



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



**DO ENSINO TRADICIONAL À INICIAÇÃO A ATIVIDADES  
DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: DESCONSTRUINDO  
VELHOS HÁBITOS**

Osmair Carlos dos Santos

Goiânia  
2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico:  Dissertação     Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Osmair Carlos dos Santos

Título do trabalho: Do Ensino Tradicional à Iniciação a Atividades de Investigação Matemática: desconstruindo velhos hábitos


3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 16/ 01/ 2019

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

Osmair Carlos dos Santos

**DO ENSINO TRADICIONAL À INICIAÇÃO A ATIVIDADES  
DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: DESCONSTRUINDO  
VELHOS HÁBITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisabeth Cristina de Faria

Goiânia  
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Carlos dos Santos, Osmair  
Do Ensino Tradicional à Iniciação a Atividades de Investigação Matemática [manuscrito] : DESCÔNSTRUINDO VELHOS HABITOS / Osmair Carlos dos Santos. - 2018.  
CVII, 107 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Elisabeth Cristina de Faria.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.  
Bibliografia. Anexos. Apêndice.  
Inclui lista de figuras.

1. Investigação Matemática. 2. Atividades Investigativas. 3. Metodologias de ensino de matemática. 4. Formação de professor. I. Cristina de Faria, Elisabeth, orient. II. Título.

CDU 51




**Universidade Federal de Goiás - UFG**  
**Instituto de Matemática e Estatística - IME**  
**Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional - PROFMAT/UFG**


Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP: 74.001-970 - Goiânia-GO.  
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 - [www.ime.ufg.br](http://www.ime.ufg.br)

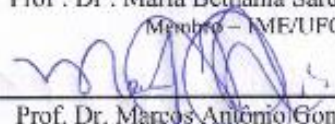


**PROFMAT**

**Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Osmair Carlos dos Santos** - Aos vinte e sete dias do mês de novembro do ano de dois mil e dezoito, às 16:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisabeth Cristina de Faria - Orientadora, Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos, Prof. Dr. Marcos Antônio Gonçalves Júnior, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada "**Do ensino tradicional à iniciação a atividades de investigação matemática: desconstruindo velhos hábitos**", em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Osmair Carlos dos Santos, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisabeth Cristina de Faria, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr<sup>a</sup>. Elisabeth Cristina de Faria  
Presidente - IME/UFG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr<sup>a</sup>. Maria Bethânia Sardeiro dos Santos  
Membro - IME/UFG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcos Antônio Gonçalves Júnior  
Membro - CPPAF/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e da orientadora.

Osmair Carlos dos Santos graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás (UEG) e em Física pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), especializou-se em Metodologia de Ensino de Matemática pelo Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSELVI) e em Direitos Humanos da Criança e do Adolescente pela UFG. É atualmente professor efetivo da Prefeitura Municipal de Alto Horizonte – GO.

*Dedico este trabalho aos meus amigos,  
familiares, colegas de turma e colegas de  
trabalho que, de forma especial e  
carinhosa, ofereceram apoio nos  
momentos de dificuldades.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por estar ao meu lado durante esta jornada me dando forças e discernimento para enfrentar os obstáculos.

A minha família pelo apoio e amor dedicados a mim.

A turma do PROFMAT 2016 pela união, incentivo e apoio nas horas alegres e tristes, em especial aos colegas Renato de Sousa e Silva e Ana Maria Soares que se tornaram irmãos e os levarei para sempre em meu coração.

Ao amigo Maykon Davi Flores Costas pelo incentivo e apoio a mim depositados, visto que, sem seu amparo, teria me perdido nos vários momentos de fraquezas e na vontade incessante de desistir.

Em especial, à professora Dr<sup>a</sup>. Elisabeth Cristina de Faria por me trazer a luz do processo educacional e pelo incessante auxílio e incentivo. Sei que estou apenas começando a trilhar esse caminho, mas estou feliz e vejo grandes perspectivas para o futuro.

Por fim, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização e concretização deste trabalho.



## RESUMO

O presente trabalho é o culminar de um projeto desenvolvido junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Campus UFG (GO). Teve como objetivo principal estudar quais mudanças precisamos realizar em nossas aulas rumo à investigação matemática. As aplicações em campo foram realizadas numa turma de 9º ano do ensino fundamental, ocorridas nos meses de maio, junho e agosto do ano de 2018. A pesquisa se fundamenta na ideia de que as atividades de cunho exploratório despertam a curiosidade do aluno e desenvolvem o raciocínio lógico, levando-o a estabelecer estratégias, formular seus próprios questionamentos, realizar testes, tornando-se autônomo de modo a construir sua própria aprendizagem. Para o desenvolvimento deste trabalho, optei pela pesquisa bibliográfica para entender mais sobre a investigação matemática, aliada à pesquisa de campo com os alunos do 9ª ano do Ensino Fundamental do Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes, no município de Alto Horizonte-GO, a fim de verificar “*in loco*” os impactos de se usar essa metodologia no processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, o trabalho com atividades investigativas, apesar de apresentar dificuldades em sua execução, constitui um fator que estimula o aprendizado e a capacidade de o educando desenvolver habilidades transversais inerentes para o amadurecimento da criticidade e habilidades imprescindíveis para o aprendizado de conteúdos de cunho matemático.

**Palavras chave:** Investigação Matemática. Atividades Investigativas. Metodologias de ensino de matemática. Formação de professor.

## ABSTRACT

The present work is the culmination of a project developed with the Professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT, Campus UFG (GO). Its main objective was to study what changes we need to make in our classes towards mathematical research. The field applications were carried out in a 9th grade elementary school class, held in May, June and August of the year 2018. The research is based on the idea that the exploratory activities arouse the curiosity of the student and develop the logical reasoning, leading him to establish strategies, formulate his own questions, perform tests, becoming autonomous in order to build his own learning. For the development of this work, I opted for bibliographical research to understand more about mathematical research, allied to field research with the 9th grade students of the Municipal School Divino Bernardo Gomes, in the municipality of Alto Horizonte-GO, in order to verifying "in loco" the impacts of using this methodology in the process of teaching and learning. Thus, the work with investigative activities, despite presenting difficulties in its execution, is a factor that stimulates learning and the ability of the learner to develop transversal skills inherent in the maturation of criticality and skills essential for learning mathematical content.

**Keywords:** Mathematical Research. Investigative Activities. Mathematics teaching methodologies. Teacher training.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Momentos na realização de uma investigação .....	24
Figura 2 - Dinâmicas de uma atividade investigação .....	25
Figura 3 - Tipos de tarefas .....	27
Figura 4 - Recorte 01 – Resolução de problemas – Grupo C.....	58
Figura 5 - Recorte 02 – Resolução de problemas – Grupo C.....	58
Figura 6 - Recorte 03 – Resolução de problemas – Grupo C.....	59
Figura 7 - Recorte 04 – Resolução de problemas – Grupo C.....	59
Figura 8 - Recorte 05 – Resolução de problemas – Grupo C.....	60
Figura 9 - Momentos da fase introdutória I – investigação matemática.....	63
Figura 10 - Momentos da fase introdutória II – investigação matemática.....	63
Figura 11 - Momentos da atividade 01 - grupo A – investigação matemática .....	64
Figura 12 - Momentos da atividade 01 - grupo B – investigação matemática .....	65
Figura 13 - Recorte 01 – investigação matemática – Grupo A .....	66
Figura 14 - Recorte 02 – investigação matemática – Grupo B.....	66
Figura 15 - Recorte 03 – investigação matemática – Grupo C.....	67
Figura 16 - Recorte 04 – investigação matemática – Grupo B.....	68
Figura 17 - Recorte 05 – investigação matemática – Grupo B.....	68
Figura 18 - Recorte 06 – investigação matemática – Grupo A.....	69
Figura 19 - Recorte 07 – investigação matemática – Grupo A.....	69
Figura 20 - Recorte 08 – investigação matemática – Grupo B.....	70
Figura 21 - Recorte 09 – investigação matemática – Grupo B.....	70
Figura 22 - Momentos da atividade 02 I – investigação matemática.....	72
Figura 23 - Momentos da atividade 02 II – investigação matemática.....	73
Figura 24 - Momentos da atividade 02 III – investigação matemática.....	73
Figura 25 - Recorte 10 – investigação matemática – Grupo A.....	74
Figura 26 - Recorte 11 – investigação matemática – Grupo B.....	74
Figura 27 - Recorte 12 – investigação matemática – Grupo C.....	75
Figura 28 - Recorte 13 – investigação matemática – Grupo A.....	75
Figura 29 - Momentos da atividade 03 – investigação matemática.....	77
Figura 30 - Recorte 14 – investigação matemática – Grupo A.....	77

Figura 31 - Recorte 15 – investigação matemática – Grupo A .....	78
Figura 32 - Recorte 16 – investigação matemática – Grupo C .....	78
Figura 33 - Recorte 17 – investigação matemática – Grupo A .....	78
Figura 34 – Recorte do sumário da Revista do I Congresso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías .....	83

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	14
1 CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA .....	18
1.1 Resolução de problemas.....	19
1.2 Investigação matemática.....	21
1.3 Tipos de atividades aplicadas em sala de aula .....	26
1.4 Etapas das atividades investigativas em sala de aula .....	28
1.5 O papel do professor em uma aula investigativa .....	32
1.6 Avaliação de atividades investigativas .....	35
2 METODOLOGIA .....	38
2.1 Público Alvo .....	38
2.2 Etapas da pesquisa.....	39
3 DESCRIÇÃO DO TRABALHO REALIZADO EM SALA DE AULA .....	41
3.1 Oficinas de Resolução de problemas.....	41
3.2 Oficinas de Investigação Matemática.....	61
3.3 Dificuldades ao se trabalhar com atividades investigativas. ....	79
3.4 Impressões e o que mudou nas aulas depois de se utilizar a metodologia investigativa .....	81
4 PRODUTOS.....	83
4.1 Resumo aceito para publicação .....	83
8.2 Produção técnica .....	84
8.2.1 Descrição do site sobre divulgação da metodologia investigativa.....	84
CONCLUSÃO .....	86
REFERÊNCIAS.....	89
ANEXOS .....	91
Anexo A – Carta de aceite para publicação do resumo .....	91
Anexo B – Resumo na Revista do I Congreso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías .....	92
Anexo C – Página inicial do site de divulgação de conteúdos de investigação matemática .....	93
Anexo D – Aceite do resumo submetido ao V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste. ....	94

Anexo E – Resumo submetido ao V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste .....	95
APÊNDICES .....	97
Apêndice A – Resolução de problemas – Atividade 01.....	97
Apêndice B – Resolução de problemas – Atividade 02.....	98
Apêndice C – Resolução de problemas – Atividade 03 .....	99
Apêndice D – Atividade Investigativa– Atividade 01 .....	101
Apêndice E – Atividade Investigativa– Atividade 02.....	103
Apêndice F – Atividade Investigativa– Atividade 03.....	105

## INTRODUÇÃO

Minha vocação para a docência surgiu durante a Educação Básica, em que adorava ensinar os colegas. Em decorrência desse gosto pelo ensinar, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás, Campus Porangatu, em 2009. Durante o curso, observei a valorização da técnica matemática em detrimento ao processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Iniciei à docência no mesmo ano em que comecei o curso de matemática, com vontade de melhorar o processo de ensino e poder contribuir para um aprendizado efetivo da disciplina, mas sem formação pedagógica e diante de grande desinteresse e dificuldade por parte dos educandos, a primeira experiência não foi positiva e seguir na carreira docente se tornou algo questionável.

Em 2012, depois de formado, retornei para o Ensino Médio e com mais maturidade, pude observar dificuldades em relação à realização de cálculos e interpretação que, muitas vezes, deixavam os alunos impossibilitados de resolver cálculos simples, fazendo com que a disciplina se enquadrasse na categoria de chata e/ou exaustiva.

Em consequência de uma formação matemática e decorrente das observações durante o exercício da docência, resolvi realizar uma especialização em educação no ano de 2013, pelo Centro Universitário Leonardo da Vinci. Como a especialização foi realizada na modalidade à distância e nunca havia realizado estudos nessa modalidade, o aprendizado não foi concretizado de forma efetiva e o método extremamente tradicional ainda estava arraigado à minha prática docente.

Com o passar dos anos fui notando que a prática conteudista centrada no professor e de cunho mecânico da disciplina, só fazia com que os alunos se mantivessem desestimulados e sem gerar aprendizado, ou seja, os alunos apenas passavam pelo processo sem exercer a criticidade e sem adquirir conhecimentos matemáticos. Em relação a essas observações, Pereira (2004, p.19), faz um recorte muito interessante:

Todas as crianças chegam à escola com muitas experiências matemáticas já realizadas ainda que de forma inocente. A curiosidade em aprender, conhecer e experimentar são sentimentos naturais que não devem ser frustrados ou inibidos com aulas “mortas” nas quais se aplicam fórmulas e se

treinam raciocínios e técnicas (sem grande utilidade, no entender dos mesmos).

Em resumo, minhas aulas se pautavam no tradicionalismo com exposição de conteúdos e fórmulas, onde o único objetivo para os educandos era copiar e realizar exercícios de fixação de forma a memorizá-los para posteriormente realizar uma avaliação escrita, ou seja, os envolvidos no processo confundiam aprendizagem com memorização de conteúdo.

Incomodado com a falta de interesse dos alunos pelas minhas aulas, tentei experimentar algo novo e consegui ingressar, em 2016, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, campus UFG, na cidade de Goiânia. Infelizmente, experimentei novamente a valorização da técnica em matemática ao invés dos processos educacionais.

Quando estava perdendo a esperança nos processos educacionais e valorizando matemática abstrata, conheci minha orientadora, que me ofereceu a oportunidade de ver luzes para o processo educacional e possibilitou-me acreditar que com mudanças na prática de ensino, a matemática pode fazer sentido para o educando.

Em debates nas orientações do trabalho de conclusão de curso e perante leituras, fiquei frente à metodologia de investigação matemática, algo que não conhecia, mas me despertou curiosidade e vontade de experimentar em sala de aula. Vi, nessa metodologia, uma oportunidade de mudar minha prática docente e melhorar o ensino dos meus alunos.

Ramos (2015) relata que, para que a mudança do tradicional para o investigativo ocorra, é necessário que o professor invista em um ambiente interativo, com situações desafiadoras que levem o aluno a desenvolver sua curiosidade, criatividade, espírito investigativo, estabelecendo relações entre seus conhecimentos prévios e a nova situação. Nesse sentido, realça a importância de o professor estar preparado e disposto a trabalhar com metodologias e recursos que instiguem o surgimento dessas competências e habilidades.

A partir do pressuposto anterior, surgiu a ideia de se trabalhar com a heurística de resolução de problemas para posteriormente usar a investigação matemática, uma vez que, tanto o professor quanto os alunos estavam imersos em um processo extremamente tradicional e uma mudança drástica de cenário poderia gerar dificuldades e impasses ao executar a abordagem investigativa.



Complementando a abordagem anterior, pode-se afirmar que, ao planejar as atividades, optei em criar um momento de preparar o ambiente tanto para os educandos quanto para o pesquisador, dessa forma, foi estabelecido que se faria uma fase de resoluções de problemas, para posteriormente iniciar as atividades investigativas. Tive anseios de como me comportar perante uma aula investigativa e também possuía a angústia de que o passar do tradicional para o investigativo poderia gerar fracassos em aplicar tal abordagem.

Durante o processo surgiram questionamentos que nortearam a pesquisa: De que forma a investigação matemática pode contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática? Quais serão os impactos ao se trabalhar com essa metodologia em sala de aula? Até que ponto os alunos se envolverão na aplicação dessa metodologia?

Com o intuito de investigar as abordagens relatadas e com suporte de Ponte, Brocardo e Oliveira. (2016), Magalhães e Varizo (2016) e outros autores, surgiu a questão motora do trabalho: Como lidar com a investigação matemática e promover mudanças para um ambiente problematizador e investigativo em sala de aula?

Como objetivo principal, o trabalho centrou em estudar quais mudanças precisamos realizar em nossas aulas rumo à investigação matemática, com o intuito de aprimorar conhecimento através do contato direto com a metodologia.

Para atingir o objetivo geral, a pesquisa foi desdobrada nos seguintes procedimentos metodológicos:

- Analisar a metodologia da investigação matemática e da resolução de problemas;
- Organizar atividades que permitam trabalhar com investigação e resolução de problemas;
- Fazer aplicações de resolução de problemas e de investigação nas aulas de matemática em um 9º ano no Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes em Alto Horizonte;
- Observar os impactos e o envolvimento dos alunos ao se trabalhar com a abordagem supracitada.

Desse modo, a temática abordada neste trabalho de conclusão de curso, foi estruturada em quatro tópicos para melhor entendimento do assunto em questão.

O primeiro tópico ficou reservado a um estudo sobre a investigação matemática e a resolução de problemas. Como foco esteve no processo investigativo, no qual foram apresentados: o conceito de investigação matemática, os tipos de

atividades investigativas, as etapas que permeiam a metodologia da investigação, a postura do professor frente à tal metodologia e como avaliar uma aula investigativa.

No segundo tópico foi realizada uma discussão da metodologia adotada, a caracterização do público alvo da pesquisa e, para finalizar, foi relatado como foi realizada cada uma das etapas da pesquisa.

Já no terceiro tópico foram expostas explicações detalhadas sobre as aplicações das metodologias de resolução de problemas e de investigação matemática, *in loco*, obtidas através de áudios, relatórios dos alunos, diário de campo e comentários informais.

No quarto tópico foram apresentados alguns produtos gerados pela pesquisa, bem como futuros produtos que têm potencial de serem concretizados em um breve espaço de tempo.

As considerações finais trouxeram observações sobre a investigação matemática aplicada em sala de aula, salientando benefícios para o professor e os alunos, bem como as limitações encontradas ao aplicar tal metodologia e futuras perspectivas do docente.

## 1 CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino da matemática atual está embasado na metodologia mecânica de memorização, na qual o processo é centrado no professor, e isso colabora para que os educandos não desenvolvam autonomia, interação e colaboração, além de fazer surgir o sentimento que a matemática é centrada em apenas duas respostas plausíveis, certo ou errado. Nessa perspectiva Borasi (1991, *apud* Ponte e Segurado, 1998, p. 02), aborda que:

O ensino a que os alunos habitualmente são sujeitos assenta quase exclusivamente na memorização e na resolução repetitiva de exercícios, o que os leva a adquirir uma visão dualista da Matemática, em termos de certo-ou-errado.

Magalhães e Varizo (2016) relatam que no ensino atual não cabe mais uma abordagem canônica da matemática, onde os conteúdos ensinados não fazem sentido para o educando, assim como também não é aceitável que se deixe de lado o processo do fazer matemática.

As mesmas autoras retratam que o processo de mudança no ambiente escolar está centrado no professor, assim, para cogitar transformações no seio escolar tem que se oferecer oportunidades para este profissional refletir sobre novas perspectivas de ensinar matemática.

O professor tem que reavaliar constantemente seus métodos de ensino, porque o ensino e a aprendizagem, não necessariamente, serão efetivados quando os mesmos utilizam de novos recursos, mas com abordagem metodológica tradicionalista. Ponte e Segurado (1998, p. 04) alertam que:

[...] existem muitas acepções do que é ensinar e do que é ser professor. Para muitos, será sobretudo o “debitar” da matéria, em frente do quadro ou, de modo mais sofisticado, com retroprojector ou Powerpoint. Nesta perspectiva, ensinar e aprender são independentes – o professor pode ensinar sem que os alunos aprendam.

Polya (1978), deixa claro que um dos mais importantes papéis do educador é o de auxiliar os seus alunos, mas não é uma atividade fácil, dado que exige tempo, dedicação, prática e princípios firmes.

O autor também relata que o professor tem que ajudar o educando com maturidade, colocando-se no lugar do aluno e dando-lhe certa ilusão sobre a autonomia do trabalho independente, portanto:

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer processo. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deverá auxiliar, nem demais e nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho (PÓLYA, 1978, p. 16).

Com as palavras de Varizo e Magalhães (2016, p.17) de que os alunos só compreendem a matemática como ciência quando “faz-se necessário que eles vivenciem situações de aprendizagem nas quais a estrutura do pensamento matemático esteja presente”, surge a ideia de se trabalhar com a matemática na perspectiva da resolução de problemas, para, posteriormente, inserir o educando em aulas investigativas, instigando-os a chegarem em fórmulas geométricas, utilizando a investigação matemática em atividades pedagógicas.

Dessa forma, se faz necessário compreender as perspectivas da resolução de problemas e da investigação matemática, para posteriormente utilizá-las no ambiente da pesquisa campo.

## **1.1 Resolução de problemas**

O trabalho com resolução de problemas é primordial para ser inserido nas salas de aula, porque possibilita que os alunos sejam instigados sobre situações que não conhecem, que são intrigantes, significativas. Permitem também que o educando levante hipóteses e elabore estratégias de resolução e, para isso, usará de seus conhecimentos prévios e suas experiências cotidianas, aliados ao conhecimento científico.

De posse dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática se infere que:

[...] a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva da resolução de problemas – ainda bastante desconhecida da grande maioria – quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de

problemas cuja resolução depende basicamente de escolha técnica ou formas de resolução memorizadas pelos alunos. (BRASIL, 1997, p. 22).

Na abordagem de resolução de problemas, o foco deve ser dado aos procedimentos utilizados pelo aluno, tendo em vista a construção de conceitos matemáticos e não apenas o resultado final.

Muitos autores trazem etapas para a resolução de problemas. Nesta abordagem, um matemático que se destaca é George Pólya (1978), que descreveu quatro etapas de resolução de um problema: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia e revisão da solução.

O pontapé inicial da estratégia é compreender o problema. Para isso, as perguntas são importantes: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? Tem como satisfazer as condições? Os dados e as condições observadas são suficientes para determinar a solução do problema? Existem condições redundantes e contraditórias?

Realizadas as interrogações iniciais se passa para a possibilidade de tentar encontrar conexões entre os dados e a incógnita. Nessa fase, é importante que os alunos considerem problemas auxiliares ou particulares, caso uma conexão não seja estabelecida em um tempo razoável. Também nessa fase é importante que haja perguntas como: Você já se deparou com algum problema parecido? Conhece Teoremas ou fórmulas que possam ajudar? Já observou algum problema semelhante?

Estabelecida uma conexão entre dados e incógnitas, se inicia o processo mais árduo da estratégia de resolução de problemas. Durante a execução da resolução do problema pode-se observar a má elaboração da estratégia ou a elaboração inadequada, sendo que os alunos e professor terão que ter a maturidade de voltar a etapa anterior.

Por fim, a solução obtida deve ser verificada, ou seja, os argumentos usados devem ser testados para comprovar/validar a solução. Para Pólya (1978), a revisão da solução é a etapa mais importante, porque ela permite a verificação da argumentação e a busca da essência do problema e do método empregado.

Tendo compreendido um pouco sobre a resolução de problemas, em sequência, se inicia a discussão sobre a investigação matemática, que é o foco do presente trabalho.

## 1.2 Investigação matemática

Pensando em tendências em educação matemática, pode-se questionar: O que é investigação? Como a mesma pode auxiliar no ensino de matemática?

A palavra investigar tem as raízes no sentido de seguir vestígios, indagar, pesquisar, examinar com atenção, ou seja, são ações que proporcionam o despertar para o conhecimento. Para Ramos (2015, p. 24) “investigar é como viajar sabendo o ponto de partida, mas jamais sabendo qual o possível ponto de chegada”.

Pensando na educação matemática, a palavra investigar tem conceitos que remetem ao coletivo, como o nível de envolvimento entre o professor e o aluno, onde o professor deixa de ser a figura central do processo, o conteúdo propriamente deixa de ser relevante e o enfoque passa a ser a aprendizagem. O docente é instigado a mobilizar e valorizar a criatividade tendo uma participação ativa dos alunos, de maneira a torná-los a peça fundamental do processo de ensino e aprendizagem.

Com a inserção da investigação no ensino de matemática, o mesmo fica cheio de perguntas e inquietações que levam os alunos a perceberem o segredo que norteiam a construção do conhecimento matemático. Assim, ao se trabalhar com investigação o aluno “(...) não recebe o conhecimento pronto, ou seja, vai sendo o autor do processo. Assim, sente-se recompensado, pois percebe sua capacidade de produzir conhecimento” (MAGALHÃES, ROCHA E VARIZO, 2016, p.04).

Dessa forma, o envolvimento dos alunos em atividades investigativas faz com que os mesmos se sintam como integrantes do processo de ensino e como autores de suas descobertas. Seguindo essa linha de pensamento de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.23) tem-se que:

Na disciplina de matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu desenvolvimento na aprendizagem.

Varizo (2007, s/p) aponta que a investigação matemática é uma metodologia que:

Tem por objetivo oferecer oportunidade para os alunos vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e assim motivá-los a

estudarem matemática, por meio do desafio de descobrir relações matemáticas apresentadas em situações matemáticas específicas. Busca-se dessa forma levar o aluno a ter uma visão do que é fazer matemática, bem como sentir o prazer no fazer matemático.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.02) justificam que a investigação matemática é de “importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos”, tal interpretação vem ao encontro das palavras de Magalhães, Rocha e Varizo (2016, p.01) quando falam que a importância de investigar em matemática se justifica em que:

[...] não é admissível que deixemos de oferecer aos nossos alunos uma percepção do fazer matemática. Em outras palavras, que eles tenham uma experiência do que seja essa ciência. Agir dessa forma seria negar a própria essência da matemática, bem como o seu papel no desenvolvimento do conhecimento científico.

As autoras reforçam o pensamento quando relatam que a:

[...] utilização de atividades investigativas complementa o rol de habilidades dos alunos num momento em que tem prevalecido a tendência de uma concepção instrumental da matemática, qual seja, um conhecimento fortemente relacionado às necessidades da vida cotidiana em contraposição ao ensino formal (MAGALHÃES, ROCHA E VARIZO, 2016, p.02).

Dessa forma, a investigação matemática não pode ser negligenciada e deve ser inserida em sala de aula, visto que de acordo com Ponte e Segurado (1998, p.01), não existe “[...] uma separação incontornável entre investigar e aprender”.

O caminho trilhado até o presente momento destaca que o ensino da matemática não se norteia em apenas reproduzir conceitos matemáticos, ou seja, ele também deve auxiliar na capacidade que os educandos têm em desenvolver habilidades de questionamentos e argumentação, que fazem com que os mesmos tenham a emoção da descoberta e possam inferir conclusões. Para tal argumentação Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p,23) instigam que:

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir, como um matemático, não só na formulação de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor.

Entende-se que o objetivo de se trabalhar a investigação matemática em sala de aula é permitir que os alunos experimentem a possibilidade de investigar e descobrir. Logo, os mesmos são colocados em frente a situações que geram um

momento de aprendizado enriquecedor que fazem com que eles se sintam provocados e instigados a pensar.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 02), abordam que a atividade “investigativa é essencialmente caracterizada por começar com objetivos pouco precisos, que vão sendo progressivamente estruturados” e tal concepção vem ao encontro ao pensamento de Magalhães, Rocha e Varizo (2016, p.03) quando dizem que “atividades realizadas no processo de investigação, podemos fazer várias descobertas não pré-determinadas”.

De modo geral, as atividades investigativas têm o caráter de problemas abertos e desafiadores em que o aluno exerce suas habilidades de resolução com autonomia, inferindo hipóteses e fazendo conjecturas.

Para se trabalhar com investigação no ambiente escolar, o professor tem que ter a ideia que é uma abordagem de caráter aberto, onde uma vez definida a ideia central, a efetivação do objetivo requer muito trabalho, e “tem um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia de trabalho, na superação das dificuldades, na organização do material recolhido, em tirar conclusões” (Ponte e Segurado, 1998, p.06)

Ramos (2015) relata que o professor no processo investigativo deixa de ser o detentor do saber, onde a quantidade de conteúdos dá lugar ao aprendizado efetivo, onde mobiliza e valoriza a criatividade dos alunos, de maneira a torná-los construtor do seu próprio conhecimento. Ponte e Segurado (1998, p.11) sintetizam a ideia anterior quando relatam que na investigação matemática o educador oferece ao educando a “responsabilidade de descobrir e de justificar as suas descobertas”

Ao preparar as atividades de investigação matemática o educador tem que se organizar cuidadosamente para oferecer aos educandos uma forma de se “trabalhar produtivamente sem ser necessário dizer-lhes como e o quê devem fazer” (MAGALHÃES, ROCHA E VARIZO, 2016, p.03), estimulando-os a pensar matematicamente, desafiando-os, apoiando-os e orientando-os na busca de informações, de forma a promover a reflexão e a verificação da validade das hipóteses.

Com o desenvolvimento de atividades investigativas o professor tem que observar atentamente os caminhos traçados pelos alunos. É fácil em atividades investigativas planejar o início dos passos, mas o caminho percorrido durante a execução é imprevisível. Então, apesar da liberdade oferecida ao educando pelas



atividades investigativas o professor tem que saber exercer o seu papel, fazendo articulações e incitações que auxiliam os alunos a chegarem às suas próprias conclusões.

A investigação matemática é uma importante ferramenta no processo educacional, mas para aplicá-la os envolvidos têm que ter disciplina e trabalho árduo. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que para a realização de uma investigação é preciso cumprir quatro etapas descritas na Figura 1. A primeira consiste em reconhecer uma situação problema, fazer uma exploração inicial e formular questões, em seguida há a formulação de conjecturas, na terceira faz-se testes e o refinamento das conjecturas e para finalizar são realizadas as demonstrações e a avaliação do trabalho realizado.

Momento	Atividades envolvidas
Exploração e formulação de questões	- reconhecer uma situação problemática - explorar a situação problemática - formular questões
Conjecturas	- organizar dados - formular conjecturas
Testes e reformulação	- realizar testes - refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	- justificar uma conjectura - avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Figura 1 - Momentos na realização de uma investigação  
Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira 2016, p. 21.

Para complementar a ideia anterior de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), Magalhães e Varizo (2016) fazem uma abordagem educacional das atividades investigativas, na qual o processo investigativo em sala de aula consiste na observação de uma situação em que irão surgir conjecturas que posteriormente serão testadas. Com os testes das conjecturas, estas poderão ser validadas ou refutadas, em caso de serem refutadas, surgirão novas conjecturas. Se validada por demonstração, adquirir o status de uma propriedade aprovado pelo método matemático. Tal ideia, está exposta no fluxograma a seguir:



Figura 2 - Dinâmicas de uma atividade investigativa  
 Fonte: Magalhães e Varizo., 2016, p. 22.

O trabalho com investigação matemática no seio escolar é rico, mas pode encontrar algumas dificuldades em sua aplicação como: “[...] concepções e atitudes, bem como de fatores associados ao contexto escolar e ao sistema educativo” (Ponte e Segurado, 1998, p. 04).

Ainda em relação ao assunto do parágrafo anterior, Ponte e Segurado (1998, p 05), falam que:

[...] a realização de trabalho investigativo na sala de aula tem grandes potencialidades, mas também envolve os seus problemas. Evidencia-se a necessidade de perceber a origem das dificuldades conceptuais que os alunos podem ter na compreensão destas tarefas e nas estratégias a usar na sua realização. Verifica-se, também, que se os alunos não identificam este tipo de trabalho como relevante para a sua aprendizagem, podem assumir uma atitude de rejeição. Estes aspectos podem estar associados a concepções que desvalorizam a importância deste tipo de trabalho, sugerindo a pertinência de um olhar mais atento sobre esta questão.

Magalhães e Varizo (2016) relatam que há o risco de o trabalho com investigação matemática ter como resultado a simples aplicação de procedimentos rotineiros, as autoras citam como exemplo, fazer tabelas. Para complementar o assunto, Ponte e Segurado (1998, p.35) salientam que “o trabalho investigativo depende tanto das tarefas propostas, quanto do modo como o professor orienta a sua resolução da cultura da sala de aula e do contexto escolar”.

Então, é possível sintetizar até o presente momento, que a investigação matemática, é inerente para ser aplicada em sala de aula, em razão de permitir que o educando seja o ser ativo do processo de ensino e aprendizado, além de ter a satisfação e o prazer da descoberta, mas o professor tem que estar atento para organizar as atividades de forma a propiciar o processo investigativo e superar as dificuldades encontradas ao aplicar tal metodologia.

De modo geral, nem todas as atividades pensadas no cunho investigativo serão efetivamente investigativas, ou seja, é fácil que aplicações de atividades que tenham o objetivo de serem investigativas caiam em meras resoluções de problemas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.24), alertam que o grande desafio do educador é articular os diferentes tipos de atividades no âmbito escolar de modo a construir um currículo interessante e equilibrado. Assim se torna relevante estudar as estruturas das atividades aplicadas em sala de aula, e isso será feito no próximo tópico

### **1.3 Tipos de atividades aplicadas em sala de aula**

No ensino de matemática existem tarefas características, a mais comum utilizada nas aulas é o exercício, mas também existem tarefas como resolução de problemas, atividades de modelagem e atividades investigativas. A diferenciação entre elas vai do ponto de vista da pessoa, pois a mesma atividade, para um, pode ser exercícios, e para outro, pode ser um problema e etc (Ponte, 2003).

Ponte (2003) relata que toda atividade compreende quatro estruturas básicas: o grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu referencial teórico e o tempo requerido para a sua execução. O autor ainda afirma que se interceptar as duas primeiras dimensões serão obtidos 4 tipos de tarefas que estão representados na Figura 3.

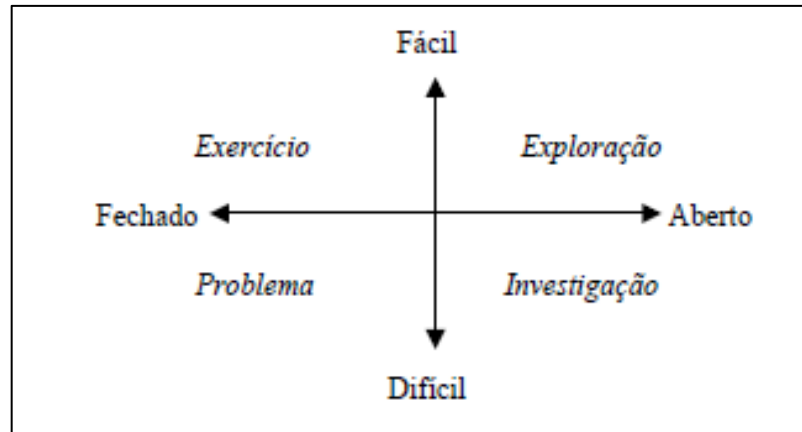


Figura 3 - Tipos de tarefas  
 Fonte: Ponte, 2003, p. 05.

Na figura acima o segundo quadrante fica reservado aos exercícios que são tarefas fáceis de caráter fechado, no terceiro se tem os problemas, que são tarefas fechadas, mas com grau de dificuldade elevado, o quarto quadrante fica reservado à investigação que é uma atividade aberta e com grau de dificuldade elevado e finaliza no primeiro quadrante com a exploração que consiste em ser fácil e com estrutura aberta.

Ponte (2003) ainda aborda que não há uma distinção fiel entre investigação e exploração, dessa forma, o professor não tem como saber o grau de dificuldade que um certo grupo de alunos terá com uma atividade aberta. Em geral, se o grau de dificuldade for atribuído, será interessante o professor ter a classificação das atividades abertas em difíceis e fáceis.

Em posse de uma tentativa de diferenciação entre as atividades, será feita uma discussão sobre o tempo de execução das atividades investigativas. Em relação a esse quesito, o professor pode estipular um tempo para a realização de atividades investigativas, mas deve ter em mente que certas investigações levam mais tempo que outras e talvez seja necessário oferecer mais tempo aos educandos para realizarem mais questionamentos de modo que possam efetivar a aprendizagem.

Ponte (2003) relata que uma atividade investigativa tem:

“[...] um caráter aberto – uma vez definida a ideia central, a concretização do objetivo ainda requer muito trabalho – e têm um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia de trabalho, na superação de dificuldades, na organização do material recolhido, em tirar conclusões e etc”.

Admitindo o pressuposto que tarefas investigativas sejam atividades que os alunos devem experimentar durante sua jornada escolar, surgem questionamentos

como: De que maneira deve ser organizado o trabalho com investigação? Quais são as etapas? Qual deve ser a postura do professor? O que esperar em relação ao desempenho dos alunos? Quais as metodologias de avaliações devem ser aplicadas?

Para tentar oferecer percepções de tais questionamentos serão abertos os tópicos que discorreram sobre: atividades investigativas em sala de aula, o papel do docente perante essas atividades e como o mesmo poderá avaliar de forma consistente o trabalho com investigação.

#### **1.4 Etapas das atividades investigativas em sala de aula**

Em uma aula investigativa o professor pode fazer um esboço do desenvolvimento das atividades, mas existe um gama de caminhos que os alunos podem trilhar e várias emoções envolvidas no processo, e saber lidar com essas adversidades se faz necessário, visto que, o docente tem que estar preparado para lidar com as possibilidades que uma investigação pode seguir, permitindo que os educandos se sintam motivados.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que:

Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação.

Em suma, o professor tem que dar autonomia para os alunos e exercer o papel de regulador das atividades, mas o docente continua tendo um papel fundamental no que tange ao quesito de ajudar o aluno a compreender o significado de investigar, bem como ensiná-lo a fazer esse tipo de atividade.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) dividem uma aula investigativa em três momentos: o primeiro consiste em dar um arranque na atividade, ou fazer uma introdução da tarefa, nessa fase o docente apresenta a proposta a ser trabalhada com a turma de forma oral ou por escrito, a segunda fase permeia o desenvolvimento do trabalho, onde os alunos se organizarão individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, para realizarem as atividades investigativas e, para

finalizar tem-se a discussão do trabalho, fase em que os alunos discutem ou relatam com os colegas o trabalho realizado.

O início de uma aula investigativa é muito relevante, nela o docente dará o ponto de partida para a investigação, conduzindo uma argumentação inicial, ou seja, disponibiliza para os educandos uma problematização por escrito. Ponte, Brocardo e Oliveira. (2016) enfatizam que uma atividade por escrito é vantajosa, mas o professor não pode dispensar uma pequena introdução oral da atividade.

Os mesmos autores salientam a importância de tal introdução inicial quando relatam que:

O professor tem que garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade. O cuidado posto nesses momentos iniciais tem especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA., 2016, p. 26).

O docente vai ter um trabalho árduo ao planejar a introdução inicial das atividades investigativas, pois, ele deve refletir que os alunos estão perante uma questão aberta, não bem delimitada, e diante disso devem oferecer uma resposta, sendo ele próprio que terá que formular questões com base na argumentação apresentada. “A fase de arranque é fundamental para que o aluno entenda qual é a atitude que o professor espera dele nessas aulas” (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA., 2016, p. 28).

Na introdução inicial o professor tem que ter em mente que um dos objetivos das atividades investigativas é a interpretação da tarefa, e isso deve ser feito de forma autônoma ou de forma coletiva, então o mesmo, em sua fala inicial, não pode oferecer muitas dicas do que “é para fazer” nas atividades, pois isso pode condicionar a exploração a ser executada pelos educandos. Então, tal proposta tem que ser através de pistas a serem investigadas ou sugestões que levem o aluno a criar suas próprias conjecturas.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) afirmam que o aluno tem que saber que o professor estará lá para apoiá-lo, mas que a execução da atividade depende de sua própria iniciativa. Os autores também argumentam que nessa fase o professor deve deixar claro para os educandos o que espera da atividade em termos de produto final.

A fase de introdução deve ser breve para não desestimular o interesse dos alunos pela execução da atividade, em contrapartida, o tempo da aula tem que ser

aproveitado de maneira propícia para a execução das atividades de investigação (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA., 2016).

Nesse momento é possível levantar questionamentos e enfatizar alguns pontos - chave para levar os alunos a pensarem sobre o assunto da investigação. Assegurado, no instante inicial, o entendimento acerca da atividade a ser executada na sala de aula, o professor pode ficar na retaguarda. E os próximos passos a serem seguidos na aula de investigação dizem respeito ao desenvolvimento das atividades, onde serão estimulados alguns processos, como a exploração e a formulação de questões, o teste e a reformulação de conjecturas, a justificativa de conjecturas e a avaliação do trabalho (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016).

A exploração e a formulação de questões são as etapas em que os alunos deverão gastar uma maior quantidade de tempo, porque é nesse momento que eles terão que se familiarizar com os dados fornecidos e se apropriar do sentido da tarefa. Para execução dessa fase é primordial o trabalho em grupo, pois apesar de ter o impasse sobre autogestão, essa maneira de trabalho leva a uma gama de alternativas de ideias de explorações.

Ponte, Brocardo e Oliveira. (2016) relatam que na exploração de uma atividade investigativa os alunos deverão ser levados a gerar dados e organizá-los para depois iniciar a formulação de questões. As conjecturas surgem durante a manipulação de dados, e uma vez surgidas, essas levam ao dever de fazer testes que podem necessitar da análise de mais dados.

Após a exploração e formulação de questões inicia-se o processo de formular e testar conjecturas. Nessa fase, o aluno terá que formular hipóteses e isso pode ocorrer por observação e/ou manipulação dos dados ou por analogia com outras presunções aprendidas anteriormente.

Para concretização de tal etapa, é de suma importância que o aluno tenha por escrito os passos da aula investigativa. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 33) relatam que “é somente quando se dispõe a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações”.

O registro por escrito mencionado no parágrafo anterior, pode constituir um desafio adicional para as aulas de investigação, dado que, o mesmo pode exigir um nível de representação escrita que os alunos ainda não estejam acostumados. Mas apesar de tal dificuldade os alunos têm que estar estimulados em relação à escrita,

pois através dela, eles irão recordar resultados, explanar conjecturas e estabelecer consensos com os outros colegas em relação a um entendimento comum.

Após a formulação de conjecturas, inicia a fase de teste de conjecturas, onde o professor tem que estar atento, já que existe uma tendência dos educandos de aceitarem conjecturas, após ter validado um certo número de casos, então o educador tem que estimular os alunos a tentarem achar contraexemplos para aceitar ou refutar as hipóteses previamente levantadas.

Contudo, os educandos devem ser orientados que os testes, por si só, não conferem o estado de conclusão para o trabalho com investigação. Então far-se-á necessário a justificação das conjecturas.

O próximo passo a ser seguido é a tentativa de justificar as conjecturas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 37) falam que o professor pode estimular a justificativa naturalmente em sala de aula, quando se aproxima de um grupo e faz os seguintes questionamentos “Então o que é que já concluíram? Ou quais são as suas conclusões?”. Utilizando esse método, os alunos, sem perceber, transformam as suas conjecturas em conclusões, sem ter um processo formal de justificação.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) alertam que a justificativa é uma das vertentes do trabalho investigativo que geralmente é deixada em segundo plano ou esquecida pelos educadores, mas tal atividade é de importância para que o trabalho com essa metodologia não saia empobrecido.

Para a justificação através de demonstração, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 38), relatam que deve ser feita de maneira gradual ao longo do percurso acadêmico do aluno, quando aborda que a mesma:

[...] pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificativa aceitável, que se baseie em um raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fáceis

Encerrada a justificativa de cada grupo em relação às conjecturas, se inicia a fase de socialização. Através dela os alunos são convidados e motivados a fazer um balanço da atividade investigativa e partilhar com os seus demais colegas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) retratam que através da socialização se realiza um conforto de estratégias, ideias, conjecturas e justificações. O professor tem o papel de



moderador ou de articulador desse momento. Os autores também deixam claro que sem a fase de discussão final o trabalho com investigação pode perder o real sentido.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que é comum o professor ter o anseio de como deverá articular a aula de maneira a usar as potencialidades do trabalho investigativo, tornando as discussões produtivas. Também é inerente se pensar que os educandos não têm o hábito de se articularem e argumentarem com seus pares. Mas os envolvidos têm que colocar os receios de lado e pensar que o trabalho investigativo se desenvolve de maneira espontânea, em relação aos resultados das interações geradas.

Após a análise das fases que permeiam uma aula investigativa, se nota que o professor assume um papel determinante nessa metodologia de ensino, pois a interação que ele deve exercer nesse tipo de atividade é diferente das abordagens utilizadas em outros tipos de aula. Dada essa importância, o trabalho seguirá como uma abordagem acerca do trabalho do docente em frente a uma aula de cunho investigativo.

### **1.5 O papel do professor em uma aula investigativa**

Ramos (2015) relata que em frente a novas abordagens de ensino, o papel do professor em sala de aula ganha novas dimensões, em frente a metodologia de investigação, o docente é convidado a deixar o papel de transmissor do conhecimento, fortemente arraigado na concepção da sociedade, e passa a ser um mediador, facilitador, estimulador do processo de ensino e aprendizagem. Sobre a temática Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 43) evidenciam que "é hoje consensualmente reconhecido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Ele tem de ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objetivos curriculares."

O professor em uma abordagem de investigação, deve oferecer chances para que o aluno trabalhe sua autonomia, sem comprometer a autoria da investigação, de modo a interagir com eles, tendo em conta a particularidade de cada educando e de forma a comprometer com o objetivo da proposta.

Em posse desses deveres, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), expõem que o professor nesse tipo de atividade tem que exercer os papéis de: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.

Quando se fala em desafiar os alunos, o professor tem que pensar em todas as esferas do processo de investigação, já que, o mesmo deve criar um ambiente propício para o florescer da investigação. Para isso, tem que ter atenção e cuidado em escolher as tarefas, ou seja, o docente tem que estar atento ao selecionar as questões e/ou as situações iniciais, de modo que as mesmas se constituam um desafio autêntico para os alunos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que os alunos em uma aula de matemática estão habituados a responder questões colocadas pelo professor, e em um primeiro instante, esse hábito pode gerar mais respostas afirmativas do que interrogações em prol de uma investigação. Perante a esse impasse, o docente tem que entrar em cena e desafiá-los a interrogar matematicamente as situações propostas na tentativa de formulação de questões pertinentes ao andamento do trabalho investigativo.

Tendo em mente o papel de desafiador, o docente tem que fazer alguns questionamentos, tais como: Será que os alunos estão se apropriando do conceito de investigação ou estão meramente executando atividades convencionais para uma aula de matemática? Com tais interrogações o professor adquire o papel de avaliador do processo de investigação.

Nesse momento, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) afirmam que deve ser feita uma reflexão com o intuito de tentar compreender o pensamento dos educandos, inferindo perguntas, pedindo explicações, e evitar um juízo apressado do seu trabalho. Então fica evidente a dificuldade de compreender a qual ponto o aluno quer chegar, nesse tipo de interação, o professor tem um desafio, pois o mesmo não tem o controle de todo o processo em suas mãos.

Mas como inferir valor ao processo de investigação? Como as atividades investigativas são de caráter aberto, o professor tem que usar a estratégia de interação mais adequada para cada ocasião. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 49) deixam claro que as opções do docente vão de “[...] um simples averiguar se tudo está bem conduzido, dando sinal de que podem prosseguir sem problemas, até a um apoio direto que interfere positivamente no trabalho dos alunos”.

Em posse das averiguações, Ramos (2015) relata que o educador pode inferir algumas ações, como: a readequação de determinadas ações de forma a desenrolar as atividades na aula, conceder um tempo extra para realizar as investigações, fazer discussões intermediárias com a turma e etc.

Outro papel de suma importância é o raciocínio matemático junto com os alunos, porque em atividades de cunho investigativo, o professor deve preparar as atividades com o pensamento do raciocínio matemático genuíno, uma vez que, na execução de tal proposta pode surgir questionamentos que o professor não pensou.

Fica evidente que, em uma metodologia aberta, o docente não irá conseguir prever todas as explorações que poderão surgir a partir de uma atividade investigativa, mas tal prática auxilia o docente na forma de aprender sobre os aspectos do processo de investigação, ou seja, o mesmo tem que conseguir entender como se dá a construção do pensamento matemático para poder elaborar os questionamentos e auxiliar os alunos nesse tipo de exploração.

O último papel e não menos importante é apoio ao trabalho dos alunos, Ponte, Brocardo e Oliveira. (2016) abordam que existem aspectos do papel docente que está estritamente ligado ao apoio que o professor concede a seus alunos e que esse apoio assume as formas de: colocar questões mais ou menos diretas, fornecer e recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão do aluno.

O docente em uma aula de investigação deve privilegiar a interação interrogativa, visto que, uma das vantagens desse tipo de postura, reside no docente mostrar para os alunos que o seu papel é de incentivá-los e não apenas para validar os conhecimentos a serem transmitidos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) retratam que muitas vezes para garantir o fluxo da investigação o professor deverá fazer recordações de informações aprendidas, dado que os alunos têm tendência a se perderem quando não compreendem certos conceitos ou formas de representações da atividade proposta.

Os mesmos autores deixam claro que um dos mais importantes aspectos do papel de apoiar os alunos, está no fato de promover uma reflexão desses sobre o seu trabalho, ou seja, “[...] é importante ajudá-los a fazer uma síntese da atividade descrevendo os seus avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram” (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA., 2016, p.53).

Para finalizar o tópico, se deduz que em uma interação de investigação, o professor além de exercer papéis predeterminados, deve conhecer seus alunos e

estabelecer um ambiente de trabalho agradável e motivador da aprendizagem, assim, as atividades investigativas terão um local propício para se desenvolver com sucesso.

## 1.6 Avaliação de atividades investigativas

Uma atividade investigativa, como toda atividade aplicada em sala de aula, deve ter uma avaliação, pois essa permitirá que o professor saiba se os alunos estão progredindo de acordo com seus objetivos ou se deve repensar as suas ações perante a execução das tarefas.

O professor tem uma variedade de instrumentos escritos e orais que podem ser utilizados como métodos de avaliações, tanto de forma individual como em grupo. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 109) destacam os relatórios escritos e classifica-os como “uma produção escrita realizada por um aluno ou por um grupo, tendo em vista apresentar um trabalho previamente desenvolvido”.

Magalhães e Varizo (2016, p. 73) reconhecem o poder educativo dos relatórios quando abordam que esse tipo de avaliação “[...] exige do aluno uma metacognição, isto é, uma reflexão sobre o conhecimento que tem o sujeito de sua própria cognição”

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 116) retratam que em uma aula de matemática os alunos estão habituados em oferecerem respostas sintéticas, e que um relatório escrito será um aprendizado, além de permitir que o mesmo faça uma releitura do processo em diversos momentos de uma aula investigativa.

Na produção de um relatório o professor tem que convidar os alunos a registrarem as conclusões e o processo que os levou até estas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 110) destacam a importância dessa atitude quando expõem que em um relatório de uma aula de investigação matemática os alunos:

[...] devem incluir as questões levantadas acerca da situação proposta, a bibliografia e outras fontes consultadas, o modo como organizaram os dados, as conjecturas provadas, as não provadas, os procedimentos usados para a avaliação das conjecturas e etc.

Os autores também fazem uma reflexão sobre o assunto quando abordam que o relatório se torna interessante quando o aluno inclui esses tipos de informações

nos relatórios, dessa forma, o docente pode conhecer as suas conclusões e os passos que os levaram a inferi-las.

Tendo os relatórios elaborados, como o professor poderá fazer a avaliação dos mesmos? Fique claro que, para uma avaliação com transparência, o docente tem que estabelecer critérios e escalas de avaliação, mas o mesmo tem que ter em mente que os critérios são mais importantes que as escalas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que os alunos devem estar cientes dos critérios de avaliação para que possam fazer uma autoavaliação e o processo se tornar mais nítido.

Julgando os critérios e estabelecendo escalas, nos trabalhos enquadrados como “bons”, o professor não terá que inferir muitos comentários, então cabe reconhecer esse fato e inferir um reconhecimento da qualidade do trabalho realizado. Caso contrário, o docente precisa inferir comentários de forma que o aluno perceba aspectos que possam mudar em seu trabalho, nesse caso, também podem ser oferecidas dicas de algumas possibilidades que ajudarão os alunos a melhorar o processo de uma tarefa investigativa.

Magalhães e Varizo (2016, p. 72) enfatizam que:

[...] as anotações feitas pelo aluno devem ser revisadas pelo professor que, por sua vez, oriente-o a encontrar a solução, oralmente ou por escrito, de modo que o próprio aluno identifique suas dificuldades. Por meio da reflexão de suas ações corrija tais dificuldades e desenvolva sua capacidade de autorregulação da sua aprendizagem [...].

Outro processo de avaliação é através da observação informal, pois esse é um processo natural onde se observa os alunos durante a realização da atividade. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 124) falam que através da observação:

O professor pode recolher muita informação sobre as atitudes dos alunos, sobre o modo como eles mobilizam os conhecimentos matemáticos formais e informais e sobre o seu entendimento do que é uma investigação, do seu papel na respectiva realização e da sua capacidade de levá-la a bom termo.

De modo geral, a observação dos alunos durante a execução de um trabalho é uma excelente ferramenta para o professor colher informação com tal prática que pode direcionar sua atenção em um aluno ou em um grupo de alunos que apresentam dificuldades. Na observação, o docente não pode ser apenas passivo, identificadas dificuldades através dessa ferramenta, o educador deve direcionar questionamentos, de forma a saber o que os alunos estão pensando, de que forma estão fazendo, pois

tais ações devem ser realizadas com o intuito de motivação e o não acúmulo de dificuldades.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que a dificuldade de tal método consiste na variedade e na quantidade de informações obtidas, o que dificulta que o docente tenha um registro seletivo anotado.

Magalhães e Varizo (2016) falam que existe uma grande variedade de avaliações, e a escolha pelo melhor estilo depende de vários fatores como: números de alunos, experiência do docente, turmas para as quais o professor leciona e etc.

O presente tópico, teve o objetivo de apresentar duas sugestões de avaliações, mas nada impede que o educador busque outros métodos de avaliação que é pertinente para sua realidade, entretanto, o mesmo tem que ter em mente que o processo avaliativo tem que estar ligado ao acompanhamento do desenvolvimento dos alunos.

## **2 METODOLOGIA**

A pesquisa proposta está focada no indivíduo em interação com o processo de investigação em matemática, o que lhe atribui um caráter qualitativo. Marconi e Lakatos (1999) relatam que a pesquisa qualitativa se caracteriza pelo trabalho com dados subjetivos, atitudes, crença, valores, opiniões, fenômenos e hábitos que não podem ser quantificados. Na mesma linha de pensamento, Ludke e André (1986, p. 13) expõem que a pesquisa qualitativa: "[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.”.

A pesquisa se caracterizou como participante, pois o autor assumiu a postura de professor e pesquisador, participando ativamente do processo e buscando fazer mudança em sua prática docente, que envolveu o planejamento de atividades, aplicação de tarefas e observação direta dos grupos envolvidos na pesquisa. Desse modo, a pesquisa consistiu em uma experiência com um grupo de alunos em que se buscou modificar a prática profissional (Ponte, 2002) e, ainda, refletir sobre as possibilidades e contribuições da investigação matemática na aprendizagem dos alunos.

Como procedimento metodológico, utilizou-se de execução de oficinas de resolução de problemas e de investigação matemática, com conteúdo geométrico, em tais etapas elencadas os dados foram coletados através de anotações, observações, descrições, possíveis reflexões do autor, áudios e aspectos considerados importantes para um diário de campo. Segundo Jovchelovitch e Bauer (2004), “[...] é aconselhável ter um diário de campo, ou um formulário especial para sintetizar os conteúdos dos comentários informais em um protocolo de memória [...]”.

Após a realização das oficinas de resolução de problemas e de investigação em matemática, foram analisados os diários de campo para saber os ensejos, aprendizados e dificuldades que surgiram durante o processo.

### **2.1 Público Alvo**

As aplicações das oficinas foram realizadas no Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes, no município de Alto Horizonte – GO, a turma escolhida foi o 9º ano “A”, porque, tais alunos, possuem uma disciplina chamada “geometria” e o pesquisador tinha o interesse em trabalhar com o ambiente dos eixos espaço e forma e grandezas e medidas, ambos compreendidos na disciplina citada anteriormente.

A instituição atende a uma única turma de 9º ano, no período matutino, a sala é composta de 16 alunos, sendo 8 do sexo masculino e 8 do sexo feminino, na faixa etária de 14 anos. As aulas anteriormente ministradas eram de cunho tradicional, onde o professor como detentor do conhecimento expunha os conteúdos aos alunos, receptores passivos, sem muita interação e motivação para o processo de ensino, o que em certo ponto, comprometia o processo de aprendizagem. A aplicação das oficinas ocorreu durante os meses de maio, junho e agosto do ano de 2018, período referente aos 2º e 3º bimestres.

## **2.2 Etapas da pesquisa**

As aplicações das oficinas foram divididas em 3 etapas, a primeira etapa consistia na explanação sobre os métodos que seriam utilizados durante a execução das oficinas, observando se o alunado absorveu o conhecimento sobre as metodologias apresentadas e sobre os passos necessários para o bom executar de cada uma das metodologias.

Na segunda etapa da pesquisa, ocorreu o planejamento das tarefas e a elaboração de um conjunto de atividades de resolução de problemas e outras investigativas, separadas em quatro tarefas para cada um dos métodos, de forma que o grau de dificuldade entre as atividades fosse aumentando gradativamente durante o processo.

A terceira etapa se caracterizou pelas aplicações das atividades, sempre com o objetivo de proporcionar a descoberta de conhecimentos pela participação ativa dos alunos na execução das tarefas. Ramos (2015, p. 39) relata que esse tipo de atividade possibilita:



[...] ao aluno formar conjecturas baseadas na observação e em seus conhecimentos prévios, realizando provas e refutações de modo a favorecer o desenvolvimento de conceitos e procedimentos, bem como, a confiança e a autonomia.

O tempo utilizado para a prática das oficinas junto aos alunos foi de 20h/aulas, sendo 10h/aulas utilizadas para a resolução de problemas e as 10h/aulas restantes para a investigação matemática, com a possibilidade de ser estendido conforme necessidade de observação e de complementação da atividade. Vale ressaltar que 2h/aulas de cada um dos métodos foram reservadas para explanação do que consistia nas etapas inerentes de cada uma das metodologias empregadas.

Nas aplicações se optou por trabalhar inicialmente de forma individual nas aulas de resolução de problemas para os alunos assimilarem as etapas da metodologia e também porque tais educandos não tinham contato com essa forma de ensino. Posteriormente, de forma gradual, foi se inserindo o trabalho com grupos de 4 alunos que deveriam variar em cada aula conforme suas preferências pessoais, de acordo com Ramos (2015, p. 40) ao aplicar essa abordagem “os alunos teriam mais oportunidade de dialogar e argumentar sobre as atividades, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, tornando o trabalho mais prazeroso, atraente e com maior aprendizado”. Cavalcanti (2001, p. 27) complementa a abordagem, quando afirma que, ao se trabalhar dessa forma, os educandos terão mais:

“[...] interação com seus colegas e, nesse sentido, as discussões orais em sala, permitem que o aluno fale sobre suas descobertas, mostre o seu trabalho e entenda algum conceito através da explicação, da leitura ou observação do trabalho de outro colega da classe”.

Como visto anteriormente, a sala é composta por uma turma de 16 alunos, que foram nomeados com as 16 primeiras letras do alfabeto em uma aula de trabalho individual: Aluno A, Aluno B, Aluno C,..., Aluno P, em ordem alfabética dos nomes dos alunos. E quando a atividade era em grupo, foram formados 3 grupos e nomeados com as 3 primeiras letras do alfabeto: Grupo A, Grupo B e Grupo C. Para identificar os membros de cada um dos grupos, foi utilizada a seguinte notação: A1, A2, A3 integrantes do Grupo A, conforme a ordem alfabética dos componentes do grupo. O mesmo procedimento foi realizado com os demais grupos.

### **3 DESCRIÇÃO DO TRABALHO REALIZADO EM SALA DE AULA**

O presente tópico ficou reservado para fazer a descrição e as análises das aplicações da metodologia de resolução de problemas e da investigativa na turma do 9º ano do Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes em Alto Horizonte – GO.

#### **3.1 Oficinas de Resolução de problemas**

Dentre os possíveis conteúdos matemáticos que poderiam ser abordados nas atividades, optou-se em desenvolver a pesquisa da fase de resolução de problemas utilizando questões referentes a área e perímetro de figuras planas, onde o objetivo centrou em ir preparando um caminho de autonomia para os alunos, tirando a figura do professor do foco e possibilitando a criticidade.

Baseado no livro “A arte de Resolver problemas: um novo aspecto do método matemático” de Pólya (1945), foram apresentados para os educandos os passos para resolver um problema: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Na aplicação de cada atividade, foi exposto no quadro o problema a ser resolvido durante a aula e os alunos deveriam fazer as leituras e utilizar das etapas de resolução de problemas, apresentadas anteriormente pelo pesquisador. Durante essa etapa o professor teve o papel de esclarecer dúvidas inerentes à leitura e à interpretação de forma a manter a motivação dos educandos ao iniciar a execução das atividades.

Pólya (1945, p. 06) relata que o professor ao utilizar a metodologia de resolução de problemas tem que ter dois objetivos principais que são: “primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio”.

Nesse aspecto, Ramos (2015, p. 49) embasado em Ponte e Velez (2011) aborda que: “o cuidado do professor em relação ao entendimento da tarefa pela turma e ao incentivo [...] é de fundamental importância nesse momento inicial, para que se possa alcançar os objetivos propostos”.

Ao decorrer do trabalho, o pesquisador permitiu que cada aluno ou/e grupos, dependendo do arranjo das aulas, previamente planejado, expusessem seus pontos de vista, ensejos, reflexões, discussões e análises. Enquanto os alunos resolviam as atividades, o professor, em dado momento, relatava as ideias e/ou pensamentos na lousa branca, em outro, circulava pela sala com o objetivo de comentar, esclarecer e articular estratégias de resolução, de forma a envolver os educandos na atividade proposta, além de realizar anotações dos momentos vivenciados.

Ao final do processo se discutia sobre o problema proposto, visto que, "sempre que os seus resultados são discutidos em um grande grupo, os alunos são levados a analisar e discutir diferentes conjecturas e representações" Barbosa *et. al.* (2011, p. 10).

É importante salientar, por falta de experiência do docente e dos discentes, optou-se em trabalhar com a metodologia de resolução de problemas, com questões que já possuíam o passo-a-passo para a resolução, quase sem nenhum obstáculo para o pensamento intuitivo dos educandos, o que Pontes (2003) classifica como "problemas" por terem o caráter fechado e difícil, o que distância do conceito de problema proposto que Pólya (1945).

Isso ocorreu para que, de forma gradativa, tanto o docente como os educandos começassem a abandonar aulas expositivas e dialogadas e seguissem um caminho que no futuro levasse à resolução de problemas genuínos.

- **Atividade introdutória**

A atividade introdutória foi elaborada com o intuito de esclarecer sobre o método de resolução de problemas e o trabalho a ser realizado, buscando expor o que é resolver um problema, como se realiza, quais objetivos, bem como os passos importantes dessa metodologia, de acordo com Pólya. (1945): compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Nesse instante foi notado um certo medo dos alunos em relação ao método de resolução de problemas, devido a alguns relatarem que não poderiam saber se uma questão estava correta utilizando tal abordagem, que o pesquisador era o professor e ele deveria ensinar os alunos, o que caracteriza uma visão distorcida do processo de ensino e aprendizagem.

- **Atividade 01**

A primeira atividade foi realizada no dia vinte e dois de maio de dois mil e dezoito, obteve o comparecimento de toda a turma e o objetivo era que os alunos soubessem calcular a área de um retângulo e posteriormente fazer divisões da área anteriormente calculada.

Na parte inicial da metodologia os alunos têm que entender o problema proposto, Pólya (1945, p 07), relata que:

[...] é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua.

Dessa forma o professor tentou motivar os alunos em relação ao entendimento do problema exposto no apêndice A na página 92, com a seguinte fala<sup>1</sup>:

- *Professor: Vamos ler e tentar compreender o problema?*
- *Aluna A: Fez a leitura do problema.*
- *Professor: O que vocês entenderam? Quais são os dados que podemos retirar após a leitura?*

Com uma motivação inicial, os alunos começaram a elencar dados apresentados no problema proposto e o professor tentando apenas exercer o papel de motivador, fazendo com que o aluno tivesse a atenção na incógnita do problema, de acordo com Pólya (1945, p. 4):

“[...] em inúmeros problemas, temos de indagar: Qual é a incógnita? Podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? A finalidade destas indagações é focalizar a atenção do aluno na incógnita”

O mesmo autor também relata que quando o professor indaga ou questiona o aluno, esse ato tende a provocar interações mentais. Como pode ser observado a

---

<sup>1</sup> As falas entre professor e alunos aparecerão em itálico no decorrer do texto.

seguir, os alunos apenas sendo indagados conseguiram obter os dados do problema, determinar a incógnita, cálculo da área e estabelecer uma condicionante, que seria a fórmula “base multiplicada pela altura”.

- Aluna A: O terreno tem o formato retangular.
- Aluno B: São 100m e 50m.
- Professor: Você está me falando que as dimensões do retângulo que representa o lote, têm 100m de comprimento e 50m de largura?
- Aluno B: sim professor, é isto mesmo.
- Aluna A: O lote foi dividido em 8 partes.
- Aluna F: A resposta tem que ser em  $m^2$ .
- Aluna D: Área.
- Professor: Você está me relatando que no problema temos que realizar o cálculo de área? E como poderia fazer este cálculo?
- Aluna D: Sim professor.
- Aluno B: A área tem que multiplicar base pela altura.
- Professor: Então esses seriam os nossos dados? Teria mais algum?
- Aluna D: Não professor, não tem mais nenhum dado.
- Professor: A turma concorda? Posso prosseguir?
- Turma: Sim professor, pode continuar.

Para finalizar a etapa, Pólya (1945, p. 06) relata que as “[...] indagações for proveitosamente repetida, dificilmente o estudante deixará de a notar e será induzido a formular, ele próprio, essa indagação em situações semelhantes”, isso o fará criar estratégias e a utilizá-las quando estiver em frente a um problema. Dessa forma, o professor que quer trabalhar com a resolução de problemas, deve despertar nos educandos uma motivação por essa metodologia, além disso, proporcionar oportunidades de imitá-la e praticá-la.

A resolução de problemas é uma competência prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer competência por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora da água e, finalmente, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus problemas e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os (PÓLYA, 1945, p. 06).

Após a coleta dos dados por parte dos alunos, o professor os expôs na lousa para serem lembrados e retomados sempre que necessário. De modo geral, os alunos em um trabalho coletivo conseguiram compreender e estabelecer os dados do problema de forma satisfatória, o que demonstrou o engajamento com a metodologia proposta.

Dados elencados, iniciou-se a fase de traçar uma estratégia para solucionar o problema, no planejamento o professor tem que se lembrar das suas experiências de sucessos e fracassos ao resolver um problema e, a partir desse pensamento, traçar maneiras e indagações para os educandos, sem deixar de prezar pela autonomia dos mesmos. E tal etapa foi executada da seguinte forma:

- *Professor: Após compreendermos o problema, teremos que fazer um plano de execução. O que seria interessante pontuar? O que deveríamos fazer para resolver a questão?*
- *Aluno B: Usar a fórmula base vezes altura.*
- *Aluno E: Fazer um cálculo de porcentagem.*
- *Professor: Mas como poderia ser aplicada a porcentagem no problema?*
- *Aluna E: Não sei professor, talvez nos lados.*
- *Professor: Então vamos acrescentar ao plano de execução e verificar a utilidade na hora de resolver o problema.*
- *Professor: Mais alguma sugestão para resolver o problema?*
- *Aluno F: Professor teremos que dividir o resultado da área em 8 partes.*
- *Professor: Tem outra forma de fazer essa divisão?*
- *Aluno F: Não tem.*
- *Aluna C: Tem que fazer um desenho representando a situação.*
- *Professor: Turma, concordam com a aluna C?*
- *Turma: Sim.*
- *Professor: Sempre é bom fazer um esboço da situação, pois torna visual e facilita o entendimento e a execução do plano.*
- *Professor: Mas, qual das etapas elencadas deve ser realizada primeiro?*
- *Aluno B: Professor, se deve fazer o desenho da situação, depois fazer o cálculo da área usando a fórmula base vezes altura e por último dividir o resultado por 8.*
- *Professor: Turma, concordam com o aluno B?*

- *Turma: Concordamos professor.*
- *Professor: Tem outra forma de resolver esse problema? Poderíamos pensar em outro plano de execução?*
- *Turma: Não professor, esse é a única maneira.*

Ao traçar o plano para resolver o problema, os alunos novamente realizaram um trabalho grupal em sala e estabeleceram com êxito uma possível abordagem de resolução, apenas houve uma redundância em tentar se calcular porcentagem, mas tal estratégia foi rapidamente descartada ao se realizar a execução da proposta, o que demonstrou maturidade e aprendizagem ao perceber que tal abordagem não se poderia encaixar de forma satisfatória para solucionar o problema.

Nesse sentido Pólya (1995, p. 07) inferi que a ideia da resolução de uma questão “[...] pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma “ideia brilhante””.

Na fase anterior, também é interessante pontuar que os alunos trouxeram elementos de sua vivência na tentativa de solucionar o problema, como por exemplo, a fórmula do retângulo ser base multiplicada pela altura remete a algo aprendido no seu trajeto escolar, e ao ver um problema com tais dados relembrou e inferiu para aplicar tal conceito apreendido no passado.

Com um plano traçado, o pesquisador fez uma fala para retornar aos conceitos previamente explanados na aula anterior, como se percebe logo abaixo:

- *Professor: Após traçamos um planejamento, teremos que executar e analisar se a resposta é condizente com o problema proposto, pois muitas das vezes vocês apenas aceitam uma resposta como verdadeira sem fazer uma reflexão sobre o resultado. Um exemplo seria encontrar medidas negativas para uma figura plana.*

Na fase de execução do plano Pólya (1945, p. 12) relata que:

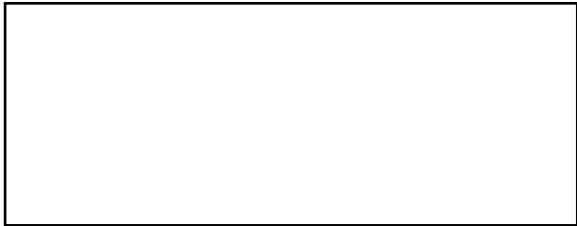
Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante se esqueça do seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio tiver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a

ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo.

O plano foi concebido de forma coletiva pelos educandos, e ao retomar as fases da resolução de problemas, iniciou-se a execução do mesmo, que foi traçado na etapa anterior de forma tranquila. Nessa etapa, é relevante destacar, que por ser a primeira aula de resolução de problemas, os alunos tiveram autonomia e se propuseram resolver o problema na lousa, de forma coletiva e sem apresentar o medo de errar, como pode ser observado logo abaixo:

- *Aluno B: Professor, eu posso resolver a questão na lousa?*
- *Professor: Claro, pode sim.*

**Resposta feita pelo aluno B na lousa:**



A diagram of a rectangle with a height of 50m and a width of 100m. The height is labeled '50m' on the left side, and the width is labeled '100m' at the bottom.

$$A = b \cdot h$$

$$A = 100 \cdot 50$$

$$A = 5000 \text{ m}^2$$

$$A = \frac{5000}{8}$$

$$A = 625 \text{ m}^2$$

- *Aluno B: Professor, cada lote terá 625 m<sup>2</sup> de área.*

Pólya (1945) relata que o aluno, ao perceber que seguiu todos os passos e escreveu uma solução, tende a ter convicção que sua resposta estará correta e a partir desse ponto passa a ignorar o problema e ir para outro assunto. O autor também aborda que:

Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (p. 14)

Dada uma resposta para o problema, o professor iniciou um questionamento de forma a deixar os alunos inquietos e não aceitar a resposta achada como uma verdade absoluta. Tal instigação levou os alunos a refletirem e tentarem validações



para o problema, até acharem que a melhor maneira seria tentarem outras soluções para o problema e comparar com a solução anteriormente encontrada.

- *Professor: A turma concorda com a resposta? Como poderia validar essa resposta?*
- *Aluna H: Professor é só pegar o resultado e multiplicar por 8.*
- *Aluno I: Não professor, isso você só estaria confirmando que a divisão está correta e não que o resultado da questão é esse.*
- *Professor: Se isto não está correto, como faço para validar a resposta?*
- *Aluna D: Professor, resolva a questão de outra forma.*
- *Professor: Como eu poderia resolver essa questão de outra forma?*
- *Aluno G: Professor, pega a figura e divida em oito partes.*
- *Professor: Você poderia expor suas ideias na lousa para todos nós?*
- *Aluno G: Posso sim.*

De frente a uma situação de experiência para os alunos, o professor deixou que eles tentassem novas soluções em prol de validar o problema proposto.

### Resposta feita pelo aluno G na lousa:


$$\frac{100}{4} = 25m \text{ e } \frac{50}{2} = 25m$$

$$A = b \cdot h$$

$$A = 25 \cdot 25$$

$$A = 625 m^2$$

25 m

25 m

Como se nota logo abaixo, após solucionar o problema e o restante da sala observar, surgiu uma indagação interessante em que os alunos começaram a relacionar o problema com o cotidiano e assim validar a solução. Também surgiu novas ideias de como solucionar o problema.

- *Professor: Vocês acham que a questão está correta?*
- *Aluno B: faz sentido, pois os lotes na cidade têm medidas de 15m por 30m.*

- Aluna A: Professor, eu pensei em uma divisão diferente.
- Professor: Poderia expô-la para nós.
- Aluna A: Posso sim.

**Resposta feita pela aluna A na lousa:**

50 m		
	12,5 m	$\frac{100}{8} = 12,5m$
		$A = b \cdot h$
		$A = 50 \cdot 12,5$
		$A = 625 m^2$

Ao continuar as indagações em relação à resposta do problema, surgiram visões tradicionais do processo de ensino e aprendizagem, e o pesquisador tentou explicar que o objetivo era o aprendizado de novos métodos e que nesse processo não pode ter medo de errar, de forma que o aprendizado não se dê apenas com os acertos, mas com o processo e os erros cometidos ao longo do percurso.

- Professor: A resposta está correta? Teria outra forma de solucionar o problema?
- Consenso da turma: A resposta está correta, e não tem outra forma de fazer.
- Professor: Por que ela está correta? Como chegaram nessa conclusão?
- Aluna J: Você é o professor, deveria fornecer a resposta.
- Professor: Eu quero que vocês aprendam um método novo, pois percebo que não conseguem ler e interpretar um problema corretamente, então nessas aulas quero que reflitam, não se preocupem em errar e em ter a resposta final. O processo que é importante.

Em análise final, a aula terminou e os alunos ficaram convencidos de que aquela era a resposta para o problema proposto, dado que, em todas as soluções, as repostas encontradas apresentaram o mesmo valor.

- **Comentários da atividade 01**

Por ser a primeira atividade em que os alunos trabalharam com a metodologia de resolução de problemas, procurou-se empregar um problema simples do eixo grandezas e medidas, no qual os alunos pudessem observar similaridades e recorrer a conhecimentos prévios básicos, como área de um retângulo, divisão e etc., e iriam resolvê-lo facilmente, despertando interesse pelas atividades com a abordagem da resolução de problema.

Com alguma timidez inicial e com algumas visões conservadoras, o trabalho transcorreu de forma agradável e surpreendeu o pesquisado no que tange a interação grupal da sala e a autonomia dos alunos em levantarem de suas cadeiras e expor suas ideias sem ter o medo de errar.

Em suma, o fator positivo da aula centralizou na autonomia e na interatividade, dado que em todo momento foi observado que a turma se engajou em prol da solução e sempre um estava tentando ajudar o outro.

- **Atividade 02**

A segunda atividade, disponibilizada no apêndice B da página 93, foi realizada no dia vinte e três de maio de dois mil e dezoito de forma individual, obteve o comparecimento de toda a turma e o objetivo era que os alunos determinassem a área de um quadrado em metros quadrados e os lados do quadrado estavam em cm.

A aula se iniciou de forma similar a anterior, onde o pesquisador pediu para uma aluna ler o problema e a turma identificar informações pertinentes na resolução de tal problema. Como pode ser observado a seguir:

- Professor: *Quais dados seriam inerentes para compreender o que está sendo proposto no problema?*

- Aluna C: *O formato da figura é um quadrado.*

- Aluno B: *A medida do lado é 60 cm.*

- Aluno B: *A resposta tem de ser em m<sup>2</sup>.*

- Professor: *Turma apresenta mais algum dado importante para o entendimento do problema?*

- Aluna K: *Tem não.*

- Professor: *Formato quadrado, 60 cm cada um dos lados e a resposta tem que ser em m<sup>2</sup>. Mais alguma coisa?*

- Aluno F: *O problema pede para calcular a área.*

- Professor: *Têm o cálculo de área. Mais alguma informação?*

- Aluno L: *Professor, tem que é uma cadeira.*

- Professor: *Como a informação que é uma cadeira irá servir para solucionar o problema?*

- Aluna E: *Professor irá ajudar.*

- Aluna C: *Eu acho que sim.*

- Professor: *Vamos acrescentar essa informação. Existe mais alguma informação relevante?*

- Aluna C: *Acabou professor.*

- Turma: *Entraram em consenso de não ter mais informações.*

Na passagem, é inerente salientar que os alunos descobriram que a incógnita procurada seria o valor da área, e deduziram o processo de execução, que seria o cálculo da área e a conversão da resposta de cm<sup>2</sup> para m<sup>2</sup>. Em suma, na segunda atividade, os alunos deduziram a primeira etapa da resolução de problemas com êxito.

Com a parte inicial concluída, iniciou-se a discussão em prol de obter um planejamento para solucionar o problema proposto. Como se observa na passagem subsequente:

- Professor: *Galerinha, como irei resolver esse problema?*

- Aluna A: *Pode usar a fórmula  $A = b \cdot h$ .*

- Professor: *Turma, terei que aplicar a fórmula que a área é igual a base pela altura?*

- Aluno B: Sim.
- Turma: Concordou com a ação.
- Professor: Têm outras maneiras de fazer esse cálculo?
- Turma: Não.
- Aluno B: Têm que converter a resposta final para metros.
- Professor: Possuem alguma outra ação que devemos executar?
- Turma: Não.
- Professor: Para solucionar o problema, iremos usar a fórmula  $A = b \cdot h$ , pega o resultado e converter em metros. É isso?
- Turma: Sim, professor.

Nessa etapa, se nota que os alunos planejaram aplicar a fórmula do retângulo para calcular a área de um quadrado, mesmo não estando errado, pois, o quadrado pode ser considerando um retângulo, e o professor não interviu e deixou que eles inferissem juízos na fase de execução.

Com um planejamento estabelecido, iniciou-se a fase de execução. Nessa etapa é interessante observar que surgiram várias indagações e os alunos usaram elementos de sua vivência para estabelecer conjecturas e tentar solucionar o problema de forma satisfatória.

- Aluna A: Professor eu quero resolver.
- Professor: Sim, pode resolver.

**Resposta feita pela aluna A na lousa:**



$$A = b \cdot h$$

$$A = 60 \cdot 60$$

$$A = 3600 \text{ cm}^2$$

- Aluna A: Quantos centímetros tem um metro?

A pergunta da aluna gerou uma discussão construtiva, pois alguns alunos afirmaram que um metro tem 60cm e outros indagavam que teria 100cm. O interessante foi que tal questionamento uniu a sala onde alguns trouxeram elementos

das outras disciplinas para solucionar e outros usaram elementos de sua vivência no cotidiano. E, tal discussão, pode ser observada nas falas a seguir:

- Aluna A: *Quantos centímetros tem um metro?*
- Aluno B: *Um metro tem 100cm.*
- Aluna H: *Um metro tem 60cm, pois um metro e meio é um metro e 30cm.*
- Aluna E: *Eu tenho a tabela de conversão de unidades que a professora de física deu para gente, só que não consigo entendê-la.*  
*A aluna tirou a tabela da pasta e a sala fez uma roda em volta dela tentando entender a tabela.*
- Aluno B: *Eu consegui entender, olhe aqui, o metro tem 1000cm.*  
*O aluno B foi para a lousa e tentou efetuar cálculos baseados na tabela de conversão.*
- Aluno G: *Meu pai é pedreiro, pelo amor de Deus, vocês estão errados, um metro tem 100cm. Professor eu posso ir na coordenação pegar uma régua?*
- Professor: *Pode sim.*

A discussão continuou na sala, pois alguns defendiam um ideal e os outros o outro. O aluno G retornou para sala com uma régua de um metro que correspondia a 100cm e o restante que achava que era 60cm se convenceu de que o metro era 100cm e retomaram a resolução da questão.

Com a descoberta de que um metro teria 100cm, a aluna continuou a execução do plano, como se pode observar logo abaixo:

**Resposta feita pela aluna A na lousa:**

$$A = b \cdot h$$

$$A = 60 \cdot 60$$

$$A = 3600 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{3600}{100}$$

$$A = 36 \text{ m}^2$$


Ao executar o planejamento a aluna fez uma conversão errada, ela transformou  $\text{cm}^2$  em  $\text{m}^2$  como se estivesse trabalhando com m e cm. O professor não

entreviu na resposta final e iniciou indagações a fim de validar a resposta encontrada pela aluna A. Com uma reprodução de ideias da atividade anterior, os alunos começaram a buscar novas soluções para validar o problema proposto.

Analisando as falas de Pólya (1945) se tem que ao aprender alguma técnica de resolução de problemas ou ver problemas similares, os alunos tentaram reproduzir o que foi aprendido anteriormente.

Dessa forma, o aluno B achou outra forma de solucionar o problema e expôs suas ideias na lousa.

**Resposta feita pela aluna B na lousa:**



60 cm = 0,6m

$$A = b \cdot h$$

$$A = 0,6 \cdot 0,6$$

$$A = 0,36 \text{ m}^2$$

60 cm = 0,6m

Após encontrar soluções diferentes para o mesmo problema, os alunos não se deram por satisfeitos e iniciaram uma análise produtiva em relação a observação de quais das duas repostas se encaixaria se estivesse usando um tecido na vida real, ou seja, começaram a tirar o problema do abstrato e novamente levar a questão para a vivência cotidiana.

- Aluna J: Professor deu repostas diferentes, e agora?

- Professor: Turma, o que vocês acham, quais delas está correta? E por que está correta?

Turma: A do aluno B, pois ele é mais inteligente.

- Professor: Reposta sem fundamento. Por que vocês acham que a resposta do aluno B está correta e da aluna A, não? Tem outra maneira de resolver a questão?

- Aluna A: Professor a resposta do aluno B está correta, pois estava refletindo e  $36\text{m}^2$  de pano é muito tecido para cobrir um banco de dimensões de 60cm.

- Comentário do professor: Antes da explanação total da aluna a aula terminou.

Na aula seguinte a aluna explanou a ideia para a turma, uma vez que sua mãe era costureira e, às vezes, ela a ajudava. Com a argumentação e a análise a turma se convenceu de que a área procurada era de  $0,36 \text{ m}^2$ .

- **Comentários da atividade 02**

A segunda atividade foi muito produtiva, visto que, apesar de ser um problema simples, gerou discussões interessantes e envolveu toda a turma em prol de solucionar o problema apresentado.

Também é pertinente relatar que o primeiro planejamento levou a uma solução errada para o problema e os alunos tiveram maturidade de observarem outras possibilidades de resolução e analisar todas as respostas até chegar a uma solução mais aceitável.

Os alunos utilizaram a fórmula do retângulo para calcular a área do quadrado, mesmo sendo aceitável tal “equivoco”, os alunos não notaram e o professor não interviu, em prol de somar novos conhecimentos. Tal ato gerou no pesquisador uma reflexão sobre até que ponto seria interessante intervir no processo de aprendizado dos alunos. De conclusão, o pesquisador viu falha na atitude e que deveria ter usado argumentos para instigar os alunos a pesquisarem e inferirem juízos se tal fórmula estava correta e, em caso positivo, porque era aceitável utilizar aquela fórmula, se tivesse feito isso teria aberto um novo canal de aprendizado.

- **Atividade 03**

A terceira atividade, exposta do apêndice C na página 94, foi dividida em dois momentos, no primeiro os alunos deveriam fazer a resolução do problema proposto em grupos e depois teria a socialização da resolução.

A tarefa foi realizada nos dias vinte e oito e vinte e nove de maio de dois mil e dezoito, obteve o comparecimento de doze alunos na primeira etapa e de quatorze na segunda etapa. O objetivo era que os alunos determinassem o valor da incógnita X a



partir do valor do perímetro, depois achar o valor da área e por último retirar 12% do valor da área que seria reservado a uma garagem.

O trabalho iniciou com a divisão da turma em 3 grupos de 4 alunos, onde o pesquisador distribuiu a atividade impressa, propondo a leitura da mesma e, em seguida, foi realizado um breve comentário sobre a atividade e seus questionamentos. Nesta atividade, observou o bom desenvolvimento de dois grupos e o terceiro não conseguiu entrosar na dinâmica de grupos.

Ao decorrer da aula, o pesquisador passou em cada um dos grupos para analisar e questionar sobre o desenvolvimento das atividades.

**Grupo A:**

- Aluna A<sub>1</sub>: professor, faça o favor.
- Aluna A<sub>1</sub>: Para descobrir o perímetro, basta multiplicar a base pela altura ( $b \cdot h$ )?
- Professor: Será que  $b \cdot h$  vai me dá o valor do perímetro? O que é perímetro?
- Aluna A<sub>2</sub>: O tamanho?
- Professor: Tamanho do quê?
- Aluna A<sub>2</sub>: O contorno da figura é o perímetro.
- Aluna A<sub>3</sub>: Então a fórmula ( $b \cdot h$ ) é da área e não do perímetro.
- A aluna A<sub>3</sub> pegou a régua e começou a medir os lados da figura para determinar suas dimensões.
- Professor: Será que adianta utilizar a régua?
- Aluna A<sub>3</sub>: Talvez não!
- Professor: Qual o objetivo de se utilizar a régua? Têm alguma informação no enunciado que permite ou desconsidera a utilização de tal recurso?
- Aluna A<sub>3</sub>: Tem o valor de A e B. Não tem o valor de A e B. Não tem o valor de nada.
- Professor: Pensem um pouquinho.

No diálogo acima, nota-se que o grupo apesar de saber qual seria a incógnita, não conseguiu estabelecer um plano consistente para solucionar o problema. Os alunos não notaram que o desenho estava fora de escala e tentaram utilizar a régua para determinar os valores dos lados da figura. Também se observa, que numa tentativa de reproduzir conceitos das aulas anteriores,

utilizaram a fórmula base multiplicada pela altura para determinar o perímetro, mesmo tendo em mente que área e perímetro são elementos distintos.

**Grupo B:**

- Aluno B<sub>1</sub>: *O que seria análise do resultado? Seria se ele está correto?*
- Professor: *Seria a validação do resultado analisar se o resultado que encontrou faz sentido ou não para o problema proposto.*
- Aluno B<sub>2</sub>: *Achando o valor da área tem que multiplicar ou dividir?*
- Professor: *O que você acha?*
- Aluno B<sub>2</sub>: *Têm que dividir?*
- Professor: *Será? Faça as duas possibilidades e depois verifiquem qual é mais coerente para a resolução do exercício.*
- Professor: *Estou vendo que cada um está fazendo as partes isoladamente, não seria interessante fazer o trabalho em conjunto? Pois um poderia ajudar o outro e haveria a socialização entre os membros.*
- Aluno B<sub>2</sub>: *Como assim?*
- Professor: *Você tem seus colegas para retirar as dúvidas.*

De acordo com a passagem acima, a metodologia de grupos para o grupo B foi um fracasso, visto que os alunos se recusaram a trabalhar em equipe e fizeram a atividade de forma fragmentada, sendo que cada um teria que cumprir uma etapa. Tal situação gerou uma visão totalmente distorcida do que a questão pedia. Em conclusão, por trabalhar apenas de forma expositiva e dialogada, o pesquisador não conseguiu de forma satisfatória integrar os alunos na execução da atividade, como salienta Magalhães e Varizo (2016), o docente teve problema de autogestão com a dinâmica de grupos.

**Grupo C:**

- Aluno C<sub>1</sub>: *Eu não sei como resolver esse problema?*
- Professor: *Qual o problema?*
- Aluno C<sub>2</sub>: *Temos que descobrir o perímetro. Acho que temos que descobrir o valor de  $x$ , para depois descobrimos o perímetro e por último aplicar a fórmula  $b \cdot h$ . Tem que achar o valor de  $x$ . Como eu acho o valor de  $x$ ?*

Os alunos começaram a resolver o problema e acharam a resposta abaixo:

Handwritten work on lined paper showing the solution of a linear equation and a calculation of area:

$$4x + 20 = 80$$

$$4x = 80 - 20$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4}$$

$$x = 15$$

$$\frac{15}{12} = 1,25 \text{ m}^2$$

Figura 4 - Recorte 01 – Resolução de problemas – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos.

O grupo não conseguiu continuar a questão, houve um impasse. O valor encontrado não era condizente com o enunciado.

- *Professor: Será que 15 é a área do terreno?*
- *Aluno C<sub>2</sub>: Não professor. Ajudou demais.*

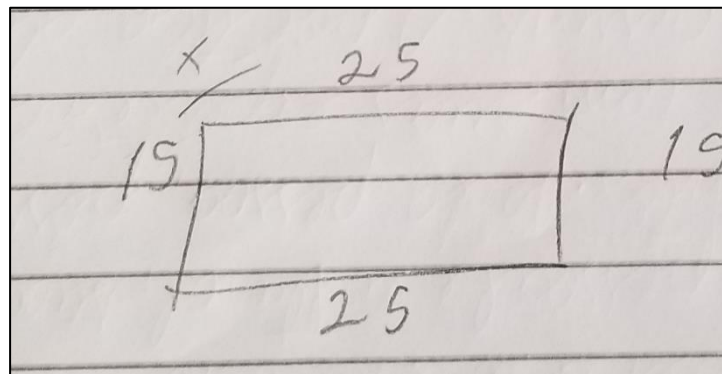


Figura 5 - Recorte 02 – Resolução de problemas – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos.

- *Aluno C<sub>2</sub> O perímetro é 80.*
- *Professor: 80 é a área?*
- *Aluno C<sub>3</sub>: É verdade, queremos achar a área.*
- *Aluno C<sub>4</sub>: Como descobrir a porcentagem? Temos que multiplicar 80m por 12% para reservar a garagem?*

$$12\% = \frac{12}{100} = 0,12$$

Figura 6 - Recorte 03 – Resolução de problemas – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos

- Aluno C<sub>2</sub>: Não, temos que calcular a área primeiro.

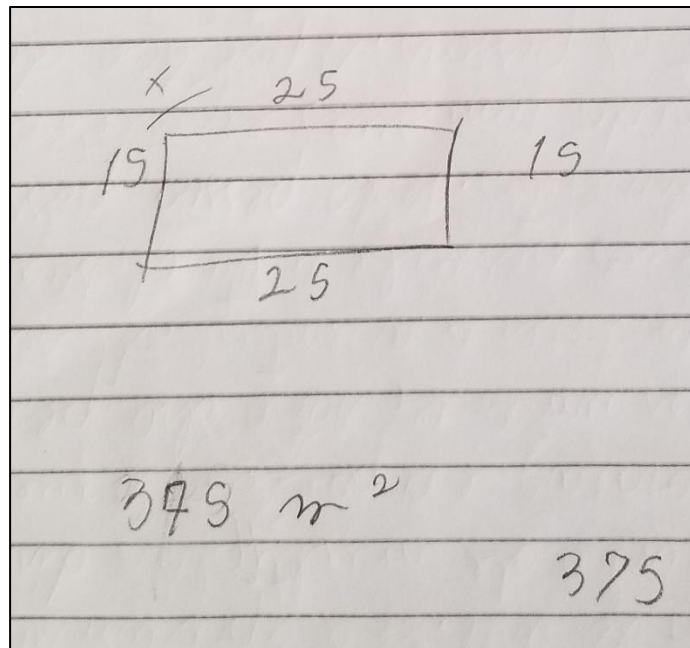


Figura 7 - Recorte 04 – Resolução de problemas – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos

- Aluno C<sub>2</sub>: agora é só multiplicar 375 por 12%.

Execução:  $x + 10$

$$x + x + x + 10 + x + 10 = 80$$

$$4x = 80 + 20$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4}$$

$$x = 15$$

$$\begin{array}{r} 15 \text{ m} \\ \times 25 \text{ m} \\ \hline 375 \text{ m}^2 \end{array}$$

$$12\% = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$\begin{array}{r} 375 \\ \times 0,12 \\ \hline 45 \text{ m}^2 \end{array}$$

A área da garagem é de 45 metros<sup>2</sup>

Figura 8 - Recorte 05 – Resolução de problemas – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos

Em relação ao grupo C, os alunos pegaram o espírito de equipe e trabalharam em conjunto para determinar a incógnita, com alguns questionamentos do pesquisador, traçaram uma maneira de solucionar o problema e por fim executaram o problema de forma satisfatória.

Para encerrar a atividade, foi realizada uma explanação da solução do problema, a aluna A<sub>1</sub> foi ao quadro realizar a resolução do problema, com uma rica explanação, porque o grupo A havia realizado a resolução da atividade de maneira incorreta e o grupo C interveio, e em conjunto acharam a resolução correta e aceita pelos grupos para a atividade proposta.

- **Comentários da atividade 03**

A atividade de grupos apresentou impasses, devido ser a primeira atividade trabalhada em equipe. O grupo A iniciou o trabalho em equipe e se perdeu ao longo

do processo; o grupo B não aderiu ao espírito da atividade e trabalhou de forma fragmentada; apenas o grupo C apresentou êxito na execução da atividade.

Nessa perspectiva Magalhães e Varizo (2016) alertam que se as atividades iniciarem com trabalhos em grupos corre o risco de um educando sobressair perante os colegas, e impor seu ponto de vista sobre o restante do grupo de forma a levar os integrantes aceitarem esse ideal sem promoverem discussões.

As autoras também salientam que a dinâmica de grupo exige que todos os participantes trabalhem de forma colaborativa sem ter uma hierarquia.

Em reflexão, o pesquisador começou a pensar em estratégias para as próximas aulas em grupos, de forma a motivar os educandos com a atividade proposta e ter autogestão ao realizar atividades com tal abordagem.

### **3.2 Oficinas de Investigação Matemática**

Após a preparação do ambiente com a fase resolução de problemas - oficinas de resolução de problemas - se iniciou a fase das aulas de investigação. Como suporte, teve a obra de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

As investigações aconteceram durante o mês de agosto e, como na fase da heurística, foi realizada uma aula introdutória do conteúdo, seguida de três abordagens de investigação. Em relação ao conteúdo se optou por dar sequência ao estudo de área e perímetro de figuras plana e terminando com uma exploração sobre o critério de existência de triângulos.

Ponte, Brocardo e Oliveira. (2016) abordam que o trabalho em grupo aumenta o surgimento de várias alternativas para a exploração de uma atividade. Diante disso, o pesquisador continuou a realização das atividades em grupos e diante de alguns problemas com essa dinâmica, na última atividade de resolução de problemas buscou alunos com aspectos de líderes e convidou-os a formarem seus grupos. Como Magalhães e Varizo (2016) relatam, poderia esbarrar no problema de hierarquia, mas o pesquisador viu tal possibilidade como uma nova forma de se formar os grupos e uma tentativa de a nova abordagem dar certo.

De modo similar à resolução de problemas, na etapa que compreende a investigação matemática, se trabalhou com questões abertas e fáceis, o que Pontes

(2003) chama de “exploração”. O objetivo foi o mesmo da resolução de problemas: começar a inserir aos poucos a metodologia para que, com o passar do tempo, pudesse trabalhar com atividades classificadas como investigativas.

Ao iniciar cada uma das atividades de exploração o aluno foi instruído a redigir um relatório, contendo todos os passos da resolução da atividade: pensamentos, conjecturas aprovadas, conjecturas refutadas, angústias, e etc.

- **Atividade introdutória**

A atividade introdutória foi elaborada com o objetivo de esclarecer sobre as fases de uma aula investigativa e teve como suporte Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que relatam que as fases permeiam a observação, a formulação de questões, o levantamento de hipóteses, testa valores para hipótese, justifica a veracidade ou não da hipótese inferida anteriormente.

Foi exposto à turma que seria necessário fazer um registro das atividades, porque o professor não poderia fazer o acompanhamento ferrenho de todos os grupos durante a aula. Também foi relatado que ao término de cada atividade os grupos deveriam fazer uma defesa argumentativa para a turma. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) alertam que sem uma discussão final uma atividade investigativa pode perder seu sentido.

Para finalizar a aula, foi levado o geoplano e deixado que os alunos o manuseassem livremente para, posteriormente, o professor explicar o nome de tal ferramenta, para que servia e de que forma seria utilizada. Tal procedimento pode ser observado nas Figuras 9 e 10.



Figura 9 - Momentos da fase introdutória I – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor.



Figura 10 - Momentos da fase introdutória II – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

Em contato inicial, os alunos se mostraram muito motivados, uma vez que iriam trabalhar com uma ferramenta que não conheciam: geoplano. E nesse momento o pesquisador se mostrou bastante apreensivo em relação ao geoplano retirar o foco da pesquisa, que seria a investigação matemática.

- **Atividade 01**



A primeira atividade, exposta do apêndice D na página 96, foi realizada no dia nove de agosto de dois mil e dezoito, obteve o comparecimento de 12 alunos. Dessa forma a turma foi disposta em 3 grupos e a atividade tinha o objetivo de que cada grupo estabelecesse relações entre área e perímetro de um quadrado ao alterar a medida de seus lados.

O trabalho iniciou com a leitura da atividade proposta, dando ênfase aos questionamentos, de modo a nortear o trabalho, porém salientado aos alunos a não se prenderem a tais apontamentos, pois isso poderia limitar suas descobertas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) uma exposição é muito vantajosa principalmente se vier acompanhada de uma introdução oral realizada pelo professor.

Os autores também apontam que o professor tem que garantir que os alunos entendam o sentido da proposta, ou seja, o que se espera deles ao realizar a atividade. Também fica evidente que, na apresentação inicial, o docente tem que tomar cuidado, uma vez que a interpretação é um dos objetivos de uma aula investigativa.

Ao iniciar a tarefa, grande parte dos grupos, ao tentarem resolver a atividade optaram por dar continuidade à sequência de questionamentos proposta, com o intuito de tentar reconhecer uma regularidade, conforme pode-se observar nas Figuras 11 e 12, em que os grupos A e B utilizam o processo citado.

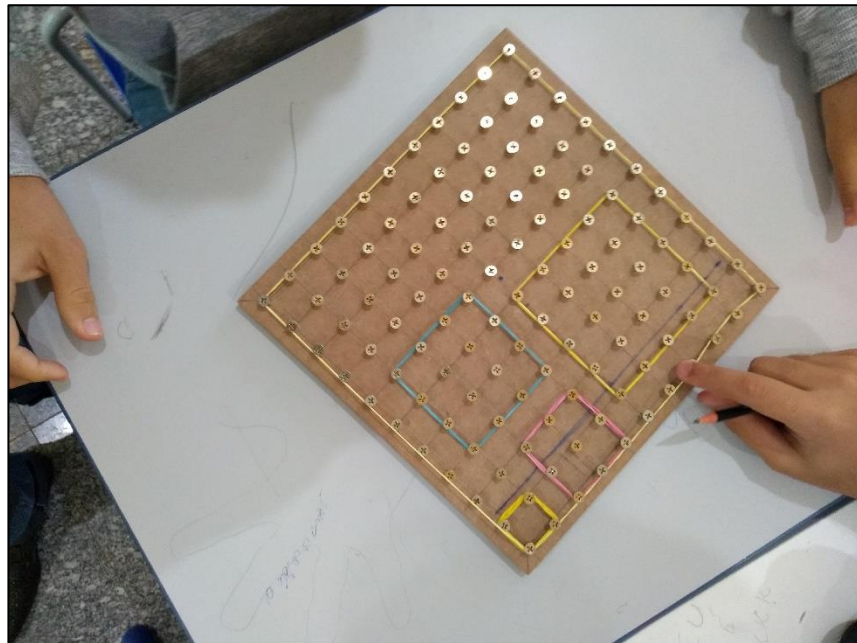


Figura 11 - Momentos da atividade 01 - grupo A – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

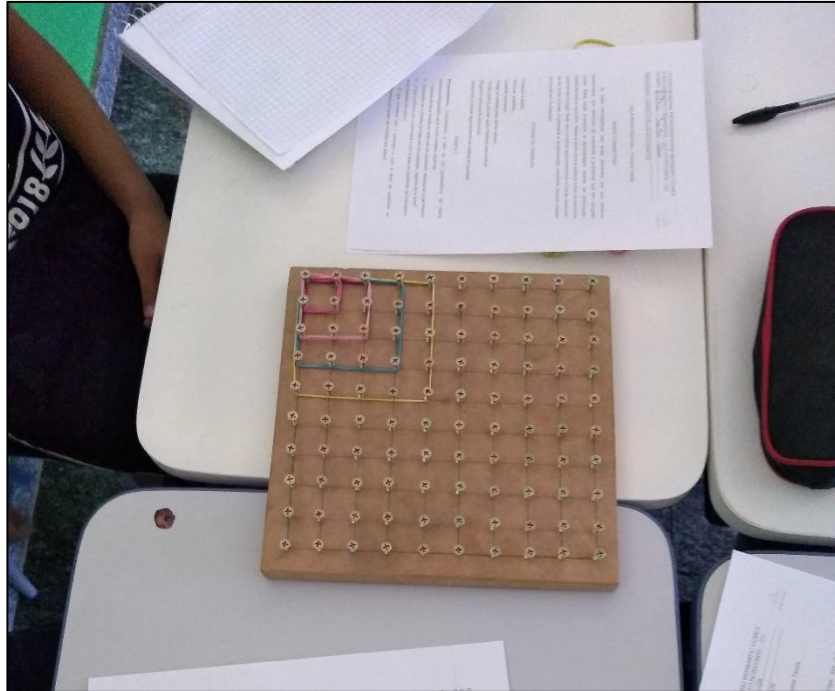


Figura 12 - Momentos da atividade 01 - grupo B – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

Devido ao trabalho com a resolução de problemas e com a manipulação do geoplano na aula anterior, os alunos, apesar de apresentarem certas dúvidas, não solicitaram de forma constante o pesquisador para tal finalidade, o que demonstra que o trabalho anteriormente feito, resultou em certa autonomia.

A passagem anterior vem ao encontro das ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), quando eles relatam que os alunos devem sentir que suas ideias são valorizadas sem a necessidade de uma validação constante do professor.

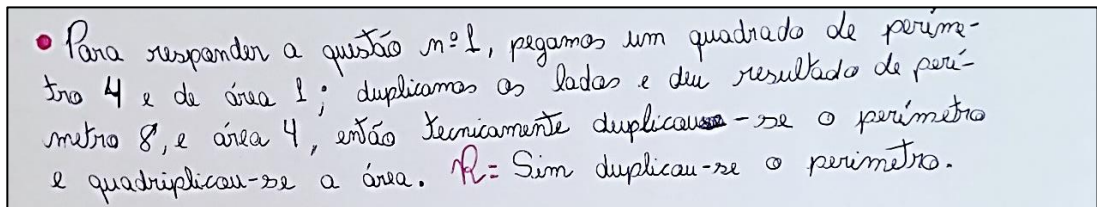
Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) atentam que o docente deve percorrer os grupos de forma a realizar um acompanhamento e identificar dificuldades, intervindo de maneira que tais dificuldades não gerem desinteresse. Dessa forma, o professor começou a percorrer cada um dos grupos para saber o que estavam fazendo e quais suas estratégias de resolução. No grupo A se obteve tais apontamentos:

- *Professor: O que pretendem para solucionar os questionamentos?*
- *Aluno A<sub>1</sub>: Professor, iremos tomar um quadradinho de lado igual a um e utilizaremos ele como unidade de medida.*
- *Professor: Muito bom, pode prosseguir com a atividade.*

Percorrendo os demais grupos, os mesmos tiveram a mesma ideia de pegar um quadradinho unitário e fazer as operações solicitadas, utilizando-o. Em relação à fala, a ideia de cada grupo ficou bem clara, mas no relatório os grupos escreveram apenas as repostas solicitadas, onde alguns ainda tentaram argumentar de forma superficial as estratégias adotadas.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) mencionam que os alunos estão acostumados a escrever respostas sintéticas em matemática, apenas apresentam cálculos ou realizam uma escrita de maneira confusa, não relatando as estratégias tentadas e abandonadas e conjecturas testadas e rejeitadas.

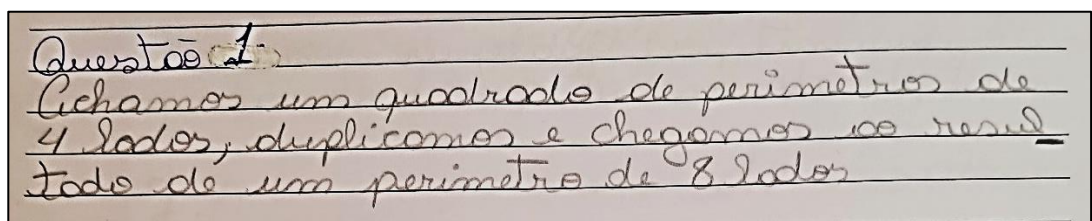
No grupo A, fica evidente que trataram o quadradinho unitário como quadrado de perímetro 4 e área 1, como se pode observar na Figura 13.



• Para responder a questão nº 1, pegamos um quadrado de perímetro 4 e de área 1; duplicamos os lados e deu resultado de perímetro 8, e área 4, então tecnicamente duplicou-se o perímetro e quadruplicou-se a área. R: Sim duplicou-se o perímetro.

Figura 13 - Recorte 01 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

O grupo B, chamou o quadradinho unitário como quadrado de perímetro 4. Como se observa na Figura 14, logo abaixo:



Questão 1  
Chamamos um quadrado de perímetro de 4 lados, duplicamos e chegamos ao resultado de um perímetro de 8 lados

Figura 14 - Recorte 02 – investigação matemática – Grupo B  
Fonte: Relatórios dos alunos

Já o grupo C, deixou implícito apenas em representações o que estava tentando fazer ao solucionar os questionamentos propostos, como se pode observar na imagem que se encontra logo abaixo:

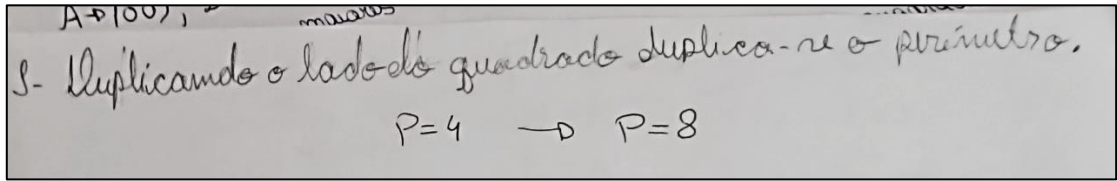


Figura 15 - Recorte 03 – investigação matemática – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos

De forma geral, é perceptível que os grupos apresentaram dificuldades em redigir o relatório e que a passagem da linguagem falada para a escrita não foi de forma clara e bem redigida, o que poderia ocasionar dificuldades de entendimento para uma terceira pessoa, que viesse a analisar os relatórios. Tal dificuldade no tanger dos fatos, já era esperada. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) deixam claro em seu trabalho a dificuldade apresentada pelos alunos ao terem que fazer representações escritas às quais os mesmos não estão habituados no seu dia a dia escolar.

A atividade prosseguiu sem muitas dificuldades, sendo que não aconteceu praticamente nenhuma intervenção do pesquisador até o questionamento de número 4. Na questão 5, os alunos já apresentaram dúvidas e solicitaram intervenções.

O grupo B se manifestou inquieto sem saber o que deveria ser feito na questão, já que no geoplano poderia ser construído um quadrado com no máximo 10 de lados e a questão pedia para acharem quadrados com lados maiores.

- Aluno B<sub>2</sub>: Professor o que eu vou fazer? Não se pode construir um quadrado com mais de 10 de lado no geoplano.
- Professor: Vocês já realizaram os questionamentos anteriores, verifiquem se conseguem estabelecer alguma regularidade.
- Aluno B<sub>2</sub>: Sim professor, tentaremos fazer uma comparação.

Após o pesquisador apresentar um apontamento para os alunos do grupo B, eles começaram a tentar montar um esquema para encontrar similaridades entre os lados com o perímetro e a área. Tal esquema pode ser observado na imagem abaixo:

$L = 1$	$P = 4$	$A = 1$
$L = 2$	$P = 8$	$A = 4$
$L = 3$	$P = 12$	$A = 9$

Figura 16 - Recorte 04 – investigação matemática – Grupo B  
Fonte: Relatórios dos alunos

Em instantes após os questionamentos, os alunos conseguiram visualizar que o perímetro era o lado multiplicado por 4 e a área o lado multiplicado por ele mesmo, tal descrição pode ser observada na passagem redigida no relatório logo abaixo:

5 - O perímetro fica 40, 80, 100, e área 100, 400 e 10000, conseguimos perceber usando a fórmula  $X \cdot 4$  para o perímetro e  $X \cdot X$  para área.

Figura 17 - Recorte 05 – investigação matemática – Grupo B  
Fonte: Relatórios dos alunos

O mesmo questionamento surgiu nos outros dois grupos e o pesquisador os tratou da mesma forma. Após análises, todos os grupos conseguiram chegar à resposta para o questionamento proposto.

O questionamento de número seis também gerou indagações, e foi necessária a intervenção do pesquisador. Os grupos apresentaram a mesma dúvida e o professor tratou os grupos de forma similar, então aqui, serão relatados, apenas os apontamentos e as soluções do grupo A.

- Aluna A<sub>2</sub>: Professor, como eu vou fazer essa divisão, pois o quadrado só tem 1 de lado e fica difícil de fazer a figura no geoplano.
- Professor: Já tentaram pegar outro quadrado como unidade de medida? Quem sabe um que possua medidas par para o lado.
- Aluna A<sub>2</sub>: Não professor, ainda não tentamos.
- Aluna A<sub>1</sub>: Vamos pegar um quadrado de lado 4.
- Professor: Faça isso.

Após a dica deixada pelo pesquisador, os alunos do grupo A resolveram a questão da forma apresentada na Figura 18, onde considerou um quadrado de lado de 4 unidades com medida de comprimento e realizou a divisão do lado por dois e ficaram 2 unidades como medida de lado e a área total de 4 unidades de área.

• Questão nº 6, Para responder essa questão, pegamos um quadrado de perímetro 16 e área 16; dividimos seus lados por 2 e ficamos com área 4.

Figura 18 - Recorte 06 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

A última questão tinha o objetivo de inferir uma generalização para a relação entre lado e perímetro e lado e área, em suma, o que deveria acontecer com a área e o perímetro de um quadrado qualquer quando multiplicamos o lado por um número inteiro qualquer.

Na generalização o grupo A começou a analisar os resultados de forma individual até chegarem em que o perímetro seria o valor do lado multiplicado por quatro e a área seria o valor do lado multiplicado por ele mesmo, como se observa a seguir:

• Questão nº 7, Se multiplicamos a área e o perímetro por um número qualquer continuará com o mesmo esquema (Multiplicado por quatro), O perímetro por 4 e a área por ele mesmo.

Figura 19 - Recorte 07 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

Os alunos do grupo B completaram o esquema da quinta pergunta e, através de análises, conseguiram também chegar na generalização. Como se pode notar nas Figuras 20 e 21.

$L = 1$	$P = 4$	$A = 1$
$L = 2$	$P = 8$	$A = 4$
$L = 3$	$P = 12$	$A = 9$
$L = 4$	$P = 16$	$A = 16$
$L = 10$	$P = 40$	$A = 100$
$L = 20$	$P = 80$	$A = 400$
$L = 100$	$P = 400$	$A = 10000$

Figura 20 - Recorte 08 – investigação matemática – Grupo B  
Fonte: Relatórios dos alunos

7 - A área perimetro e lado x lado e o perimetro perimetro  
lado x 4

Figura 21 - Recorte 09 – investigação matemática – Grupo B  
Fonte: Relatórios dos alunos

Já o grupo C, apesar de ter realizado corretamente todas as questões anteriores, não conseguiu fazer uma generalização coerente para a atividade, apenas inferiu que o valor da área e do perímetro iria aumentar, ou seja, mesmo tendo uma questão em que deveria ser dividido o lado por um número, e o perímetro e a área diminuiriam, os alunos não conseguiram fazer uma análise consistente e observar que a questão, que eles tinham resolvido anteriormente, era suficiente para derrubar a generalização inferida. Nessa perspectiva Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que os alunos tendem a aceitar generalização apenas com alguns testes e diante disso o professor deve estimular os mesmos a tentarem achar contraexemplos.

A explanação foi proveitosa e coerente, visto que foi escolhida uma atividade simples e todos os grupos haviam resolvido de forma satisfatória, quase todas as etapas. O grupo A, com a auxílio do geoplano, foi desenhando as figuras e explicando o método utilizado para resolver cada questão, na hora da análise o grupo B complementou que seria mais fácil analisar os dados utilizando um esquema para representar o lado, o perímetro e a área. E o grupo C percebeu que apesar de realizar as atividades anteriores, não conseguiram realizar uma generalização correta. Em suma, os alunos expuseram e ouviram as explicações, demonstrando que foi entendido o que foi exposto pelos seus colegas de sala.

- **Comentários da atividade 01**

A aula foi proveitosa, o problema proposto foi simples e sem muitas dificuldades durante a sua execução. O trabalho com o geoplano foi pertinente, dessa forma, permitiu que os alunos trabalhassem com o concreto e pudessem fazer e desfazer figuras de maneira rápida.

A maioria dos grupos conseguiu realizar todas as atividades com êxito e estabeleceu uma generalização aceita para a atividade proposta. Na tentativa de uma generalização coerente, alguns alunos utilizaram de esquemas e análises individuais em conjunto com cada uma das questões.

Apesar de se notar algumas dificuldades em relação à generalização, os alunos praticamente não solicitaram a intervenção do professor durante a aula. Em suma, a solicitação do pesquisador foi realizada em poucos momentos durante a aula.

Em relação a não dependência do professor, Santos et al (2002, p. 102) comenta que os alunos reagem à atividade investigativa de modo diretamente relacionado com sua visão sobre o ensino de matemática. Os mesmos autores afirmam que "[...] nos alunos, em que predomina uma visão automatizada da matemática e de uma aprendizagem que decorre das explicações do professor e da prática de regras, verifica-se uma falta de autonomia que acaba por trazer muitas dificuldades no prosseguimento de um trabalho investigativo."

A grande dificuldade da aula foi a passagem da linguagem oral para a escrita, onde os relatórios apresentaram apenas as respostas das perguntas feitas pelo pesquisador, mas como foi argumentado anteriormente, tal dificuldade já era esperada. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), em suas obras, já alertam os pesquisadores das dificuldades em relação à escrita de relatórios por parte dos alunos.

Também é importante salientar que os alunos não realizam tal abordagem - a escrita de um relatório detalhado, em seu dia a dia - e isso gerou dificuldades. O registro por escrito se constitui um desafio adicional porque exige um tipo de representação que os alunos não estão habituados (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA., 2016).

Para finalizar, o pesquisador poderia ter iniciado as argumentações com o grupo que errou a generalização da questão proposta, pois assim, o debate poderia



ter sido bem mais aproveitado. Dessa forma, com o erro, ficou a reflexão para as aulas posteriores.

- **Atividade 02**

A segunda atividade, apêndice E na página 98, foi realizada no dia quatorze de agosto de dois mil e dezoito, obteve o comparecimento de 14 alunos, assim a turma foi disposta em 3 grupos e o objetivo da atividade era trabalhar a relação da área de figuras planas com seu formato, evidenciando que figuras que possuem o mesmo valor para o perímetro pode ter valores diferentes de áreas.

Para dar início aos trabalhos, foi distribuída a atividade impressa, propondo a leitura da mesma e, em seguida, foi realizado um breve comentário sobre a atividade e seus questionamentos. Nesta atividade, foi possível perceber um bom nível de envolvimento e participação dos alunos durante a realização das tarefas, conforme mostra as Figuras 22, 23 e 24.



Figura 22 - Momentos da atividade 02 I – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

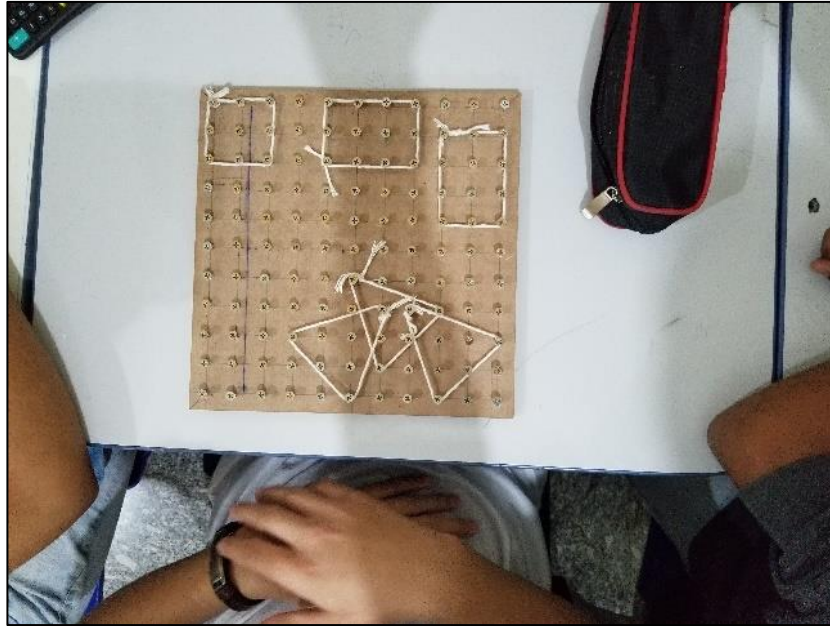


Figura 23 - Momentos da atividade 02 II – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

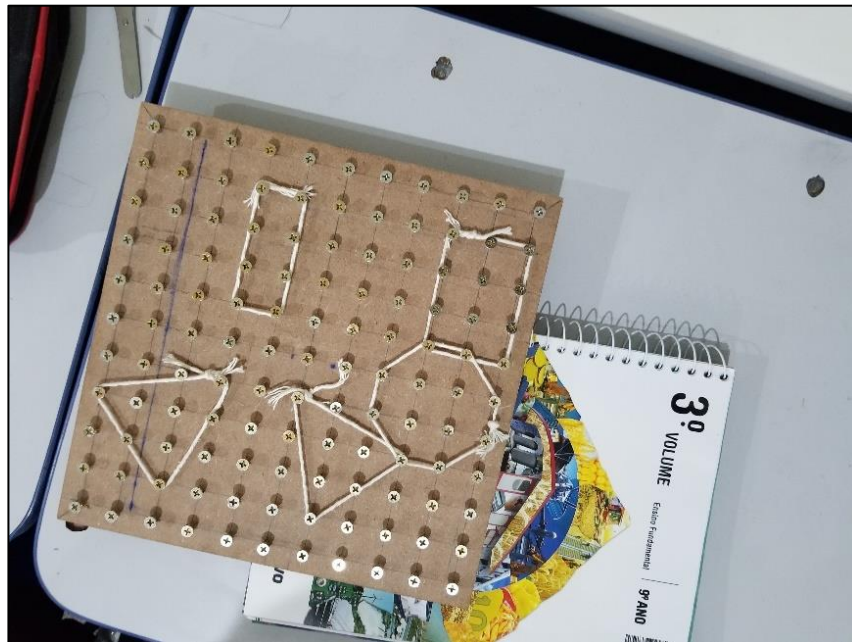


Figura 24 - Momentos da atividade 02 III – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

Após o início da atividade, durante a análise dos questionamentos, foi possível ouvir comentários como:

**Grupo A:**

*A<sub>2</sub>: Professor, as figuras terão o mesmo perímetro, pois os barbantes foram cortados do mesmo tamanho.*

**Grupo B:**

*B<sub>1</sub>: Professor, está difícil sobre o perímetro do triângulo, pois a linha passa pelo meio dos quadradinhos.*

*B<sub>4</sub>: As figuras terão o mesmo perímetro. Os barbantes são do mesmo tamanho.*

**Grupo C:**

*C<sub>3</sub>: Professor, está difícil achar o perímetro de todas as figuras geométricas.*

*Professor: Já tentou analisar o tamanho do barbante?*

Em instantes, os grupos perceberam que o perímetro iria permanecer inalterado, pois os barbantes foram cortados de forma que possuíam o mesmo tamanho. O cálculo de área de triângulos, já sabiam da aula introdutória, que poderiam juntar os espaços em que o barbante passava na diagonal de um quadradinho do geoplano para formar um novo quadrado unitário de área.

Em análise, vale salientar, que os alunos conseguiram preencher a tabela solicitada na atividade, como se pode observar nas imagens abaixo.

Figura	Perímetro	Área
Quadrado	29,5	4
Retângulo 01	29,5	6
Retângulo 02	29,5	3
Triângulo 01	29,5	4,5
Triângulo 02	29,5	4
Triângulo 03	29,5	5,5
Figura qualquer	29,5	6

Figura 25 - Recorte 10 – investigação matemática – Grupo A

Fonte: Relatórios dos alunos

Figura	Perímetro	Área
Quadrado	29,5	4
Retângulo 01	29,5	3
Retângulo 02	29,5	6
Triângulo 01	29,5	3
Triângulo 02	29,5	3
Triângulo 03	29,5	5
Figura qualquer	29,5	7

Figura 26 - Recorte 11 – investigação matemática – Grupo B

Fonte: Relatórios dos alunos

Figura	Perímetro	Área
Quadrado	8	4
Retângulo 01	8	3
Retângulo 02	8	3
Triângulo 01	8	2
Triângulo 02	8	2
Triângulo 03	8	2
Figura qualquer	8	2

Figura 27 - Recorte 12 – investigação matemática – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos

Superada a dificuldade do perímetro, os grupos praticamente isolaram o pesquisador e prosseguiram com a resolução dos questionamentos e ao final conseguiram generalizar a questão proposta. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) afirmam que os alunos devem perceber que ao executar uma atividade poderão ter o auxílio do professor, mas tudo depende de sua iniciativa.

Como na primeira aula, a redação do que estavam executando se resumiu apenas em respostas para as questões, o que dificulta para o pesquisador analisar o pensamento dos alunos em frente a cada um dos questionamentos levantados.

Dessa forma, apesar de notarem que se pode ter figuras geométricas com o mesmo perímetro e áreas diferentes, na redação escrita não ficou bem clara essa intenção, como se pode observar na imagem de um dos recortes da atividade do grupo A.

Que conclusões vocês podem tirar...  
perímetros? Chegamos a conclusão que se o tamanho do barbante não mudar o perímetro será sempre o mesmo só a área que mudará.

Figura 28 - Recorte 13 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

A discussão em coletivo foi um momento muito rico na troca de ideias e entendimento de novos raciocínios. Houve uma grande agitação inicial sobre a forma em que todos queriam expor suas descobertas. Ao ouvir os colegas, os outros grupos tiveram oportunidade de comparar e refletir sobre estratégias de resolução e conceitos. Também notaram que cada grupo realizara construções de figuras e elas divergiam em tamanhos e formas, mas a generalização final se mantivera.

- **Comentários da atividade 02**

No início da aula, os alunos se mostraram motivados e isso foi fundamental para o desenvolvimento das atividades. Nessa tarefa, percebeu-se mais envolvimento e facilidade em realizar a atividade, por parte de todos os grupos. Pode-se dizer que os alunos se apresentaram mais confiantes no processo e puderam formular mais maneiras de solucionar os problemas propostos. Como na primeira aula a grande dificuldade dos grupos foi em relação a expressar por escrito os questionamentos e descobertas.

Contudo, nessa atividade, os alunos se mostraram mais confiantes, interessados e esclarecidos sobre o que era necessário a ser realizado. As perguntas do tipo "o que é para fazer?" "Isso está correto?" quase não existiam mais.

- **Atividade 03**

A terceira atividade, apêndice F na página 100, foi realizada no dia quinze de agosto de dois mil e dezoito, obtive o comparecimento de 14 alunos, assim a turma foi disposta em 3 grupos e o objetivo da atividade era estabelecer o critério de existência de um triângulo.

Como nas aulas anteriores foi feita a entrega do material impresso, realizada a leitura e enfatizados os questionamentos da lista. Como instrução os alunos primeiramente preencheram a tabela disposta na tarefa e posteriormente começaram as construções dos triângulos utilizando folhas quadriculadas e régua, como pode ser observado logo abaixo.



Figura 29 - Momentos da atividade 03 – investigação matemática  
Fonte: Arquivo do professor

Inicialmente, os alunos tiveram dificuldades de construir os triângulos, alegando ao pesquisador tal fato, mas com um pouco de insistência conseguiram perceber, através da troca de informações com os demais membros do grupo, que era impossível construir triângulos em alguns dos casos apresentados.

O interessante é que em perguntas anteriores à generalização os alunos já conseguiram perceber o critério de existência de um triângulo. Como se pode observar no recorte logo abaixo, quando se pergunta o que se pode comparar dos desenhos com os resultados da tabela, o grupo A já visualiza uma relação existente entre os lados.

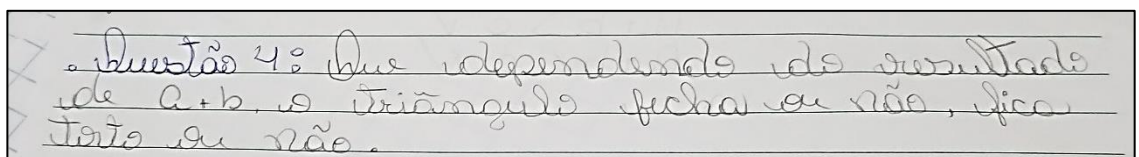


Figura 30 - Recorte 14 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

No quinto questionamento, pede-se para fazer uma comparação entre os triângulos, fica mais evidente o estabelecimento do critério de existência de um triângulo, o grupo também até inferi exemplos onde não é possível a construção de triângulos. Veja o recorte logo abaixo.

Questão 5: Observando os demais casos, percebe-se que se o resultado de  $a+b$  for ( $=$  ou  $<$ ) que  $c$ , o triângulo não fecha; como prova os casos: 4, 5, 7, 8.

Figura 31 - Recorte 15 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

A chegar na questão 08, novamente se observa que os alunos conseguiram compreender a atividade e chegar em uma generalização, mas a redação escrita não expôs todos os elementos que levaram a construção da conjectura em questão, como se observa logo abaixo, em recortes da atividade realizada pelos grupos A e C.

as lados.  
Resposta n°8 = Para fazer um triângulo, temos que observar suas medidas, porque se as medidas não duma  $a+b > c$ , o triângulo não da certo.

Figura 32 - Recorte 16 – investigação matemática – Grupo C  
Fonte: Relatórios dos alunos

Questão 8: Pode-se dizer que mesmo para construir um triângulo qualquer, precisa-se de certeza com as medidas de seus lados, pois é possível que de  
 $a+b = c$    
 $a+b > c$    
 $a+b < c$

Figura 33 - Recorte 17 – investigação matemática – Grupo A  
Fonte: Relatórios dos alunos

Apesar de ser uma questão com um nível maior de abstração em relação às anteriores, os alunos conseguiram realizar com êxito e estabeleceram o critério de existência de triângulos, assim durante a explanação os colegas demonstraram entender bem o exposto pelos demais membros da sala.

- **Comentários da atividade 03**

Ao propor tal atividade esperava-se que os alunos tivessem dificuldades ao obter uma generalização, os mesmos se mantiveram autônomos, sem praticamente solicitar a presença do pesquisador para realizar esclarecimentos.

Durante a execução da atividade, foi interessante observar que mesmo em questões iniciais, os grupos já começaram a perceber a relação entre os lados e a possibilidade de construção de triângulos. Como em aulas anteriores, novamente, a dificuldade maior foi em relação à redação do relatório, que se resumiu em responder às questões propostas.

Finalizadas as aplicações, o pesquisador fica pensativo, se tivesse trabalhado anteriormente a redação escrita com os alunos poderia ter obtido mais êxitos ao realizar as atividades propostas, pois os alunos mostraram autonomia em quase todo o processo e empenho em realizar a atividade e, como fica difícil acompanhar simultaneamente a execução da atividade em todos os grupos, um relatório com detalhes e bem redigido poderia ajudar na compreensão do entendimento e procedimentos adotados para a resolução, possibilitando uma análise mais coerente e, a partir disso, traçar novos objetivos de aprendizagem.

### **3.3 Dificuldades ao se trabalhar com atividades investigativas.**

Ao ter um contato com aplicações de atividades investigativas, se percebe inúmeras dificuldades, de modo que algumas delas podem ser sanadas durante o processo. No início, a dificuldade era em relação ao fato de tanto o pesquisador como os alunos estarem mergulhados na metodologia tradicional e nunca terem trabalhado com metodologia investigativa, então perante tal apontamento, surgiu a ideia de se fazer uma fase de resolução de problemas, para posteriormente inserir um cenário investigativo.

Durante as primeiras aplicações foi observado que a turma se mostrou interessada, mas alguns alunos se mostraram um pouco distantes do processo e sem confiança em seu raciocínio, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) relatam que esse



processo é natural, desde que os alunos ainda não estão acostumados com a metodologia investigativa.

Os alunos ao acharem uma regularidade se dão por satisfeitos, sem buscar contraexemplos para validar a generalização inferida. Porfírio e Oliveira (1999, p.115) afirmam “Os alunos, sobretudo os que têm pouca experiência de trabalho neste tipo de tarefas, tendem a dar-lhes o estatuto de conclusões. Ou seja, uma relação que se verifica ser válida para vários casos, é assumida como sendo válida para todos. Coloca-se então nesta fase a questão da demonstração ou prova.”.

Ao realizar o trabalho investigativo, apesar de serem poucos grupos, o pesquisador não conseguiu estar presente em todos os grupos e acompanhar todos os passos do processo. Desse modo, a única forma de compreensão total do pensamento de cada um dos grupos, ficou relegada aos relatórios.

Outra dificuldade foi a escrita dos relatórios, onde os alunos apenas responderam os questionamentos sem ter uma escrita detalhada do processo. Ramos (2015, p. 97) ao analisar Brocardo (2002) afirma que “numa fase inicial do processo investigativo é comum os alunos apresentarem respostas curtas e sem muita informação, contudo à medida que vão adquirindo experiência, a tendência é melhorar a qualidade da escrita dos relatórios que produzem sobre suas investigações”.

Segundo Ramos (2015) o relatório é importante, porque traz um retrospecto que pode ser analisado afim de compreender elementos que anteriormente passaram despercebidos. Nesse aspecto Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 54) expõem que “Os relatórios obrigam os alunos a refletir sobre o trabalho realizado na sua investigação levando-os a aprofundar clarificar, muitas vezes, aspectos menos conseguidos”.

Apesar de o professor falar da importância de redigir as conjecturas testadas e refutadas nos relatórios, não foi encontrada nenhuma descrição referente a tal assunto, o que leva a pensar que a cultura em que os alunos estão inseridos faz com que eles não expõem suas inquietações e as conjecturas que não foram validadas.

Outra dificuldade inerente é em relação ao tempo e ao cumprimento do currículo escolar, uma vez que, atividades investigativas demandam tempo e alguns conteúdos são mais complexos do que outros, o que faz com que o professor que queira trabalhar somente com a abordagem investigativa esbarre no problema de elaboração de atividades e cumprimento dos conteúdos prezados no currículo base.

### **3.4 Impressões e o que mudou nas aulas depois de se utilizar a metodologia investigativa**

O trabalho com a metodologia investigativa em sala de aula proporcionou um ambiente de discussão e aprendizado, possibilitando a construção de novas atitudes em frente a problemas matemáticos.

Dessa forma, com o passar das atividades, os alunos se mostraram cada vez mais confiantes e sempre ao ver um problema se lançaram ao tentar visualizar regularidades para inferir conjecturas.

Passada a dificuldade inicial da dinâmica de grupo, foi observada que esse arranjo dos alunos foi bastante adequado e favoreceu a interação entre os alunos. Nas últimas atividades ficou evidente, que essa forma de trabalho, proporcionou o diálogo, partilha de ideias, o ouvir questionamentos e uma ajuda mútua entre os componentes.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 30) relatam que ao se trabalhar em grupos "muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando, assim, o trabalho conjunto." Tal passagem dos autores foi observada nas aplicações, pois apesar de ter uma interação entre os componentes sempre um ou dois componentes direcionavam os questionamentos ao professor. O trabalho em grupo também favoreceu o desenvolvimento de habilidade como: se expressar, saber ouvir, compreender e aceitar a ideia do colega.

A discussão das atividades foi um momento enriquecedor, uma vez que nela se pode observar as estratégias utilizadas por cada um dos grupos, revisar conteúdos anteriores e tecer comentários sobre conteúdos matemáticos. Com essa prática, observou que até mesmo os alunos considerados tímidos, tentaram realizar suas exposições e sempre que apresentavam dificuldades tinham o apoio dos demais colegas.

Em relação às mudanças, a primeira foi a não dependência do professor. Após aplicar as atividades investigativas, os alunos da turma mostraram uma autonomia maior, onde o professor parou de ser solicitado com frequência e os resultados e as dúvidas das questões passaram a ser discutidas com os demais alunos da sala.

A organização da turma saiu do modelo linear e passou a ser em grupos. Aqui é interessante salientar que os grupos formados naturalmente pelos alunos, são de

forma bem heterogênea em relação ao conhecimento, e quase todos os integrantes interagem em conjunto para solucionar o problema, sem um esperar a resposta do outro, como acontecia antes de se utilizar tal abordagem.

Outra mudança foi em relação a discussão dos resultados, pois os alunos tinham pavor de irem ao quadro, principalmente pelo medo do erro, a metodologia anteriormente empregada contribuía para a visão do erro como algo a ser evitado. Após a realização da pesquisa, até os alunos considerados acanhados e com dificuldades em matemática se disponibilizaram para realizar questões na lousa e expor suas ideias para os demais colegas, nesse ponto o professor foi surpreendido pela maturidade que a sala adquiriu, pois quando um colega “travava” ou não conseguia realizar uma questão, os demais colegas, ao invés de julgar, ofereciam suporte para que ele conseguisse realizar o que se propôs.

Apesar de a metodologia tradicional da exposição dos conteúdos ser utilizada nas aulas, após um estudo investigativo, o professor passou a ouvir mais os educandos, fazer apontamentos e questionamentos, oferecer suporte e não uma resposta pronta. E, sempre que possível, é necessário trazer para a turma atividades que exigem o pensar, tornando os alunos mais críticos, e não apenas seres passivos e receptivos aos conteúdos expostos pelo docente.

## 4 PRODUTOS

O presente capítulo tem o objetivo de divulgar alguns produtos derivados da pesquisa, bem como futuros produtos que têm potencial para serem desenvolvidos.

### 4.1 Resumo aceito para publicação

Foram aceitos os resumos apresentados a seguir, com a temática relacionada ao projeto de pesquisa, produzido em conjunto com a orientadora.

**Título:** A investigação matemática como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem de geometria plana para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

**Periódico:** Anais do I Congresso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías. V01, pg. 62.

**Ano:** 2018

**Link:** a publicar. O conteúdo a ser publicado pode ser observado na Figura 34 e nos anexos A e B.

<i>I Congreso Virtual Iberoamericano sobre Formación de Profesores, 2018</i>	
<b>A investigação matemática como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem de geometria plana para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental</b> <i>Osmair Carlos dos Santos y Elisabeth Cristina de Faria</i> (Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes y Universidade Federal de Goiás, Brasil)	62
<b>La experimentación con el Geogebra en un contexto de formación docente en matemática</b> Ivonne Sánchez, Juan Luis Prieto y Luis Andrés Castillo (Aprender en Red, Venezuela; Universidade Federal do Pará, Brasil)	63
<b>Formación de profesores de matemáticas basada en comunidades de práctica interdisciplinares en Brasil</b> <i>Jenny Patricia Acevedo-Rincón</i> (Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Colombia)	64
<b>Aspectos cognitivos sobre el aprendizaje de la función. Caso: Formación inicial de licenciados en Educación Matemática mención Informática de la UNFEM</b>	65

Figura 34 – Recorte do sumário da Revista do I Congresso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías

Fonte: Revista do I Congresso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2018.

**Título:** A resolução de problemas numa perspectiva metodológica para alunos do 9 ano do Ensino Fundamental

**Periódico:** Anais do V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste.

**Ano:** 2018

**Link:** a publicar. O aceite do trabalho pela comissão do evento pode ser observado no anexo D e o resumo pode ser visto no anexo E

## 8.2 Produção técnica

**Produto:** Site de divulgação de informações sobre a metodologia de investigação matemática.

**Descrição:** Ambiente online de divulgação de informações, que permite auxiliar professores e graduandos, que desejam conhecer e aplicar a metodologia investigativa em suas aulas.

**Ano:** 2018

**Link:** <https://www.experiencias-em-educacao-matematica.com/> .

### 8.2.1 Descrição do site sobre divulgação da metodologia investigativa

Para uma divulgação ampla sobre investigação matemática, foi criada uma página na internet dedicada a professores e alunos de graduação, que desejam conhecer e aplicar a metodologia em questão, dessa maneira, foi feito um canal de disseminação de conteúdos investigativos.

A página sobre a divulgação da metodologia investigativa, além de estar presente na rede global, compartilha informações e documentos, permite a coleta de dados dos usuários, para uma futura implementação da pesquisa, também tem a função de possibilitar que seus visitantes tirem dúvidas ou envie sugestões através do “contate-nos”.

As abas "textos", "artigos", "reportagem sobre o ensino" e "galeria de vídeos", permitem que o usuário da página virtual, se insira em uma imersão da abordagem

investigativa, com o objetivo de uma maior compreensão do que é, e como funciona o processo utilizado por tal metodologia.

A aba "enquete" tem o intuito de saber se os usuários do site conhecem a metodologia investigativa e se usam em sua prática docente. Em caso positivo, se faz a indagação de quais as dificuldades encontradas ao se usar essa abordagem. O objetivo dessa aba é de alimentar dados para uma futura pesquisa sobre conhecimento e uso da abordagem investigativa em sala de aula por docentes, bem como elencar as dificuldades que aparecem com maior frequência entre os relatos, quando se trabalha com a abordagem em questão.

Na aba "exemplos de atividades" o docente encontrará uma sequência de exemplos de atividades de cunho investigativo, que poderão ser aplicadas em sala de aula, em "galeria de fotos", o mesmo, será capaz de ver fotos das aplicações das três primeiras atividades da aba mencionada no início do parágrafo.

Para finalizar, o espaço reservado para o contato, "contate-nos", permite que o usuário envie sugestões e dúvidas para o autor da página, proporcionando assim, uma assistência em relação aos questionamentos, possíveis melhorias e atualizações do site.

Dessa forma, a página virtual auxilia professores que desejam conhecer um pouco sobre a abordagem de investigação para melhorar sua prática docente, além de servir de um ambiente de coleta de dados para futuras pesquisas sobre a temática. A página inicial do site pode ser visualizada no anexo C.

**Produtos:** Vídeo e slide de apresentação

**Descrição:** Produção de um vídeo e de um slide para apresentação no I Congresso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías.

**Ano:** 2018

**Link:** <https://www.youtube.com/watch?v=9xOA00KtQU0&feature=youtu.be>

## CONCLUSÃO

O presente trabalho foi o resultado de uma pesquisa sobre investigação matemática em sala de aula, onde o estudo foi dividido em estudo do referencial teórico, preparação das atividades, aplicação das atividades e estudo dos resultados. Ao término do mesmo, espera-se ter alcançado o objetivo principal, que era analisar as possibilidades e as contribuições do uso da metodologia da investigação matemática no ensino de matemática quanto aos eixos espaço e forma e grandezas e medidas, tendo como base o estudo realizado em uma turma de 9º ano do Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes no município de Alto Horizonte – GO.

Para fundamentar o trabalho, foi buscado o aprofundamento do conhecimento acerca da investigação matemática, por meio de leituras de livros e artigos relacionados à temática, com esse suporte foi construído o referencial teórico do trabalho. Através desse meio, pode-se conhecer a opinião de autores sobre uma aula investigativa, quais etapas devem ser percorridas, qual a postura esperada para o professor e para os alunos, como ocorre a avaliação em uma aula investigativa, dentre outros assuntos relacionados ao tema. Com essa base teórica, pude adquirir mais conhecimentos e segurança para preparar e aplicar as atividades investigativas em sala de aula. O trabalho em sala de aula teve como foco a abordagem detalhada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

Para uma melhor preparação, foi realizada uma fase intermediária de resolução de problemas que permitiu mudar o cenário tradicional e proporcionar um ambiente mais aberto, em que tanto aluno quanto o professor, quebrasse a independência mútua. Ao final dessa fase, observou uma experiência enriquecedora, pois através dela, os alunos conseguiram exercer sua função de serem ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Com a inserção da metodologia de investigação, os alunos tiveram um espaço de descobertas e discussões, em que cada um dos momentos realizados em sala de aula, foram convidados a mergulhar em um processo que favorecia o desenvolvimento da organização, da representação, da generalização e do raciocínio, criando estratégias e manifestando entendimentos. Também foi observado que durante a realização das atividades foi inevitável a discussão dos resultados, gerando um ambiente de interação entre alunos e professor.

No início das atividades os alunos se sentiram perdidos com as novas metodologias aplicadas, mas com o passar das tarefas compreenderam os métodos e foram evidenciando uma maior autonomia e segurança na realização dos trabalhos e nas discussões.

É importante ressaltar que estas metodologias não são a solução para todos os problemas referentes a aprendizagem matemática. O trabalho com atividades investigativas exige comprometimento do professor e um grau de empenho e criatividade por parte do aluno. Dessa forma, apesar de toda potencialidade das aulas investigativas, fica a cargo do professor analisar a abordagem conveniente à explanação de cada conteúdo, conforme característica e necessidade de sua turma.

Ao término das abordagens com as metodologias da resolução de problemas e investigação, os alunos e o professor mudaram sua postura diante das aulas. Anteriormente a turma era organizada em filas, e com as atividades em grupo, os alunos começaram a se organizar nas aulas em grupos heterogêneos em relação ao conhecimento, dessa forma os alunos com maior habilidade matemática auxiliam os alunos com maiores dificuldades. Em suma, criou-se uma rede de colaboração, sem muita dependência do professor.

Com as discussões dos resultados, foi observado um movimento para a frente do quadro, ou seja, os alunos, até os mais tímidos, começaram a solicitar ao professor realizar a execução de atividades de matemática no quadro e quando não conseguiam os demais colegas começavam a realizar intervenções em prol de ajudá-lo. Dessa forma, foi observado que os alunos perderam o medo do erro e tentaram solucionar questões sem a dependência de saber se estão corretas ou não.

Também em relação ao docente, as aulas ainda têm um cunho tradicional, mas sempre que possível há questionamentos, espaço para a liberdade de exposição de ideias pelos alunos. Algo que não tinha antes da realização da pesquisa.

Com frutos positivos durante o processo, é razoável que se objetiva continuar a realizar o estudo por um período de tempo maior, para poder analisar com uma maior eficácia a aplicação dessa metodologia a longo prazo, no ensino de matemática. Com isso, pretendo continuar o estudo com a investigação matemática, e até mesmo inserir outras turmas, com o intuito de obter mais dados sobre a temática e realizar trabalhos cada vez mais consistentes.

Com a realização do trabalho, observou-se, em conversas informais com outros colegas da área, que essa metodologia é pouco conhecida pelos professores



do Norte de Goiás, dessa forma é sugerida uma maior divulgação dessa metodologia entre os docentes, de forma que os mesmos busquem uma formação investigativa para aplicar em sala de aula. Como um transmissor da metodologia investigativa, pretendo fazer artigos e um blog/site contendo apresentações e passos de uma aula investigativa, promovendo a divulgação entre os docentes de matemática. Por fim, vejo a investigação matemática como uma ferramenta que pode auxiliar os professores de forma efetiva na educação matemática.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ana. et al. **Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino da Matemática**. Lisboa: Texto Editores, 2011.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental**. Volume 3: Matemática. Brasília: Mec, 1997.

CAVALCANTI, Cláudia T. Diferentes formas de resolver problemas. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Artmed, 2007.

JOVCHELOVITCH, Sandra.; BAUER, Martin W.. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAGALHÃES, Ana Paula de A. S.; ROCHA, Luciana P.; Varizo, Zaira da Cunha M.. **Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática**. In: **XII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2016. Disponível em <[http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873\\_3348\\_ID.pdf](http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873_3348_ID.pdf)>. Acesso em 12 de maio de 2018.

MAGALHÃES, Ana Paula de A. S.; Varizo, Zaira da Cunha M.. **Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática**. Curitiba: CRV, 2016.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de Pesquisa**. 4ª. São Paulo: Atlas, 1999.

PEREIRA, Magda Cristina Nunes. **As investigações matemáticas no ensino-aprendizagem das sucessões: Uma experiência com alunos do 11º ano de escolaridade**. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2004.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PÓLYA, G. **How to solve it**. Tradução de parte do livro How to solve it: A new aspect of the mathematical method. Princeton, pela Princeton University Press, em 1945 Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/polya%2077.pdf>>. Acesso em 12 de maio de 2018.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 2003. Disponível em < [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf) >. Acesso em 10 de maio de 2018.

PONTE, J. P.; BROCADO, J. ; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação Matemática na sala de aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

PONTE, J. P.. **Investigar a nossa própria prática**. In: **GTI(Ed.), refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, p.11-34, 2002.

PONTE, J. P.; SEGURADO, Irene. **Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo**. In: **Revista Quadrante**, v.7, n.2, Lisboa: Associação de Professores de Matemática de Portugal, 1998. Disponível em <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Segurado Ponte%20\(Quadrante\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Segurado Ponte%20(Quadrante).pdf)>. Acesso em 10 de maio de 2018.

PORFÍRIO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Uma reflexão em torno das tarefas de investigação**. In: **Investigações matemáticas na aula e no currículo**, p. 111-118, 1999.

RAMOS, Rosy M. dos S. F. **A investigação matemática como suporte para o estudo de sequências e regularidades: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). UESB: Bahia, 2015. Disponível em <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=90572](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=90572)>. Acesso em 12 de maio de 2018.

SANTOS, Leonor et al. **Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior**. In: **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**, Lisboa, 2002. Disponível em < <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/textos/6gt3.pdf> >. Acesso em 10 de maio de 2018.

VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. **Investigação Matemática: Uma metodologia para a aprendizagem da matemática**. Conferência realizada no Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada a Educação. Universidade Federal de Goiás. 2007.

## ANEXOS

### Anexo A – Carta de aceite para publicação do resumo



Natal 24 de outubro de 2018

Estimado(a):  
Osmair Carlos dos Santos y Elisabeth Cristina de Faria

Em nome do Comitê Organizador, comunicamos que seu trabalho intitulado **A investigação matemática como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem de geometria plana para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental**, a ser apresentado no *Primeiro Congresso Virtual Ibero-americano de Formação de Professores de Matemática, Ciência e Tecnologia (I CONVIBE FORPRO)*, na modalidade de **Comunicação** foi aceito. o evento será realizado nos dias 21, 22 e 23 de novembro deste ano.

Além disso, informamos que precisamos **ATÉ 10 de novembro de 2018**, que nos envie o vídeo com sua apresentação, seguindo as instruções disponíveis no tutorial do blog (<https://iconvibe-forpro2018.blogspot.com/>)

Convidamos você a participar com seu trabalho *-in extenso-* nas Atas do I CONVIBE-FORPRO que serão editadas e publicadas após o evento. Portanto, em arquivos anexos, estamos enviando tanto as normas para a elaboração do extenso quanto os critérios que serão considerados pelos revisores para a avaliação dos trabalhos.

Muito obrigado pela sua participação no I CONVIBE-FORPRO e nos despedimos com a esperança de continuar contando com a sua vontade de colaborar em nossas próximas iniciativas acadêmicas.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'A. A.', written over a circular stamp or watermark.

**Coordinador General**

**I Congreso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemática, Ciencias e Tecnologías**

## Anexo B – Resumo na Revista do I Congresso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías

*I Congresso Virtual Iberoamericano sobre Formação de Professoras, 2018*

### **A investigação matemática como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem de geometria plana para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental**

**Osmair Carlos dos Santos**

Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes  
osmaircarlosr@gmail.com

**Elisabeth Cristina de Faria**

Universidade Federal de Goiás  
elisabeth.c.faria@gmail.com

Tema: Prática profissional como fonte de auto formação de professores

#### **Resumo**



A pesquisa apresentada é resultado de um trabalho de mestrado que está sendo desenvolvido junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Campus UFG (GO). Tem como objetivo principal estudar as possibilidades e as contribuições de se utilizar a investigação matemática no processo de ensino de geometria. As aplicações em campo foram realizadas numa turma de 9º ano do ensino fundamental, ocorrida entre os meses de maio a agosto de 2018. A pesquisa se fundamenta na ideia de que as atividades de cunho exploratório despertam a curiosidade do aluno e desenvolve o raciocínio lógico, levando o aluno a estabelecer estratégias, formular seus próprios questionamentos, realizar teste, tomando-o autônomo de modo a construir sua própria aprendizagem. Para o desenvolvimento deste trabalho, optou-se pela pesquisa bibliográfica embasada em conceitos de referências como Ponte e Segurado (1998), Brocado e Oliveira (2016), Pontes (2003), Ramos (2015), Varizo e Magalhães (2016), entre outros. A pesquisa de campo foi realizada com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes, no município de Alto Horizonte-GO, a fim de verificar *"in loco"* os impactos de se usar essa metodologia no processo de ensino e aprendizagem de geometria. Dessa forma, notou-se que o trabalho com atividades investigativas, apesar de apresentar dificuldades em sua execução, constitui um fator que estimula o aprendizado e a capacidade do educando desenvolver habilidades que contribuem para o amadurecimento da criticidade e habilidades imprescindíveis para o aprendizado de conteúdos de cunho matemático.

**Palavras chave:** Investigação matemática, atividades investigativas, metodologia, ensino de matemática

*Resumos*

## Anexo C – Página inicial do site de divulgação de conteúdos de investigação matemática

[página inicial](#) [mapa do site](#) [rss](#)  
[imprint](#)  
**Experiências em Educação Matemática**  
 Tendências em Educação Matemática

Universidade Federal de Goiás  
 Instituto de Matemática e Estatística  
 Programa de Mestrado Profissional em  
 Matemática em Rede Nacional

---

**Página Inicial**

- [Sobre nós](#)
- [Galeria de fotos](#)
- [Artigos](#)
- [Reportagens sobre o ensino](#)
- [Galeria de vídeos](#)
- [Enquetes](#)
- [Textos](#)
- [Exemplos de atividades](#)

**Conversa Inicial**

O site foi criado com o objetivo de divulgar informações sobre a metodologia de investigação matemática para auxiliar professores que desejam conhecer e aplicar essa metodologia em suas aulas. Mas o que é investigação matemática? E como a mesma pode auxiliar o ensino de matemática?

De posse de bases epistemológicas, a palavra investigar tem as raízes no sentido de seguir vestígios, indagar, pesquisar, examinar com atenção, ou seja, são ações que proporcionam o despertar para o conhecimento. Para Rancos (2015, p. 24) "investigar é como viajar sabendo o ponto de partida mas jamais sabendo qual o possível ponto de chegada".

Fazendo na educação matemática, a palavra investigar tem conceitos mais profundos, que revelam ao coletivo, como o nível de envolvimento entre o professor e o aluno, onde o professor deixa de ser a figura central do processo e o conteúdo propriamente dito de ser relevante e o enfoque passa a ser a aprendizagem. O docente é instigado a mobilizar e valorizar a criatividade, tendo uma participação ativa dos alunos, de maneira a torná-los a peça fundamental do processo de ensino e aprendizagem.

Com a inserção de investigação no ensino de matemática, o mesmo fica cheio de perguntas e indagações que levam os alunos a perceberem o segredo que reside na construção do conhecimento matemático, além de notarem a utilidade de matemática em atividades cotidianas.

Para uma maior compreensão das atividades investigativas as abas "início", "artigos", "reportagens sobre o ensino" e "galeria de vídeos" permitem um acesso a uma maior compreensão do processo de metodologia de investigação matemática. Na aba "enquetes" queremos saber se os usuários do site conhecem a metodologia investigativa e se usam em sua prática docente, em caso positivo, se a fim a indagação de quais as dificuldades encontradas ao se usar essa metodologia. Para finalizar na aba "exemplos de atividades" o docente irá encontrar alguns exemplos de atividades investigativas que poderá ser aplicado em sala de aula e em "galeria de fotos" poderá ver fotos das aplicações das três primeiras atividades da aba "exemplos de atividades".

**NOTÍCIAS**

**II Encontro de Física do Centro-Oeste**  
07/09/2018 08:22

**Ingresso Profmat 2018**  
07/09/2018 08:22

---

**CONTATO**

[Oscar Carlos dos Santos](mailto:oscarcarlos@ueg.br)  
[oscarcarlos@ueg.br](mailto:oscarcarlos@ueg.br)

© 2018 Todos os direitos reservados.

Desenvolvido por Webcode

## Anexo D – Aceite do resumo submetido ao V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste.

09/11/2018

Gmail - Proposta de Pôster



Osmair carlos dos Santos <osmaircarlos@gmail.com>

---

### Proposta de Pôster

2 mensagens

Osmair carlos dos Santos <osmaircarlos@gmail.com>  
Para: vcncoc.ig@gmail.com

21 de outubro de 2018 18:47

Segue em anexo a proposta!

—  
Até: Osmair Carlos dos Santos

---

 resumo\_vcncoc.pdf  
120K

---

V CMCQ <vcncoc.ig@gmail.com>  
Para: osmaircarlos@gmail.com

8 de novembro de 2018 00:04

Informamos que o trabalho intitulado **A resolução de problemas numa perspectiva metacológica para alunos de 9 ano do Ensino Fundamental**, foi aprovado para a modalidade poster, na sessão técnica de Ensino/Educação Matemática do V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste.

Atenciosamente,

Uendêr B. Souza  
Pela Coordenação da Sessão Técnica de Ensino/Educação Matemática - VCMCO  
[Todo dia mensagens anteriores ocultas]

## Anexo E – Resumo submetido ao V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste



V Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

### A resolução de problemas numa perspectiva metodologica para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental

**Santos, Osmair Carlos dos**

{Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes}, {CMDBG}  
Av. Osmar R. da Silva, 13, centro  
78560-000, Alto Horizonte, Goiás.  
osmaircarlos@gmail.com

**Faria, Elisabeth Cristina de**

{Universidade Federal de Goiás}, {UFG}  
R. Jacarandá, Campus Samambaia  
74001-970, Goiânia, Goiás.  
elisabeth.c.faria@gmail.com

### Resumo

O presente trabalho é o resultado de uma pesquisa sobre a metodologia de resolução de problemas realizada junto ao curso de matemática da Universidade Estadual de Goiás (UEG), Campus Porangatu, o objetivo da pesquisa foi averiguar como tal metodologia pode ser usada e quais impactos ao se aplicar tal abordagem em séries finais do ensino fundamental segunda fase, em especial, o 9º ano, que trabalha com manipulações geométricas. As aplicações ocorreram em turmas do Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes, na cidade de Alto Horizonte, em uma turma do 9º ano. Para as aplicações, se tem que a metodologia de resolução de problemas, permite a mobilização dos saberes e despertar o educando para novas abordagens em prol de solucionar um problema, ou seja, o aluno é levado a questionar, montar estratégias e buscar validações, o que permite um amadurecimento das ideias cognitivas. Os dados foram coletados através de um diário de campo, anotações e da observação direta do pesquisador. Conclui-se que apesar de muitos docentes notarem a importância desta metodologia para as aulas de matemática, a maioria não a utiliza de forma satisfatória, trabalhando principalmente com os problemas propostos em livros didáticos, sem levar em conta as etapas propostas para a resolução de problemas. Desta forma, os problemas são tratados meramente como exercícios de fixação, ficando longe da prática autêntica de resolução de problemas, o que gera, muitas vezes, insatisfação do aluno, que encontra muitas dificuldades ao tentar resolver os problemas, sem qualquer intervenção do professor.

### 1 Introdução

O ensino da matemática atual está embasado na metodologia mecânica de memorização, onde o processo é centrado no professor, é isso, colabora para que os educandos não desenvolvam os instintos de autonomia, interação e colaboração, além de fazer surgir o sentimento que a matemática é centrada em apenas duas respostas plausíveis, certo ou errado. Dessa forma, o objetivo do presente trabalho é discorrer acerca de um estudo sobre a utilização da metodologia de resolução de problemas no processo de ensino de geometria plana. Pois, grande parte dos alunos demonstram total falta de interesse por esta modalidade da matemática, devido ao fato de não saberem como interpretar questões e realizar cálculos corretos para resolução de atividades.

O interesse na pesquisa é oriundo da questão que o ensino tradicional de geometria tem o foco em conteúdos cristalizados em um currículo, e isso causa um distanciamento entre o que é ensinado e o que é aprendido. Também é importante salientar o número de docentes que confundem a metodologia da resolução de problemas com o simples solucionar de exercícios. No tangenciar dos questionamentos expostos anteriormente, a metodologia da resolução de problemas será utilizada como ferramenta de apoio



ao ensino de geometria, pois o assunto possibilita a motivação, assimilação, autonomia, criatividade e criticidade dos educandos.

Diante de um ensino massivo, sem motivação e tampouco entendimento de dados de um problema se faz necessário a investigação do tema proposto. Assim, propõe-se, então, a pesquisa do seguinte problema: Quais possibilidades e contribuição ao se trabalhar com metodologia da resolução de problemas no ensino de geometria plana?

O foco do trabalho foram os alunos do Colégio Municipal Divino Bernardo Gomes, na cidade de Alto Horizonte. Onde se realizou uma pesquisa de campo embasado nas teorias de Pólya (1945). Logo, esta pesquisa busca investigar e apresentar aos professores e alunos uma metodologia que apesar de ser muito abordada é pouco utilizada, de maneira eficaz no processo de ensino e aprendizagem.

## Referências

- [1] PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [2] PÓLYA, G. *How to solve it*. Tradução de parte do livro *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*. Princeton, pela Princeton University Press, em 1945 Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/polys2077.pdf>. Acesso em 12 de maio de 2018.

# APÊNDICES

## Apêndice A – Resolução de problemas – Atividade 01

COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSOR DIVINO BERNARDO GOMES  
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ALTO HORIZONTE - GO  
ALUNO: \_\_\_\_\_



PROFESSOR: OSMAIR CARLOS DOS SANTOS

### Resolução de problemas – Primeira Atividade

#### Atividade

Um terreno em formato retangular medindo 100m de comprimento por 50m de largura foi dividido em 8 lotes iguais. Qual a área, em  $m^2$ , de cada lote?

#### Dados obtidos do problema

---

---

---

#### Plano de execução

---

---

---

---

#### Execução do plano

---

---

---

---

#### Análise da resposta obtida

---

---

---

**Apêndice B – Resolução de problemas – Atividade 02**

COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSOR DIVINO BERNARDO GOMES  
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ALTO HORIZONTE - GO  
ALUNO: \_\_\_\_\_



PROFESSOR: OSMAIR CARLOS DOS SANTOS

Resolução de problemas – Segunda Atividade

**Atividade**

Para revestir uma cadeira, foi utilizado um tecido em formato quadrado medindo 60 cm cada lado. Qual é a área, em  $m^2$ , desse tecido?

**Dados obtidos do problema**

---

---

---

**Plano de execução**

---

---

---

**Execução do plano**

---

---

---

**Análise da resposta obtida**

---

---

---

### Apêndice C – Resolução de problemas – Atividade 03

COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSOR DIVINO BERNARDO GOMES  
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ALTO HORIZONTE - GO  
ALUNOS: \_\_\_\_\_

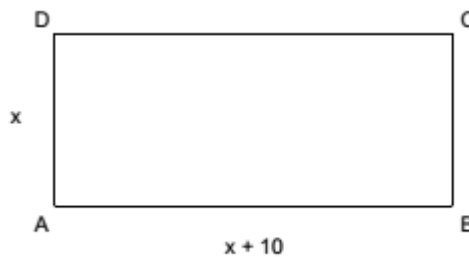


PROFESSOR: OSMAIR CARLOS DOS SANTOS

#### Resolução de problemas – Terceira Atividade

#### Atividade

O terreno retangular ABCD, mostrado na figura, cujas medidas estão indicadas em metros, tem 80 metros de perímetro.



(Figura fora de escala)

Sabendo que 12% da área desse terreno será destinada à construção de uma garagem, a área dessa garagem será de?

#### Dados obtidos do problema

---



---



---

#### Plano de execução

---



---



---

#### Execução do plano

---



---



---

**Análise da resposta obtida**

---

---

---

## Apêndice D – Atividade Investigativa– Atividade 01

COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSOR DIVINO BERNARDO GOMES  
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ALTO HORIZONTE - GO  
ALUNOS: \_\_\_\_\_



PROFESSOR: OSMAIR CARLOS DOS SANTOS

### Atividade Investigativa – Primeira Atividade

#### Breve comentário:

As aulas investigativas são aulas diferentes das que estamos acostumados, com resolução de exercícios e problemas que têm soluções únicas. Estas aulas possibilitam a aprendizagem através da observação, do questionamento e do raciocínio. Nelas o aluno deverá explorar todos os caminhos possíveis da situação, fazer seus próprios questionamentos e buscar respondê-los de forma concisa, organizada e fundamentada, buscando sempre crescer com os erros e frustrações.

#### Etapas do trabalho

- Observar a tarefa;
- Formular questões;
- Levantar hipóteses;
- Testar a hipótese para vários valores;
- Tentar justifica (provar que a hipótese está correta);
- Registrar tudo que foi produzido;
- Apresentar a classe argumentando em defesa da hipótese.

#### Material utilizado

Geoplano;  
Liguinhas de borracha.

#### Atividade

Considerando o lado de um quadradinho do geoplano igual a uma unidade, responda:

- 1 – Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado, duplica-se o perímetro?
- 2 - Duplicando-se a medida de cada lado do quadrado, duplica-se a área?

- 3 – O que acontece com o perímetro e com a área do quadrado ao triplicarem-se as medidas dos lados?
- 4 – O que acontece com o perímetro e com a área do quadrado ao multiplicarmos por quatro as medidas dos lados?
- 5 – O que acontece com a área e o perímetro caso multipliquemos por 10? E por 20? E por 100? E se fosse um número muito maior, você consegue prever o que acontecerá?
- 6 – E ao dividirmos pela metade a medida de seus lados, qual será a área do novo quadrado?
- 7 – Explique com suas palavras o que acontece com a área e o perímetro do quadrado quando você multiplica o valor do lado por um número qualquer.

## Apêndice E – Atividade Investigativa– Atividade 02

COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSOR DIVINO BERNARDO GOMES  
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ALTO HORIZONTE - GO  
ALUNOS: \_\_\_\_\_



PROFESSOR: OSMAIR CARLOS DOS SANTOS

### Atividade Investigativa – Segunda Atividade

#### Material utilizado

Geoplano;  
Barbante.

#### Atividade

Corte um pedaço de barbante com X unidades de comprimento. Com a ajuda do barbante, desenhe no geoplano as figuras abaixo, de modo que seja utilizado o tamanho total do barbante:

- 1 quadrado
- 2 retângulos com formatos diferentes
- 3 triângulos
- 1 figura diferente das anteriores

Calcule a área e o perímetro de cada figura construída, contando o número de quadradinhos inseridos em cada figura. O número de quadradinhos de cada figura equivale ao valor da área. Complete a tabela:

Figura	Perímetro	Área
Quadrado		
Retângulo 01		
Retângulo 02		
Triângulo 01		
Triângulo 02		
Triângulo 03		
Figura qualquer		

Com as informações da tabela e as figuras que grupo construiu, responda:

- 1 - Que figura tem a maior área?
- 2 - Que figura tem a menor área?
- 3 - Qual o retângulo que tem a maior área?



4 - Qual o triângulo que tem a maior área?

5 - O que ocorre com o perímetro de cada figura?

6 - Que conclusões vocês podem tirar a respeito das figuras construídas, suas áreas e perímetros?

## Apêndice F – Atividade Investigativa– Atividade 03

COLÉGIO MUNICIPAL PROFESSOR DIVINO BERNARDO GOMES  
9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL – ALTO HORIZONTE - GO  
ALUNOS: \_\_\_\_\_



PROFESSOR: OSMAIR CARLOS DOS SANTOS

### Atividade Investigativa – Terceira Atividade

#### Material utilizado

Papel quadriculado;

Régua.

#### Atividade

1- Com um auxílio de uma régua, construa os triângulos de cada caso com as medidas a, b e c indicadas.

Casos	a	b	c	a+b	Compare (>, < ou =)
1º	8	9	5		a+b _____ c
2º	9	3	7		a+b _____ c
3º	15,4	12,3	9,1		a+b _____ c
4º	2	3	5		a+b _____ c
5º	6	6	7		a+b _____ c
6º	4	4	4		a+b _____ c
7º	2	6	10		a+b _____ c
8º	4	6	10		a+b _____ c

2 – Completem o restante das colunas da tabela somando as medidas de a+b e compare com a medida de c.

3 – Observando o 1o caso, o que acontece com o triangulo desenhado?

4 – O que você pode dizer ao comparar o desenho com as demais informações da tabela?

5 – Faça a mesma análise para os demais casos.

- 6 – Comparando e analisando os 1º e o 7º casos, o que você pode dizer a respeito?
- 7 - Compare e analise os 2º e o 6º casos, o que você pode dizer a respeito?
- 8 – De acordo com suas conclusões, o que você pode falar sobre a construção de triângulos com relação às medidas dos seus lados?