



**Universidade Federal de Goiás**  
**Instituto de Matemática e Estatística**

**Programa de Mestrado Profissional em**  
**Matemática em Rede Nacional**

**$\phi$ : o número de ouro**

por

**Viviane de Oliveira Kfourir**

Goiânia

2013

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):	VIVIANE DE OLIVEIRA KFOURI		
E-mail:	vikfour@ig.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	COLÉGIO MILITAR DE BRASÍLIA		
Agência de fomento:		Sigla:	SEDF
País:	BRASIL	UF:	DF
		CNPJ:	00.394.452/0001-03
Título:	φ: o número de ouro		
Palavras-chave:	Número de ouro, Geometria, Matemática, Sequência de Fibonacci, Retângulo áureo, Espiral logarítmica.		
Título em outra língua:	φ: the golden number.		
Palavras-chave em outra língua:	Golden Number, Geometry, Mathematics, Fibonacci sequences, Golden rectangle, Logarithmic spiral.		
Área de concentração:	MATEMÁTICA		
Data defesa:	01/03/2013		
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	Durval José Tonon		
E-mail:	djtonon@mat.ufg.br		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 01 / 05 / 2013

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Viviane de Oliveira Kfourì

## $\phi$ : o número de ouro

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon

Goiânia

2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**GPI/BC/UFG**

K449f Kfourir, Viviane de Oliveira.  
     $\Phi$  [manuscrito] : o número de ouro / Viviane de Oliveira  
Kfourir. - 2013.  
    49 f.

Orientador: Prof. Durval José Tonon.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal  
de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.  
Inclui bibliografia.

1. Número de ouro. 2. Fibonacci, Sequência de. 3.  
Retângulo áureo. 4. Espiral logarítmica. I. Título.

CDU: 514.112

# Viviane de Oliveira Kfourri

## Fi: O Número de Ouro

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 01 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



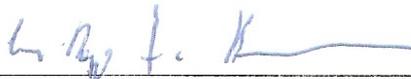
---

**Prof. Dr. Durval José Tonnon**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



---

**Profa. Dra. Maria Socorro Duarte da Silva Couto**  
IFG/Inhumas



---

**Prof. Dr. Luis Rodrigo Fernandes Baumann**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Viviane de Oliveira Kfoury graduou-se em Matemática pela UFRN. Durante a graduação foi bolsista da CAPES e recebeu a Medalha de Mérito Estudantil, como a melhor concluinte do curso, no primeiro período letivo de 1994. Concluiu o curso de Especialização em Instrumentação para o Ensino de Matemática, no ano de 2007, na UFF.

*“Talvez o melhor motivo para se considerar a matemática uma arte não seja o fato dela proporcionar uma saída para a atividade criadora, mas sim sua capacidade de proporcionar valores espirituais. Ela põe o homem em contato com as aspirações maiores e com os objetivos mais sublimes. Oferece prazer intelectual e a exaltação de resolver os mistérios do universo.”*

*(Morris Kline)*

# Agradecimentos

Aos meus filhos: Tiago, por sempre ter acreditado em mim, até quando eu mesma não acreditava; aquele que as vezes que dizia haver ido bem em uma prova, agia como se fosse a coisa mais natural do mundo, parecia não esperar menos de sua mãe; e Guilherme, que tanto me incentivou. (Inesquecível a vez em que pedi que me desejasse sorte em uma prova e ele me disse que tirasse um dez. Brincando, disse-lhe que um cinco era suficiente e ele me olhou bem sério nos olhos e perguntou-me se havia estudado para tirar dez ou para tirar cinco. Respondi-lhe que para tirar dez. Então disse-me: “Vá e não volte com menos que nove.” Assim o fiz!)

À minha mãe, Asileide, e aos demais familiares, por todas as orações - sempre tão necessárias! - que me davam o apoio e a serenidade necessários para continuar a jornada.

Aos meus amigos, pelas vezes que compreenderam (ou não!) que não podia ficar com eles porque tinha que estudar.

E, finalmente, ao meu grande mestre Luiz Antônio Rosa Braz, pelos dois anos de paciência e atenção que me dedicou; sempre entusiasmado em me ensinar, exemplo vivo de um verdadeiro **Professor**.

# Resumo

Apresenta-se, neste trabalho, um estudo relacionado ao número de ouro, representado pela letra grega  $\phi$  (lê-se: “Fí”), em homenagem ao escultor grego Fídias, que fazia uso desse número em suas obras. É feita uma abordagem algébrica, onde é mostrado como chegar ao número  $\phi$ , com o uso de razões, proporções e equações do 2º grau. Faz-se, também, uso de construções geométricas para a sua obtenção. A metodologia empregada é de natureza teórica e prática, propondo-se atividades onde o concreto auxilia o ensino da geometria abstrata na construção, por exemplo, do retângulo áureo e da espiral logarítmica. É mostrada, também, a relação intrínseca que há entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci e, ainda, é demonstrado que  $\phi$  é um número irracional e algébrico. O objetivo principal é promover a reflexão da importância desse número através de um projeto a ser desenvolvido paralelamente às aulas, para alunos do ensino médio.

**Palavras-chave:** Número de ouro, Geometria, Matemática, Sequência de Fibonacci, Retângulo áureo, Espiral logarítmica.

# Abstract

It is shown, in this work, a study about the golden number, represented by the greek character  $\phi$  (pronounced as “Fi”), in tribute to the greek sculptor Fídias, who used to use this number in his works. It is done an algebraic approach, which is shown how to reach the number  $\phi$ , using reasons, proportions and equations of second grade. It is also used geometric constructions for its achievement. The used methodology is made of theory and practice, proposing activities where the concret assists the instruction of abstract geometry, in the construction, for example, of the golden rectangle and the logarithmic spiral. It is also shown the intrinsic relationship of the golden number and the Fibonacci sequence and, as well, it is shown that  $\phi$  is an irrational and algebraic number. The main goal is to promote the thinking of the importance of this number through a project to be developed at the same time as the classes, for students of secondary schools.

**Keywords:** Golden Number, Geometry, Mathematics, Fibonacci sequences, Golden rectangle, Logarithmic spiral.

$\phi$ : o número de ouro

Viviane de Oliveira Kfourri

Março, 2013

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A “Divina” Proporção</b>	<b>4</b>
1.1 Histórico . . . . .	4
1.2 Razão áurea . . . . .	4
1.3 Construção, com régua e compasso, do segmento áureo . . . . .	5
1.4 Valor numérico de $\phi$ . . . . .	7
1.5 Propriedades de $\phi$ como um número . . . . .	9
<b>2 A Ubiquidade do <math>\phi</math></b>	<b>13</b>
2.1 Proporção Áurea e o ângulo de $36^\circ$ . . . . .	13
2.2 O número $\phi$ na trigonometria . . . . .	15
2.3 O pentagrama . . . . .	16
2.4 O problema do cone . . . . .	23
2.5 O retângulo áureo . . . . .	24
2.6 A espiral logarítmica . . . . .	25
<b>3 <math>\phi</math> e Sequências</b>	<b>28</b>
3.1 Sequências numéricas . . . . .	28
3.2 Sequências recorrentes . . . . .	32
3.3 O número $\phi$ e Fibonacci . . . . .	33
<b>4 Projeto</b>	<b>38</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>47</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Lista de Ilustrações

Figura 1.1 - Pentágono Regular . . . . .	5
Figura 1.2 - Triângulo $ABC$ . . . . .	6
Figura 1.3 - Ponto $D$ em $\overline{AC}$ . . . . .	6
Figura 1.4 - $\overline{AP}$ segmento áureo de $\overline{AB}$ . . . . .	6
Figura 1.5 - Segmento $\overline{AB}$ . . . . .	7
Figura 2.1 - Decágono Regular . . . . .	14
Figura 2.2 - Triângulo $OAB$ . . . . .	15
Figura 2.3 - Pentagrama . . . . .	17
Figura 2.4 - Pirâmide $ABCDEH$ . . . . .	22
Figura 2.5 - Cone . . . . .	23
Figura 2.6 - Retângulo Áureo . . . . .	25
Figura 2.7 - Parthenon . . . . .	25
Figura 2.8 - Náutilo . . . . .	26
Figura 2.9 - Espiral Logarítmica . . . . .	26
Figura 3.1 - Reta Numérica . . . . .	30
Figura 3.2 - Gráfico de $\{a_n\}$ . . . . .	30
Figura 3.3 - Gráfico de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . . . . .	31
Figura 3.4 - Gráfico da Sequência $r_n$ . . . . .	31

# Introdução

Um dos maiores desafios que sempre enfrentei ao longo dos meus dezesseis anos como professora de matemática do ensino fundamental e médio foi o de mostrar ao meu aluno a beleza dessa ciência que sempre despertou o meu interesse. É inevitável ouvirmos, a todo o momento, a clássica pergunta: “Mas, professora, para que serve isso?”, ou, ainda, “O que isso vai acrescentar na minha vida?”.

Não venho aqui discutir o currículo que é praticado nas escolas, e sim mostrar um tema que, além de belíssimo, tem uma infinidade de aplicações práticas: o “número de ouro”.

A importância do número de ouro no ensino/aprendizado do aluno está no fato de que esse tema pode tornar a aula de geometria muito mais dinâmica. A exploração dos conceitos e procedimentos através da prática possibilita ao aluno o conhecimento significativo e, assim, ele percebe a matemática presente nas situações do dia-a-dia.

Quando o professor dá a oportunidade ao aluno de manusear o objeto do conhecimento, este fica mais próximo da sua realidade.

Além disso, o número de ouro pode valer também como ponto de partida para introduzir os números irracionais e a equação do segundo grau, sendo assim, indicado para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Toda vez que abordo esse assunto em sala de aula - geralmente no 9º ano do ensino fundamental e nas 1ª e 2ª séries do ensino médio -, parece que uma onda de eletricidade percorre o ambiente e vejo despertar em vários olhares um súbito interesse e sede de aprender. O tema desperta fascínio; por ser tão misterioso, tem sua existência creditada a Deus, afinal, somente Ele para criar um número tão poderoso que aparece nos mais diversos e estranhos lugares, como nas artes, nos animais, nas plantas e em algumas

figuras!

Este trabalho tem a pretensão de auxiliar os meus colegas professores nessa labuta tão difícil que é o exercício dessa profissão que abraçamos. Já dizia Poincaré: “O matemático não estuda a matemática pura porque ela seja útil; ele a estuda porque deleita-se com ela, e deleita-se com ela porque ela é bela.”

Começo nos dias de Pitágoras, mostrando o que é a “proporção divina”, a “razão áurea” e como obter geometricamente o “número de ouro”. Para os gregos, esse tipo de proporção - presente, por exemplo, nas diagonais de um pentágono, em que os pontos de encontro de duas diagonais dividem cada diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior segmento é igual à razão deste para o menor segmento - era muito familiar e não se dava nome a esse tipo de subdivisão.

Atribui-se a Pitágoras e seus seguidores o estudo das proporções (Mattéi, [8]). Conta-se que Pitágoras, em suas andanças pela Mesopotâmia, soube das três médias: aritmética, geométrica e harmônica - e da “proporção áurea”, que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para a sua média aritmética assim como a média harmônica está para o segundo número. Não sabemos, ao certo, em que momento da história isso ocorreu; temos apenas que o estudo das proporções ou das igualdades entre razões formava de início uma parte da aritmética (ou teoria dos números) pitagórica.

Logo em seguida, nesse trabalho, mostro como obter geométrica e algebricamente o tão famoso número, ao qual atribuímos a letra grega  $\phi$ , e passamos a chamá-lo de  $\Phi$ , para, então, classificá-lo como um número irracional e algébrico, isto é, não transcendente. Começo o meu primeiro capítulo dessa forma para estimular as habilidades mentais do aluno.

Como disse Arquimedes: “Dê-me um ponto de apoio e eu moverei o mundo!”. Assim é o aluno, que se maravilha quando consegue por em prática os algoritmos que aprendeu.

Na sequência, tenho a intenção de despertá-lo para a beleza e para as curiosidades que envolvem esse número, - o que faço no próximo capítulo. Esse foi um momento particularmente difícil, pois rica é a nossa literatura nesse campo e me vi na necessidade de escolher apenas alguns exemplos para abordar neste trabalho, caso contrário, correria o risco de escrever um livro sobre ele.

---

E, uma vez que falamos de Pitágoras, começo o segundo capítulo desvendando o símbolo de sua tão famosa escola, o Pentagrama. É impressionante o número de vezes que encontramos o número  $\phi$  nessa simples figura. Será que foi escolhida por acaso? Em se tratando de Pitágoras, dificilmente.

Eis que nos deparamos, então, com um ângulo muito especial, o de  $36^\circ$ , e vemos que ele também está relacionado à razão áurea, e aí faço uma aplicação na trigonometria e na geometria espacial, para diversificarmos a nossa área de estudo. Para finalizar esse capítulo, uma vez que a existência do  $\phi$  está diretamente ligada à beleza, vemos ele nas artes e na natureza. (Assista [15]).

No terceiro capítulo, faço um aprofundamento maior no assunto. Nesse contexto, foi necessário todo um embasamento teórico para que o aluno entendesse o que são sequências. Lancei mão de alguns teoremas e procurei usar vários exemplos para não correr o risco de abstrair demais esses assuntos e, por seguinte, de comprometer o aluno.

Dentre as sequências apresentadas, a mais importante para este trabalho é, sem dúvida, a de Fibonacci (Lintz, [7]), matemático italiano nascido em Pisa (1170 - 1250) que, desde jovem, se mostrou ávido de saber e empreendeu inúmeras viagens ao Egito, à Síria, à Grécia e a todo o Mediterrâneo. Em uma de suas obras mais conhecidas, a *Liber Abaci*, publicada em 1202, são tratados problemas envolvendo sequências de números obedecendo a certas regras, como os célebres “números de Fibonacci”, ilustrados com o problema da reprodução de coelhos, descrito na Seção 3.1. Curiosamente, esses números aparecem na estrutura física de diversos organismos na natureza, como no arranjo das folhas numa planta, na espiral de certas conchas, nas protuberâncias da casca de abacaxi, etc.. Daí o fascínio pela mística desses números.

Por fim, como desfecho do trabalho, apresento, no quarto capítulo, uma proposta de projeto de aula, o qual seria desenvolvido com os alunos e abordaria tudo o que foi apresentado até o momento.

# Capítulo 1

## A “Divina” Proporção

### 1.1 Histórico

A história do número de ouro perde-se na Antiguidade.

No Egito, as pirâmides de Gizé (2550 a.C.) foram construídas utilizando-se a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro.

O Papiro de Rhind (1650 a.C.) refere-se a uma “razão sagrada”, que se crê ser o número de ouro.

Construído muitas centenas de anos depois (entre 447 e 433 a.C.), o Parthenon, templo representativo do século de Péricles, exibe a razão de ouro no retângulo que contém sua fachada (largura/altura), o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa.

### 1.2 Razão áurea

Um dos nomes mais conhecidos e usado como referência para diversos trabalhos é o do filósofo grego Pitágoras (569 - 500 a.C.). Profeta e místico, nascido em Samos, Pitágoras viajou por lugares como o Egito, a Babilônia e a Índia, absorvendo conhecimentos e informações sobre matemática, astronomia e, até mesmo, religião (Boyer, [2]).

Retornando ao mundo grego, estabeleceu-se na Magna Grécia e fundou uma sociedade secreta que tinha no estudo da matemática e da filosofia a base moral para a sua conduta.

A importância dos pitagóricos deve-se ao fato, principalmente, de que naquela época o papel da aritmética e da geometria era apenas o de resolver problemas práticos e específicos como: medição de terra, construção de pirâmides e repartição de colheira. Foram eles que começaram a discutir a matemática, mais pela sua beleza e menos pela sua aplicabilidade.

Os pitagóricos observaram que nos pentágonos regulares o ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer divide cada uma delas na proporção áurea (RPM, [14]).

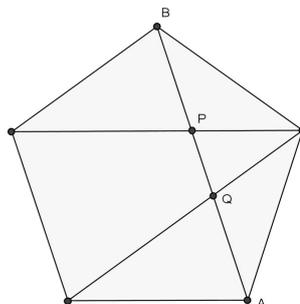


Figura 1.1: *Pentágono Regular*

Dizemos que  $P$  divide  $\overline{AB}$  na proporção áurea se, e somente se,

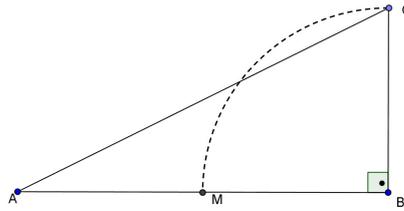
$$\frac{\|\overline{PA}\|}{\|\overline{PB}\|} = \frac{\|\overline{AB}\|}{\|\overline{PA}\|}.$$

O segmento  $\overline{PA}$  é chamado segmento áureo de  $\overline{AB}$ ,  $\|\overline{PA}\|^2 = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{PB}\|$  e a razão  $\frac{\|\overline{AB}\|}{\|\overline{PA}\|}$ , conhecida como razão áurea, nos dá o número de ouro.

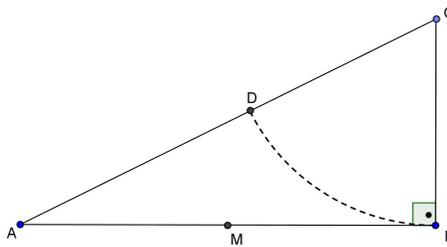
## 1.3 Construção, com régua e compasso, do segmento áureo

Como obter geometricamente um segmento áureo?

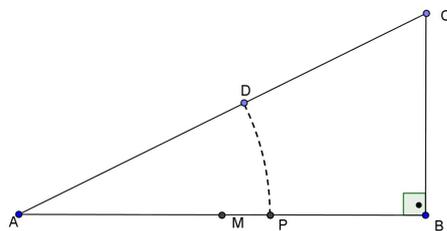
Precisamos obter um ponto  $P$ , tal que  $\overline{PA}$  seja o segmento áureo de  $\overline{AB}$ , isto é,  $\|\overline{PA}\|^2 = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{PB}\|$ . Para tanto, traçamos um segmento  $\overline{AB}$ , determinamos o seu ponto médio  $M$  e desenhamos um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $B$  e tal que  $\|\overline{BC}\| = \frac{\|\overline{AB}\|}{2}$  (ver Fig. 1.2).

Figura 1.2: *Triângulo ABC*

Vamos transportar  $\overline{CB}$  para  $\overline{CA}$  e determinar o ponto  $D$  (ver Fig. 1.3).

Figura 1.3: *Ponto D em AC*

Agora, basta transportar  $\overline{AD}$  para  $\overline{AB}$  e determinar o ponto  $P$  (ver Fig. 1.4).

Figura 1.4:  $\overline{AP}$  - segmento áureo de  $\overline{AB}$ 

Observe que  $\overline{AP}$  é o segmento áureo de  $\overline{AB}$ .

Vamos verificar isso algebricamente.

Pelo Teorema de Pitágoras e pelo fato do triângulo  $ABC$  ser retângulo, temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{AC}\|^2 &= \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 \\ (\|\overline{AD}\| + \|\overline{DC}\|)^2 &= \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 \\ \left(\|\overline{PA}\| + \frac{\|\overline{AB}\|}{2}\right)^2 &= \|\overline{AB}\|^2 + \left(\frac{\|\overline{AB}\|}{2}\right)^2 \\ \|\overline{PA}\|^2 + \|\overline{PA}\| \cdot \|\overline{AB}\| + \frac{\|\overline{AB}\|^2}{4} &= \|\overline{AB}\|^2 + \frac{\|\overline{AB}\|^2}{4} \\ \|\overline{PA}\|^2 &= \|\overline{AB}\|^2 - \|\overline{PA}\| \cdot \|\overline{AB}\| \\ \|\overline{PA}\|^2 &= \|\overline{AB}\|^2 - (\|\overline{AB}\| - \|\overline{PB}\|) \cdot \|\overline{AB}\| \\ \|\overline{PA}\|^2 &= \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{PB}\|. \end{aligned}$$

□

## 1.4 Valor numérico de $\phi$

Sugeriu-se, no início do século passado, que a letra grega  $\phi$  - a letra inicial do nome de Fídias, famoso escultor grego que fazia uso da divina proporção em suas obras - fosse adotada para designar a razão áurea. Vamos obter numericamente o valor de  $\phi$ .

Tomemos um segmento  $\overline{AB}$  e um ponto  $P$  tal que  $P$  divide  $\overline{AB}$  na proporção áurea (ver Fig. (1.5)).



Figura 1.5: *Segmento  $\overline{AB}$*

Tomando  $\|\overline{AP}\| = x$  e  $\|\overline{PB}\| = 1$  (1 unidade qualquer), temos que

$$\frac{\|\overline{PA}\|}{\|\overline{PB}\|} = \frac{\|\overline{AB}\|}{\|\overline{PA}\|},$$

onde

$$\frac{||\overline{PA}||}{||\overline{PB}||} = x = \phi.$$

Logo,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Isto é,

$$\phi = 1,618034\dots$$

e

$$\phi' = -0,618034\dots$$

onde  $\phi'$  é o inverso negativo de  $\phi$ , isto é,  $\phi \cdot \phi' = -1$ . Observe que

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\phi'.$$

O  $\phi$  é o único número que, diminuído em uma unidade, torna-se o seu próprio recíproco, ou seja,

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi},$$

isto é,

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Se ao invés de  $||\overline{PB}|| = 1$ , tomarmos  $||\overline{AP}|| = 1$  e  $||\overline{PB}|| = x'$ , então

$$\frac{x'+1}{1} = \frac{1}{x'},$$

isto é,

$$x'^2 + x' - 1 = 0.$$

A solução positiva dessa equação é

$$x' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\dots,$$

valor que, precedido do sinal negativo, chamamos de  $\phi'$ .

## 1.5 Propriedades de $\phi$ como um número

**Propriedade 1.5.1**  $\phi$  é um número irracional.

É nosso propósito agora deduzir uma regra simples (Teorema 1.5.2) que nos possibilite descobrir todas as raízes racionais de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Dessa forma, poderemos separar as raízes racionais das irracionais de uma equação e, dessa forma, estabeleceremos a irracionalidade de uma ampla classe de números.

**Teorema 1.5.1** *Sejam  $u, v$  e  $w$  inteiros e  $n$  um inteiro positivo tais que  $u$  seja um divisor de  $v^n \cdot w$  e  $u$  e  $v$  não possuam fatores primos comuns. Então  $u$  é um divisor de  $w$ .*

**Exemplo 1:** Sejam  $u = 2, v = 3$  e  $v \cdot w = 12$ . Como 2 divide 12 e 2 e 3 não possuem fatores primos comuns, estão satisfeitas as condições do Teorema 1.5.1 e a conclusão de que 2 divide 12 é válida.

**Exemplo 2:** Sejam  $u = 4, v = 5$  e  $v^3 \cdot w = 500$ . Os números 4 e 5 não possuem fatores primos comuns e 4 é divisor de 500. Logo, é verdade que 4 divide  $w = \frac{500}{125} = 4$ .

**Teorema 1.5.2** *Considere uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros*

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0 \quad (1.1)$$

*Se esta equação tiver uma raiz racional  $\frac{a}{b}$ , onde  $\frac{a}{b}$  é uma fração irredutível, então  $a$  será um divisor de  $c_0$  e  $b$  um divisor de  $c_n$ . (Niven, [9])*

**Demonstração:** Seja  $\frac{a}{b}$  uma raiz da equação (1.1). Então

$$c_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + c_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1 \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0. \quad (1.2)$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade por  $b^n$ , obtemos:

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + c_2 a^2 b^{n-2} + c_1 a b^{n-1} + c_0 b^n = 0. \quad (1.3)$$

Que pode ser reescrita como:

$$c_n a^n = -c_{n-1} a^{n-1} b - \dots - c_2 a^2 b^{n-2} - c_1 a b^{n-1} - c_0 b^n,$$

ou

$$c_n a^n = b(-c_{n-1} a^{n-1} - \dots - c_2 a^2 b^{n-3} - c_1 a b^{n-2} - c_0 b^{n-1}).$$

Donde vemos que  $b$  é um divisor de  $c_n a^n$ .

Aplicando o Teorema 1.5.1, com  $b, a$  e  $c_n$  no lugar de  $u, v$  e  $w$ , respectivamente, concluimos que  $b$  é um divisor de  $c_n$ .

Agora, vamos escrever a equação (1.3) da seguinte forma:

$$c_0 b^n = -c_n a^n - c_{n-1} a^{n-1} b - \dots - c_2 a^2 b^{n-2} - c_1 a b^{n-1}.$$

Isto é,

$$c_0 b^n = a(-c_n a^{n-1} - c_{n-1} a^{n-2} b - \dots - c_2 a b^{n-2} - c_1 b^{n-1}).$$

Donde obtemos que  $a$  divide  $c_0 b^n$  e, novamente de acordo com o Teorema 1.5.1, colocando  $a, b$  e  $c_0$ , respectivamente, no lugar de  $u, v$  e  $w$ , concluimos que  $a$  é um divisor de  $c_0$ .

□

**Exemplo 3:** Consideremos a equação  $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$ . Pelo Teorema 1.5.2, se  $\frac{a}{b}$  for uma raiz racional,  $\frac{a}{b}$  irredutível, então  $a$  será um divisor de  $-3$  e  $b$  será um divisor de  $2$ .

Assim, os possíveis valores para  $a$  são  $1, -1, 3$  e  $-3$  e os valores para  $b$  são  $1, -1, 2$  e  $-2$ . Combinando essas possibilidades obtemos os seguintes valores possíveis para  $\frac{a}{b}$ :  $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{3}{2}$  e  $-\frac{3}{2}$ . Destes, apenas  $1, \frac{1}{2}$  e  $3$  são raízes da equação e, dessa forma, verificamos que  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  satisfaz o Teorema 1.5.2.

Analisemos, agora, o que acontece quando  $c_n = 1$ .

**Corolário 1.4.1** *Considere uma equação da forma*

$$x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros. Se esta equação possuir uma raiz racional, ela será um número inteiro; além do mais, esta raiz inteira será um divisor de  $c_0$ .

**Demonstração:** Considere  $\frac{a}{b}$  uma raiz racional da equação e suponha que  $b$  seja um inteiro positivo (caso contrário, pode-se absorver o sinal negativo de  $b$  em  $a$ ). Pelo Teorema 1.5.2,  $b$  tem que dividir 1. Mas,  $+1$  e  $-1$  são os únicos divisores de 1, logo  $b = +1$ .

Dessa forma, qualquer raiz racional será da forma  $\frac{a}{1}$  e, portanto, será um inteiro  $a$ . Ainda, de acordo com o Teorema 1.5.2,  $a$  será um divisor de  $c_0$ .

□

Agora, enfim, podemos mostrar que  $\phi$  é um número irracional.

Chamemos  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Segue que:  $2x - 1 = \sqrt{5}$  e, elevando-se ambos os membros dessa igualdade ao quadrado, obtemos:

$$4x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$4x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

A maneira como essa equação foi construída mostra que  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é uma de suas raízes.

De acordo com o Corolário 1.4.1, se esta equação possuísse raízes racionais, estas deveriam ser números inteiros, divisores de 1. Mas os únicos números divisores de 1 são  $+1$  e  $-1$ , nenhum dos quais é raiz de  $x^2 - x - 1 = 0$ . Logo essa equação não possui raiz racional. Concluímos, assim que  $\phi$  é um número irracional.

**Propriedade 1.5.2**  $\phi$  não é um número transcendente.

**Definição 1.5.1** Qualquer número que seja solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes  $a_i$ 's são inteiros, é chamado um **número algébrico**.

---

**Definição 1.5.2** *Um número que não seja algébrico é chamado **transcendente**.*

Dessa forma, pelo o que vimos anteriormente,  $\phi$  é solução da equação polinomial  $x^2 - x - 1 = 0$ , cujos coeficientes são inteiros. Assim,  $\phi$  é um número algébrico e, portanto, não transcendente.

# Capítulo 2

## A Ubiquidade do $\phi$

Ubiquidade é a propriedade de estar presente em diversos lugares. O  $\phi$  possui essa propriedade. É possível encontrá-lo, por exemplo:

- nas artes: na obras de Leonardo da Vinci, como no “Homem Vitruviano” e na “Monalisa”, onde o autor lança mão do retângulo áureo diversas vezes.
- na arquitetura: nas obras do arquiteto Lê Corbusier, que desenvolveu um sistema de medição conhecido como “Modulor”, onde utiliza o número de ouro para encontrar harmonia nas suas composições.
- na música: seja na construção de instrumentos, como o violino; seja nas composições de Mozart, Bethoven (Quinta Sinfonia) e Schubert, que se utilizaram da razão áurea.

Veremos, então, alguns problemas interessantes que envolvem esse número tão especial. Para tanto, precisaremos ver a relação entre  $\phi$  e o ângulo de  $36^\circ$ .

### 2.1 Proporção Áurea e o ângulo de $36^\circ$

O número  $\phi$  aparece em muitas construções geométricas. Por exemplo, em um triângulo isósceles, onde a medida do ângulo menor seja igual à metade da medida dos outros dois maiores, ou seja, um ângulo de  $36^\circ$  e dois de  $72^\circ$ .

O número de ouro aparece como a razão entre um dos lados maiores e o lado menor. Vejamos:

Um ângulo é dito central quando seu vértice coincide com o centro de um círculo e a medida desse ângulo é igual à medida do arco determinado por ele sobre o círculo.

Ao inscrevermos um decágono regular em um círculo, este fica dividido em 10 arcos congruentes e iguais a  $36^\circ$ . Assim, a medida de um ângulo central desse decágono é igual a  $36^\circ$ . Veja na figura a seguir um decágono regular inscrito em um círculo de raio unitário e centro  $O$ .

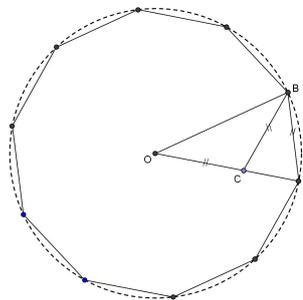


Figura 2.1: *Decágono Regular*

Seja  $C$  um ponto sobre o raio  $OA$  tal que  $BC$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{OBA}$ . Como o triângulo  $OBA$  é isósceles ( $BO = AO$ ) e  $\widehat{BOA} = 36^\circ$ , segue que  $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 72^\circ$  e, portanto,  $\widehat{OBC} = 36^\circ$ .

O ângulo  $\widehat{BCA}$  é externo ao triângulo  $OBC$  e mede  $72^\circ$ , logo, os triângulos  $ABC$  e  $OBC$  são também isósceles e  $OC = BC = AB$ .

Façamos  $AB = x$ . Como o raio é unitário,  $AO = BO = 1$  e, como os triângulos  $BOA$  e  $ABC$  são semelhantes (pelo critério de semelhança ângulo-ângulo), temos que

$$\frac{BO}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

isto é,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Assim, concluímos que  $C$  divide o raio na proporção áurea (Freire, [4]). Com isso, toda vez que precisarmos construir um ângulo de  $36^\circ$  (ou de  $72^\circ$ , ou de  $108^\circ$ ), basta

fazermos:

- **PASSO 1:** Determinar o ponto  $C$ , tal que  $C$  divide  $\overline{OA}$  na proporção áurea (processo já demonstrado anteriormente).

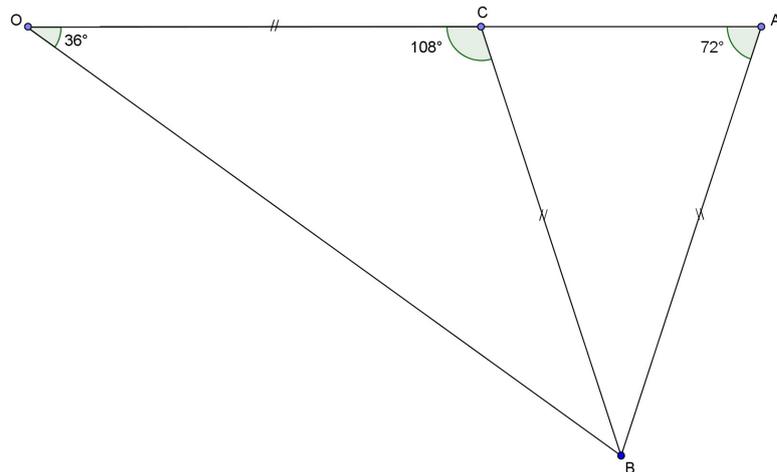


Figura 2.2: *Triângulo OAB*

- **PASSO 2:** Com centro em  $C$  e raio  $CO$ , descreva um arco. Com o mesmo raio e centro em  $A$ , descreva um novo arco e obtenha o ponto  $B$  na interseção dos dois arcos.
- **PASSO 3:** Ligue  $CB$ .

Pronto, obtemos  $\widehat{AOB} = 36^\circ$ ,  $\widehat{OAB} = 72^\circ$  e  $\widehat{OCB} = 108^\circ$ .

Nas próximas seções, exporemos algumas curiosidades relativas ao número  $\phi$ .

## 2.2 O número $\phi$ na trigonometria

Nessa seção iremos responder à seguinte questão: é possível encontrarmos o número  $\phi$  na trigonometria? (Huntley, [5])

Sim, para tanto, peguemos uma simples equação trigonométrica como exemplo:

$$\text{sen } 2\theta = \cos 3\theta.$$

Sabendo que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar, temos que  $2\theta$  e  $3\theta$  são complementares, isto é,  $2\theta + 3\theta = 90^\circ$  e, dessa forma, concluímos que  $\theta = 18^\circ$ .

Assim, se aplicarmos as regras de transformações trigonométricas (Dante, [3]) à nossa equação obtemos que  $\cos\theta(4\sin^2\theta + 2\sin^2\theta - 1) = 0$ . Como  $\cos\theta > 0$ , pois  $\theta = \frac{\pi}{10}$ , temos que  $4\sin^2\theta + 2\sin^2\theta - 1 = 0$ .

Resolvendo essa equação encontramos que  $\sin\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$  e, como  $\sin\theta > 0$ , temos que  $\sin\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ , isto é,  $\sin 18^\circ = -\frac{1}{2}\phi'$ .

Além disso, como  $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ , temos que  $\cos 36^\circ = \frac{1}{2}\phi$ .

Incrível! Observamos mais uma vez o número  $\phi$  no nosso cotidiano matemático e relacionado ao ângulo de  $36^\circ$ .

## 2.3 O pentagrama

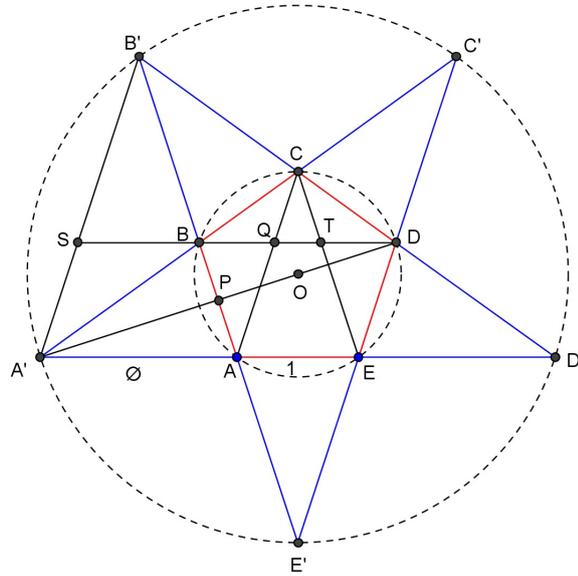
Nesta seção, trabalharemos com o pentagrama: símbolo da sociedade pitagórica. Ele é rico em seções áureas.

Vamos contruí-lo:

- **PASSO 1:** Inscrever um pentágono regular de lado com medida igual a uma unidade em um círculo de centro  $O$  e raio  $r$  (basta lembrar que a soma dos ângulos internos de um pentágono é  $540^\circ$ , assim cada ângulo interno é igual a  $108^\circ$  e acabamos de aprender a construir um ângulo de  $72^\circ$ , que é seu suplemento).
- **PASSO 2:** Prolongar os lados desse pentágono até formar uma estrela

$$AA'BB'CC'DD'EE'.$$

- **PASSO 3:** Traçar o círculo de centro  $O$  e raio  $\overline{OA'}$ , onde  $|\overline{OA'}| = R$ .
- **PASSO 4:** Traçar  $\overrightarrow{DO}$  e encontrar o ponto  $P$ , tal que  $P \in \overline{AB}$ .
- **PASSO 5:** Obter  $Q$ , ponto de intersecção das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ ; e obter o ponto  $T$ , na intersecção das diagonais  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$ .
- **PASSO 6:** Traçar  $\overrightarrow{DB}$  e encontrar o ponto  $S$ , tal que  $S \in \overline{A'B'}$ .

Figura 2.3: *Pentagrama*

Considerando a Figura 2.3, temos que: (Augusto [1] e RPM [14])

**Propriedade 2.3.1**  $||\overline{A'A}|| = \phi$ .

**Demonstração:** Como dissemos,  $\widehat{PAE} = 108^\circ$ , logo  $\widehat{PAA'} = 72^\circ$ .

Observe que  $\overline{OP}$  é um apótema do pentágono  $ABCDE$  e, portanto, forma  $90^\circ$  com  $\overline{AP}$ . Dessa forma,  $\widehat{A'PA} = 90^\circ$  e  $\widehat{PA'A} = 18^\circ$ . Do triângulo  $\Delta PA'P$ , temos

$$\begin{aligned} \text{sen } 18^\circ &= \frac{\frac{1}{2}}{||\overline{A'A}||} \\ -\frac{1}{2}\phi' &= \frac{\frac{1}{2}}{||\overline{A'A}||} \quad (\text{da seção 2.2}) \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\phi}\right) &= \frac{\frac{1}{2}}{||\overline{A'A}||} \quad (\text{da seção 1.4}) \\ \frac{1}{2\phi} &= \frac{\frac{1}{2}}{||\overline{A'A}||} \\ ||\overline{A'A}|| &= \phi \end{aligned}$$

□

**Propriedade 2.3.2**  $\frac{\|\overline{OP}\|}{r} = \frac{\phi}{2}$ .

**Demonstração:** Observando o triângulo  $\Delta OPA$ , temos que  $\|\overline{OA}\| = r$ ,  $\|\overline{PA}\| = \frac{1}{2}$ ,  $O\hat{P}A = 90^\circ$  e  $O\hat{A}P = 54^\circ$ . Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 54^\circ &= \frac{\|\overline{OP}\|}{\|\overline{OA}\|} = \frac{\phi}{2} \quad (\text{pois } \operatorname{sen} 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}) \\ 2 \cdot \operatorname{sen} 54^\circ &= \phi \\ (2 \cdot \operatorname{sen} 54^\circ)^2 &= \phi + 1 \quad (\text{pois } \phi^2 = \phi + 1) \\ 4 \left( \frac{\|\overline{OP}\|}{\|\overline{OA}\|} \right)^2 &= \phi + 1 \\ 2 \left( \frac{\|\overline{OP}\|}{\|\overline{OA}\|} \right) &= \sqrt{\phi + 1} \end{aligned}$$

E, assim,  $\frac{\|\overline{OP}\|}{r} = \frac{\sqrt{\phi + 1}}{2} = \frac{\phi}{2}$ .

□

**Propriedade 2.3.3**  $\frac{\|\overline{OA'}\|}{r} = \phi^2$ .

**Demonstração:** Temos que  $\|\overline{OA'}\| = R$ , logo queremos mostrar que  $\frac{R}{r} = \phi^2$ .

Observe que os triângulos  $\Delta A'OE$  e  $\Delta A'ED$  são semelhantes (pois,  $O\hat{A}E' \equiv E\hat{A}'D$  e  $A'\hat{E}O \equiv A'\hat{D}E = 54^\circ$ ) e  $\|\overline{A'O}\| = R$ ,  $\|\overline{A'E}\| = \phi + 1$ ,  $\|\overline{OE}\| = r$  e  $\|\overline{DE}\| = 1$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\|\overline{A'O}\|}{\|\overline{A'E}\|} &= \frac{\|\overline{OE}\|}{\|\overline{ED}\|} \\ \frac{R}{\phi + 1} &= \frac{r}{1} \\ \frac{R}{r} &= \frac{\phi + 1}{1} \\ \frac{R}{r} &= \phi^2 \end{aligned}$$

□

**Propriedade 2.3.4**  $\frac{||\overline{OA'}||}{||\overline{OP}||} = 2\phi$ .

**Demonstração:** Das Propriedades 2.3.2 e 2.3.3, temos que  $||\overline{OP}|| = \frac{r \cdot \phi}{2}$  e  $||\overline{OA'}|| = r \cdot \phi^2$ .

$$\text{Assim, } \frac{||\overline{OA'}||}{||\overline{OP}||} = 2\phi.$$

□

**Propriedade 2.3.5**  $||\overline{BD}|| = \phi$ .

**Demonstração:** Analisemos, inicialmente, o triângulo  $\triangle EBD$ . O ângulo  $\widehat{EBD} = 36^\circ$ , pois é inscrito e determina o arco  $\widehat{DE} = 72^\circ$ . Da mesma forma, o ângulo  $\widehat{BDE} = 72^\circ$ , pois é inscrito e determina o arco  $\widehat{EAB} = 144^\circ$ . Logo,  $\widehat{DEB} = 72^\circ$ .

Agora, analisando o triângulo  $\triangle CDQ$ , vemos que o ângulo  $\widehat{CDQ} = 36^\circ$ , pois é inscrito e determina o arco  $\widehat{CB} = 72^\circ$ . O ângulo  $\widehat{QCD} = 72^\circ$ , pois é inscrito e determina o arco  $\widehat{DEA} = 144^\circ$ . Logo,  $\widehat{CQD} = 72^\circ$ .

Dessa forma, concluímos que os triângulos  $\triangle EBD$  e  $\triangle CDQ$  são semelhantes e  $\frac{||\overline{BD}||}{||\overline{DQ}||} = \frac{||\overline{ED}||}{||\overline{CQ}||}$ .

Agora, observando o triângulo  $\triangle CQD$ , vemos que ele é isósceles e, portanto,  $||\overline{CD}|| = ||\overline{QD}||$ . Uma vez que  $||\overline{CD}|| = ||\overline{ED}||$ , temos que  $||\overline{ED}|| = ||\overline{QD}||$ . E observando o triângulo  $\triangle CQB$ , vemos que ele também é isósceles e, assim,  $||\overline{CQ}|| = ||\overline{BQ}||$ .

Dessa forma, temos que

$$\frac{||\overline{BD}||}{||\overline{DQ}||} = \frac{||\overline{QD}||}{||\overline{BQ}||}.$$

Considerando  $||\overline{BD}|| = d$  e sabendo que  $||\overline{CD}|| = ||\overline{DQ}|| = 1$ , temos que

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1}$$

e  $d^2 - d - 1 = 0$ .

$$\text{Logo, } d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Assim, podemos concluir que todas as diagonais do pentágono inscrito na circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  medem  $\phi$ .

□

**Propriedade 2.3.6** *Se  $Q$  é o ponto de intersecção de duas diagonais,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , então  $\frac{||\overline{DQ}||}{||\overline{QB}||} = \phi$ ,  $\frac{||\overline{AQ}||}{||\overline{QC}||} = \phi$  e  $\frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{QE}||} = \phi$ .*

**Demonstração:**  $Q$  é o ponto de intersecção das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , então

$$\frac{||\overline{DQ}||}{||\overline{QB}||} = \frac{||\overline{BD}||}{||\overline{QD}||}.$$

Mas, na demonstração da Propriedade 2.3.5, vimos que  $||\overline{BD}|| = \phi$  e  $||\overline{QD}|| = 1$ , logo

$$\frac{||\overline{DQ}||}{||\overline{QB}||} = \phi.$$

Assim,

$$\frac{||\overline{AQ}||}{||\overline{QC}||} = \frac{||\overline{BD}||}{||\overline{QD}||} = \frac{\phi}{1} = \phi.$$

Além disso, os triângulos  $\Delta B'BQ$  e  $\Delta B'AE$  são semelhantes (pois  $\overline{BQ} \parallel \overline{AE}$ ), logo

$$\frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{B'B}||} = \frac{||\overline{B'E}||}{||\overline{B'A}||}.$$

$$\text{Assim, } \frac{||\overline{B'Q}||}{\phi} = \frac{||\overline{B'E}||}{\phi + 1}.$$

$$\text{Então, } \frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{B'E}||} = \frac{\phi}{\phi + 1} = \frac{\phi}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{B'Q} + \overline{QE}||} &= \frac{1}{\phi} \\ \frac{||\overline{B'Q} + \overline{QE}||}{||\overline{B'Q}||} &= \phi \\ 1 + \frac{||\overline{QE}||}{||\overline{B'Q}||} &= \phi \\ \frac{||\overline{QE}||}{||\overline{B'Q}||} &= \phi - 1 \\ \frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{QE}||} &= \frac{1}{\phi - 1} = \phi. \end{aligned}$$

□

**Propriedade 2.3.7**  $\frac{||\overline{B'S}||}{||\overline{SA'}||} = \frac{||\overline{B'B}||}{||\overline{BA}||} = \frac{||\overline{B'D}||}{||\overline{DD'}||} = \phi.$

**Demonstração:** Observamos que  $\overline{SD} // \overline{A'D'}$ , então

$$\frac{||\overline{B'S}||}{||\overline{S'A}||} = \frac{||\overline{B'B}||}{||\overline{BA}||} = \frac{\phi}{1} = \phi.$$

Além disso,  $||\overline{B'D}|| = ||\overline{B'C}|| + ||\overline{CD}|| = \phi + 1$ , logo

$$\frac{||\overline{B'D}||}{||\overline{DD'}||} = \frac{\phi + 1}{\phi} = \phi.$$

□

**Propriedade 2.3.8** *Os comprimentos dos seis segmentos  $\overline{B'D'}$ ,  $\overline{B'D}$ ,  $\overline{B'C}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CQ}$  e  $\overline{QT}$  estão em progressão geométrica, de razão  $\phi^{-1}$ .*

**Demonstração:** De fato,

- $||\overline{B'D'}|| = \phi^3$ , pois  $||\overline{B'D'}|| = ||\overline{B'C}|| + ||\overline{CD}|| + ||\overline{D'D}|| = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1 = \phi^3$   
(obs.:  $\phi^3 = 2 + \sqrt{5}$ ).
- $||\overline{B'D}|| = \phi^2$ , pois  $||\overline{B'D}|| = ||\overline{B'C}|| + ||\overline{CD}|| = \phi + 1 = \phi^2$ .
- $||\overline{B'C}|| = \phi$ .
- $||\overline{CD}|| = 1$ .
- $||\overline{CQ}|| = \phi^{-1}$ , pois  $||\overline{CQ}|| = \frac{||\overline{DB}||}{||\overline{DQ}||} = \frac{1}{\phi} = \phi^{-1}$ .
- $||\overline{QT}|| = \phi^{-2}$ .

Como o triângulo  $\Delta BCT$  é isósceles, temos  $||\overline{BT}|| = 1$  e como  $||\overline{CQ}|| = ||\overline{BQ}|| = \phi^{-1}$ , temos que

$$||\overline{QT}|| = ||\overline{BT}|| - ||\overline{BQ}|| = 1 - \phi^{-1} = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{\phi - 1}{\phi} = \frac{\frac{\phi + 1}{\phi} - 1}{\phi} = \frac{\frac{1}{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}.$$

□

**Propriedade 2.3.9**  $\|\overline{A'B'}\| = \|\overline{B'C'}\| = \|\overline{C'D'}\| = \|\overline{D'E'}\| = \|\overline{E'A'}\| = \phi^2$ .

**Demonstração:** De fato,  $\|\overline{A'B'}\| = \|\overline{B'P}\| = \|\overline{B'Q}\| + \|\overline{QP}\| = \phi + 1 = \phi^2$ .

□

**Propriedade 2.3.10** Dobrando-se o triângulo  $\Delta A'AB$  na linha  $\overline{AB}$  e, analogamente, fazendo o mesmo com os triângulos  $\Delta B'BC$ ,  $\Delta C'CD$ ,  $\Delta D'DE$  e  $\Delta E'EA$  de modo que  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$  se encontrem em  $H$ , obtemos uma pirâmide de altura  $\overline{OH}$  (Figura 2.4), tal que  $\frac{\|\overline{OH}\|}{r} = \phi$ .

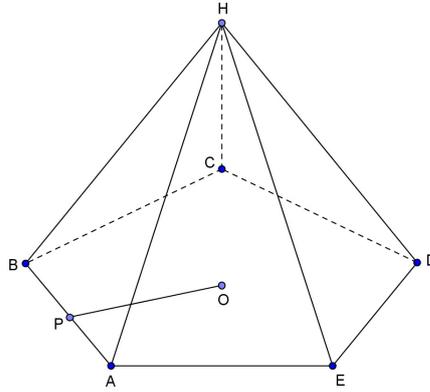


Figura 2.4: Pirâmide ABCDEH

**Demonstração:** De fato, da Propriedade 2.3.4 temos que  $\frac{\|\overline{OA'}\|}{\|\overline{OP}\|} = 2\phi$ . Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\|\overline{OP}\| + \|\overline{PA'}\|}{\|\overline{OP}\|} &= 2\phi \\ 1 + \frac{\|\overline{PA'}\|}{\|\overline{OP}\|} &= 2\phi \\ \frac{\|\overline{PA'}\|}{\|\overline{OP}\|} &= 2\phi - 1. \end{aligned}$$

E, da Propriedade 2.3.2, temos que  $\frac{\|\overline{OP}\|}{r} = \frac{\phi}{2}$ , isto é,  $\|\overline{OP}\| = \frac{r \cdot \phi}{2}$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $\Delta OPH$ , temos que

$$\|\overline{PH}\|^2 = \|\overline{OH}\|^2 + \|\overline{OP}\|^2.$$

Observando que  $||\overline{PH}|| = ||\overline{PA'}||$ , obtemos

$$\begin{aligned} ||\overline{PA'}||^2 &= ||\overline{OH}||^2 + ||\overline{OP}||^2 \\ (2\phi - 1)^2 \cdot ||\overline{OP}||^2 &= ||\overline{OH}||^2 + ||\overline{OP}||^2 \\ ||\overline{OH}||^2 &= ||\overline{OP}||^2 \cdot [(2\phi - 1)^2 - 1] \\ ||\overline{OH}||^2 &= \frac{r^2 \cdot \phi^2}{4} \cdot (4\phi^2 - 4\phi) \\ ||\overline{OH}||^2 &= r^2 \cdot \phi^2 \cdot (\phi^2 - \phi). \end{aligned}$$

Mas, como  $\phi^2 - \phi = 1$ ,

$$\begin{aligned} ||\overline{OH}||^2 &= r^2 \cdot \phi^2 \\ \frac{||\overline{OH}||^2}{r^2} &= \phi^2 \\ \frac{||\overline{OH}||}{r} &= \phi. \end{aligned}$$

□

## 2.4 O problema do cone

Vamos calcular o comprimento do círculo da base de um cone circular reto, cujo ângulo semivertical, em relação à base, é  $54^\circ$ , cujo raio é  $r$  e cuja geratriz é  $g$  (Figura 2.5). Calcularemos, também, a sua área da base e a sua área lateral.

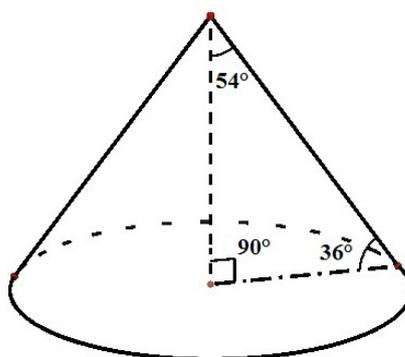


Figura 2.5: *Cone*

Observe que formamos um triângulo retângulo onde um dos seus ângulos internos mede  $36^\circ$ . Logo, pela Seção 2.2, sabemos que  $\cos 36^\circ = \frac{1}{2}\phi$ . Assim,  $\frac{1}{2}\phi = \frac{r}{g}$ , se, e somente se,  $r = \frac{1}{2}g\phi$ .

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r = \pi g\phi, \\ A_B &= \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}g\phi\right)^2 \text{ e} \\ A_L &= \pi r g = \frac{1}{2}\pi g^2\phi. \end{aligned}$$

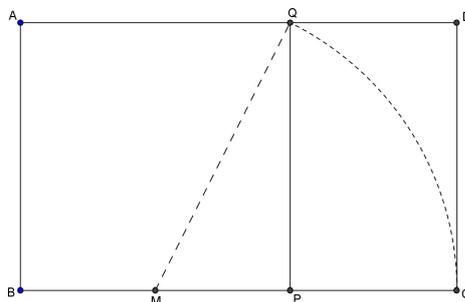
E, portanto, podemos expressar as medidas desse cone em particular em função do nosso famoso número de ouro!

## 2.5 O retângulo áureo

Se observarmos ao nosso redor, podemos ver que somos cercados de muitas figuras retangulares e que alguns retângulos de certas proporções nos atraem mais que outros. O matemático grego Endoxus estudou a teoria das proporções e constatou que a razão áurea era uma importante fonte para a estética, considerando o retângulo cujos lados apresentavam essa relação de notável harmonia (Pereira, [13]). Endoxus chamou-o, então, de retângulo áureo. Observe, por exemplo, o formato das revistas, dos *outdoors*, dos cartões de visita e das fotografias. A publicidade, a indústria e o comércio descobriram há muito tempo que quanto mais próximos esses retângulos estiverem do retângulo áureo, mais belos serão aos nossos olhos e os têm explorado em suas produções.

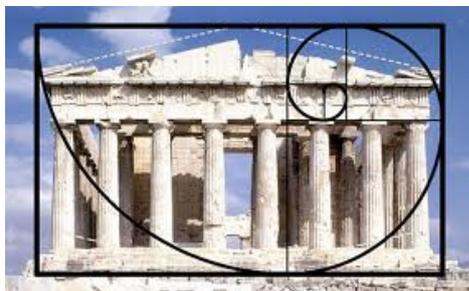
Vamos aprender a construir um retângulo áureo  $ABCD$ .

- **PASSO 1:** Construa um quadrado  $ABPQ$  de lado  $AB$ .
- **PASSO 2:** Determine  $M$ , o ponto médio de  $\overline{BP}$ , e trace um arco de centro  $M$  e raio  $MQ$  que determine o ponto  $C$  no prolongamento de  $\overline{BP}$ .
- **PASSO 3:**  $\overline{BC}$  é um lado do retângulo, sendo  $\overline{BP}$  o segmento áureo de  $\overline{BC}$ .

Figura 2.6: *Retângulo Áureo*

Observe que se fizermos  $BP = 2$  unidades, então  $MQ = MC = \sqrt{5}$  unidades. Assim,  $\frac{BC}{PB} = \frac{BM+MC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ .

Nas artes, um exemplo muito conhecido é a fachada do Parthenon (séc V a.C), em Atenas. Essa é uma das estruturas mais famosas do mundo e suas dimensões obedecem essas proporções, isto é, o seu comprimento está para sua largura, assim como a sua largura está para a diferença entre seu comprimento e sua largura.

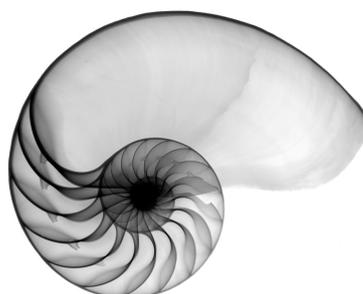
Figura 2.7: *Parthenon*

Fonte: [razaoaureaifsc.blogspot.com](http://razaoaureaifsc.blogspot.com)

## 2.6 A espiral logarítmica

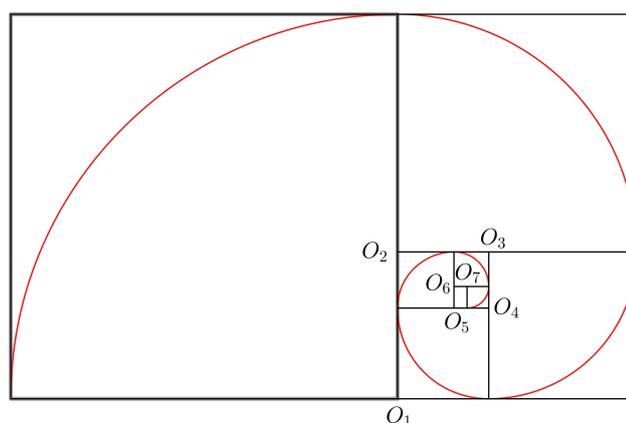
Na natureza, temos alguns animais cujo formato de suas carapaças, ou chifres, lembram uma espiral. É o caso dos caracóis e do náutilo, molusco que bombeia gás para dentro de sua concha para poder regular a profundidade da sua flutuação.

A espiral logarítmica, estudada por Jacob Bernoulli (1654 - 1705), é construída a

Figura 2.8: *Náutilo*

Fonte: *videosnpictures.com*

partir de uma sucessão de retângulos áureos de tamanhos decrescentes e formada por arcos dentro dos quadrados, como podemos observar na Figura 2.9.

Figura 2.9: *Espiral Logarítmica*

Os arcos têm centros nos pontos  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$  e  $O_7$ , e, assim, sucessivamente. Os raios desses arcos são os lados dos quadrados.

Bernoulli escreveu que essa espiral “pode ser usada como um símbolo, tanto de vigor e constância na adversidade, quanto do corpo humano, o qual após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser”. O matemático ficou tão impressionado com a beleza da curva, que pediu essa forma e o lema que atribui a ela: - “Embora mudado, ressurgiu o mesmo” - fossem gravados em seu túmulo.

---

O lema descreve uma propriedade fundamental exclusiva da espiral logarítmica: mesmo que seu tamanho aumente, ela não altera seu formato; característica essa conhecida como auto-similaridade.

# Capítulo 3

## $\phi$ e Sequências

### 3.1 Sequências numéricas

Uma sequência numérica é uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

O número  $a_1$  é chamado de primeiro termo,  $a_2$  é o segundo termo e, dessa forma,  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo. Vamos trabalhar apenas com sequências infinitas, de modo que cada termo  $a_n$  terá um sucessor  $a_{n+1}$ .

Note que para cada  $n$  inteiro positivo, existe um  $a_n$  correspondente e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Mas, normalmente, escrevemos  $a_n$  ao invés da notação de função  $f(n)$  para o valor da função para o número  $n$ . (Stewart, [10])

**Notação:** A sequência  $a_1, a_2, a_3, \dots$  também é denotada por  $\{a_n\}$  ou  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Exemplo 1:** Algumas sequências podem ser definidas conhecendo-se uma fórmula para o seu  $n$ -ésimo termo. Nos exemplos a seguir daremos três definições diferentes para cada sequência: usando a notação acima, usando uma fórmula, e explicitando os termos da sequência. Note que  $n$  não precisa começar do 1.

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} & a_n = \frac{n}{n+1} \quad \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\} \\
\text{(b)} & \left\{ \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty} & a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \quad \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \dots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \dots \right\} \\
\text{(c)} & \left\{ \sqrt{n-3} \right\}_{n=3}^{\infty} & a_n = \sqrt{n-3}, n \geq 3 \quad \{0, 1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n-3}, \dots\} \\
\text{(d)} & \left\{ \cos \frac{n\pi}{6} \right\}_{n=0}^{\infty} & a_n = \cos \frac{n\pi}{6}, n \geq 0 \quad \left\{ 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \cos \frac{n\pi}{6}, \dots \right\}
\end{array}$$

**Exemplo 2:** Encontre a fórmula para o termo geral  $a_n$  da sequência

$$\left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots \right\},$$

supondo que o padrão dos primeiros termos continua.

**Solução:** Note que os numeradores das frações que são termos dessa sequência começam com 3 e vão aumentando 1 unidade a cada novo termo. O segundo termo possui numerador 4, o terceiro termo possui numerador 5. Em geral, o  $n$ -ésimo termo possuirá numerador  $n+2$ .

Os denominadores são potências de 5, assim,  $a_n$  possui denominador  $5^n$ . Os sinais dos termos são alternadamente positivo e negativo, então precisamos multiplicar por uma potência de  $-1$ . No Exemplo 1(b), o fator  $(-1)^n$  significava que começamos com um termo negativo. Aqui, queremos começar com um termo positivo, então podemos usar  $(-1)^{n-1}$  ou  $(-1)^{n+1}$ . E, portanto,

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+2}{5^n}.$$

Uma sequência como a do Exemplo 1(a),  $a_n = \frac{n}{n+1}$ , pode ser retratada tanto esboçando os seus termos em uma reta numérica como na Figura 3.1, como esboçando os seus termos em um gráfico como na Figura 3.2.

Note que, uma vez que uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos, o seu gráfico consiste de pontos isolados com coordenadas

$$(1; a_1) \quad (2; a_2) \quad (3; a_3) \quad \dots \quad (n, a_n) \quad \dots$$

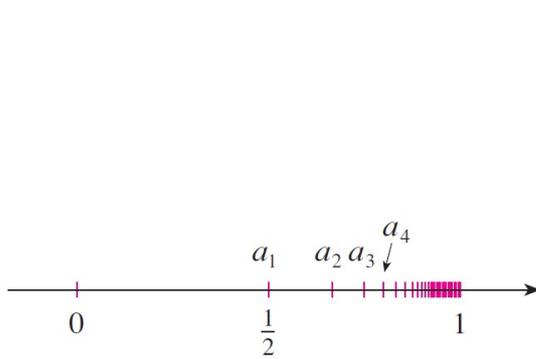
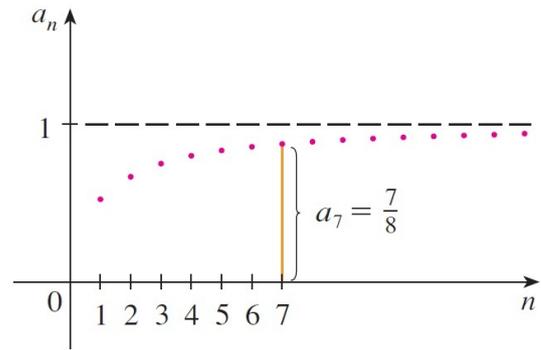


Figura 3.1: Reta numérica

Figura 3.2: Gráfico de  $\{a_n\}$ 

Das Figuras 3.1 e 3.2 concluímos que os termos da sequência  $a_n = \frac{n}{n+1}$  estão se aproximando de 1 à medida que  $n$  cresce. De fato, a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

pode ficar extremamente pequena se fizermos  $n$  suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Geralmente, a notação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência  $\{a_n\}$  aproximam-se de  $L$ , à medida que  $n$  cresce.

**Definição:** Uma sequência  $\{a_n\}$  possui **limite  $L$**  e escrevemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , ou ainda, se  $n \rightarrow \infty$ , então  $a_n \rightarrow L$ , se pudermos fazer os termos  $a_n$  ficarem o mais próximo possível de  $L$ , tomando  $n$  suficientemente grande. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que ela **diverge** (ou é **divergente**).

A Figura 3.3, a seguir, ilustra essa definição mostrando os gráficos de duas sequências que possuem limite  $L$ .

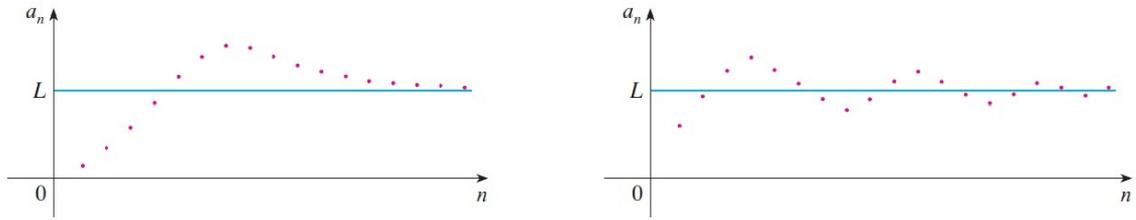


Figura 3.3: Gráfico de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

**Exemplo 3:** A sequência de Fibonacci  $\{f_n\}$  é definida recursivamente por:  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 1$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $n \geq 3$ . Cada termo é a soma dos dois termos antecessores. Os primeiros termos são:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}.$$

Esta sequência surgiu quando o matemático italiano do séc. *XIII*, conhecido como Fibonacci, resolveu o seguinte problema que dizia respeito à reprodução dos coelhos:

Suponha que os coelhos vivem para sempre e que todo mês cada par gera um novo par que se torna reprodutor com 2 meses de idade. Se começarmos com um par de recém-nascidos, quantos pares teremos em  $n$  meses?

Veja:

- mês **1**: nasce um casal de coelhos.
- mês **2**: esse casal não é fértil e continuamos com apenas um casal.
- mês **3**: esse casal se reproduz e nasce um novo casal coelhos. Estamos, então, com dois casais.
- mês **4**: o primeiro casal gera um novo casal de coelhos, mas o segundo casal ainda não, o que nos dá um total de três casais de coelhos.
- mês **5**: o primeiro casal gera o quarto casal de coelhos; o segundo casal, agora fértil, gera o quinto casal de coelhos e o terceiro casal ainda não reproduz. Estamos agora com um total de cinco casais de coelhos.

- mês **6**: o primeiro casal gera o sexto casal de coelhos; o segundo casal gera o sétimo casal de coelhos; o terceiro casal, agora fértil, gera o oitavo casal de coelhos e o quarto e quinto casais ainda não reproduzem. Estamos, então, com um total de oito casais de coelhos.

Montemos a seguinte tabela:

mês	número de casais de coelhos
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8

Assim, respondendo à pergunta anterior, em  $n$  meses teremos  $f_n$  casais de coelhos, onde  $\{f_n\}$  é a sequência de Fibonacci.

## 3.2 Sequências recorrentes

Sequências recorrentes são sequências em que cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores.

Uma sequência numérica muito conhecida é a de Lucas. Essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 3$ .

Os primeiros termos dessa sequência são

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \dots$$

Observe que a partir do 12º termo, a razão entre cada termo dessa sequência e o seu antecessor é igual a  $1,6180\dots$  e, se continuarmos infinitamente, fazendo essas razões obteremos todos os algarismos decimais de  $\phi$ .

Tomemos agora uma nova sequência numérica que obedeça à mesma lei de formação da sequência anterior. Isto é,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Porém, agora vamos tomar  $a_1 = -3$  e  $a_2 = 4$ , obtendo, assim,

$$-3, 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, 118, 191, 309, 500, 809, 1309, \dots$$

Novamente, observamos que, a partir do 15º termo, as razões entre os termos dessa sequência e os seus antecessores vão ficando iguais a 1,6180...

De fato, para qualquer  $n$  suficientemente grande e para qualquer sequência formada com a lei descrita anteriormente, percebemos que  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  aproxima-se cada vez mais da razão áurea, à medida que aumenta-se o valor de  $n$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi.$$

Podemos ir mais longe. Trabalhemos agora somente com números negativos. Formemos, por exemplo, a sequência

$$-1, -5, -6, -11, -17, -28, -45, -73, -118, -191, -309, -500, -809, \dots$$

A partir do 12º termo, a razão entre cada número e o seu antecessor, isto é,  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ , tende a 1,618. Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi.$$

### 3.3 O número $\phi$ e Fibonacci

Uma vez que generalizamos os resultados obtidos para qualquer sequência que obedeça à lei de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

podemos usá-los também para a sequência de Fibonacci, onde  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 1$ .

Consideremos a sequência

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

em que os  $a_n$ 's são os termos da sequência de Fibonacci (Exemplo 3, Seção 3.1). Ela representa a taxa de crescimento do número de coelhos entre o  $(n+1)$ -ésimo e o  $n$ -ésimo mês. Tal sequência é dada por

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \dots, \text{ ou seja,}$$

$$1; 2; 1,5; 1,666\dots; 1,6; \dots$$

Por meio do gráfico a seguir (Fig. 3.4), em que o eixo horizontal indica o índice  $n$  e o eixo vertical indica os respectivos valores de  $r_n$ , pode-se perceber que a sequência tende a um valor entre 1,5 e 2 (Ferreira, [11]).

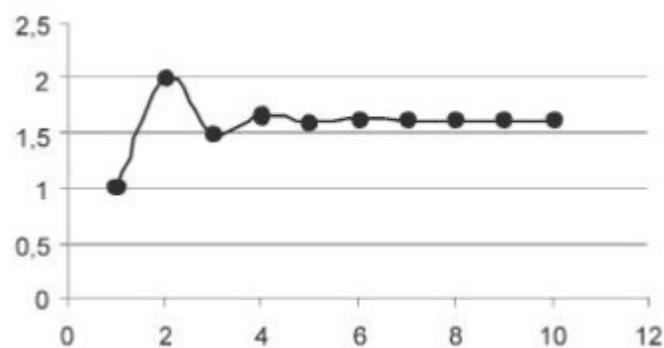


Figura 3.4: Gráfico da sequência  $r_n$

**Teorema 3.3.1** *Tem-se que  $(r_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é dada recursivamente por  $r_1 = 1$  e  $r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1$ ,  $n \geq 2$ .*

**Demonstração:** A partir de (3.1) e (3.2), temos que

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}},$$

o que prova que  $r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1$ ,  $n \geq 2$ .

□

Por meio dessa relação, notamos que o limite  $r$  da sequência  $(r_n)$ , caso exista, é solução da equação  $r^2 - r - 1 = 0$ , que possui uma única raiz positiva.

De fato, do Teorema 3.3.1, temos que

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1.$$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r_{n-1}} + 1 \right)$ .

Ou seja,  $r = \frac{1}{r} + 1$ , em que  $r^2 - r - 1 = 0$ .

Segue que

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como  $r_n \geq 0$ , para todo  $n$ , conclui-se que

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988749895\dots$$

Isto é,  $r = \phi$ .

**Observação:** Para justificarmos a passagem ao limite na expressão

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1,$$

devemos mostrar que  $r_n$  é uma sequência convergente.

Observemos que

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2} + 1}, \quad n \geq 3.$$

Consideremos, então, as subsequências  $(r_{2n})$  e  $(r_{2n-1})$  de  $(r_n)$ , ou seja, as subsequências de índices pares e ímpares, respectivamente. Mostramos, por indução, que  $(r_{2n})$  é decrescente e  $(r_{2n-1})$  é crescente.

De fato, temos que:

1.  $r_2 = 2 > r_4 = \frac{5}{3}$ .

2. vamos supor que é válido para  $n = k$ , isto é,  $r_{2k} > r_{2k+2}$ .

Como a função  $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$ ,  $x \geq 0$ , é crescente, temos que

$$r_{2k+2} < r_{2k} \Rightarrow f(r_{2k+2}) < f(r_{2k}) \Rightarrow 2 - \frac{1}{r_{2k+2} + 1} < 2 - \frac{1}{r_{2k} + 1} \Rightarrow r_{2k+4} < r_{2k+2}.$$

Ou seja,  $(r_{2n})$  é decrescente.

Analogamente, mostra-se que  $(r_{2n-1})$  é crescente.

É importante observar que  $(r_{2n})$  é limitada inferiormente por 1 e  $(r_{2n-1})$  é limitada superiormente por 2. Logo, ambas são convergentes. Além disso, como satisfazem a mesma relação de recorrência

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2} + 1},$$

concluimos que seus limites são iguais e, conseqüentemente, toda a sequência  $(r_n)$  converge para esse mesmo limite, que é o número  $\phi$ .

Vamos mostrar agora que qualquer termo da série de Fibonacci pode ser representado com exatidão em termos de  $\phi$ , isto é,

$$a_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}.$$

Para tanto, vamos encontrar uma fórmula explícita para  $a_n$  em função de  $n$ . Usaremos uma ideia que é bem útil: procuraremos progressões geométricas que satisfaçam a mesma recorrência que  $(a_n)$ . Se  $x_n = b \cdot q^n$ , com  $b$  e  $q$  não nulos, satisfaz  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , teremos

$$b \cdot q^{n+2} = b \cdot q^{n+1} + b \cdot q^n = b \cdot q^n \cdot (q + 1),$$

donde  $q^2 = q + 1$ .

Temos, assim, dois valores possíveis para  $q$ : as duas raízes da equação  $q^2 - q - 1 = 0$ , ou seja,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Assim, as sequências da forma  $c \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$  e da forma  $d \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$  satisfazem a recorrência acima, bem como as sequências da forma  $y_n = c \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + d \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$ .

Agora, basta encontrarmos valores de  $c$  e  $d$  tais que  $y_1 = 1$  e  $y_2 = 1$  para que tenhamos  $y_n = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$  (de fato, teríamos  $y_1 = a_1, y_2 = a_2$  e, por indução, se  $k \geq 3$  e  $y_n = a_n$  para todo  $n < k$ , temos  $y_k = y_{k-1} + y_{k-2} = a_{k-1} + a_{k-2} = a_k$ ).

Para isso, devemos ter:

$$\begin{cases} c \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + d \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \\ c \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + d \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, encontramos que  $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  e, portanto,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isto é,  $a_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}$ , para todo  $n$  natural.

# Capítulo 4

## Projeto

Vimos ao longo desse trabalho a beleza e as diversas curiosidades do número de ouro. Vimos que ele pode ser aplicado nas mais diversas áreas das ciências e nas mais inusitadas situações.

A importância do seu estudo no ensino da matemática vem do fato de ele ser um excelente instrumento de contextualização de diversos conteúdos matemáticos. Ele proporciona ao aluno uma oportunidade de investigação do conhecimento e de desenvolvimento e construção de novas ideias.

Agora, proponho um Projeto (ou mini-curso) que pode ser desenvolvido com os alunos do ensino médio.

Este projeto tem como objetivo maior criar oportunidades para uma aprendizagem significativa das noções de medida, razão, proporção, equação do 2º grau, Teorema de Pitágoras, geometria espacial e sequência de Fibonacci. Visa, também, familiarizar o aluno no uso do compasso, instrumento de construção geométrica, que vem sendo cada vez menos utilizado nos dias atuais.

Inicialmente, estão sugeridas atividades semanais para serem realizadas em 6 aulas, com duração de 3h cada, preferencialmente no horário contrário às aulas normais, e com 10 grupos de 4 alunos.

Esse projeto tem o formato de um laboratório de matemática, onde o professor inicialmente deve prover o aluno da fundamentação teórica apresentada neste trabalho, para em seguida deixá-los à vontade para realizarem atividades.

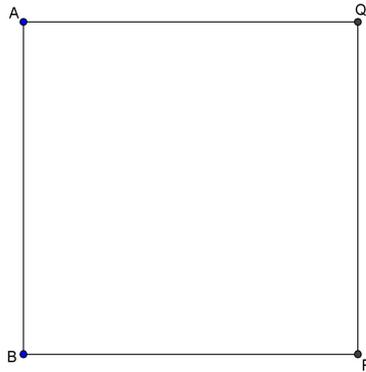
Espera-se, com este projeto, que o aluno identifique e relacione os principais objetos matemáticos trabalhados: número de ouro, razão áurea, retângulo áureo, espiral logarítmica, pentagrama, razões trigonométricas, cone e sequência de Fibonacci.

**ATIVIDADE 1**

1. (Segmento Áureo) Dado o segmento  $\overline{AB}$  a seguir, determine geometricamente o ponto  $P$ , tal que,  $|\overline{PA}|^2 = |\overline{AB}| \cdot |\overline{PB}|$ .



2. (Retângulo Áureo) Dado o quadrado  $ABPQ$  a seguir, construa o retângulo áureo  $ABCD$ .

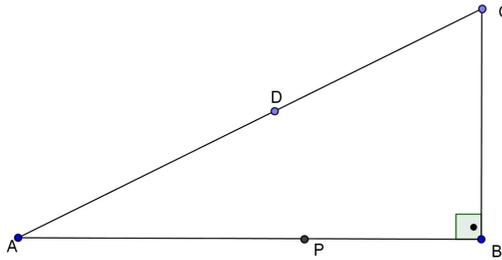


3. (Espiral Logarítmica) Dado o retângulo áureo  $ABCD$  a seguir, construa uma espiral logarítmica.



## ATIVIDADE 2

1. Dado o triângulo  $ABC$  a seguir, retângulo em  $B$ , e os pontos  $P \in \overline{AB}$  e  $D \in \overline{AC}$ , tais que  $\|\overline{BC}\| = \frac{\|\overline{AB}\|}{2} = \|\overline{CD}\|$  e  $\|\overline{AP}\| = \|\overline{AD}\|$ , prove que  $\overline{AP}$  é o segmento áureo de  $\overline{AB}$ , isto é, que  $\|\overline{PA}\|^2 = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{PB}\|$ .



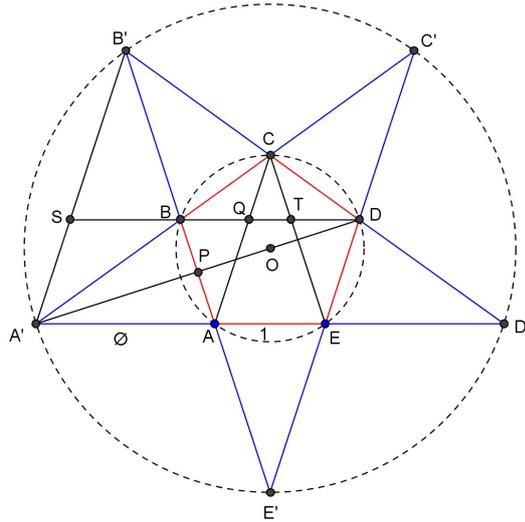
2. Dado o segmento  $\overline{AB}$  a seguir e um ponto  $P \in \overline{AB}$ , tais que  $\|\overline{AP}\| = x$  e  $\|\overline{PB}\| = 1$ , calcule  $\frac{\|\overline{PA}\|}{\|\overline{PB}\|} = \phi$ , isto é, calcule o valor numérico do número de ouro.



3. Construa, com régua e compasso, os ângulos de  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $108^\circ$ , usando a ideia de proporção áurea.

### ATIVIDADE 3

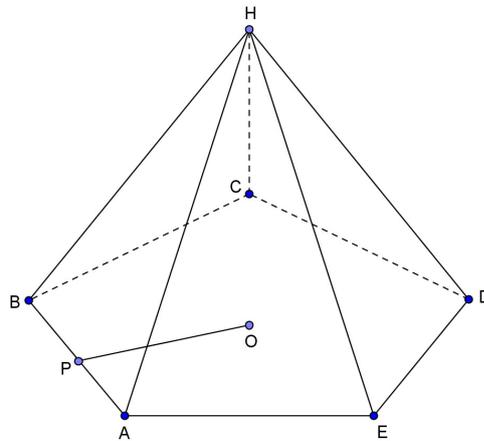
A figura a seguir é chamada de Pentagrama e era o símbolo da Sociedade de Pitágoras.



Prove as seguintes propriedades:

1.  $||\overline{A'A}|| = \phi$ .
2.  $\frac{||\overline{OP}||}{r} = \frac{\phi}{2}$ .
3.  $\frac{||\overline{OA'}||}{r} = \phi^2$ .
4.  $\frac{||\overline{OA'}||}{||\overline{OP}||} = 2\phi$ .
5.  $||\overline{BD}|| = \phi$
6.  $\frac{||\overline{DQ}||}{||\overline{QB}||} = \frac{||\overline{AQ}||}{||\overline{QC}||} = \frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{QE}||} = \phi$
7.  $\frac{||\overline{B'S}||}{||\overline{SA'}||} = \frac{||\overline{B'B}||}{||\overline{BA}||} = \frac{||\overline{B'Q}||}{||\overline{QE}||} = \frac{||\overline{B'D}||}{||\overline{DD'}||} = \phi$
8.  $||\overline{B'D'}|| = \phi^3$ ,  $||\overline{B'D}|| = \phi^2$ ,  $||\overline{B'C}|| = \phi$ ,  $||\overline{CD}|| = 1$ ,  $||\overline{CQ}|| = \phi^{-1}$  e  $||\overline{QT}|| = \phi^{-2}$   
e esses seis segmentos formam uma progressão geométrica de razão  $\phi^{-1}$ .

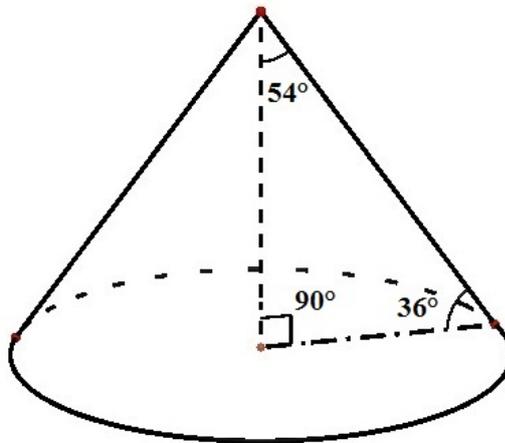
9.  $|\overline{A'B'}| = |\overline{B'C'}| = |\overline{C'D'}| = |\overline{D'E'}| = |\overline{E'A'}| = \phi^2$ .
10. Dobrando-se o triângulo  $\Delta A'AB$  na linha  $\overline{AB}$  e, analogamente, fazendo o mesmo com os triângulos  $\Delta B'BC$ ,  $\Delta C'CD$ ,  $\Delta D'DE$  e  $\Delta E'EA$  de modo que  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$  se encontrem em  $H$ , obtemos a pirâmide abaixo de altura  $\overline{OH}$ , tal que  $\frac{|\overline{OH}|}{r} = \phi$ .



**ATIVIDADE 4**

1. Determinar o valor de  $\cos 36^\circ$  em função de  $\phi$ . (Sugestão: use que  $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$  e aplique as regras de transformação trigonométrica).

2. Dado um cone circular reto de ângulo semivertical, em relação à base, igual a  $54^\circ$ , raio  $r$  e geratriz  $g$ , calcule, em função de  $\phi$ , o comprimento do círculo da base, a área da base e a área lateral. (Sugestão: use o exercício anterior).



**ATIVIDADE 5**

1. Defina a sequência de Fibonacci  $\{f_n\}$ .
2. Calcule  $f_3, f_4, f_5, \dots, f_{10}$ .
3. Resolva o seguinte problema: Suponha que os coelhos vivem para sempre e que todo mês cada par gera um novo par que se torna reprodutor com 2 meses de idade. Se começarmos com um par de recém-nascidos, quantos pares teremos em  $n$  meses?
4. Defina a sequência  $\{r_n\}$  por  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Calcule  $r_1, r_2, \dots, r_6$ .
5. Suponha que  $r_n \rightarrow L$  e encontre  $L$ . (Sugestão: mostre que  $r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$ ).

**ATIVIDADE 6**

Pesquise em casa uma aplicação, ou uma curiosidade, do número de ouro e apresente para a turma no último dia de aula. Duração da exposição: 15 minutos.

# Capítulo 5

## Conclusão

Que sensação de surpresa que todos os resultados encontrados neste trabalho proporcionam. Juntamente, também, com um pouco de curiosidade e um pouco de admiração: curiosidade por ver que o  $\phi$ , que satura o pentagrama e passeia por ângulos e figuras geométricas, também é o limite de uma razão dos termos de uma sequência numérica que nada tem a ver com a geometria; admiração porque “fica mais forte a convicção de que deparamos com um mundo inexplorado que, à semelhança do universo que nos rodeia, parece não ter fronteiras”. Veja [5] para maiores detalhes.

Devemos considerar  $\phi$  uma “constante” da natureza? Tais constantes aparecem com frequência na matemática. Encontramos o  $\pi$  na trigonometria, na geometria de um pingo de chuva esférico, na teoria das probabilidades, como a soma de uma série infinita, e em outras situações. Encontramos  $i = \sqrt{-1}$  em números complexos e na teoria das correntes elétricas alternadas. Um terceiro exemplo é a constante  $e$ , que é encontrada no princípio dos logaritmos naturais. Podemos observar as três combinadas na notável equação  $e^{i\pi} = -1$ .

Com este trabalho foi possível mostrar que muitas coisas da natureza contém matemática, desde um pequeno molusco até grandiosas construções como o Parthenon. Antigamente a razão áurea era mais explorada, mas ainda hoje podemos observá-la em objetos do nosso dia-a-dia, como no cartão de crédito.

A aprendizagem matemática está ligada à compreensão e apreensão do significado. Espera-se que, com este trabalho, o professor possa ir além das aulas normais expositi-

vas e levar o aluno a entender a importância desse assunto, abrir lugar para discussões e tornar os conteúdos mais significativos. Espera-se, ainda, que o aluno aprenda a apreciar mais essa ciência, com entusiasmo.

# Referências Bibliográficas

- [1] AUGUSTO, C. G., *Representação da beleza matemática*. Belo Horizonte: UFMG, 2009.
- [2] BOYER, C. B., *História da Matemática*. 2ª ed. Edgard Blücher Ltda.
- [3] DANTE, L. R., *Matemática: Contexto e Aplicações*. Volume 2. São Paulo: Ática, 1999.
- [4] FREIRE, B. T. V., notas de aula, teoria dos números, 01/06/2009.
- [5] HUNTLEY, H. E., *A Divina Proporção*. Tradução de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.
- [6] JORGE, S., *Desenho Geométrico - Ideias e Imagens*. Volume 4, 3ª ed. reformulada. São Paulo: Saraiva, 2003.
- [7] LINTZ, R. G., *História da Matemática*. Coleção CLE. Volume 46. Campinas: UNICAMP, 2007.
- [8] MATTÉI, Jean-François, *Pitágoras e os pitagóricos*. São Paulo: Paulus, 2000.
- [9] NIVEN, I. M., *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.
- [10] STWEART, J., *Calculus, early transcendentals*, 6ª ed. Mc Master University, Thomson, Brooks/Cole, 2008.
- [11] FERREIRA, M. V. e PEREIRA, L. D. C., Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea. Disponível em:

- 
- <http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2008/fibonacci.pdf>). Acesso em 14/01/2013.
- [12] PEREIRA, G. M. R., O Pentagrama. Disponível em:  
<http://www.inf.unioeste.br/rogerio/Pentagrama.pdf>). Acesso em 22/01/2013.
- [13] PEREIRA, G. M. R., O Retângulo Áureo e a Espiral Logarítmica. Faculdade de Matemática, UFU, MG. Disponível em:  
<https://uspdigital.usp.br/siicusp/cdOnlineTrabalhoVisualizarResumo?numeroInscriçãoTrabalho=8818,numeroEdição=14>}, acessado em 20/01/2013.
- [14] *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n° 6, SBM, 1º semestre de 1985.
- [15] Vídeo: “*Nature by Numbers*”, de Cristóbal Vila, da Etérea Studios.