Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Ensinando Geometria Plana na EJA

Luciano Bráulio Caetano de Azevedo

Goiânia

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Luciano Bráulio Caetano de Azevedo

Título do trabalho: Ensinando Geometria Plana na EJA

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Luciano B. C. de Azevedo

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Lidiane S. M. Lima

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 16 / 12 / 2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Luciano Bráulio Caetano de Azevedo

Ensinando Geometria Plana na EJA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientadora: Dra Lidiane dos Santos Monteiro Lima

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Azevedo, Luciano
Ensinando Geometria Plana na EJA [manuscrito] / Luciano Azevedo. - 2018.
lxxii, 82 f.

Orientador: Prof. Dr. Lidiane Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Triângulo, Quadrilátero, Educação de Jovens e Adultos.. I. Lima, Lidiane, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Luciano Bráulio Caetano de Azevedo – Aos vinte dias do mês de novembro do ano de dois mil e dezoito, às 16:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profª. Drª. Lidiane dos Santos Monteiro Lima – Orientadora, Profª. Drª. Maria Bethania Sardeiro dos Santos e o Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **"Ensinando Geometria Plana na EJA",** em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Luciano Bráulio Caetano de Azevedo, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Profª. Drª. Lidiane dos Santos Monteiro Lima, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em duas vias de igual teor.

Lidiane S. M. Lima

Profª. Drª. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Presidente – IME/UFG

Maria Bethânia S. dos Santos

Profª. Drª. Maria Bethania Sardeiro dos Santos
Membro – IME/UFG

Flávio Raimundo Souza

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro externo - IFG

Luciano Bráulio Caetano de Azevedo graduou-se em Matemática (Licenciatura) em 2005, pós graduançao em Docência do Ensino Superior, trabalhou de 2004 a 2014 em algumas escolas particulares do Distrito Federal e a 7 anos trabalha na Secretária de Educação do Governo do Distrito Federal com a EJA no turno noturno e no Ensino Fundamental 2 no período Diurno. Após estes anos da minha graduação senti a necessidade de aperfeiçoar meus conhecimentos matemáticos juntamente com a minha prática docente, foi então que engressei no PROFMAT e hoje estou finalizando o curso com muitos conhecimentos adquiridos ao longo dos semestres.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, minha esposa e aos meus filhos.

Agradecimentos

A Deus, por ter alcançado esse objetivo.
À minha família, em especial aos meus pais José Raimundo de Azevedo e Valda Luiza Caetano de Azevedo ,e à minha amada esposa Larissa Milena de Oliveira Azevedo que sempre me incentivaram e apoiaram durante esses anos.
Aos meus Colegas de PROFMAT por ter me dado todo o apoio no decorrer do curso.
Aos diretores do Centro de Ensino 507 de Samambaia representados na pessoa do Diretor Elisson Pereira dos Santos e seu Vice-Diretor Alex Cruz Brasil que me deram todo o apoio possível para não ter abandonado o mestrado.
À Secretária de Educação do Distrito Federal pelo Afastamento Remunerado para Estudo.
À Prof. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima, pela excelente orientação.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar que o ensino de Geometria Plana na Educação de Jovens e Adultos pode ser feito de maneira prazerosa de tal forma que os alunos possam ter a interação com a Geometria, aplicando os conceitos em seu dia a dia. Inicialmente, definimos os conceitos de Geometria Plana com o enfoque em: ângulo, triângulos e os quadriláteros notáveis. Em seguida, colocamos um capítulo para falar sobre a legislação da EJA e por fim apresentamos uma sequência didática com a finalidade de fazer a junção da teoria com a prática didática.

Palavras-chave Triângulo, Quadrilátero, Educação de Jovens e Adultos.

Abstract

This work is aimed at showing that the teaching of Flat Geometry at Young People and Adults Education can be done in a pleasant way, so that students may have interaction with Geometry, applying its concepts in their daily lives. Initially, we defined the concepts of Flat Geometry focusing on: Angle, triangles and Special Quadrilaterals. Then we inserted a chapter to talk a little about EJA * legislation and finally we introduced a didactic sequence with the goal of connecting the Theoretical Part with the Practical Part.

Keywords Triangle, Quadrilaterals, Young People and Adults Education.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Quando estava cursando a disciplina de Geometria no PROFMAT após 12 anos de formado, cheguei a conclusão que precisava discorrer sobre o assunto, principalmente depois de descobrir na disciplina de Recursos Computacionais no Ensino da Matemática que poderia fazer a junção da Geometria com as figuras construídas no Geogebra escrita no Latex. Porém, quando eu saia das aulas do PROFMAT e tinha que ir lecionar nos 3 últimos horários do turno noturno da escola em que trabalho, foi quando eu percebi que nada adiantava assistir as excelentes aulas no PROFMAT se meus alunos não estavam conseguindo absorver o que era ensinado por mim. Dessa forma, senti-me inquieto e resolvi rever minha prática docente, [16] vem nos dizer exatamente que:

> Ensinar e aprender são duas atividades distintas. Pode-se ensinar sem que alguém aprenda o que quer que seja e pode-se aprender sem que haja alguém a ensinar. Na sala de aula, temos o professor, que deve transmitir conhecimento, e temos os alunos, que devem compreender aquilo. No entanto, a realidade tem mostrado que, em muitas turmas, a maioria não consegue o mínimo que supostamente deveria aprender. E isso gera inquietações em todos, docentes, pais, coordenadores e equipe gestora.

Este trabalho foi idealizado com o objetivo de tornar o ensino da Geometria mais agradável por parte do professor e consequentemente mais interessante para o aluno, otimizando e potencializando o processo de aprendizagem, pois nós professores sabemos que o desafio de ensinar Geometria principalmente na Educação de Jovens e Adultos a EJA é despertar o interesse do aluno para aprender, assim o educando desenvolve um papel protagonista do seu aprendizado. Uma importante citação no PCNEM-1998 que nos diz:

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc. [17]

Segundo [21] a média nacional de evasão escolar é de 42% , já no Distrito Federal 32% deixam de ir para a escola. Entre os fatores deste grande número de alunos se evadindo da escola, percebo como professor, que a Matemática tem assustado grande parte dos estudantes, fomentando a vontade deste de abandonar os estudos, pois não conseguem compreender o que está sendo ensinado. Muitos destes relatam que estavam a muito tempo sem estudar ou que a Matemática nunca foi aprendida. Outros fatores que mostram este aumento. [21] explica:

> Dentre os motivos para a não conclusão do curso de EJA, os principais foram: o horário das aulas não era compatível com o de trabalho ou para procurar trabalho (27,9%); ou com o dos afazeres domésticos (13,6%); não havia curso próximo à residência (5,5%); não havia curso próximo ao local de trabalho (1,1%); não teve interesse em fazer o curso (15,6%); tinha dificuldade de acompanhar o curso (13,6%). Apenas 0,7% disse não ter conseguido vaga.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Sugerir uma sequência didática no estudo de figuras planas.

- Contribuir para a melhora da prática docente no Ensino Fundamental na EJA.

A sequência didática foi realizada com alunos da 7ª série do Ensino Fundamental da EJA com as seguintes etapas:

- Aplicação de pré-testes sobre o nível de pensamento geométrico dos Van-Hiele.

- Intervenção pedagógica.

- Aplicação dos pós-testes como objetivo de saber se houve evolução na aprendizagem.

Esta amostragem é composta por quatro capítulos, onde nos dois primeiros, busca-se resgatar a fundamentação em Geometria Plana, posteriormente fundamentar o Ensino de Jovens e Adultos – EJA e por último estabelecer ligação entre sequência didática e a intervenção pedagógica.

Capítulo 1

Triângulos

Apresenta-se neste capítulo as definições e algumas propriedades dos ângulos e triângulos. Para tal, assumimos já conhecidos os principais axiomas da Geometria Plana. O leitor interessado em maiores detalhes sobre esse assunto pode consultar [6], [19] , [3] ou [13]

Antes de iniciar as definições é preciso introduzir algumas notações necessárias para o bom desenvolvimento desse trabalho.

Sejam A e B dois pontos distintos no plano, indicamos por $\overline{AB}$ o segmento de reta com extremidades A e B. A semirreta que passa por A e B tem origem em A e é denotada por $\overrightarrow{AB}$. Usamos a notação $a \parallel b$ e $a \perp b$ para indicar que duas retas a e b são paralelas e perpendiculares, respectivamente.

1.1 Ângulos

Euclides definiu um ângulo plano como a inclinação entre duas linhas que se encontram em um mesmo plano. De acordo com Proclo, um ângulo deve ser uma quantidade, qualidade ou relação. O primeiro conceito (quantidade) foi usado por Eudemus, que via o ângulo como desvio de uma linha reta. O segundo conceito (qualidade) foi usado por Carpus de Antioch, que o via como intervalo ou espaço entre linhas intersecantes. Euclides adotou um terceiro conceito, no entanto, sua definição de ângulo reto, agudo e obtuso era claramente quantitativa [7]. As definições apresentadas neste capítulo podem ser encontradas em [6] e [19].

Definição 1.1.1 (**Ângulo**). *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

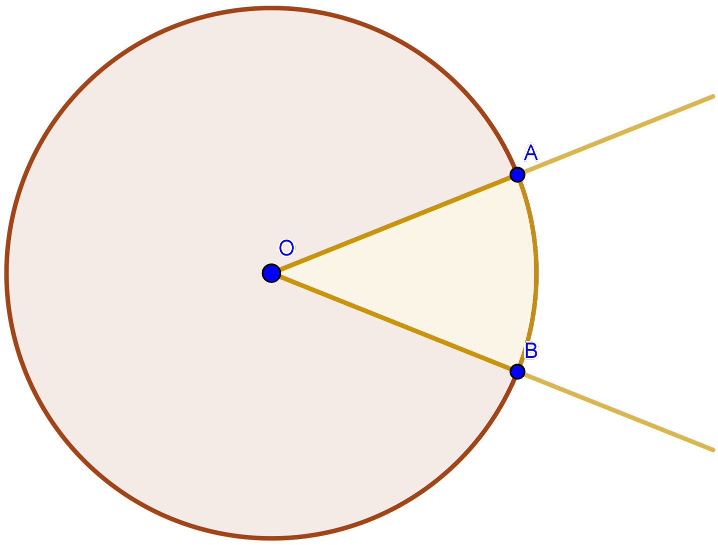


Figura 1.1: Ângulo

O ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é denotado por $A\widehat{O}B$ ou $\widehat{O}$.

Axioma 1.1.1. *Todo ângulo tem medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é contituído por duas semirretas coincidentes.*

Axioma 1.1.2. *É possível colocar, em correpondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas da mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correpondentes.*

Axioma 1.1.3. *Se uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide um ângulo $A\widehat{O}B$, então,*

$$A\widehat{O}B = B\widehat{O}C + C\widehat{O}A$$

Definição 1.1.2 $(O.P.V)$. *Dizemos que dois ângulos são opostos pelo vértice ou também chamados de O.P.V se os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.*

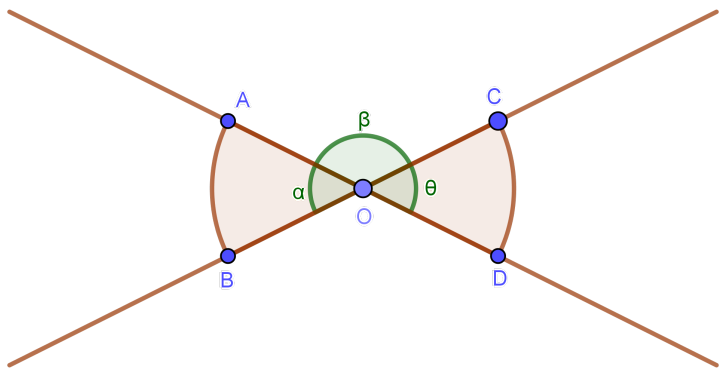


Figura 1.2: Ângulo Oposto pelo Vértice

Proposição 1.1.1. *Dois ângulos opostos pelo vértice tem a mesma medida*

Demonstração. Sejam $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ ângulos opostos pelo vértice como na Figura 1.2, então :

$$\overrightarrow{OB} \text{ e } \overrightarrow{OC} \text{ são opostas,}$$

assim

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Como

$$\overrightarrow{OD} \text{ e } \overrightarrow{OA} \text{ também são opostas,}$$

logo

$$\theta + \beta = 180°.$$

Deste modo

$$\alpha + \beta = \theta + \beta,$$

portanto

$$\alpha = \theta.$$

$\square$

Os ângulos são classificados de acordo com suas medidas como vemos a seguir.

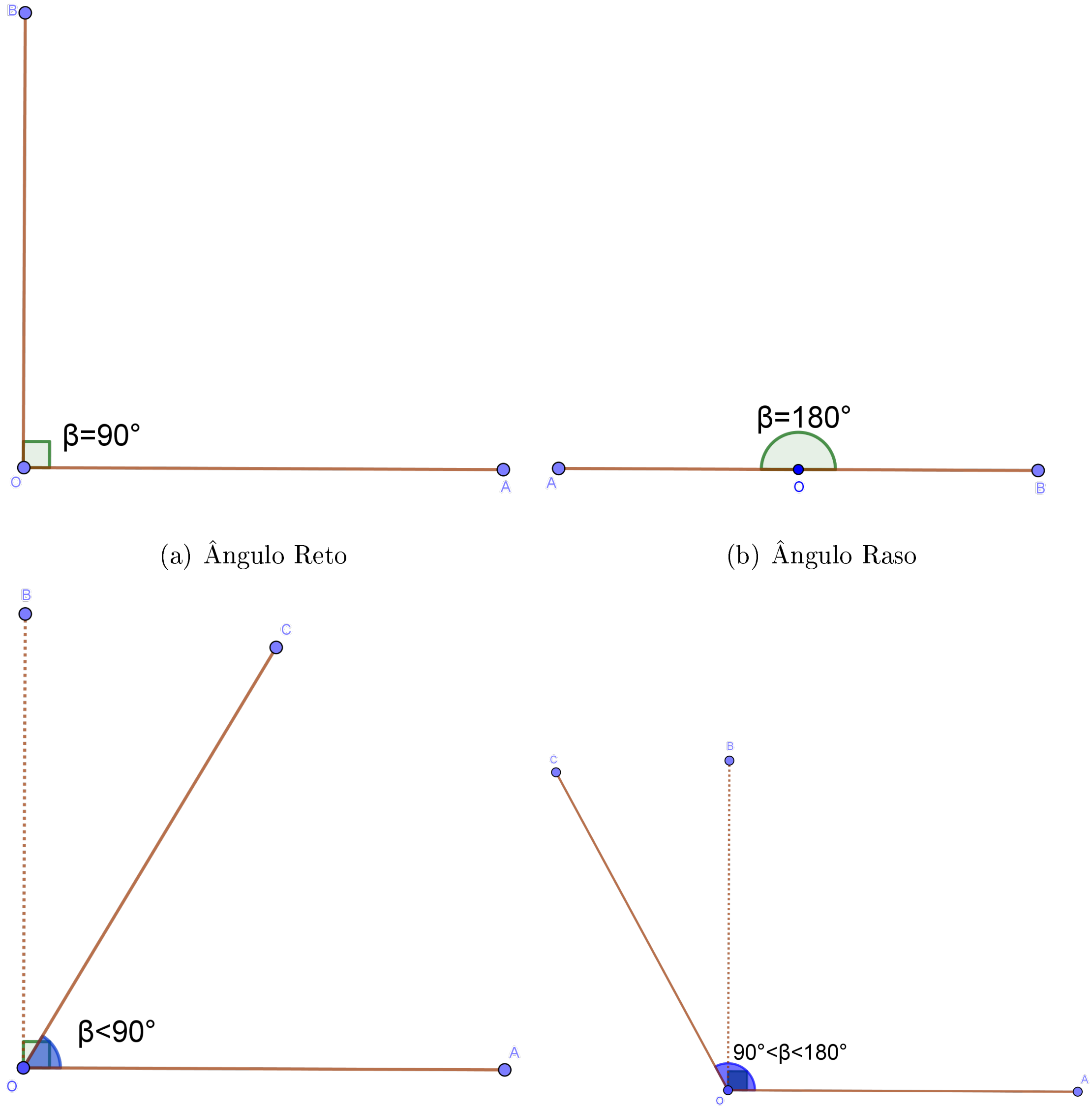
Definição 1.1.3. ***(Classificação dos Ângulos)***

(a) ***Ângulo reto*** *é um ângulo com medida igual a* $90°$.

(b) ***Ângulo raso*** *é um ângulo com medida igual a* $180°$.

(c) ***Ângulo agudo*** *é um ângulo menor que um ângulo reto e maior que* $0°$.

(d) ***Ângulo obtuso*** *é um ângulo maior que um ângulo reto e menor que um ângulo raso.*



(a) Ângulo Reto

(b) Ângulo Raso

(c) Ângulo Agudo

(d) Ângulo Obtuso

Figura 1.3: Tipos de Ângulos

Cabe salientar que quando somamos dois Ângulos cuja soma resulte em 90° chamamos de ângulos complementares, já quando esta soma resulta em 180° o nome dar-se-a de suplementares. Por exemplo, dois ângulos medindo 60° e 30° são ditos complementares. Assim o complementar de 30° é igual a 60° pois $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Dizemos que dois ângulos são congruentes se eles possuem a mesma medida.

Definição 1.1.4 (Bissetriz). *Dizemos que a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de um ângulo $A\widehat{O}B$ se $A\widehat{O}C = B\widehat{O}C$.*

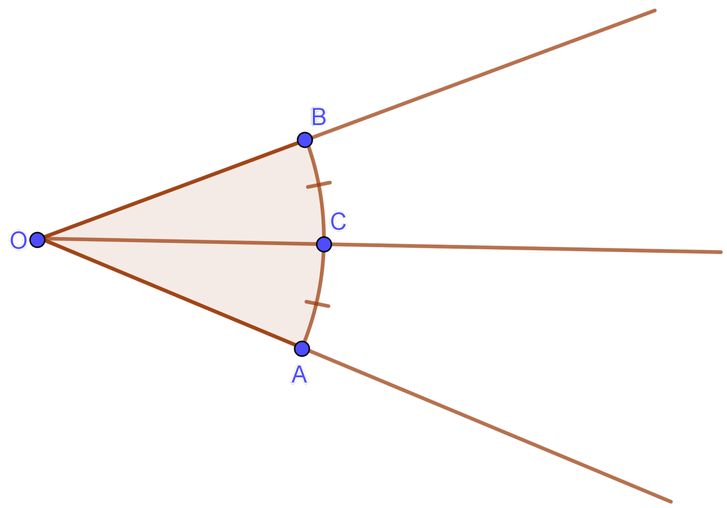


Figura 1.4: Bissetriz

1.2 Triângulo

Após apresentar algumas propriedades e definições juntamente com algumas aplicações do único polígono que não possui diagonais, o Triângulo. Sabemos que o triângulo está presente no nosso dia a dia desde as coberturas e decorações de casas até mesmo nas placas de sinalização do trânsito. Para tal usa-se [6], [19] , [3] e [13]. Começamos definindo congruência de segmento.

Definição 1.2.1 (Congruência de segmento). *Dizemos que dois segmentos AB e CD serão congruentes se $\overline{AB} = \overline{CD}$.*

Simplificando a notação utilizamos o símbolo $=$ para *congruente*, caso haja confusão com a igualdade de números haverá o reforço com o significado do símbolo. A seguir definimos triângulo, o objetivo central dessa seção.

Definição 1.2.2 (Triângulo). *Um triângulo é a região delimitada por três segmentos de reta concorrentes duas a duas em três pontos dois a dois distintos A, B e C.*

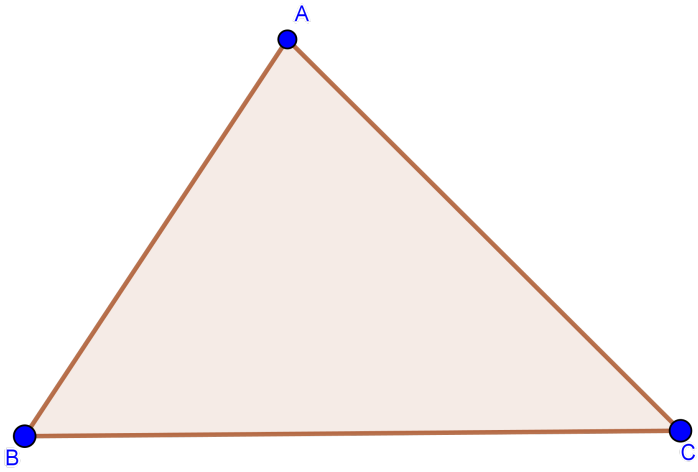


Figura 1.5: Triângulo ABC

Os pontos A, B e C do triângulo são chamados *vértices*, e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são chamados *lados* de *ângulos internos* $B\widehat{A}C$ (ou $\widehat{A}$), $A\widehat{B}C$ (ou $\widehat{B}$) e $A\widehat{C}B$ (ou $\widehat{C}$).

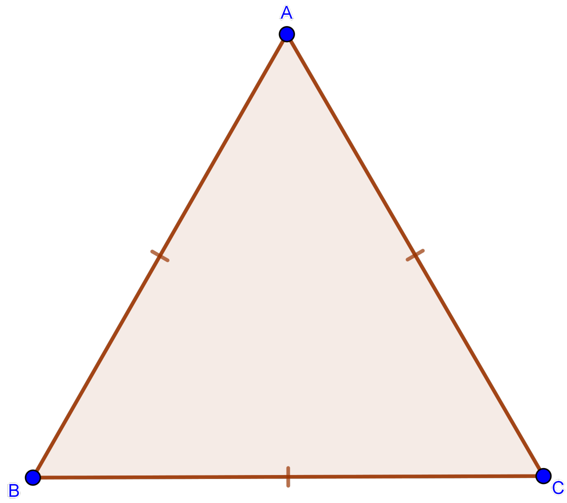
Os triângulos são classificados de acordo com os tamanhos de seus lados ou de acordo com seus ângulos, como vemos nas Definições 1.2.3 e 1.2.4.

Definição 1.2.3. *Dizemos que um triângulo é:*

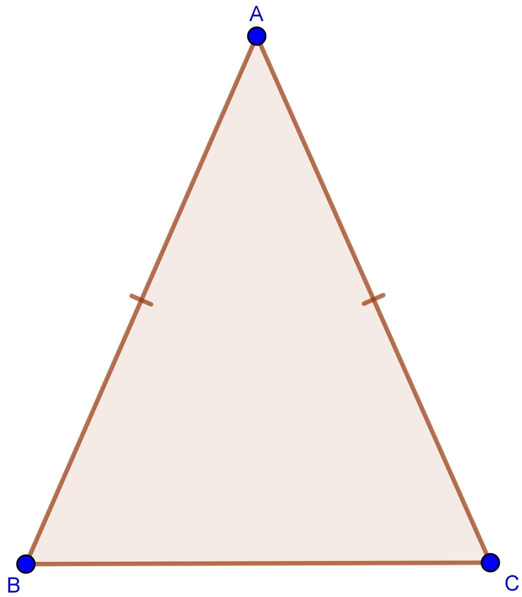
a) ***Equilátero*** *se têm os três lados congruentes;*

b) ***Isósceles*** *se têm dois lados congruentes;*

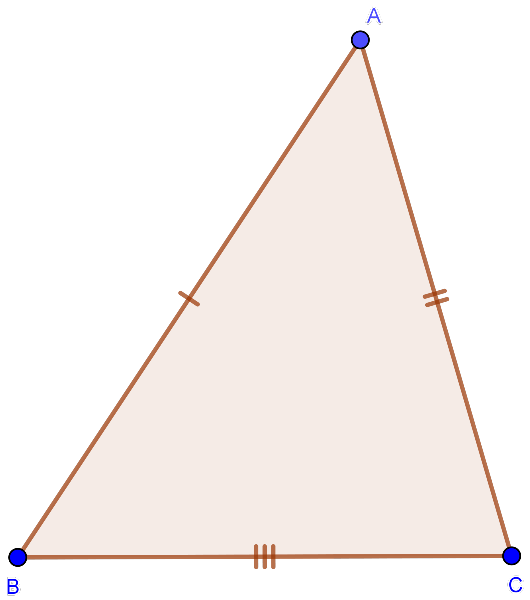
c) ***Escaleno*** *se dois quaisquer lados não são congruentes.*



(a) Triângulo Equilátero



(b) Triângulo Isósceles



(c) Triângulo Escaleno

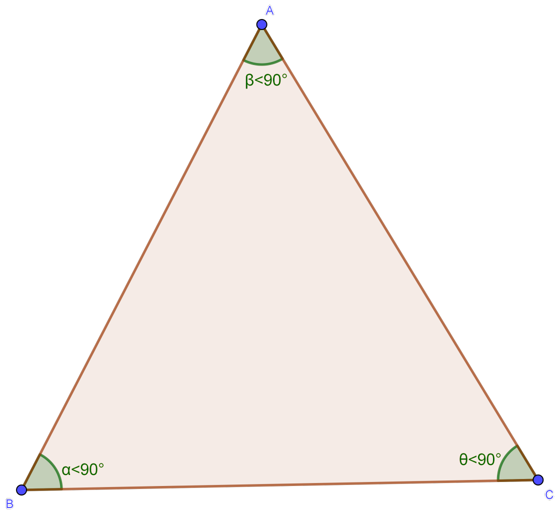
Figura 1.6: Classificação dos Triângulos Quanto aos Lados

Definição 1.2.4. *Dizemos que um triângulo é :*

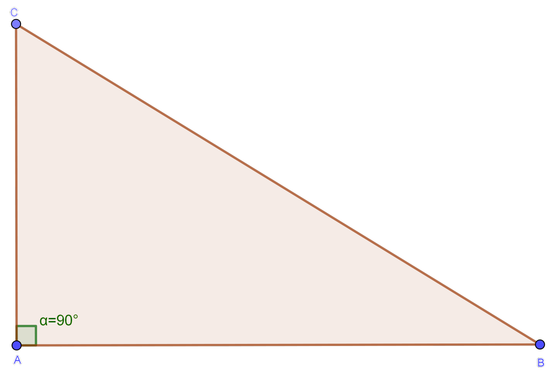
d) ***Acutângulo*** *se têm os três ângulos agudos;*

*e) **Retângulo** se têm um ângulo reto;*

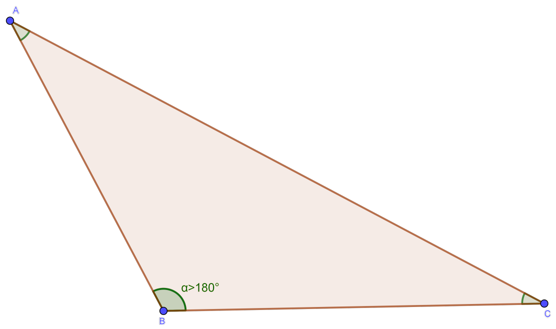
*f) **Obtusângulo** se tem um ângulo obtuso.*



(a) Triângulo Acutângulo



(b) Triângulo Retângulo



(c) Triângulo Obtusângulo

Figura 1.7: Classificação dos Triângulos Quanto aos Ângulos

1.3 Soma dos Ângulos Internos do Triângulo

Os três resultados a seguir são de suma importância para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. O primeiro resultado é apresentado sem demonstração porém, as mesmas podem ser encontradas em [13] e [19].

Proposição 1.3.1 (Retas Paralelas cortadas por uma Transversal). *Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes)congruentes.*

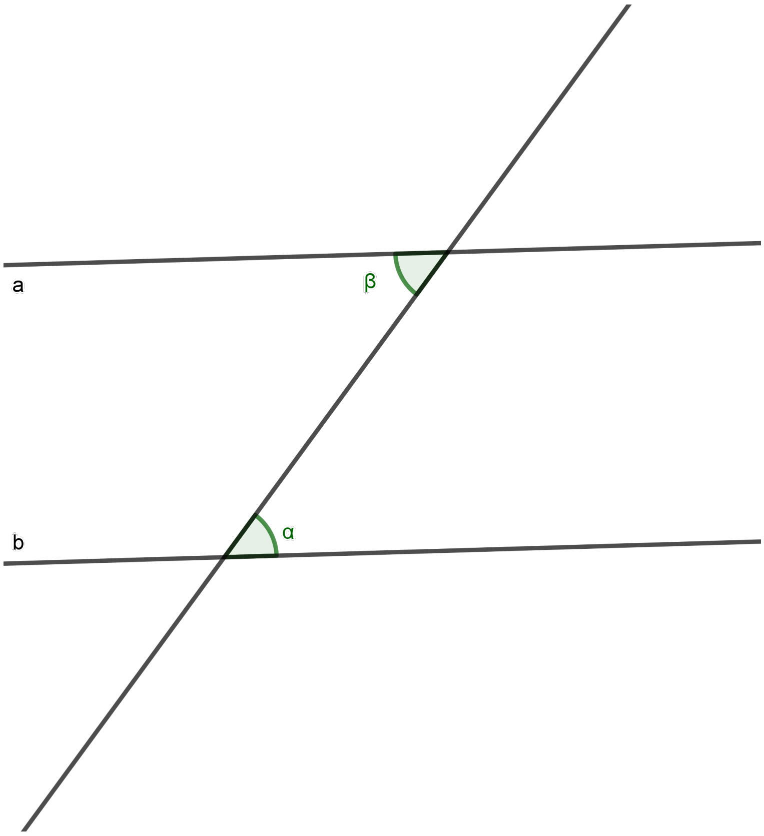


Figura 1.8: $\alpha = \beta \Leftrightarrow a \parallel b$

Demonstrado em [6].

Teorema 1.3.1 (Teorema do Ângulo Externo). *Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Considere o triângulo ABC como na Figura 1.9 e seja $\theta = \widehat{A} + \widehat{B}$, sendo $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ os ângulos internos do triângulo.

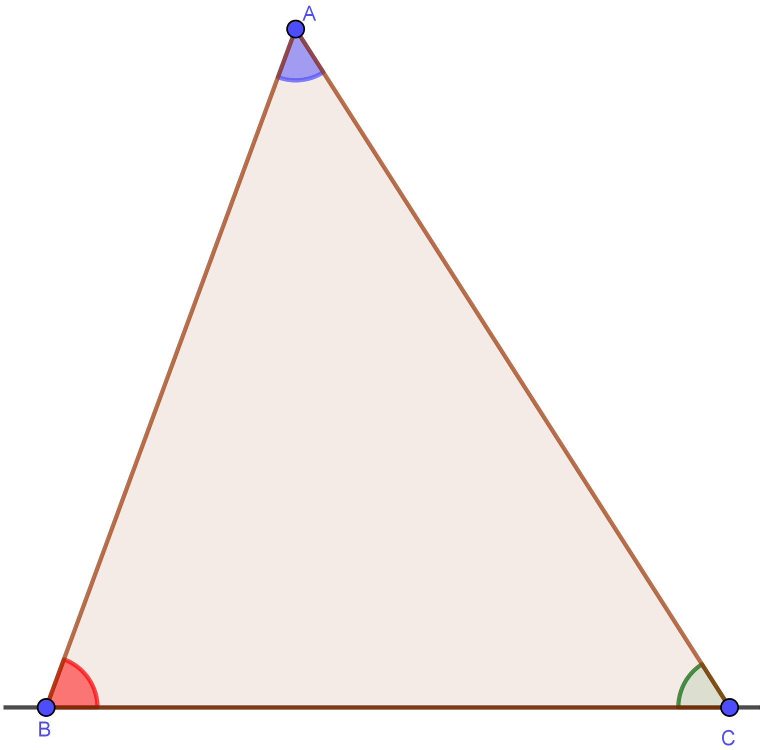


Figura 1.9: Ângulo Externo

Construa uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo vértice C , formando assim os ângulos α e β, conforme Figura 1.10.

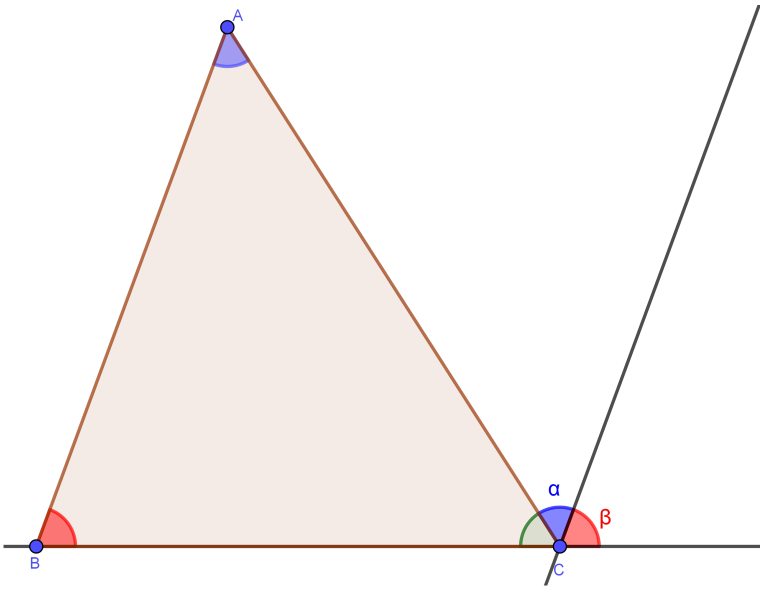


Figura 1.10: Ângulo Externo

Assim podemos observar que:

$$\alpha = \widehat{A} \text{ e } \beta = \widehat{B}$$

pois são ângulos alternos internos e correspondentes, respectivamente. Assim,

$$\theta \ = \ \alpha + \beta$$

conclui-se que

$$\theta \ = \ \widehat{A} + \widehat{B},$$

como queriamos demonstrar. □

Teorema 1.3.2 (Soma dos Ângulos Internos de Qualquer Triângulo). *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.*

Demonstração. Considere o triângulo ABC e seja θ o ângulo externo ao triângulo e adjacente a C como na Figura 1.11.

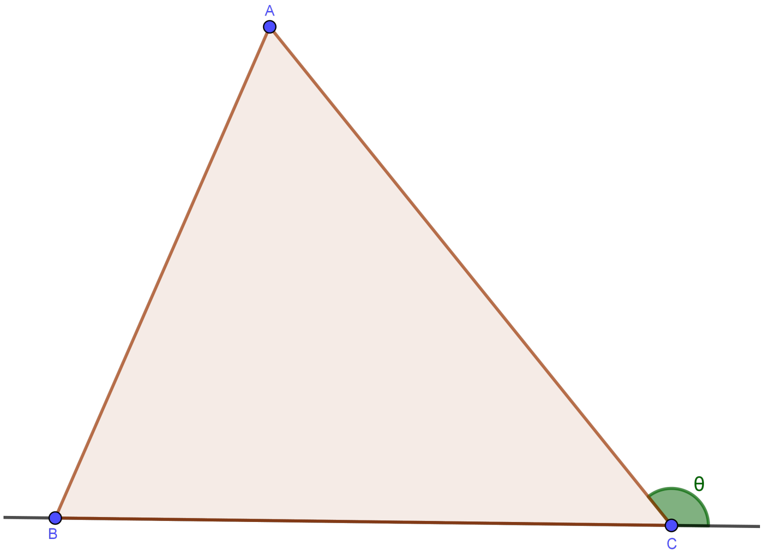


Figura 1.11: Soma dos Ângulos Internos de Qualquer Triângulo

Temos que θ e $\widehat{C}$ são suplementares, ou seja,

$$\theta + \widehat{C} = 180^\circ. \tag{1.1}$$

Pelo Teorema 1.3.1

$$\theta = \widehat{A} + \widehat{B} \tag{1.2}$$

substituindo (1.2) em (1.1) encontramos,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \;\; = \;\; 180^\circ.$$

$\square$

O resultado a seguir é uma conseguência imediata do Teorema 1.3.2.

Proposição 1.3.2. *Em todo triângulo equilátero todos seus ângulos internos medem* 60°

Na próxima seção apresentamos alguns casos de congruência de triângulo.

1.4 Congruência de Triângulos

Uma importante definição da Geometria Euclidiana é a definição de Congruência de Triângulos.

Definição 1.4.1 (Congruência de Triângulos). *Dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca, de tal forma que seus lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Existem alguns pré-requisitos para que dois triângulos sejam congruentes, é o que chamamos de casos ou critérios de congruência. A seguir apresentamos alguns casos de congruecia de triângulos.

Axioma 1.4.1 (Caso Lado Ângulo Lado LAL-Axioma). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.*

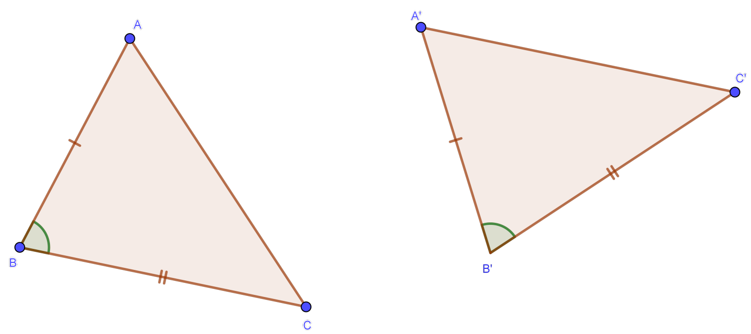


Figura 1.12: Caso LAL

Exemplo 1.4.1. *Na Figura 1.12 temos que:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{AB} & = & \overline{A'B'} \\ \overline{BC} & = & \overline{B'C'} \\ \widehat{B} & = & \widehat{B'}. \end{array}\right. \overset{LAL}{\Rightarrow} \triangle ABC = A'B'C'$$

Consequentemente pelo Axioma 1.4.1 temos que:

$$\begin{cases} \overline{AC} & = & \overline{A'C'} \\ \widehat{C} & = & \widehat{C'} \\ \widehat{A} & = & \widehat{A'}. \end{cases}$$

Axioma 1.4.2 (Caso Ângulo Lado Ângulo- Axioma). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido entre estes ângulos, então eles são congruentes.*

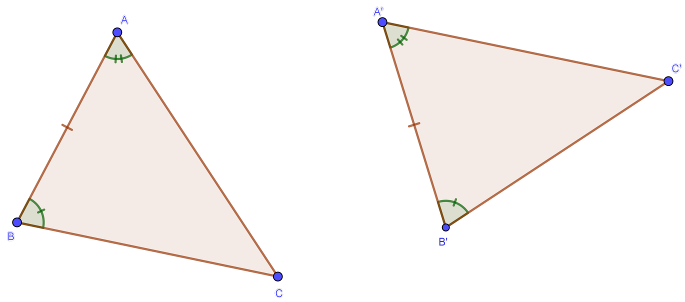


Figura 1.13: Caso ALA

Exemplo 1.4.2. *Na Figura 1.13 temos que:*

$$\begin{cases} \widehat{B} & = & \widehat{B'} \\ \widehat{A} & = & \widehat{A'} \\ \overline{AB} & = & \overline{A'B'} \end{cases} \overset{ALA}{\Rightarrow} \triangle ABC = A'B'C'.$$

consequentemente

$$\begin{cases} \overline{BC} & = & \overline{B'C'} \\ \widehat{C} & = & \widehat{C'} \\ \overline{AC} & = & \overline{A'C'}. \end{cases}$$

Axioma 1.4.3 (Caso Lado Lado Lado - Axioma). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.*

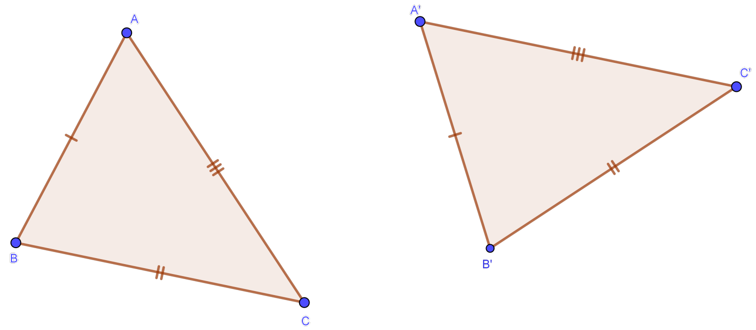


Figura 1.14: Caso LLL

Exemplo 1.4.3. *Na Figura 1.14 temos que:*

$$\left\{\begin{array}{ccc}\overline{AC} & = & \overline{A'C'} \\ \overline{BC} & = & \overline{B'C'} \\ \overline{AB} & = & \overline{A'B'}\end{array}\right. \overset{LLL}{\Rightarrow} \triangle ABC = A'B'C',$$

consequentemente

$$\left\{\begin{array}{ccc}\widehat{A} & = & \widehat{A'} \\ \widehat{C} & = & \widehat{C'} \\ \widehat{B} & = & \widehat{B'}.\end{array}\right.$$

O próximo critério de Congruência o caso Lado Ângulo Ângulo Oposto ao Lado ($LAAo$) pode ser demonstrado utilizando os critérios anteriores.

Proposição 1.4.1 (Caso Lado Ângulo Ângulo Oposto ao Lado ($LAAo$)). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruêntes. Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos que:*

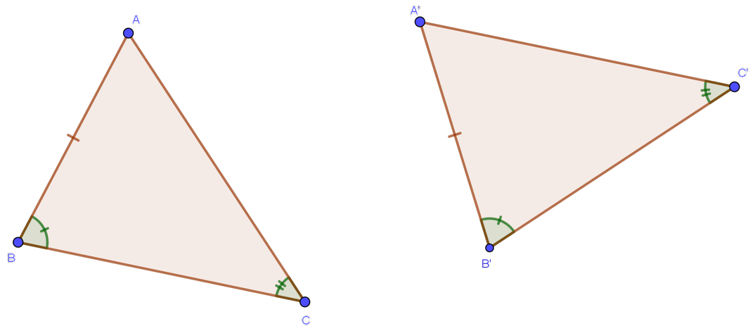


Figura 1.15: Caso $LAAo$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{AB} & = & \overline{A'B'} \\ \widehat{C} & = & \widehat{C'} \\ \widehat{B} & = & \widehat{B'} \end{array}\right. \overset{LAAo}{\Rightarrow} \triangle ABC = A'B'C'.$$

Demonstração. Para a demonstração utiliza-se o Teorema 1.3.2 encontrada na página 15.

Considere os triângulos como na Figura 1.15 tem-se que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{A} & = & 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} \\ \widehat{A'} & = & 180^\circ - \widehat{B'} - \widehat{C'}. \end{array}\right.$$

Como, por hipótese, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$ segue que:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{A} - \widehat{A'} & = & 180^\circ - 180^\circ - \widehat{B} + \widehat{B'} - \widehat{C} + \widehat{C'} \\ \widehat{A} - \widehat{A'} & = & 0 \\ \widehat{A} & = & \widehat{A'}. \end{array}$$

Desde modo

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{B} & = & \widehat{B'} \\ \overline{AB} & = & \overline{A'B'} \\ \widehat{A} & = & \widehat{A'} \end{array}\right. \overset{ALA}{\Rightarrow} \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

□

O caso de congruência Cateto Hipótenusa é demonstrado dentro da Seção 1.6 , quando falamos apenas do triângulo retângulo.

1.5 Desigualdade Triângular

De acordo com [13] podemos saber se existe ou não um triângulo comparando o maior lado com a soma dos outros dois, também chamado de condição de existência do triângulo.

Proposição 1.5.1 (**Desigualdade Triangular**). *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração. Considere o triângulo ABC de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ como na Figura 1.16. Observe que, sem perda de generalidade, podemos provar apenas que

$$\overline{AC} + \overline{AB} > \overline{BC}$$

.

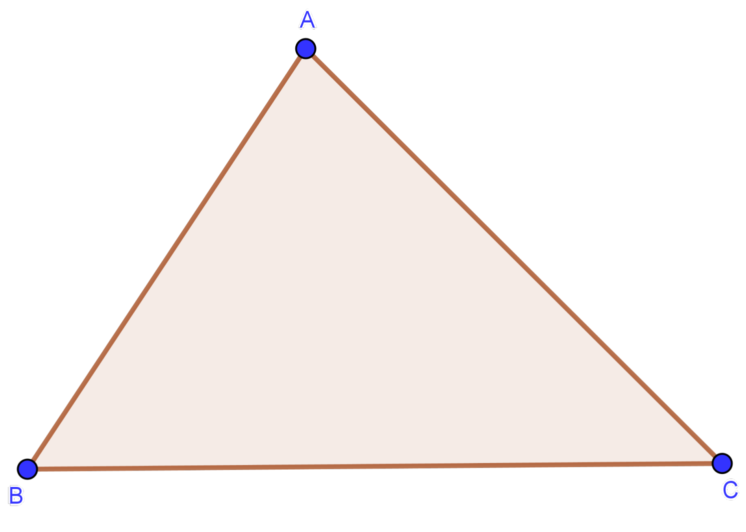


Figura 1.16: Desigualdade Triângular

Prolongando o segmento que contém $\overline{AC}$ e marcando o ponto D com $D \in \overrightarrow{AC}$ de tal forma que $\overline{AD} = \overline{AB}$, conforme Figura 1.17

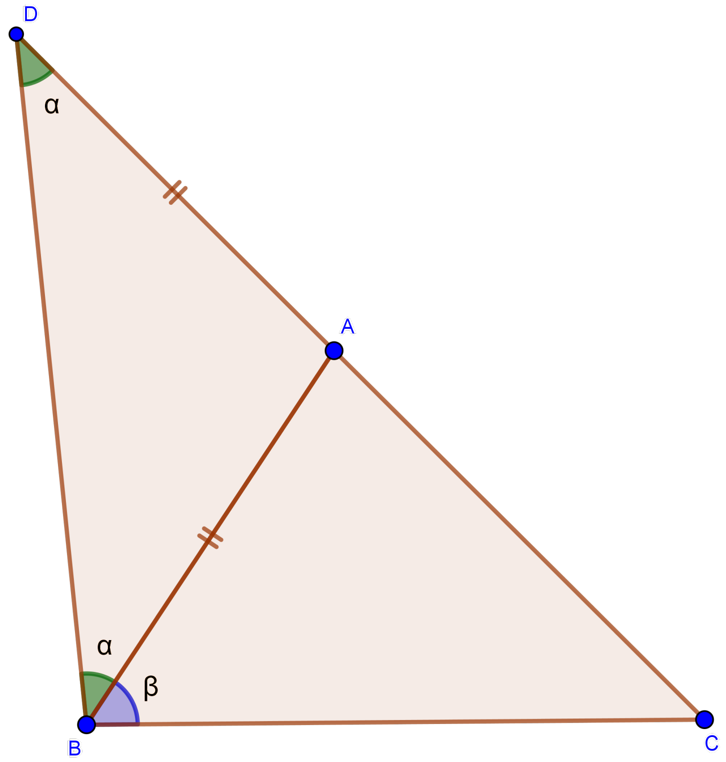


Figura 1.17: Desigualdade Triângular

Como consequência imediata do prolongamento de $\overline{AC}$ o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$ com $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D$. Assim, $A\widehat{D}B < C\widehat{B}D$. Demonstra-se em [19] que se ABC é um triângulo tal que $C\widehat{B}A > A\widehat{C}B$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$, logo concluímos que

$$\begin{aligned} A\widehat{D}B &< C\widehat{B}D \\ \overline{BC} &< \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} \\ \overline{BC} &< \overline{AC} + \overline{AB}. \end{aligned}$$

□

Apresentamos a seguir dois exemplos de aplicação da desigualdade triangular.

Exemplo 1.5.1. *Se P é um ponto situado no interior de um triângulo ABC, então:*

(a) $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

(b) $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$.

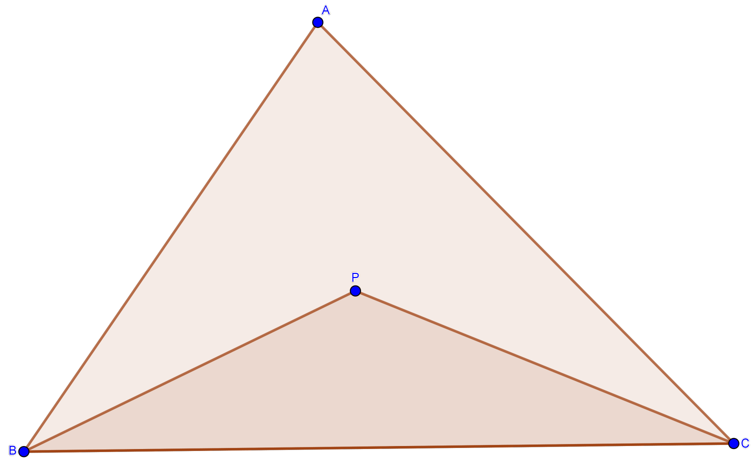


Figura 1.18: Aplicação de Desigualdade Triangular

Demonstração (a) *Prolongando a semirreta $\overrightarrow{BP}$ até o encontro do lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC, marquemos o ponto Q sobre o lado $\overline{AC}$ conforme Figura 1.19*

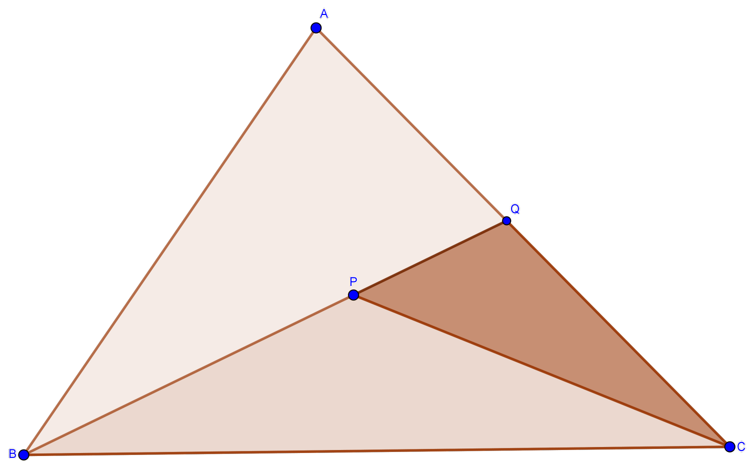


Figura 1.19: Demonstração da Aplicação da Desigualdade Triangular

Temos que:

$$\begin{aligned} \overline{PC} &< \overline{PQ} + \overline{QC} \\ \overline{PC} + \overline{PB} &< \overline{PB} + \overline{PQ} + \overline{QC}, \end{aligned}$$

como

$$\overline{PB} + \overline{PQ} = \overline{BQ},$$

então

$$\overline{PC} + \overline{PB} < \overline{BQ} + \overline{QC}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{BQ} &< \overline{AB} + \overline{AQ} \\ \overline{BQ} + \overline{CQ} &< \overline{CQ} + \overline{AB} + \overline{AQ}. \end{aligned}$$

Assim

$$\overline{AQ} + \overline{CQ} = \overline{AC},$$

deste modo

$$\overline{BQ} + \overline{CQ} < \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Por transitividade

$$\begin{aligned} \overline{PC} + \overline{PB} &< \overline{BQ} + \overline{QC} \\ \overline{BQ} + \overline{CQ} &< \overline{AB} + \overline{AC} \\ \overline{PC} + \overline{PB} &< \overline{AB} + \overline{AC}. \end{aligned}$$

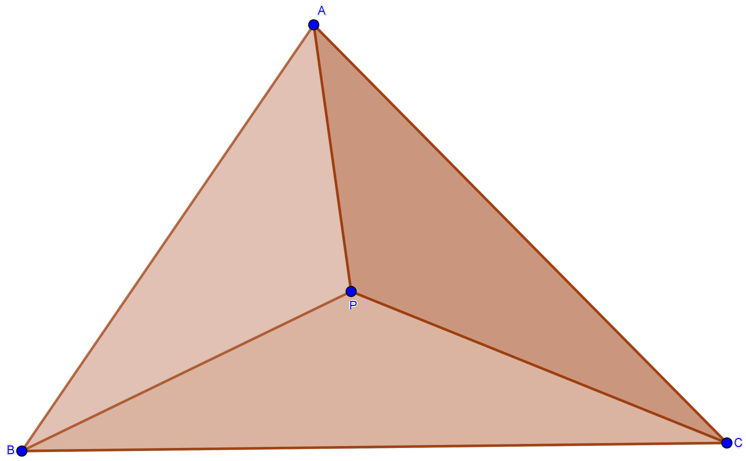


Figura 1.20: Item b

Demonstração (b)

De acordo com o item **(a)** segue que:

$$\begin{cases} \overline{PC}+\overline{PB} & < & \overline{AB}+\overline{AC} \\ \overline{PC}+\overline{PA} & < & \overline{AB}+\overline{BC} \\ \overline{PA}+\overline{PB} & < & \overline{BC}+\overline{AC}. \end{cases}$$

Somando ambos os lados das desigualdades acima, vemos que:

$$2\overline{PC}+2\overline{PB}+2\overline{PA} \quad < \quad 2\overline{AB}+2\overline{AC}+2\overline{BC},$$

ou seja,

$$2(\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}) \quad < \quad 2(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}).$$

Portanto,

$$\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA} \quad < \quad \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}.$$

1.6 Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras

No triângulo retângulo é possivel correlacionar várias relações entre seus elementos, lados e ângulos, tornando-se um triângulo com várias aplicabilidades no codidiano. Estas aplicabilidades podem ser encontradas na Astronomia Antiga (A.C) , nas Artes, nas contruções com seus ângulos retos (quinas entre paredes, entre o piso e a parede, janelas, coberturas...). Evidenciando sua importância descreve-se uma parte desse triângulo em particular nesta seção.

1.6.1 Elementos

Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, com $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ e $D \in \overline{BC}$, como na Figura 1.21.

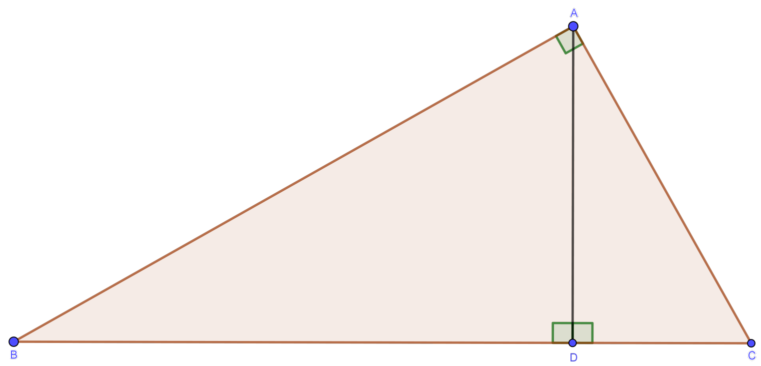


Figura 1.21: Triângulo Retângulo

Uma das particularidades dos triângulos retângulos é que eles tem nomes próprios da seguinte maneira:

i. $\overline{AB}$ é o cateto;

ii. $\overline{AC}$ é o cateto;

iii. $\overline{BC}$ é a hipotenusa;

iv. $\overline{AD}$ é a altura relativa a hipotenusa;

v. $\overline{BD}$ é a projeção do cateto $\overline{AB}$;

vi. $\overline{DC}$ é a projeção do cateto $\overline{AC}$.

Um importante resultado sobre o Triângulo Retângulo é o Teorema de Pitágoras. Das várias demonstrações do Teorema de Pitágoras vamos mostrar uma em particular, que é a demonstração por soma de áreas.

Teorema 1.6.1 (Teorema de Pitágoras). *A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, também conhecida por: A soma das áreas dos quadrados construidas a partir dos catetos é igual a área do quadrado construido sobe a hipotenusa.*

Utilizamos a nomenclatura $A(ABC)$ para denotar a área de um triâgulo ABC.

Supondo ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, é possivel comprovar, mediante cálculo de áreas primeiramente as relações métricas no triângulo retângulo denotados pelos itens (a) e (b) para assim podermos provar o Teorema de Pitágoras no item (c).

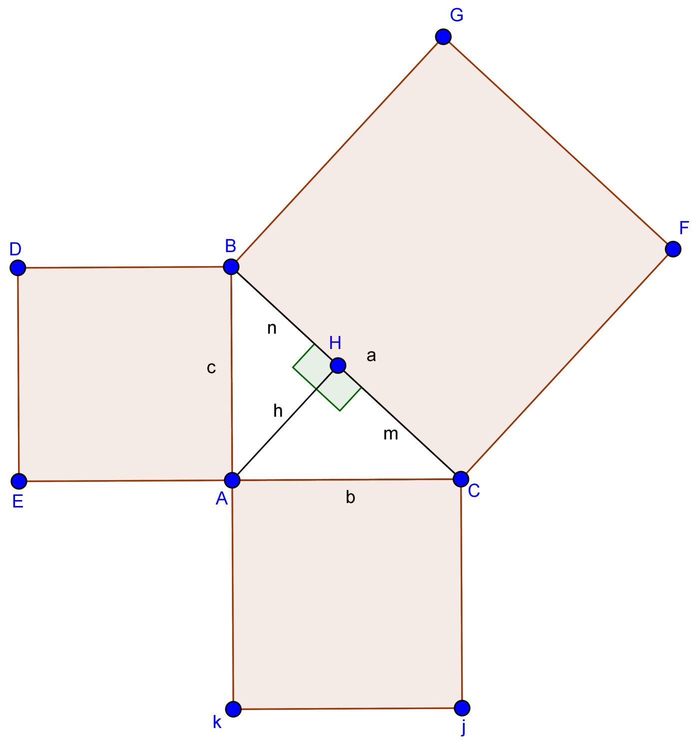


Figura 1.22: Relações Métricas do Triângulo Retângulo

Desejamos provar que:

a) $ah = bc$

b) $c^2 = an$ e $b^2 = am$.

c) $a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração de (a). Vemos que

$$A(ABC) \;=\; \frac{1}{2}\overline{BC}.\overline{AH} = \frac{ah}{2}.$$

Mas por sua vez a área do triângulo ABC támbem pode ser dada por

$$A(ABC) \;=\; \frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AB} = \frac{bc}{2}.$$

Desse modo

$$ah = bc.$$

$\square$

Demonstração do item (b). Vamos comparar os triângulos DBC e BAG, temos

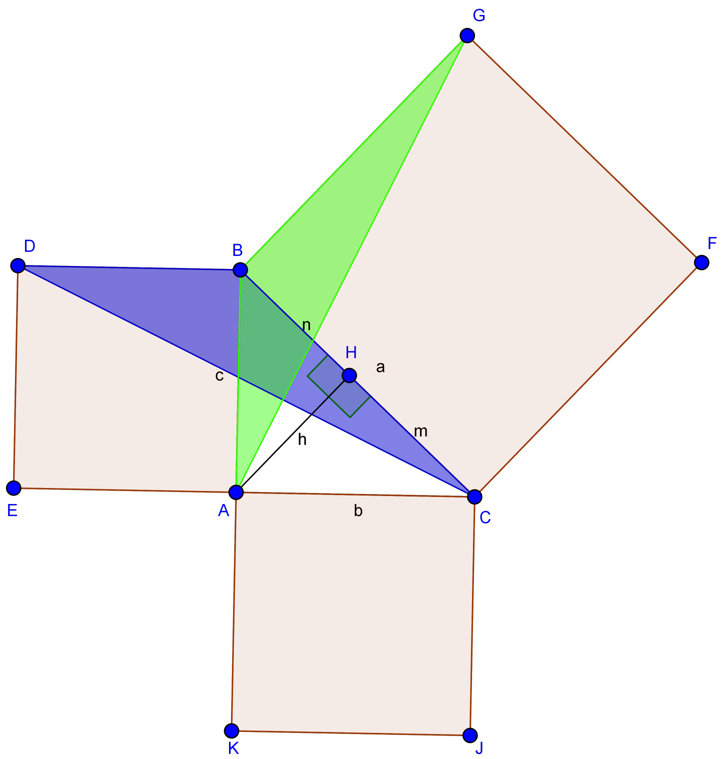


Figura 1.23: Relações Métricas do Triângulo Retângulo

$$\overline{DB} = \overline{BA}.$$

Pois são lados do quadrado $ABDE$. Segue também que

$$\overline{BG} = \overline{BC}.$$

Pois são lados do quadrado $BCFG$. Vemos na Figura 1.24, que

$$D\widehat{B}C = 90^\circ + A\widehat{B}C.$$

Que por sua vez é igual a $A\widehat{B}G$.

Assim pelo critério LAL os triângulos são congruentes, deste modo possuem mesma área, como

$$A(DBC) = \frac{c.c}{2} = \frac{c^2}{2}$$

e

$$A(BAG) = \frac{an}{2}.$$

Igualando as áreas, temos

$$c^2 = an.$$

Para provar que $b^2 = am$, vamos utilizar a Figura 1.24.

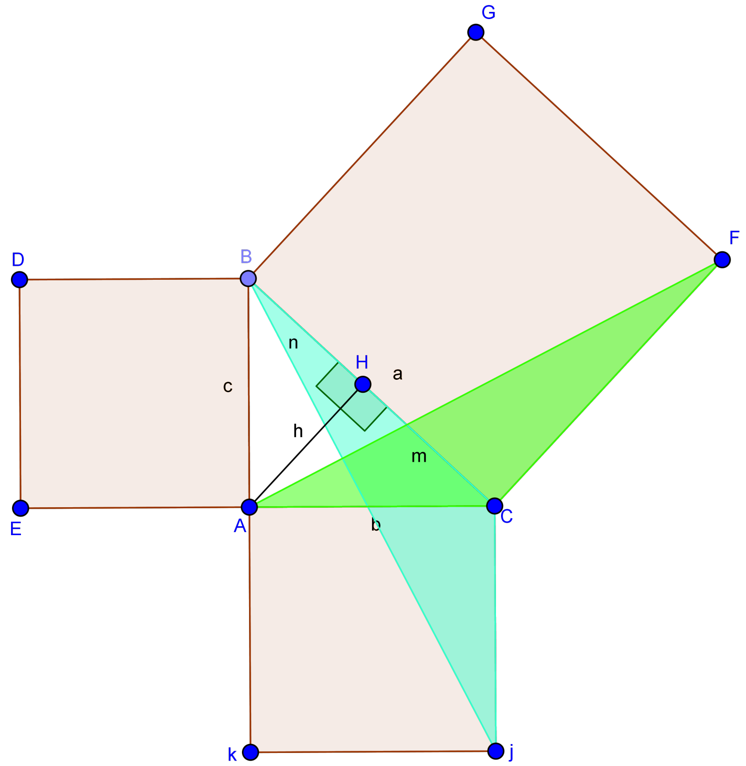


Figura 1.24: Relações Métricas do Triângulo Retângulo

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{CJ}\\ &e\\ \overline{CF} &= \overline{CB}\end{aligned}$$

pois são lados dos quadrados $ACJK$ e $BCFG$, respectivamente.

$$A\widehat{C}F = 90^\circ + \widehat{C}.$$

Que por sua vez é igual a $B\widehat{C}J$.

Assim, pelo critério LAL, os triângulos são congruentes, deste modo possuem mesma área, logo

$$\begin{aligned} A(BCJ) &= \frac{b.b}{2} = \frac{b^2}{2} \\ A(ACF) &= \frac{am}{2}. \end{aligned}$$

Igualando as áreas temos

$$b^2 = am.$$

□

Demonstração do item (c). Do item (b) temos que :

$$\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an. \end{cases} \tag{1.3}$$

Somando as equações contidas em (1.3), temos

$$b^2 + c^2 = am + an.$$

Colocando a em evidência, obtemos

$$b^2 + c^2 = a(m+n).$$

Substituindo m+n por a.

$$b^2 + c^2 = a.a = a^2.$$

Logo

$$b^2 + c^2 = A(BGIH) + A(FCHI) = A(BCFG) = a^2$$

□

Por fim, tendo como referência o Teorema de Pitágoras, comprova-se o seguinte caso de congruência de triângulos.

Proposição 1.6.1 (Caso Cateto Hipotenusa dos Critérios de Congruência). *Se dois triângulos retângulos têm um cateto e a hipotenusa congruentes, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Considere os triângulos como na Figura 1.25, com hipotenusa a e catetos b e c do $\triangle ABC$, e o $\triangle A'B'C'$ de hipotenusa a' e catetos b' e c'.

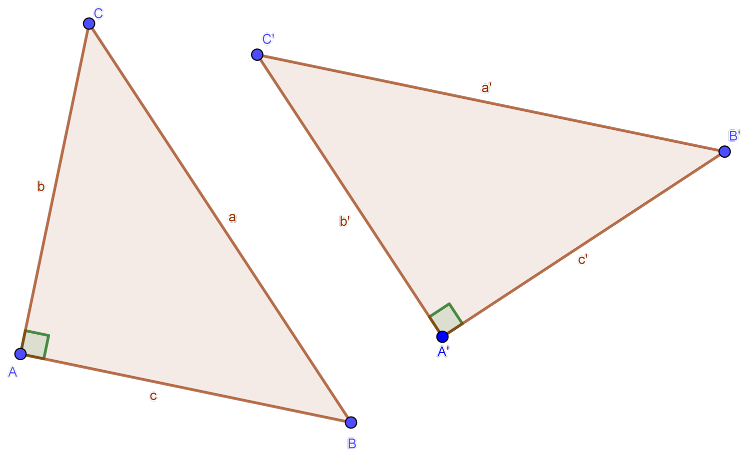


Figura 1.25: Caso CH dos Critérios de Congruência

Por hipótese

$$\begin{aligned} a &= a' \\ &e \\ c &= c'. \end{aligned}$$

O Teorema de Pitágoras nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a^2 \\ &e \\ (b')^2 + (c')^2 &= (a')^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$b^2 + c^2 = (b')^2 + (c')^2$$

e como

$$c^2 = (c')^2,$$

temos

$$b^2 = (b')^2.$$

Logo, pelo Axioma 1.4.3 os triângulos são congruentes. $\square$

Capítulo 2

Quadriláteros Notáveis

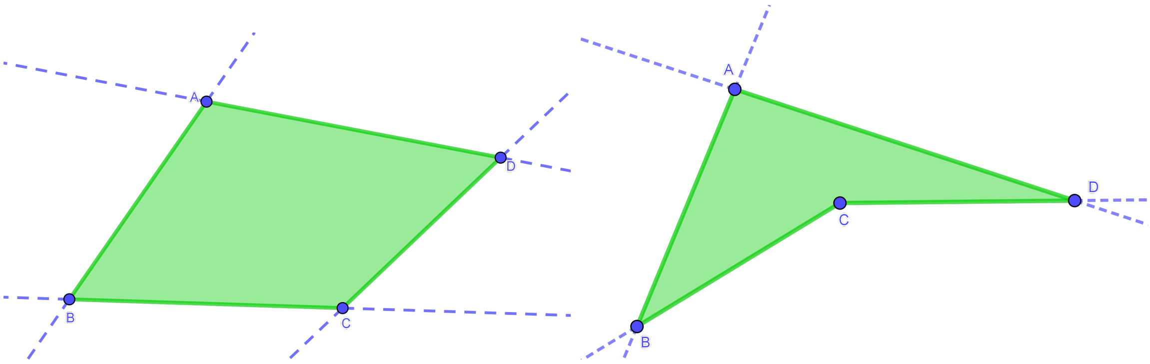
Neste capítulo é apresentado sobre os quadriláteros notáveis, pois quando estudamos os polígonos, aprendemos que estes podem ser classificados conforme o número de lados. Entre os polígonos estudados, temos os quadriláteros cuja caractéristica é possuir quatro lados. No nosso dia a dia os quadriláteros aparecem nas construções, nas artes, nos objetos, entre outros.

2.1 Quadriláteros

Definição 2.1.1. ***Quadriláteros*** *[6] define os quadriláteros contando quatro pontos A, B, C e D de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$,$\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.*

Definição 2.1.2 (Região Convexa). *Um conjunto de pontos Γ é convexo se quaisquer dois pontos distintos são extremidades de um segmento contido em Γ.*

Definição 2.1.3 (Região Côncava). *A região que não é convexa.*



(a) Quadrilátero Convexo (b) Quadrilátero Côncavo

Figura 2.1: Quadrilátero ABCD

Na Figura 2.1 temos exemplos de dois quadriláteros. Destacamos os seguintes elementos:

i. **Lados**

- $\overline{AB}$
- $\overline{BC}$
- $\overline{CD}$
- $\overline{DA}$

ii. **Ângulos**

- $\widehat{A} = D\widehat{A}B$
- $\widehat{B} = A\widehat{B}C$
- $\widehat{C} = B\widehat{C}D$
- $\widehat{D} = C\widehat{D}A$

iii. **Diagonais**

- $\overline{AC}$
- $\overline{BD}$

Vale salientar que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a $360°$. De fato, basta observar que todo quadrilátero é a união de dois triângulos cuja soma dos ângulos internos é de $180°$ demonstrado no Teorema 1.3.2.

2.2 Quadriláteros Notáveis

Os quadriláteros que possuem propriedades particulares são chamados *quadriláteros notáveis*. Apresentamos, a seguir, os quadriláteros notáveis e suas propriedades. Para [6] os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

2.2.1 Trapézio

Definição 2.2.1. *Um quadilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos.*

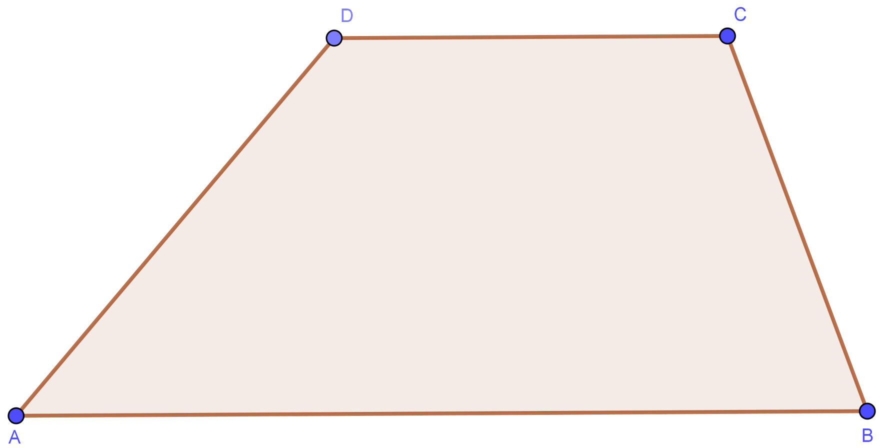


Figura 2.2: $ABCD$ é trapézio $\Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Conforme a Definição 2.2.1 o quadrilátero $ABCD$ da Figura 2.2 é um trapezio se e só se $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos e também são as bases do trapézio, estas bases são conhecidas como base maior e base menor do trapézio. Segue que os ângulos $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Definição 2.2.2 (**Trapézio Isósceles**). *Um Trapézio é chamado de isósceles caso os lados que não sao bases, isto é, os não paralelos forem congruentes.*

Proposição 2.2.1. *Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.*

Demonstração. Considere o Trapézio $ABCD$ como na Figura 2.3 e suponha que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases do trapézio isósceles e que $\overline{AD} = \overline{BC}$. Vamos traçar as perpendiculares as bases pelos vértices D e C da base menor, obtendo os pontos E e F na base maior $\overline{AB}$. Percebemos que $\overline{DE} = \overline{CF}$, por serem distâncias entre retas paralelas.

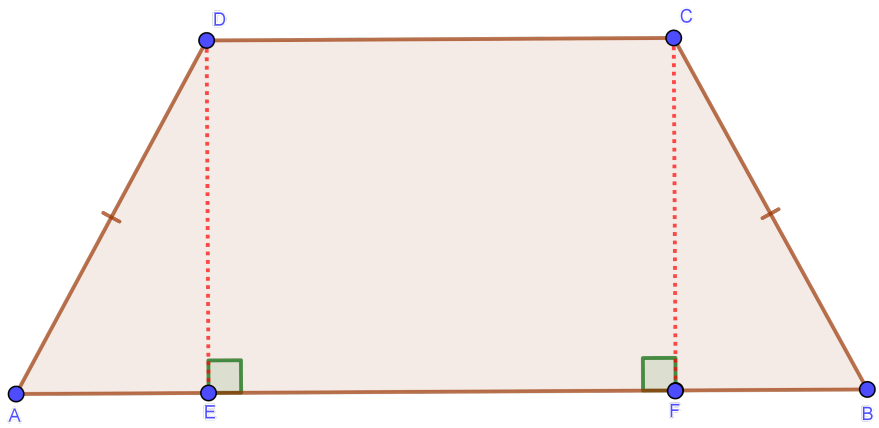


Figura 2.3: $ABCD$ é Trapézio Isósceles

Pelo caso Cateto Hipotenusa de congruência de triângulo ($\overline{DE} = \overline{CF}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$) os triângulos ADE e BFC são congruentes, tendo como conseguência os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes. Como $\widehat{D}$ e $\widehat{C}$ são suplementares de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, respectivamente , temos que $\widehat{D} = \widehat{C}$.

□

Proposição 2.2.2. *As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.*

Demonstração. Considere o Trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com $\overline{AD} = \overline{BC}$ conforme Figura 2.4.

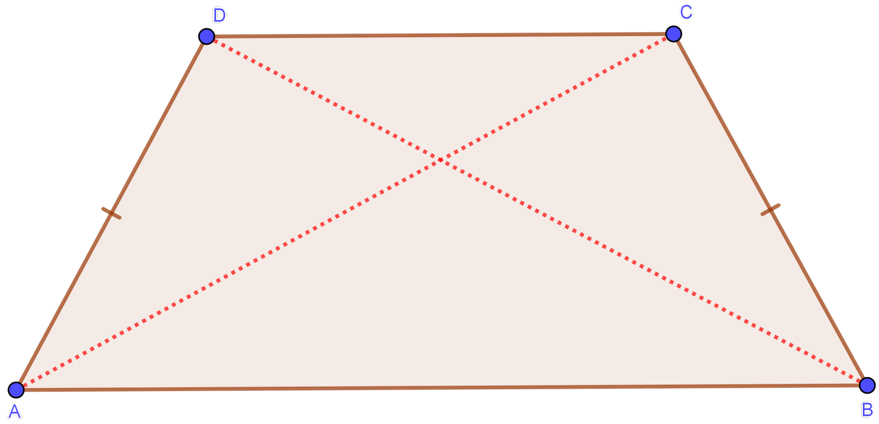


Figura 2.4: $ABCD$ é Trapézio Isósceles com Diagonais Conguentes

Dos triângulos ABD e ABC temos que:

$$\begin{cases} \overline{AD} &= \overline{BC} \\ \widehat{A} &= \widehat{B} \\ \overline{AB} &= \overline{BA}. \end{cases}$$

Assim, pelo Axioma 1.4.1 segue que o triângulo ABD é congruente ao triângulo ABC e portanto, $\overline{AC} = \overline{BD}$. $\square$

2.2.1.1 Trapézio Retângulo

Definição 2.2.3. *Trapézio retângulo (ou bi-retângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.*

Figura 2.5: Trapézio Retângulo

2.2.2 Paralelogramo

Definição 2.2.4. *Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.*

Figura 2.6: ABCD é paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Proposição 2.2.3. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem congruentes.*

Demonstração. Considere um quadrilátero convexo $ABCD$ seja um paralelogramo conforme Figura 2.6, então temos que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, o que implica que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$, $\widehat{D}$ e $\widehat{A}$, são colaterais internos logo:

$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} = 180° \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \end{cases} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \\ \widehat{C} + \widehat{D} = 180°. \end{cases} \tag{2.2}$$

Assim, de (2.1) e (2.2) o ângulo $\widehat{A}$ é igual ao ângulo $\widehat{C}$ e o ãngulo $\widehat{D}$ é igual ao ângulo $\widehat{B}$, respectivamente.

Reciprocamente, considere um quadrilátero convexo de tal maneira que

$$\widehat{A} = \widehat{C}$$

e

$$\widehat{B} = \widehat{D}$$

conforme Figura 2.7.

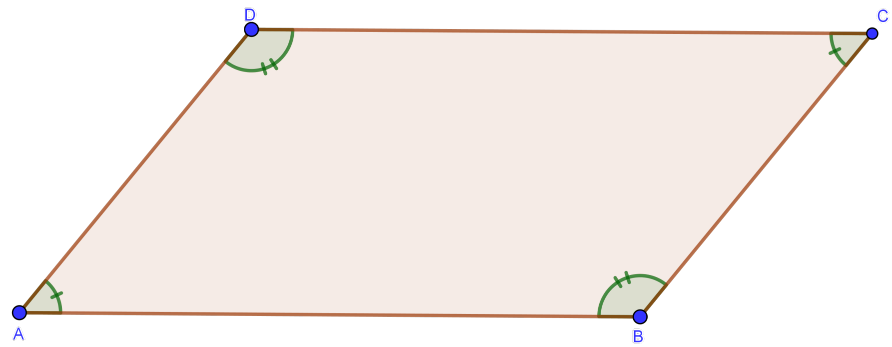


Figura 2.7: $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow ABCD$ Paralelogramo

Como $\widehat{A}+\widehat{B} = \widehat{C}+\widehat{D}$ e $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D} = 360°$, temos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{A}+\widehat{B} &= 360^\circ \\
2\widehat{A}+2\widehat{B} &= 360^\circ \\
\widehat{A}+\widehat{B} &= 180^\circ.
\end{aligned}
$$

Analogamente $\widehat{C}+\widehat{D} = 180^\circ$, o que implica que

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \text{e} \quad \overline{AD} \parallel \overline{BC}.$$

Logo $ABCD$ é paralelogramo. $\square$

Proposição 2.2.4. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem congruentes.*

Demonstração. Supondo que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo conforme Figura 2.8, então implica que $\widehat{A}=\widehat{C}$ e $\widehat{B}=\widehat{D}$ pela Proposição 2.2.3. Temos também que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ no que acarreta que os ângulos $A\widehat{D}B$ e $C\widehat{B}D$ sejam congruentes. Logo pelo critério de congruência $LAAo$ os triângulos ABD e CDB são congruentes, assim $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{CB}$.

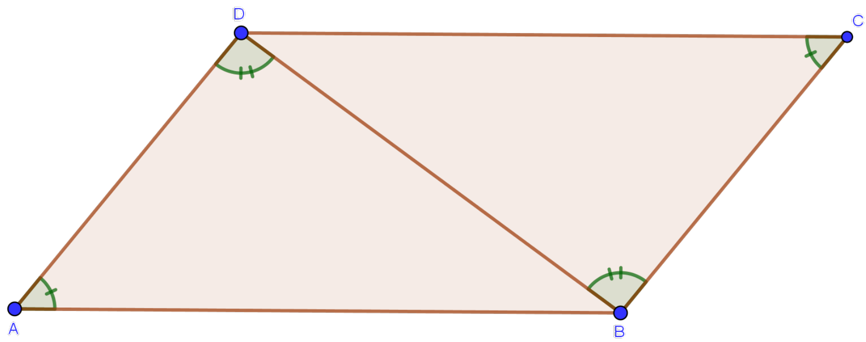


Figura 2.8: $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{CB} \Leftrightarrow ABCD$ é Paralelogramo

Reciprocamente, supondo que o quadrilátero convexo $ABCD$ de tal modo que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{CB}$ (Figura 2.8). Logo, pelo critério de congruencia LLL os triângulos ABD e CDB são congruentes, assim $A\widehat{D}B = C\widehat{B}D$ e $A\widehat{B}D = C\widehat{D}B$. Mas,

$$\begin{cases} A\widehat{D}B = C\widehat{B}D \Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD} \\ A\widehat{B}D = C\widehat{D}B \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}. \end{cases}$$

Logo,

$$ABCD \quad \text{é} \quad paralelogramo.$$

$\square$

Proposição 2.2.5. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.*

Demonstração. Temos que $ABCD$ é paralelogramo o que implica dizer que

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}.$$

Consideramos o ponto M a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do paralelogramo $ABCD$ conforme Figura 2.9.

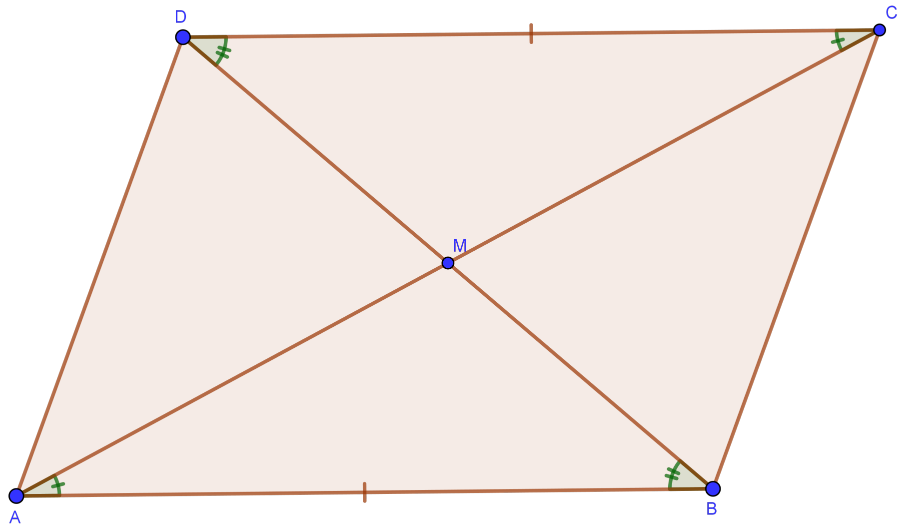


Figura 2.9: $ABCD$ é Paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$

Como $ABCD$ é um paralelogramo então temos

$$\begin{cases} B\widehat{A}C = D\widehat{C}A \\ \overline{AB} = \overline{CD} \\ A\widehat{B}D = B\widehat{D}C. \end{cases}$$

Logo, pelo Axioma 1.4.2, temos que o triângulo ABM é congruente ao triângulo DMC e assim,

$$\overline{AM} = \overline{CM} \quad \text{e} \quad \overline{BM} = \overline{DM}.$$

Reciprocamente, considere um quadrilátero com diagonais que se interceptam no ponto médio conforme Figura 2.10.

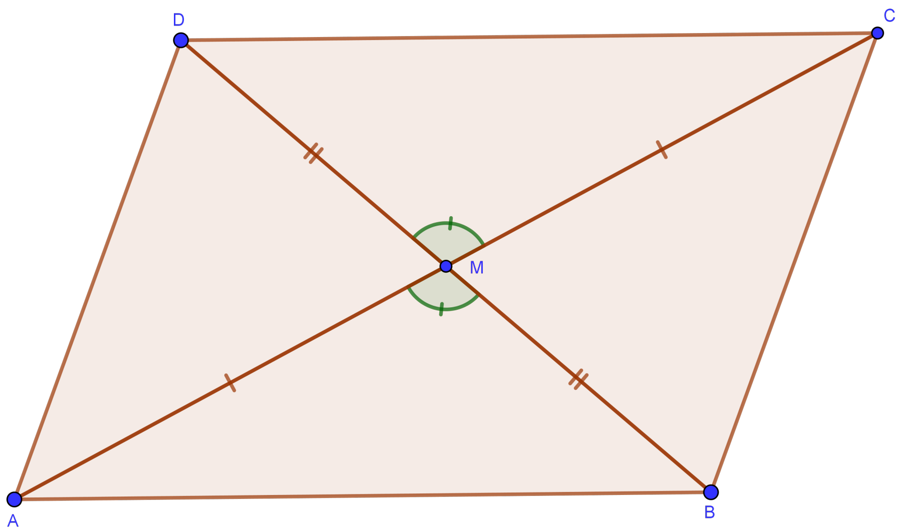


Figura 2.10: $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$ $\Leftrightarrow$ ABCD é Paralelogramo

Seque que,

$$\begin{cases} \overline{AM} &= \overline{MC} \\ A\widehat{M}\widehat{B} &= C\widehat{M}D(O.P.V) \\ \overline{BM} &= \overline{MD}. \end{cases}$$

Assim, pelo Axioma 1.4.1 os triângulos ABM e DMC são congruentes. O que implica dizer que:

$$B\widehat{A}M = D\widehat{C}M \text{ consequentemente } \overline{AB} \parallel \overline{CD}.$$

De maneira análoga, podemos considerar o $\triangle ADM$ e $\triangle BCM$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ consequentemente $ABCD$ é paralelogramo.

□

2.2.3 Retângulo

Um quadrilátero convexo é um retângulo se todos os seus ângulos internos forem iguais, como a soma dos ângulo internos de qualquer quadrilátero é igual a 360° visto na Seção 2.1, podemos concluir que um quadrilátero é um retângulo se, e só se, todos os ângulos internos forem iguais a 90° .

Proposição 2.2.6. *Em todo retângulo as diagonais são congruentes*

Demonstração. Considere $ABCD$ um retângulo, o que implica dizer que ABCD também é paralelogramo temos assim:

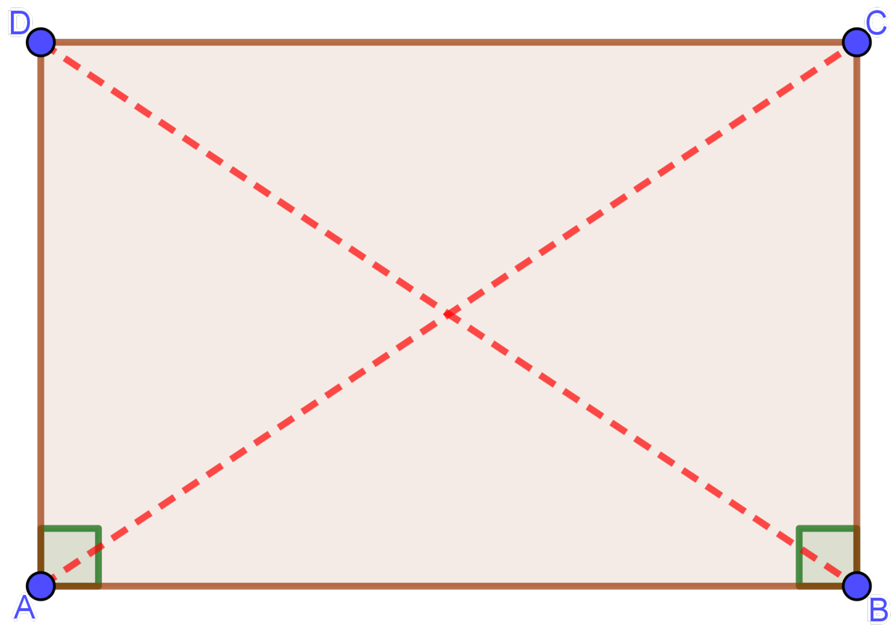


Figura 2.11: Retângulo $ABCD$

$$\begin{cases} \overline{BC} & = & \overline{AD} \\ \widehat{B} & = & \widehat{A} \\ \overline{BA} & = & \overline{AB}. \end{cases}$$

Pelo Axioma 1.4.1 os triângulos ABC e CBD são iguais o que implica dizer que

$$\overline{AC} = \overline{BD}.$$

□

2.2.4 Losango

Além de todas as propriedades do paralelogramo, o losango é um quadrilátero convexo com todos os seus lados iguais.

Proposição 2.2.7. *Em todo losango as diagonais são perpendiculares.*

Demonstração. Considere $ABCD$ um losango, o que implica dizer que ABCD também é paralelogramo assim:

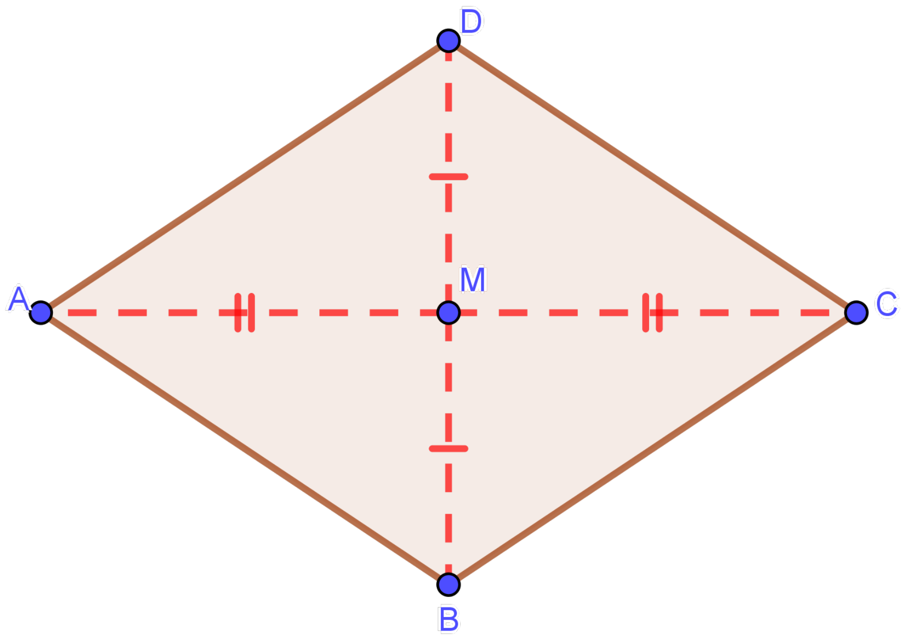


Figura 2.12: Losango $ABCD$

$$\begin{cases} \overline{AM} &= \overline{MC} \\ \overline{DM} &= \overline{MB} \\ \overline{AD} &= \overline{DC} = \overline{BC} = \overline{AB}. \end{cases}$$

Logo, pelo Axioma 1.4.3 os triângulos AMB, AMD, CMD e CMB são congruentes.

Deste modo os ângulos de vértice M são congruentes e suplementares, logo

$$\overline{AC} \perp \overline{BD}.$$

□

2.2.5 Quadrado

O último quadrilátero notável é o quadrado que é a junção entre um retângulo com o losango. Deste modo, os quadrados teem as seguintes propriedades simultanamente:

a) Todos os ângulos internos iguais a $90°$.

b) Todos os lados são congruentes.

c) Diagonais congruentes, perpendiculares e se intersectam no ponto médio.

Proposição 2.2.8. *Em todo quadrado as diagonais formam ângulos de $45°$ com os lados do quadrilátero.*

Demonstração. Considere o quadrado $ABCD$ conforme Figura 2.13

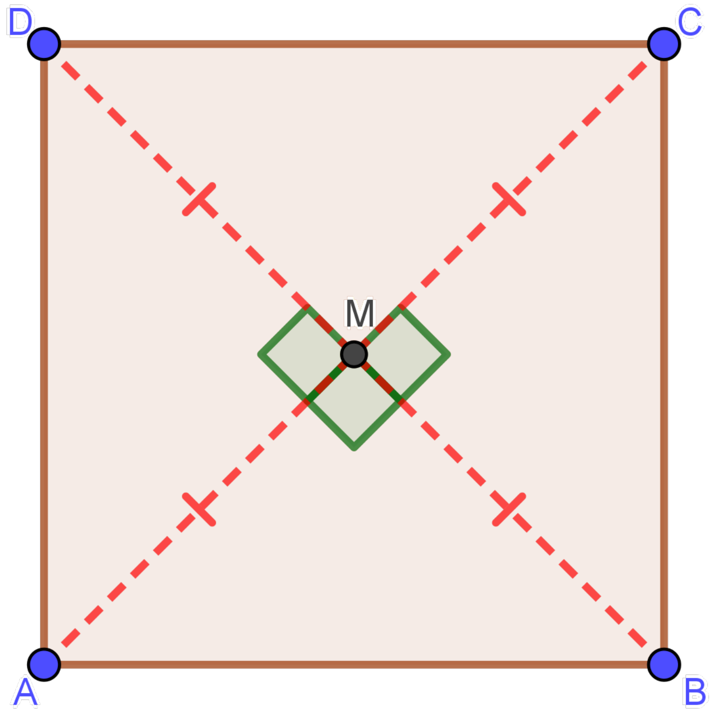


Figura 2.13: Quadrado $ABCD$

De acordo com a Proposição 2.2.5 temos que: $\overline{AM} = \overline{MB}$ e também são perpendiculares, assim o triângulo ABM é isósceles de base $\overline{AB}$, o que implica dizer que os ângulos $M\widehat{A}B = M\widehat{B}A$, como eles são complementares, haja vista que já temos um ângulo reto orinduo das perpendiculares, então podemos afirmar que $M\widehat{A}B = M\widehat{B}A = 45°$.

A demonstração dos outros lados é meramente análoga e é deixada a cargo do leitor. □

Capítulo 3

A Educação de Jovens e Adultos

Neste capítulo descreveremos sobre a legislação e organização da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

3.1 Plano Nacional de Educação Aplicado a EJA

Nesta seção é utilizado como referência [20].

No dia 14 de dezembro de 2010 foi entregue pelo então Ministro da Educação Fernando Haddad ao então presidente Luiz Inácio Lula da Silva o projeto de lei que estabelece o novo Plano Nacional da Educação - PNE no qual está vigorando desde 2011 até 2020. O documento traça metas a serem alcançadas pelo país até 2020. Apresentamos aqui apenas as metas e estratégias que tange a EJA.

A meta 3 diz que temos que universalizar, até 2016, o atendimento escolar para toda a população de quinze a dezessete anos de idade e elevar, até 2020, a taxa líquida de matrículas no Ensino Médio para 85%, tem como estratégia fomentar programas de Educação de Jovens e Adultos para a população urbana e do campo nesta faixa etária, com qualificação social e profissional para jovens que estejam fora da escola e com defasagem idade-série.

O Programa Nacional de Educação em sua meta 8 quer elevar a escolaridade média da população de dezoito a vinte e quatro anos de modo a alcançar mínimo de doze anos de estudo para as populações do campo, da região de menor escolaridade no país e dos 25% mais pobres, bem como igualar a escolaridade média entre negros e não negros, com vista à redução da desigualdade educacional, tendo como estratégia para alcançar a meta, estimular programas de Educação de Jovens e Adultos para os segmentos populacionais considerados, que estejam fora da escola e com defasagem idade-série.

Já a meta 9 diz para elevar a taxa de alfabetização da população com quinze anos ou mais para 93,5% até 2015 e erradicar, até 2020, o analfabetismo absoluto e reduzir pela metade a taxa de analfabetismo funcional utilizando as seguintes estratégias:

a) Assegurar a oferta gratuita da Educação de Jovens e Adultos a todos os que não tiveram acesso à Educação Básica na idade própria.

b) Implementar ações de alfabetização de jovens e adultos com garantia de continuidade da escolarização básica.

c) Promover o acesso ao Ensino Fundamental aos egressos de programas de alfabetização e garantir o acesso a exames de reclassificação e de certificação da aprendizagem.

d) Promover chamadas públicas regulares para Educação de Jovens e Adultos e avaliação de alfabetização por meio de exames específicos, que permitam aferição do grau de analfabetismo de jovens e adultos com mais de quinze anos de idade.

e) Executar, em articulação com a área da saúde, programa nacional de atendimento oftalmológico e fornecimento gratuito de óculos para estudantes da educação de jovens e adultos.

Oferecer, no mínimo, 25% das matrículas de Educação de Jovens e Adultos na forma integrada à Educação Profissional nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio é a meta 10 que por sua vez tem como estrategias:

a) Manter Programa Nacional de Educação de Jovens e Adultos, voltado à conclusão do Ensino Fundamental e à formação profissional inicial, de forma a estimular a conclusão da Educação Básica.

b) Fomentar a expansão das matrículas na Educação de Jovens e Adultos de forma a articular a formação inicial e continuada de trabalhadores e a Educação Profissional, objetivando a elevação do nível de escolaridade do trabalhador.

c) Fomentar a integração da Educação de Jovens e Adultos com a Educação Profissional, em cursos planejados, de acordo com as características e especificidades do público da Educação de Jovens e Adultos, inclusive na modalidade de Educação a Distância.

d) Institucionalizar programa nacional de reestruturação e aquisição de equipamentos voltados à expansão e à melhoria da rede física de escolas públicas que atuam na Educação de Jovens e Adultos integrada à Educação Profissional.

e) Fomentar a produção de material didático, o desenvolvimento de currículos e metodologias específicas para avaliação e formação continuada de docentes das redes públicas que atuam na Educação de Jovens e Adultos integrada à Educação p Profissional.

f) Fomentar a oferta pública de formação inicial e continuada para trabalhadores articulada à Educação de Jovens e Adultos, em regime de colaboração e com apoio das entidades privadas de formação profissional vinculadas ao sistema sindical.

g) Institucionalizar programa nacional de assistência ao estudante, compreendendo ações de assistência social, financeira e de apoio psicopedagógico que contribuam para garantir o acesso, a permanência, a aprendizagem e a conclusão com êxito da Educação de Jovens e Adultos integrada com a Educação Profissional.

h) Fomentar a diversificação curricular do Ensino Médio para Jovens e Adultos, integrando a formação integral à preparação para o mundo do trabalho e promovendo a inter-relação entre teoria e prática nos eixos da ciência, do trabalho, da tecnologia e da cultura e cidadania, de forma a organizar o tempo e o espaço pedagógicos adequados às características de jovens e adultos por meio de equipamentos e laboratórios, produção de material didático específico e formação continuada de professores.

Para o cumprimento das metas 8, 9 e 10 exigirá esforço de toda a estrutura do governo brasileiro. Essa estrutura está formada por União, Estados, do Distrito Federal e dos Municípios no qual precisará de plena colaboração destes entes federativos para assim ser cumprida a ampliação das oportunidades educacionais.

3.2 Estrutura da EJA no Distrito Federal

Nesta secão, utilizamos a referência [5].

A população do Distrito Federal de acordo com dados do Censo de 2010 é de mais de 2.500.000 dhabitantes. Estes dados revela que o índice de analfabetismo no DF é de 3,5%, o que corresponde a 68.114 pessoas de 15 anos ou mais de idade que não sabem ler e escrever, um dado importante para a reflexão da oferta e da demanda da Educação de Jovens e Adultos dentro do Distrito Federal.

A Secretaria de Educação do Distrito Federal (SEEDF) no ano de 2013 permitiu a matrícula de um total de 51.478 alunos na EJA em 114 Unidades Escolares na Rede Pública de Ensino, sendo que entre 2011 - 2014 mais de 20.000 pessoas não alfabetizadas foram atendidas. Em maio de 2014 a Rede Pública de Ensino do DF recebeu o Selo de Território Livre do Analfabetismo, dado pelo MEC a quem atingir mais de 96% de pessoas alfabetizadas, com base nos dados do Censo Demográfico do IBGE.

Duas vezes ao ano a SEEDF, afim de assegurar a educação de todos ao longo da vida, oferta matrícula para a Educação de Jovens e Adultos, respeitando o semestre letivo, de acordo com a estratégia de matrícula da Rede Pública de Ensino do DF . São feitas ações publicitárias de tal modo que chegue ao público alvo que são os Jovens e Adultos fora da escola. A solicitação de matrícula ocorre tanto pelo telefone através do telematrícula quanto nas secretarias escolares. Porém, o individuo que quiser se matricular ao longo do semestre letivo, pode ainda fazer a solicitação e efetivação de matrícula para novo estudante na Educação de Jovens e Adultos, a qualquer tempo, respeitando a disponibilidade de vagas na unidade escolar de interesse do candidato. O estudante pode se matricular nos compontes curriculares, tendo como pré-requisito:

ter concluído o componente curricular solicitado na etapa anterior.

A oferta da EJA através da SEEDF se da no regime semestral, podendo ser em curso presencial, a distância e integrada à Educação Profissional, em cursos de formação inicial continuada ou de formação técnica de nível médio. A EJA se organiza de tal forma para que o estudante possa acessar, permanecer e concluir todo o processo educativo escolar. Na EJA o regime é o semestral, dividido por segmentos e etapas. Para cada segmento, há uma correspondência nas etapas da Educação Básica e carga horária específica de tal modo:

a) O primeiro segmento corresponde aos anos iniciais do Ensino Fundamental com as etapas da 1ª a 4ª série perfazendo um total de 1600 horas.

b) O segundo segmento corresponde aos anos finais do Ensino Fundamental com as etapas da 5ª a 8ª série perfazendo um total de 1600 horas.

c) O terceiro segmento corresponde ao Ensino Médio com as etapas da 1ª a 3ª série perfazendo um total de 1200 horas.

No primeiro segmento o curso é exclusivamente presencial em um período semestral de 100 dias letivos, divididos em quatro etapas com carga horária de 400 horas semestreais, perfazendo um total de 1600 horas em 2 anos de curso. No segundo segmento são divididos em 4 etapas dos anos finais do Ensino Fundamental, com carga horário de 400 horas semestrais, em um total de 1.600 horas. Já o terceiro segmento é dividido em 3 etapas, com 415 horas semestrais cada, se a escola optar pela parte diversificada de Ensino Religioso, caso a escola não opte, então esta fica com 400 horas semestrais totalizando as 1.200 horas. As matrizes curriculares são divididas da seguinte maneira:

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO DISTRITO FEDERAL Modalidade: 1º Segmento da Educação de Jovens e Adultos - Presencial Regime: Semestral - Módulo: 20 semanas						
PARTES DO CURRÍCULO	**ÁREAS DO CONHECIMENTO**	**COMPONENTES CURRICULARES**	**1ª Etapa**	**2ª Etapa**	**3ª Etapa**	**4ª Etapa**
BASE NACIONAL COMUM	Linguagens	Língua Portuguesa	X	X	X	X
		Educação Física	X	X	X	X
		Arte	X	X	X	X
	Matemática	Matemática	X	X	X	X
	Ciências da Natureza	Ciências da Natureza	X	X	X	X
	Ciências Humanas	História	X	X	X	X
		Geografia	X	X	X	X
PARTE DIVERSIFICADA		Ensino Religioso	X	X	X	X
TOTAL DE AULAS SEMANAIS			25	25	25	25
CARGA HORÁRIA SEMESTRAL			400	400	400	400
CARGA HORÁRIA DO SEGMENTO			1.600			

OBSERVAÇÕES:
1. Cada Etapa corresponde a um semestre letivo que equivale a 100 (cem) dias letivos.
2. A carga horária diária é de 04 (quatro) horas convertidas em 05 (cinco) horas-aula.
3. A hora-aula é definida nos três primeiros horários com aula de 50 (cinquenta) minutos e os dois últimos de 45 (quarenta e cinco) minutos, cujo horário pode variar, desde que assegurada as cargas horárias estabelecidas.
4. A carga horária do segmento é definida pelas Diretrizes Curriculares Nacional da Educação de Jovens e Adultos.
5. O intervalo é de 15 (quinze) minutos, excluídos da carga horária diária.
6. A carga horária de Ensino Religioso será direcionada para o componente curricular de **Língua Portuguesa**, no caso em que o estudante optar por não cursá-lo.
7. A hora-aula do Ensino Religioso será de 45 (quarenta e cinco) minutos.

Figura 3.1: Matriz Curricular da Educação de Jovens e Adultos 1º Segmento Presencial

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO DISTRITO FEDERAL Modalidade: 2º Segmento da Educação de Jovens e Adultos – Presencial Regime: Semestral - Módulo: 20 semanas										
PARTES DO CURRÍCULO	**ÁREAS DO CONHECIMENTO**	**COMPONENTES CURRICULARES**	**5ª Etapa**		**6ª Etapa**		**7ª Etapa**		**8ª Etapa**	
			Nº aulas Semanal	Nº aulas Semestral	Nº aulas Semanal	Nº aulas Semestral	Nº aulas Semanal	Nº aulas Semestral	Nº aulas Semanal	Nº aulas Semestral
BASE NACIONAL COMUM	Linguagens	Língua Portuguesa	5	100	5	100	5	100	5	100
		Educação Física	1	20	1	20	1	20	1	20
		Arte	2	40	2	40	2	40	2	40
	Matemática	Matemática	5	100	5	100	5	100	5	100
	Ciências da Natureza	Ciências da Natureza	4	80	4	80	4	80	4	80
	Ciências Humanas	História	3	60	3	60	3	60	3	60
		Geografia	3	60	3	60	3	60	3	60
PARTE DIVERSIFICADA		Ensino Religioso	1	20	1	20	1	20	1	20
		Língua Estrangeira Moderna - Inglês	1	20	1	20	1	20	1	20
TOTAL DE AULAS SEMANAL			25		25		25		25	
CARGA HORÁRIA SEMESTRAL			400		400		400		400	
CARGA HORÁRIA DO SEGMENTO			1.600							

OBSERVAÇÕES:
1. Cada Etapa corresponde a um semestre letivo que equivale a 100 (cem) dias letivos.
2. A carga horária diária é de 04 (quatro) horas convertidas em 05 (cinco) horas-aula.
3. A hora-aula é definida nos três primeiros horários com aula de 50 (cinquenta) minutos e os dois últimos de 45 (quarenta e cinco) minutos, cujo horário pode variar, desde que assegurada as cargas horárias estabelecidas.
4. A carga horária do segmento é definida pelas Diretrizes Curriculares Nacional da Educação de Jovens e Adultos.
5. O intervalo é de 15 (quinze) minutos, excluídos da carga horária diária.
6. A carga horária de Ensino Religioso será direcionada para o componente curricular **Língua Estrangeira Moderna - Inglês**, no caso em que o estudante optar por não cursá-lo.
7. A hora-aula do Ensino Religioso será de 45 (quarenta e cinco) minutos.

Figura 3.2: Matriz Curricular da Educação de Jovens e Adultos – 2º Segmento Presencial

Instituição: SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO DISTRITO FEDERAL Modalidade: 3º Segmento da Educação de Jovens e Adultos – Presencial Regime: Semestral - Módulo: 20 semanas								
PARTES DO CURRÍCULO	ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES	1ª Etapa		2ª Etapa		3ª Etapa	
			Nº de aulas semanal	Nº de aulas semestral	Nº de aulas semanal	Nº de aulas semestral	Nº de aulas semanal	Nº de aulas semestral
BASE NACIONAL COMUM	Linguagens	Língua Portuguesa	4	80	4	80	4	80
		Educação Física	1	20	1	20	1	20
		Arte	1	20	1	20	1	20
	Matemática	Matemática	4	80	4	80	4	80
	Ciências da Natureza	Física	3	60	3	60	3	60
		Química	2	40	2	40	2	40
		Biologia	2	40	2	40	2	40
	Ciências Humanas	História	2	40	2	40	2	40
		Geografia	2	40	2	40	2	40
		Filosofia	1	20	1	20	1	20
		Sociologia	1	20	1	20	1	20
PARTE DIVERSIFICADA		Língua Estrangeira Moderna - Inglês	1	20	1	20	1	20
		Língua Estrangeira Moderna - Espanhol	1	20	1	20	1	20
		Ensino Religioso	1	20	1	20	1	20
TOTAL DE AULAS SEMANAL (com opção de Ensino Religioso)			26		26		26	
TOTAL DE AULAS SEMANAL (sem opção de Ensino Religioso)			25		25		25	
CARGA HORÁRIA SEMESTRAL (com opção de Ensino Religioso)			415		415		415	
CARGA HORÁRIA SEMESTRAL (sem opção de Ensino Religioso)			400		400		400	
CARGA HORÁRIA DO SEGMENTO (com opção de Ensino Religioso)			1.245					
CARGA HORÁRIA DO SEGMENTO (sem opção de Ensino Religioso)			1.200					

OBSERVAÇÕES:

1. Cada Etapa corresponde a um semestre letivo que equivale a 100 (cem) dias letivos.
2. A carga horária diária é de 04 (quatro) horas convertidas em 05 (cinco) horas-aula.
3. A hora-aula é definida nos três primeiros horários com aula de 50 (cinquenta) minutos e os dois últimos de 45 (quarenta e cinco) minutos, cujo horário pode variar, desde que assegurada as cargas horárias estabelecidas.
4. A carga horária do segmento é definida pelas Diretrizes Curriculares Nacional da Educação de Jovens e Adultos.
5. O intervalo é de 15 (quinze) minutos, excluídos da carga horária diária.
6. A oferta dos componentes curriculares Língua Estrangeira Moderna – Espanhol e Ensino Religioso é obrigatória, porém facultativa para o estudante.
7. A carga horária de Língua Estrangeira Moderna – Espanhol será direcionada para o componente curricular de **Língua Estrangeira Moderna - Inglês**, no caso em que o estudante optar por não cursá-lo.
8. A hora-aula do Ensino Religioso será de 45 (quarenta e cinco) minutos.

Figura 3.3: Matriz Curricular da Educação de Jovens e Adultos – 3º Segmento Presencial

3.3 A LDB Aplicada a EJA

No Artigo 24 Inciso VII Paragrafo 2° da LDB, fala da oferta de vagas no turno noturno.

> Os sistemas de ensino disporão sobre a oferta de educação de jovens e adultos e de ensino noturno regular, adequado às condições do educando[14]

A LDB nos trás em seu Artigo 37° que:

> A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos nos ensinos fundamental e médio na idade própria e constituirá instrumento para a educação e a aprendizagem ao longo da vida. (R edação dada pela Lei nº 13.632, de 2018)
>
> § 1° Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
>
> § 2° O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
>
> § 3° A educação de jovens e adultos deverá articular-se, preferencialmente, com a Educação Profissional, na forma do regulamento.[14]

Já em seu Artigo 38° a LDB mostra para um aluno que com conhecimentos adquiridos ao longo da vida pode-se fazer exames para terminar o período solicitado, no caso os maiores de quinze anos de idade podem terminar o Ensino Fundamental e para os maiores de 18 anos de idade concluir o Ensino Médio. Na lei refere-se assim:

> Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habilitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.
>
> § 1° Os exames a que se refere este artigo realizar-se-ão:
>
> I - no nível de conclusão do ensino fundamental, para os maiores de quinze anos;
>
> II - no nível de conclusão do ensino médio, para os maiores de dezoito anos.
>
> § 2° Os conhecimentos e habilidades adquiridos pelos educandos por meios informais serão aferidos e reconhecidos mediante exames.[14]

Capítulo 4

Sequência Didática

O objetivo deste capítulo é apresentar aspectos metodológicos de estudos, de tal maneira que é descrito o tipo da pesquisa, caracterizar os sujeitos e definir os instrumentos e procedimentos para enfim analisar os dados da pesquisa feita.

4.1 Dados da Escola

A pesquisa foi feita no Centro de Ensino Fundamental 01 do Riacho fundo II(RF2) localizada na quadra 1A Etapa QN 7C AE 1/2 Riacho Fundo II, região administrativa do Distrito Federal. É uma escola com estrutura de sala de vídeo, datashows e laboratório de informática.

O CEF 01 do RF2 conta com os três turnos, o turno matutino possui 1037 alunos do ensino regular e 22 alunos do ensino especial do 6° e 7° ano. O vespertino com 776 alunos do 8° e 9° ano, e no diurno permanece o sistema em Ciclos. Já o noturno com 677 alunos divididos em três segmentos, primeiro segmento da 1° a 4° série, segundo segmento da 5° a 8° série e por fim o terceiro segmento que é do 1° ao 3° ano do Ensino Médio com o sistema adotado da Educação de Jovens e Adultos (EJA), perfazendo um total de 2512 alunos na escola, operando nos três turnos. Os dados foram fornecidos pela secretária da escola e referem ao 1° semestre de 2018.

A sequência didática foi realizada em duas turmas de 7° Série da EJA, pois é o objetivo da pesquisa.

4.2 Teste de Van Hiele

Tendo como objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno, foi aplicado o Teste de níveis de Van Hiele [18]. Este teste apresenta 15 questões divididas em três partes iguais. Cada uma delas é relativa a um dos níveis de Van Hiele.

A primeira parte refere-se as questões do nível básico (questões de 1 a 5) com o objetivo de caracterização pela capacidade de identificação, comparação e nomenclatura das figuras geométricas com base em sua aparência. Na sequência, vem a segunda parte (questões de 6 a 10) , com questões que buscam que o aluno reconheça as propriedades e as utilizem para poder resolver os problemas. Por fim, o último bloco de questões (11 a 15) tem por objetivo avaliar habilidades pertinentes ao segundo bloco, de acordo com a Teoria de Van Hiele. Esse nível caracteriza-se pelas seguintes capacidades: perceber as definições com exatidão, interação entre as propriedades, argumentar de maneira informal e por último, ordenar as classes das figuras geométricas.

4.3 Participantes da Sequência Didática

Os testes e a intervenção pegagógica foram aplicadas a alunos da 7° Série do Ensino Fundamenda da EJA, pois o tema proposto faz parte do currículo da série aplicada.

A pesquisa foi feita nas turmas da 7° A e 7° B do CEF 01 do Riacho Fundo 2 - DF no período noturno. Sendo que, na turma da 7°A estão matriculados 46 alunos com frequência de 26 alunos e na 7° B temos 43 alunos matriculados com 15 alunos frequêntes, dando um total de 41 alunos pesquisados com idades de 16 a 79 anos.

4.4 Caracterização da Pesquisa

O tipo de pesquisa aplicada foi a pesquisa-ação pois a mesma tem a meta de melhorar a prática docente por meio da mudança, onde os professores são orientados a refletir seu trabalho perante os alunos e assim inovar em suas aulas. [15] vai dizer:

> Os docentes, através da reflexão crítica, podem concluir que práticas antigas moldadas por hábito e tradição são inúteis ou irrelevantes nos tempos atuais; por exemplo, práticas disciplinares que funcionavam antes, hoje já não são aceitáveis ou são contraproducentes . Quanto ao contexto, eles podem chegar à conclusão de que sua estrutura é inadequada e obstaculiza o alcance de metas educativas; por exemplo, a estrutura física da aula pode dificultar o trabalho em grupos, a interação pessoal, o ensino centrado no aluno.

4.5 Detalhamento da Sequência Didática

A pesquisa se dá em volta do conteúdo de reconhecimento das figuras planas, que está presente no currículo do Ensino Fundamental. A sequência didática aplicada teve por objetivo o aprendizado deste conteúdo. Para a realização desta sequência didática foram divididas em três etapas:

a) Aplicação do Teste de Van Hiele.

b) Realização de uma sequência didática.

c) Reaplicação do teste de Van Hiele.

A pesquisa-ação foi realizada no dia cinco de março de 2018 a dezoito de junho de 2018 em um total de 50 aulas de 40 minutos conforme Tabela 4.1

Data	Número de aulas	Atividades
05/03	2	Teste de Van Hiele
19 a 29/03	10	Fundamentação Teórica sobre Ângulos
02 a 12/04	10	Fundamentação Teórica sobre Triângulos
16/04	2	Atividade I – Montagem de Triângulos para Vizualizar a Soma dos seus Ângulos Internos.
$18e19/04$	3	Exercícios sobre Soma dos Ângulos Internos dos Triângulos
$23/04a03/05$	8	Fudamentação Teórica sobre os quadriláteros notáveis
07/05 e 09/05	4	Atividade II – Montando os Quadriláteros Notáveis e um Triângulo com Tangram
14 a 17/05	5	Exercícios sobre os Quadriláteros Notáveis
09/06	4	Saída de Campo por Brasília
18/06	2	Reaplicação dos Testes de Van Hiele

Tabela 4.1: Cronograma

4.6 Aplicação da Sequência Didática

A sequência didádica iniciou-se com a aplicação do Teste de Van Hiele com o objetivo de descobrir o nível de conhecimento dos alunos em Geometria Básica. Nas questões de múltipla escolha para efeito de correção, foi considerado apenas certo e errado e mesmo nas questões incompletas foi dado como errado.

Questão 1

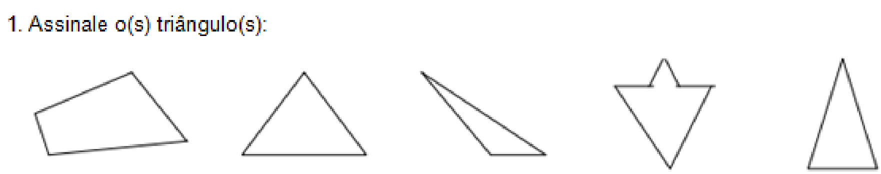


Figura 4.1: Questão 1 do Teste de Van Hiele

Nesta Questão 1, 11% dos alunos acertaram a questão, dentre os erros mais frequêntes estavam em não reconhecerem o triângulo obtusângulo como um triângulo.

Questão 2

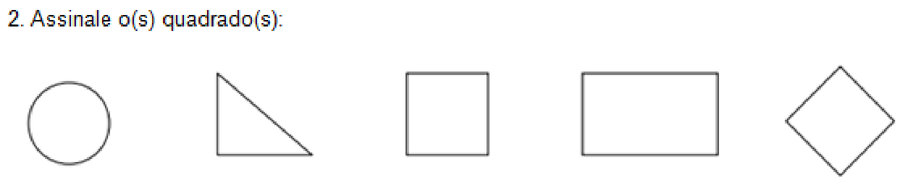


Figura 4.2: Questão 2 do Teste de Van Hiele

Na Questão 2, 11% dos alunos acertaram. O que determinou o erro foi confundir o retângulo com o quadrado e não souberam identificar o quadrado cujos lados não estavam paralelos ao lado da folha.

Questão 3

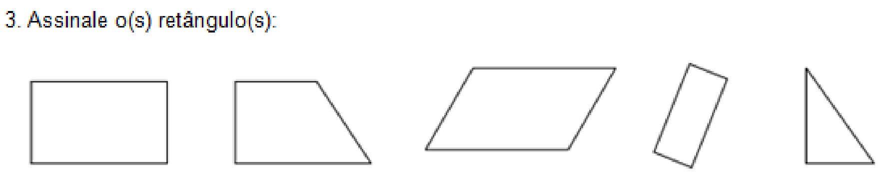


Figura 4.3: Questão 3 do Teste de Van Hiele

Na Questão 3, 9% de alunos acertaram. Dentre os erros mais frequêntes estavam em não marcar o retângulo cujos os lados não era paralelo às margens da folha e também muitos desconheciam o conceito.

Questão 4

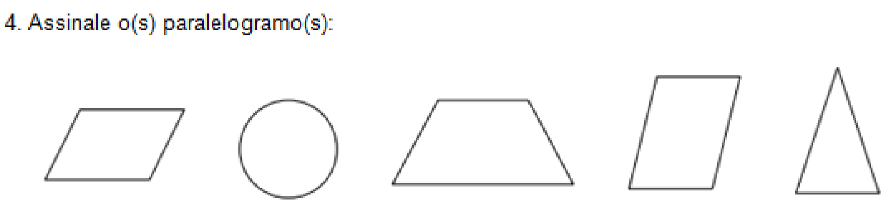


Figura 4.4: Questão 4 do Teste de Van Hiele

O que ficou perceptível na Questão 4 foi que eles não conseguiram identificar o que era um paralelogramo, com isso apenas 15% acertaram.

Questão 5

Figura 4.5: Questão 5 do Teste de Van Hiele

Na Questão de número 5, apenas 28% dos alunos acertaram, evidenciando que eles não sabem o conceito de retas paralelas.

Questão 6

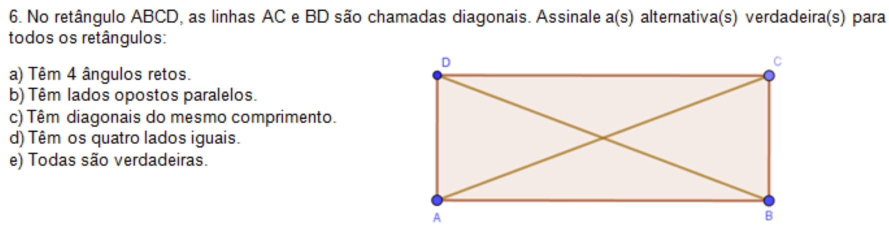


Figura 4.6: Questão 6 do Teste de Van Hiele

A questão de número 6 é uma pergunta de Verdadeiro ou Falso, assim, 11% acertaram todos os itens, 3% acertou apenas um ítem, 38% acertaram dois ítens e 41% acertaram três ítens, evidenciando que eles não sabiam que um retângulo pudesse ter propriedades.

Questão 7

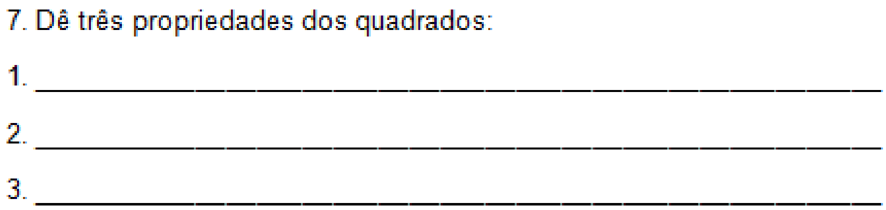


Figura 4.7: Questão 7 do Teste de Van Hiele

A Questão 7 era uma questão discursiva, onde eles deveriam escrever três propriedades do retângulo, porém nenhum aluno da pesquisa conseguiu escrever três propriedades do retângulo de maneira certa. Se apresentou com 38% acertando apenas uma propriedade, 9% duas propriedades, 34% tentaram alguma resposta mas erraram e 19% deixaram a questão em branco. Na grande maioria eles não tinham uma linguagem matemática para definir quadrado.

Questão 8

8. Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.
b) Um dos ângulos mede 90°.
c) Dois ângulos têm a mesma medida.
d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

Figura 4.8: Questão 8 do Teste de Van Hiele

Na questão de número 8 nenhum aluno acertou a questão, o que ficou evidenciado foi que a palavra isósceles era nova no vocabulário deles.

Questão 9

9. Dê três propriedades dos paralelogramos:

1. ____
2. ____
3. ____

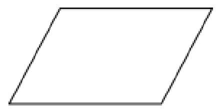


Figura 4.9: Questão 9 do Teste de Van Hiele

Na questão de número 9 seria correto escrever três propriedades do paralelogramo, porém nenhum aluno acertou nenhuma propriedade. Do total, 43% deixaram a questão em branco e 57% erraram, mas tentaram alguma resposta. Foi percebido na aplicação do teste que eles não sabiam o conceito e a aplicação do que era um paralelogramo.

Questão 10

10. Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Figura 4.10: Questão 10 do Teste de Van Hiele

Dentre os alunos que tentaram responder a questão de número 10, nenhum conseguiu transcrever algo que chegasse perto da resposta. Nesta questão, 81% tentaram responder e 19% deixaram a questão em branco por não saberem o que representava um quadrilátero.

Questão 11

11. Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:

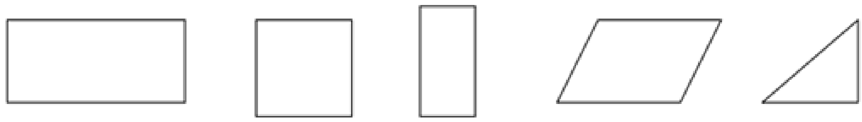


Figura 4.11: Questão 11 do Teste de Van Hiele

Na questão de número 11 todos os alunos erraram, como um todo, dentre os erros 33% marcaram os retângulos e nao marcando o quadrado que é um tipo de retângulo e os demais 67% erraram a questão toda.

Questão 12

12. Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ____________________________________
b) Por quê? ____
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ____

Figura 4.12: Questão 12 do Teste de Van Hiele

Todos os alunos erraram a Questão 12, acredito que por não conseguirem interpretar a questão e por não saberem o que era um quadrilátero.

Questão 13

13. Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? ______________________
Por quê? ____

Figura 4.13: Questão 13 do Teste de Van Hiele

Na questão de número 13, 25% deixaram a questão em branco, e o restante apenas escreveram sim ou não para a pergunda sem a devida justificativa.

Questão 14

14. Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.
Assinale a afirmativa verdadeira:

a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

Figura 4.14: Questão 14 do Teste de Van Hiele

Na Questão 14 todos os alunos erraram a questão e durante a aplicação o foi percebido é que eles não conseguiram compreender o enunciado.

Questão 15

15. Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dosquadrados:

a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos também é válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Figura 4.15: Questão 15 do Teste de Van Hiele

Como na Questão 14, na Questão 15 também não compreenderam o enunciado da questão, dessa forma todos também erraram.

Estatística do Teste de Van Hiele

Após a aplicação do pré-teste, foi diagnosticado que 95% dos alunos não atingiram nem o nivel básico do modelo de pensamento de Van Hiele, que seria de acertar, no mínimo, 3 questões do bloco inicial. A grande maioria dos alunos apresentou dificuldade de escrever as propriedades das figuras geométricas encontradas no segundo bloco de questões. A linguagem geométrica aplicada no último bloco de questões deixou os alunos confusos, principalmente com a ideia de que quadrado poder ser retângulo.

4.7 Intervenção Pedagógica

Segundo [4], para o desenvolvimento do conhecimento o processo de aprendizagem é fundamental. Por isso é preciso estabelecer uma relação entre quem aprende e quem ensina.

> Ele explica esta conexão entre desenvolvimento e aprendizagem através da zona de desenvolvimento proximal (distância entre os níveis de desenvolvimento potencial e nível de desenvolvimento real), um "espaço dinâmico" entre os problemas que uma criança pode resolver sozinha (nível de desenvolvimento real) e os que deverá resolver com a ajuda de outro sujeito mais capaz no momento, para em seguida, chegar a dominá-los por si mesma (nível de desenvolvimento potencial).

4.7.1 Aplicação da Intervenção Pedagógica

O objetivo desta sequência após a análise do teste de Van Hiele é que uma boa parte dos alunos consigam chegar no nível inicial de Van Hiele. Espera-se também que os alunos consigam aprender Geometria Plana Básica de tal forma que os conceitos fiquem fixados em sua memória de longo prazo.

ÂNGULOS

Tema: Ângulos

Objetivo: Que os alunos possam aprender os principais conceitos e definições sobre ângulos

Duração: 10 aulas.

Desenvolvimento:

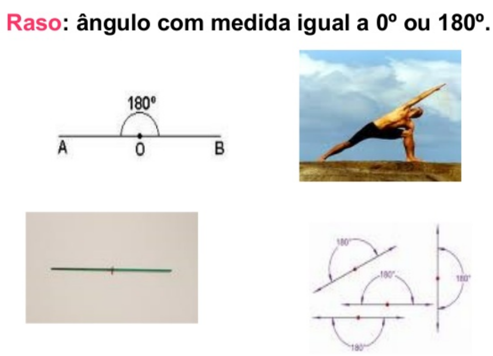
Durante as 10 aulas com o recurso de um data show foi transmitido os principais conceitos e definições que giram em torno do conteúdo de ângulos: definição, nomes dados aos ângulos, medidas dos ângulos, bissetriz de um ângulo, ângulos entre retas. As figuras que constam na Figura 4.16 retiradas de [8], mostram algumas imagens que foram trabalhadas no decorrer das aulas.

(a) Ângulos no Dia a Dia

(b) Ângulo Agudo

(c) Ângulo Reto

(d) Ângulo Obtuso



(e) Ângulo Raso

Figura 4.16: Aula sobre Ângulos

Durante as aulas foram feitos muitos exercícios para descobrir qual valor dos ângulos entre ponteiros de relógio e entre retas.

Triângulos

Tema: Triângulos

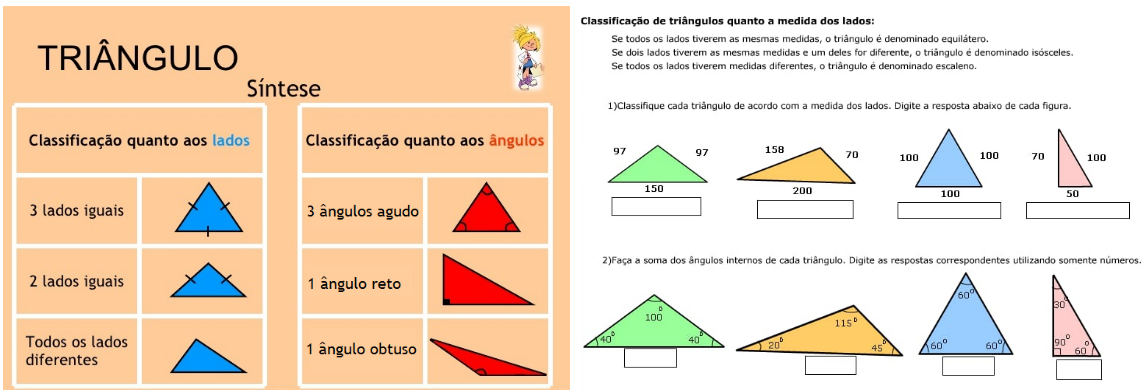
Objetivo: Que os alunos possam aprender os principais conceitos e definições sobre triângulos

Duração: 15 aulas.

Desenvolvimento:

Durante as 15 aulas com o recurso de um data show e do quadro branco, foram transmitidos os principais conceitos e definições que giram em torno do conteúdo de triângulos: definição, classificação quanto aos lados e ângulos e a soma dos ângulos internos dos triângulos.

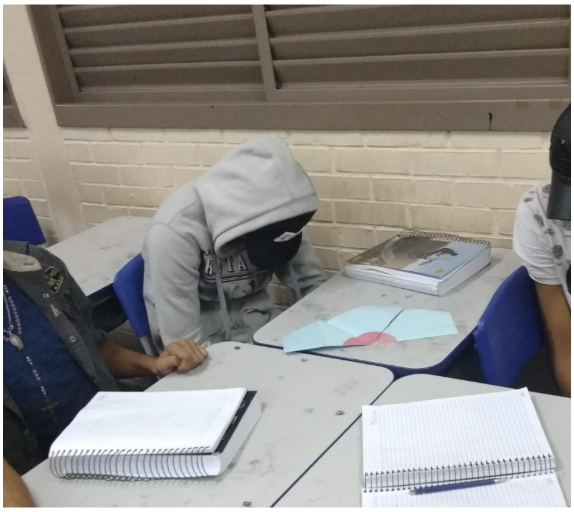
A Figura 4.17 retiradas de [9] e de [10], mostram algumas imagens que foram trabalhadas na aula de classificação de triângulos.



(a) Classificação dos Triângulos (b) Exercícios sobre Classificação dos Triângulos

Figura 4.17: Classificação dos Triângulos

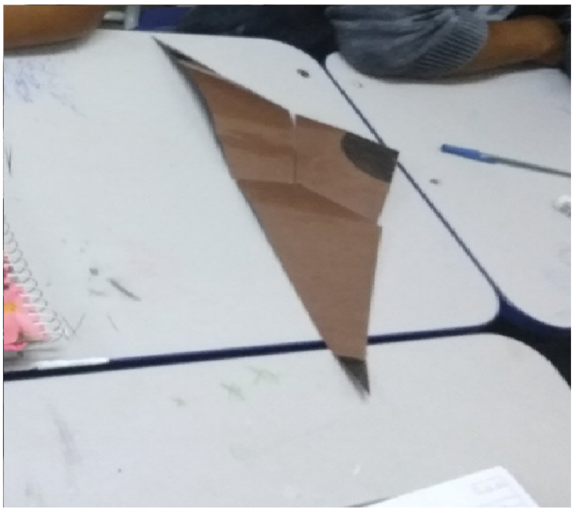
No ensino da soma dos ângulos internos do triângulo foi aplicado uma atividade em que a turma foi dividida em grupos de no máximo 3 alunos, onde construíram diversos tipos de triângulos pré determinados pelo professor. Depois cortaram os mesmos e uniram os vértices. Foi possivel visualizar que ao juntar os vértices era de fácil notoriedade que formava meia volta, relacionando assim o objetivo proposto. Nesta atividade os grupos foram trocando os diversos triângulos entre eles com o objetivo de visualisar que independente do triângulo a soma de seus ângulos internos é sempre 180°. Na Figura 4.18 mostram alguns alunos montando os triângulos e a meia volta.



(a) Ângulo Raso

(b) Triângulo

(c) Montagem do Ângulo Raso



(d) Triângulo

Figura 4.18: Soma dos ângulos Internos do Triângulo

Quadriláteros Notáveis

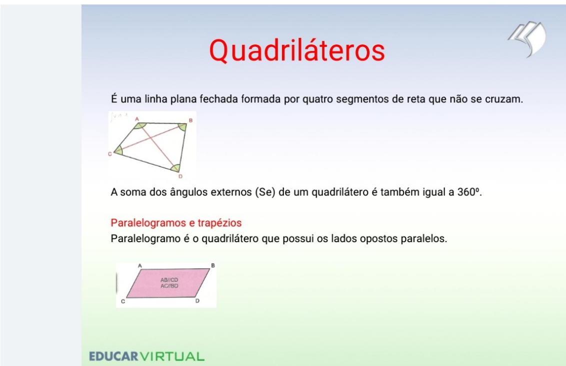
Tema: Quadriláteros Notáveis

Objetivo: Que os alunos possam aprender os principais conceitos e definições sobre os quadriláteros notáveis

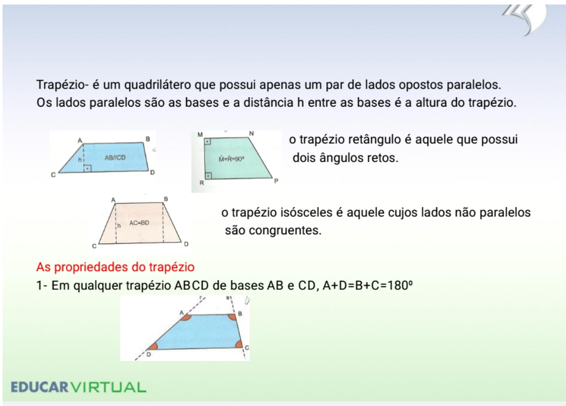
Duração: 17 aulas.

Desenvolvimento:

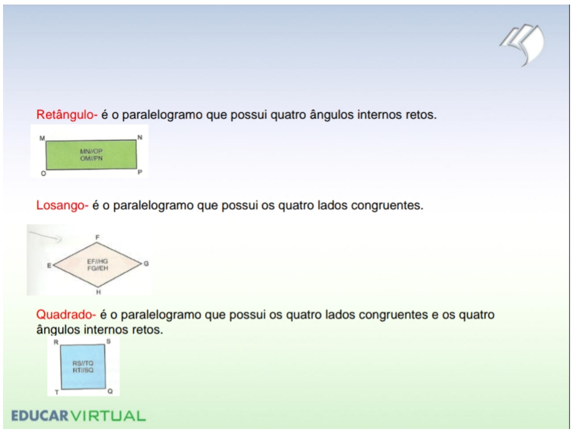
O objetivo princípal das aulas envolvendo os quadriláteros notáveis foi o aprendizado das propriedades de cada quadrilátero, pois os conhecimentos prévios da maioria dos alunos é que: se tem quatro lados então é um quadrado. Durante os 17 encontros foi possível mostrar as propriedades dos quadriláteros, observando quanto cada um difere do outro. No ensino de quadriláteros foi utilizado o datashow com as imagens contidas na Figura 4.19 retiradas de [11] e [12]



(a) Quadriláteros



(b) Trapézio



(c) Quadrado, Retângulo e Losango

(d) Organograma

Figura 4.19: Quadriláteros Notáveis

Tangram

Tema: Geometria plana

Objetivo: Que os alunos possam associar o que foi ensinado de Geometria Plana com o jogo.

Duração: 2 aulas.

Desenvolvimento:

O tangram é um jogo composto por 7 peças geométricas divididas em: cinco triângulos retângulos distribuidos de três tamanhos diferentes, um quadrado e um paralelogramo. Ele tem por objetivo criar figuras geometricas ou não a partir de suas peças.

O jogo tem um potencial incrível para gerar interesse dos alunos no aprendizado de geometria como diz [1].

> Quando se aplicou o Tangram, aqueles alunos desinteressados pela a disciplina participaram ativamente das atividades propostas, tornando a geometria mais interessante e satisfatória para as ambas as partes, pois as propiciar ao aluno um ambiente mais prazeroso, ele demonstra o seu conhecimento de imediato sem ter que recordar aquilo que aprendeu

Em sala de aula os alunos foram divididos em grupos de até 3 alunos e posteriormente um Tangran foi entregue para cada grupo. Cada grupo montou figuras geométricas na seguinte ordem: Quadrado, Retângulo, paralelogramo, trapézio e por último um triângulo. A Figura 4.20 monstra os alunos "brincando"e aprendendo com Trangram.

(a) Montagem do Losango

(b) Montagem do Paralelogramo

(c) Retângulo

(d) Quadrado

Figura 4.20: Montando o Tangram

Nesta atividade os alunos mostraram bastante interesse, pois eles relatavam que nunca haviam "brincado"de forma a aprender algum conteúdo de sala de aula. O interessante desta atividade é que para montar as figuras geométricas os alunos tiveram a necessidade de buscar a internet ou consultar o caderno para poder pesquisar a qual figura deveria ser montada.

Saída de Campo

Tema: Geometria plana

Objetivo: Visualizar as diversas formas geométricas presentes na Capital Federal. .

Duração: 4 aulas.

Desenvolvimento:

No dia 09 do mês de Junho de 2018 fizemos nossa saída de campo por Brásilia com o objetivo dos alunos poderem visualizar tudo o que foi aprendido em sala de aula, pois Brasília é uma cidade com geometria a céu aberto como diz [2]

> Admirar Brasília sob uma ótica geométrica plana, espacial e analítica. Para os moradores da cidade falar em "tesourinhas", Asa Sul, Asa Norte, Eixo Monumental, Setor de Embaixadas, etc; parece normal, porém essas noções de localizações estão intimamente ligadas a princípios geométricos fundamentais, os quais estão presentes em todos os níveis da cidade. Das construções mais simples às mais elaboradas, é possível presenciar a Matemática compondo o cenário, reforçando de maneira discreta a harmonia brasiliense.

Vejamos algumas fotos contidas nas Figuras 4.21 e 4.22 do que foi visualidado pelos alunos na saída de campo por Brasília.

(a) Lago Paranoá

(b) Oratório

(c) Ermida Dom Bosco

Figura 4.21: Ermida Dom Bosco

(a) Congresso Nacional

(b) Catedral

(c) Biblioteca Nacional

(d) Museu Nacional

Figura 4.22: Esplanada dos Ministérios

Nessa atividade os alunos puderam visualizar a Ermida Dom Bosco, localizada na QL 30 do Lago sul, onde temos um oratório no formado de uma secção cilíndrica e uma capela no formato de um tetraedro ou pirâmide de base triangular. Depois fomos sentido Esplanada dos Ministérios, onde pudemos visualizar várias formas geométricas presentes nos monumentos la existentes. Visualizamos de perto o Congresso Nacional, a Catedral Metropolitana de Nossa Senhora Aparecida (conhecida como Catedral de Brasília), o Museu Nacional Honestino Guimarães e a Biblioteca Nacional de Brasília. Os alunos ficaram encantados pois nunca tiveram este olhar geométrico para com a Arquitetura projetada em Brasília.

4.7.2 Reaplicação do Teste de Van-Hiele

Após a intervenção pedagógica, foi reaplicado o Teste de Van Hiele para saber se houve indícios de aprendizado após a sequência didática proposta. Vejamos na Tabela 4.2 com os dados do aumento de número de questões acertadas pelos alunos e estes dados graficamente na Figura 4.23.

Número de acertos nos pré e pós testes			
Questões	Teste	Reteste	Percentual de aumento
Questão 1	6	14	133%
Questão 2	6	32	433%
Questão 3	5	28	460%
Questão 4	8	8	0%
Questão 5	15	28	87%
Questão 6	0	8	133%
Questão 7	1	4	300%
Questão 8	0	32	532%

Tabela 4.2: Número de Acertos

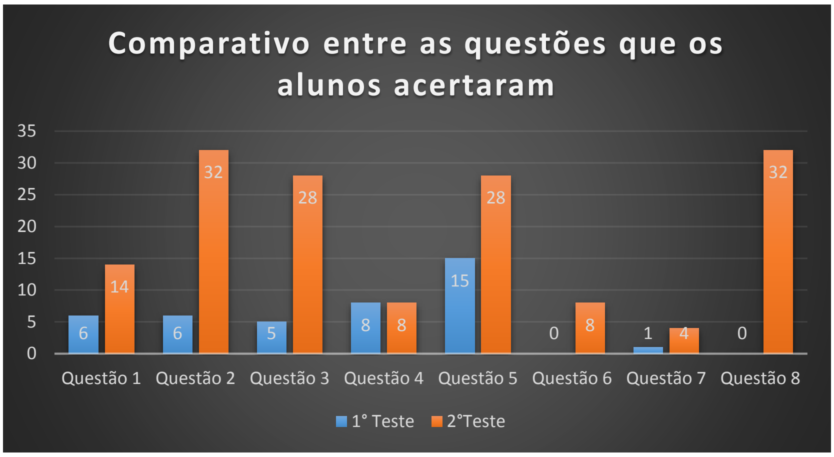


Figura 4.23: Números de Acertos no Pré Teste e Pós-Teste

Foi revelado no Teste de Van Hiele reaplicado que a partir da questão de número 8 não houve sucesso na aprendizagem com isso os dados não foram tabulados na Tabela 4.2 e na Figura 4.23 referente ao Gráfico. Acredita-se que a linguagem matemática dessas questões tenha atrapalhado os alunos na hora de resolverem.

De maneira geral, após a aplicação do reteste de Van Hiele foi possível perceber que o conhecimento dos alunos teve progresso e que quase 50% conseguiram atingir o nível básico do teste de Van Hiele, sendo assim, muitos alunos conseguiram melhorar seu vocabulário e conhecimento geométrico.

Capítulo 5

Considerações Finais

Após a realização deste trabalho verificou-se que o Ensino de Geometria Básica na Educação de Jovens e Adultos quando feita de maneira lúdica com a aplicação de jogos, recortes e saída de campo faz com que o aluno se interesse mais pela disciplina e consequentemente o aprendizado vem naturalmente, pois ele passa a visualizar a Geometria no seu dia a dia.

Acredita-se que está dissertação possa ser utilizada por professores com a finalidade de mudar sua prática docente, é preciso que nós professores possamos andar pela escola com materiais que antes era de uso da pedagogia como cartolina, tesoura, lápis de cor... com a finalidade de unir a teoria da Geometria clássica com a vivência dos alunos, assim os resultados aqui encontrados poderão servir de base para outros estudos.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, D. Cristina, Gaideski,Gislaine e Carvalho,J.M.T Junior ,*O USO DO TANGRAM PARA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA* , 2011,. Disponível em: http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2012/05/O-USO-DO-TANGRAM-PARA-APRENDIZAGEM-DE-GEOMETRIA-PLANA.pdf. Acesso em 08 abril 2018.

[2] Antonio, Marco,*Brasília: a cidade geométrica*, 2016,. Disponível em:https://marcozzero.wordpress.com/2015/04/25/brasilia-a-cidade-geometrica/

[3] Barbosa, J. L. M., *Gemetria Euclidiana Plana* , SBM, 11 edição (2012).

[4] BASSO, C. Maria,*Algumas reflexões sobre o ensino mediado por computadores*, 2000,. Disponível em: $< http : //coral.ufsm.br/lec/02_00/Cintia - L\&C4.htm >$. Acesso em 22 abril 2018

[5] Diretrizes Operacionais da Educação de Jovens e Adultos , Goverdo do Distrito Federal , Brasília (2014).

[6] Dolce, o. e Pompeo j.n, *Fundamentos da Matemática Elementar volume 9* , Atual, 8 edição (2005),

[7] Heiberg, Johan Ludvig (1908). Euclid (em inglês). 1. [S.l.]: Cambridge University Press

[8] https://www.slideshare.net/Vivimatematica/angulos-5725355, acesso em 05 de março 2018.

[9]

$http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/apostilas/flash/apostila9_flash/apostila$

, acesso em 20 de março de 2018

[10] http://www.aedmoodle.ufpa.br/mod/wiki/prettyview.php?pageid=221, acesso em 20 de março de 2018

[11] https://pt-static.z-dn.net/files/d1e/9bb10e1f1a865ebf30e490cf1ca6c588.jpg, acesso em 04 de abril de 2018

[12] https://www.google.com.br/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://educacaocoletiva.co
files/material/phprIKWNd5234.pdf&ved=2ahUKEwjRrsDAyd3cAhUCj5AKHenPBS0QFjA
cshid=1533735413353, acesso em 04 de abril de 2018

[13] Iezzi, G. e Dolce, O. e Machado, A., *Matemática e realidade* , Atual, 6 edição (2009).

[14] Lei de Diretrizes e Base da Educação *LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996.*, Diário Oficial da União , Brasília : Imprensa Oficial (2006).

[15] Marco A. M. e Paulo R. S. R, *Pesquisa em Ensino: Métodos Qualitativos e Quantitativos* , 2 edição (2016).

[16] Massucti, M e Mayrink, E.D, 2015, Disponível em https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1551/quando-e-preciso-rever-a-pratica-pedagogica, acesso em 10 de agosto de 2018.

[17] Ministério da Educação, *Parâmetros curriculares Nacionais*, 1998, disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf, acesso em 10 de agosto de 2018.

[18] NASSER, L. SANT'ANNA, N.F.P (COORDENADORAS),*Geometria segundo a teoria de Van Hiele*, Instituto de matemática – UFRJ. Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 1997.

[19] NETO, A.C.M., *Geometria coleção profmat* , sbm, 1 edição (2013),

[20] PLANO NACIONAL DE EDUCAÇÃO , *Projeto de Lei 8035/2010* , Diário Oficial da União , Brásilia : Imprensa Oficial (2010).

[21] *32% dos alunos do EJA deixam de frequentar as aulas antes do tempo*, disponivel em https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/cidades/2009/08/04/interna _ cidadesdf,131880/32-dos-alunos-do-eja-deixam-de-frequentar-as-aulas-antes-do-tempo.shtml, acesso em 10 de agosto de 2018.