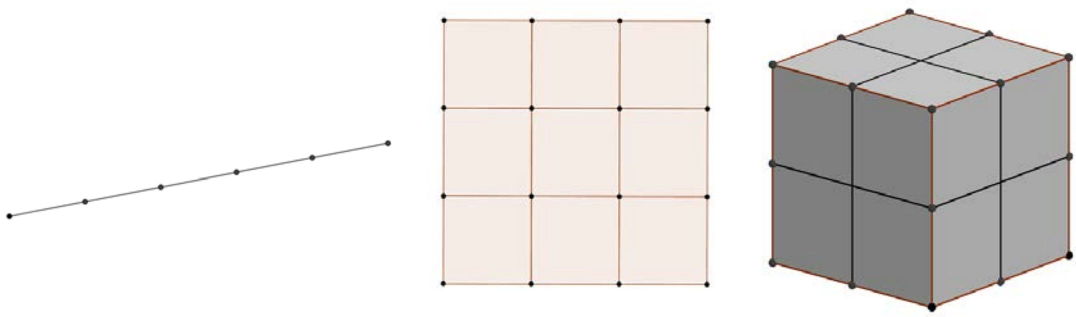


Figura: simulação do Jogo do Caos.

Fonte: o autor (<https://goo.gl/Hi468V>).

- Neste parágrafo vamos apresentar de forma breve e informal o conceito de dimensão fractal. Para mais detalhes, recomendamos Barbosa (2002) e Peitgen, Jürgens e Saupe (2004). Considere um segmento de reta dividido em 5 segmentos menores congruentes, um quadrado dividido em $3^2 = 9$ quadrados menores congruentes e um cubo dividido em $2^3 = 8$ cubos menores congruentes, conforme a figura a seguir.



Observe que o segmento de reta foi dividido em $N = 5$ peças semelhantes ao segmento inicial e que a razão de semelhança é $M = 5$. Qual é a relação entre N e M? Resposta: $N = M^D$, com $D = 1$. No caso do quadrado, este foi dividido em $N = 3^2 = 9$ peças semelhantes ao quadrado inicial e a razão de semelhança, neste caso, é $M = 3$. Qual é a relação entre N e M? Resposta: $N = M^D$, com $D = 2$. Por fim, o cubo foi dividido em $N = 2^3 = 8$ peças semelhantes ao cubo inicial e a razão de semelhança, neste caso, é $M = 2$. Qual é a relação entre N e M? Resposta: $N = M^D$, com $D = 3$. Este procedimento pode ser usado para definir o que se é conhecida como *dimensão fractal de Hausdorff-Besicovitch* (ou, mais simplesmente, dimensão de Hausdorff): a dimensão D é tal que $N = M^D$, com N o número de peças e M o fator de escala, isto é, $D = \log(N)/\log(M)$. Vejamos um exemplo: considere o triângulo de

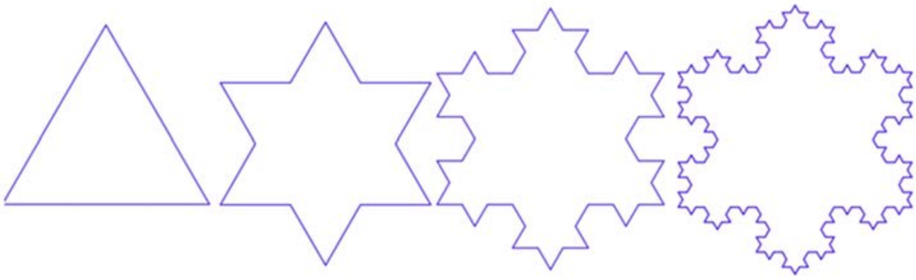
Sierpiński, um fractal obtido a partir de um triângulo equilátero dividindo-o em 4 triângulos equiláteros menores e removendo-se o interior do triângulo equilátero central recursivamente.

Note que, para se obter a peça da etapa seguinte da construção, são necessárias $N = 3$ peças da etapa anterior e que a razão de semelhança entre a peça maior e as peças menores é $M = 2$. Assim, a dimensão de Hausdorff do triângulo de Sierpiński é

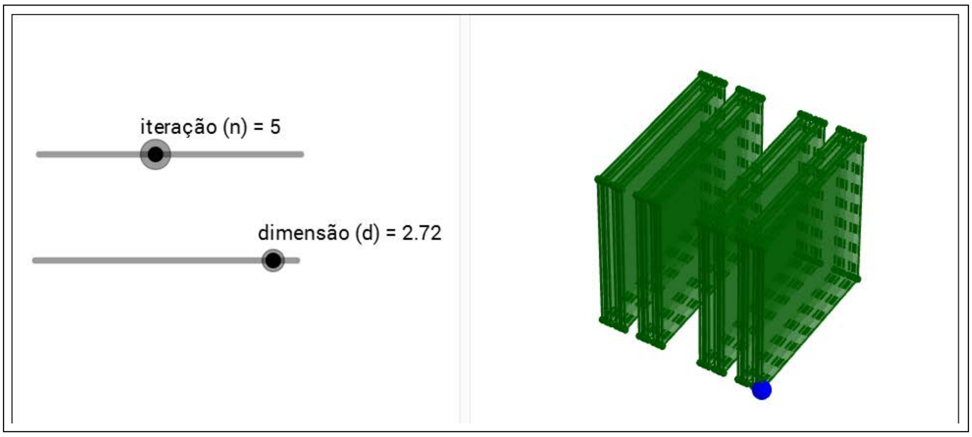
$$D = \frac{\log(N)}{\log(M)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1{,}585\ldots.$$

Considere agora o floco de neve de Koch: em cada nova etapa da construção, é preciso dividir cada lado da etapa anterior em $N = 4$ partes e, ao se comparar as partes semelhantes do contorno, vemos que a razão de semelhança é $M = 3$. Assim, a dimensão de Hausdorff do floco de neve de Koch é

$$D = \frac{\log(N)}{\log(M)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1{,}2618\ldots.$$



Note que a dimensão de Hausdorff não precisa ser um número inteiro. Em um certo sentido, a dimensão fractal pode ser pensada como medida numérica da rugosidade do fractal, com base na autossimilaridade. Portanto, uma curva com dimensão 1,2618 é mais rugosa que uma curva de dimensão 1, como um segmento de reta; mas é menos rugosa que uma curva de dimensão 1,5, por exemplo. Existem outras formas de se definir uma dimensão fractal, além da dimensão de Haussdorf. Vale ressaltar que os fractais não precisam ser curvas: eles podem ser superfícies ou sólidos. No endereço: <https://goo.gl/wUtdIF> você encontrará uma construção do GeoGebra que, usando conjuntos de Cantor e produtos cartesianos, exibe um fractal com uma dimensão pré-estabelecida.



- Segundo Stewart (2016), o famoso conjunto de Mandelbrot pode ser descrito da seguinte maneira: considera-se a função $f_c(z) = z^2 + c$ como uma função complexa (isto é, de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$) e, então, calcula-se $f_c(0) = c$, e aí se forma $f_c(f_c(0)) = c^2 + c$, então $f_c(f_c(f_c(0))) = (c^2 + c)^2 + c$, então $f_c(f_c(f_c(f_c(0)))) = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c$, e assim por diante. Há duas possibilidades principais: ou todos os números complexos na sequência acima permanecem dentro de uma região limitada do plano complexo ou não. Colore-se de preto os valores de c para os quais a sequência permanece dentro de uma região limitada e de branco aqueles que "escapam para o infinito". Então o conjunto de todos os pontos pretos é o conjunto de Mandelbrot.

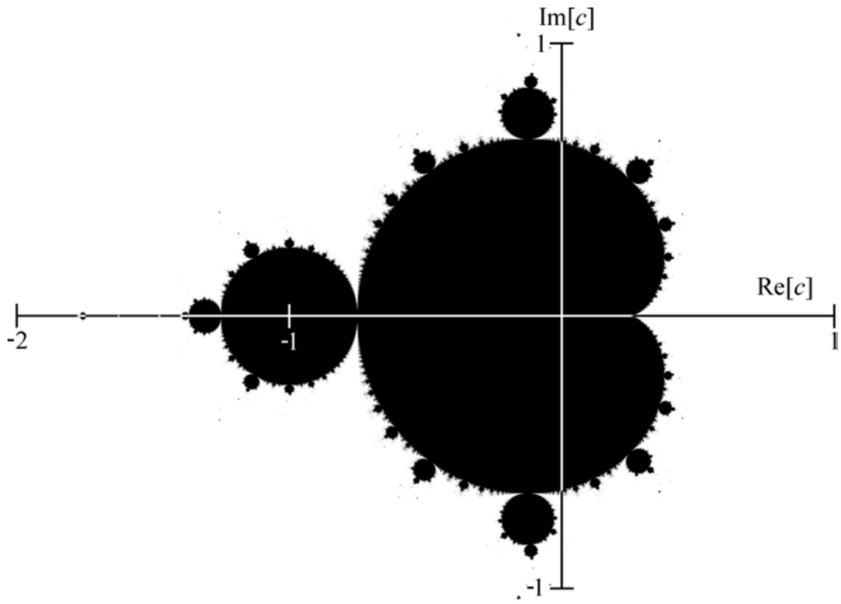


Figura: o conjunto de Mandelbrot.

Fonte: Wikimedia Commons.

Ainda, segundo Stewart (2016), apesar de aparentemente o conjunto de Mandelbrot em si não ter qualquer aplicação prática, ele é um dos sistemas dinâmicos não lineares mais simples com base nos números complexos e, por isso, tem atraído muita atenção de matemáticos que buscam princípios gerais que possam ter aplicação mais ampla. E ele também demonstra um ponto “filosófico” fundamental: regras simples podem levar a resultados complicados.

- Apesar do documentário não tratar especificamente do Teorema de Pitágoras, você, professor, pode fazer uma discussão com seus alunos sobre os significados atribuídos às letras em uma fórmula usando, para isto, o trecho (08:51-08:54) do documentário. Neste trecho, o plano de fundo do vídeo exibe o Teorema de Pitágoras da seguinte forma: $a^2 + b^2 = c^2$, utilizando a letra c para a hipotenusa e as letras a e b para os catetos, diferentemente do que fazem tradicionalmente os livros didáticos nacionais. É fundamental que os alunos percebam que, mantendo-se o significado, letras diferentes podem ser usadas, isto é, mais importante do que quais letras usar está o significado que elas têm.

Referências relacionadas

- Barbosa, Ruy Madsen. *Descobrindo a Geometria Fractal para A Sala de Aula*. Terceira edição. Editora Autêntica, 2002.
- Brasil. *Matriz de Referência para o ENEM*. Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2009. Disponível em: <https://goo.gl/pGfzme>.
- Frame, Michael; Cohen, Nathan. *Benoit Mandelbrot: A Life in Many Dimensions*. World Scientific, 2015
- Horvitz, Leslie Alan. *Eureca! Descobertas Científicas que Revolucionaram O Mundo*. Editora Difel, 2003.
- Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Second edition. Springer, 2004.
- Stewart, Ian. *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Editora Zahar, 2008.
- Stewart, Ian. *O Fantástico Mundo dos Números: A Matemática do Zero ao Infinito*. Editora Zahar, 2016.

Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

Agradecimentos

Isabel Lugão Rios e Augusto Armando de Castro Junior

Créditos das imagens de sensibilização

Anroir (flickr) e Robert Nunnally (flickr)

Concepção

Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas e Fabiana Silva de Miranda

Revisão

André de Carvalho Rapozo, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira,
Keyla Lins Bruck Thedin, Rodrigo Pessanha da Cunha, Oswaldo dos Santos A. Coutinho

Supervisão

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

4 Alta Ansiedade: A Matemática do Caos

Faixa de classificação etária: 14 anos (IMDb).

Áudio: Português.

Legendas: não há.

Título original: *High Anxieties: The Mathematics of Chaos*.

Gênero: Documentário.

Duração: 59 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: BBC-Four (2008).

Tópicos matemáticos abordados: Semelhança; Escalas; Função Potência; Geometria Fractal.

Nível escolar sugerido: Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Física, Biologia e Geografia.

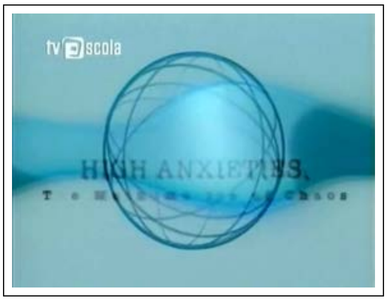
Marcadores: BBC; Documentário; Caos; Efeito Borboleta; Desordem; Instabilidade; Turbulência; Ponto de Virada.

Competências e habilidades do ENEM em Ciências da Natureza e Suas Tecnologias: H3, H4, H20, H21. Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H6, H13, H14, H15, H18.

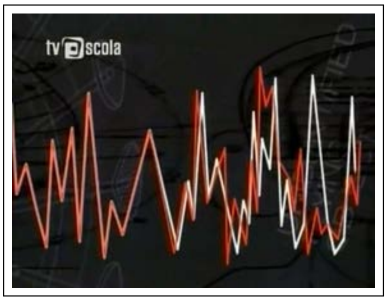
Link para o vídeo (TV Escola): <https://www.youtube.com/watch?v=PCnxd9wX91c>.

Página web oficial: <https://www.bbc.co.uk/programmes/b00dzypr>.

Imagens selecionadas







Sinopse

“Alta Ansiedade – A Matemática do Caos” é um documentário da BBC que apresenta uma interessante análise histórica da mudança de visão do mundo e suas consequências psicológicas a partir das ideias matemáticas revolucionárias iniciadas pelo matemático francês Henri Poincaré: da percepção de um mundo seguro, controlável e previsível, passa-se à incerteza e à ansiedade.

Com quais objetivos esse vídeo pode ser usado?

Temas como fenômenos climáticos e econômicos, entre outros, necessitam de uma matemática específica para o seu entendimento e análise: caos, efeito borboleta e ponto de virada. Assim, o documentário pode ser usado para que o aluno tenha contato com esses assuntos tão importantes no mundo atual.

Sensibilização

Será mesmo que o bater de asas de uma borboleta pode provocar um tufão do outro lado do mundo?

Será que podemos compreender toda a existência da vida na Terra? Será que todos os eventos se repetem após um determinado espaço de tempo? Podemos adivinhar o que irá acontecer no mercado da bolsa de valores, conhecidas as tendências que se repetirão?

Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da

aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo novo com o vídeo? O quê?
3. Você acha que o título “Alta Ansiedade” é adequado ao documentário? Por quê?
4. O termo “dependência das condições iniciais” é usado com frequência no documentário. Na sua interpretação, qual é o significado atribuído a este termo? Você conseguiria dar exemplos? Quais?
5. O termo “ponto de virada” é usado com frequência no documentário. Na sua interpretação, qual é o significado atribuído a este termo? Você conseguiria dar exemplos? Quais?
6. O termo “efeito borboleta” é usado com frequência no documentário. Na sua interpretação, qual é o significado atribuído a este termo? Você conseguiria dar exemplos? Quais?
7. O termo “caos” é usado com frequência no documentário. Na sua interpretação, qual é o significado atribuído a este termo? Você conseguiria dar exemplos? Quais?
8. Qual é a associação entre caos, economia e clima feita na parte final do vídeo? Você concorda com ela?
9. Após tudo que foi visto e analisado, como você se posiciona em relação à perspectiva laplaciana e à perspectiva caótica?
10. Do que você mais gostou no filme?
11. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. No documentário, quais são os matemáticos que estão associados à Matemática da previsibilidade/estabilidade? E os da imprevisibilidade/instabilidade?
2. Liste alguns exemplos de eventos símbolos da concepção de um universo previsível/estável como também de um universo imprevisível/instável que são apresentados ao longo do vídeo.
3. Segundo o documentário (15:00-15:18), com que matemático e em que contexto se deu a “primeira descoberta a nos dizer que o mundo é menos previsível e menos controlável do que gostaríamos que fosse”?
4. O que pode potencializar o caos em um sistema, de acordo com o vídeo (40:08-43:57)? Quais exemplos são usados para ilustrar este fato?
5. A professora Linda Gask da Universidade de Manchester coloca que a incerteza do futuro leva a uma ansiedade (02:50-03:00 e 49:40-50:33). Você concorda com essa afirmação? Por

quê?

6. No trecho (44:48-45:11), o professor David Ruelle trata do “crescimento exponencial”. Você acha que é possível e sustentável um crescimento anual de 2% na economia de um país? Por quê?
7. O modelo econômico baseia-se em comportamentos que se repetem. Qual a área da matemática trata esse tipo de modelo? O filme o considera bom? Por quê?

Observações para o professor

- Apesar do subtítulo “A Matemática do Caos”, o documentário evita o uso de fórmulas e diagramas para explicar os conceitos matemáticos, preferindo uma descrição mais verbal e com foco em uma leitura dos aspectos sociais e psicológicos do século XX em termos matemáticos (Determinismo de Laplace versus Teoria do Caos). Desta maneira, para um melhor entendimento das ideias apresentadas no vídeo como, por exemplo, sobre a dependência e estabilidade de um sistema com relação às suas condições iniciais, os materiais complementares apresentados nesta seção podem ser muito úteis.
- O “ponto de virada”, termo apresentado no documentário, também é conhecido por outros nomes: *tipping point*, ponto crítico, ponto de ruptura, ponto de não retorno e ponto de viragem. Para facilitar a compreensão deste conceito por parte de seus alunos, sugerimos fortemente a animação TED-Ed “O Nosso Clima Está Indo em Direção ao Caos Matemático” de Victor J. Donnay: <https://goo.gl/AKmfh4>. Este vídeo, por meio de uma analogia com o jogo de bilhar, ilustra como é possível que uma pequena mudança em um determinado parâmetro pode gerar mudanças imprevisíveis (uma ideia fundamental da Teoria do Caos) e como este tipo de comportamento se relaciona como o estudo de questões climáticas. Nesta analogia com o jogo de bilhar, esta outra animação de 1 minuto também pode ser muito útil: <https://goo.gl/oS6nw9>.

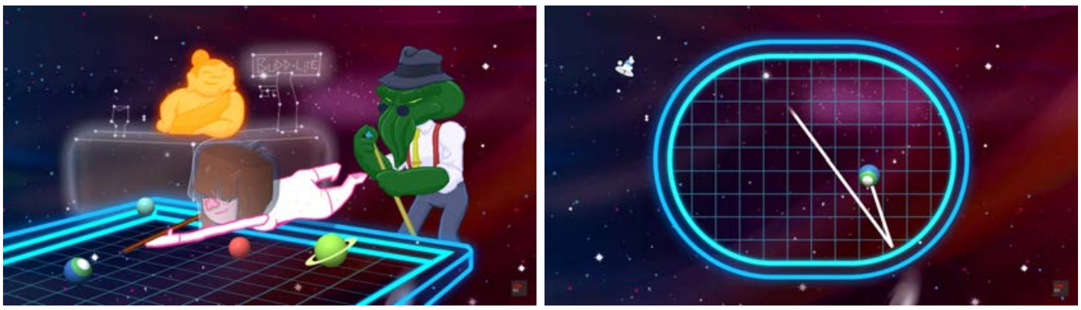


Figura: Imagens extraídas da animação TED-Ed de Victor J. Donnay.

Fonte: YouTube <https://goo.gl/AKmfh4>.

Como apontam Lamberson e Page (2012), o termo “ponto de virada” tem sido aplicado em temas diversos (eleição, moda, opinião pública, economia) sem uma definição precisa, estando, em geral, associado com a ideia de um ponto onde o fenômeno em estudo muda de comportamento. Por exemplo, em Sociologia, Gladwell (2009) coloca:

> A expressão se tornou popular na década de 1970 para descrever um movimento observado entre as pessoas brancas que moravam nas cidades mais velhas do nordeste americano – elas começaram a fugir para os subúrbios. Quando o número de americanos de origem africana que se instalavam num bairro atingia determinado patamar – 20%, digamos –, os sociólogos observavam que havia uma "virada", ou uma "guinada", na situação da comunidade: a maioria dos indivíduos brancos remanescentes saía quase de imediato.
>
> (Gladwell, 2009)

Neste contexto, com o objetivo de permitir que pontos de virada possam ser melhor identificados, quantificados e entendidos, Lamberson e Page (2012) propõem uma definição precisa usando o formalismo de sistemas dinâmicos. Para detalhes, recomendamos a leitura da obra.

- Como o próprio documentário aponta, a partir das Leis de Movimento de Newton, criou-se um sentimento de que, com a Ciência, seria possível prever tudo. O próprio Newton escreveu:

> Então os movimentos dos planetas, dos cometas, da lua e do mar são deduzidos a partir destas forças por proposições que também são matemáticas. Se pudéssemos ao menos aferir outros fenômenos da natureza de princípios mecânicos com o mesmo tipo de raciocínio! Pois muitas coisas me levam a suspeitar de que todos os fenômenos dependem de certas forças pelas quais partículas de matéria, por causas ainda desconhecidas, ou são impelidas umas em direção a outras e agregam-se em figuras regulares ou são repelidas umas das outras e recuam. Desde que estas forças são desconhecidas, filósofos têm tentado até então entender a natureza em vão. Mas eu espero que o conjunto de princípios aqui propostos tragam luz a este modo de filosofia ou algum outro mais verdadeiro.
>
> (Prefácio da Primeira Edição do *Principia Mathematica* de Newton)

Posteriormente, o matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827) levou essa concepção de Newton ao máximo, afirmando que a previsão do futuro se reduziria a cálculos oriundos das leis que governam a natureza. Laplace então concebeu um "intelecto" conhecedor de todas as forças que "colocavam a natureza em movimento, e todas as posições de todos os itens dos quais a natureza é composta".

Figura: Pierre Simon Laplace (1749-1827).
Fonte: Wikimedia Commons.

Segundo Laplace, “Para um intelecto como esse, nada seria incerto e o futuro, assim como o passado, estaria presente diante de seus olhos.”. Este “intelecto” ficou conhecido posteriormente como *Demônio de Laplace*. Uma vez que este tipo de argumento implica que tudo está pré-determinado, como corolário há a perda do livre-arbítrio. Como apontam Bauer, Westfall e Dias (2012), essas ideias de Laplace sobre o determinismo da natureza ocorreram em uma época em que bem poucas pessoas acreditavam que poderiam atingir o livre-arbítrio e que isto aconteceria apenas se conseguissem derrubar aqueles que estavam no poder. Ainda segundo Bauer, Westfall e Dias (2012), o “Demônio de Laplace” perdeu sua força a partir da Teoria do Caos e da Teoria da Mecânica Quântica: por um lado, a Teoria do Caos especifica que prever a evolução de um sistema é muito difícil por conta da sensibilidade com relação às condições iniciais; por outro lado, a Teoria da Mecânica Quântica coloca que é impossível determinar a posição e o momento de qualquer objeto ao mesmo tempo (Princípio da Incerteza de Heisenberg). O “Demônio de Laplace” é um de muitos outros demônios na Ciência: “Demônio de Freud”, “Demônio de Descartes”, “Demônio de Mendel”, “Demônio de Maxwell”, “Demônio de Loschmidt”. Neste contexto, o “demônio” é um artifício intelectual introduzido para se levar ao limite uma determinada teoria. Para o leitor interessado, recomendamos o livro “The Demons of Science: What They Can and Cannot Tell Us About Our World” de Friedel Weinert.

- Para que os alunos possam compreender melhor a questão de sensibilidade de um sistema com relação às condições iniciais, sugerimos fortemente que você apresente o pêndulo duplo e seus movimentos. O pêndulo duplo consiste em uma associação de dois pêndulos no qual um deles está anexo à extremidade do outro. O vídeo <https://goo.gl/HpFcq6> apresenta dois pêndulos duplos basicamente idênticos sendo lançados simultaneamente com condições iniciais próximas.

Figura: pêndulo duplo.

Fonte: YouTube <https://goo.gl/HpFcq6>.

Para pequenos ângulos iniciais, os dois pêndulos comportam-se praticamente do mesmo modo, mas quando o ângulo de lançamento atinge um determinado "ponto de virada", os movimentos dos pêndulos duplos ficam bem diferentes a longo prazo. Na página da USP (<https://goo.gl/sAov1c>) você poderá usar um simulador *on-line* 3D gratuito de um pêndulo duplo ou até mesmo simular dois pêndulos duplos defasados de 0,001 radianos.

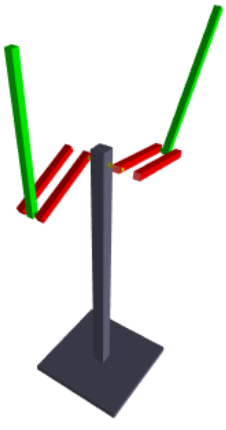


Figura: simulador *on-line* de dois pêndulos duplos.

Fonte: <https://goo.gl/sAov1c>.

Caso o professor tenha disponibilidade e perceba a necessidade de se aprofundar no uso de simuladores de pêndulo duplo *on-line*, sugerimos a leitura do artigo da Revista Brasileira do Ensino de Física <https://goo.gl/MhmNXr> que mostra a construção de um pêndulo duplo usando o software SimQuest <https://goo.gl/N2qrdM>, uma ferramenta de modelagem computacional.

- Durante o documentário, o professor e físico-matemático belga David Pierre Ruelle (1935-) dá alguns depoimentos a respeito principalmente do estudo do Caos: aspecto histórico do seu surgimento (05:38-06:05), a necessidade da previsibilidade em Ciência (13:50-14:15), efeito borboleta (34:00-34:28), sensibilidade às condições iniciais (36:33-37:52), previsibilidade em um crescimento exponencial (44:46-45:52), entre outros. Ruelle trabalhou com Física Estatística e Sistemas Dinâmicos.

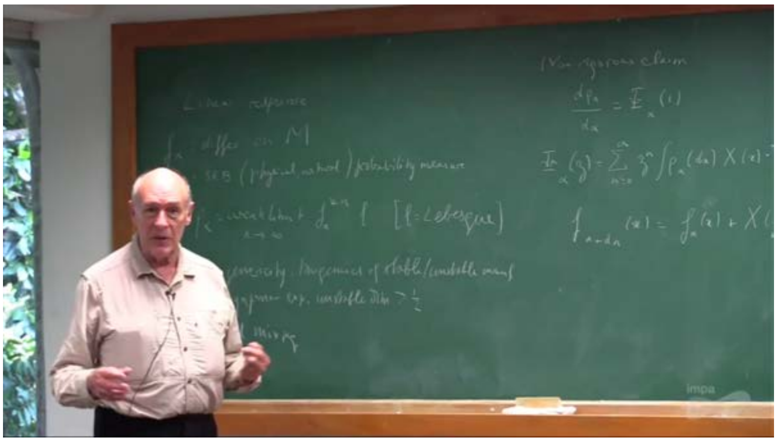


Figura: David Pierre Ruelle (1935-) em uma palestra no IMPA.

Fonte: IMPA (<https://youtu.be/NL0ASWr_Vyw>).

Com Florins Takens (1940-2010), Ruelle criou o termo atrator estranho e fundou a nova Teoria da Turbulência. Em seu livro, Acaso e Caos, ele busca mostrar a incerteza dentro do determinismo traçando as linhas gerais de pesquisa da chamada Teoria do Caos. Uma das grandes contribuições da Teoria do Caos é dar ao acaso um lugar determinado na nossa visão científica do mundo. Esse fato é resultado de um longo trajeto na história da ciência do século XX, o qual o autor procura recompor. Este livro pode ser um excelente material suplementar ao documentário, uma vez que ambos estão bastante alinhados, principalmente os Capítulos 5, 11 e 12 que tratam de determinismo clássico, um novo paradigma para o caos e suas consequências.

- Em geral, os alunos da Escola Básica não têm contato com conteúdos matemáticos recentes. Assim, o documentário é uma excelente oportunidade dos estudantes conhecerem uma teoria matemática que nasceu no século XX e, com isto, perceberem que a Matemática é uma disciplina que ainda se desenvolve e produz resultados novos. Sugerimos que você enfatize este aspecto com seus alunos! Para uma descrição acessível sobre a história da Teoria do Caos, recomendamos Oestreicher (2007) e o Capítulo 12 de Bergé, Pomeau e Dubois-Gance (1996).
- O *Principia Mathematica* de Newton permitiu estabelecer um sistema de equações diferenciais cujas soluções descrevem o movimento de corpos que são mutuamente atraídos pela força da gravidade. Encontrar soluções deste sistema de equações ficou conhecido como “o problema dos *n*-corpos”, com *n* representando o número de corpos. O interesse no problema é evidente: será que, por exemplo, a Lua se chocará com a Terra em algum momento? Nosso

Sistema Solar irá colapsar no futuro? Quando? Para $n = 2$, ou seja, para dois corpos, a solução em termos de funções elementares foi obtida por Johann Bernoulli em 1710.

Figura: Johann Bernoulli (1667-1748).
Fonte: Wikimedia Commons.

Em 1885, a revista científica *Acta Mathematica* anunciou o estabelecimento de um prêmio no valor de 2500 coroas em honra ao Rei Oscar II da Suécia e Noruega a ser concedido no seu 60º aniversário para quem obtivesse uma solução em termos de uma série convergente para o problema dos n-corpos. Mais precisamente, a formulação do problema para o prêmio dada por Karl Weierstrass (1815-1897), um dos membros do júri desta competição (os outros membros do júri eram Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) e Charles Hermite (1822-1901)) é a seguinte: "Dado um sistema arbitrário com muitos pontos de massa que se atraem mutuamente de acordo com as Leis de Newton, sob a hipótese de que dois pontos quaisquer nunca colidirão, tentar encontrar uma representação das coordenadas de cada ponto como uma série em uma variável que é alguma função conhecida no tempo e todos os valores para os quais a série converge uniformemente.".

Figura: Karl Weierstrass (1815-1897).
Fonte: Wikimedia Commons.

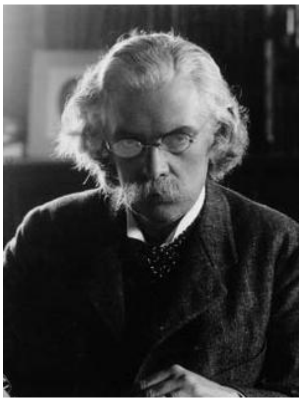


Figura: Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927).
Fonte: Wikimedia Commons.

Figura: Charles Hermite (1822-1901).
Fonte: Wikimedia Commons.

Henri Poincaré (1854-1912) concorre ao prêmio e o ganha, apesar dele ter tratado apenas algumas questões do chamado problema restrito dos três corpos. Contudo, o jovem matemático Lars Edvard Phragmén (1863-1937) descobre um erro no artigo e Poincaré confirma que o erro é sério. Mittag-Leffler fica muito preocupado, pois a sua própria reputação está em risco. Mittag-Leffler recupera as cópias da *Acta Mathematica* que já tinham sido distribuídas e informa a Poincaré de que ele terá que pagar a reimpressão com as correções devidas. Poincaré paga 3585 coroas (1085 coroas a mais do que o prêmio). Na versão corrigida, Poincaré observou que as trajetórias dos corpos são extremamente sensíveis às condições iniciais, ou seja, uma pequena mudança nas condições iniciais pode causar uma drástica mudança nas posições finais. O problema como definido originalmente por Weierstrass para o caso $n = 3$ foi finalmente resolvido em 1912 por Karl Fritiof Sundman (1873-1949) para $n = 3$, no qual provou que existe uma solução em série de potência de $t^{1/3}$. Ainda assim, a solução descoberta tem pouco valor prático, pois a série tem convergência lenta. Vale ressaltar, dentro de todo este contexto, que o problema dos n-corpos é ainda um problema em aberto. Para mais detalhes sobre o problema dos n-corpos e sua história, recomendamos a referência Diacu (1996).

Figura: Henri Poincaré (1854-1912).
Fonte: Wikimedia Commons.

Figura: Karl Frithiof Sundman (1873-1949).
Fonte: Wikimedia Commons.

Apesar de não serem precisos (pois usam métodos numéricos que possuem suas limitações), existem alguns softwares que simulam o problema dos *n*-corpos e com os quais, de uma forma lúdica, os alunos poderão apreciar a complexidade do problema. Recomendamos programas: Orbit para Android (<https://goo.gl/3e3Wb8>) e iOS (<https://goo.gl/pv3yeh>), Celestia (<https://goo.gl/e4Kzd1>) e Universe Sandbox^2 (<https://goo.gl/Y4j5SG>) para Windows, Linux e Mac OS X. No aplicativo Orbit, como em muitos jogos na plataforma Android, existem fases com desafios para serem resolvidos, mas existe também um editor no qual se é possível fazer simulações próprias. Você pode lançar planetas em um sistema solar e perceber a interação dos mesmos entre si. Mesmo com a versão gratuita, podemos fazer diversas simulações muito interessantes.

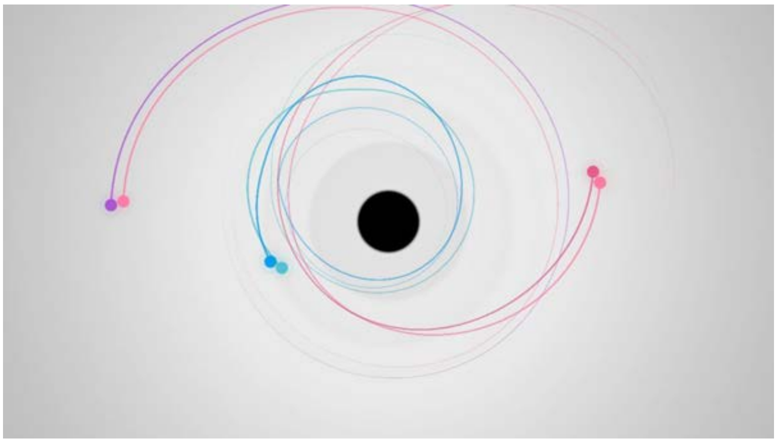


Figura: tela do aplicativo Orbit.

Fonte: o autor.

No Celestia, temos descrições detalhadas de cada astro celeste, incluindo a parte relativa às constelações, bem como podemos manipular o tempo para verificar os movimentos de rotação e translação dos planetas. Um ponto forte do software é a capacidade de facilmente dividir a tela para que possamos analisar os astros e seus movimentos de forma separada.

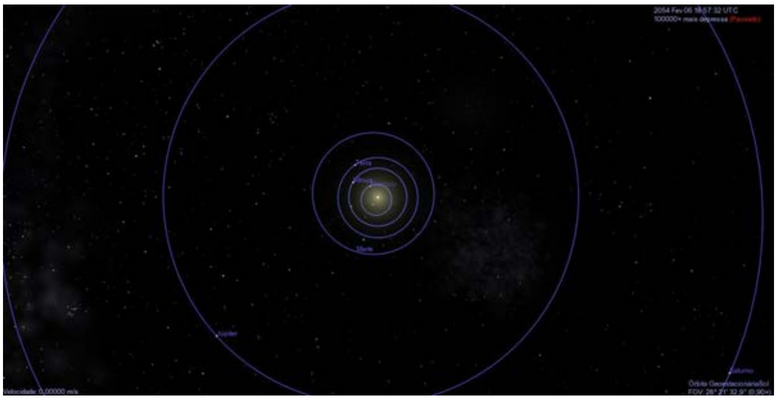


Figura: tela do aplicativo Celestia.

Fonte: o autor.

No Universe SandboxUniverse Sandbox[2], temos um simulador de espaço que nos permite criar, destruir e interagir em uma escala inimaginável. Ele combina gravidade em tempo real, clima, colisão e interações materiais para revelar a beleza de nosso universo a fragilidade do nosso planeta.

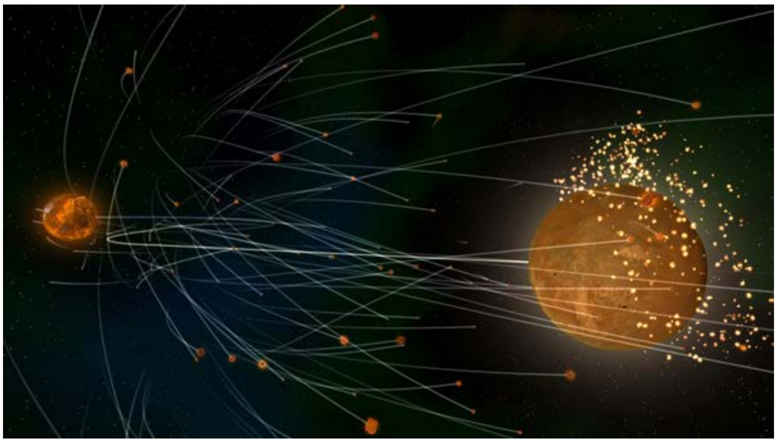


Figura: tela do aplicativo Universe SandboxUniverse Sandbox[2].

Fonte: o autor.

Um outro software que vale a pena mencionar é o “Meu Sistema Solar” (<https://goo.gl/DEPU1V>) do projeto Phet. Este aplicativo permite que você construa seu próprio sistema de corpos celestes definindo posições iniciais, velocidades e massas de 2, 3 ou 4 corpos, para depois vê-los orbitando entre si. O programa está todo em Português e é gratuito.

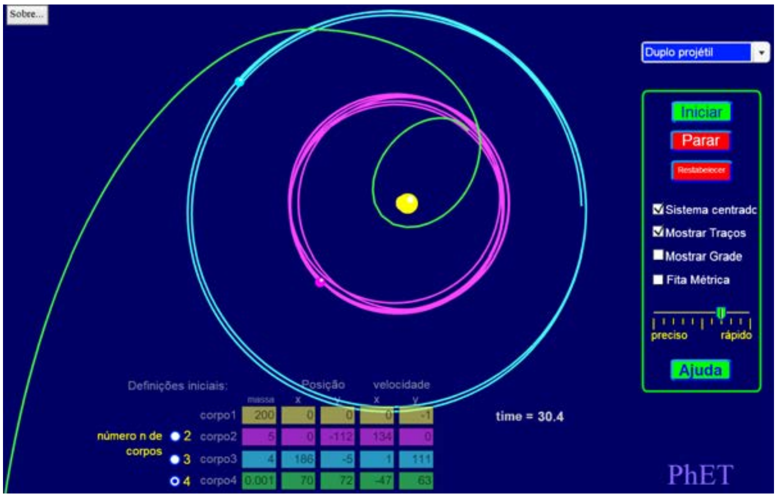


Figura: tela do aplicativo Meu Sistema Solar.

Fonte: o autor.

- O documentário nos apresenta o termo *efeito borboleta* (31:18-34:37) como atribuído ao meteorologista, matemático e filósofo Edward Lorenz (1917-2008). Em seus trabalhos, Lorentz procurava encontrar padrões numéricos nas previsões do tempo utilizando um computador de mesa. Segundo Oestreicher (2007), por acaso, ele colocou seu programa para rodar novamente utilizando os mesmos números com os quais já tinha trabalhado, mas arredondados para a terceira casa decimal. O resultado no novo experimento foi totalmente diferente. Deste modo ele pode perceber que uma pequena diferença na entrada dos dados pode produzir um efeito totalmente diferente no resultado final. Ele usou a seguinte analogia, que ficou conhecida como *efeito borboleta*, para expressar este tipo de comportamento: é como se o bater de asas de uma borboleta em um local pudesse ser a causa de um tornado em outra parte do planeta.

Figura: Edward Lorenz (1917-2008).

Fonte: Wikimedia Commons.

O site Quora (<https://goo.gl/7M3dTf>) lista alguns exemplos do efeito borboleta, isto é, exemplos onde pequenos atos podem produzir grandes efeitos. Um deles se refere ao erro de digitação de um dos programadores da empresa Google: ao atualizar o registro de sites perigosos, o programador incluiu acidentalmente o símbolo "/" no lugar do endereço completo. Como todos os endereços de Internet possuem um "/", o "pequeno erro" fez com que todos os sites fossem considerados perigosos pelo mecanismo de busca por quase 1 hora.

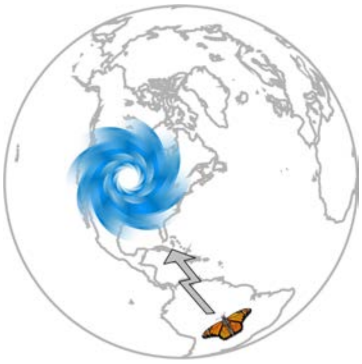


Figura: imagem refletindo o entendimento popular do efeito borboleta.

Fonte: Humberto José Bortolossi.

De fato, o efeito borboleta se incorporou à cultura popular e existem muitas referências cinematográficas que fazem uso do conceito: Babel (2006), Teoria do Caos (2008), Projeto Almanaque (2015), para citar alguns. Vale a pena mencionar dois excelentes exemplos da ideia do efeito borboleta com desfechos positivos. Tratam-se de duas propagandas da Schneider Electric que podem ser assistidas nos seguintes endereços: <https://youtu.be/UV2Q5o8gTYA> e <https://youtu.be/yOCCBm4BtBE>. A segunda propaganda, por exemplo, mostra um *blackout* ocorrido em uma cidade no exato momento que um astro da música estava sendo operado.

Tal *blackout* significaria a morte do astro, mas uma pequena atitude do engenheiro responsável ao religar a energia do planeta salva a vida deste artista. Consequentemente, feliz pela sua recuperação, o artista compõe uma música cujo tema é Água. Neste momento, o nosso planeta está ameaçado por estar na rota de colisão de um grande asteróide e diversos cientistas estão buscando uma forma de salvar o planeta. Infelizmente, ainda falta achar a solução definitiva do problema e, neste momento, um celular toca com a música feita pelo artista que não morreu durante o blackout. O refrão da música deu exatamente o elemento que estava faltando para que o planeta fosse salvo. Uma atividade interessante que pode ser feita é pedir para que os alunos que criem suas próprias histórias mostrando a ideia do efeito borboleta.

- Saber as acepções da palavra “ansiedade” (segundo o Dicionário Houaiss) pode ajudar a entender a sua inclusão no título do documentário:

> Substantivo feminino
> 1 Grande mal-estar físico e psíquico; aflição, agonia.
> Ex.: A demora no atendimento causava-lhe ansiedade.
> 2 Derivação: sentido figurado.
> Desejo veemente e impaciente.
> Ex.: Com grande ansiedade aguardava o seu casamento.
> 3 Derivação: sentido figurado.
> Falta de tranquilidade; receio.
> Ex.: Com ansiedade, procurava um lugar para ocultar-se.
> 4 Rubrica: psicopatologia.
> Estado afetivo penoso, caracterizado pela expectativa de algum perigo que se revela indeterminado e impreciso, e diante do qual o indivíduo se julga indefeso.

- Afinal, o que é “caos”? No Dicionário Houaiss, por exemplo, encontramos as seguintes acepções:

> Substantivo masculino
> 1 Rubrica: mitologia.
> Em diversas tradições mitológicas, vazio primordial de caráter informe, e indefinido, que precedeu e propiciou o nascimento de todos os seres e realidades do universo.
> 2 Derivação: por extensão de sentido. Rubrica: filosofia.
> Na tradição platônica, o estado geral desordenado e indiferenciado de elementos que antecede a intervenção do demiurgo.
> 3 Mistura de coisas ou ideias em total desarmonia; confusão.
> Exs.: A casa está um caos. Sua cabeça ficou um caos depois da separação.
> 4 Rubrica: física.
> Comportamento de um sistema dinâmico que evolui no tempo, de acordo com uma lei determinista, e é regido por equações cujas soluções são extremamente sensíveis às condições iniciais, de modo que pequenas diferenças acarretarão estados posteriores extremamente diferentes.

Do ponto de vista matemático, além da sensibilidade com relação às condições iniciais apontada pelo Dicionário Houaiss, outras condições têm sido propostas com combinações de critérios diferentes (determinismo, transitividade, periodicidade e aperiodicidade). Para mais detalhes, indicamos Zuchowski (2017).

- Apresentaremos agora, seguindo Banks, Dragan e Jones (2003), um exemplo clássico da Teoria do Caos que, em nossa opinião, é acessível ao Ensino Médio: trata-se das iterações de uma função quadrática para a modelagem discreta de crescimento populacional. Um dos modelos mais simples para o crescimento de populações é supor que a taxa de crescimento é constante, ou seja, se N_t representa o tamanho da população no tempo, então $N_{t+1}/N_t = c =$ constante. Note, que esta condição é equivalente a supor que a taxa de reprodução individual $(N_{t+1} - N_t)/N_t$ da população é constante, pois $(N_{t+1} - N_t)/N_t = N_{t+1}/N_t - 1 = c - 1 = r =$ constante. Se $N_{t+1}/N_t = c = 1+r =$ constante, então os valores N_t para $t = 0, 1, 2, \ldots$ formam uma progressão geométrica (PG) e, sendo assim, $N_t = N_0\ (1+r)^t$, para $t = 0, 1, 2, \ldots$ (uma expressão semelhante aparece no estudo de juros compostos). Se $N_0 > 0$ e $r > 0$, então N_t tende a infinito quando t tende a infinito e, como aponta o próprio documento (ver a sugestão de Questão Específica 6), não é razoável supor que uma população possa ter um crescimento ilimitado dadas as restrições de espaço e alimento. O modelo que apresentaremos agora, proposto pela primeira vez em 1844 pelo matemático Pierre-François Verhulst (1804-1849), procura incorporar essas restrições.

Figura: Pierre-François Verhulst (1804-1849).

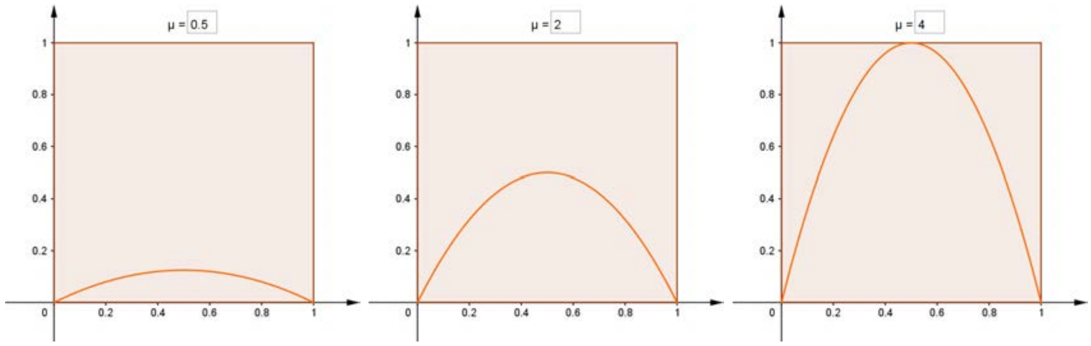
Fonte: Wikimedia Commons.

Supondo que a população tenha um tamanho sustentável máximo K, este modelo pressupõe que:

(1º) quando o tamanho da população se aproxima de K, a taxa de reprodução individual $(N_{t+1} - N_t)/N_t$ se aproxima de 0 (zero);

(2º) quando o tamanho da população se aproxima de 0 (zero), a taxa de reprodução individual se aproxima do valor $r > 0$.

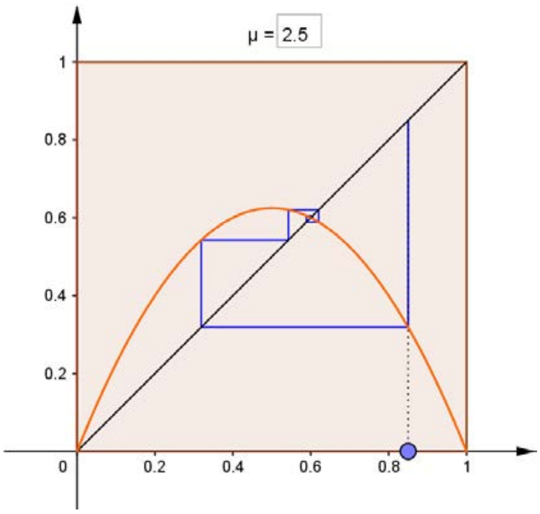
A seguinte equação é uma maneira de se implementar estas condições: $(N_{t+1} - N_t)/N_t = r(1 - N_t/K)$. Dela, segue-se que $N_{t+1} = N_t + r N_t(1 - N_t/K)$. Essa equação pode ser simplificada por meio da troca de variáveis $N_t = (1+1/r)Kx_t$, fornecendo a equação recursiva $x_{t+1} = \mu \cdot x_t \cdot (1-x_t)$, onde $\mu = 1+r$. Podemos ainda escrever $x_{t+1} = f(x_t)$, onde $f(x) = \mu \cdot x \cdot (1-x)$. Note que $f(x) \geq 0$ se, e somente se, $0 \leq x \leq 1$ e que $f(x) \leq 1$ se, e somente se, $\mu = 4$ (estamos sempre admitindo que $\mu \geq 0$). As imagens a seguir exibem o gráfico da função f para $\mu = 0.5$, $\mu = 1$ e $\mu = 4$.



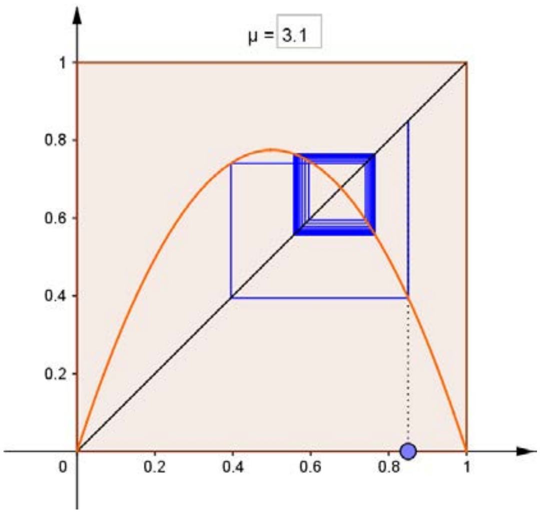
A pergunta de interesse aqui é determinar o que acontece com o valor de x_t quando t tende a infinito. Isto dependerá, naturalmente, do valor do parâmetro μ e, também, do valor inicial x_0. Por exemplo, para $\mu = 2.5$ e partindo-se de $x_0 = 0.85$, observa-se que x_t tende para 0.6.

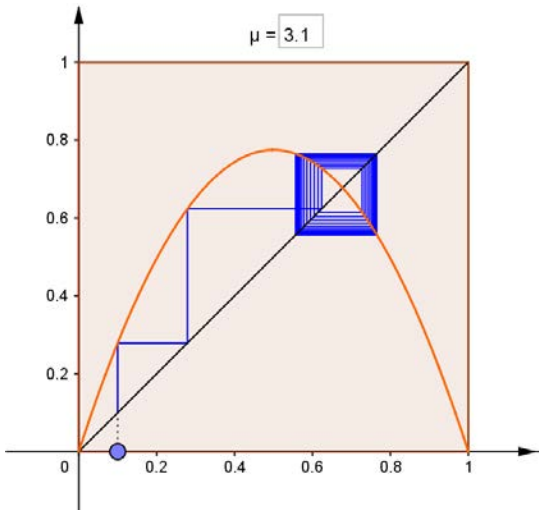
COM	CALCULAMOS	OBTENDO
$x_0 = 0.85$	$x_1 = 2.5 \cdot 0.85 \cdot (1-0.85)$	$x_1 = 0.31875$
$x_1 = 0.31875$	$x_2 = 2.5 \cdot 0.31875 \cdot (1-0.31875)$	$x_2 = 0.542871094$
$x_2 = 0.542871094$	$x_3 = 2.5 \cdot 0.542871094 \cdot (1-0.542871094)$	$x_3 = 0.620405173$
$x_3 = 0.620405173$	$x_4 = 2.5 \cdot 0.620405173 \cdot (1-0.620405173)$	$x_4 = 0.588756486$
$x_4 = 0.588756486$	$x_5 = 2.5 \cdot 0.588756486 \cdot (1-0.588756486)$	$x_5 = 0.605305716$
$x_5 = 0.605305716$	$x_6 = 2.5 \cdot 0.605305716 \cdot (1-0.605305716)$	$x_6 = 0.597276766$
$x_6 = 0.597276766$	$x_7 = 2.5 \cdot 0.597276766 \cdot (1-0.597276766)$	$x_7 = 0.601343077$
$x_7 = 0.601343077$	$x_8 = 2.5 \cdot 0.601343077 \cdot (1-0.601343077)$	$x_8 = 0.599323952$
$x_8 = 0.599323952$	$x_9 = 2.5 \cdot 0.599323952 \cdot (1-0.599323952)$	$x_9 = 0.600336882$
$x_9 = 0.600336882$	$x_{10} = 2.5 \cdot 0.600336882 \cdot (1-0.600336882)$	$x_{10} = 0.599831276$

Uma maneira bem prática para se visualizar a progressão dos valores x_0, x_1, x_2, etc. é por meio de um *Diagrama de Cobweb* que consiste em um caminho poligonal que liga os pontos $(x_0,0),(x_0,x_0),(x_0,x_1),(x_1,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_t,x_t),(x_t,x_{t+1}),\ldots$ A figura a seguir exibe o Diagrama de Cobweb para $\mu = 2.5$ e $x_0 = 0.85$.

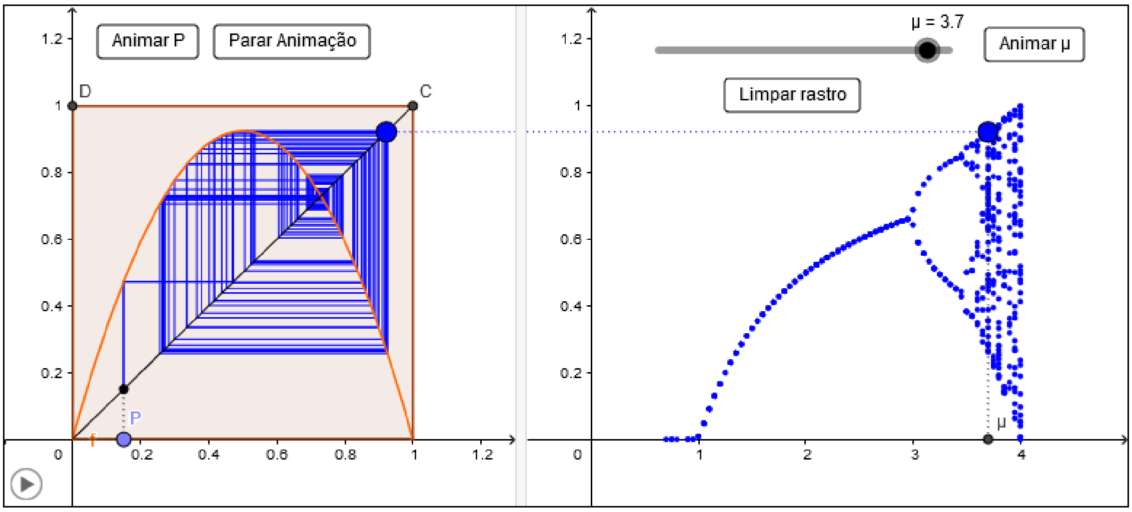


Se $\mu = 3.1$ e $x_0 = 0.85$, a sequência x_t tem dois valores de aderência, um próximo de 0.58 e o outro próximo de 0.76. Esses valores de aderência são os mesmos para quase toda escolha de valores iniciais x_0 com $0 < x_0 < 1$.





Se $\mu = 3.5$ e $x_0 = 0.85$, a sequência x_t tem quatro valores de aderência! A medida que o valor μ aumenta, a caracterização dos pontos de aderência vai tornando-se progressivamente mais complicada! Uma maneira de se visualizar este comportamento é por meio de um *Diagrama de Bifurcação*, que consiste em marcar os pontos da forma (μ, v)onde v é um valor de aderência da sequência (x_t). A figura a seguir exibe parte do Diagrama de Bifurcação gerada pelo GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/f2mVzqf8>).



Se μ está entre 0 e 1, a população irá eventualmente morrer para qualquer valor para o tamanho inicial da população x_0. Se μ está entre 1 e 2, o tamanho da população irá convergir rapidamente para $(\mu-1)/\mu$ independentemente do valor de x_0. Se μ está entre 2 e 3, o tamanho da população também irá convergir para $(\mu-1)/\mu$. Se μ está entre 3 e $1+\sqrt{6}\approx 3.449949$, a sequência (x_t) terá dois valores de aderência (que dependem de μ) para quase todo valor de x_0. Se μ está entre 3.44949 e 3.54409 (aproximadamente), a sequência (x_t) terá quatro valores de aderência. Com μ aumentando para além de 3.54409, para quase todos os valores de x_0 o tamanho da população oscilará entre 8 valores, então 16, 32, etc. Os comprimentos dos intervalos associados a esses números formam uma sequência cujas razões sucessivas se aproximam da Constante de Feigenbaum ($\delta = 4.669201609\ldots$). Para $\mu \geq 3.56995$, um comportamento caótico aparece para quase todo valor de x_0: pequenas variações no valor x_0 irá produzir resultados diferentes para o tamanho x_t da população a longo prazo (sensibilidade com relação às condições iniciais).

Referências relacionadas

- Ausloos, Marcel; Dirickx, Michel. *The Logistic Map and The Route To Chaos: From The Beginnings To Modern Applications*. Springer-Verlag, 2006.
- Banks, John; Dragan, Valentina; Jones, Arthur. *Chaos: A Mathematical Introduction*. Australian Mathematical Society Lecture Serie. Cambridge University Press, 2003.
- Bauer, Wolfgang; Westfall, Gary D.; Dias, Helio. *Física para Universitários: Mecânica*. AMGH Editora Ltda., 2012.
- Bergé, Pierre; Pomeau, Yves; Dubois-Gance, Monique. *Dos Ritmos ao Caos*. Editora UNESP, 1996.
- David, Ruelle. *Acaso e Caos*. Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

- Diacu, Florin. *The Solution of The n-Body Problem.* The Mathematical Intelligencer, v. 18, n. 3, p. 66-70, 1996.
- Gleick, James. *A Face Oculta do Caos*. Revista Superinteressante, Edição 27, Setembro de 1989. Editora Abril. Disponível em: <https://goo.gl/etks79>. Acesso em: 17 de julho de 2016.
- Gladwell, Malcolm. *O Ponto de Virada – The Tipping Point – Como Pequenas Coisas Podem Fazer Uma Grande Diferença.* Sextante, 2009.
- Lamberson, P. J.; Page, Scott E. *Tipping Points*. SFI Working Papers. Santa Fe Institute, 2012.
- Newton, Isaac. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Livro 1. Primeira Edição. EdUSP, 2002.
- Oestreicher, Christian. *A History of Chaos Theory.* Dialogues in Clinical Neuroscience, v. 9, n. 3, p. 279-289, 2007.
- Weinert, Friedel. *The Demons in Science: What They Can and Cannot Tell Us About Our World*. Springer-Verlag, 2016.
- Zuchowski, Lena C. *A Philosophical Analysis of Chaos Theory*. Palgrave Macmillan, 2017.

Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

Agradecimentos

Isabel Lugão Rios e Augusto Armando de Castro Junior

Créditos das imagens de sensibilização

Mediamodifier (pixabay) e geralt (pixabay)

Concepção

Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas e Fabiana Silva de Miranda

Revisão

André de Carvalho Rapozo, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira,
Keyla Lins Bruck Thedin, Rodrigo Pessanha da Cunha, Oswaldo dos Santos A. Coutinho

Supervisão

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

5 Considerações finais

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho colaborativo, com o propósito de auxiliar nas concepções, nos testes e nos aprimoramentos dos roteiros, promovemos diversas ções de vídeos relacionados com Matemática e Estatística em vários eventos: Semana da Matemática da UFRR (2015), Programa Dá Licença da UFF (2016), Semana da Matemática da UFF (2016), Semana Pedagógica no Colégio Estadual Manuel de Abreu (2016, 2018), Festival da Matemática (2017), Simpósio ANPMat da Região Norte (2017), Semana da Ciência e Tecnologia no IMPA (2017), Semana da Matemática da UFSC em Blumenau (2017), Festival da Matemática do Rio Grande do Sul (2017), Semana Pedagógica no Instituto GayLussac (2017), Semana da Matemática da UFMS (2018), 70ª Reunião da SBPC (2018), Semana Pedagógica no Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (2018).

Figura 5.1: exibições de vídeos.

Entre estes eventos, destacamos o Festival da Matemática, uma iniciativa do IMPA e da SBM, como parte do “Biênio da Matemática 2017-2018 Gomes de Sousa”, realizado entre 27 e 30 de abril de 2017 na Escola SESC do Rio de Janeiro. Durante os quatro dias de evento foram realizadas sessões *non-stop* de 30 em 30 minutos. Estima-se que mais de 1600 pessoas (entre alunos, professores e o público em geral) tenham participado. Após a exibição de cada vídeo, voluntários respondiam a algumas questões gerais do roteiro. Um brinde de participação (um chocolate) era dado à pessoa voluntária. Duas sessões foram especiais com as participações do matemático português Rogério Martins (do Programa "Isto é Matemática") e do matemático francês Étienne Ghys.

Os vídeos também foram exibidos na ação de extensão "Cineclube de Matemática e Estatística" do Projeto "Dá Licença" da Universidade Federal Fluminense. Nestes eventos, filmes mais longos foram apresentados e cada sessão contou com a participação de um convidado especial que, ao final da exibição, fazia comentários e respondia às perguntas da plateia.

Figura 5.2: Exibições de vídeos (continuação).

Nossa proposta de uso didático de vídeos também foi usada em atividades de formação continuada de professores (Simpósio ANPMat da Região Norte e Instituto GayLussac) e, mais recentemente, na formação inicial de professores no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) para o núcleo da Matemática da Universidade Federal Fluminense.

Dos dois roteiros propostos neste trabalho, conseguimos aplicar o primeiro, “Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta”, com 15 alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Hamilton Moreira da Silva em Maricá/RJ. A atividade se dividiu em três momentos distintos: (1) exibição do filme no auditório da escola; (2) debate com as questões gerais e específicas do roteiro e (3) atividade prática no laboratório de informática no qual os alunos foram apresentados e puderam manipular o aplicativo artístico Dood.al para gerar fractais em navegadores (conforme a sugestão na página 30 do roteiro). Vale ressaltar que antes da exibição do filme propriamente dito, foi feita uma rápida exibição de um trecho do documentário da BBC “Quão Longo é Um Pedaço de Barbante?” (cujo roteiro está no trabalho da colega Fabiana Silva de Miranda) para fomentar o início da discussão a respeito do estudo sobre fractais.

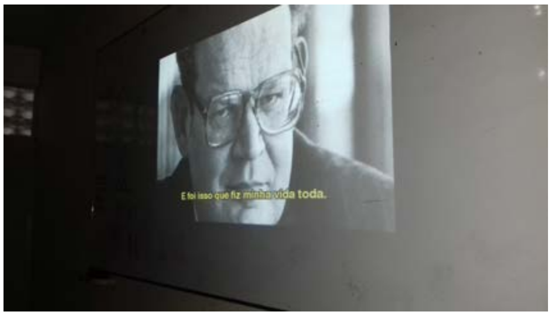


Figura 5.3: exibição do documentário “Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta”.

Os alunos assistiram à exibição do vídeo com muita atenção e foi possível notar o envolvimento com a proposta de trabalho, mesmo sem indicação alguma de que a atividade valeria algum ponto (de fato, não valeu) ou que brindes seriam distribuídos (o que não ocorreu). Por restrições orçamentárias, não foi possível fotocopiar as perguntas para que alunos pudessem lê-las antes da exibição do vídeo.

Todas as Questões Gerais foram trabalhadas. A seguir indicamos algumas das respostas dadas pelos alunos.

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
   “*Sim. Que devemos estudar fractais.*”, “*Sim. Que a matemática é muito mais ampla do que pensávamos.*”, “*Sim. Que os fractais são importantes na ciência.*”, “*Sim. Que os fractais ainda não estão nos nossos livros, mas já estão caindo nas nossas provas.*”.
2. Você aprendeu algo novo com o vídeo? O quê?
   “*Tudo!*”, “*Não sabia que existia fractal. Ainda por cima dentro do meu celular.*”, “*Não tinha ideia de que a computação gráfica tinha tanta matemática.*”.
3. Segundo o documentário, que matemático é responsável pela descoberta dos fractais?
   Esta pergunta não estava inicialmente no roteiro quando ele foi aplicado.

4. Segundo o documentário, os fractais estão em tudo à nossa volta: na natureza, na computação gráfica, na medicina, na engenharia e em outras áreas. Cite alguns exemplos de aplicações dos fractais exibidos no filme.
   "*Em relação à natureza, à formação das florestas e aos galhos de árvores.*", "*Na computação gráfica, o filme do Star Wars e as montanhas geradas com vários triângulos.*", "*Na medicina, através do estudo do câncer.*", "*Na engenharia, nas antenas dos celulares.*".
5. Segundo o documentário, que propriedade geométrica caracteriza um fractal?
   Nesta pergunta, esperava-se que os alunos mencionassem o conceito de autossemelhança ou mesmo o processo iterativo para geração de fractais. Contudo, nenhum aluno deu uma resposta satisfatória. Os alunos estavam confundindo *iteração* com *interação* e, desta maneira, aproveitamos a oportunidade para tentar esclarecer as diferenças entre os dois conceitos.
6. O documentário mostra em diversos momentos que Mandelbrot e sua nova geometria fractal foram desprezados no meio acadêmico por alguns anos. Baseado nos pontos ressaltados no vídeo, quais são os motivos que levaram a tal desprezo?
   "*Porque não servia pra nada.*".
7. Com base no que foi exibido, você acha adequada a escolha do título "Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta" para o documentário?
   "*Sim.*". A partir das respostas dos alunos com um simples "*Sim.*", decidiu-se mudar a pergunta do roteiro e acrescentar: "Justifique sua resposta!".
8. Do que você mais gostou no filme?
   "*A possibilidade de detectar células cancerígenas através do estudo dos fractais.*", "*Os fractais nos celulares.*", "*Os efeitos especiais criados nos computadores.*".
9. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?
   "*Nada. O filme foi muito bom.*", "*Nada. Não precisa mudar nada.*".

A seguir indicamos algumas das respostas dadas pelos alunos para as Questões Específicas que foram trabalhadas em sala de aula.

1. Inspirado pelo livro "Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão" de Mandelbrot, o cientista de computação Carpenter propôs um método para se criar montanhas no computador (04:32-04:50). Como o método funciona? Como os matemáticos denominam esta técnica?
   "*Iteração.*".
2. Ao tentar solucionar um problema proposto pelos colegas da IBM, Mandelbrot lembrou-se do que o documentário chama de mistério dos "monstros" (14:07-15:11). Um desses "monstros" é o conjunto de Cantor.

   (a) Segundo o documentário, por que objetos geométricos como o conjunto de Cantor foram chamados de "monstros"?

   (b) Como o conjunto de Cantor é construído?
   (c) Qual é a semelhança entre o conjunto de Cantor e o problema das linhas de transmissão apresentada no documentário?

   Os alunos não conseguiram responder a esta questão e tiveram dificuldade para assimilar a explicação a respeito deste assunto, o que acabou consumindo pelo menos uns 15 minutos do debate. Porém, eles conseguiram perceber a semelhança do processo da formação do conjunto de Cantor e a formação do floco de Koch. Neste momento, aproveitando a oportunidade, também apresentamos a versão computacional do Jogo do Caos (ver página 33) e pudemos perceber a surpresa dos alunos em ver como algo aleatório pode gerar um padrão, no caso, o Triângulo de Sierpiński.

3. Segundo o documentário (15:10-15:38), que avanço tecnológico no fim da década de 1950 e início de 1960, permitiu o avanço da teoria dos fractais e deu suporte para que fosse possível desvendar os "monstros" que tratam o documentário? Por quê?

   Com a explicação relativa à pergunta anterior, a resposta desta questão já havia sido abordada e, assim, não houve mais a necessidade de fazê-la.

4. O narrador no documentário afirma que o floco de Von Koch é um paradoxo matemático (16:27-17:35). Explique o porquê desta afirmação.

   Como o tempo disponível já estava quase esgotando, esta pergunta não foi feita, uma vez que os alunos já tinham a ideia de que o perímetro do floco de Kock seria infinito com base no trecho passado do documentário "Quão Longo é Um Pedaço de Barbante?".

5. O documentário apresenta algumas aplicações dos fractais em diversas áreas.

   (a) Como e por que os fractais foram usados no filme *Star Wars III* (26:40-27:45)?
   (b) Como e por que os fractais são usados na confecção de antenas (30:50-32:36)?
   (c) Qual é a relação entre fractais e o movimento dos olhos e quais são os benefícios potenciais em se estudar tal relação (37:00-37:30)?
   (d) Como e por que os fractais podem ajudar no diagnóstico precoce de nódulos cancerígenos (40:16-41:29)?
   (e) Qual é a relação entre fractais e o consumo de energia de animais (41:40-42:59)?
   (f) Qual é a relação entre fractais e o consumo de dióxido de carbono em uma floresta (44:55-49:08)?

   (a) "*Foi usado para gerar a lava para dar mais realismo à cena.*". (b) "*Para diminuir o tamanho dos celulares.*". (c) "*No Bom Dia Rio de hoje, falaram que as pessoas estudam para onde seu olhar se dirige em um supermercado, para colocarem as promoções. Com a informação do estudo do movimento dos olhos, poderão criar sites com propagandas em locais estratégicos.*". (d) Neste item, eles só lembravam que o câncer poderia ser detectado, mas não lembravam como poderia ser detectado. Itens (e) e (f): não houve mais tempo disponível para as discussões e tivemos que encerrar esta parte do trabalho para que os alunos fossem para o recreio. As questões não trabalhadas poderiam até fazer parte de uma atividade extraclasse, porém esta turma já estava com muitas atividades para serem entregues nas semanas seguintes e eles ficariam sobrecarregados com a produção de mais um questionário.

Após o intervalo do recreio, a fim de substanciar ainda mais os conceitos vistos no vídeo, os alunos foram direcionados ao laboratório de informática para trabalharem com o software Dood.al. Mesmo acostumados com as novas tecnologias, os estudantes ficaram bastante entusiasmados com o programa. Eles até aproveitaram a oportunidade para criar um logotipo para a campanha do “Outubro Rosa”.

Figura 5.4: criação de fractais por meio do software Dood.al.

Como trabalho futuro, pretendemos organizar um *blog* para melhor divulgar os roteiros dos vídeos, bem como criar um canal de comunicação com o professor de Matemática e outros profissionais interessados no uso de vídeos como instrumento de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

Bulman, Jeannie Hill. *Children's Reading of Film and Visual Literacy in The Primary Curriculum: A Progression Framework Model*. This Palgrave Macmillan, 2017

Chabrán, H. Rafael; Kozek, Mark. *Mathematics in Literature and Cinema: An Interdisciplinary Course*. PRIMUS, 2015.

Doxiadis, Apostolos; Mazur, Barry. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*. Princeton University Press, 2012.

Ferrés, Joan. *Vídeo e Educação*. Editora Artes Médicas, 1996.

Gottschall, Jonathan. *The Storytelling Animal: How Stories Make Us Human*. New York: Harcourt Publishing Company, 2013.

Harari, Yuval Noah. *Sapiens: Uma Breve História da Humanidade*. Porto Alegre: L&PM, 2015.

Haven. K. *Super Simple Storvlelling: A Can-Do Guide for Every Classroom, Every Day*. Englewood, CO: Teacher Ideas Press, 2000.

Machado, Benedito Fialho; Mendes, Iran Abreu. *Vídeos Didáticos de História da Matemática: Produção e Uso na Educação Básica*. História da Matemática para Professores, Sociedade Brasileira da História da Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

Machado, Nilson José. *A Narrativa em Matemática*. Palestra na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da UFF, Universidade Federal Fluminense, 2016.

McSill, James. *Cinco Lições de Storytelling: Fatos, Ficção e Fantasia*. São Paulo: DVS Editora, 2013.

Moran, José Manuel. *O Vídeo na Sala de Aula*. Comunicação & Educação, v. 2, p. 27-35, 1995.

Muzás, José Maria Sorando. *Aventuras Matemáticas em El Cine*. Editorial Guadalmazán, 2015.

Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

Napolitano, Marcos. *Como Usar A Televisão na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

Pellicer, Pablo Beltrán. *Series y Largometrajes como Recurso Didáctico em Matemáticas en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales, Facultad de Educación, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2015.

Polster, Burkaro; Ross, Marty. *Math Goes To The Movies*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2012.

Reiser, Elana. *Teaching Mathematics using Popular Culture: Strategies for Common Core Instruction from Film and Television*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2015.

Santos, Rosiane de Jesus. *Uma Taxonomia para O Uso de Vídeos Didáticos para o Ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2015.

Sklar, Jessica K.; Sklar, Elizabeth S. *Mathematics in Popular Culture: Essays On Appearences in Film, Fiction, Games, Television and Other Media*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2012.

Xavier, Adilson. *Storytelling: Histórias Que Deixam Marcas*. Rio de Janeiro: Best*Seller*, 2015.

Zack, Paul J. *Confiança, Moralidade e Ocitocina. TED Global 2011*. Disponível em: <https://goo.gl/tFhoqb>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *A Molécula da Moralidade*. Elsevier, 2012.

Zack, Paul J. *Empathy, Neurochemistry, and The Dramatic Arc*. Future of StoryTelling, 2013. Disponível em: <https://vimeo.com/61266150>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *How Stories Change The Brain*. 17 dezembro de 2013. Disponível em: <https://goo.gl/DgBnnB>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *Why Your Brain Loves Good Storytelling*. HBR 28 de outubro de 2014. Disponível em: <https://goo.gl/BVyRng>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zack, Paul J. *Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*. Cerebrum Jan-Feb; 2015. Disponível em: <https://goo.gl/LPFn7P>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zacks, J. M.; Tversky, B.; Iyer, G. 2001. *Perceiving, Remembering, and Communicating Structure in Events*. Journal of Experimental Psychology: General, v. 130, p. 29-58, 2001.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter. *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.