Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Básico e Técnico Profissionalizante

Iberê Nazareth Dujardin Júnior

Goiânia

2018

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Iberê Nazareth Dujardin Júnior

Título do trabalho: Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Básico e Técnico Profissionalizante

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Iberê Nazareth Dujardin Júnior

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do (a) orientador(a)[2]

Data: 10/01/2019

---

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Iberê Nazareth Dujardin Júnior

Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Básico e Técnico Profissionalizante

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

DUJARDIN JÚNIOR, IBERÊ NAZARETH
Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Básico e Técnico Profissionalizante [manuscrito] / IBERÊ NAZARETH DUJARDIN JÚNIOR. - 2018.
84 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. OLE PETER SMITH.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.
Bibliografia. Anexos.
Inclui fotografias, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Aprendizagem Significativa. 2. Educação Matemática. 3. Número de Ouro. 4. Sequência Fibonacci. 5. Teoria dos Números. I. SMITH, OLE PETER, orient. II. Título.

CDU 511

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

PROFMAT

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Iberê Nazareth Dujardin Júnior – Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezoito, às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Ole Peter Smith – Orientador, Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos e a Profª. Drª. Thaynara Arielly de Lima, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **" Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Básico e Técnico Profissionalizante",** em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Iberê Nazareth Dujardin Júnior, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Prof. Dr. Ole Peter Smith, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Ulisses José Gabry, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Presidente – IME/UFG

Thaynara Arielly de Lima

Profª. Drª. Thaynara Arielly de Lima
Membro - IME/UFG

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro – IFG/GOIÂNIA

Iberê Nazareth Dujardin Júnior, nascido no dia 05 de julho de 1975 na cidade de Anápolis - Go, casado com Edilaine Mendes Ferreira Dujardin, pai de Gabriel, Rafael e Miguel, graduado no curso de Licenciatura em Matemática pela UniEvangélica em 2002. Atua como professor efetivo de Matemática na Educação Básica na Secretaria de Estado da Educação, Cultura e Esporte de Goiás e na Secretaria Municipal de Educação do Município de Anápolis desde o ano de 2004.

Dedico este trabalho à memória de meus pais, Yara e Iberê; à minha esposa Edilaine e meus filhos Gabriel, Rafael e Miguel.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus por me ajudar nessa tão difícil caminhada.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela criação do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e pelos excelentes materiais disponibilizados para o nosso crescimento como profissionais da área da Educação.

À CAPES pelo aporte financeiro através da Bolsa de Estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ole Peter Smith; ao Coordenador do PROFMAT em Goiânia, Prof. Dr. Mário José de Souza e aos professores que estiveram presentes nessa jornada.

À todos os colegas do PROFMAT, pelos momentos de estudo e crescimento no decorrer do curso.

À minha esposa Edilaine, pelo incentivo, principalmente nos momentos difíceis. E aos meus filhos Gabriel, Rafael e Miguel, por compreenderem os momentos de ausência.

Aos meus pais (*in memorian*), que sempre acreditaram que a Educação pode mudar o mundo para melhor.

As leis da natureza são apenas os pensamentos matemáticos de Deus

Euclides

Resumo

O presente trabalho dedica-se à fornecer fundamentação teórica em tópicos de Teoria dos Números, Sequência Fibonacci e Número de Ouro, com o fito de servir de base de consulta e pesquisa para docentes de educação básica, a fim de que apliquem tais conteúdos em sala de aula de nível médio e técnico, tornando a educação matemática mais atrativa e interativa. Foram realizadas propostas de aplicação dos tópicos em ensino médio e ensino técnico, devidamente justificadas e explicadas. Planos de aula foram montados e estão anexados ao trabalho. As propostas foram aplicadas e os resultados estão compilados e discutidos. A aplicação das propostas mostraram-se eficazes, especialmente nos alunos de Ensino Médio, onde os discentes mostraram grande interesse pelas aplicações práticas da matemática não apenas no cotidiano como em ciências, tais como Arquitetura, Botânica, entre outros. Este trabalho é, portanto, estudo dedicado à Educação Matemática, abordando conceitos inerentes à Aprendizagem Significativa.

Palavras-chave

Aprendizagem Significativa, Educação Matemática, Número de Ouro, Sequência Fibonacci, Teoria dos Números .

Abstract

The present work is devoted to the provision in theoretical knowledge in topics of Number Theory, Fibonacci Sequence and Golden Number, serving the purpose of a basis for consultation and research for teachers in basic education, high school and technical courses, improving attractive and interactive teaching of mathematics. The stages of high school and of technical education were taken into account, properly justified and explained. Classroom plans for assembled are appended to this text. The proposals have been implemented and the results are compiled and discussed. At the request of enrollment it was especially directed towards High School, with emphasis on mathematical practices, not just as science, but also Architecture, among others. The present work is, therefore, a study dedicated to Mathematics Education, addressing concepts inherent to Significant Learning.

Keywords

Significant Learning, Mathematics Education, Gold Number, Fibonacci Sequence, Number Theory.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A matemática, enquanto ciência, desde a era pitagórica ou platônica já era conhecida como sendo uma ciência reservada à poucos [1], não sendo incomum notar-se tratamentos diferenciados àqueles que têm aptidão à área, muitas vezes tidos como pessoas de personalidades que fogem ao padrão normal. Tal tratamento diferenciado é notório tanto nas séries iniciais do ensino fundamental, como também nas séries finais do ensino médio, avançando inclusive no âmbito dos cursos superiores.

Em julho de 2016, foi divulgado em veículos de mídia, um levantamento realizado pelo Fórum Econômico Mundial, sediado na Suíça, sobre o ensino de matemática e ciências [2]. Nesse levantamento, a posição do Brasil no ranking assusta, haja vista, entre os 139 países avaliados, ficar na 133º posição no ensino de ciências e matemática. Diante do exposto até aqui, a tarefa de descobrir e se analisar os motivos que levam a esse panorama é árdua e com os esforços desenvolvidos ao longo dos anos, surgem inumeráveis tratativas, tais como (i) falta de motivação ao estudo de matemática nas séries iniciais, (ii) falta de didática adequada dos docentes, (iii) falta de contextualização dos assuntos ao cotidiano dos alunos, entre muitas outras teorias.

Diante dos muitos caminhos para identificar o real problema da educação matemática, em especial, no Brasil, e mediante observações realizadas ao longo de décadas de estudo, o desafio escolhido e encarado pelo presente trabalho é o de incentivar os alunos, aumentando o interesse pela matemática, e, nessa abordagem, utilizando Teoria dos Números. Surge então o grande desafio: preparar aulas contextualizadas, com certo teor lúdico, utilizando também recursos tecnológicos a fim de dar sentido e significado aos conhecimentos, fazendo com que os alunos entendam a beleza do estudo da Teoria dos Números.

A matemática tem sido construída através dos séculos, o que significa dizer que é uma ciência em profunda evolução. Apesar da infinidade de conceitos, números, ideias, teoremas, entre outros, têm-se alguns números que definitivamente instigam a curiosidade não apenas de cientistas e matemáticos, como também de crianças, adolescentes ou mesmo adultos. Um desses números tem sido difundido através dos séculos como Número de Ouro, ou, a quem o chame de Divina Proporção, ou ainda, Razão Áurea.

Causando encanto e despertando a curiosidade de uma série de matemáticos, tais como Euclides, Pitágoras e outros, o Número de Ouro aparece constantemente na natureza, na arquitetura e, mais especificamente na Grécia Antiga, onde se encontram grandes e monumentais obras que atraem olhares não apenas por sua beleza, mas pela sua perfeição métrica e harmonia presente em [3]. Isso implica dizer que tal número já era conhecido desde o século V a.C. [4].

Não obstante aos Pitagóricos, pensando em Fibonacci e na sua célebre sequência oriunda da observação do comportamento dos coelhos [5], o número de ouro também tende a aparecer na sequência, haja vista, a razão entre um elemento da sequência e o seu antecessor tender ao valor do número de ouro.

Acredita-se que, a partir desses conhecimentos, e utilizando abordagens que envolvam recursos computacionais tais como o software matemático GeoGebra, desperte-se nos alunos o interesse pelo estudo da Matemática em sala de aula. Para isso, esse trabalho se inicia tratando matematicamente a Sequência Fibonacci, bem como o Número de Ouro, sua presença na Sequência Fibonacci e na Geometria. Isso fornecerá a bagagem teórica necessária para a aplicação desses conceitos em sala de aula.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

A presente dissertação tem por objetivo fornecer referencial teórico sobre Sequência Fibonacci e Número de Ouro, além de discutir a presença desses na natureza, arquitetura e até mesmo na arte, a fim de desenvolver uma metodologia de aplicação desses tópicos no ensino básico, de forma a chamar atenção dos alunos, incentivando-os ao estudo da matemática.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para o presente trabalho, têm-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver referencial teórico que aborde e promova os conhecimentos necessários Teoria dos Números, mais especificamente, Sequência Fibonacci e Número de Ouro, além da Fórmula de Binet;

- Desenvolver fundamentação teórica para construção de determinadas figuras geométricas, tais como o Retângulo Áureo e o Triângulo Áureo;

- Durante a fundamentação teórica, utilizar de exemplos que possam ser repetidos em sala, por docentes que utilizarem da metodologia proposta.
- Relacionar a Sequência Fibonacci com o Número de Ouro;
- Identificar e descrever a Sequência Fibonacci nas artes, na natureza, na arquitetura, entre outros;
- Identificar as possibilidades de aplicação dos já referidos temas na educação básica, e no ensino técnico;
- Desenvolver planos de aula, bem como conteúdos para aplicação dos conceitos de Teoria dos Números no ensino básico e profissionalizante;
- Desenvolver e aplicar metodologia de ensino, utilizando as aulas e planos de aulas criados, a fim de promover integração dos alunos de ensino básico, especialmente de escola da rede estadual de educação;
- Avaliar os resultados da aplicação dos conteúdos, promovendo discussão, conclusões e sugestões para continuidade do presente trabalho.

1.2.3 Organização e Desenvolvimento do Trabalho

No segundo capítulo, a Sequência Fibonacci, assim como a fórmula de Binet, é discutida teoricamente, assim como as propriedades e expressões decorrentes. No Capítulo 3 é apresentado o Número de Ouro e algumas de suas propriedades. No Capítulo 4, são apresentadas as possibilidades de aplicação da Sequência Fibonacci, assim como do Número de Ouro e discutida a metodologia para aplicação destes conteúdos no ensino básico, assim como as técnicas e recursos utilizados no desenvolvimento das aulas. O Capítulo 5 dedica-se a apresentar os resultados do trabalho, e no Capítulo 6 têm-se as considerações finais do projeto, assim como sugestões para continuidade do trabalho.

2 Leonardo Fibonacci

2.1 Contextualização Histórica

Passado o período do Império Romano em meados do século V e estendendo-se até o século XI, tem-se o período conhecido por Baixa Idade Média. Esse período é marcado pelo desaparecimento quase que completo do ensino, especialmente, o de matemática, razão pela qual costuma-se dar o nome à esse período de Idade das Trevas [6].

A ordem social antiga cede lugar a uma estrutura feudal e eclesiástica, marcada pelo abandono à ciência e forte inclinação à violência e a fé religiosa. A matemática abstrata basicamente desaparece, tendo lugar apenas à alguns aspectos práticos ligados ao comércio e à engenharia civil, todavia, após a queda do Império Romano e à baixa quantidade de obras de engenharia estatais, até mesmo tais aspectos práticos da matemática parecem desaparecer [6]. De forma resumida, pode-se afirmar que o ensino da matemática nesse período de Baixa Idade Média, pode ser atribuído basicamente à alguns poucos clérigos estadistas.

Ainda segundo [6], foi por volta do século X a XI que os clássicos gregos da ciência e da matemática começaram a penetrar na Europa, grande parte através de traduções dos saberes que foram preservados pelos muçulmanos. Nesse âmbito, a localização e a história da política da Sicília fizeram dessa ilha um ponto de encontro do Oriente com o Ocidente. Inicialmente, uma ilha grega, tornando-se parte do Império Romano para em seguida, passar 50 anos nas mãos dos árabes para retornar ao controle grego e por fim ser assumida por normandos, fazendo com que o grego, o latim e o árabe se tornassem línguas usuais na região, dessa forma, muitos manuscritos de Constantinopla foram traduzidos para o latim.

2.2 Leonardo Fibonacci

No limiar do século XII desponta a figura de Leonardo Fibonacci (Leonardo, filho de Bonaccio, 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média, conhecido também por Leonardo de Pisa, ou Pisano. Tendo nascido em Pisa, um importante centro comercial e, sendo o seu pai um alfandegário, recebeu boa parte de sua Educação em Bejaia, norte da África. Ali, desenvolveu grande apreço pela aritmética e pelos métodos indo-arábicos de cálculo. Em 1202, tendo retornado à sua terra natal, publica sua obra *Liber abaci* (Livro da Contagem) [7]. A Figura 1 apresenta o retrato de Fibonacci.

Figura 1: Leonardo Fibonacci

Um de seus principais legados é a sequência comumente conhecida por *Sequência Fibonacci*, esta, será a partir de agora tratada com maior ênfase.

2.3 Sequências Recorrentes

Antes de adentrar-se realmente na Sequência Fibonacci, faz-se necessário alguns breves esclarecimentos, como se segue.

Definição 1. *Uma sequência é dita recorrente, ou simplesmente chamada de Recorrência, quando a relação entre seus termos é dada por uma equação de recorrência, ou seja, uma expressão matemática que escreve um termo da sequência em função de termos anteriores.*

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n), \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Definição 2. *Uma recorrência de ordem k é dita linear , se um termo pode ser expresso* *em função dos k termos imediatamente anteriores de forma linear, ou seja, se pode-se escrever x_{n+k} em função de $x_{n+(k-1)}, x_{n+(k-2)}, ..., x_n$, satisfazendo uma relação do tipo:*

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot x_{n+(k-j)} = c_1 \cdot x_{n+(k-1)} + c_2 \cdot x_{n+(k-2)} + ... + c_k \cdot x_n$$

As mais simples e fundamentais sequências recorrentes lineares são as progressões geométricas [8], haja vista, sendo $x_n = a \cdot q^n$, então, $x_{n+1} = q \cdot x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sendo x_n uma sequência recorrente linear de ordem 1.

Do mesmo modo, pode-se pensar na Progressão Aritmética, conforme segue-se demonstrado.

Sendo $x_{n+1} - x_n = r$,

onde r é a razão da progressão aritmética, tem-se:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

logo,

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Desta forma, x_n é uma sequência recorrente linear de ordem 2.

□

Primeiramente, consideremos o conjunto das sequências $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

É importante enfatizar que o conjunto das sequências que satisfazem (1) munido da operação usual de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Este é um indicador importante a medida que dadas duas sequências (y_n) e (z_n) que satisfaçam esta recorrência, ou seja:

$$y_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j y_{n+k-j}$$

$$z_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j z_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}$$

e uma constante a_k, uma sequência (w_n) dada por $w_n = y_n + az_n$, segundo [8], satisfará a mesma recorrência:

$$w_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j w_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$

É bastante usual estudar a sequência (s_n) obtida pela soma dos n primeiros termos de uma sequência (x_n), isto é,

$$s_n = \sum_{k \leq n} x_k.$$

De fato, seja (x_n) uma sequência linear recorrente. Então (s_n) também é.

Seja:

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k \leq n+1} x_k - \sum_{k \leq n} x_k, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sendo

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_{n+k-j}$$

tem-se

$$s_{n+k+1} - s_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j (s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j}), \forall n \in \mathbb{N}$$

onde:

$$s_{n+k+1} = (1 + c_1) s_{n+k} + \sum_{j=1}^{k-1} (c_{j+1} - c_j) s_{n+k-j} - c_k s_n = \sum_{i=1}^{k+1} d_i s_{n+k+1-i}$$

$\square$

onde $d_1 = 1 + c_1$, $d_i = c_i - c_i - 1$ para $2 \leq i \leq k$ e $d_{k+1} = -c_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, s_n é uma recorrência de ordem $k + 1$.

A partir destas primeiras considerações e definições, pode-se prosseguir com a apresentação e demonstração de algumas propriedades da Sequência Fibonacci, e demais propriedades trabalhadas e apresentadas.

2.4 Sequência Fibonacci

A maioria das pessoas ouviram falar de Fibonacci por causa de um problema, de certa forma bem simples, de seu livro mais famoso, o *Liber abaci.* Trata-se do famoso problema dos coelhos, no qual um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro, desejando-se saber quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês [9]. A Figura 2 apresenta de forma gráfica o problema dos coelhos.

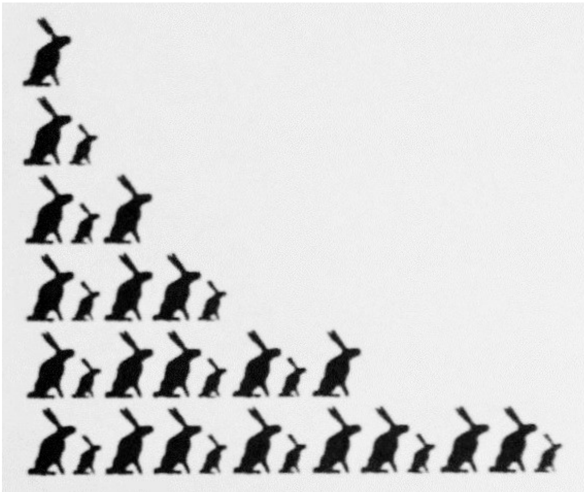

Figura 2: Problema dos Coelhos de Fibonacci

A solução do problema enunciado no parágrafo anterior, é conhecida como a Sequência Fibonacci, conforme a expressão (2). Por sua vez, os números que compõe a solução, são comumente conhecidos por números de Fibonacci.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... \tag{2}$$

Torna-se útil, a partir desse momento, definir a sequência Fibonacci de forma algébrica, além de encontrar uma fórmula explícita para f_n, ou seja, o enésimo termo da sequência. Inicialmente, define-se:

Definição 3. *A sequência Fibonacci inicia-se pelo termo* $f_0 = 0$*,* $f_1 = 1$*,* $f_2 = 1$ *e* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$*. Conforme segue-se:* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$

2.5 Algumas Propriedades

Teorema 1.

$$f_{m+n} = f_m f_{n-1} + f_{m+1}, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Sendo

$$y_m = f_{m+n}$$

e

$$z_m = f_m f_{n-1} + f_{m+1} f_n$$

ambos satisfazem a recorrência:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado,

$$y_0 = f_n$$

$$y_1 = f_{n+1}$$

$$z_0 = 0 \cdot f_{n-1} + 1 f_n = f_n = y_0$$

$$z_1 = 1 \cdot f_{n-1} + 1 f_n = f_{n+1} = y_1$$

portanto,

$$z_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Deseja-se agora, demonstrar um teorema a fim de utilizá-lo em futuros resultados. O Teorema 2 mostra que o Máximo Divisor Comum entre dois números Fibonacci consecutivos é 1, ou seja, são primos entre si.

Teorema 2.

$$mdc(f_n, f_{n+1}) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Utilizando o dispositivo de Euclides, têm-se:

$$f_{n+1} = 1 \cdot f_n + f_{n-1}$$

$$f_n = 1 \cdot f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f_4 = 1 \cdot f_3 + f_2$$

$$f_3 = 2f_2 + 0$$

De modo que:

$$mdc(f_n, f_{n+1}) = f_2 = 1, \forall n \geq 2$$

$\square$

A partir da demonstração do Teorema 2, uma segunda propriedade poderá ser proposta e demonstrada utilizando-se também o Teorema 1. Este, se refere ao fato de o máximo divisor comum entre dois números Fibonacci ser um número Fibonacci, e pode ser generalizado para as chamadas Sequências de Lucas [8] [15].

Teorema 3. $mdc(f_m, f_n) = f_{mdc(m,n)}$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$

Sabe-se que:

$$mdc(f_n, f_{n+1}) = 1$$

Além disso, se

$$m = 0$$

$$mdc(0, f_n) = f_n = f_{mdc(m,n)}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Se

$$m = 1$$

$$mdc(1, f_n) = 1 = f_1 = f_{mdc(m,n)} \forall m, n \in \mathbb{N}$$

A prova será por indução. Supondo o enunciado válido para todo $m < k$ onde ($k \geq 2$ é um inteiro dado) e $\forall m, n \in \mathbb{N}$.
Deseja-se provar que seja válido para $m = k$ e para todo n inteiro.

Se $n < k$, por hipótese de indução:

$$mdc(f_k, f_n) = mdc(f_n, f_k) = f_{mdc(n,k)} = f_{mdc(k,n)}$$

Porém, sendo $n \geq k$,

$$f_n = f_{(n-k)+k} = f_{n-k}f_{k-1} + f_{n-k+1}f_k$$

Logo,

$$mdc(f_k, f_n) = mdc(f_k, f_{n-k}f_{k-1} + f_{n-k+1}f_k) = mdc(f_k, f_{n-k}f_{k-1}) = mdc(f_k, f_{n-k})$$

$$= f_{mdc(k,n-k)} = f_{mdc(k,n)}$$

$\square$

Teorema 4. Para todo m, $n \in \mathbb{N}$, f_m divide f_{mn}.

Sabe-se que o teorema é válido para $n = 1$.

Fixando o valor de m, supor:

$$\frac{f_m}{f_{mn}}$$

$$f_{m(n+1)} = f_{mn+m} = f_{mn-1}f_m + f_{mn}F_{m+1}$$

Pela hipótese de indução, o lado direito da expressão é divisível por f_m, logo, f_m divide $f_{m(n+1)}$, concluindo a prova. $\square$

2.6 Soma dos números da sequência Fibonacci

Em sequências é muito comum e importante conhecer a soma dos n primeiros termos. Dessa forma, seguem as demonstrações das somas dos n primeiros termos da sequência Fibonacci, da soma dos termos de ordem par, da soma dos termos de ordem ímpar e da soma dos quadrados.

Teorema 5. *Valem as expressões:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1, \forall n \geq, n \in \mathbb{N}$$

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

Demonstração:

(i) Observa-se que para $n = 1$ tem-se:

$$f_1 = 1 \ e \ f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

(ii) Supondo a igualdade válida para n, tem-se:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

(iii) Pela hipótese de indução, mostra-se que a sentença e verdadeira para $n + 1$, ou seja:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

De fato,

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + f_{n+1} = \underbrace{f_{n+2} - 1}_{H.I} + f_{n+1}$$

$$= f_{n+2} + f_{n+1} - 1$$

$$= f_{n+3} - 1$$

$\square$

Segue-se com a demonstração da soma dos n fatores de ordem ímpar da sequência Fibonacci.

Teorema 6. *Valem as expressões:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}, \forall n \geq, n \in \mathbb{N}$$

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

Demonstração:

(i) Observa-se que para $n = 1$ *tem-se:*

$$f_1 = f_2 = 1$$

(ii) Supondo a igualdade válida para n*, tem-se:*

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

(iii) Pela hipótese de indução, mostra-se que a sentença e verdadeira para $n + 1$*, ou seja:*

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n+2}$$

Note que,

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = \underbrace{f_{2n}}_{H.I} + f_{2n+1}$$

$$= f_{2n+2}$$

□

Para a soma dos n componentes de ordem par, tem-se:

Teorema 7. *Valem as expressões:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1, \forall n \geq, n \in \mathbb{N}$$

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

(i) Observa-se que para $n = 1$ *tem-se:*

$$f_2 = f_{2\cdot 1-1} = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

(ii) Supondo a igualdade válida para n, tem-se:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n-2} = f_{2n+1} - 1$$

(iii) Pela hipótese de indução, mostra-se que a sentença e verdadeira para $n+1$, ou seja:

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n-2} + f_{2n} = f_{2n+3} - 1$$

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n-2} + f_{2n} = \underbrace{f_{2n+1} - 1}_{H.I} + f_{2n+2}$$

$$= f_{2n+3} - 1$$

□

Por fim, demonstra-se a soma dos quadrados dos números Fibonacci.

Teorema 8. *Valem as expressões:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \forall n \geq, n \in \mathbb{N}$$

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

(i) Observa-se que para $n = 1$ tem-se:

$$f_1^2 = f_1 \cdot f_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

(ii) Supondo a igualdade válida para n, tem-se:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^3 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

(iii) Pela hipótese de indução, mostra-se que a sentença e verdadeira para $n+1$, ou seja:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = \underbrace{f_n \cdot f_{n+1}}_{H.I} + f_{n+1}^2$$

$$= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1})$$

$$= f_{n+1} \cdot f_{n+2}$$

$\square$

Todas as demonstrações realizadas até aqui, colaboram grandemente com a ideia do trabalho, haja vista desejar-se justamente a inserção desses conteúdos no Ensino Básico.

2.7 Jacques Philippe Marie Binet

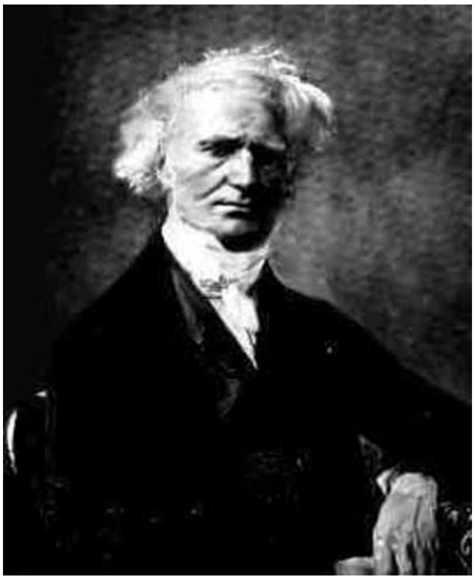

Figura 3: Jacques Philippe Marie Binet

Jacques Philippe Marie Binet (Rennes, 2 de fevereiro de 1786, Paris, 12 de maio de 1856) foi um matemático francês. Binet estudou matemática de 1804 até graduar-se em 1806 na École Polytechnique [17], trabalhando, depois na École Nationale des

Ponts et Chaussées. A partir de 1807 lecionou na *École Polytechnique* e foi professor de astronomia no Collège de France, desde 1823. Binet foi um dos precursores no estudo dos fundamentos da teoria matricial, como por exemplo, a definição da multiplicação de matrizes.

Em meados do século XIX, Binet redescobriu a fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo matemático Leonard Euler e pelo matemático francês Abraham de Moivre. A fórmula permite que se encontre o valor de qualquer número de Fibonacci, f_n.

Na intenção de encontrar uma fórmula explicita para f_n, pode-se procurar progressões geométricas que satisfaçam a recorrência mostrada na Definição 3. Desse modo, a fim de que $x_n = a \cdot q^n$, tendo a e q não nulos, satisfaça $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Têm-se:

$$a \cdot q^{n+2} = a \cdot q^{n+1} + a \cdot q^n \tag{3}$$

Desenvolvendo-se a expressão (3) têm-se (4).

$$a \cdot q^{n+2} = aq^n(q+1) \tag{4}$$

Da expressão (4), pode-se encontrar:

$$q^2 = q + 1 \tag{5}$$

Finalmente, (6) apresenta a equação que deverá ser resolvida a fim de encontrar os valores de q.

$$q^2 - q - 1 = 0 \tag{6}$$

Assim, os dois valores possíveis para q são:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Portanto, as recorrências na forma:

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

satisfazem a recorrência de Fibonacci, de mesmo modo, por tratar-se de um Espaço Vetorial, tal como abordado anteriormente, as expressões na forma:

$$y_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

satisfarão a Sequência Fibonacci.
A partir do exposto, precisa-se, agora, encontrar valores de a e b, que satisfaçam a definição da Sequência Fibonacci na forma:

$$f_n = ar_1^n + br_2^n \tag{7}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes positiva e negativa da expressão (6). A fim de determinar os valores de a e b, pode-se utilizar $f_1 = f_2 = 1$, todavia, é conveniente utilizar $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$. Portanto, tem-se o sistema apresentado em (8) e (9).

$$a + b = 1 \tag{8}$$

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \tag{9}$$

Resolvendo o referido sistema, tem-se a fórmula do termo geral da Sequência Fibonacci apresentado em (10).

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \forall n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

3 Número de Ouro

Partindo da Grécia antiga, onde, no século V a.C. o escultor Phidias projetava o templo da deusa Atena, o conhecido Parthenon, com preocupação de tornar as medidas de tal modo que, seguissem uma proporção específica entre suas partes com o fito de harmonizar os elementos de tal maneira a torná-la mais agradável e bela ao olhar e, chegando nos dias atuais aos *designs* de *smartphones* modernos, todos estes tem em comum uma peculiaridade: a Razão Áurea.

Também conhecido como Número de Ouro, este pode ser encontrado em representações diversas, sendo a primeira e mais trivial delas, definida por Euclides, onde, em seu livro, menciona "divisão de um segmento em média e extrema razão", como sendo a divisão de um segmento em duas partes, estas duas partes apresenta uma particularidade singular, uma vez que o quociente entre o seguimento inteiro e a parte maior é igual ao quociente do segmento maior pelo segmento maior. Dessa forma, segue-se:

Proposição 1. Supondo um segmento inteiro com medida igual à 1, sendo este dividido em um segmento maior de comprimento x e outro segmento menor de comprimento $(1-x)$. A partir destas definições, segue-se:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x é a medida de um segmento, este deve ser positivo, logo:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \phi$$

□

Resolvendo-se a equação dada na Proposição 1, encontra-se o valor de ϕ, sendo este $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. É possível escrever ϕ através de uma série de frações, como será descrito e demonstrado à seguir.

Proposição 2. Tomando $x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, tem-se:

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{1}{x}}_{x}}$$

Logo,

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

□

Pode-se escrever o Número de Ouro como raízes de continuação infinita, segue-se.

Proposição 3. Seja $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$ Elevando ambos os lados ao quadrado tem-se:

$$x^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}\right)^2$$

Desta forma,

$$x^2 = 1 + \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}_{x}$$

Logo,

$$x^2 = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Logo,

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

□

3.1 Propriedades do Número de Ouro

A seguir, apresenta-se algumas propriedades importantes do número de ouro. São apresentadas de forma didática, haja vista, servir de material de consulta para que professores trabalhem estes assuntos com seus alunos no ensino básico.

Sabe-se que o valor de ϕ é dado por:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{11}$$

de modo que seu valor com sua parte decimal é aproximadamente:

$$\phi = 1.6180339887... \tag{12}$$

de modo que,

$$\phi - 1 = 0.6180339887... \tag{13}$$

Segue-se que:

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} \tag{14}$$

De modo que:

$$\phi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \tag{15}$$

Concluindo-se que o valor do quadrado de ϕ^2 é encontrado adicionando-se 1 ao valor de ϕ. A seguir, procedendo de forma análoga, deseja-se desenvolver a expressão para $\frac{1}{\phi}$.

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \tag{16}$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi - 1 = 0.6180339887... \tag{17}$$

Os dois desenvolvimentos realizados acima, mostram que se pode obter o quadrado do número de ouro adicionando-se 1 ao valor de ϕ e pode-se obter o inverso do número de ouro, subtraindo-se 1 do valor de ϕ. Estas conclusões auxiliarão no processo de demonstração de algumas propriedades a seguir.

A partir dos desenvolvimentos anteriores, pode-se demostrar algumas propriedades interessantes e atrativas aos alunos, especialmente de ensino médio. Algumas delas são demonstradas utilizando-se do Princípio da Indução Finita, assunto este que pode ser trabalhado no Ensino Médio e, especialmente em turmas específicas para a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)

3.1.1 Potências Consecutivas do número de ouro

Proposição 4. *"Somando-se duas potências inteiras e consecutivas de ϕ, tem-se a potência de ϕ seguinte".*

Deseja-se demonstrar que:

$$\phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

A prova será realizada por indução sobre n, $\forall n \geq 0$. Para a base da indução, utiliza-se $n = 0$, uma vez que está de acordo com a Equação 15.

$$\phi^0 + \phi^1 = \phi^2 \iff 1 + \phi = \phi^2$$

Considerando válida para n, deseja-se demonstrar que será válida para $n+1$, o que será realizado multiplicando-se ambos os lados da hipótese de indução por ϕ.

$$\phi^n \cdot \phi + \phi^{n+1} \cdot \phi = \phi^{n+2} \cdot \phi$$

$$\phi^{n+1} + \phi^{n+2} = \phi^{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Conforme queria-se demonstrar.

Todavia, uma vez que deseja-se provar que a propriedade é valida $\forall n \in \mathbb{Z}$, é necessário demonstrar-se também válida para $n \leq 0$, como segue-se, fazendo $n = -k$, tem-se:

Dividindo $\phi^2 = 1 + \phi$ por ϕ^{k+2}, para $k > 0$

$$\frac{\phi^2}{\phi^{k+2}} = \frac{1}{\phi^{k+2}} + \frac{\phi}{\phi^{k+2}}$$

$$\iff \phi^{-k} = \phi^{-k-2} + \phi^{-k-1} \iff \phi^n = \phi^{n-2} + \phi^{n-1}$$

Fazendo $n = 0$, tem-se

$$\phi^0 = \phi^{0-2} + \phi^{0-1} \iff \phi^0 = \phi^{-2} + \phi^{-1}$$

De modo que, multiplicando ambos os lados por ϕ^2, tem-se:

$$\phi^2 = \phi^0 + \phi \iff \phi^2 = 1 + \phi$$

Confirmando a base da indução, verificando-se válida a propriedade $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Agora, deseja-se demonstra a soma das potências com expoentes inteiros negativos.

Proposição 5. *A soma das potências de ϕ com expoentes inteiros negativos corresponde a ϕ.*

Deseja-se provar que o somatório de todas as potências de expoentes inteiros e negativos de ϕ equivalem à ϕ.

Portanto, deseja-se demonstrar que:

$$\phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \phi^{-5} + ... = \phi$$

O que pode ser reescrito como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi$$

Tomando-se o lado esquerdo da expressão e desenvolvendo-a de forma a agrupar os termos dois a dois, têm-se:

$$(\phi^{-1} + \phi^{-2}) + (\phi^{-3} + \phi^{-4}) + (\phi^{-5} + \phi^{-6}) + ... = \phi$$

$$\left(\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2}\right) + \left(\frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4}\right) + \left(\frac{1}{\phi^5} + \frac{1}{\phi^6}\right) + ...$$

$$\left(\frac{\phi + 1}{\phi^2}\right) + \left(\frac{\phi + 1}{\phi^4}\right) + \left(\frac{\phi + 1}{\phi^6}\right) + ...$$

Posto que $\phi + 1 = \phi^2$, têm-se:

$$\frac{\phi^2}{\phi^2} + \frac{\phi^2}{\phi^4} + \frac{\phi^2}{\phi^6} + \frac{\phi^2}{\phi^8} + ...$$

$$1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + ...$$

$$1 + \phi^2(\phi^0 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + ...)$$

A parcela que está no interior do parênteses na última expressão, $(\phi^0 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + ...)$, corresponde à uma soma de uma progressão geométrica infinita, onde $a_1 = \phi^0$ e razão $q = \frac{1}{\phi^{-2}}$. A soma S_{pg} pode ser encontrada por:

$$S_{pg} = \frac{1}{a_1 - q}$$

$$S_{pg} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi^2}}$$

$$S_{pg} = \frac{\phi^2}{\phi^2 - 1} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$$

Substituindo a parcela em parênteses por ϕ, tem-se:

$$1 + \phi^{-2} \cdot (\phi^0 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + ...) = 1 + \phi^{-2} \cdot (\phi)$$

$$= 1 + \phi^{-1} = 1 + \frac{1}{\phi} = \frac{\phi + 1}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$$

Sendo demonstrado o que era esperado.

$\square$

3.2 Sequência Fibonacci e o Número de Ouro

No Capítulo 3, são discutidas propostas de aplicação da Sequência Fibonacci e do Número de Ouro em sala de aula de ensino básico, tanto a nível de Ensino Fundamental e Médio, quanto em Ensino Técnico. Sabe-se que existe o grande desafio de tornar as aulas de matemática interessantes para crianças e adolescentes, promovendo, em especial, a conexão de saberes, de tal forma à promover contextualização e significado.

O Número de Ouro e a Sequência Fibonacci podem agregar nesta busca, haja vista, estarem nitidamente conectados, o que também pode ser trabalhado em sala de aula. Ressalta-se que, a conexão encontrada entre o Número de Ouro e a Sequência Fibonacci, apesar de utilizar os conceitos de limites (o que será realizado aqui), pode ser compreendida pelos alunos de nível básico utilizando-se da Tabela 1, adaptada de [?].

Antes de demonstrar a efetiva relação entre o Número de Ouro e a Sequência Fibonacci, faz-se necessário apresentar dois resultados prévios, adaptados de [23].

Lema 1. *Demonstração.* Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$

Seja $a = 1 + h, h \geq 0$

Desenvolvendo $(1 + h)^n$ através do Binômio de Newton, tem-se:

$$(1 + h)^n = 1 + \tbinom{n}{1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot h^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot h^n$$

De forma que:

$$(1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot h, \text{ para } n \geq 1$$

Tabela 1: Razões entre Números Fibonacci Consecutivos

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	**Resultado**
$1/1$	1
$2/1$	2
$3/2$	1,5
$5/3$	1,666
$8/5$	1,600
$13/8$	1,625
$21/13$	1,6153
$34/21$	1,6190
$55/34$	1,6176
$89/55$	1,6181
$144/89$	1,6179
$\vdots$	$\vdots$

Portanto,

$$(1+h)^n = 1 + n \cdot h, \forall n \geq 1$$

Como $h \geq 0$ $\lim_{n\to\infty} 1 + nh = +\infty$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$$

□

Procede-se com a demonstração do Lema 2.

Lema 2. Se $a \in \mathbb{R}$ e $|a| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty, \text{ então } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = 0$$

De modo que, de:
$|a| < 1$, segue que $\dfrac{1}{|a|} > 1$, então:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = 0$$

Uma vez que,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$$

Conforme o Lema 1.

□

Com os dois resultados demonstrados, Lema 1 e Lema 2, pode-se demonstrar o teorema desejado. Segundo [3], esta relação entre o Número de Ouro e a Sequência Fibonacci, foi descoberta em 1611 pelo alemão Johannes Kepler. Segue o teorema e a demonstração.

Teorema 9. A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando n tende para o infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

Demonstração:
Utilizando a Fórmula de Binet para $(n+1)$ e n, tem-se:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

e

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \right]$$

Logo,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$= \frac{\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1 - \dfrac{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[1 - \dfrac{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}$$

Como $-1 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) < 1$, tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

□

Uma vez que a Fórmula de Binet foi utilizada na demonstração anterior, torna-se interessante mencionar que esta pode ser escrita em função do número de ouro. Segue a demonstração. A fórmula de Binet pode ser escrita em função do número de ouro.

Proposição 6. A fórmula de Binet é dada por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Demonstração:
Sendo:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1-\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Substituindo os respectivos termos na fórmula de Binet, tem-se:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (1-\phi)^n]$$

Porém, sabe-se que:

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$$

podendo escrever como:

$$1 - \phi = -\tfrac{1}{\phi}$$

Substituindo esse termo na expressão anterior, tem-se:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (-\phi)^n]$$

□

Segue-se com a demonstração da desigualdade de Fibonacci.

Proposição 7. Seja f_n um número Fibonacci, então vale a desigualdade:

$$f_n = \phi^{n-2}, \forall n \geq \mathbb{N}$$

Demonstração:
Pelo Princípio da Indução
(i) A afirmação é verdadeira, uma vez que:

$$\phi^{1-2} = \phi^{-1} = \tfrac{1}{\phi} = \phi - 1 < 1,$$

Logo,

$$f_1 > \phi^{-1}$$

Para $n = 2$

$$f_2 \geq \phi^{2-2} = \phi^0 = 1$$

Verificando a base da indução.

(ii) Sendo a hipótese verdadeira $\forall n$ tal que $1 \leq n \leq k, k \in \mathbb{Z}$, tem-se $f_k \geq \phi^{n-2}$, ela deverá ser verdadeira também para $n = k + 1$, conforme tem-se:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \geq \phi^{k-2} + \phi^{k-3} = \phi^{k-1}$$

concluindo a prova.

$\square$

Tendo sido provado que $f_n \geq \phi^{n-2}$, pode-se provar, por indução, o seguinte corolário:

Corolário 1. $f_n \geq \phi^n$

Demonstração:

Para $n = 1$, $f_1 = 1 \leq \phi$

Para $n = 2$, $f_2 \leq \phi^2$

Supondo que a afirmação é verdadeira para todo n tal que $1 \leq n \leq k$, com $k \in \mathbb{Z}$, pode-se provar que ela também é verdadeira para $n = k + 1$, como segue-se:

$$f_k \leq \phi^k$$
$$f_{k-1} \leq \phi^{k-1}$$

Somando-se as equações e utilizando a fórmula da recursividade, tem-se:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \phi^k + \phi^{k-1} = \phi^{k+1}$$

$\square$

4 Propostas de Aplicação no Ensino Básico e Técnico

A partir daqui começa-se a discutir as possibilidades de aplicação dos conceitos relacionados ao Número de Ouro e à Sequência Fibonacci em sala de aula de ensino básico. Partindo de todo o referencial teórico desenvolvido, pode-se aplicar tais conhecimentos no nível médio e técnico com assertividade maior. Como mencionado e estudado por [11], um problema matemático não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da matemática, assim como seus usos e aplicações. Para [11], um problema é tudo o que não se sabe fazer, mas existe interesse em resolver.

Agora, deve-se compreender conceitos relacionados à aprendizagem significativa. Entende-se, através de [13] e [12], que aprendizagem significativa caracteriza uma forma de aprendizado onde o aluno consiga visualizar claramente o objetivo e quais competências irá adquirir com determinado estudo. Portanto, a Aprendizagem Significativa muito se assemelha ao que se conhece por aprendizado por competências, estando muito próximo também ao que se conhece por metodologia de ensino interacionista.

Na metodologia interacionista, o aluno deixa de ser um agente passivo e passa a "tomar as rédeas" do seu próprio aprendizado. Essa metodologia, em contraposição às metodologias clássicas, faz com que o professor se torne um mediador do conhecimento, perdendo a posição de agente principal do processo de ensino e aprendizagem. Surgem aqui algumas perguntas, por exemplo: Como intervir de forma construtiva no processo de aprendizagem dos alunos, ou ainda, como fazê-los ter interesse pelos assuntos inerentes à matemática?

Muitos comentários podem ser tecidos aqui, uma vez que muitos estudos são dirigidos na direção de proposição de métodos e práticas docentes ativas para a condução do processo pedagógico, muitos destes métodos utilizam os conceitos inerentes à aprendizagem significativa.

A matemática, enquanto componente curricular obrigatória do currículo nacional comum, tem nobre função de auxiliar na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar [14]. Ressalta-se que novas tecnologias, assim como avanços nas atuais, ocorrem quase que diariamente, de modo que fica cada vez mais necessário pensar na educação como ferramenta para a mudança de pensamento.

4.1 Ensino Básico - Nível Médio

4.1.1 Proposta de Aplicação 01 - Conjuntos Numéricos

A primeira atividade a ser realizada com os alunos de nível médio deverá ser desenvolvida no intuito de fazê-los compreender, analisar e diferenciar números e conjuntos numéricos. Nesse caso, é interessante utilizar relações de pertinência, solicitando aos alunos que preencham tabelas, onde identifiquem se determinados números se encaixam ou não nos referidos conjuntos. Todavia, partindo para uma aprendizagem significativa, pode-se propor situações problemas onde a caracterização destes números sejam necessárias, por exemplo, para o caso de dízimas periódicas, deve-se ensinar mais do que apenas a conversão do formato decimal para uma fração. Deve-se relacionar o conceito de dízima periódica, apontando para o conjunto dos números racionais, sendo esse um modo de relacionar os dois conhecimentos.

A Tabela 2 apresenta uma das possibilidades de se montar a referida tabela.

Tabela 2: Tabela da Atividade número 01

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
$\frac{1}{9}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
0,333333...				
-0,543543543...				
$-\frac{5}{9}$				
π				
$\sqrt{2}$				
$n\sqrt{2}$				
-20,56897412...				
$\frac{8}{7}$				
$-\frac{\pi}{3}$				

Nessa atividade, é importante mostrar aos alunos que um número em formato de fração pode ser descrito como um número decimal. Nesse momento, aproveitar e ressaltar que dízimas periódicas podem ser descritas como frações, ensinando-os a técnica para representar dízimas por suas frações geratrizes, isso pode ocorrer de forma espontânea, porém, é muito provável que existam alunos que classifique uma das dízimas como sendo um número irracional.

Contextualizar é necessário e da mesma forma, tornar interdisciplinar. Alguns alunos podem classificar um mesmo número ao mesmo tempo como racional e irracional. Além de explicar a diferença entre os dois no enunciado matemático, pode-se mostrar as regras gramaticais, onde os alunos devem compreender a aplicação do prefixo "i" e o caráter de negação.

Outro ponto importante nessa atividade, é fazer com que os alunos compreendam que, todos os números naturais estão contidos nos inteiros, do mesmo modo que todos os inteiros estão contidos nos racionais. O professor poderá fazer isso utilizando diagramas e as relações de inclusão.

4.1.2 Proposta de Aplicação 02 - Modulor e Retângulo Áureo

Situações problemas são muito bem vindas. Entende-se por situação problema, uma questão cujo intuito não seja apenas o de verificar o conhecimento matemático do aluno, mas também, a sua capacidade de interpretação e criatividade para solução de problemas, além, é claro, da sua capacidade de transportar conceitos matemáticos para problemas cotidianos.

Uma outra possibilidade de trabalho em sala de aula, dar-se-á com a construção de figuras geométricas, relacionando-as com obras arquitetônicas. O que ainda fornece uma enorme possibilidade de tornar o assunto interdisciplinar, haja vista a possibilidade de mesclar uma aula de Geometria com História da Arte e, até mesmo com História. Nesse contexto, deve-se trabalhar fato de que muitos matemáticos e cientistas desde cedo buscavam na própria matemática algo que tornasse objetos agradáveis aos sentidos humanos. Uma dessas buscas resultou no Modulor, um sistema proporcional que forneceria uma medida harmônica para a escala humana. A Figura 4 adaptada de [16] ilustra este sistema proporcional.

Um dos grandes exemplos na geometria, são os trabalhos de Leonardo da Vinci, tal como realizado na sua tradicional representação do homem em forma de uma estrela de cinco pontas. Ainda mencionando Da Vinci, um dos seus trabalhos mais célebres é a Mona Lisa, apresentando os retângulos áureos em múltiplos locais.

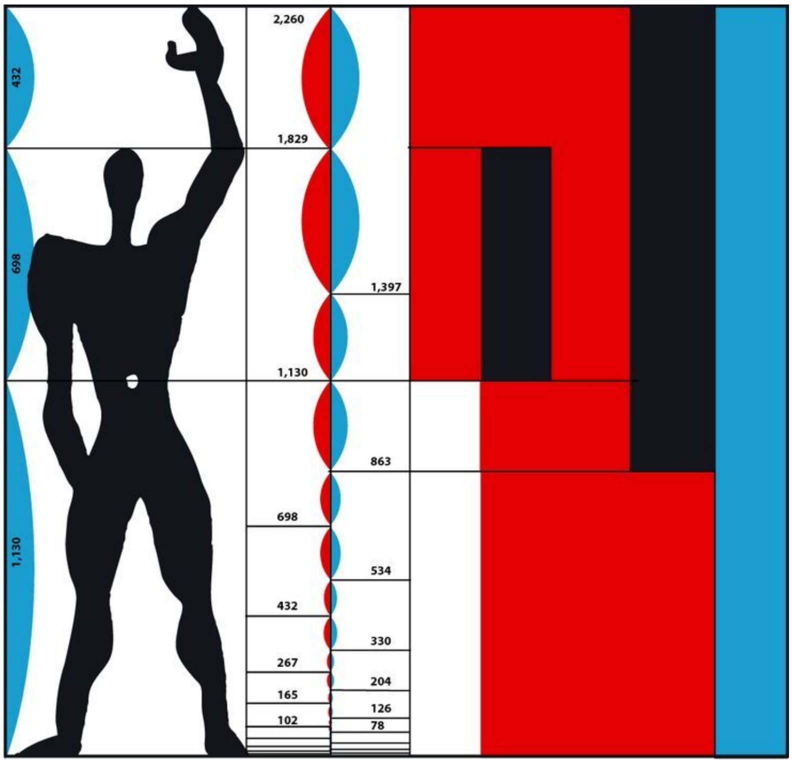

Figura 4: Modulor

Diante do exposto, tem-se, agora, referencial teórico suficiente para embasar uma segunda aula, aula esta que tratará da construção do retângulo áureo. Podem ser pensadas em aulas que envolvam, inicialmente, a explicação deste conceito, bem como sua construção, ou ainda, a busca de retângulos áureos dentro de uma figura previamente definida. Essa aula, poderá ainda, ser trabalhada em conjunto com a História da Arte, fazendo com que os alunos verifiquem que na era renascentista, a perfeição e a beleza eram bastante exploradas nas obras do período renascentista.

É interessante, inicialmente definir aos alunos o que é o retângulo áureo, como se segue. A Figura 5 ilustra um retângulo com dimensões tais, que se obedecido à Definição 4, será um retângulo áureo. Para isso, deve-se valer a relação:

$$\frac{\bar{AD}}{\bar{AB}} = \frac{\bar{EF}}{\bar{ED}} \iff \frac{y}{x} = \frac{x}{y-x} \iff y^2 - yx = x^2 \iff x^2 + yx - y^2 = 0 \qquad (18)$$

Definição 4. *Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo no qual a razão de suas medidas obedece à razão áurea com a seguinte propriedade: se dele retirar-se um quadrado, o retângulo restante será semelhante ao retângulo original.*

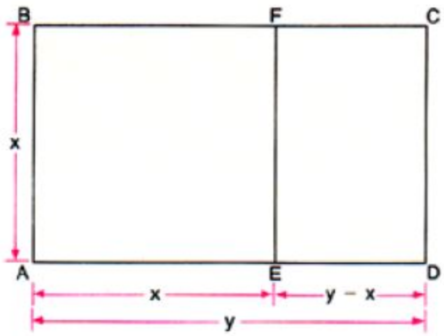

Figura 5: Retângulo Áureo e suas dimensões.

A Figura 6 ilustra a aplicação do retângulo áureo em uma obra renascentista.

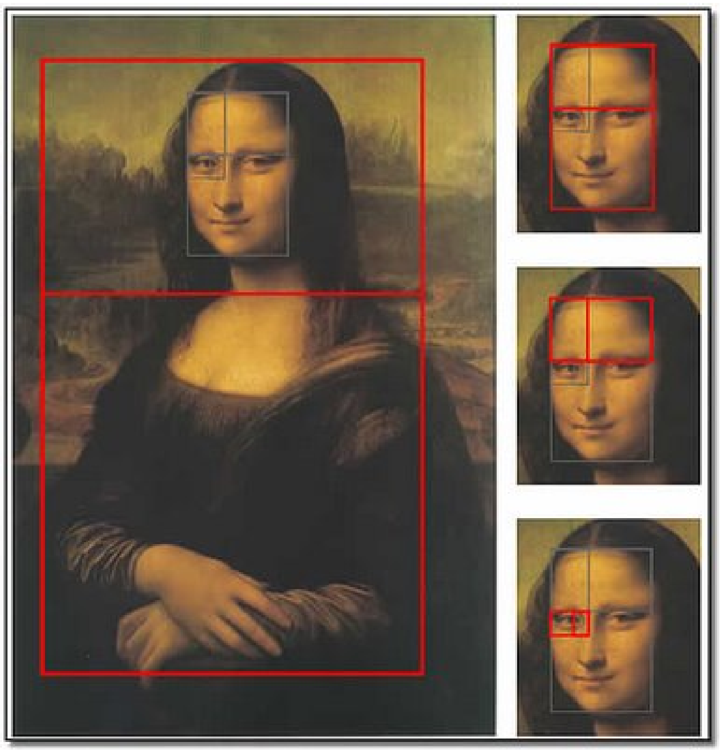

Figura 6: Retângulo Áureo na obra Monalisa, Da Vinci.

Na Expressão 18, as proporções serão conduzidas a ϕ, ou seja, ao número de ouro. Então, o novo retângulo $CDEF$, interior ao primeiro, também será áureo, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, obtêm-se outro retângulo interior à este segundo, sendo este, um processo infinito. Dessa forma, o professor deverá estar atento, pois além das dificuldades inerentes à Geometria, os alunos podem ter dificuldades também no processo de solução da equação de segundo grau. O professor deverá não apenas lembrá-los do que é a equação de segundo grau, como também os métodos de solução, propondo exemplos numéricos e situações problemas.

Os conceitos de razão e proporção também podem ser pontos de dúvidas dos alunos. Nesse ponto, o professor deverá relacionar o conceito de razão à divisão, bem como o conceito de proporção associado à igualdade de razões. Nesse ponto, pode-se propor aos alunos problemas práticos relacionados à proporções, mostrando, por exemplo, a diferença entre grandezas "diretamente proporcionais"e "inversamente proporcionais".

4.1.3 Proposta de Aplicação 03 - Número de Ouro na Natureza

Em [3] apresenta-se que, em determinadas flores, as sementes estão no centro, em certa ordem, tendo como exemplo, sementes de girassol, que estão dispostas em espirais logarítmicas que tanto curvam para a esquerda quanto para a direita, onde, o número de espirais em cada direção são (quase sempre) números vizinhos na Sequência Fibonacci. Isso por si só já permite pensar-se em uma aula bastante contextualizada, podendo, inclusive, ser ministrada de forma interdisciplinar juntamente com conteúdos de Botânica. A Figura 7 adaptada de [3], ilustra a espiral logarítmica encontrada na flor de girassol.

Segundo [5] recorrendo-se aos quadrados construídos na proposta de aplicação Número 02 e, utilizando-se de compassos, traçam-se arcos que são quartos de circunferências contidos em cada um dos quadrados. Estes arcos dão origem a uma curva que é denominada de espiral áurea. A Figura 8, adaptada de [5], ilustra a construção da espiral áurea.

Para essa proposta de aplicação é necessário que o docente mostre aos alunos o processo de ordenar os quadrados construídos em ordem crescente dos tamanhos dos lados, nesse ponto, é interessante a utilização da régua e/ou o escalímetro. Utilizando papel sulfite, construir sete quadrados de modo que as medidas dos lados correspondam aos sete primeiros números da Sequência Fibonacci.

Figura 7: Espiral Logarítmica na flor de Girassol.

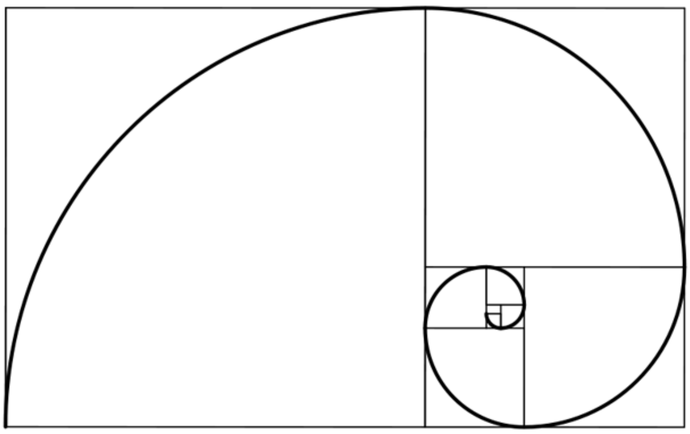

Figura 8: Espiral Áurea

Segue uma sugestão de processo de construção da espiral áurea adaptada de [18]:

- Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o segundo número da sequência de Fibonacci acima do primeiro.
- Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o terceiro número da sequência de Fibonacci à direita dos anteriores.
- Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o quarto número da sequência de Fibonacci abaixo dos anteriores.
- Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o quinto número da sequência de Fibonacci à esquerda dos anteriores.
- Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o sexto número da sequência de Fibonacci acima dos anteriores.
- Coloque o quadrado cujo comprimento do lado é o sétimo número da sequência de Fibonacci à direita dos anteriores.

Terminada a construção coloca-se a ponta seca do compasso no vértice do lado direito comum aos dois quadrados menores, traçando um quarto de círculo em cada um desses quadrados. Dando continuidade, traçar um quarto de círculo nos demais quadrados para formar a Espiral Áurea.

Ressalta-se que uma figura no formato *gif* (animação) desse processo de construção, está disponível no Blog da Obmep, no link disponível na referência bibliográfica [18].

4.1.4 Proposta de Aplicação 04 - Triângulo Áureo

Seguindo com as aplicações em Geometria Plana, outra figura que pode ser construída é o Triângulo Áureo. Para essa aula, o professor deve estar atento à eventuais dúvidas no que tange aos conceitos de geometria. A construção do Triângulo Áureo envolve o conhecimento de semelhança de triângulos, isso quer dizer que primeiramente o professor deverá explicar esse assunto aos alunos. Mostrando a propriedade fundamental da semelhança de figuras, onde, para um determinado triângulo, ao desenhar-se uma reta paralela à um dos três segmentos, os dois triângulo formados são semelhantes entre si.

A Figura 9 ilustra a construção do Triângulo Áureo.

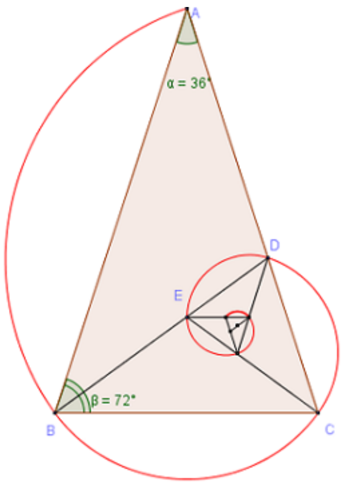

Figura 9: Triângulo Áureo

Uma vez que já fora explicado em outros momentos os conceitos de razão e proporção, a razão de semelhança terá uma explicação facilitada. Após a explanação acerca da semelhança de triângulos, deve-se explicar o Triângulo Áureo.

O triângulo áureo caracteriza-se como sendo um triângulo isósceles ABC com ângulos de base 72º e ângulo do ápice de 36º. O triângulo áureo é encontrado em outras figuras áureas, como no pentagrama áureo. Para sua construção, deve-se considerar um triângulo isósceles ABC cujos ângulos de base valem o dobro do terceiro ângulo. Como a soma dos ângulos é 180º, esse triângulo possui ângulos de 36º, 72º e 72º.

Traçando a bissetriz de um ângulo da base até o lado oposto, formando o triângulo DCB. Nota-se que o novo triângulo possui os mesmos ângulos do triângulo anterior e, portanto, eles são semelhantes. Repare também que como os ângulos DAB e DBA são iguais, os lados AD e BD também são iguais. Chamando a medida AB de r e a medida $AD = BD = AC$ de x.

Por semelhança, tem-se:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{(r-x)} \tag{19}$$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$r^2 - rx - x^2 = 0 \tag{20}$$

Segue-se que:

$$r = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2} \tag{21}$$

logo,

$$\frac{r}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{22}$$

sendo, $\frac{r}{x}$ a razão áurea e o triângulo é áureo.

4.1.5 Proposta de Aplicação 05 - Número de Ouro e o Corpo Humano

Uma quinta proposta de aplicação dos conceitos de número de ouro e sequência Fibonnaci para ensino médio, é, agora, realizada. O eixo articulador e central desta proposta é o número de ouro. Será necessário que o docente esteja preparado para utilizar conceitos de escalas, utilizar medição com fita métrica, além da calculadora. É interessante solicitar aos alunos que levem a calculadora no dia da aula, além de fitas métricas.

Como já foi abordado em uma outra proposta de aplicação, o Número de Ouro é encontrado abundantemente na natureza e no próprio ser humano. Dessa forma, existe a possibilidade de fazer com que os alunos identifiquem a razão áurea no próprio corpo. Inicialmente, pode-se solicitar que os alunos, divididos em grupos, meçam a altura de um dos componentes (A), bem como a altura do umbigo (B), altura da face do queixo ao alto da testa (C) e por fim, a altura da face do queixo até os olhos (D), anotando os resultados na Tabela 3, repetindo o processo para outro aluno componente do grupo e anotando os resultados medidos na Tabela 4.

Tabela 3: Tabela da Atividade número 05 - Primeiro Componente

Medida A	Medida B	Medida C	Medida D

Tabela 4: Tabela da Atividade número 05 - Segundo Componente

Medida A	Medida B	Medida C	Medida D

Esta é uma oportunidade, inclusive, de trabalhar alguns conceitos de estatística, uma vez que pode se solicitar que os alunos calculem a média das várias alturas dos colegas de turma, além de propor cálculo de mediana, moda e até mesmo desvio padrão.

Retornando ao tema principal, após realizar o que solicitado preenchendo as Tabelas 3 e 4, os alunos deverão utilizar a calculadora a fim de calcular as razões entre os resultados obtidos nas medições, preenchendo a Tabela 5, preenchendo-a para os dois estudantes medidos em cada grupo.

Tabela 5: Tabela da Atividade número 05 - Cálculo das Razões

A/B	C/D

Nesse ponto, é interessante, uma vez que pode-se tratar dos conceitos de estatística, solicitar que os alunos conversem entre os grupos a fim de compararem os resultados obtidos uns com os outros.

Os alunos deverão perceber que apesar de as medidas variarem de pessoa para pessoa, a razão de proporcionalidade que rege a beleza é a mesma para a maioria das pessoas. Este número é uma aproximação do Número de Ouro.

Ainda utilizando réguas, fitas métricas e calculadoras, é interessante fazer com que os alunos reconheçam retângulos áureos em construções consagradas, dessa forma, poderão encontrar na arquitetura a Razão Áurea. Nesse ponto, torna-se interessante abordar o conceito de escala. O professor, quando selecionar as construções que desejar utilizar em sala, poderá definir uma escala no desenho para que os alunos possam calcular o valor exato das alturas das construções. A seguir, algumas delas são mostradas. A primeira, Figura 10.

A Figura 11, a Figura 12 e a Figura 13, foram adaptadas de [19], ilustrando algumas das possibilidades de estruturas arquitetônicas que podem ser trabalhadas com os alunos, envolvendo, inclusive, aulas de História da Arte.

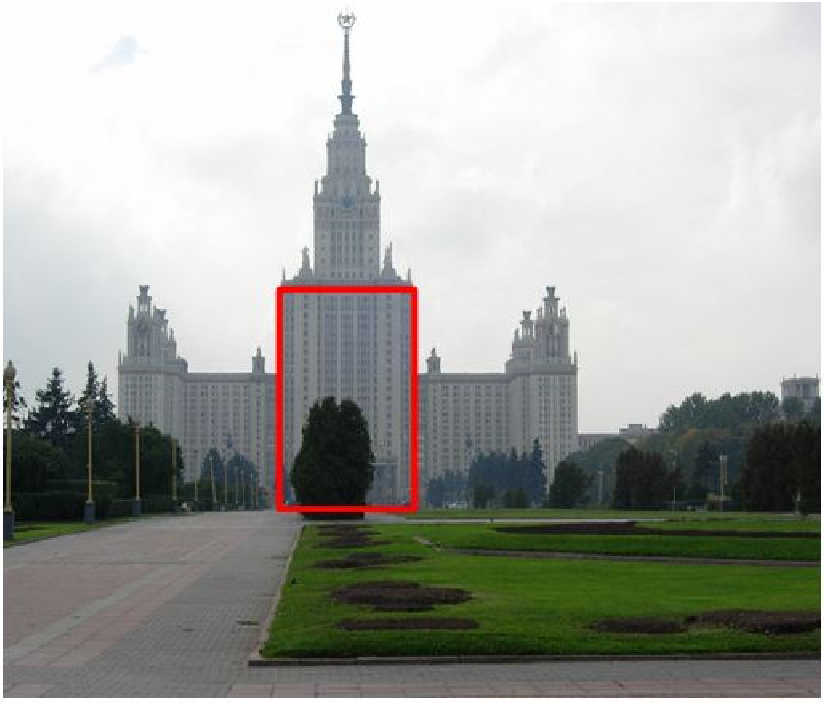

Figura 10: Universidade de Moscou

Figura 11: Arco de Septímio - Roma

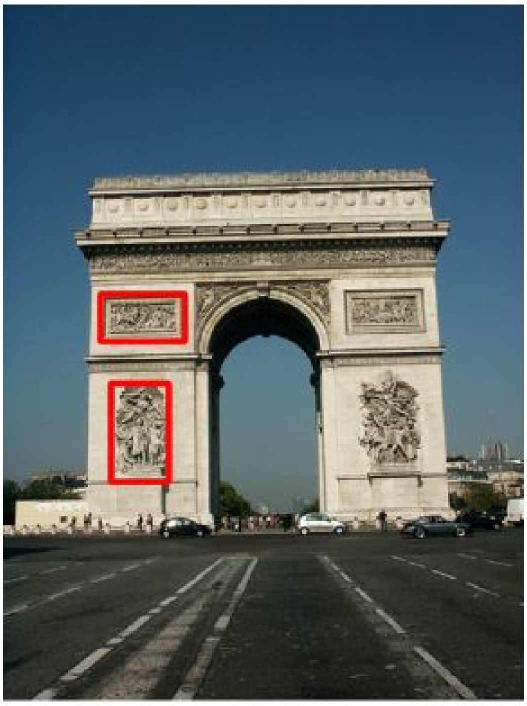

Figura 12: Arco do Triunfo - Paris

Figura 13: Parlamento Alemão - Berlim

4.2 Ensino Básico - Nível Técnico

4.2.1 Proposta de Aplicação 01 - Otimização

De modo geral, um problema de otimização é formulado através de uma função objetivo, ou seja, uma função que associa cada ponto no espaço de soluções à um número real. Essa solução é basicamente um processo de criação de algo que é o mais eficiente o possível. Este número permite medir a qualidade de uma resposta: no problema de minimização, quanto menor esse valor, melhor; nos problemas de maximização, ocorre justamente o inverso. Na busca de valores ótimos, o primeiro passo é identificar as variáveis de decisão. Seguindo com a identificação das possíveis soluções, é necessário avaliar cada uma dessas soluções corretamente para compará-las e registrar as melhores respostas [22].

Dentro os muitos métodos de otimização, têm-se os chamados Métodos Determinísticos. Estes são utilizados quando é possível prever todos os passos, conhecendo seu ponto de partida. Esse tipo de método leva sempre à mesma resposta se partir-se do mesmo ponto inicial. Em oposição à esses métodos, têm-se os chamados Métodos Estocásticos ou Aleatórios que apresentam caráter aleatório de vários processos simulados. Escolhas são feitas com base em números aleatórios sorteados no momento de execução do código. Dessa forma, partindo de um mesmo ponto inicial, cada execução do código seguirá um caminho e possivelmente levará à um resultado diferente.

A forma genérica de problemas de otimização é dada da Definição 10.

Teorema 10. *Minimizar* $f(X)$
Sujeita a $X \in S$,

onde $f : \Re^n \to \Re$ e $S \subset \Re^n$. S é chamado de Conjunto Factível. O vetor $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ é composto pelas variáveis do projeto [20]. As Definições 11 e 12 apresentam os dois tipos de soluções para o problema apresentado na Definição 10 [20].

Teorema 11. *Um ponto* $X^* \in S$ *é um minimizador local de* f *em* S *se e somente se existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $f(X) \geq f(X*)\ \forall\ X \in S$ *tal que* $\|X - X^*\| < \epsilon$. *Se* $f(X) > f(X^*)\ \forall\ X \in S$ *tal que* $X \neq X^*$ *e* $\|X - X^*\| < \epsilon$, *considera-se que se trata de um minimizador local estrito em* S.

Teorema 12. *Um ponto* $X^* \in S$ *é um minimizador global de* f *em* S *se e somente se* $f(X) \geq f(X^*)\ \forall\ X \in S$.

Se $f(X) > f(X^*)$ $\forall$ $X \in S$ tal que $X \neq X^*$, considera-se que se trata de um minimizador global estrito em S.

Um dos métodos de otimização existentes é o conhecido por Busca da Razão Áurea. Este método é similar ao método da bissecção para localizar raízes, método este que depende da definição de um intervalo, especificado por uma aproximação inferior (x_l) e outra superior (x_u) que delimitem uma única raiz. A presença de uma raiz entre estes valores era verificada determinando ($f(x_l)$) e ($f(x_u)$) tinham sinais diferentes, desse modo, a raiz estimada está no ponto médio do intervalo, ou seja:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} \tag{23}$$

Porém, agora deseja-se não mais encontrar uma raíz, mas sim um valor mínimo de uma função unidimensional, conforme ilustrado na Figura 14, adaptada de [22].

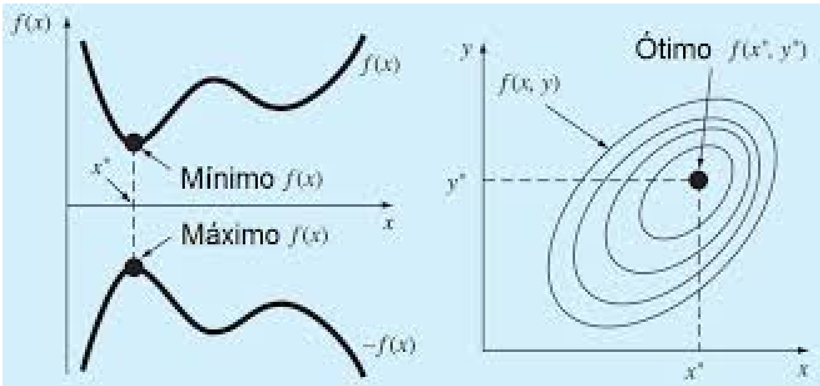

Figura 14: Otimização Unidimensional

No método da bissecção descrito em [21], o objetivo é encontrar um ponto de mínimo no intervalo descrito, uma vez que nesse ponto ocorre uma mudança de sinal, sendo o valor intermediário entre eles a aproximação de um zero. Porém, em questão de otimização, serão necessários dois valores intermediários da função para detectar uma ocorrência de mínimo. Tornar essa abordagem mais eficiente é o mesmo que realizar uma escolha adequada destes pontos intermediários. No método de busca da razão áurea, essa escolha dos pontos intermediários são escolhidos de acordo com a razão áurea, onde:

$$x_1 = x_l + d \tag{24}$$

$$x_2 = x_u - d \tag{25}$$

onde

$$d = (\phi - 1)(x_u - x_l) \tag{26}$$

Ao ser calculada nestes dois pontos interiores, podem ocorrer dois resultados, se $f(x_1) < f(x_2)$, então $f(x_1)$ é o mínimo, desta forma, a parte do domínio de x que está à esquerda de x_2 pode ser eliminado, pois não contém mínimo. Nesse caso, x_2 é o novo valor de x_l para a próxima rodada, porém, se $f(x_2) < f(x_1)$, então $f(x_2)$ é o mínimo, podendo ser descartado o domínio à direita de x_1 e neste caso, x_l se torna o novo x_u para a próxima rodada.

Por tratar-se de um algoritmo iterativo, os primeiros valores de x_1 e x_2 foram escolhidos utilizando a razão áurea, de modo que não será necessário recalcular todos os valores da função para a próxima iteração, sendo o antigo x_1 tornando-se o novo x_2 e assim sucessivamente até completar o algoritmo. Ressalta-se que a cada rodada de iteração, o intervalo que contém o ponto extremo é reduzido por um fator de $(\phi - 1)$ ou seja, próximo de 61,8%, o que quer dizer que em dez rodadas, o intervalo foi encolhido para 0,8% do tamanho inicial [21] e [22].

Sabe-se que aplicar os conceitos de otimização em ensino médio não é uma proposta fácil, por isso, opta-se por propor essa utilização no Ensino Técnico e, mais especificamente, aos alunos do Técnico em Automação da Faculdade Senai de Tecnologia Ítalo Bologna, em Goiânia, Goiás. Inicialmente, foi proposta uma aula onde os conceitos referentes ao Número de Ouro foram explicados, mostrando as suas aplicações em variadas áreas, para depois, mostrar e explicar o algoritmo de otimização, explicando-o.

Propõem-se alguns problemas na área de automação. Em virtude do tema, buscou-se auxílio de um professor da instituição, este, propôs uma aplicação para o cálculo de parâmetros de controladores Proporcionais Integrais Derivativos (PID), em uma malha de controle de temperatura.

De forma resumida, o algoritmo de otimização pela busca da razão áurea, assim como os resultados da aplicação, são apresentados no Capítulo 5.

5 Resultados e Discussão

5.1 Ensino Médio

5.1.1 Proposta de Aplicação 01

As propostas de aplicação mencionadas no Capítulo 4 foram realizadas durante as aulas de matemática no ensino médio do Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Dr. Cézar Toledo, situado em Anápolis - Goiás. As propostas foram realizadas para os alunos do 1º Ano do Ensino Médio, turmas A e B do turno matutino.

Inicialmente, realizando a proposta número 01, após breve explanação teórica acerca do tema, foram entregues aos alunos tabelas semelhantes à que é apresentada na Tabela 2 no Capítulo 4. Como era esperado, as maiores dificuldades dos alunos foram na diferenciação de números racionais e irracionais quando estes são apresentados na forma decimal.

Os dados sobre o preenchimento das tabelas de identificação dos conjuntos numéricos foram compilados e separados de acordo com os seguintes critérios:

- Conseguiram identificar números naturais **(A)**;
- Conseguiram identificar números naturais, marcando que eram pertencentes ao mesmo tempo ao conjunto dos naturais e inteiros **(B)**;
- Conseguiram identificar números naturais, marcando que eram pertencentes ao mesmo tempo ao conjunto dos naturais, inteiros e racionais **(C)**;
- Conseguiram identificar números naturais e inteiros marcando que eram pertencentes ao mesmo tempo ao conjunto dos inteiros e racionais **(D)**;
- Identificaram o número π como irracional **(E)**;
- Souberam reescrever dízimas periódicas na forma decimal para a forma de fração **(F)**;
- Apresentaram dificuldade na identificação dos conjuntos quando se tratava de números negativos **(G)**;
- Não identificaram nenhum dos números como sendo irracionais **(H)**;

Tal como proposto, o preenchimento da tabela serviu como avaliação diagnóstica, haja vista conhecer os pontos de maiores dúvidas dos alunos. Havendo identificado a deficiência na identificação dos números na forma decimal, procedeu-se com a explicação de dízimas periódicas e dízimas não periódicas, bem como o método para transformar as dízimas em frações. Ao realizar a transformação das dízimas da forma decimal para frações, os alunos compreenderam o significado de: $x \mid x = \frac{a}{b}$ onde, a e $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

A Tabela 6 apresenta o levantamento de informações oriundas da aplicação da atividade de identificação dos conjuntos numéricos antes da explicação em sala.

Tabela 6: Identificação dos Conjuntos Numéricos Antes da Explicação em Sala

Critério	Percentual
A	35%
B	25%
C	12%
D	12%
E	12%
F	5%
G	95%
H	90%

Apesar dos alunos do primeiro ano do ensino médio já terem estudado este conteúdo no decorrer das aulas de álgebra, notou-se que tal conteúdo ainda não havia sido corretamente assimilado pela grande maioria, de modo à causar debates interessantes em sala sobre o assunto, especialmente quando perguntados sobre o número π e sobre $\sqrt{2}$ e seus múltiplos. O que foi um momento oportuno para demonstrar em sala o caráter irracional de ambos. Outro ponto que deve ser mencionado é que os alunos perguntaram o motivo pelo qual a divisão por zero não existe, havendo outra possibilidade de explicação.

A Figura 15 e a Figura 16 apresentam a aula realizada sobre o assunto na turma 1^{o} ano A.

Figura 15: Explicação nas turmas de primeiro ano.

Por fim, como estava-se trabalhando com logaritmos, houve ali, possibilidades concretas de esclarecer dúvidas dos alunos, por exemplo, sobre a Tábua de Logaritmos. Ao final da explicação, foi aplicada nova tabela de identificação de números a fim de verificar-se a efetividade do aprendizado promovido naquele momento.

A Tabela 7 apresenta o levantamento de informações oriundas da aplicação da atividade de identificação dos conjuntos numéricos após a realização da atividade em sala.

Figura 16: Explicação nas turmas de primeiro ano.

Ressalta-se que na segunda tabela para identificação dos conjuntos numéricos, houve a substituição dos números que deveriam ser associados aos conjuntos, especialmente dos números irracionais. Os resultados apresentados na Tabela 7 mostram a eficácia deste planejamento, uma vez que os alunos passam não apenas a identificar corretamente o conjunto ao qual o número pertence como também identificar as relações de inclusão entre os subconjuntos dos números reais.

Tabela 7: Identificação dos Conjuntos Numéricos Após Explicação em Sala

Critério	Percentual
A	62%
B	56%
C	48%
D	48%
E	100%
F	12%
G	45%
H	0%

A fim de verificar o interesse e aceitação das aulas propostas, realiza-se um questionário com os discentes, de forma que eles deveriam responder, sem identificação, às seguintes perguntas:

- Você tinha dúvidas sobre Conjuntos Numéricos antes desta aula?
- Esta aula lhe auxiliou no esclarecimento de suas dúvidas sobre o assunto?
- Aulas contextualizadas facilitam o seu aprendizado?
- Gostou desta proposta de aula?

Ressalta-se que para o desenvolvimento desta proposta, foram utilizadas um total de 4 aulas de 50 minutos. Sendo desenvolvidas em dias seguidos e em cada dia 2 aulas seguidas.

Tabela 8: Questionário de Aceitação

Questão	Sim	Não
1	82%	18%
2	95%	5%
3	100%	0%
4	82%	18%

5.1.2 Propostas de Aplicações 02, 03, 04 e 05

As propostas de aplicação 02 e 03 foram realizadas conjuntamente, uma vez que em ambas as propostas, os alunos utilizariam equipamentos de desenho, tais como régua, escalímetro, entre outros. Na proposta número 03, os alunos devem construir espirais logarítmicas, o que casou-se perfeitamente bem com o conteúdo que as turmas estavam estudando no fluxo convencional do ensino médio. Para a construção das figuras geométricas previstas na proposta de aplicação número 02, aproveita-se do conteúdo de Geometria abordado pelo docente de Geometria, sendo figura de áreas planas.

Inicialmente, os alunos foram apresentados ao conteúdo de logaritmos, foi explicado como se formam, histórico, definição, consequências da definição e propriedades. Foram realizados exemplos e algumas situações problemas, incluindo, resolução de equações exponenciais, isto, na primeira aula. Esta etapa de fundamentação teórica está apresentada na Figura 17.

Após a explanação teórica acerca dos temas, com o auxílio do professor de Geometria e do professor de artes do colégio, dividiu-se os alunos em grupos de 04 à 06 integrantes para que pudessem discutir o tema além de realizar a atividade proposta, tal como visto na Figura 18 e na Figura 19.

Utilizando a impressora do colégio, imprimiu-se uma série de imagens de obras arquitetônicas onde os alunos pudessem identificar a presença de retângulos áureos. Estas imagens foram devidamente examinadas pelo professor de Artes, bem como pelos professores de matemática, para que, além de haver certeza da aplicação da proporção áurea, fosse verificada a escala em que estavam as imagens.

Desta forma, além de realizar o estudo do tema, houve também o estudo de Escalas, Geometria Plana, História da Arte, entre outros.

Figura 17: Fundamentação teórica para as propostas de aplicação 02, 03 e 04.

Foi notório o envolvimento dos alunos, uma vez que, pela primeira vez, assistiram à aula com mais de um professor e, especialmente, com professores de áreas diversas. No decorrer da aula, os alunos fizeram perguntas variadas, não apenas sobre o Número de Ouro e à Divina Proporção, mas sobre figuras geométricas, arquitetura, história da arquitetura e da arte de modo geral.

A fim de verificar o interesse e aceitação das aulas propostas, também realiza-se um questionário com os discentes, de forma que eles deveriam responder, sem identificação, às seguintes perguntas:

- Você avalia de forma positiva a interdisciplinaridade nas aulas?
- A presença de professores de outras disciplinas aumenta o seu aprendizado?
- Gostaria de ter mais aulas como esta?
- Gostou desta proposta de aula?

A Tabela 9 apresenta os resultados do questionário de aceitação.

Figura 18: Divisão dos grupos de trabalho.

Tabela 9: Questionário de Aceitação

Questão	Sim	Não
1	84%	16%
2	88%	12%
3	92%	8%
4	92%	8%

5.2 Ensino Técnico

5.2.1 Otimização - Método da Seção Áurea

Uma proposta de aplicação para o ensino técnico que envolva a razão áurea é a sua utilização em um método de busca unidimensional que utiliza a razão áurea para realizar a redução do intervalo de incerteza, conforme já discutido no Seção 4.1, onde definiu-se que o problema de otimização, é de modo geral, um problema de minimização ou de maximização.

Figura 19: Divisão dos grupos de trabalho.

Por se tratar de uma proposta de aplicação para ensino técnico, buscou-se uma parceria com professor da instituição SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial), departamento regional de Goiás e mais especificamente, na turma do curso técnico em Automação Industrial na Faculdade de Senai de Tecnologia Ítalo Bologna, em Goiânia. O docente, Prof. Me. Eng. Leovir Cardoso Aleluia Junior, bacharel em Engenharia de Controle Automação e Mestre em Engenharia Elétrica, ministrou minicurso onde os alunos do referido curso técnico, utilizaram do método de otimização da seção áurea para otimizar determinados processos.

Inicialmente, realizou-se uma explanação teórica acerca do assunto otimização, uma vez que a ementa do referido curso técnico em Automação Industrial não contempla o tema. Limitando-se à formas gráficas de enxergar a otimização e explorando exclusivamente formas matemáticas triviais para explicá-la, o professor seguiu com a explicação da linguagem *matlab*, linguagem na qual o algoritmo é implementado.

Realizou-se também a explanação teórica acerca do Número de Ouro, Sequência Fibonacci, e demais temas, além de suas aplicações em arquitetura e demais ciências. Em seguida, desenvolveu-se a explicação do método de otimização baseado na seção áurea.

O objetivo do minicurso era desenvolver um controlador de temperatura onde os parâmetros do elemento de controle são otimizados, de modo à torná-lo mais eficiente à eventuais variações de temperatura dentro do sistema. Todavia, esta aplicação não faz parte do escopo do presente trabalho, de forma que aqui limita-se à explicação realizada pelo docente para a realização do processo de otimização do exemplo fornecido para os alunos. O algoritmo implementado é apresentado a seguir.

Algoritmo 1: Seção Áurea

início
    Escolha $\epsilon > 0$, faça r := $(\sqrt{5} - 1)/2$
    $\alpha = a + (1 - r)d$, $\beta = a + rd$
    $y_1 = f(\alpha)$, $y_2 = f(\beta)$
    Enquanto (b-a) $> \epsilon$
    if $y_1 > y_2$ **então** $a = \alpha$, $\alpha = \beta$, $y_1 = y_2$
    $\beta = a + r(b - a)$
    $y_2 = f(\beta)$
    senão $b = \beta$, $\beta = \alpha$, $y_2 = y_1$
    $\alpha = a + (1 - r)(b - a)$
    $y_1 = f(\alpha)$
    end
    end
    $\alpha = (b + a)/2$
fim

O código desenvolvido em linguagem *matlab* foi implementado utilizando o software *Scilab* uma vez que este é gratuito e de programação extremamente próxima à software comercial Matlab®. O *Scilab* possui, inclusive, uma função nativa que converte códigos implementados em Matlab® para sua própria linguagem.

O docente Leovir, propõe como exemplo que os alunos, utilizando o algorítimo do método de otimização por razão áurea, realizem a implementação do código a fim de encontrar o ponto máximo de elevação de um corpo obedecendo à equação:

$$v = v_0 \cdot e^{-(c/m)t} - \frac{mg}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) \tag{27}$$

onde v é a velocidade deste corpo, g é a gravidade, v_0 é a velocidade inicial, m é a massa e t é o intervalo de tempo considerado. Logo, a máxima elevação ocorre no valor de t que leve esta equação para zero. Para o desenvolvimento desta aplicação, faz-se necessário desenvolver uma rotina que realize a busca pelo método da seção áurea, tal como apresentado no código à seguir:

```
function[x,fx,ea,iter] = aureamin(f,x1,xu,es,maxit,varargin)

if nargin<3, error('são necessários pelo menos 3 parâmtros de entrada');end
if nargin<4||isempty(es), es=0.0001;end
if nargin<5||isempty(maxit), maxit=50;end
phi = (1 + sqrt(5))/2;
iter = 0;
while(1)
d = (phi-1)*(xu-x1);
x1 = x1 + d;
x2 =xu - d;
if f(x1, varargin{:}) < f(x2,varargin{:})
xopt = x1;
x1 = x2;
else
xopt = x2;
xu = x1;
end
iter = iter +1;
if xopt~=0, ea = (2-phi)*abs((xu - x1)/xopt)*100; end
if ea <= es || iter >= maxit, break, end
end
x = xopt; fx = f(xopt,varargin{:});
```

Desta forma, a função *aureamin* realiza a busca do ponto ótimo, sendo este um problema de maximização (deseja-se encontrar o ponto de máxima altura). O docente deixa claro que funções mais simples, tal como esta, possuem possibilidade solução analítica, todavia, a fim de demonstrar o funcionamento do algoritmo, deseja-se testar esta busca.

A fim de "chamar"a função, realiza-se o desenvolvimento de uma rotina:

```
clear; clc;
g = 9.81;v0=55;m=80;c=15;z0=100;t=0:0.01:5;
z = @(t) - (z0+m/c*(v0+m*g/c)*(1-exp(-c/m*t)) - m*g/c*t);
[xmin,fmin,ea]=aureamin(z,0,8)
```

A rotina criada deve retornar o valor mínimo da função, além do valor de t em que ele ocorre. A saída do programa criado é mostrada a seguir:

```
clear; clc;
g = 9.81;v0=55;m=80;c=15;z0=100;t=0:0.01:5;
z = @(t) - (z0+m/c*(v0+m*g/c)*(1-exp(-c/m*t)) - m*g/c*t);
[xmin,fmin,ea]=aureamin(z,0,8)

xmin =

3.0557

fmin =

-189.7591
```

Desta forma, a maior elevação é de 189,7591 metros, ao passo que esta elevação ocorre no tempo $t = 30,0557s$.

Os alunos do ensino técnico da turma, que eram de forma majoritária oriundos de escola pública, afirmaram no decorrer da explicação sobre Número de Ouro, nunca terem estudado tais assuntos no decorrer do Ensino Fundamental e Médio, além de afirmarem terem tido um severo déficit no ensino de exatas. Estes fatos contribuíram para o modo como os alunos reagiram no decorrer da aula. A turma reagiu de forma muito positiva durante a apresentação de *slides* sobre o tema, além de mostrarem grande interesse em utilizá-lo em um problema do cotidiano dos técnicos em automação.

A título de comparação e levantamento de dados, realizaram-se algumas perguntas aos alunos:

- Você é oriundo de escola pública, particular ou conveniada?

- Você já tinha estudado Número de Ouro?
- Você considera que aplicações como estas teriam tornado as aulas de matemática mais interessantes no período em que estudaram?

Seguem os resultados das perguntas em valores percentuais:

Tabela 10: Tipo de Escola de Nível Médio

Pública	Privada	Conveniada
85%	10%	5%

A pergunta sobre o tipo de instituição na qual o aluno concluiu o ensino médio, justifica-se pois é notório que na educação pública, o ensino de matérias exatas ainda é bastante precarizado quando comparado à educação privada ou mesmo conveniada. Este percentual de alunos oriundos da rede pública de alunos, mostrado na Tabela 10, justifica a dificuldade dos alunos em disciplinas voltadas à matemática.

Tabela 11: Estudo Prévio do Número de Ouro

Sim	Não
5%	95%

Tabela 12: Aplicações Contribuiriam com o Ensino de Matemática

Sim	Talvez	Não
95%	5%	0%

Quanto ao percentual de alunos que nunca tinham estudado, ou mesmo ouvido falar do assunto Número de Ouro discutido nas aulas, é um indicador do caráter engessado do ensino básico. Nota-se que independente da rede de ensino (pública ou privada) que o aluno seja oriundo, percebe-se que os docentes não tem priorizado a contextualização ou interdisciplinaridade, especialmente quando observado o resultado visto na Tabela 12, onde 95% dos alunos do ensino técnico, afirmaram que a contextualização teria auxiliado muito no aprendizado quando ainda em nível médio.

6 Considerações finais

Durante todo o decorrer do trabalho, especialmente na aplicação das propostas de atividades em sala de aula, tanto em ensino médio quanto em ensino técnico, nota-se que a realização de aulas com objetivos previamente definidos, bem como estratégias de ensino aprendizagem também pensadas previamente, tornam a execução da aula agradável, além de chamar muito mais a atenção dos alunos, especialmente quando estas aulas são contextualizadas e recheadas com significados presentes no cotidiano discente.

A primeira proposta de aplicação, Identificação dos Conjuntos Numéricos, possibilitou que fossem identificados déficits no conhecimento prévio dos alunos, especialmente, por se tratar de conteúdo que tinham visto à pouco tempo, no primeiro semestre do ano. As pesquisas de aceitação realizadas em sala, mostraram que os alunos não só se agradam de aulas contextualizadas e interdisciplinares, como também aprendem de forma mais clara, fazendo-os realmente interagirem com o conteúdo.

Ainda sobre as propostas de aplicação em nível médio, nota-se, através dos resultados encontrados nas pesquisas de aceitação realizadas em sala de aula que ainda existem enormes barreiras à serem quebradas no que tange à interdisciplinaridade. Os alunos, apesar de relatarem que gostaram muito da experiência de terem mais de um professor e de mais de uma área na mesma sala, relataram certa dificuldade em assimilar tal situação, uma vez que ainda hoje existe uma grande fronteira entre duas disciplinas ou áreas de estudo.

Foi notório o aumento do interesse dos alunos nas aulas quando estas foram contextualizadas e interdisciplinares, notou-se também a reação positiva da turma quando a sala tornou-se um laboratório, quando puseram as mãos em lapiseiras, réguas, montaram grupos de trabalho e realizaram atividades práticas. Pode-se notar, inclusive, habilidades de liderança em alguns alunos, de modo à corroborar com a literatura acerca de aprendizagem significativa e baseada em competências.

No ensino técnico e, especialmente no curso técnico em automação industrial, nota-se uma grande dificuldade dos alunos em matemática, o que é explicado não somente pela maioria absoluta da turma ser oriunda da rede pública como também pelo tempo fora da sala de aula. No SENAI este curso tem uma Unidade Curricular (disciplina) chamada Fundamentos da Eletrotécnica, cuja ementa se inicia com o matemática básica. Partindo de operações matemáticas básicas, passando pelo estudo das mais diversas funções. De modo que em conversas com os docentes, notou-se que grande parte das reprovações e da evasão acontece justamente nesta matéria básica, haja vista ser ligada à matemática.

Este trabalho fornece um primeiro passo na direção de trabalhar a matemática de forma diferente no ensino técnico, uma vez que mostra um estudo de caso sobre o tema. Todavia, ainda incipiente quando comparado com a necessidade deste nível de educação, fazendo notório a importância de mais estudos e aprofundamento do tema.

7 Referências

Referências

[1] Fiorentini, Dario *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil, Zetetiké, Vol. 03, nº 01, (1995).*

[2] Bom Dia, Brasil *Pesquisa põe o Brasil entre os piores no ensino de matemática e ciências, G1 Portal de Notícias, (2012).*

[3] Livio, Mario *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente, Record, (2008).*

[4] Junior, Cruz and others *A matemática por trás de um número: razão áurea , Universidade Federal de Juiz de Fora, PROFMAT, (2014).*

[5] ZAHN, Maurício *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, Londrina, PR, Brasil: Editora Ciência Moderna, vol. 25, p-164, 2011.*

[6] Eves, Howard Whitley *Introdução à história da matemática*, Unicamp, (1995).

[7] Basin, SL and Hoggatt Jr, Verner E *A primer on the Fibonacci sequence, Part II, Fibonacci Quarterly, vol. 01, nº 02, pp. 61-68, (1963).*

[8] Fabio Brochero, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha, Eduardo Tengan *Um passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro, dos Números, Teoria, 4ª ed, IMPA*

[9] Brousseau, Alfred *An Introduction to Fibonacci Discovery, Fibonacci Association, San Jose State College, (1965).*

[10] Gontijo–UCB, Cleyton Hércules *Resolução e Formulação de Problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática, UCB, (2006).*

[11] Onuchic, Lourdes de la Rosa and Gomes Allevato, Norma Suely *As diferentes personalidades do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas, Bolema-mathematics Education Bulletin-boletim de Educacao Matematica, p79–102, 2008, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de Matemática.*

[12] AUSUBEL, David P *A aprendizagem significativa, journal São Paulo: Moraes, 1982.*

[13] Pelizzari, Adriana and Kriegl, M de L and Baron, Márcia Pirih and Finck, Nelcy Teresinha Lubi and Dorocinski, Solange Inês *Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel, revista PEC, p37–42, 2002.*

[14] Ricardo, Elio Carlos and Zylbersztajn, Arden *Os Parâmetros Curriculares Nacionais na formação inicial dos professores das Ciências da Natureza e Matemática do ensino médio, Investigações em Ensino de Ciências, p339–355, 2016.*

[15] Dunlap, Richard A *The golden ratio and Fibonacci numbers, 1997, World Scientific.*

[16] Corbusier, Le *The Modulor and Modulor 2, Springer Science & Business Media, vol. 01, 2004.*

[17] Posamentier, Alfred S and Lehmann, Ingmar *The glorious golden ratio, 2011, Prometheus Books.*

[18] Clubes Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Blog *Clubes Obmep, Blog, site, endereço: http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea-uma-construcao-da-espiral-aurea/, acessado em 08 de agosto de 2018.*

[19] Garcia, Vera Clotilde and Serres, Fabiana Fattore and Magro, Juliana Zys and de Azevedo, Taís Aline Bruno *O número de ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais, Trabalho disponível em http://www. mat. ufrgs. br/˜ vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_, vol. 20, 2016.*

[20] Vanderplaats, Garret N *Numerical optimization techniques for engineering design, Vanderplaats Research and Development, Incorporated, 2001.*

[21] Chapra, Steven C and Canale, Raymond P *Numerical methods for engineers, Mcgraw-hill New York, 1998.*

[22] Chapra, Steven C *Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas-3, AMGH Editora, 2013.*

[23] Hamilton, L Guidorizzi *Um curso de Cálculo, Vol. 1, Livros Técnicos e Cientıficos Editora, 1997, UCMA 26-01/GUI.*

8 ANEXOS

8.1 ANEXO - Plano - Conjuntos Numéricos

CONJUNTOS NUMÉRICOS

I. ***Plano de Aula*:**

II. ***Dados de Identificação*:**
Escola: Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Dr. Cézar Toledo Anápolis Goiás
Professor (a): Iberê Dujardin
Disciplina: Matemática / Álgebra
Série: Primeiro Ano, Ensino Médio
Turma: A e B
Período: Matutino

III. ***Tema:***
Conjuntos Numéricos

IV. ***Objetivos:***
Objetivo geral:
Conhecer, identificar e diferenciar os diversos conjuntos numéricos, classificando números de acordo com suas especificidades dentro de determinado (s) conjunto (s).
Objetivos específicos:
Conhecer os diversos conjuntos numéricos;
Diferenciar números, classificando-os de acordo com o conjunto à qual pertença;
Realizar operações básicas com números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais;

V. ***Conteúdo:***
História dos Conjuntos Numéricos;
Conjunto dos Naturais e operações;
Conjunto dos Inteiros e Operações;
Conjunto dos Racionais e Operações;
Conjunto dos Números Irracionais;
Conjunto dos Números Reais;

VI. ***Desenvolvimento do tema*:**

Utilizar relações de pertinência, solicitando aos alunos que preencham tabelas, onde identifiquem se determinados números se encaixam ou não nos referidos conjuntos.
Partindo para uma aprendizagem significativa, propor situações problemas onde a caracterização destes números seja necessária, por exemplo, para o caso de dízimas periódicas, deve-se ensinar mais do que apenas a conversão do formato decimal para uma fração.
Deve-se relacionar o conceito de dízima periódica, apontando para o conjunto dos números racionais, sendo este um modo de relacionar os dois conhecimentos.
Explicar o método de conversão de dízima para frações e também sua recíproca.
Caracterizar números em mais de um conjunto numérico, desenhando sempre os diagramas correspondentes.

VII. ***Recursos didáticos:*** Quadro, pincel marcador, Datashow, Computador, Impressões.

VIII. ***Avaliação:*** Esta aula não tem finalidade avaliativa

XIX. ***Bibliografia***:
IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções, volume 1**. São Paulo: Atual Editora, 2004.
SAFIER, Fred. **Pré-Calculo: Coleção Schaum**. Bookman Editora, 2009.

8.2 ANEXO - Plano - Modulor e Retângulo Áureo

MODULOR E RETÂNGULO ÁUREO

I. *Plano de Aula*
II. *Dados de Identificação*: Escola: Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Dr. Cézar Toledo Anápolis Goiás Professor (a): Iberê Dujardin Disciplina: Matemática / Geometria Série: Primeiro Ano, Ensino Médio Turma: A e B Período: Matutino
III. *Tema:* Modulor e Retângulo Áureo
IV. *Objetivos:* **Objetivo geral**: Conhecer, aplicar e relacionar o modulor à figura humana, relacionando-o com escalas e proporções. Identificar e desenhar o retângulo áureo, relacionando-o à espiral algorítmica. **Objetivos específicos**: Conhecer o conceito de Modulor; Relacionar o conceito de Modular à escalas, proporções e razões; Realizar medições com fita métrica; Utilizar régua, esquadro e demais itens de desenho técnico para traçar retângulos áureos; Utilizar o compasso para traçar espirais logarítmicas.
V. *Conteúdo:* Modulor; Razões e Proporções; Geometria Plana; Retângulo áureo; Logaritmo e função logarítmica; Espiral Logarítmica;
VI. *Desenvolvimento do tema*: Explanação teórica acerca dos conceitos relacionados à logaritmo e funções logarítmicas, bem como à razões, proporções e desenho técnico. Solicitar aos alunos que façam medições no corpo humano, em grupos, a fim de identificar a proporção harmônica que é o Modulor. Imprimir imagens destacadas na referência bibliográfica a fim de fazer com que os alunos identifiquem o retângulo áureo em estruturas arquitetônicas. Promover debates, discussões, análises e etc.
VII. *Recursos didáticos:* Quadro, pincel marcador, Datashow, Computador, Impressões de Imagens, réguas, compassos, escalímetros, etc.
VIII. *Avaliação:* Esta aula não tem finalidade avaliativa
XIX. *Bibliografia*: DUJARDIN JUNIOR, Iberê. **Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Médio e Técnico Profissionalizante, Dissertação PROFMAT**. UFG, 2018.

8.3 ANEXO - Plano - Triângulo Áureo

TRIÂNGULO ÁUREO

I. *Plano de Aula*
II. *Dados de Identificação*: Escola: Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Dr. Cézar Toledo Anápolis Goiás Professor (a): Iberê Dujardin Disciplina: Matemática / Geometria Série: Primeiro Ano, Ensino Médio Turma: A e B Período: Matutino
III. *Tema:* Triângulo Áureo
IV. *Objetivos:* **Objetivo geral**: Identificar e desenhar o triângulo áureo, relacionando-o à proporções e semelhança de triângulo. **Objetivos específicos**: Identificar e caracterizar o triângulo áureo, diferenciando-os de outros triângulos; Compreender a semelhança de triângulos; Relacionar o triângulo áureo à proporção áurea.
V. *Conteúdo:* Triângulos, tipos, características e classificações; Semelhança de Triângulos; Triângulo Áureo; Desenho Técnico;
VI. *Desenvolvimento do tema*: Explanação teórica acerca dos conceitos relacionados à triângulos, semelhança de triângulos e desenho técnico (solicitar apoio de docente de artes). Explicação acerca do triângulo áureo, bem como sua construção. Distribuir folhas de papel A4 para os alunos, juntamente com kits para desenho técnico, explicando passo à passo como construir o triângulo áureo, de modo que estes realizem *hands-on*. Promover debates, discussões, análises e etc.
VII. *Recursos didáticos:* Quadro, pincel marcador, Datashow, Computador, Impressões de Imagens, réguas, compassos, escalímetros, etc.
VIII. *Avaliação:* Esta aula não tem finalidade avaliativa
XIX. *Bibliografia*: DUJARDIN JUNIOR, Iberê. **Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Médio e Técnico Profissionalizante, Dissertação PROFMAT**. UFG, 2018.

8.4 ANEXO - Plano - Número de Ouro e a Natureza

Número de Ouro na Natureza

I. *Plano de Aula*
II. *Dados de Identificação*: Escola: Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Dr. Cézar Toledo Anápolis Goiás Professor (a): Iberê Dujardin Disciplina: Matemática / Geometria Série: Primeiro Ano, Ensino Médio Turma: A e B Período: Matutino
III. *Tema:* Número de Ouro na Natureza
IV. *Objetivos:* **Objetivo geral**: Identificar o Número de Ouro e a Espiral Áurea na Natureza. **Objetivos específicos**: Conhecer o Número de Ouro; Relacionar o conceito de Número de Ouro à razões e proporções; Identificar o Número de Ouro na natureza; Identificar a Espiral Áurea na natureza;
V. *Conteúdo:* Número de Ouro; Espiral Áurea; Tópicos de Biologia: Anatomia e Botânica;
VI. *Desenvolvimento do tema*: Explanação teórica acerca dos conceitos relacionados Número de Ouro e Espiral Áurea. Solicitar aos alunos que façam medições no esqueleto humano do laboratório de ciências, em grupos, a fim de identificar o Número de Ouro em diversas partes do corpo. Aproveitar o momento para que o professor de Biologia faça explanações acerca do corpo humano, sistema, ossos, bem como de tópicos de botânica onde a Espiral Áurea é encontrada; Promover debates e apresentações de resultados;
VII. *Recursos didáticos:* Quadro, pincel marcador, Datashow, Computador, Impressões de Imagens, réguas, compassos, escalímetros, etc.
VIII. *Avaliação:* Esta aula não tem finalidade avaliativa
XIX. *Bibliografia*: DUJARDIN JUNIOR, Iberê. **Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Médio e Técnico Profissionalizante, Dissertação PROFMAT**. UFG, 2018.

8.5 ANEXO - Plano - Número de Ouro e o Corpo Humano

NÚMERO DE OURO E O CORPO HUMANO

I. *Plano de Aula*
II. *Dados de Identificação*: Escola: Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás, Dr. Cézar Toledo Anápolis Goiás Professor (a): Iberê Dujardin Disciplina: Matemática / Geometria Série: Primeiro Ano, Ensino Médio Turma: A e B Período: Matutino
III. *Tema:* Número de Ouro e o Corpo Humano
IV. *Objetivos:* **Objetivo geral**: Conhecer, identificar e relacionar o número de ouro à figura humana, relacionando-o com escalas e proporções. **Objetivos específicos**: Realizar medições em partes do corpo humano; Identificar o número de ouro em partes do corpo humano; Realizar proposições acerca da harmonia oriunda do número de ouro;
V. *Conteúdo:* Escalas, razões e proporções; Instrumentos de medidas de comprimento; Anatomia; Número de Ouro;
VI. *Desenvolvimento do tema*: Solicitar aos alunos que façam medições no corpo humano, em grupos, a fim de identificar segmentos cuja razões tenham valores aproximados ao número de ouro. Trabalhar a imaginação dos alunos, associando o número de ouro à experiências prévias destes, mostrando onde pode-se encontra-lo no corpo humano, fazendo-os registrar em tabelas previamente impressas os valores das medições. Pode-se montar grupos, solicitando que os alunos encontrem uma quantidade pré-definida de razões áureas em partes do corpo humano, promovendo rankings. Pode-se solicitar suporte do professor de Biologia para que, por meio do esqueleto humano, os alunos identifiquem nomes de ossos, músculos
VII. *Recursos didáticos:* Quadro, pincel marcador, Datashow, Computador, Impressões de Imagens, réguas, compassos, escalímetros, etc.
VIII. *Avaliação:* Esta aula não tem finalidade avaliativa
XIX. *Bibliografia*: DUJARDIN JUNIOR, Iberê. **Tópicos de Teoria dos Números Aplicados ao Ensino Médio e Técnico Profissionalizante, Dissertação PROFMAT**. UFG, 2018.

8.6 ANEXO - Plano - Otimização

ENSINO TÉCNICO - OTIMIZAÇÃO

I. ***Plano de Aula***
II. ***Dados de Identificação***: Escola: Faculdade SENAI de Tecnologia Ítalo Bologna Professor (a): Iberê Dujardin / Leovir Junior Disciplina: Mini Curso: Otimização Aplicada Série: Técnico em Automação Turma: A Período: Noturno
III. ***Tema:*** Otimização para Ensino Técnico
IV. ***Objetivos:*** **Objetivo geral**: Conhecer o problema de otimização, métodos de otimização e aplicar o método de otimização pela razão áurea. **Objetivos específicos**: Conhecer os conceitos de razão áurea; Compreender o problema de otimização; Diferenciar os algoritmos de otimização; Aplicar o algoritmo de otimização por razão áurea em um problema físico;
V. ***Conteúdo:*** Razão Áurea e Número Áureo; Problema de Otimização; Algoritmos de Otimização; Programação *Scilab*;
VI. ***Desenvolvimento do tema***: Em primeiro momento, o docente Iberê deverá apresentar em caráter de palestra, os assuntos referentes ao Número de Ouro, Razão Àurea, Espiral Áurea e Sequência Fibonacci, devidamente adaptado e planejado para o público alvo; O docente Leovir deverá assumir a partir disto, explicando inicialmente o problema de otimização, mostrando a diferença entre problemas de minimização e de maximização e apresentando alguns dos principais algoritmos de otimização, ligando tais conhecimentos com a possibilidade de utilização em problema de automação, que neste caso, será a implementação de controlador PID com parâmetros otimizados. Apresentar a linguagem *Scilab* aos alunos, mostrando os principais comandos, uma vez que estes já estão habituados à linguagem C. Implementar o algoritmo de otimização por seção áurea.
VII. ***Recursos didáticos:*** Quadro, pincel marcador, Datashow, Computador com *Scilab*, Impressões.
VIII. ***Avaliação:*** Esta aula não tem finalidade avaliativa
XIX. ***Bibliografia***: Notas de texto encaminhadas aos alunos