



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



O ensino de matemática através da compreensão da linguagem matemática

Claudeir Dias

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março 2019

O ensino de matemática através da compreensão da linguagem matemática

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Claudeir Dias e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 14 de março de 2019.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Djeison Benetti
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

D541e Dias, Claudeir.
O ensino de matemática através da compreensão da linguagem matemática / Claudeir Dias. -- 2019
xiii, 61 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Proposta de Ensino. 2. Linguagem matemática. 3. Resoluções de problemas. 4. Procedimentos Didático. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "O ensino de Matemática através da compreensão da linguagem matemática"

Autor: Claudeir Dias

defendida e aprovada em 01/03/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Aldi Nestor de Souza
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Djeison Benetti
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Junior Cesar Alves Soares
Instituição: UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, 01/03/2019.

Dedico este trabalho a todos aqueles que, almejam, acreditam e lutam para que um dia tenhamos uma educação de qualidade, que concretize igualdade social.

Agradecimentos

Aos meus irmãos, José Dias Alves e Valdivino Luiz Dias, a Minha mãe Helena Maria Dias e ao meu avô Lazaros Dias Gomes por fazerem parte de toda a minha trajetória, desde a infância até hoje na conclusão desse mestrado, ainda que de forma indireta, esse convívio nas dificuldades e glórias é que me possibilitou hoje eu ser um Mestre.

A minha esposa, Kátia Moulaz, que além de me aturar nos dias de estresses contribuiu e muito nos debates sobre as ideias para construção dessa dissertação, e com as correções do texto.

Aos meus colegas da melhor turma que o PROFMAT-UFMT já teve, em especial ao Osvaldo o parceiro de estudos e Adriana, Cláudio, Jaqueline Mariano, Jaqueline Soares, Juliano (e a Marcela), Luiz, Ondrias, Paula, Priscila, Valcir, Vinícius, Zeila e Silvana, turma a qual tenho orgulho de dizer que tive o prazer de conviver por esses dois anos.

Aos professores, que nos auxiliaram durante esse curso, em especial ao meu orientador Dr. Aldi Nestor que muito contribuiu com os direcionamentos dessa pesquisas me auxiliando para a realização deste trabalho.

A UNEMAT por me proporcionar o afastamento remunerado, que sem o qual seria muito difícil manter até o final com aprovações nas disciplinas.

A UFMT, CAPES e SBN por juntas proporcionar o maior programa de mestrado do Brasil, PROFMAT.

Muito obrigado a todos.

A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem. Não pode temer o debate. A análise da realidade. Não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa.

Freire (2014)

Resumo

Esta dissertação apresenta uma proposta de ensino com objetivo de ensinar matemática através da compreensão da linguagem matemática. Esta proposta se baseia na metodologia de que se deve resolver o exercício em diversos tipos de abstrações, transitando da descrição analítica formal em língua natural para a descrição sintética em linguagem matemática e mostrar que a linguagem sintética matemática é um modelo aplicável em várias situações buscando uma aprendizagem significativa. Para facilitar a compreensão da proposta, apresentamos a problematização que nos levou a essa pesquisa, fazendo um apanhado histórico sobre o ensino da matemática, em especial o uso dos exercícios como estratégia de ensino. Para facilitar a visualização da metodologia da proposta, fizemos exemplos de como seria a aplicação da metodologia em sala e um relato de experiência sobre duas observações, a primeira com pessoas que já terminaram o ensino médio e a segunda com alunos do ensino médio. Por fim nas considerações finais apresentamos os resultados alcançados.

Palavras chave: Proposta de Ensino, Linguagem matemática, Resoluções de problemas, Procedimentos Didático.

Abstract

This dissertation presents a teaching proposal aimed at teaching mathematics through the understanding of mathematical language. This proposal is based on the methodology that must solve the exercise in several types of abstractions, moving from the formal analytical description in natural language to the synthetic description in mathematical language and show that mathematical synthetic language is a model applicable in several situations. To facilitate the understanding of the proposal, we present the problematization that led us to this research, making a historical survey on the teaching of mathematics, especially the use of exercises as a teaching strategy. To facilitate the visualization of the methodology of the proposal, we gave examples of how it would be the application in the room of the methodology and a report of experience on two observations, the first with people who have finished high school and the second with high school students. Finally, in the final considerations we present the results achieved.

Keywords: Teaching Proposal, Mathematical Language, Problem Solving, Didactic Procedures.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Lista de tabelas	xiii
Introdução	1
1 Problematização e objetivo	3
1.1 Da língua à matemática	5
1.2 Uma breve história sobre o ensino de matemática: Os exercícios como estratégia de ensino	7
1.3 O ensino de matemática no Brasil: Século XX e XXI	10
1.4 Matemática: linguagem e política	12
1.5 Contextualização e Objetivo	13
2 Proposta de intervenção	15
2.1 Método proposto	17
2.1.1 Etapa administrativa: Selecione	18
2.1.2 Etapa administrativa: Reescreva	18
2.1.3 Etapa de ensino: Sintetize	18
2.1.4 Etapa de ensino: Matematize	18
2.1.5 Etapa de ensino: Generalize	19
2.1.6 Etapa de ensino: Formalize	20

2.1.7	Etapa de ensino: Aplique/Treine	20
2.2	Algumas possibilidades: Exemplo 1	20
2.2.1	Etapa administrativa: selecione	21
2.2.2	Etapa administrativa: Reescreva	21
2.2.3	Etapa de ensino: Sintetize	22
2.2.4	Etapa de ensino: Matematize	22
2.2.5	Etapa de ensino: Generalize	25
2.2.6	Etapa de ensino: Formalize	27
2.2.7	Etapa de ensino: Aplique/Treine	29
2.3	Algumas possibilidades: Exemplo 2	30
2.3.1	Etapa administrativa: Selecione	30
2.3.2	Etapa administrativa: Reescreva	31
2.3.3	Etapa de ensino: Sintetize.	31
2.3.4	Etapa de ensino: Matematize	32
2.3.5	Etapa de ensino: Generalize	33
2.3.6	Etapa de ensino: Formalize	34
2.3.7	Etapa de ensino: Aplique/Treine	34
2.4	Algumas possibilidades: Exemplo 3	35
2.4.1	Etapa administrativa: Selecione	35
2.4.2	Etapa administrativa: Reescreva	35
2.4.3	Etapa de ensino: Sintetize	36
2.4.4	Etapa de ensino: Matematize	37
2.4.5	Etapa de ensino: Generalize	38
2.4.6	Etapa de ensino: Formalize	39
2.4.7	Etapa de ensino: Aplique/Treine	40
2.5	Algumas possibilidades: Exemplo 4	40
2.5.1	Etapa administrativa: Selecione	41
2.5.2	Etapa administrativa: Reescreva	41
2.5.3	Etapa de ensino: Sintetize.	41
2.5.4	Etapa de ensino: Matematize	42
2.5.5	Etapa de ensino: Generalize	43
2.5.6	Etapa de ensino: Formalize	44

2.5.7	Etapa de ensino: Aplique/Treine	46
3	Relato de experiência	47
	Considerações finais	54
	Referências Bibliográficas	57
	Apêndice: Material adicional	58

Lista de Figuras

2.1	Situação transcrita para o plano	23
2.2	Possíveis localização dos bombeiros	24
2.3	Distância entre dois pontos no plano	27
2.4	Círculo no Plano Cartesianodio	28
2.5	Questão OBEMEP-2018	30
2.6	Representação da posição dos ciclitas em um gráfico	37
2.7	Representação da descrição do passo da generalização	38
2.8	Imagem para auxiliar a demonstração	39
3.1	Fazer a síntese e aplica-la criando uma nova história	58
3.2	Analisando em qual linguagem é preferível resolver	59
3.3	Análise de dificuldades de cada versão apresentada, página 1	60
3.4	Análise de dificuldades de cada versão apresentada, página 2	61

Lista de Tabelas

2.1	Passos de Polya para resolução de problemas	19
3.1	Notas atribuídas sobre os níveis de dificuldades	50

Introdução

Compreender matemática não é uma tarefa simples, nem para os mais experientes no assunto. Comumente encontramos exercícios que abordam conteúdo da educação básica sendo capaz de “tirar o sono” de pessoas graduadas na área. De mesma forma, podemos dizer que ensinar matemática é tão difícil quanto aprender, pois não basta apenas compreender o conteúdo, deve-se compreender algumas teorias pedagógicas e metodologias que facilitam o ensino.

De acordo com Saviani (1999) o professor transmite, segundo uma gradação lógica, o acervo cultural aos alunos e a estes cabe assimilar os conhecimentos que lhes são transmitidos, porém juntamente com isso, notamos a perpetuação da replicação didática, a replicação da maneira que fomos ensinados no decorrer de toda nossa vida escolar, agindo na maioria das vezes quase que de modo automático, ou seja, aprendemos assim e vamos ensinar de mesma forma. Freire (2011) reforça que ensinar não é simplesmente transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para que a produção ou construção social do aluno floresça e que, não se pode ensinar o que não se sabe, logo devemos saber o que ensinar e também saber ensinar.

No decorrer deste programa de mestrado aprendemos muito sobre o que ensinar, a ler e escrever em linguagem matemática, a compreendermos o rigor, a como se deve fazer uma demonstração, enfim, aprendemos o que ensinar. Diante disso, para completar o objetivo do programa, neste trabalho iremos apresentar uma proposta de ensino, que visa auxiliar a compreensão da linguagem matemática sendo, aplicada de maneira complementar ao método de ensino praticado hoje nas escolas.

Esta proposta inverte a maneira de olharmos para o conteúdo matemático, ou seja, onde tínhamos a concepção de se ensinar partindo da generalização para o treinamento através da aplicação em exercícios, teremos agora a concepção de que devemos sair da descrição e ir gradativamente sintetizando até chegarmos na generalização e por fim

entendermos que a generalização modela diversas outras situações através de sua aplicação e que, esse caminho deve tornar significativo e possibilitar a compreensão da linguagem matemática. Para isso, esse trabalho foi dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, na problematização, apresentamos os motivos que nos levam a construir a proposta, após isso fizemos uma breve levantamento histórico sobre o ensino de matemática, em especial uma análise na estratégia da utilização dos exercícios como ferramentas pedagógicas. Posteriormente analisamos os movimentos que possibilitaram a organização atual do ensino de matemática no Brasil. Discorremos ainda sobre o aspecto da matemática quando instrumento político e sua importância social e por fim apresentamos a contextualização e o objetivo do trabalho.

No segundo capítulo apresentamos a proposta de intervenção e, para auxiliar o entendimento da mesma apresentamos uma metodologia, a qual elencamos em duas etapas, a administrativa, composta pela seleção e reescrita da descrição e, a de ensino, composta pelos procedimentos de sintetização, matematização, generalização, formalização e aplicação e/ou treinamento. Posteriormente apresentamos algumas possibilidades de como trabalhar com a proposta e, para isso, aplicamos-a através da resolução de quatro exercícios para servir como exemplo para a compreensão do que foi proposto.

No terceiro capítulo fizemos uma análise de viabilidade através de um relato de experiência, no qual na primeira pesquisa foi analisada a capacidade das pessoas comuns em fazerem generalizações que preserve o argumento matemático e posteriormente aplicar a forma sintetizada e, se elas consideram que o fato de um exercício estar na forma de descrição ele se torna um motivador para a resolução e, se os exercícios apresentados em formas de descrição possui nível de dificuldades diferente de sua forma generalizada. Na segunda pesquisa nos pautamos em identificar se os alunos consideram que o fato de um exercício estar na forma de descrição ele se torna um motivador para despertar o interesse pela resolução, verificar como os alunos reagem perante um exercício apresentados em formas de generalizada e identificar se a descrição motiva os alunos a tentarem criar outra história que preserve o argumento matemático.

Por fim apresentamos as considerações finais do trabalho, elencando os desafios e possibilidades futuras para esta proposta.

Capítulo 1

Problematização e objetivo

A Matemática, expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. (Courant, 2000)

Iniciaremos nossa problematização com o seguinte exercício;

Dados dois pontos B e C pertencentes as retas r e s respectivamente, as quais são perpendiculares em A, tal que $\overrightarrow{AB} = nk$ e $\overrightarrow{AC} = ml$. Determine a distância \overrightarrow{BC} .

Veja que por mais que pareça simples o raciocínio, compreender a linguagem posta, ou seja, o que realmente está descrito não é uma tarefa tão trivial, mas por que se esse exercício é basicamente uma expressão do conhecido Teorema de Pitágoras? Seria natural uma pessoa conseguir ler esse exercício? O rigor da escrita é intencional ou é uma condição natural da linguagem matemática? É possível criarmos situações em que a maioria das pessoas consigam entender o que foi descrito?

Durante a graduação, era comum alguns de nossos professores nos dizerem “com este currículo, neste curso, dificilmente vocês aprenderão matemática, pois este currículo o transformou em um curso de se fazer contas”. Este fato nos intrigava, porém não conseguíamos compreender o que ele realmente estava querendo dizer com isso. Porém, foi durante o mestrado que descobrimos que não tínhamos compreendido a linguagem matemática. Mas estudamos matemática a vida toda, no ensino básico, fundamental, médio e na graduação de matemática, então porque não havíamos compreendido a linguagem matemática? Será que este problema é pontual, ou a maioria das pessoas também não compreenderam a linguagem matemática?

Os alunos que completaram o 9^o ano do ensino fundamental já estudaram Máximo Divisor Comum, o qual tem a seguinte definição:

Sejam dados dois inteiros a e b , distintos ou não. Um número inteiro $d > 0$ será dito um máximo divisor comum (*MDC*) de a e b , se possuir as seguintes propriedades:

1. d é um divisor comum de a e b , e
2. Se c é um divisor de a e b , então c divide d .

Analisando os exemplo dados, é de se esperar que seja totalmente passível de compreensão de um aluno que tenha completado o 9^o ano e que eles possam dar um exemplo e explicar como o exemplo escolhido satisfaz as condições do enunciado pois esse conteúdo fez parte de seu currículo. Porém no geral eles são capazes?

Seguindo essa linha de raciocínio, Boyer (1974) nos apresenta uma regra que se destinava ao cálculo da razão de progressões geométricas, apresentada por Euclides (século III a.C.) no livro IX de Os Elementos onde cita, “se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem”. Em linguagem mais acessível seria: Uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada de razão. Por mais que nossa língua se modifica de acordo com o tempo, podemos dizer que ler e compreender o que foi dito em ambos os enunciados é uma tarefa trivial?

Parafraseando Lima (2013) temos a seguinte definição de função: “Dados os conjuntos X , Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ único elemento $y = f(x) \in Y$ ”. Seria razoável admitirmos que os alunos que terminam o ensino médio compreendem essa definição de função? Ou que são capazes de ler, entender e conseguir formar uma ideia de resolução para os exercícios expostos abaixo?

Dado dois pontos A e B distintos, com uma distância m entre eles, qual é a maior distância que dois pontos C e D podem estar para que a distância de C e D ao ponto A fiquem sempre o dobro da distância de C e D ao ponto B .

Um objeto A , quando colocado em um recipiente B , com $x \text{ cm}^3$ de um líquido C tem um acréscimo de y centímetros em sua altura. Sabendo que a massa de A é de z gramas por centímetro cúbico, qual é a massa total do objeto A .

Se A vende m unidades de medida por dia a n unidades de valor a unidades de medida e , se a cada unidade de valor de aumento no preço implique e perder k clientes que consome em média $\frac{1}{2}$ unidades de medida cada. Qual deve ser o valor unidade de medida para que tenha a maior receita possível?

Fonte: Adaptação do autor.

Esses conteúdos, de acordo com a matriz curricular do Ministério da Educação, fazem parte do currículo dos alunos que completaram o ensino médio, portanto se espera que os estudantes, que já tenham terminado o ensino médio, consigam dar um exemplo explicando como o exemplo escolhido satisfaz as condições do enunciado, resolver esses exercícios, ou seja, que os alunos tenham compreendidos a linguagem matemática posta. Porém, se isso não for razoável de ser admitido, podemos concluir que a matemática ensinada em nossa educação básica não é suficiente para que os alunos compreendam a linguagem matemática.

1.1 Da língua à matemática

Todo o matemático utiliza a língua matemática em simbiose com sua língua natural, dotando os símbolos, de significados mais ou menos prenes... (Machado, 2011)

Nos primórdios, devido à natureza biológica do ser humano ter suas defesas físicas em desvantagens com outros animais, o ser humano para não ser extinto foi obrigado a se desenvolver como um ser social.

Com isso, faz se necessário a comunicação entre eles, inicialmente a comunicação se baseavam em meios semelhantes aos dos animais, isto é, por gestos e sons rudimentares. No entanto com o crescimento dos grupos, gestos e sons podiam ter significados diferentes e assim suas efetividades não eram suficientes para a unidade do grupo. Diante destas incoerências e das repetições, alguns gestos e sons se tornaram comuns, e com isso aquele grupo já era capaz de compreender seu sentido (Davis, 1979).

Com o passar dos tempos, grupos diferentes e com padrões de comunicações diferentes foram se unindo e constituindo outros grupos, mas o sentido e o padrão de comunicação dos grupos se diferenciavam um dos outros e assim, com o tempo, esses

costumes diferentes se mesclavam e surgiam um novo conjunto de sons e gestos que serviam de comunicações entres estes povos. Contudo quanto mais cresciam os grupos mais difícil se tornavam ter uma unidade.

Por mais que a comunicação fosse rudimentar, estes povos já tinham algumas noções lógicas e capacidade de distinções empíricas, que sem as quais seriam impossíveis a evolução, como por exemplo a “existência”, “unidade”, “partes”, “espaço” e “tempo”. As quais serviram de alicerces para a construção da linguagem.

Com o crescimento destes grupos alguns gestos se tornaram representações de sons ou representados por eles e assim construíram uma relação de equivalência entre eles, como descreve Machado (2011) afirmando que através das concepções lacanianas de *alíngua* (de modo literal, não há, em *alíngua*, duas frases, duas palavras, dois sons que sejam idênticos) e a *matema* (condição de possibilidade da comunicação através da *alíngua*) que possibilita essa relação, pois são no contexto destas polarizações que as funções de Matemática e da Língua Materna podem ser melhor compreendidas, sendo que para Lacan o mais importante é o significante.

Para o processo de construção da língua, Saussure (2006) afirma que a língua parte do princípio de relações entre signo, significado e significante. Ou seja, o signo tem uma natureza psíquica e é a união do sentido e da imagem acústica, do significado e do significante. Entretanto o significado é o sentido, o conceito ou mesmo a ideia de alguma coisa, isto é, a representação mental de algo e, o significante, pode ser entendido como a imagem acústica.

Admitindo assim que a comunicação humana é uma forma de interação social entre indivíduos e como a expectativa de vida da época era relativamente curta, estes gestos e sons começaram a ser representados por garatujas em formas de símbolos, em especial o símbolo de uma unidade (o risquinho). Neste sentido, as ideias lógicas e a convivência social, juntamente com a capacidade de caracterização criaram a língua escrita e a matemática, e, portanto, se tornaram seus alicerces de origem, sendo a diferença o rigor lógico.

Após se estabelecerem civilizações a língua escrita começou a tomar forma, e com o avanço das relações sociais nestas civilizações surgiu a ideia de hierarquia e líder, e este que era, de início, definido apenas por ser o mais forte, passa, neste momento a ter uma nova forma de determiná-lo, pois, a força física já não era suficiente para o estabelecer, e

assim a concepção de domínio necessitava de algo a mais e, este algo era a capacidade de compreender o meio ambiente.

Agora com as lideranças estabelecidas, o líder deve ter compreensão de espaço, tempo e unidade. No início, com um grupo não muito grande era possível seu controle através da memória, consciência e desejo pessoal dos líderes. Porém com o crescimento do grupo, fica impensável seu controle para a definição de seus afazeres e a própria noção da dimensão dos grupos. Surgem assim, a necessidade de escritas para qualificar e quantificar o grupo.

Miorim (1998) afirma que a matemática surgiu da necessidade do homem compreender o mundo e, com o auxílio da escrita, ela ganhou um caráter formal de representação própria e, essa representação tem finalidade de nos mostrar o melhor dos caminhos a se escolher. Assim, segundo a autora, a matemática surgiu pela necessidade de transmitir com segurança a compreensão do sujeito e do espaço tornando-a uma linguagem universal do poder, ganhando importância no dia a dia.

1.2 Uma breve história sobre o ensino de matemática: Os exercícios como estratégia de ensino

A resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de ‘Rhind’. Polya (1995).

Para esse trabalho, compreendemos “exercícios” como definido pelo dicionário Houaiss, ou seja, “ato de exercer ou exercitar; uso, prática para aperfeiçoar ou desenvolver uma habilidade, qualidade, capacidade etc”. No caso da matemática, atividade prática de reflexão e análise de argumentos com objetivo de aperfeiçoar ou desenvolver habilidades matemáticas. Assim, um exercício pode ser representado de maneira escrita ou não, geralmente em forma de teoremas, lemas, proposições, problemas, inequações, etc.

Ao longo da história, podemos notar que os exercícios sempre foram as ferramentas usuais como forma de ensinar a matemática. Nesse sentido, Roque (2012) afirma que “a matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas”. Já Miorim (1998) reforça essa ideia mostrando exemplos do ensino de Matemática no Egito, onde se inventavam maneiras de ensinar matemática às crianças, ensinando-as através do

jogo e da diversão, subdivisão de maçãs entre outras formas junto com os rudimentos da escrita.

Com o passar dos anos outras matemáticas foram surgindo e os exercícios continuaram a ser a principal ferramenta fundamental para seu ensino, porém começou a se questionar as naturezas e formas dos exercícios, surgem a hipótese de que os exercícios deveriam ser motivadores e não somente puramente matemáticos, os quais tendiam a serem de natureza cotidiana, descrição dos fenômenos naturais ou filosóficos. Miorim (1998) nos traz um recorte que reforça esses acontecimentos, afirmando que, para Platão, “o ensino de Matemática no nível elementar deveria evitar os exercícios puramente mecânicos, propor problemas adequados à idade das crianças e ser desenvolvido de maneira lúdica, por meio de jogos”.

Um dos motivos do ensino de matemática se basear nos exercícios é que, segundo Roque (2012), com eles se torna possível reinventar o ambiente “problemático” no qual os conceitos foram criados, e se for capaz de reproduzir esses conceitos torna-se possível compreender seus conceitos, pois as situações que motivaram os matemáticos são problemas em um sentido muito mais rico.

Diante disso, de acordo com Roque (2012) era comum encontrarmos exercícios em formas de problemas os quais, os procedimentos de sua resolução, vinham descrito como se descreve uma receita. A autora afirma ainda que, o papel da história da matemática pode ser justamente exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram e a fim de que possamos entender melhor o sentido de seus conceitos.

Já “com relação ao aspecto educacional, podemos dizer que foi na escola filosófica de Pitágoras que a Matemática, pela primeira vez, foi introduzida na educação grega e reconhecida como um elemento de grande valor formativo” (Miorim, 1998) e foi devido a formação desses filósofos que segundo a autora, “deu o impulso para as futuras inovações pedagógicas. Isso seria alcançado, na segunda metade do século V a.C.[...] pelos Sofistas (Miorim, 1998) .

Os sofistas se baseava na Paideia e por ela determinava o processo de educação e, seu ensino buscava preparar seus alunos para uma vida prática/política. Sua narrativa se construía pela boa argumentação, levando a sofística a ser reinterpretada como retórica. Miorim (1998) afirma que “independentemente da profundidade com que os estudos matemáticos eram desenvolvidos pelas propostas dos sofistas, a eles é que devemos

a popularização da Matemática, o reconhecimento de seu valor”, ainda que a matemática nesse momento estivesse presente apenas nos estágios mais avançado de estudo.

A prática de ensino sofistas, era a educação intelectual, ou seja, as atividades físicas não eram seu objeto de estudo, apesar de ser um fator muito importante devido as constantes batalhas. Miorim (1998) afirma ainda que para os sofistas esses estudos eram particularmente importantes por sua aplicação prática, e deveriam ser desenvolvidos até ”o grau em que isso servia à formação do espírito”. Contudo, foram os sofistas que colocaram a primeira ruptura do homem para com a religião.

Para a efetivação do ensino, os intelectuais (professores) se deslocavam de cidades em cidades oferecendo seus ensinamentos através de compensação financeiras e, se contratado, ficavam ali o tempo necessário para a formação proposta, um tipo de mestre-discípulo. Sua metodologia era baseada principalmente no *logos* ou discurso, assim para a matemática, podemos deduzir que os exercícios eram explanados pelo diálogo, através da análise de argumentos e escolhidos aqueles com possibilidades tangíveis, se ancorando principalmente na geometria e aritmética (Miorim, 1998).

Segundo Roque (2012), foi “a partir do final do século V a.E.C., Platão e Aristóteles buscaram propor maneiras de selecionar os tipos de afirmação possíveis, distinguindo os raciocínios falsos dos corretos e estabelecendo critérios de verdade” o que possibilitou a Aristóteles desenvolver a lógica matemática, no qual uma cadeia de conclusões tudo deve decorrer daquilo que foi dito anteriormente, sem que haja contradição no interior do raciocínio. Posteriormente, baseando-se em Euclides foi que a matemática abstrata, a que faz uso de demonstrações ganha força.

Com o passar dos anos, e com a introdução da álgebra, a matemática teve um salto qualitativo, contudo ficou ainda mais difícil sua compreensão e conseqüentemente seu ensino, tornando muito árduo seu ensino através da metodologia sofística. Miorim (1998) esclarece que Pestalozzi em 1826 lançou o livro *Introduction to algebra upon the inductive method of instruction*, com o objetivo de possibilitar fazer a transição da aritmética à álgebra tão gradual quanto possível, propondo um estudo mais intuitivo, mais ligado ao concreto e baseado no desenvolvimento da criança, fortalecendo assim, o início das discussões sobre as novas possibilidades de facilitar o ensino da matemática.

1.3 O ensino de matemática no Brasil: Século XX e XXI

Sobre o ensino de Matemática no Brasil podemos destacar que o Brasil não fez a sua história sozinho, e sim vem acompanhando os movimentos que ditam as tendências mundiais, que segundo dentre eles podemos destacamos o movimento da Escola Nova, também chamada de Escola Ativa ou Escola Progressiva, que foi um movimento de renovação do ensino, emergindo no fim do século XIX e XX. O Movimento da Matemática Moderna, que foi um movimento internacional do ensino de matemática surgindo na década de 1960 e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática e, os movimentos de universalização e inclusão na educação básica, dando origem a Lei de Diretrizes e Bases em 1996, os parâmetros Curriculares e o projeto Escola Ciclada (Miorim, 1998).

O movimento da Escola Nova foi um marco importante para a organização do ensino de matemática no Brasil, pois segundo Miorim (1998) foi na Reforma Francisco Campos com o ministro da educação e saúde, no início da Era Vargas e através da lei de 1931, que funde-se as então disciplinas de aritmética com a álgebra e a geometria transformando-as na disciplina de matemática e foi com esse movimento que cria-se o Conselho Nacional de Educação e a organização do ensino secundário e comercial, divide o curso secundário em dois ciclos de cinco e dois anos, respectivamente, o primeiro fundamental, e o segundo complementar, orientado para as diferentes opções de carreira universitária.

Já sobre o Movimento da Matemática Moderna (MMM), Wielewski (2008) afirma que:

Os defensores da Matemática Moderna (MM) acreditavam que poderiam preparar pessoas que pudessem acompanhar e lidar com a tecnologia que estava emergindo. Dessa forma, as propostas veiculadas pelo MMM inseriram no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia, transformações geométricas.

Durante o (MMM) Gomes e Araújo (2005) afirmam que, “devido a depreciação da função, em meados 1960, os professores precisam de recursos que suavizem as atribuições docentes, e uma das estratégias para isso é transferir ao livro didático a tarefa de preparar aulas e exercícios”. Diante disso, nota-se uma preocupação com a forma se

ensinar matemática, como Wielewski (2008) corrobora:

Eles pensaram no desenvolvimento de atividades que vão gradativamente sendo mais elaboradas, ou seja, começam com atividades corporais, depois de manipulação simples, de manipulação com registro, até atingir o momento de registro sem recorrer mais à manipulação de objetos, o que exige certa abstração.

Diante disso, assim, surgem as dúvidas: Como devemos ensinar para resolver problemas, ensinar sobre resolução de problemas ou ensinar através da resolução de problemas? Não existindo um consenso sobre como abordá-lo em sala de aula e nem se isso é suficiente para a compreensão da linguagem matemática.

Dentro dos movimentos, podemos notar a importância dos congressos nas redefinições da matemática ensinada e também que dá resolução de problema, agora presente nos livros didáticos os quais tornaram-se o alicerce no modo de como exercitamos. Polya (1995) nos mostra um caminho de um como, o que seria através da Heurística, pois “ao ler e analisar o enunciado da questão, o aluno deve compreender a situação proposta, ter claro qual a sua finalidade, o caminho a ser seguido é “os fins indicam os meios”, assim podemos ver sua importância para o como.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio MEC (2000) orienta que a matemática deve ser trabalhada através da problematização, com o objetivo de nortear os conhecimentos a serem trabalhados com os alunos, onde algumas habilidades e competências a serem desenvolvidas e ser verificadas, destacando-se que o aluno deve ser capaz de:

Ler e interpretar textos de Matemática, transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica e vice-versa, exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta, produzir textos matemáticos adequados.

Ainda nos PCNEM, podemos verificar que a Matemática se relaciona com todas as capacidades elencadas pelas competências da matriz do Exame Nacional do ensino médio (ENEM), a qual visa à formação pessoal cociente, a saber:

Capacidade de expressão em diferentes linguagens, inclusive a língua materna, a Matemática, as artes, entre outras; Capacidade de compreensão de fenômenos, que incluem desde a leitura de um texto até a “leitura” do mundo; Capacidade de contextualizar os conteúdos disciplinares, de problematizar, de enfrentar situações-problema; Capacidade de argumentar de modo consistente, de desenvolver o pensamento crítico; e Capacidade de sintetizar, de decidir, após as análises argumentativas, e elaborar propostas de intervenção solidária na realidade. (Machado, 2011)

Contudo, em nossas observações sobre os materiais de orientações de governo, não

encontramos estudos apontando o motivo da escolha dos exercícios presentes nos materiais de suporte ao ensino (livro didático, apostilas, etc), nem orientações de como trabalhar com os exercícios para que os objetivos acima sejam alcançados.

1.4 Matemática: linguagem e política

Matematizar é um processo natural, inerente a todo ser humano, que deve ser desenvolvido à medida que este tome consciência de um evento ou acontecimento matemático e construa para ele diferentes formas de convencimento. (Powell e Bairral, 2006)

Podemos notar que, no decorrer da história, a evolução da matemática se deve a *polis* e que com a lógica, a matemática torna uma ciência de grande importância para as tomadas de decisões (Miorim, 1998). Assim, ela se torna elemento primordial para compreensão das sociedades, pois possibilita “prever o futuro”, ou seja, nos auxilia a escolher o melhor caminho para chegar a um objetivo desejado. Contudo, algo que possa “prever o futuro” deve ser controlado, e esse controle se dá através do ensino.

No mesmo sentido, Roque (2012) assevera que o historiador da matemática grega Bernard Vitrac, em seus estudos, diz que “a correlação entre matemática, números, equilíbrio e justiça, entre direito e cálculo, era lugar-comum nas sociedades antigas”. Diante disso Roque (2012) afirma que a matemática evolui como uma ciência para justiça social e política pois, a “controvérsia movimentava a polis e a capacidade de persuasão”. Ou seja, a matemática carrega um grande poder de convencimento, tanto em sua própria essência, como para com as outras observações, e com isso podemos afirmar que a matemática é linguagem que valida o método científico.

Sobre o uso da matemática como objeto de persuasão, Roque (2012) reforça que a matemática, desde os tempos antigos, estava no centro dos sistemas de gestões políticas, os quais utilizavam a matemática como um dos principais meios de gerir a razão.

Dentre as técnicas de persuasão, as regras da demonstração e o apelo a uma lógica que busca o verdadeiro, própria do saber teórico, passaram a ter especial destaque e quem soubesse persuadir sempre poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira. (Roque, 2012)

Como vimos, a matemática é uma ferramenta para o convencimento e o ensino de matemática tem se pautado em exercícios, assim sobre a matemática ser significativa,

Skovsmose (2007) afirma que, “estimando o número total de exercícios que um estudante deve resolver durante o ensino fundamental e médio, provavelmente chegaríamos a um número em torno de 10.000” e que, esses exercícios nada mais são do que uma sequência de comandos que dificilmente será um convite a criatividade, logo seria essa uma das formas de uso da matemática como controle social (controlar o poder do convencimento) ou um relato do fracasso do modo operante de se ensinar matemática?.

Por outro lado, se o ensino de matemática é todo baseado nos exercícios, como podemos ajudar o estudante a aprender algo da essência da matemática? Skovsmose (2007) corrobora que, em geral, o ensino de matemática é feito da maneira tradicional, isto é, “eu faço minha própria tentativa, e para isso eu uso o material de ensino dado, quase que página por página e outras espécies de materiais são usadas somente como complementos”, fato que ganhou mais força com o Movimento da Matemática Moderna e adoção dos livros didáticos.

Atualmente, podemos notar um uso muito comum para a matemática, o uso como um “filtro”, no qual ela não é pensada por suas aplicações e importâncias, mas sim como um modo de medir os mais capacitados ou não em seleções (vestibulares e concursos, etc.). Este fato tem mudado a forma de como as pessoas veem a importância de se aprender a matemática, focando assim seu estudo para conseguir romper o filtro.

Diante das situações levantadas, abrimos as discussões: Como é definido a presença de um exercício em um material didático? Qual é a contribuição que esse exercício fornece para o aprendizado? Afinal, porquê estamos resolvendo esse exercício? Porque realmente estou estudando matemática? Teria sentido discutir sobre mercado financeiro sem matemática? como posso tornar a matemática significativa? Estas indagações vão nos conduzindo a outras e outras, porém são através delas que construímos essa proposta.

1.5 Contextualização e Objetivo

Além da lógica, a Matemática é a ciência que valida o método científico e que, o método científico é utilizado para explicar o funcionamento da natureza e da sociedade em geral, através de pesquisas e comprovações de um determinado conteúdo. Temos ainda o fato de que todas as pessoas, dentro da normal, vão à escola e todas as escolas contém o ensino de matemática em seu currículo e que, as pessoas fazem parte da natureza e da

sociedade em geral, então por quê esta linguagem é de tão difícil acesso?

Os dados das avaliações da Prova Brasil 2005-2015 e do PISA MEC (2018), nos mostram que em geral os nossos alunos, da educação básica, não estão apreendendo suficientemente o que se espera de matemática, pois é em matemática que verificamos os menores desempenho, logo faz se necessário repensarmos o ensino da referida disciplina.

Segundo Sant’anna (2003) “não existe ramo da matemática, por mais abstrato ou imaginário que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”. Assim, admitimos como tese que, o fato de compreender a linguagem matemática auxilia a compreender a matemática e assim para maior eficácia na aprendizagem de matemática, seu ensino deve transitar da descrição formal em língua natural para a descrição sintética em linguagem matemática e mostrar que a linguagem sintética matemática é um modelo aplicável em várias situações.

Diante disso, temos como objetivo construirmos um método de ensino para possibilitarmos trabalhar o ensino de matemática através da compreensão da linguagem matemática de forma complementar ao método de ensino praticado.

Capítulo 2

Proposta de intervenção

Ao procurar realmente ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos. (Polya, 1995)

Nossos materiais didáticos trazem os mais variados tipos de exercícios, entre eles, problemas, aplicações lúdicas, inequações etc. Verificamos que o ensino de matemática sempre foi pautado na resolução de exercícios, porém dependendo do modo de abordagem somente resolver os exercícios não garante uma aprendizagem significativa e tão pouco a apropriação da linguagem matemática. Ao ler e entender a proposta de um exercício, o aluno deve saber qual o objetivo da questão, analisar os dados disponíveis em seu enunciado e articulá-las com a teoria que ele conhece, porém isso só tem sentido se o exercício presente no material didático fora colocado lá de forma planejada e com objetivos definidos.

Podemos ver que os materiais didáticos, não trazem esse estudo, e que os exercícios presentes foram colocados simplesmente por uma percepção empírica do escritor, assim admitimos que para efetividade do ensino, quando o professor seleciona um exercício ele tem que ter claro o objetivo esperado com tal ato. Um exercício está carregado de informações, a sua determinação deve ser precedida de seu objetivo. Não tem sentido resolver um exercício simplesmente por estar resolvendo, sua resolução deve ser intencional, direcionada e com objetivos claros do que se espera com ela.

Polya (1995) nos mostra uma direção para o ensino através da resolução de problemas e após isso muito tem se discutido o ensino da matemática através da resolução de problemas, no entanto destacamos que apesar do ganho que o ensino tem com tal

procedimento, ele não é suficiente e, pensando nisso é que propomos esse algo a mais.

Para a postura do docente recomendamos os dez mandamentos do professor de matemática descrito por Polya (1987) e que Elon Lages Lima faz alguns comentários, nos servindo de orientador para entendermos a postura que o professor deve ter para a efetividade do ensino de matemática e, conseqüentemente, dessa proposta. Assim, essa proposta vai ao encontro com essas observações, nos oferecendo mais uma ferramenta para lidarmos com o desafio de ensinar matemática.

Portanto nossa proposta de intervenção será **o ensino de matemática através da compreensão da linguagem matemática**, para possibilitar termos um ensino significativo utilizaremos a metodologia baseada em:

Resolver o exercício, em diversos tipos de abstrações, transitando da descrição analítica formal em língua natural para a descrição sintética em linguagem matemática e, mostrar que a linguagem sintética matemática é um modelo aplicável em várias situações.

Para facilitar a compreensão do que é proposto, concebemos como;

Resolver: Decompor-se em partes compreensíveis a fim de compreender o todo, onde estas partes podem ser validadas por meio de axiomas, lemas, teoremas ou proposições.

Exercício: Ato de exercer ou exercitar; uso, prática para aperfeiçoar ou desenvolver uma habilidade, qualidade, capacidade etc. No caso da matemática, atividade prática de reflexão e análise de argumentos com objetivo de aperfeiçoar ou desenvolver habilidades matemáticas.

Abstrações: Operação intelectual em que um objeto de reflexão é isolado de fatores que comumente lhe estão relacionados na realidade.

Descrição formal em língua natural: Descrição que se desenvolve espontaneamente no interior de uma comunidade, e que se opõe a língua artificial (idioma construído e definido por um pequeno grupo de pessoas, em vez de ter evoluído como parte da cultura de algum povo).

Descrição sintética em linguagem matemática: Representação oral ou escrita com objetivo de passar de proposições provadas a outras que são a sua consequência necessária através de um sistema formal de símbolos estabelecidos em função de lógica matemática,

axiomas, regras e leis que estruturam o enunciado.

2.1 Método proposto

Quando se trata de mudança, é importante que o professor/a tenha a chance de refletir/discutir sobre as metas que ele/ela quer atingir, o que significa determinar a priori o novo caminho a seguir. (Cavalcanti, 2008)

Por acreditarmos que a resolução de um mesmo exercício em diversos tipos de abstrações possibilita o aluno a aquisição e compreensão da transição entre a linguagem natural e a linguagem matemática definiremos uma metodologia de como trabalhar essa proposta, contudo o que apresentaremos é apenas uma forma das diversas possíveis e a organizaremos duas etapas sendo elas, **administrativa** e de **ensino**.

A etapa administrativa se caracteriza por ser um trabalho de responsabilidade exclusiva do professor, ou seja, é o momento em que o professor prepara o material que vai ser trabalhado em sala, planeja a aula.

Para isso o professor deve escolher um exercício que possibilite introduzir o conteúdo clássico previsto e chamamos essa ação de **Seleção**. Feito isso o professor deve transformar esse exercício selecionado de maneira que ele se assemelhe com uma descrição de um fato, devendo se atentar com a preservação do argumento matemático, e chamamos essa ação de **Reescreva**.

A etapa de ensino se caracteriza pela execução da etapa administrativa e a relação professor e aluno, podendo ser executada em sala ou não. Essa é composta por: **Sintetize** → **Matematize** → **Generalize** → **Formalize** → **Aplique /Treine**.

A execução da etapa de ensino deve ser feita em conjunto entre professor e aluno, cabendo ao professor analisar a sintonia o tempo todo, e auxiliando mais incisivamente nos momentos de dificuldades e tentando agregar o máximo possível de participação na construções dos raciocínios elencados.

Para melhor entendimento, apresentamos os itens individualmente descrevendo as ações previstas para cada momento;

2.1.1 Etapa administrativa: Selecione

Escolha exercícios que trabalhem a maior quantidade de ideias sobre o conteúdo a ser explicado ou da seção que está sendo estudada no material didático a ser utilizado, em geral os problemas são mais interessantes, porém não se limite a eles.

2.1.2 Etapa administrativa: Reescreva

Reescreva este exercício em língua materna, ou seja, reescreva-o retirando as os símbolos matemáticos, dando personagens às abstrações ali postas, prezando pelo rigor da língua, nesse sentido podemos dizer que os diversos exercícios passarão a ser apresentados praticamente como um problema, ou seja, em forma de uma descrição de um fato. Destacamos que quanto mais a descrição for próxima a realidade dos alunos, maior a possibilidades de despertar o interesse pelo assunto estudado.

2.1.3 Etapa de ensino: Sintetize

Esta etapa é o momento em que o professor executa o seu planejamento, ou seja, ministra a aula. De posse do exercício reescrito, o da etapa administrativa: Reescreva, juntamente com os alunos, comece a transição da linguagem natural para a linguagem matemática, porém não abstraia todas as ideias de uma vez, o importante aqui é visualizar o processo de transição da linguagem assim, apenas exclua as premissas que não sejam necessárias para a validação do argumento aproveitando para trabalhar a coesão do texto e de como manter a coerência, reordenando as ideias. Por fim, comente sobre as possibilidades de resolução da problema, mas não é necessário resolve-lo.

2.1.4 Etapa de ensino: Matematize

Nesse momento reescreva o exercício da etapa anterior, substituindo os substantivos, verbos e/ou predicados que representam variáveis e constantes essenciais por símbolos usuais da linguagem matemática, e resolva o problema, para isso, recomenda-se que use os passos descritos por Polya (1995) descrito abaixo:

Tabela 2.1: Passos de Polya para resolução de problemas

Passos	Análises a serem consideradas
COMPREENSÃO DO PROBLEMA	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou Contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. É possível anotá-la?
ESTABELECIMENTO DE UM PLANO	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. E possível utiliza-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua resolução. E possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? E possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? E possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
EXECUÇÃO DO PLANO	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
RETROSPECTO	É possível verificar o resultado? Possível verificar o argumento? E possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? E possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

2.1.5 Etapa de ensino: Generalize

Agora é o momento de reescrever o exercício com abstração total em linguagem matemática, independentemente de variáveis fixas. Resolva o exercício e, em sua resolução, mostre que os mecanismos usados no passo anterior também podem ser utilizados aqui, apesar de serem apresentados em linguagens ligeiramente diferentes. Aqui o objetivo é criar modelos para mostrarmos como os são construídos e, no quinto passo mostrarmos como eles podem ser aplicados.

2.1.6 Etapa de ensino: Formalize

Mostre como e onde são usadas as operações matemáticas que deram suportes para a resolução do exercício. O objetivo é evidenciar e treinar as propriedades, definições, teoremas, etc, que são utilizados nas resoluções, é o momento em que intruduzimos os conteúdos clássicos aos alunos.

2.1.7 Etapa de ensino: Aplique/Treine

Para treinar podemos ter várias possibilidades, o objetivo é destacarmos a possibilidade de mostrar que a linguagem sintética matemática é um modelo aplicável em várias situações, portanto recrie vários outros problemas semelhantes ao do primeiro passo através da compreensão da linguagem generalizada do terceiro passo.

Uma maneira recomendada é solicitar que cada aluno mostre um acontecimento que seja modelado pela síntese, do terceiro passo, e posteriormente comparar os diversos tipos de aplicações do modelo criados pelos alunos.

Para avaliações, podemos elencar a possibilidade de trabalhar exercícios reescritos, se apresentando nas formas do primeiro, segundo ou terceiro passo, contendo no mínimo duas versões (passos) do mesmo exercício, em ordem aleatória ou, a possibilidade de solicitar aplicações de sínteses, ou vice e versa.

2.2 Algumas possibilidades: Exemplo 1

Neste tópico mostraremos exemplos de como podemos trabalhar com a proposta apresentada, faremos comentários em cada passo para facilitar o entendimento dos procedimentos.

Para a eficiência desta metodologia é importante darmos ênfase em exercícios que englobem o máximo do conteúdo explicado e sejam possível trabalhar sua abstração de forma gradativa, pois se o exercício for de alta complexidade ele pode desanimar os alunos.

Neste exemplo temos como objetivo introduzir os conceitos de Geometria analítica, abordando conceitos clássicos, como distancia entre dois pontos e a equação de um círculo, através da compreensão de um exercício.

2.2.1 Etapa administrativa: selecione

Selecionearemos como exemplo, a questão 148 do ENEM edição 2018 caderno amarelo, pois Atualmente o ENEM é o “termômetro” do caminho que o ensino de matemática deva tomar.

Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperaturamenos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

- A) 30.
- B) 40.
- C) 45.
- D) 60.
- E) 68.

2.2.2 Etapa administrativa: Reescreva

Podemos apresentar esse exercício em uma linguagem mais natural da seguinte forma:

A casa de Dona Maria e de Dona Tereza haviam se incendiado devido a uma sobrecarga elétrica. A casa de Dona Maria era de tábuas e a de Dona Tereza de alvenaria, quando os bombeiros chegaram notaram que essas casas estavam a uma distância de cerca trinta metros uma da outra, e que a casa de Dona Maria por ser de madeira estava com uma temperatura mais alta do que a de Dona Tereza, assim os bombeiros decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro na casa de Dona Maria, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro a casa de Dona Tereza, a de temperatura menos elevada.

Como tinha dois caminhões pipas, resolveram se posicionar de maneira que ficassem com a maior distância possível entre eles. Nestas condições, a maior distância, em metro, que os dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

Veja que após reescrito a aparência do exercício se assemelha de um relato, com um questionamento final sobre uma consequência das condições apresentadas no relato, o que o torna muito interessante aos alunos, pois descreve um acontecimento possivelmente presenciável em seu dia a dia. Contudo, resolver ele nessa forma torna um trabalho penoso, logo isso nos possibilita mostrar como podemos iniciar a transição para a linguagem matemática.

2.2.3 Etapa de ensino: Sintetize

A casa de Dona Maria e de Dona Tereza haviam se incendiado devido a uma sobrecarga elétrica. A casa de Dona Maria era de tábua e a de Dona Tereza de alvenaria, quando os bombeiros chegaram notaram que essas casas estavam a uma distância de cerca trinta metros uma da outra, e que a casa de Dona Maria **por ser de madeira** estava com uma temperatura mais alta do que a de Dona Tereza, assim os bombeiros decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro na casa de Dona Maria, **de temperatura mais elevada**, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro a casa de Dona Tereza, **a de temperatura menos elevada**. Como tinha dois caminhões pipas, resolveram se posicionar de maneira que ficassem com a maior distância possível entre eles. Nestas condições, a maior distância, em metro, que os dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

Note que podemos suprimir as partes em negrito sem perder o argumento matemático, claro que a supressão pode ser mais radical, porém recomendamos que essa primeira ação seja cautelosa, pois o objetivo não é só chegar na solução do problema, mas sim entender a linguagem matemática. Com isso, necessitamos fazer pequenos ajustes no texto para manter o rigor da língua portuguesa, principalmente a coesão, vejamos:

Os bombeiros notaram que as casas em chamas estavam a uma distância de cerca trinta metros uma da outra, e que a casa de Dona Maria estava com uma temperatura mais alta do que a de Dona Tereza, assim os bombeiros decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro a casa de Dona Maria, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro a casa de Dona Tereza. Diante disso, eles resolveram se posicionar de maneira que ficassem com a maior distância possível entre eles. Nestas condições, a maior distância, em metro, que os dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

2.2.4 Etapa de ensino: Matematize

Podemos notar que a sintetização proporcionou melhor visualização do argumento matemático, porém da maneira que se apresenta ainda pode ofuscar informações importantes para a construção do raciocínio, por isso iremos dar um tratamento mais matemático a ele. Recomenda-se utilizar em algum momento uma forma similar a forma original do exercício, mas o momento em que será possível depende de como era a forma original do exercício. Neste caso em particular, usaremos ela nesse momento, exceto pelas suas alternativas, pois não achamos relevantes para o treinamento.

Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

Agora vamos usar os passos descritos por Polya para resolver o exercício, o evidenciaremos apenas nesse exemplo, pois caso contrário os exemplos ficarão muito extenso, vejamos; Compreensão do problema.

Para esse problema, temos que, a incógnita é a maior distância entre os bombeiros. O dado fornecido é a distância de A e B ser 30 m. Sua resolução deve levar em consideração a condicionante de que a distância de um bombeiro ao foco A fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B.

Estabelecendo um plano.

Já fizemos a reformulação do problema e como sabemos que esse exercício é semelhante a alguns de geometria analítica que analisam distâncias, já resolvido antes, vamos criar mentalmente uma “imagem” da situação descrita, ou seja, uma imagem da situação descrita em um plano cartesiano. Vamos introduzir essa visualização de tal modo que uma das casas esteja na origem e a outra sobre o eixo das abcissas, assim as coordenadas de $A = (0, 0)$, de $B = (30, 0)$, e para cada posição de bombeiros, que chamaremos de C e D, teremos as localizações $C = (x_1, y_1)$ e $D = (x_2, y_2)$

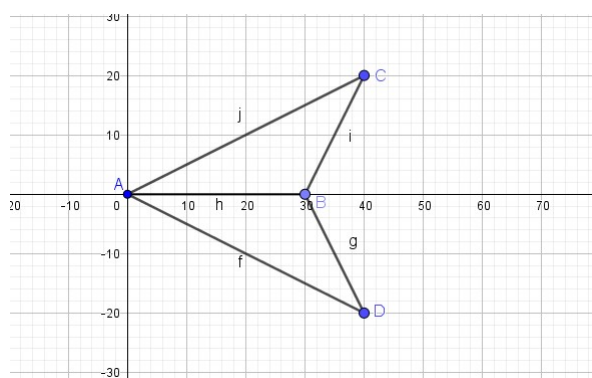


Figura 2.1: Situação transcrita para o plano

Executando o plano.

Sabendo que as coordenadas dos pontos são;

$A = (0, 0)$, $B = (30, 0)$, $C = (x_1, y_1)$ e $D = (x_2, y_2)$.

Admitindo a condicionante, e como sabemos que é suficiente calcular a distância de apenas um dos pontos temos que

$$d(D, A) = 2d(D, B)$$

Dai, calculando as distancias de ambos lados,

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-30)^2+y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e simplificando,

$$x^2 + y^2 = 4[(x-30)^2+y^2]$$

Dai,

$$3x^2 + 3y^2 - 240x + 3600 = 0$$

Completando quadrados e escrevendo a equação do círculo, temos,

$$(x-40)^2 + y^2 = 20^2$$

Veja que, a localizados de ambos os bombeiros podem estar em qualquer lugar do arco deste círculo, logo a maior distância que podem ficar é quando estão nas extremidades do diâmetro, ou seja a maior distância é de 40 metros.

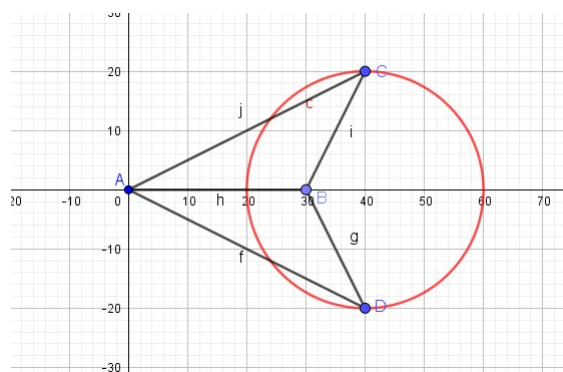


Figura 2.2: Possíveis localização dos bombeiros

Retrospecto

Inicialmente o exercício parecia um pouco confuso, porém após isolar os dados, a condicionante e a incógnita foi possível perceber que o exercício se tratava de distância, e como já havíamos estudamos distâncias por meio das técnicas de geometria analítica,

criamos uma imagem mental dos acontecimentos e assim montamos um plano. Em nosso plano, colocamos a imagem idealizada em um sistema de coordenadas, e assim por conveniência colocamos um dos pontos na origem e o outro nos eixos das abcissas. Com o plano montado, ficou fácil executar-lo, pois nossa condicionante era clara, assim partindo dela montamos uma equação que descrevia a condicionante e que após análise soubemos que se tratava de uma equação de um círculo.

Agora com todos os dados construídos bastavam interpreta-los, assim visualizando a equação do círculo notamos que ele descrevia todas as posições possíveis que satisfaz a condicionante, ou seja, que os bombeiros poderiam ficar de forma que a distância para o ponto A fosse sempre o dobro da distância para o ponto B . A partir disso, como a incógnita era a maior distância, ficou fácil de ver que a maior distância era o diâmetro do referido círculo.

Notamos que é possível chegar ao resultado por um caminho diferente, porém ele pode se tornar muito penoso, e que perceber isso em um instante pode não ser uma possibilidade tão trivial quanto pareça. Por fim, mostraremos no próximo passo que é possível utilizar o resultado, ou o método, em vários outros problemas.

2.2.5 Etapa de ensino: Generalize

Agora já resolvido o problema, o reescreveremos de maneira totalmente generalizada, no qual ele pode servir para descrever várias outras situações, em particular a própria já resolvida, vejamos;

Dado dois pontos A e B distintos, com uma distância m entre eles, qual é a maior distância que dois pontos C e D podem estar para que a distância de C e D ao ponto A fiquem sempre o dobro da distância de C e D ao ponto B .

Veja que esse exercício posto nesta linguagem pode ser interpretado como o passo de Polya (1995) “É possível reformula-lo ainda de outra maneira?”, do estabelecimento do Plano, com um objetivo a mais, apresentar uma linguagem geral da matemática para um exercício qualquer.

Para sua resolução, é importante utilizarmos os dados e procedimentos do passo anterior, pois com isso facilitará a visualização da transição da linguagem, uma vez que se apresentado um exercício nessa linguagem dificilmente alguém se considera apto a resolve-lo.

A primeira pergunta a ser feita é. O que o exercício tem de diferente do exercício anterior? Veja que, por mais que não seja evidente, nesse exercício a única diferença matemática é a não fixação de uma distância para os pontos A e B, mas tentar descobrir isso por conta própria é uma das partes mais importantes do raciocínio. Dito isso, podemos reproduzir a solução do passo anterior, agora com uma distância variável.

Dito isso, agora sabemos que as coordenadas dos pontos são;

$$A = (0, 0), B = (m, 0), C = (x_1, y_1) \text{ e } D = (x_2, y_2).$$

Admitindo a condicionante, e como sabemos que é suficiente calcular a distância de apenas um dos pontos, temos que

$$d(D, A) = 2d(D, B)$$

Dai, calculando as distancias de ambos lados,

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-m)^2+y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e simplificando,

$$x^2 + y^2 = 4[(x-m)^2 + y^2]$$

$$x^2 + y^2 = 4[x^2 - 2mx + m^2 + y^2]$$

$$3x^2 + 3y^2 - 8mx + 4m^2 = 0$$

Dai, completando quadrados, ou seja, somando $\frac{4m^2}{9}$ em ambos os lados

$$3x^2 + 3y^2 - 8mx + 4m^2 + \frac{4m^2}{9} = \frac{4m^2}{9}$$

Assim, escrevendo a equação do círculo, temos,

$$\left(x - \frac{4m}{9}\right)^2 + y^2 = \frac{4m^2}{9}$$

Portanto, os pontos C e D devem pertencer ao arco desse círculo e, assim a maior distância que dois pontos C e D podem estar para a distância de C e D ao ponto A fiquem sempre o dobro da distância de C e D ao ponto B é quando C e D é o diâmetro desse círculo, ou seja $\frac{4m}{3}$.

2.2.6 Etapa de ensino: Formalize

Nesse momento mostraremos a importância da teoria matemática que possibilitou a chegarmos a resolução.

Inicialmente, na construção do plano de resolução de Polya, utilizamos a ideia de pontos no plano, idealizadas por René Descartes, ou seja, o plano Cartesiano. Assim, compreendemos Plano Cartesiano como um objeto matemático plano e composto por duas retas numéricas perpendiculares, onde o ponto comum é conhecido como origem, a reta horizontal chamamos de abscissa, que comumente lhe atribuímos as coordenadas x , a reta vertical que chamamos de ordenada, que comumente lhe atribuímos as coordenadas y .

Assim, um ponto no plano pode ser facilmente fixado sua localização através de sua coordenadas x e y . Como por exemplo, nesse exercício, convenientemente, atribuímos a coordenadas da casa $A = (0, 0)$, isto é, $x = 0$ e $y = 0$, conforme figura 1.

Para definir, lançamos mão do teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Com isso, como dois pontos podem ser fixados por suas coordenadas, temos que dados os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ para coordenadas quaisquer, podemos aplicar o teorema de pitagoras neles para descobrir sua distância, vejamos a figura abaixo.

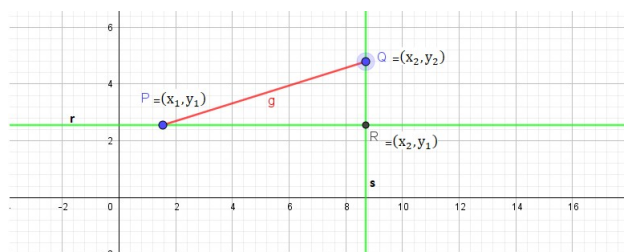


Figura 2.3: Distância entre dois pontos no plano

Com as retas suportes, r e s , podemos ver um triângulo retângulo reto em $R = (x_2, y_1)$, logo é direto que a distancia $\overrightarrow{RQ} = (y_2 - y_1)$, e $\overrightarrow{RP} = (x_2 - x_1)$, daí como temos os catetos, basta jogarmos do teorema de Pitagoras que nos fornecem \overrightarrow{PQ} , Que é a maneira em que se determina a distancia entre dois pontos, vejamos;

$$\left(\overrightarrow{PQ}\right)^2 = \left(\overrightarrow{RQ}\right)^2 + \left(\overrightarrow{RP}\right)^2$$

$$\left(\overrightarrow{PQ}\right)^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$$

$$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

■

No exercício também foi utilizado a equação de um círculo, a qual sem ela ficaria muito difícil determinar a distância solicitada, logo vamos mostrar o que é uma equação de um círculo. Primeiramente, dizemos que Γ é um círculo o conjunto de pontos $P = (x, y)$ localizados a uma distância fixa r , que chamamos de raio, de um ponto determinado $C = (x_1, y_1)$ o qual o chamamos de centro.

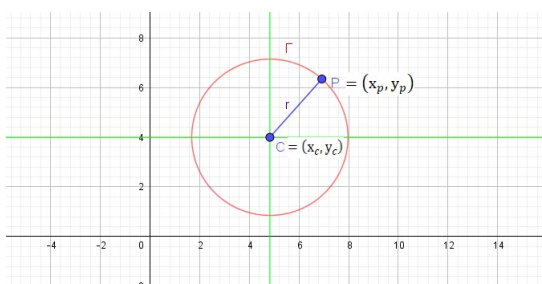


Figura 2.4: Círculo no Plano Cartesiano

Veja que $\overrightarrow{CP} = r$ é facilmente determinado utilizando a maneira que fizemos para determinar a distância de dois pontos, assim

$$\left(\overrightarrow{CP}\right)^2 = (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2$$

■

Por fim, utilizamos o procedimento de completar quadrado, e isso aconteceu pelo fato da equação encontrada não estar na forma da equação acima. Sendo;

$$(x_p - x_c)^2 = x_p^2 - 2x_p x_c + x_c^2$$

Veja que em alguns momentos podemos encontrar a equação incompleta, daí basta somarmos a parcela faltante de ambos os lados, o que aconteceu no exercício, exemplo;

$$x_p^2 - 4x_p x_c + x_c^2 = 0$$

Somando $2x_p x_c$ em ambos os lados, temos

$$x_p^2 - 4x_p x_c + x_c^2 + 2x_p x_c = 2x_p x_c$$

$$\Rightarrow (x_p - x_c)^2 = 2x_p x_c$$

Podemos trabalhar muitos outros conceitos utilizando esse exercício, no entanto não recomendamos, pois podemos retornar a discussão dos conceitos nos exemplos do próximo passo.

2.2.7 Etapa de ensino: Aplique/Treine

Agora vamos mostrar como a generalização do terceiro passo possibilita criar ou resolver vários outros exercícios, através do modelo matemático do modelo matemático por ele descrito.

Vamos reescrever o exercício apresentado em sala utilizando o modelo matemático descrito no terceiro passo. Para isso, tome A como a casa de Dona Maria, B como Casa de Dona Tereza e C e D como o posicionamento de cada Bombeiros e por fim tome $m = 30$ metros. Agora substituiremos esses dados no modelo descrito no terceiro passo.

Dado dois pontos **casa de Dona Maria** e **casa de Dona Tereza** distintos, com uma distância **30 metros** entre eles, qual é a maior distância que dois pontos **posicionamento de cada Bombeiros** podem estar para a distância de **posicionamento de cada Bombeiros** ao ponto **casa de Dona Maria** fiquem sempre o dobro da distância de **posicionamento de cada Bombeiros** ao ponto **casa de Dona Tereza**.

Veja que a construção vai além de uma simples substrução direta, ela trabalha a linguagem matemática e ao mesmo tempo a capacidade de descrição de uma ideia através da língua materna e que, substituir os dados diretamente, como fora feito acima, é uma maneira interessante pois, ela mostra a importância da língua, não apenas como meio de se aprender escrever sem erro gramaticais mas como recriar um texto, mantendo seu sentido e prezando pela coerência e coesão.

Por exemplo, fica evidente que não tem mais sentido falarmos de pontos distintos e que o texto não apresenta coerência e não é coeso, porém ainda é possível resgatar seu valor lógico. Portanto, faremos um trabalho de língua reorganizando-o conforme as regras da língua materna.

As casas de Dona Maria e de Dona Tereza estavam em chamas. Os bombeiros notaram que a distância entre elas eram 30 metros e que, deveriam se posicionar de tal forma que ficassem sempre o dobro da distância da casa de dona Maria em relação a de dona Tereza. Assim, qual é a maior distância em que dois bombeiros podem se posicionar?

Note que essa forma de apresentar o exercício, descreve a primeira versão através do modelo, e para nosso objetivo, é importante mostrar o motivo de o texto ser diferente o leitor é levado a ter o mesmo entendimento, apesar de que cada leitura produzirá uma imagem acústica diferente.

Feito isso, agora é de suma importância solicitar que os alunos criem descrições que preservem esses valores lógicos, ou seja que sejam modelados pelo terceiro passo e, posteriormente que cada aluno avalie os exercícios dos outros alunos, verificando se realmente os exercícios criados podem ser resolvidos utilizando o modelo e resolva-os.

2.3 Algumas possibilidades: Exemplo 2

Para esse segundo exemplo, temos como objetivo introduzir a compreensão de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

2.3.1 Etapa administrativa: Selecione

Selecionamos a quarta questão da primeira fase, nível 3, da Olimpíadas Brasileira de matemática das Escolas Públicas SBM (2018).

4. Alice colocou um litro (1000 cm^3) de água em uma jarra e mediu o nível da água. Depois ela colocou um objeto maciço de prata na jarra e mediu novamente o nível da água, conforme a figura. A massa de um centímetro cúbico de prata é 10,5 gramas. Qual é a massa desse objeto?

- A) 1050 g
- B) 1500 g
- C) 1800 g
- D) 2100 g
- E) 3000 g



Figura 2.5: Questão OBEMEP-2018

2.3.2 Etapa administrativa: Reescreva

Alice, filha de dona Odete, estava na cozinha de sua casa brincando com água, quando eventualmente ela abria a torneira e colocava água em uma jarra. Existia duas jarras disponíveis, uma era daquelas de medidas que cabia no máximo um litro, a outra não se sabia exatamente quanto de líquido era possível colocar, só era possível ver que era bem maior que a de um litro e que, era de forma cilíndrica. Assim, Alice muito curiosa, encheu a jarra de medida e despejou na outra maior de forma cilíndrica, ou seja, colocou um litro de água na jarra maior. Por verificar que a água não chegava nem na metade ela ficou curiosa, foi em seu quarto, pegou uma régua e mediu a altura da água dentro da jarra, descobrindo que estava com quinze centímetros de altura. Após isso, ela colocou um cavalinho maciço de prata, o qual sua mãe tinha lhe presenteado por ter ido bem na disciplina de matemática, dentro da jarra maior juntamente com a água e mediu novamente o nível, verificando que agora estava com dezoito centímetros de altura. Alice ficou curiosa, pois ela se lembrava que no dia em que sua mãe lhe presenteava lhe dissera que o cavalinho era de prata e que a prata era tão pesada que a massa de um centímetro cúbico era de 10,5 gramas. Dados os acontecimentos, ajude a Alice a descobrir qual é a massa desse cavalinho?

Veja que ambos exercícios tem o mesmo argumento matemático, porém a forma reescrita se assemelha com uma descrição de um acontecimento, despertando a curiosidade, pois tal acontecimentos descritos podem ser facilmente replicados em situações cotidianas.

2.3.3 Etapa de ensino: Sintetize.

Alice, **filha de dona Odete, estava na cozinha de sua casa brincando com água, quando eventualmente ela abria a torneira e colocava água em uma jarra.** Existia duas jarras disponíveis, **uma era daquelas de medidas que cabia no máximo** um litro, a outra não se sabia exatamente **quanto de líquido era possível colocar, só** era possível ver que era bem maior **que a de um litro** e que, era de forma cilíndrica. Assim, Alice **muito curiosa, encheu a jarra de medida e despejou na outra maior de forma cilíndrica, ou seja,** colocou um litro de água na jarra maior. **Por verificar que a água não chegava nem na metade ela ficou curiosa, foi em seu quarto, pegou uma régua e mediu** a altura da água dentro da jarra, descobrindo que estava com quinze centímetros **de altura. Após isso,** ela colocou um cavalinho maciço de prata, **o qual sua mãe tinha lhe presenteado por ter ido bem na disciplina de matemática, dentro da jarra maior juntamente com a água e mediu novamente o nível,** verificando que agora estava com dezoito centímetros de altura. **Alice ficou curiosa, pois ela se lembrava que no dia em que sua mãe lhe presenteava lhe dissera que o cavalinho era de prata e que a prata era tão pesada que a massa de um centímetro cúbico era de dez gramas e meia.** Dados os acontecimentos, ajude a Alice a descobrir qual é a massa desse cavalinho?

Novamente, veja que a supressão das partes em negrito não influencia na determinação solicitada, assim podemos reescrever novamente o exercício mantendo o sentido matemático.

Alice colocou um litro de água em uma jarra de forma cilíndrica e mediu o nível da água verificando que estava com quinze centímetros de altura. Depois ela colocou um cavalinho maciço de prata na jarra e mediu novamente o nível da água verificando que estava com dezoito centímetros de altura. Sabendo que a massa de prata é dez gramas e meio por centímetro cúbico. Qual é a massa desse Cavalinho?

Veja que esta forma apresentada preserva os valores lógicos matemático da descrição inicial e possibilita melhor visualização dos dados.

2.3.4 Etapa de ensino: Matematize

Para resolvermos o exercício, podemos reescrevê-lo de forma que a sintetização do exercício apresente uma linguagem mais direta, possibilitando melhor visualização dos dados matemáticos.

Colocando 1000 cm^3 de água em um recipiente cilíndrico a altura preenchida, por água, é de 15 cm. Colocando um objeto maciço no recipiente a altura preenchida é de 18 cm. Sabendo que a massa de um centímetro cúbico do material do objeto é 10,5 gramas. Qual é a massa desse objeto?

Agora iremos resolver o exercício, e para isso vamos utilizar os passos de Polya, mas de forma direta, ou seja, não elencaremos os passos, apenas os utilizaremos sem os mencionar.

Vamos inicialmente elencar os dados apresentados para estabelecer um plano.

1000 cm^3 implica 15 cm na altura.

1000 cm^3 mais o objeto implica 18 cm, ou seja, o objeto implica um acréscimo de 3 cm na altura.

Nota-se que o exercício é semelhante a exercícios de proporções, assim nosso plano será analisar as proporções entre esses dados apresentados.

Veja que o volume inicial e o acréscimo do volume são diretamente proporcionais, e são inversamente proporcionais a altura inicial. Ainda que essas grandezas se relacionam diretamente com a densidade do objeto, assim podemos representá-lo na seguinte equação

$$\text{volume inicial} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\text{altura inicial} = 15 \text{ cm}$$

$$\text{acrescimo} = 18 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{densidade do objeto} = 10,5 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{massa do objeto} = x$$

Dai temos,

$$x = \text{volume total do objeto} * (\text{densidade do objeto})$$
$$x = \left[\frac{(\text{volume inicial})(\text{acrescimo})}{\text{altura inicial}} \right] * (\text{densidade do objeto})$$

Ou seja,

$$x = \left[\frac{(1000)(18 - 15)}{15} \right] * (10,5)$$
$$\Rightarrow x = 2100$$

Inicialmente, reescrevemos o exercício para facilitar a visualização dos dados matemático, após isso visualizamos que o exercício se tratava de grandezas. Assim, estabelecemos um plano em que verificaríamos como essas grandezas se relacionavam e vimos que o volume inicial, o acréscimo e a densidade eram diretamente proporcionais e ambos sendo inversamente proporcional à altura inicial, visto isso montamos a inequação, a qual sua resolução foi trivial.

2.3.5 Etapa de ensino: Generalize

Agora iremos reescrever o exercício com abstração total, o qual servirá de modelo para várias outras situações, vejamos;

Um objeto A , quando colocado em um recipiente B , com $x \text{ cm}^3$ de um líquido C tem um acréscimo de y centímetros em sua altura. Sabendo que a massa de A é de z gramas por centímetro cúbico, qual é a massa total do objeto A .

Veja que apesar deste exercício ter o mesmo o argumento matemático do primeiro passo, sua linguagem o torna de difícil determinação, logo utilizando o que fizemos no passo anterior podemos determinar sua solução.

Sabemos que,

$$m = \left[\frac{(\text{volume inicial})(\text{acrescimo})}{\text{altura inicial}} \right] * (\text{densidade do objeto})$$

Onde

$$\text{volume inicial} = x$$

$$\text{altura inicial} = k$$

$$\text{acréscimo} = y$$

$$\text{densidade do objeto} = z$$

$$\text{massa do objeto} = m$$

Daí, substituindo

$$m = \left[\frac{(x)(y)}{k} \right] * (z)$$

2.3.6 Etapa de ensino: Formalize

Mostraremos as operações matemáticas que deram suportes a resolução do exercício. Inicialmente, para construir o plano, utilizamos as ideias de medidas e diferenças para visualizarmos o acréscimo. Utilizamos ainda as ideias de relações entre proporções e frações.

Uma proporção é uma igualdade entre razões. Geralmente essa igualdade é representada por frações, ou seja, dizemos que A , B , C e D , não nulos, são proporcionais se existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, ou $ab = cd = k$.

Quando o aumento em uma grandeza resulta em aumento em outra grandeza proporcional a ela, dizemos que elas são diretamente proporcionais.

Sempre que o aumento de uma grandeza proporcional a redução de outra proporcional à primeira, dizemos que elas são inversamente proporcionais.

Veja que no exercício dado, a massa do objeto é diretamente proporcional ao volume ocupado pelo objeto e sua densidade e que o acréscimo na altura ocupado pelo líquido na jarra é diretamente proporcional ao volume do objeto e inversamente a altura inicial.

2.3.7 Etapa de ensino: Aplique/Treine

Apresentamos um problema que apesar de ser a descrição de outra situação, ela pode ser escrita na mesma linguagem do problema anterior, ou seja o abstrato modela várias realidades.

Dona Maria quando colocava um ovo para cozinhar uma caçarola cilíndrica, a qual continha meio litro de água, ainda não fervendo, notou que a água que estava a uma altura de dez centímetros subia em um centímetro em sua altura. Ela tinha ouvido falar que as massas dos ovos eram de uma gramas e meia por centímetro cúbico, diante disso, podemos dizer que cada ovo tem uma massa de?

Veja que a parte importante é visualizar que o modelo descrito no terceiro passo pode servir para modelar diversas outras situações e, assim, o trabalho de criar estas situações por parte dos alunos favorecem o entendimento e a apropriação da linguagem.

2.4 Algumas possibilidades: Exemplo 3

Neste exemplo, nosso objetivo é, introduzir o teorema mais conhecido pelos alunos que terminam o ensino médio, teorema de Pitágoras.

2.4.1 Etapa administrativa: Selecione

Selecionamos o exercício 552 da oitava edição do livro Fundamentos da Matemática Elementar volume 9: geometria plana, por ser uma coletânea que ocupa uma relevante importância para o ensino recente de matemática no Brasil.

Dois ciclistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em direção leste e outro em direção norte. Determine a distância que os separa depois de duas horas, sabendo que a velocidade dos ciclistas é de 30 km/h e 45 km/h, respectivamente. (Dolce e Pompeo, 1985)

2.4.2 Etapa administrativa: Reescreva

O exercício já se encontra em uma forma interessante, porém para nosso objetivo em mostrar a transição da linguagem assim iremos reescrevê-lo de forma que preserve o argumento matemático.

A cidade natal de Antônio e José, Ciclolândia, é reconhecida por suas competições de ciclismo, fatos que atraem turistas de todo país. Na próxima competição as regras estabelecidas serão diferentes, a competição será em dupla e os ciclistas sairão ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, como Ciclolândia é uma cidade que tem essas competições como sua principal atividade turística, nenhum dos ciclistas conseguiriam chegar ao final do caminho, mesmo se fossem recordistas olímpicos. No dia da competição, Antônio foi ao leste e, seu mostrador de velocidade lhe mostrou que ele conseguiu percorrer o caminho, durante o tempo previsto, com uma velocidade média de trinta quilômetros por hora, enquanto José que saiu ao norte conseguiu percorrer o caminho, durante o período estabelecido, com uma velocidade média de quarenta e cinco quilômetros por hora. Determine a distância conquistada por Antônio e José ao realizar esta competição.

Veja que, apesar parecer diferente, do ponto de vista matemático ambos são semelhantes e isso favorece a visualização da transição.

2.4.3 Etapa de ensino: Sintetize

A cidade natal de Antônio e José, Ciclolândia, é reconhecida por suas competições de ciclismo, fatos que atraem turistas de todo país. Na próxima competição as regras estabelecidas serão diferentes, a competição será em dupla e os ciclistas sairão ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, **como Ciclolândia é uma cidade que tem essas competições como sua principal atividade turística, nenhum dos ciclistas conseguiriam chegar ao final do caminho, mesmo se fossem recordistas olímpicos. No dia da competição,** Antônio foi ao leste e, **seu mostrador de velocidade lhe mostrou que** ele conseguiu percorrer o caminho, durante o tempo previsto, com uma velocidade média de trinta quilômetros por hora, enquanto José que saiu ao norte conseguiu percorrer o caminho, durante o período estabelecido, com uma velocidade média de quarenta e cinco quilômetros por hora. Determine a distância conquistada por Antônio e José ao realizar esta competição.

Retirando as partes em negrito e reorganizando o texto temos:

Dois ciclistas saíram ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, Antonio foi ao leste e, ele conseguiu uma velocidade média de trinta quilômetros por hora, já José que saiu ao norte conseguiu uma velocidade média de quarenta e cinco quilômetros por hora. Determine a distância conquistada por Antônio e José ao realizar esta competição.

2.4.4 Etapa de ensino: Matematize

Dois ciclistas saíram ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, Antonio foi ao leste e, ele conseguiu uma velocidade média de 30 Km/h , já José que saiu ao norte conseguiu uma velocidade média de 45 Km/h . Determine a distância conquistada por Antônio e José ao realizar esta competição.

Agora que reescrevemos o exercício em uma linguagem que favorece a coleta dos dados, e que coincidentemente estamos usando a versão original, iremos resolvê-lo, utilizando os procedimentos descritos por Polya (1995).

Nosso plano é separarmos os dados, analisando distâncias percorridas e posteriormente sua localização final. Note ainda que por sabermos que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, posteriormente podemos construir um triângulo utilizando os três pontos encontrados, isto é, a posição inicial do percurso e final dos ciclistas.

Antonio percorreu 30 Km/h durante duas horas, ou seja, percorreu $30 * 2 = 60 \text{ Km}$

José percorreu 45 Km/h durante duas horas, ou seja, percorreu $45 * 2 = 90 \text{ Km}$

Assim, podemos construir a figura

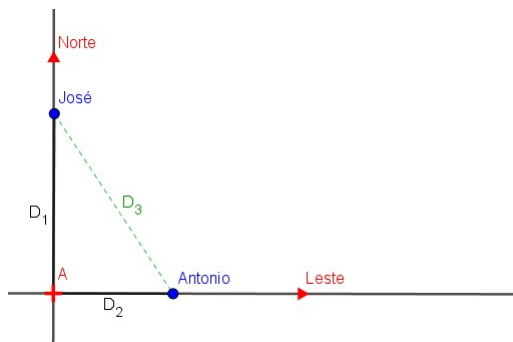


Figura 2.6: Representação da posição dos ciclistas em um gráfico

Seja D_1 o percurso de Antonio, temos $D_1 = 90$

Seja D_2 o percurso de José, temos $D_2 = 60$

Queremos determinar D_3

Veja que as direções Norte e leste formam ângulo reto no ponto de partida A , logo para determinar D_3 basta aplicamos o teorema de Pitágoras, daí;

$$D_3^2 = 90^2 + 60^2$$

$$\Rightarrow D_3 = \sqrt{11700} = 10\sqrt{117}$$

Ou seja, estão aproximadamente 108 quilômetros 166 metros e 53 centímetros de distância entre ambos.

Fazendo um retrospecto, podemos dizer que, para melhor entendimento separamos os dados e calculamos a distância em que cada ciclista percorreu, construímos um desenho para melhor visualizarmos o que estava acontecendo. Feito isso ficou claro que o fato dos ciclistas irem para o norte e leste e seus percursos serem em linha retas, temos a formação de um ângulo reto. Assim, lembramos que quando temos duas distancias definidas e um ângulo reto, para calcular a outra distancia basta utilizarmos o teorema de Pitágoras, feito isso descobrimos a distância de Antonio e José no final do período.

2.4.5 Etapa de ensino: Generalize

Dados dois pontos B e C pertencentes as retas r e s respectivamente, as quais são perpendiculares em A, tal que $\overrightarrow{AB} = nk$ e $\overrightarrow{AC} = ml$. Determine a distância \overrightarrow{BC} .

Veja que o simples fato do exercício não conter mais algarismos numéricos já leva os alunos a conjecturar que resolver o exercício se tornou impossível, porém esse exercício é semelhante ao anterior e ainda mais trivial sua resolução. Dito isso, vamos nos pautar na resolução anterior e resolve-lo, para facilitar a visualização construiremos um desenho da situação.

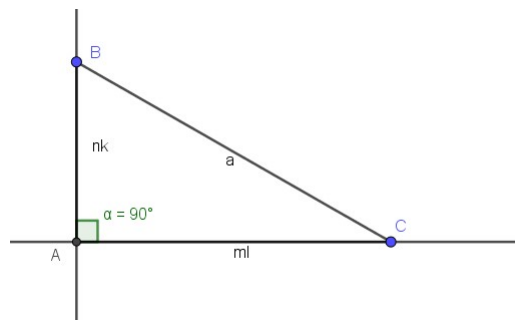


Figura 2.7: Representação da descrição do passo da generalização

Logo do exercício anterior basta aplicamos o teorema de Pitágoras, daí sendo $\overrightarrow{BC} = a$ temos;

$$a^2 = (nk)^2 + (ml)^2$$

Colocando $ml = b$ e $nk = c$ temos;

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Ou,

$$a = \sqrt{(ml)^2 + (nk)^2}$$

(1) Teorema de Pitágoras.

2.4.6 Etapa de ensino: Formalize

Para solucionar esse exercício utilizamos grandezas diretamente proporcional para determinar a distância percorrida por cada ciclista, pois a velocidade média e o tempo de percurso de cada ciclista são diretamente proporcionais. Portanto sendo n a velocidade média e k o tempo gasto, o percurso será nk .

Por fim, construímos um triângulo retângulo sendo conhecidos dois catetos e gostaríamos de encontrar a hipotenusa. Para isso baixamos de A à reta suporte \overrightarrow{BC} o seguimento \overrightarrow{AD} .

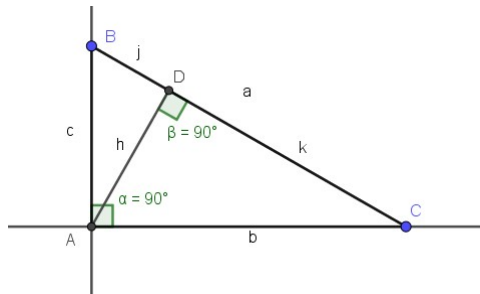


Figura 2.8: Imagem para auxiliar a demonstração

Veja que os triângulos ABC e DBA são semelhantes pois o ângulo $\hat{A}BC \equiv \hat{A}BD$ e $\hat{B}AC \equiv \hat{B}DA$, daí temos que as razões entre as hipotenusas e os catetos menores são iguais, ou seja;

$$\frac{c}{j} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c^2 = aj$$

Temos ainda que nos triângulos ABC e DCA são semelhantes pois os ângulos $\hat{A}CB \equiv \hat{A}CD$ e $\hat{B}CA \equiv \hat{D}CA$, daí temos que as razões entre as hipotenusas e os catetos maiores são iguais, ou seja;

$$\frac{b}{k} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b^2 = ak$$

Somando,

$$c^2 + b^2 = aj + ak$$

$$\Rightarrow c^2 + b^2 = a(j + k)$$

Como $j + k = a$ temos;

$$a^2 = b^2 + c^2$$

■

Portanto, esse exercício nos possibilitou a mostrar a demonstração do teorema de Pitágoras de uma maneira que é possível se relacionar com a descrição da competição dos ciclistas.

2.4.7 Etapa de ensino: Aplique/Treine

Do terceiro passo, temos:

Dados dois pontos B e C pertencentes as retas r e s respectivamente, as quais são perpendiculares em A, tal que $\overrightarrow{AB} = nk$ e $\overrightarrow{AC} = ml$. Determine a distância \overline{BC} .

Colocando $n = m = \text{duas horas}$, sendo $B = \text{Antonio}$, $C = \text{José}$, $k = 30\text{Km/h}$ e $l = 45\text{Km/h}$, $r = \text{norte}$ e $s = \text{Leste}$ e substituindo pontos por ciclistas, e reordenando o texto temos;

Dados dois ciclistas, Antonio e José, que seguem um em direção ao Norte e o outro em direção ao Leste e que Antonio mantém uma velocidade média de 30Km/h e José 45Km/h. Determine a distância de Antonio e José no final do tempo de duas horas.

Veja que a substituição fora praticamente direta para podermos voltar a situação semelhante à descrita inicialmente pelo exercício, assim através da generalização podemos criar diversos outros tipos de situações modeláveis por ela, e fazer os alunos criarem esses exemplos ou visualizar eles possibilitam a compreender a linguagem matemática.

2.5 Algumas possibilidades: Exemplo 4

O objetivo desse exercício é que, a partir dele, possamos discutir a equação de segundo grau e suas propriedades.

2.5.1 Etapa administrativa: Selecione

Selecionamos o exercício 6.27 do livro *Números e Funções Reais*, de autoria de Elon Lages Lima.

Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível? (Lima, 2013)

2.5.2 Etapa administrativa: Reescreva

Este exercício se apresenta em uma linguagem geral, logo vamos transformá-lo em uma descrição de um acontecimento, para se assemelhar com uma situação semelhante a realidade.

Dona Joana é uma ótima cozinheira que trabalhava há mais de vinte anos no restaurante de seu João, pois sempre sonhou em ter seu próprio restaurante. No entanto, seu João teve que mudar de cidade e com isso fechar o restaurante, mas como dona Joana era a funcionária mais velha da casa, após acordos, ficou estabelecido que pelos seus direitos ela tocaria o restaurante de agora em diante. Contudo, dona Joana não tem muita experiência na parte da gestão, logo ela resolveu fazer alguns testes para o tornar sustentável, assim, após uma breve pesquisa, ela descobriu que seu restaurante vendia em média cem quilogramas de comida por dia a doze reais o quilo e que, após um experimento entre aumentar o preço e diminuir, ela descobriu que por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia dez clientes com um consumo médio de quinhentas gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

2.5.3 Etapa de ensino: Sintetize.

Dona Joana é uma ótima cozinheira que trabalhava há mais de vinte anos no restaurante de seu João, pois sempre sonhou em ter seu próprio restaurante. No entanto, seu João teve que mudar de cidade e com isso fechar o restaurante, mas como dona Joana era a funcionária mais velha da casa, após acordos, ficou estabelecido que pelos seus direitos ela tocaria o restaurante de agora em diante. Contudo, dona Joana não tem muita experiência na parte da gestão, logo ela resolveu fazer alguns testes para o tornar sustentável, assim, após uma breve pesquisa, ela descobriu que seu restaurante vendia em média cem quilogramas de comida por dia a doze reais o quilo e que, após um experimento entre aumentar o preço e diminuir, ela descobriu que por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia dez clientes com um consumo médio de quinhentas gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Suprimindo os destaques e reescrevendo-o temos:

Dona Joana resolveu fazer alguns testes para tornar seu restaurante sustentável, assim, ela descobriu que o restaurante vende cem quilogramas de comida por dia, a doze reais o quilo e que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia dez clientes, com um consumo médio de quinhentas gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

2.5.4 Etapa de ensino: Matematize

Dona Joana resolveu fazer alguns testes para tornar seu restaurante sustentável, assim, ela descobriu que o restaurante vende 100 kg de comida por dia, a 12 R\$ o quilo e que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

O exercício nos traz uma relação de dependência entre o acréscimo no valor do KG de comida e a diminuição do número de clientes, logo montaremos nosso plano em cima disso, ou seja;

Preço atual: 12 R\$

Aumento de preço: x

Preço futuro: (*preço atual* + *aumento de preço*) = $(12 + x)$

Venda atual: 100 kg

Perca de clientes após aumento: 10 clientes consumindo 500 g por real, ou seja,

$5x$

Consequência de aumentar o preço: $(100 - 5x)$

Aumento do preço e consequência: $(12 + x)(100 - 5x)$

Vamos executar esse plano fazendo a distributiva e depois analisando a equação de segundo grau resultante.

$$(12 + x)(100 - 5x) = -5x^2 + 40x + 1200$$

Veja que essa equação tem um gráfico com sua concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente angular é negativo, logo ela terá um ponto de máximo. O valor de x para o valor máximo é dado pela média das raízes, pois o gráfico de uma equação de segundo grau é simétrico, logo;

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{-10} = 4$$

Portanto, o valor do quilo de comida deve ser $(12 + 4) = 16$ R\$ o qual implicará uma venda diária de $(100 - 20) = 80$ Kg

Fazendo um retrospecto, percebe-se que inicialmente vimos que o aumento de preço era diretamente proporcional a diminuição de clientes, assim montamos a inequação de segundo grau. Feito isso, analisamos o valor que x assume para o ponto de máximo, e assim resolvemos o exercício.

2.5.5 Etapa de ensino: Generalize

Se A vende m unidades de medida por dia a n unidades de valor a unidades de medida e, se a cada unidade de valor de aumento no preço implique e perder k clientes que consome em média $\frac{1}{2}$ unidades de medida cada. Qual deve ser o valor unidade de medida para que tenha a maior receita possível?

Tentamos fazer uma generalização que modele o problema inicial de forma bem clara para facilitar a visualização da transição da linguagem, mas isso não é necessário, pode-se generalizar em um grau de abstração ainda maior e para nosso objetivo de fazer os alunos visualizar a transição da linguagem isso não seria eficaz.

Para resolver esse exercício, iremos utilizar os dados da resolução do passo anterior.

Preço atual: n

Aumento de preço: x

Preço futuro: (*preço atual* + *aumento de preço*) = $(n + x)$

Venda atual: m

Perca de clientes após aumento: k clientes consumindo $\frac{1}{2}$ unidades de medida cada, ou seja, $\frac{k}{2}x$

Consequência de aumentar o preço: $\left(m - \frac{k}{2}x\right)$

Aumento do preço e consequência: $(n + x)\left(m - \frac{k}{2}x\right)$

Dai, pela distributiva temos

$$(n + x)\left(m - \frac{k}{2}x\right) = nm - \frac{nkx}{2} + mx - \frac{kx^2}{2}$$

Logo, colocando x em evidencia e reorganizando os termos,

$$-\frac{kx^2}{2} + x \left(-\frac{nk}{2} + m \right) + nm$$

Fazendo a média das raízes temos o valor máximo x , isto é;

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-\frac{nk}{2} + m\right)}{-k}$$

Daí,

Portanto, o valor do quilo de comida deve ser

$$(n + x) = n + \frac{-\left(-\frac{nk}{2} + m\right)}{-k} = \frac{-nk - \left(-\frac{nk}{2} + m\right)}{-k}$$

Veja que o aluno conseguir relacionar esta solução a solução apresentada no passo anterior não é uma tarefa trivial, no entanto é isso que se espera.

2.5.6 Etapa de ensino: Formalize

Para solucionarmos o exercício, utilizamos alguns conceitos de conhecimento comum e o admitimos como verdade, agora vamos mostrar os dois principais utilizados, sendo a definição de função, as raízes da equação de segundo grau, a conhecida formula de bhaskara e que o valor máximo de $x = \frac{-b}{2a}$ é a média das raízes.

Inicialmente veja que o aumento de preço se relaciona diretamente com a queda da quantidade vendida a qual gera a receita final pois a variação no preço influencia na quantidade vendida, logo é uma relação $X \rightarrow Y$, sendo X o conjunto definido pela quantidade vendida e Y o conjunto definido pela receita. Note ainda que a receita é definida pela relação da quantidade vendida, logo sendo quantidade m e preço n temos $Y = mn$. Veja que para qualquer valor de receita existe uma quantidade vendida a qual se associa, logo podemos dizer que: Todo $m \in X$ associa um $n \in Y$, portanto dizemos que os conjuntos X, Y , é uma função $f : X \rightarrow Y$, visto que ela nos diz como associar a cada elemento $m \in X$ um elemento $n = f(x) \in Y$, o que exatamente nos diz a definição de função elencada na problematização.

Por outro lado, seja a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, logo

colocando a em evidência;

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right)$$

Logo escrevendo o polinômio na forma canônica;

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Logo, com $a \neq 0$, para que $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0$ temos que

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0, \text{ dai;}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com $b^2 - 4ac \geq 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

■

O que nos fornece os dois valores para as duas raízes da equação, sendo

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Fazendo a média das raízes $x_1 + x_2$ temos

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

■

Com isso mostramos duas propriedades muito importantes no estudo da equação de segundo grau.

2.5.7 Etapa de ensino: Aplique/Treine

Se um restaurante vende 100 Kg por dia a 12 reais o KG e, se a cada real de aumento no preço implique e perder 10 clientes que consome em média $\frac{1}{2}$ Kg cada. Qual deve ser o valor do Kg para que tenha a maior receita possível?

Veja que o modelo descrito no terceiro passo é diretamente aplicável na situação descrita no exercício original, logo para treinamento, é importante que os alunos percebam isso e possa reproduzir outras situações em que seja possível utilizar o modelo.

Capítulo 3

Relato de experiência

Para analisarmos a viabilidade dessa proposta fizemos duas pesquisas de relato de experiências uma com pessoas que já terminaram o ensino médio e outra com alunos do ensino médio. Para preservar a identidade dos participantes, não colocaremos nenhum conteúdo que possa identificar os participantes, sendo que para mostrarmos o texto produzido faremos através de transcrição dos mesmos.

A primeira pesquisa teve como sujeitos os Profissionais Técnicos da Universidade do Estado de Mato Grosso do Campus Universitário de Pontes e Lacerda, escolhemos esse conjunto de pessoas devido a diversidade do grupo, a qual conta com pessoas quem possuem o ensino médio completo até pós graduação stricto sensu, possibilitando uma amostra plural.

Esta pesquisa foi realizada no dia 28 de Janeiro de 2019 no período vespertino cotando com a participação de dezesseis pessoas. Para essa pesquisa, utilizaremos o formulário descrito no apêndice. Este formulário foi elaborado se baseando nos exercícios que trabalhamos como exemplos de aplicação da metodologia da proposta e tem os seguintes objetivos:

1. Identificar a capacidade das pessoas comuns em fazerem generalizações que preserve o argumento matemático e de aplicar a forma sintetizada em uma nova descrição, ou seja construir uma nova história preservando o argumento;
2. Identificar se elas consideram que o fato de um exercício estar na forma de descrição ele se torna um motivador para despertar o interesse pela resolução;
3. Identificar se os exercícios apresentados em formas de descrição possui nível de

dificuldades diferente de sua forma generalizada.

Para a aplicação, o formulário foi entregue em forma impressa e iniciamos com a apresentação, explicando como deveria ser preenchido o formulário. As dúvidas que surgiam durante o preenchimento foram esclarecidas para manter o padrão estabelecido.

Para a primeira parte a qual tinha como objetivo identificar a capacidade de fazerem generalizações preservando o argumento matemático e aplicar a forma sintetizada em uma nova história, foi apresentado e solicitado que a partir da descrição do exercício 2.5.2, sintetizasse o máximo que pudesse, trocando ou substituindo partes se julgar necessários, de forma que preservasse o argumento matemático e ainda ressaltamos que não era para resolver.

Pudemos notar que no geral não foram capazes de fazer a síntese, com a maioria criando versões similares a descrição dada, apesar que em partes preservarem os argumentos matemáticos. Com isso podemos dizer que, apesar de serem pessoas com alto nível de instrução, elas não foram capazes de filtrar os argumentos matemáticos presentes em um texto, podemos notar ainda que algumas delas tentaram criar um resumo, desconstruindo o argumento matemático, como por exemplo essa versão.

Dona Joana após a mudança dos padrões, herdou a empresa de fornecimento de alimentação. Em uma tentativa de melhorar o lucro dos negócios estabeleceu um método de lucro, diminuindo a quantidade de comida para aumentar seus lucros.

A segunda parte desse tópico, era para descrever de forma diferente, ou seja, criarem uma nova história, a partir do texto que tinham sintetizado anteriormente, porém, mantendo o mesmo argumento matemático. Nesse tópico podemos notar que fizeram versões muito semelhante a descrição 2.5.2, substituindo as vezes o nome dos personagens e em poucos casos a natureza do empreendimento, no entanto a maioria não conseguiu manter o argumento matemático necessário, vejamos esse exemplo em particular;

Dona Joana, por inexperiência em gestão, entendeu que sua habilidade maior é com as especiarias do restaurante e desse modo, ofereceu para que seu sobrinho fizesse o arrendamento do estabelecimento e ela continuaria cozinhando. Seu sobrinho, com maior experiência, ajustou o valor do quilograma, de modo que o restaurante se tornasse sustentável e agregando maior número de clientes.

Veja que por mais que os argumentos matemáticos não foram preservados, o texto mantém a essência da descrição. Fatos semelhantes ocorreram em outros textos, e alguns continham o argumento matemático, mas as vezes as premissas elencadas eram insuficiente para uma conclusão. Isso nos mostra que o sujeito para eles não é o argumento

e sim o conto.

A segunda parte analisada tinha objetivo identificar se elas consideram que o fato de um exercício estar na forma de descrição ele o torna um motivador para despertar o interesse pela resolução, para isso foi apresentado duplas de exercícios, ambos com o mesmo argumento matemático, sendo um em forma de descrição e o outro na forma de generalização e foi solicitado para assinalar o que considerava mais motivado a tentar resolver.

Neste tópico tivemos um total de mais de 80% dos entrevistados motivado a tentar resolver os exercícios apresentados em forma de descrição. Ressaltamos aqui um fato curioso; vários participantes tentaram resolver os exercícios apresentados nas descrições apesar da orientação que não era necessário resolver, porem ninguém cogitou em tentar os de forma generalizadas. Portanto concluímos que um exercício apresentado na forma de descrição é um fator motivador.

Por fim o ultimo tópico a ser analisado foi identificar se os exercícios apresentados em formas de descrição possuem níveis de dificuldades diferente de sua forma generalizada. Para isso foi apresentado diferentes versões dos exercícios que trabalhamos nos exemplos, assim organizamos os exercícios em ordem aleatória, e pedimos para eles avaliarem com notas de 0 a 10, onde 0 é o mais fácil e 10 o mais difícil, cada uma dos exercícios. Logo, a análise se baseará em comparar as notas obtidas no mesmo exercício, vejamos a tabela das notas atribuídas por cada aluno.

Tabela 3.1: Notas atribuídas sobre os níveis de dificuldades

Formas	Exemplo 1			Exemplo 2			Exemplo 3			Exemplo 4	
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	B	C
Aluno 1	2	4	4	2	4	6	2	2	4	2	2
Aluno 2	2	2	10	2	10	10	2	10	10	2	4
Aluno 3	6	2	4	8	4	4	2	2	6	2	4
Aluno 4	4	4	8	6	4	8	8	8	6	4	6
Aluno 5	4	5	6	8	6	7	8	1	8	4	3
Aluno 6	2	2	2	4	4	2	2	2	2	4	4
Aluno 7	2	4	6	8	10	8	4	4	10	8	8
Aluno 8	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4
Aluno 9	8	10	10	8	10	10	8	8	10	8	10
Aluno 10	4	4	8	4	4	4	6	6	8	4	4
Aluno 11	4	6	10	6	4	10	6	6	10	2	10
Aluno 12	6	6	6	8	8	8	8	6	8	8	8
Aluno 13	4	2	2	2	2	4	2	2	4	4	4
Aluno 14	4	4	4	4	6	6	6	2	10	4	8
Aluno 15	2	2	8	6	8	8	2	2	8	6	6
Aluno 16	4	4	8	4	4	8	6	4	6	4	8
Média	3,875	3,937	6,125	5,125	5,625	6,562	4,625	4,187	7,00	4,25	5,812

A - Forma Descritiva B - Forma Matematizada C - Forma Generalizada

Portanto, de acordo com os dados, podemos concluir que quanto mais o exercício for generalizado mais difícil ele será considerado, o que mostra a importância da abordagem da proposta.

Após os alunos terem terminado de responder os questionários, apresentamos a metodologia de nossa proposta e mostramos como seria essa nova forma de trabalhar a matemática e que, vários desses exercícios que eles tinham avaliados possuíam o mesmo argumento matemático.

Após a apresentação notamos que o interesse pelo assunto começou a ganhar importância, com alguns começando a reler os exercícios e tentarem entender como os valores matemáticos eram mantidos apesar de alguns deles parecerem exercícios completamente diferentes. Com isso pudemos perceber comentários como; “pior, esse exercício é o mesmo desse”, “veja, não tem só dois iguais, encontrei três”, “caramba, trocou só os nomes mas a ideia e a mesma”, “esse da descrição acho que consigo resolver, então significa que consigo fazer esse difícil de ler?”, entre várias outras observações.

A Segunda pesquisa teve como sujeitos os Alunos do 2^o I e do 2^o J da Escola

Estadual 14 de Fevereiro localizada na cidade de Pontes e Lacerda, escolhemos essas turmas devido ao conteúdo a ser ministrado no dia ser uma revisão do teorema de Pitágoras, o que vinha de encontro com o exemplo 2.4 que trabalha esse conteúdo.

Esta pesquisa foi realizada no dia 14 de Fevereiro de 2019 no período vespertino, contando com a participação de 26 alunos na primeira turma e 24 na segunda turma durante um período de quatro horas, sendo duas horas em cada turma.

Para essa pesquisa, utilizamos o exemplo 2.4 fazendo uma abordagem similar a uma aula tradicional, porém utilizamos o data show para facilitar a reprodução dos textos e o quadro para fazer as explicações e observações. A aula teve os seguintes objetivos

1. Identificar se os alunos consideram que o fato de um exercício estar na forma de descrição ele se torna um motivador para despertar o interesse pela resolução;
2. Verificar como os alunos reagem perante um exercício apresentados em formas de generalizada;
3. Identificar se a descrição motiva os alunos a tentarem criar outra história que preserve o argumento matemático.

Para o primeiro objetivo, notamos já de início que quando começamos a apresentar a história, em ambas as salas, os alunos ficavam encantados, o silêncio e o foco pela descoberta imperava e após o término surgiam questionamentos do tipo “onde fica Ciclolândia?”, “Cicolândia existe mesmo?” o que mostra que um exercício reescrito apresentado na forma de uma descrição é um motivador para os alunos.

Continuamos a aula mostramos como ocorre a síntese, e que apesar do texto sintetizado ser diferente ele preserva o argumento matemático, contudo quando chegou no versão do texto generalizado percebemos o desconforto dos alunos perante ele. Assim para instigar os a buscarem seu entendimento mostramos que ele possuía exatamente o mesmo argumento do exercício original que acabará de resolver. Dito isso podemos notar que alguns alunos conseguiram visualizar a semelhança porém, a maioria não conseguia admitir que ambos continham o mesmo argumento matemático.

No decorrer da aula notamos que na parte de formalização, onde fazemos as demonstrações dos conteúdos clássicos, os alunos tendem a perder o interesse e nesse ponto faz se necessário o professor ter cuidado e tentar relacionar o máximo que puder com a

descrição inicial, pois quando fazemos recuperávamos parte de seus interesses pela descoberta.

Para terminar a aula, pedimos para que cada aluno recriassem uma história diferente preservando o argumento matemático e baseada no passo da generalização. Aqui podemos perceber que, assim como na pesquisas com as pessoas que já terminaram o ensino médio, dos que tentaram recriar a história em média 2% dos alunos conseguiram manter o argumento matemático e que a maioria dos alunos prefeririam criar a história baseando se na descrição e não na generalização. Vejamos dois exemplos destacados abaixo.

Numa pequena aldeia no interior de minas existia em determinada época do ano aconteciam maratonas nas quais os participantes teriam que passar por provas absurdas para chegar a fase final da maratona, todos que iriam para esses desafios desejavam chegar a ultima fase onde iriam enfrentar monstros desconhecidos ao olhos humanos, porém apenas um homem conseguiu chegar a essa fase, por ser o cassique da aldeia era o homem mais respeitado de todos, a fase mais difícil era uma em que os participantes teriam que correr com na direção da rosa dos ventos, mas poucas conseguiam, pois todos as provas sugavam muita força dos participantes, geralmente os participantes corriam em linhas paralelas para chegar ao destino final. Carlos, João, Henrique foram os finalistas, porém só um iria chegar até a ultima fase, então para desempatar a competição eles tiveram como desafio dar a volta em toda a parte da aldeia em que estava acontecendo a competição, em tempo record, de forma com que todos as quatro pares os participantes teriam que alcançar com base nas linhas paralelas em que alcançar com base nas linhas paralelas em que cada um saísse de um ponto, Carlos chegou em vinte minutos, qual foi a distancia percorrida por ele sabendo que no total a ilha tem 80km?

Veja que além do texto não preservar o argumento matemático o aluno se perdeu porém, notamos que ele cria um conto e que se bem trabalhado daria uma boa historia para introduzir um conteúdo.

Em uma vila antiga chamada vila oculto da folha dois ninjas estavam fazendo provas de resistência, uma se chamava Sasuke e o outro Naruto. Naruto correu para o Norte em uma velocidade media de 89 Km/h, enquanto Sasuke corre para o leste em uma velocidade media de 100 Km/h, depois do termino da prova que durou 50 horas, Naruto e Sasuke queriam saber qual era a distancia entre eles. Determine a distancia entre Naruto e Sasuke.

Note que, apesar de algumas observações no português, a escrita conseguiu manter o argumento e além disso o aluno utiliza como tema algo que ele gosta, dando uma direção ao professor para o momento em que for reescrever o exercício.

Visto isso, podemos notar que em geral os alunos não conseguem visualizar o argumento nos textos e nem separar o que é essencial e o que é supérfluo para a determinação do resultado, prejudicando suas compreensão sobre matemática. Podemos

perceber que além da matemática eles possuem deficiência em língua portuguesa e que os textos reescritos utilizando fatos que façam parte de seus cotidianos tendem a ser mais efetivos para despertar o interesses.

Por fim, através destas experiências, podemos dizer que a proposta é promissora que a método de aplicação se mostrou eficiente e que pode funcionar em conjunto com a metodologia clássica de ensino.

Considerações finais

No decorrer deste trabalho, podemos observar que a matemática surgiu para auxiliar a entender a natureza e que com o tempo ela avançou e com o advento da álgebra e posteriormente da análise a matemática ganhou vida própria com enfoque na generalização influenciando na maneira de se ensinar matemática.

Notamos ainda que o ensino moderno de matemática parte da tentativa de entender a generalização e a partir dela, visualizar em uma descrição, qual modelo melhor adaptaria para a determinação de sua resolução. Contudo tal procedimento não é uma tarefa simples, exigindo habilidade por parte dos alunos, além do que eles podem oferecer e, como consequência disso, em todas as avaliações da matemática temos os piores rendimentos e que uma das principais dificuldades na disciplina esta em compreender a linguagem matemática, fato essencial para compreender uma generalização, desde uma definição a um modelo matemático.

Assim, com essa proposta apresentada, visualizamos que podemos flexibilizar a forma de se ensinar a matemática e que em nenhum momento ela abre mão da compreensão da generalização, e sim seu objetivo é exatamente compreender a generalização, porém partindo da descrição.

Ressaltamos que utilizamos o termo exercício por ele ser mais geral e abrangente com situações problemas, visto que a matemática moderna não se resume a situações problemas, como por exemplo a análise.

En nossa pesquisa, percebemos que os exercícios escritos na forma de descrição é mais fácil de entender e são motivadores. Notamos ainda que quando os exercícios generalizados possuem uma grande resistência, onde alguns se negavam até a ler. No entanto quando foi apresentados que os exercícios generalizados eram na verdade uma generalização da descrição, elas começavam a querer compreender. Na formalização foi onde encontramos a maior dificuldade para manter o interesse pela descoberta, exigindo

criatividade por parte do professor.

Na metodologia apresentada, usamos os passos de resoluções de problemas descritos por Polya (1995), pois são efetivos para auxiliar na resolução porém notamos que não são suficientes para compreender a linguagem matemática, assim faz se necessário ir um pouco mais além.

Visto isso, podemos dizer que esta proposta pode mudar a forma de se ensinar matemática e que a metodologia apresentada pode ser o início de várias outras metodologias para alcançar esse mesmo objetivo, compreender a linguagem matemática para poder compreender a matemática.

Por fim, apesar do tempo insuficiente para uma pesquisa mais aprofundada, podemos concluir que a proposta é viável e se mostrou efetiva para o objetivo proposto e que a metodologia pode sofrer reajustes para aumentar sua eficiência, contudo a maneira apresentada se mostrou eficiente por poder trabalhar de forma conjunta com o processo clássico de ensino já estabelecido, de forma complementares ou até substitutiva.

Para finalizar convidamos o leitor a criar um exemplo para formalizar a definição de *MDC* dada início da problematização.

Referências Bibliográficas

- Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Ed. Edgard Blücher; Edusp, São Paulo.
- Cavalcanti, L. B. (2008). Aprender a resolver problemas. *Universidade Estadual de Campinas/Grupo FORMAR*, páginas 1–16.
- Courant, Richard e Robbins, H. (2000). *O que é Matemática? : Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro.
- Davis, F. (1979). *A comunicação não-verbal*. Grupo Editorial Summus.
- Dolce, O. e Pompeo, J. N. (1985). *Fundamentos de matemática elementar: Geometria plana*, volume 9. Atual.
- Freire, P. (2011). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra.
- Freire, P. (2014). *Educação como prática da liberdade*. Paz e Terra.
- Gomes, F. P. e Araújo, R. M. d. (2005). Pesquisa quanti-qualitativa em administração: uma visão holística do objeto em estudo. acesso em: 11 dez. 2018. *Seminários em Administração*, 8:1–11.
- Lima, E. L. (2013). *Números e funções reais*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Machado, N. J. (2011). *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*. Cortez Editora, São Paulo.
- MEC, B. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. MEC - disponível em: <https://goo.gl/hm4C4Q> - acesso em 01/02/2019.

- MEC, B. (2018). *Relatório SAEB (ANEB e ANRESC) 2005-2015: panorama da década*. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Brasília.
- Miorim, M. Â. (1998). *Introdução à história da educação matemática*. Atual Editora.
- Polya, G. (1987). Dez mandamentos para professores. *Revista do Professor de Matemática*, 10:2–10.
- Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. Interciência, Rio de Janeiro.
- Powell, A. B. e Bairral, M. A. (2006). *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades*. Papirus Editora.
- Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar.
- Sant’anna, A. S. (2003). *O que é um Axioma*. Manole, São Paulo.
- Saussure, F. d. (2006). *Curso de lingüística geral. Tradução de Antônio Chelini, José Paulo Paes e Izidoro Blikstein*. São Paulo: Cultrix.
- Saviani, D. (1999). *Escola e democracia*. Cortez - Autores associados.
- SBM (2018). http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n3-2018.pdf. :Acesso 23 de janeiro de 2019.
- Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade*. Cortez, São Paulo.
- Wielewski, G. D. (2008). O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil. *ProfMat2008 Actas. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática*, páginas 1–10.

Apêndice: Material adicional

Idade: _____ Sexo: _____ Nível de escolaridade: _____

Tem formação superior, quais? _____

Nível de compreensão de Língua Portuguesa, nota de 0 a 10: _____

Nível de compreensão de Matemática, nota de 0 a 10: _____

Descrição:

Dona Joana é uma ótima cozinheira que trabalhava há mais de vinte anos no restaurante de seu João, porém sempre sonhou em ter seu próprio restaurante. No entanto, seu João teve que mudar de cidade e com isso fechar o restaurante, mas como dona Joana era a funcionária mais velha da casa, após acordos, ficou estabelecido que pelos seus direitos ela tocaria o restaurante de agora em diante. Contudo, dona Joana não tem muita experiência na parte da gestão, logo ela resolveu fazer alguns testes para o tornar sustentável, assim, após uma breve pesquisa, ela descobriu que seu restaurante vendia em média cem quilogramas de comida por dia a doze reais o quilo e que, após um experimento entre aumentar o preço e diminuir, ela descobriu que por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia dez clientes com um consumo médio de quinhentas gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Sintetize: A partir da descrição acima, sintetize-a o máximo que puder, trocando ou substituindo partes se julgar necessários, de forma que preserve o argumento matemático. **Não é para resolver.**

Descreva de forma diferente: Crie uma nova história, a partir do texto que você sintetizou, porém, mantendo o mesmo argumento matemático.

Figura 3.1: Fazer a síntese e aplica-la criando uma nova história

ANÁLISE DE MOTIVAÇÃO

Em cada dupla de exercício, assinale o que você considera mais motivado a tentar resolver

- Dados dois pontos C e D pertencentes as retas r e s respectivamente, as quais são perpendiculares em A , tal que $\overline{AC} = nk$ e $\overline{AD} = ml$. Determine a distância \overline{CD} .

A cidade natal de Antonio e José, Ciclolândia, é reconhecida por suas competições de ciclismo, fatos que atraem turistas de todo país. Na próxima competição as regras estabelecidas serão diferentes, a competição será em dupla e os ciclistas sairão ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, como Ciclolândia é uma cidade que tem essas competições como sua principal atividade turística, nenhum dos ciclistas conseguiriam chegar ao final do caminho, mesmo se fossem recordistas olímpicos.

- No dia da competição, Antonio foi ao leste e, seu mostrador de velocidade lhe mostrou que ele conseguiu percorrer o caminho, durante o tempo previsto, com uma velocidade média de trinta quilômetros por hora, enquanto José que saiu ao norte conseguiu percorrer o caminho, durante o período estabelecido, com uma velocidade média de quarenta e cinco quilômetros por hora. Determine a distância de Antonio e José ao realizar esta competição.

Alice, filha de dona Odete, estava na cozinha de sua casa brincando com água, quando eventualmente ela abria a torneira e colocava água em uma jarra. Existia duas jarras disponíveis, uma era daquelas de medidas que cabia no máximo um litro, a outra não se sabia exatamente quanto de líquido era possível colocar, só era possível ver que era bem maior que a de um litro e que, era de forma cilíndrica. Assim, Alice muito curiosa, encheu a jarra de medida e despejou na outra maior de forma cilíndrica, ou seja, colocou um litro de água na jarra maior. Por verificar que a água não chegava nem na metade ela ficou curiosa, foi em seu quarto, pegou uma régua e mediu a altura da água dentro da jarra, descobrindo que estava com quinze centímetros de altura. Após isso, ela colocou um cavalinho maciço de prata, o qual sua mãe tinha lhe presenteado por ter ido bem na disciplina de matemática, dentro da jarra maior juntamente com a água e mediu novamente o nível, verificando que agora estava com dezoito centímetros de altura Alice ficou curiosa, pois ela se lembrava que no dia em que sua mãe lhe presenteava lhe dissera que o cavalinho era de prata e que a prata era tão pesada que a massa de um centímetro cúbico era de dez gramas e meia. Dados os acontecimentos, ajude a Alice a descobrir qual é a massa desse cavalinho?

- Um objeto A , quando colocado em um recipiente B , com $x \text{ cm}^3$ de um líquido C tem um acréscimo de y centímetros em sua altura. Sabendo que a massa de A é de z gramas por centímetro cúbico, qual é a massa total do objeto A .

A casa de Dona Maria e de Dona Tereza haviam se incendiado devido a uma sobrecarga elétrica. A casa de Dona Maria era de tábuas e a de Dona Tereza de alvenaria, quando os bombeiros chegaram notaram que essas casas estavam a uma distância de cerca trinta metros uma da outra, e que a casa de Dona Maria por ser de madeira estava com uma temperatura mais alta do que a de Dona Tereza, assim os bombeiros decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro na casa de Dona Maria, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro a casa de Dona Tereza, a de temperatura menos elevada.

- Como tinha dois caminhões pipas, resolveram se posicionar de maneira que ficassem com a maior distância possível entre eles. Nestas condições, a maior distância, em metro, que os dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

- Dado dois pontos A e B distintos, com uma distância m entre eles, qual é a maior distância que dois pontos C e D podem estar para que a distância de C e D ao ponto A fiquem sempre o dobro da distância de C e D ao ponto B .

Figura 3.2: Analisando em qual linguagem é preferível resolver

ANÁLISE DE NÍVEL DE DIFICULDADE

Em relação aos argumentos matemático apresentado nos exercícios, suponha que você fosse resolver os exercícios abaixo, **não é para resolver**, dê uma nota de 0 a 10, o qual (0) é o que você considera **mais fácil** de entender e (10) é o **mais difícil** de entender.

2 = muito fácil --- 4 = meio difícil --- 6 = difícil --- 8 = muito difícil --- 10 = difficilimo

A casa de Dona Maria e de Dona Tereza haviam se incendiado devido a uma sobrecarga elétrica. A casa de Dona Maria era de tábuas e a de Dona Tereza de alvenaria, quando os bombeiros chegaram notaram que essas casas estavam a uma distância de cerca trinta metros uma da outra, e que a casa de Dona Maria por ser de madeira estava com uma temperatura mais alta do que a de Dona Tereza, assim os bombeiros decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro na casa de Dona Maria, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro a casa de Dona Tereza, a de temperatura menos elevada.

Como tinha dois caminhões pipas, resolveram se posicionar de maneira que ficassem com a maior distância possível entre eles. Nestas condições, a maior distância, em metro, que os dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

Dados dois pontos C e D pertencentes as retas r e s respectivamente, as quais são perpendiculares em A , tal que $\overline{AC} = nk$ e $\overline{AD} = ml$. Determine a distância \overline{CD} .

Alice, filha de dona Odete, estava na cozinha de sua casa brincando com água, quando eventualmente ela abria a torneira e colocava água em uma jarra. Existia duas jarras disponíveis, uma era daquelas de medidas que cabia no máximo um litro, a outra não se sabia exatamente quanto de líquido era possível colocar, só era possível ver que era bem maior que a de um litro e que, era de forma cilíndrica. Assim, Alice muito curiosa, encheu a jarra de medida e despejou na outra maior de forma cilíndrica, ou seja, colocou um litro de água na jarra maior. Por verificar que a água não chegava nem na metade ela ficou curiosa, foi em seu quarto, pegou uma régua e mediu a altura da água dentro da jarra, descobrindo que estava com quinze centímetros de altura. Após isso, ela colocou um cavalinho maciço de prata, o qual sua mãe tinha lhe presenteado por ter ido bem na disciplina de matemática, dentro da jarra maior juntamente com a água e mediu novamente o nível, verificando que agora estava com dezoito centímetros de altura Alice ficou curiosa, pois ela se lembrava que no dia em que sua mãe lhe presenteava lhe dissera que o cavalinho era de prata e que a prata era tão pesada que a massa de um centímetro cúbico era de dez gramas e meia. Dados os acontecimentos, ajude a Alice a descobrir qual é a massa desse cavalinho?

Colocando 1000 cm^3 de água em um recipiente cilíndrico a altura preenchida, por água, é de 15 cm. Colocando um objeto maciço no recipiente a altura preenchida é de 18 cm. Sabendo que a massa de um centímetro cúbico do material do objeto é 10,5 gramas. Qual é a massa desse objeto?

Dado dois pontos A e B distintos, com uma distância m entre eles, qual é a maior distância que dois pontos C e D podem estar para que a distância de C e D ao ponto A fiquem sempre o dobro da distância de C e D ao ponto B .

Figura 3.3: Análise de dificuldades de cada versão apresentada, página 1

Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é?

A cidade natal de Antonio e José, Ciclolândia, é reconhecida por suas competições de ciclismo, fatos que atraem turistas de todo país. Na próxima competição as regras estabelecidas serão diferentes, a competição será em dupla e os ciclistas sairão ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, como Ciclolândia é uma cidade que tem essas competições como sua principal atividade turística, nenhum dos ciclistas conseguiriam chegar ao final do caminho, mesmo se fossem recordistas olímpicos. No dia da competição, Antonio foi ao leste e, seu mostrador de velocidade lhe mostrou que ele conseguiu percorrer o caminho, durante o tempo previsto, com uma velocidade média de trinta quilômetros por hora, enquanto José que saiu ao norte conseguiu percorrer o caminho, durante o período estabelecido, com uma velocidade média de quarenta e cinco quilômetros por hora. Determine a distância de Antonio e José ao realizar esta competição.

Um objeto A, quando colocado em um recipiente B, com $x \text{ cm}^3$ de um líquido C tem um acréscimo de y centímetros em sua altura. Sabendo que a massa de A é de z gramas por centímetro cúbico, qual é a massa total do objeto A.

Antonia resolveu fazer alguns testes para tornar seu empreendimento sustentável, assim, ela descobriu que vende 100 kg de uma certa mercadoria por dia, a 12 R\$ o quilo e que, por cada real de aumento no preço, perderia 10 clientes, os quais compravam em média 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo para que o empreendimento tenha a maior receita possível?

Dois ciclistas sairão ambos ao mesmo tempo em linha reta, um na direção leste e o outro ao norte durante um período de duas horas, Antonio foi ao leste e, ele conseguiu uma velocidade média de 30 Km/h, já José que saiu ao norte conseguiu uma velocidade média de 45 Km/h. Determine a distância de Antônio e José ao realizar esta competição.

Se A vende m unidades de medida por dia a n unidades de valor a unidades de medida e, se a cada unidade de valor de aumento no preço implique em perder k clientes que consome em média $\frac{1}{2}$ unidades de medida cada. Qual deve ser o valor unidade de medida para que tenha a maior receita possível?

Figura 3.4: Análise de dificuldades de cada versão apresentada, página 2