Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Princípio de indução e aplicações

Luan Gomes Ferreira

Goiânia

2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Luan Gomes Ferreira

Título do trabalho: Princípio de indução e aplicações

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Luan Gomes Ferreira
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Lidiane S. M. Lima
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 19 / 12 / 2018

---

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Luan Gomes Ferreira

Princípio de indução e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof^o. Dr^o. Lidiane dos Santos Monteiro Lima

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ferreira, Luan Gomes
Princípio de indução e aplicações [manuscrito] / Luan Gomes Ferreira. - 2018.
79 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.
Bibliografia.
Inclui fotografias, tabelas, lista de figuras.

1. Princípio de indução matemática. 2. Números naturais. I. dos Santos Monteiro Lima, Lidiane , orient. II. Título.

CDU 511

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Luan Gomes Ferreira - Aos três dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezoito, às 10:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro de Lima – Orientador, Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias e o Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **"Princípio de indução e aplicações"**, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Luan Gomes Ferreira, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro de Lima, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Mário José de Souza, vice-coordenador do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Lidiane S. M. Lima

Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro de Lima
Presidente – IME/UFG

Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro – IFG

Luan Gomes Ferreira graduou-se em licenciatura plena em Matemática em 2013 pela PUC-GO. Desde então tem atuado como professor em plantões de dúvida, aulas particulares e em sala de aula.

Dedico esse trabalho aos amantes da matemática assim como eu.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela saúde e por todos os seus feitos que me permitiram cursar e concluir o mestrado.

Agradeço aos mestrandos e professores que tornaram a jornada mais interessante.

Agradeço a minha família e amigos que me apoiaram desde a admissão até a conclusão do mestrado.

Agradeço a minha orientadora Lidiane dos Santos Monteiro Lima, pela pessoa e profissional, por todas as suas contribuições imprescindíveis neste trabalho.

Resumo

A história da Matemática nos mostra exemplos de grandes matemáticos que, a partir da observação de casos particulares, fizeram conjecturas, que mais tarde, foram provadas sendo falsas. Bem como os professores e alunos, atualmente, podem, durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação, fazer conjecturas que podem ser falsas ou verdadeiras. Nesse sentido, abordamos o princípio de indução matemática (PIM) neste trabalho como uma ferramenta de verificação da validade de certas conjecturas no conjunto dos números naturais.

Palavras-chave

Princípio de indução matemática, Números naturais.

Abstract

The history of mathematics has shown us examples of outstanding mathematicians who have made conjectures which later on were proved to be wrong from the observation of specific cases. Nowadays, not only teachers but also students can make conjectures which can be both right and wrong throughout the teach-learn-test process. Hence, the principle of mathematics induction (PMI) has been approached as a tool to check the quality of certain conjectures in the set of natural numbers.

Keywords

Principle of mathematics induction; Natural numbers.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Na construção do conhecimento matemático, faz parte do processo, a habilidade de generalizar, após observar casos particulares. A própria história da Matemática nos mostra que grandes matemáticos fizeram afirmações que se provaram falsas mais tarde. Vamos ilustrar três exemplos retirados de [1].

P. Fermat[1] acreditava que a fórmula $2^{2^n}+1$ gerava números primos após verificar que para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 obtinha-se, respectivamente, pela fórmula, os números primos $3, 5, 17, 257$ e $65\,537$. Mas, L. Euler[2] mostrou que para $n = 5$ obtinha-se o número composto $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$, invalidando a conjectura de P. Fermat.

D.A. Grave[3] ao verificar se para todo número primo p, o número $2^{p-1} - 1$ não é divisível por p^2, verificou que valia tal propriedade para os primos menores que mil, mas para o primo $p = 1\,093$ tinha-se $2^{1\,093-1} - 1$ divisível por $1\,093^2$.

O último exemplo (e talvez o mais interessante) é o da expressão $991n^2 + 1$ que para valores de n naturais não nulos parece fornecer números que não são quadrados perfeitos. O impressionante é que o primeiro número natural para o qual a propriedade falha é para $n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$.

Os exemplos citados reforçam a ideia de que por mais que tentemos verificar a validade de certas proposições nos naturais, para um número grande de casos particulares, não podemos garantir para todos os números naturais.

Em contrapartida, se calcularmos a soma dos n primeiros números ímpares, conforme ilustra a Tabela 1, seria natural conjecturarmos que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

[1] O francês Pierre de Fermat (1601-1665) contribuiu para o cálculo geométrico e infinitesimal.

[2] O matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) trouxe contribuições para o cálculo e teoria dos grafos.

[3] O matemático soviético Dmitry Aleksandrovich Grave (1863-1939) trabalhou com álgebra, mecânica e matemática aplicada.

n	$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$
1	$1 = 1^2$
2	$1 + 3 = 4 = 2^2$
3	$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
4	$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Tabela 1: Soma S dos n primeiros números ímpares.

Embora a igualdade $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ seja válida para os cinco primeiros números naturais, um questionamento plausível é se tal igualdade seria válida para o natural $n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$, por exemplo. De fato, a igualdade $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo natural n, conforme provamos adiante, mas todos os quatro exemplos citados até aqui podem nos levar a reflexão da necessidade de um mecanismo matemático que nos permita validar uma propriedade no universo dos naturais sem termos que verificar para cada natural, o que seria inviável. A resposta é sim, tal mecanismo matemático é o princípio de indução matemática (ou princípio de indução finita), nosso objeto de estudo.

Assim, abordar o tema é necessário já que professores da educação básica podem se deparar em situações durante a construção do conhecimento matemático por ele mesmo ou por seus alunos onde é necessária uma cautela com certas induções, conjecturas ou conclusões precipitadas em problemas dentro do universo dos números naturais, conforme reitera Aguilar Júnior em [2], na página 42:

> "É importante nesta abordagem da prova matemática que o professor estabeleça com seus alunos a necessidade de verificar se uma conjectura é válida ou não, pois percebemos muitas vezes em nossas aulas que os alunos criam, formulam e conjecturam regras, que nem sempre se sustentam."

No primeiro capítulo fazemos a construção do conjunto dos números naturais a partir dos axiomas de Peano, abordamos as consequências destes, as definições, as operações básicas e propriedades dos naturais, culminando nas variações do PIM e no princípio da boa ordenação. No segundo capítulo focamos em várias aplicações do PIM em problemas de aritmética, geometria, análise combinatória, teoria dos conjuntos e em problemas lúdicos. Mostrando assim a relevância do PIM haja visto à sua versatilidade e abrangência em diversos campos da matemática.

Capítulo 1

Princípio de indução matemática

Como o princípio de indução matemática está intimamente relacionado ao conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), vamos dar a ênfase necessária a este conjunto neste capítulo. O leitor pode encontrar os enunciados e demonstrações presentes neste capítulo em [3], [4] e [5].

1.1 Axiomas de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932), com a colaboração de obras de outros matemáticos, formulou sua versão e publicou em 1889 em sua obra "Os princípios da aritmética apresentados por um novo método" (traduzido do latim) axiomas relacionados aos números naturais. Assim a Aritmética passava a ter uma abordagem mais formal e rigorosa por ter um caráter axiomático (ver [4]).

Os conceitos primitivos de Peano são:

a) Um número natural pertence ao conjunto que representamos por $\mathbb{N}$.

b) Sucessor de um número natural n que representamos por $s(n)$.

c) O zero que representamos por 0.

Usamos também $n+1$ como o sucessor de n : $s(n) = n+1$. O número natural cujo sucessor é n, com $n \neq 0$, chamamos de antecessor de n e indicamos por $n-1$, isto é, $s(n-1) = n$, $n \neq 0$.

Em $\mathbb{N}$, caracterizamos a relação de igualdade $(=)$ pelas seguintes propriedades: Dados os naturais m, n e p, temos que

a) $n = n$. (Reflexiva)

b) Se $m = n$, então $n = m$. (Simétrica)

c) Se $m = n$ e $n = p$, então $m = p$. (Transitiva)

Agora, podemos citar os cinco Axiomas de Peano:

Axioma 1.1.1. a) O zero[1] é um número natural: $0 \in \mathbb{N}$.

b) Cada número natural n possui um único sucessor $s(n)$ também natural: para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um único $s(n) \in \mathbb{N}$. Ou equivalentemente, se $m = n$, então $s(m) = s(n)$.

c) A função s que associa a cada natural o seu sucessor é injetora, isto é, dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que se $s(m) = s(n)$, então $m = n$.

d) O zero não é sucessor de nenhum número natural: para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq 0$.

e) (Axioma de indução matemática) Se A é um subconjunto de números naturais tal que

   i) $0 \in A$;

   ii) Se $n \in A$, então $s(n) \in A$.

   Então, $A = \mathbb{N}$.

São consequências imediatas dos axiomas de Peano para m, n naturais:

Proposição 1.1.2. (a) Números diferentes têm sucessores diferentes, ou seja, se $m \neq n$, então $s(m) \neq s(n)$.

(b) O sucessor de um número natural é diferente dele mesmo, ou seja, $s(n) \neq n$.

(c) Todo número natural diferente de zero é sucessor de algum número natural.

[1] Embora originalmente este axioma cita o 1 (a unidade), as versões mais modernas dos axiomas de Peano trabalham com o zero por ser o elemento neutro da adição. Usamos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quando convir.

Demonstração. (a) Se temos $m \neq n$ e $s(m) = s(n)$, a última igualdade implica, pelo Axioma 1.1.1 (c), em $m = n$, gerando uma contradição. Resta então, $s(m) \neq s(n)$ quando $m \neq n$.

(b) Temos que:

i) Como o zero é um número natural, então seu sucessor $s(0)$ não pode ser igual a zero, de acordo com o Axioma 1.1.1 (d). Isto é, $s(0) \neq 0$.

ii) Pela hipótese de indução temos que dado um natural n temos que $s(n) \neq n$. Mas pelo item anterior temos da última desigualdade que $s(s(n)) \neq s(n)$, que pode ser escrita como $s(n+1) \neq n+1$.

Assim, pelo Axioma 1.1.1 (e), concluímos que a propriedade é válida para todo n natural.

(c) Seja $S = \{0\} \cup S_1$, onde S_1 é o conjunto formado pelos números naturais que são sucessores de números naturais. Temos que:

i) $0 \in \{0\}$, logo $0 \in \{0\} \cup S_1 = S$.

ii) Seja $n \in S$, com n diferente de zero, logo $n \in S_1$ e pelo Axioma 1.1.1 (b), possui um único sucessor natural $n+1$. Logo, pela definição de S_1, temos $n+1 \in S_1$, e então $n+1 \in \{0\} \cup S_1 = S$.

Portanto, pelo Axioma 1.1.1 (e), temos que $S = \mathbb{N}$.

□

1.2 Adição e multiplicação com números naturais

Dados dois números naturais m e n, definimos a adição e multiplicação deles como:

Definição 1.2.1. Adição de naturais

$$m + n = \begin{cases} m, \text{ se } n = 0 \\ s[m + (n-1)], \text{ se } n \neq 0 \end{cases}$$

Definição 1.2.2. Multiplicação de naturais

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 0 \\ m \cdot (n-1) + m, \text{ se } n \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.2.3. Pelas Definições 1.2.1 e 1.2.2, temos que $2\cdot 1 = 2\cdot(1-1)+2 = 2\cdot 0+2 = 0+2 = s(0+(2-1)) = s(0+1) = s(s(0+(1-1))) = s(s(0+0)) = s(s(0)) = s(1) = 2$.

Vale ressaltar que, como comentamos anteriormente, usamos $n+1$ como o sucessor de $n : s(n) = n+1$. O número natural cujo sucessor é n, com $n \neq 0$, chamamos de antecessor de n e indicamos por $n-1$, isto é, $s(n-1) = n$, $n \neq 0$. Assim no exemplo anterior, devemos entender $(2-1)$ como o antecessor de 2, que é o 1. Mesma observação para $(1-1) = 0$. Mostramos adiante que as operações estão bem definidas. Discutimos a operação de subtração nos naturais mais a frente.

Como consequência das definições de adição e multiplicação de naturais temos as seguintes propriedades para m, n naturais:

Proposição 1.2.4. (a) $(n-1)+1 = n$, $n \neq 0$.

(b) $n \cdot 1 = 0+n$.

(c) $m + s(n) = s(m+n)$.

Demonstração. (a) De fato, $(n-1)+1 = s[(n-1)+(1-1)] = s[(n-1)+0] = s(n-1) = n$, já que $n \neq 0$.

(b) De fato, $n \cdot 1 = n \cdot (1-1) + n = n \cdot 0 + n = 0 + n$.

(c) Inicialmente notemos que $(n+1)-1 = n$, já que $(n+1)-1$ indica o número cujo sucessor é $n+1$, isto é, o próprio n. Assim, $m + s(n) = m + \underbrace{(n+1)}_{\neq 0} = s\{m + [(n+1)-1]\} = s(m+n)$.

□

1.3 Propriedades dos números naturais

Primeiramente provamos por indução as propriedades dos naturais envolvendo o zero e a unidade. Essas propriedades são chamadas aqui de auxiliares já que facilitam a demonstração das propriedades básicas para dois ou mais números naturais quaisquer.

Para todo n natural temos as seguintes propriedades auxiliares:

Propriedade 1.3.1. (a) Zero como elemento neutro da adição, ou seja, $0 + n = n + 0 = n$.

(b) Todo número multiplicado por zero resulta em zero, ou seja, $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$.

(c) O um como elemento neutro da multiplicação, ou seja, $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

(d) $1 + n = n + 1$.

Demonstração. (a) Como $n + 0 = n$ é a Definição 1.2.1, resta então mostrarmos que $0 + n = n$ por indução em n:

i) $0 + 0 = 0$ é verdade.

ii) $0 + (n+1) = s\{0 + [(n+1) - 1]\} = s(0+n)$. Da hipótese de indução $(0+n = n)$ e da injetividade de s, temos que $s(0 + n) = s(n)$. Como $s(n) = n + 1$, obtemos $s(0 + n) = n + 1$, e portanto, $0 + (n + 1) = n + 1$.

(b) Como $n \cdot 0 = 0$ pela Definição 1.2.2, resta então mostrarmos que $0 \cdot n = 0$ por indução em n:

i) $0 \cdot 0 = 0$ é verdade pela Definição 1.2.2.

ii) $0 \cdot (n + 1) = 0 \cdot [(n + 1) - 1] + 0 = 0 \cdot n + 0 = 0 \cdot n \overset{(H.I.)}{=} 0$.

(c) Temos $n \cdot 1 = 0 + n = n$. Resta mostrarmos que $1 \cdot n = n$, por indução em n:

i) $1 \cdot 0 = 0$.

ii) $1 \cdot (n + 1) = 1 \cdot [(n + 1) - 1] + 1 = 1 \cdot n + 1 \overset{(H.I.)}{=} n + 1$.

(d) Por indução em n:

i) $1 + 0 = 0 + 1$ é verdade, basta tomarmos $n = 1$ na Propriedade 1.3.1 (a).

ii) $1 + (n + 1) = s\{1 + [(n + 1) - 1]\} = s(1 + n) \overset{(H.I.)}{=} s(n + 1) = s[(n + 1) + 0] = s[(n + 1) + (1 - 1)] = (n + 1) + 1$.

□

Dados os naturais m, n e k, temos as propriedades básicas:

Propriedade 1.3.2. (a) $(k + m) + n = k + (m + n)$. (Associativa da adição)

(b) $m + n = n + m$. (Comutativa da adição)

(c) $k(m + n) = km + kn$. (Distributiva da multiplicação em relação à adição pela esquerda)

(d) $(m+n)k = mk + nk$. (Distributiva da multiplicação em relação à adição pela direita)

(e) $mn = nm$. (Comutativa da multiplicação)

(f) $(km)n = k(mn)$. (Associativa para a multiplicação)

(g) Se $m+n = k+n$, então $m = k$. (Lei do cancelamento para a adição)

(h) Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que se $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$. (Lei do anulamento)

Demonstração. (a) Para cada k e m, podemos enxergar a igualdade como uma proposição em n. Demonstramos por indução em n:

i) $(k+m)+0 = k+m = k+(m+0)$.

ii) $(k+m)+(n+1) = s\{(k+m)+[(n+1)-1]\} = s[(k+m)+n] \overset{(H.I.)}{=} s[k+(m+n)] = k+s(m+n) = k+[m+s(n)] = k+[m+(n+1)]$.

(b) Indução em n:

i) $m+0 = 0+m$, é verdade conforme Propriedade 1.3.1 (a).

ii) $m+(n+1) = (m+n)+1 = 1+(m+n) \overset{(H.I.)}{=} 1+(n+m) = (1+n)+m = (n+1)+m$.

(c) Indução em n:

i) $k(m+0) = km = km+0 = km+k\cdot 0$.

ii)

$$
\begin{aligned}
k[m+(n+1)] &= k\{[m+(n+1)]-1\}+k \\
&= k\{[s(m+n)]-1\}+k \\
&= k\{[(m+n)+1]-1\}+k \\
&= k(m+n)+k \\
&\overset{(H.I.)}{=} (km+kn)+k \\
&= km+(kn+k) \\
&= km+\{k[(n+1)-1]+k\} \\
&= km+k(n+1).
\end{aligned}
$$

(d) Por indução em k:

i) $(m+n)\cdot 0 = 0$ e $m\cdot 0 + n\cdot 0 = 0+0 = 0$, logo, $(m+n)\cdot 0 = m\cdot 0 + n\cdot 0$.

ii)

$$\begin{aligned}
(m+n)(k+1) &= (m+n)k + (m+n)\cdot 1\\
&\overset{(H.I.)}{=} (mk+nk)+(m+n)\\
&= mk + [nk + (m+n)]\\
&= mk + [(nk+m)+n]\\
&= [mk + (nk+m)] + n\\
&= [mk + (m+nk)] + n\\
&= [(mk+m)+nk]+n\\
&= \{[m(k+1)] + nk\} + n\\
&= m(k+1) + \{nk+n\}\\
&= m(k+1) + n(k+1).
\end{aligned}$$

(e) Indução em n:

i) $m\cdot 0 = 0\cdot m$ é verdade pela Propriedade 1.3.1 (b).

ii) $m(n+1) = mn + m\cdot 1 \overset{(H.I.)}{=} nm + m\cdot 1 = nm + 1\cdot m = (n+1)m$.

(f) Indução em n:

i) $(km)\cdot 0 = 0 = k\cdot 0 = k\cdot(m\cdot 0)$.

ii) $(km)(n+1) = (km)n + (km)\cdot 1 \overset{(H.I.)}{=} k(mn) + km = k[(mn)+m] = k[mn + m\cdot 1] = k[m(n+1)]$.

(g) Indução em n:

i) Se $m+0 = k+0$, então pela Definição 1.2.1 temos que $m = k$.

ii) Se $m+(n+1) = k+(n+1)$, então pela Propriedade 1.3.2 (a) temos que $(m+n)+1 = (k+n)+1$. Da última igualdade e do Axioma 1.1.1 (c) temos que $m+n = k+n$, e pela hipótese de indução, que $m = k$.

(h) Suponhamos que $mn = 0$, e que $m \neq 0$ e $n \neq 0$. Logo, de $n \neq 0$ podemos escrever $mn = m(n-1)+m$ (pela Definição 1.2.2) e de $m \neq 0$ que $m = (m-1)+1$

(pela Proposição 1.2.4(a)). Substituindo as duas últimas igualdades em $mn = 0$ obtemos $m(n-1) + [(m-1)+1] = 0$, ou ainda, $[m(n-1)+(m-1)]+1 = 0$. Como $m \neq 0$ e $n \neq 0$, temos que $p = m(n-1)+(m-1) \in \mathbb{N}$ e obtemos $p+1 = 0$, gerando o absurdo do zero ser sucessor de um número natural. Resta então $m = 0$ ou $n = 0$, quando $mn = 0$.

□

Mostramos a seguir que as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ estão bem definidas ao verificarmos a existência e uniformidade delas.

Proposição 1.3.3. (a) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos $(m+n) \in \mathbb{N}$. (Existência da soma)

(b) Dados os naturais m e n, tais que $m = n$, então para todo p natural temos que $m + p = n + p$. (Uniformidade da soma)

(c) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos $(mn) \in \mathbb{N}$. (Existência do produto)

(d) Dados os naturais m e n, tais que $m = n$, então para todo p natural temos que $mp = np$. (Uniformidade do produto)

Demonstração. (a) Fixando o natural m, provamos por indução em n:

i) É imediato que $m + 0 = m \in \mathbb{N}$.

ii) Como pela hipótese de indução temos que $m+n$ é natural, então o seu sucessor $s(m+n) = m + (n+1)$ também é natural, de acordo com o Axioma 1.1.1 (b).

Assim, o conjunto $\mathbb{N}$ é fechado para a adição.

(b) Provamos por indução em p:

i) De $m + 0 = m$ e $n + 0 = n$, temos que $m = n$ implica em $m + 0 = n + 0$.

ii)

$$m = n \qquad \text{(H.I.)}$$

$$m + p = n + p$$

$$s(m+p) = s(n+p)$$

$$m + s(p) = n + s(p)$$

$$m + (p+1) = n + (p+1).$$

(c) Fixando o natural m, provamos por indução em n:

i) É imediato que $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$, pelo Axioma 1.1.1 (a).

ii) Notamos que $m \cdot (n+1) = mn + m$, que é natural por ser soma dos naturais mn (natural por hipótese de indução) e m (natural por hipótese).

Assim, o conjunto $\mathbb{N}$ é fechado para a multiplicação.

(d) Provamos por indução em p:

i) Temos que $m \cdot 0 = 0 = n \cdot 0$, pela Definição 1.2.2.

ii)

$$\begin{aligned} m &= n && \text{(H.I.)} \\ mp &= np \\ mp + m &= np + m. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} m &= n \\ m + np &= n + np \\ np + m &= n + np. \end{aligned}$$

Finalmente, temos da transitividade que

$$\begin{aligned} mp + m &= n + np \\ mp + m &= np + n \\ m(p+1) &= n(p+1). \end{aligned}$$

$\square$

1.4 Equações com duas variáveis em $\mathbb{N}$

Tomando $m, n \in \mathbb{N}$, na proposição a seguir resolvemos algumas equações com duas variáveis em $\mathbb{N}$ recorrentes:

Proposição 1.4.1. (a) Se $m + n = 0$, então $m = 0$ e $n = 0$.

(b) Se $m + n = 1$, então $m = 0$ ou $n = 0$.

(c) Se $mn = 1$, então $m = 1$ e $n = 1$.

(d) Se $mn = 2$, então $m = 1$ ou $n = 1$.

Demonstração. (a) Suponhamos que $m + n = 0$ e que $n \neq 0$, por exemplo. Sendo $n \neq 0$, temos que $n = (n - 1) + 1$, pela Proposição 1.2.4 (a). Assim, a igualdade $m + n = 0$ pode ser escrita como $m + [(n - 1) + 1] = 0$, e esta, pela associativa, como $[m + (n - 1)] + 1 = 0$. Tomando $p = m + (n - 1)$, temos $p + 1 = 0$, isto é, o zero é o sucessor do natural p, que é um absurdo. Logo, $n = 0$. Então de $m + n = 0$ temos que $m + 0 = 0$, isto é, $m = 0$.

(b) Suponhamos que $m + n = 1$, e que $m \neq 0$ e $n \neq 0$. Logo, podemos escrever que $m = (m - 1) + 1$ e $n = (n - 1) + 1$. Portanto,

$$m + n = 1$$

$$[(m - 1) + 1] + [(n - 1) + 1] = 1$$

$$\{[(m - 1) + 1] + (n - 1)\} + 1 = 0 + 1$$

$$[(m - 1) + 1] + (n - 1) = 0$$

$$[1 + (m - 1)] + (n - 1) = 0$$

$$1 + [(m - 1) + (n - 1)] = 0.$$

Tomando $p = (m - 1) + (n - 1)$, temos $1 + p = 0$, gerando o absurdo do zero ser sucessor do natural p. Resta então que $m = 0$ ou $n = 0$, quando $m + n = 1$.

(c) Suponhamos que $mn = 1$ e que $n \neq 1$, por exemplo. Como $n \neq 0$ (caso contrário, $mn = 0$) então $n = (n - 1) + 1$. Logo, $mn = 1$ pode ser escrita como $m[(n - 1) +$

1] = 1, ou ainda, $m(n-1)+m=1$. Da última igualdade segue da Proposição 1.4.1 (b) que $m(n-1)=0$ ou $m=0$. Como $m \neq 0$ (caso contrário, $mn=0$) resta então que $m(n-1)=0$. Como $m \neq 0$, temos $n-1=0$, isto é, $n=1$, gerando uma contradição. Portanto, $n=1$. E de $mn=1$ e $n=1$, temos que $m=1$.

(d) Suponhamos que $mn=2$, e que $m \neq 1$ e $n \neq 1$. Como $m \neq 0$ e $n \neq 0$ (caso contrário, $mn=0 \neq 2$) então $m=(m-1)+1$ e $n=(n-1)+1$. Logo, a igualdade $mn=2$ pode ser escrita como $[(m-1)+1][(n-1)+1]=2$. Das Propriedades 1.3.2 (c) e 1.3.2 (d), a última igualdade pode ser escrita como $(m-1)(n-1)+(m-1)+(n-1)+1=1+1$, e da lei do corte para a adição, como $(m-1)(n-1)+[(m-1)+(n-1)]=1$. Da última igualdade e da Proposição 1.4.1 (b), temos que $(m-1)(n-1)=0$ ou $(m-1)+(n-1)=0$. Se $(m-1)(n-1)=0$ então $m-1=0$ ou $n-1=0$, logo $m=1$ ou $n=1$, gerando uma contradição. Se $(m-1)+(n-1)=0$, pela Proposição 1.4.1 (a), $m-1=0$ e $n-1=0$, conduzindo a $m=1$ e $n=1$, gerando também uma contradição. Portanto, se $mn=2$ só podemos ter $m=1$ ou $n=1$.

□

1.5 Desigualdades em $\mathbb{N}$

Podemos comparar dois números naturais segundo a definição para desigualdade:

Definição 1.5.1. Dados os naturais m e n, definimos que $n \leq m$ (lê-se: n menor ou igual do que m) se, e somente se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m=n+p$. Se p é natural não nulo então $n<m$ (lê-se: n menor do que m).

Para os naturais m e n, temos que $n<m$ é equivalente a $m>n$ (lê-se: m maior do que n).

Temos algumas propriedades da relação $\leq$ a partir da definição para m, n, k e p naturais.

Propriedade 1.5.2. (a) $n \leq n$. (Propriedade reflexiva)

(b) Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m=n$. (Propriedade anti-simétrica)

(c) Se $m \leq n$ e $n \leq k$, então $m \leq k$ (Propriedade transitiva)

(d) Se $m = n$ e se $n > p$, então $m > p$.

(e) Se $m \leq n$, então $m + k \leq n + k$.(Uniformidade de $\leq$ com a adição)

(f) Dado $k \in \mathbb{N}$, temos que se $m \leq n$, então $mk \leq nk$.(Uniformidade de $\leq$ com a multiplicação)

(g) $0 \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(h) Se $m + k \leq n + k$, então $m \leq n$.

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$, isto é, não existe um número natural entre dois naturais consecutivos.

(j) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que se $n < m$, então $n + 1 \leq m$.

(k) Um número natural não é maior que a si mesmo, ou seja, $m \not> m$.

Demonstração. (a) De $n = n + 0$ e $0 \in \mathbb{N}$ temos da definição que $n \leq n$.

(b) De $m \leq n$ temos que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p_1$. De $n \leq m$ temos que existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p_2$. Assim,

$$n = (n + p_2) + p_1$$

$$n + 0 = n + (p_2 + p_1)$$

$$p_1 + p_2 = 0$$

$$p_1 = p_2 = 0.$$

Portanto, $n = m + 0$, ou, $n = m$.

(c) De $m \leq n$ temos que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p_1$. De $n \leq k$ temos que existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $k = n + p_2$. Assim, podemos escrever $k = (m + p_1) + p_2$ como $k = m + (p_1 + p_2)$. Da última igualdade e de $(p_1 + p_2) \in \mathbb{N}$ temos que $m \leq k$.

(d) De fato, se $n > p$, então existe $k \in \mathbb{N}$, com $k \neq 0$, tal que $n = p + k$. Da última igualdade e de $m = n$, obtemos pela transitividade que $m = p + k$, e como $k \in \mathbb{N}^*$, que $m > p$.

(e) De $m \leq n$ temos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Daí,

$$n + k = (m + p) + k$$

$$n + k = m + (p + k)$$

$$n + k = m + (k + p)$$

$$n + k = (m + k) + p.$$

Da última igualdade e de $p \in \mathbb{N}$ obtemos $m + k \leq n + k$.

(f) De $m \leq n$ temos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Daí, de $nk = (m + p)k$ garantimos que $nk = mk + pk$. Da última igualdade e de $pk \in \mathbb{N}$ (por ser produto de naturais) temos pela definição que $mk \leq nk$.

(g) Se $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $n = 0 + n$, logo $0 \leq n$.

(h) Se $m + k \leq n + k$ então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(m + k) + p = n + k$$

$$m + (k + p) = n + k$$

$$m + (p + k) = n + k$$

$$(m + p) + k = n + k$$

$$m + p = n.$$

Da última igualdade e de $p \in \mathbb{N}$, obtemos $m \leq n$.

(i) Suponhamos que exista $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n+1$. A desigualdade simultânea $n < m < n + 1$ é equivalente a $n < m$ e $m < n + 1$, ao mesmo tempo. De $n < m$ temos $n + p_1 = m$, com p_1 natural não nulo. De $m < n + 1$ temos $m + p_2 = n + 1$, com p_2 natural não nulo. De $(n + p_1) + p_2 = n + 1$ temos $n + (p_1 + p_2) = n + 1$, logo $p_1 + p_2 = 1$. Da Proposição 1.4.1 (b) a última equação tem solução $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, gerando uma contradição. Portanto, não existe $m \in \mathbb{N}$ em tais condições.

(j) Se $n < m$ então existe p natural não nulo tal que $n + p = m$. Como $p \neq 0$ podemos escrever $p = (p - 1) + 1$. Assim, $n + p = m$ pode ser escrita como $n + [(p - 1) + 1] = m$. Pela comutativa e associativa, nessa ordem, obtemos $[n + 1] + (p - 1) = m$. Como $(p - 1) \in \mathbb{N}$, pois $p \neq 0$, temos da última igualdade que $n + 1 \leq m$.

(k) Por indução em m:

i) Se $0 > 0$, temos que existe $p \in \mathbb{N}$, com $p \neq 0$, tal que $0 = 0 + p$, donde obtemos que $0 = p$, gerando uma contradição. Resta então que $0 \not> 0$.

ii) Admitindo por hipótese de indução que $m \not> m$. Temos que se $m + 1 > m + 1$ então existe $k \in \mathbb{N}$, com $k \neq 0$, tal que $m + 1 = (m + 1) + k$. Da associativa, comutativa e associativa, obtemos $m + 1 = (m + k) + 1$, e pela lei do cancelamento, $m = m + k$. Da última igualdade e de $k \in \mathbb{N}^*$ temos que $m > m$, contrariando a hipótese de indução. Resta então $m + 1 \not> m + 1$ quando $m \not> m$.

$\square$

1.6 Subtração em $\mathbb{N}$

Definição 1.6.1. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $n \leq m$, então definimos diferença entre m e n, nessa ordem, como o número $d = m - n$ tal que $m = n + d$. Donde podemos escrever a identidade $m = n + (m - n)$.

Em seguida provamos as propriedades para a subtração nos naturais nas condições em que é definida para todo m, m_1, n, n_1 e k natural:

Propriedade 1.6.2. (a) $n - n = 0$.

(b) $n - 0 = n$.

(c) $(n + k) - k = n$.

(d) $(n - m)k = nk - mk$, para $m \leq n$.

(e) $n \leq nk$, $k \neq 0$.

(f) Dados os naturais m, n, m_1 e n_1 tais que $m \leq n$ e $m_1 \leq n_1$, temos que:

I) $(n - m) + (n_1 - m_1) = (n + n_1) - (m + m_1)$.

(II) $(n - m)(n_1 - m_1) = (nn_1 + mm_1) - (nm_1 + n_1m)$.

(III) $n - m = n_1 - m_1$ se, e somente se, $n + m_1 = n_1 + m$.

(g) $n - m = (n + k) - (m + k)$.

(h) $m - n \leq m_1 - n_1$ se, e somente se, $m + n_1 \leq m_1 + n$, para $n \leq m$ e $n_1 \leq m_1$.

Demonstração. (a) De $n = n + 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $0 = n - n$.

(b) De $n = 0 + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n = n - 0$.

(c) Da identidade $n + k = k + n$, temos que $(n + k) - k = n$.

(d) De $n = m + (n - m)$ temos $nk = [m + (n - m)]k = mk + (n - m)k$, logo, $(n - m)k = nk - mk$.

(e) Se $k \neq 0$, então $(k - 1) \in \mathbb{N}$. Temos que $(k - 1)n + n = [(k - 1) + 1]n = kn$. De $(k - 1)n + n = kn$ e $(k - 1)n \in \mathbb{N}$ temos que $n \leq kn$.

(f) (I) Tomamos $n - m = d$ e $n_1 - m_1 = d_1$, e então $n = m + d$ e $n_1 = m_1 + d_1$. Assim, $n + n_1 = (m + d) + (m_1 + d_1)$. A partir das propriedades associativa e comutativa podemos reescrever $(m + d) + (m_1 + d_1)$ como $(m + m_1) + (d + d_1)$ de onde obtemos $n + n_1 = (m + m_1) + (d + d_1)$, ou, $d + d_1 = (n + n_1) - (m + m_1)$, ou ainda, $(n - m) + (n_1 - m_1) = (n + n_1) - (m + m_1)$.

(II) De $n = m + d$, temos $nn_1 = (m + d)n_1$, logo $nn_1 = mn_1 + dn_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
nn_1 + mm_1 &= (mn_1 + dn_1) + mm_1 \\
&= mn_1 + (dn_1 + mm_1) \\
&= mn_1 + (mm_1 + dn_1) \\
&= (mn_1 + mm_1) + dn_1 \\
&= (mn_1 + mm_1) + d(m_1 + d_1) \\
&= (mn_1 + mm_1) + (dm_1 + dd_1)
\end{aligned}$$

$$= [(mn_1 + mm_1) + dm_1] + dd_1$$

$$= [mn_1 + (mm_1 + dm_1)] + dd_1$$

$$= [mn_1 + (m + d)m_1] + dd_1$$

$$= (mn_1 + nm_1) + dd_1.$$

Assim, de $nn_1 + mm_1 = (mn_1 + nm_1) + dd_1$, obtemos $dd_1 = (nn_1 + mm_1) - (mn_1 + nm_1)$, e como queremos, $(n - m)(n_1 - m_1) = (nn_1 + mm_1) - (nm_1 + n_1 m)$.

(III) Temos as seguintes igualdades equivalentes:

$$n - m = n_1 - m_1$$

$$(n - m) + (m + m_1) = (n_1 - m_1) + (m + m_1)$$

$$(n - m) + [(m + m_1) - 0] = (n_1 - m_1) + [(m + m_1) - 0]$$

$$[n + (m + m_1)] - (m + 0) = [n_1 + (m + m_1)] - (m_1 + 0)$$

$$[n + (m + m_1)] - m = [n_1 + (m + m_1)] - m_1$$

$$[n + (m_1 + m)] - m = [n_1 + (m + m_1)] - m_1$$

$$[(n + m_1) + m] - m = [(n_1 + m) + m_1] - m_1$$

$$n + m_1 = n_1 + m.$$

(g) $n - m = (n - m) + 0 = (n - m) + (k - k) = (n + k) - (m + k)$.

(h) Temos que $m - n \leq m_1 - n_1$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(m - n) + k = m_1 - n_1$, que é equivalente às igualdades

$$
\begin{aligned}
(m-n)+(k-0) &= m_1 - n_1\\
(m+k)-(n+0) &= m_1 - n_1\\
(m+k)-n &= m_1 - n_1\\
(m+k)+n_1 &= m_1 + n\\
(m+n_1)+k &= m_1 + n.
\end{aligned}
$$

Temos que $(m+n_1)+k = m_1+n$ com $k \in \mathbb{N}$ se, e somente se, $m+n_1 \leq m_1+n$.
$\square$

A seguir abordamos uma propriedade dos números naturais conhecida como tricotomia cuja demonstração foi adaptada de [6].

Propriedade 1.6.3 (Tricotomia)**.** Dados $m, n \in \mathbb{N}$ pode ocorrer uma e apenas uma das seguintes relações:

$$m = n,\ m < n \text{ ou } n < m.$$

Demonstração. Vamos provar a unicidade de uma dessas relações, isto é, que elas são mutuamente exclusivas. Tomando as relações duas a duas, temos três possibilidades:

a) Se $m = n$ e $m < n$, segue da Propriedade 1.5.2 (d) que $m > m$, gerando um absurdo conforme vimos na Propriedade 1.5.2 (k).

b) Se $m = n$ e $n < m$, segue da Propriedade 1.5.2 (d) que $n > n$, gerando um absurdo.

c) Se $m < n$ e $n < m$, temos que existem $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = m + p_1$ e $m = n + p_2$. Assim, $m = (m+p_1)+p_2$, logo $m = m + (p_1+p_2)$, e como $(p_1+p_2) \in \mathbb{N}^*$, que $m > m$, gerando o mesmo absurdo.

Vamos provar a existência de uma das relações. Tomado $n \in \mathbb{N}$, seja $M = \{m \in \mathbb{N} : m = n,\ m < n \text{ ou } n < m\}$. Vamos provar por indução em m que $M = \mathbb{N}$. De fato,

i) Temos duas possibilidades, $n = 0$ ou $n \neq 0$. Se $n = 0$, então pela definição de M, $0 \in M$. Se $n \neq 0$, já que $0 \leq n$ (conforme Propriedade 1.5.2 (g)), então $0 < n$. Pela definição de M, temos $0 \in M$. Em qualquer caso, temos que $0 \in M$.

ii) Supondo, por hipótese de indução, que $m \in M$, temos então três casos a considerar:

a) $m = n$.

De $m = n$ temos do Axioma 1.1.1 (b) que $m + 1 = n + 1$, e como $1 \in \mathbb{N}^*$, obtemos que $n < m + 1$, e portanto, pela definição de M, que $(m + 1) \in M$.

b) $m < n$.

De $m < n$ temos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $n = m + q$. Como $q \neq 0$ temos pela Proposição 1.1.2 (c) que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $q = r + 1$. Se $r = 0$, então $q = 0 + 1 = 1$ e $n = m + 1$, logo, $(m + 1) \in M$. Mas se $r \neq 0$ temos $(m + 1) + r = m + (1 + r) = m + (r + 1) = m + q = n$, logo $(m + 1) < n$. Portanto, $(m + 1) \in M$. Em qualquer caso, temos que $(m + 1) \in M$.

c) $n < m$.

De $n < m$ temos que existe $t \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = n + t$. Logo, $m + 1 = (n + t) + 1 = n + (t + 1)$. Como $(t + 1) \in \mathbb{N}^*$ concluímos que $n < (m + 1)$, e portanto que $(m + 1) \in M$.

Provamos que nos três casos se $m \in M$, então $(m + 1) \in M$. E a indução está completa.

$\square$

Agora estamos aptos a demonstrar a lei do cancelamento para a multiplicação.

Propriedade 1.6.4 (Lei do cancelamento para a multiplicação)**.** Dados os naturais m, n e k, para $n \neq 0$, temos que se $mn = kn$, então $m = k$.

Demonstração. Suponhamos que $mn = kn$ e que $m < k$. De $m < k$ temos que existe $p \in \mathbb{N}$, com $p \neq 0$, tal que $k = m + p$. Assim, de $mn = kn$ temos $mn = (m + p)n = mn + pn$, ou, $mn + 0 = mn + pn$. Cancelando mn temos $pn = 0$. Como $p \neq 0$, concluímos que $n = 0$, gerando uma contradição. Analogamente, se supomos $mn = kn$ e que $k < m$, chegamos numa contradição. Resta então, pela tricotomia, $m = k$, quando $mn = kn$ e $n \neq 0$. $\square$

1.7 O princípio de indução matemática

A partir do axioma de indução que está relacionado a conjuntos, podemos enunciar o princípio de indução finita que está relacionado a demonstração de propriedades ou proposições[2].

Teorema 1.7.1 (Princípio de indução matemática)**.** Seja $P(n)$ uma proposição associada a cada natural n tal que:

i) $P(0)$ é válida (Base de indução);

ii) Se $P(n)$ é válida, então $P(n+1)$ também é válida (Passe indutivo).

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja A um conjunto de números naturais n tal que $P(n)$ é válida. Temos que:

a) $0 \in A$, já que $P(0)$ é válida pela hipótese i).

b) Se $n \in A$, então $P(n)$ é válida. Mas, pela hipótese ii), se $P(n)$ é válida então $P(n+1)$ também é válida, logo, $(n+1) \in A$.

De a) e b), segue do Axioma 1.1.1 (e) que $A = \mathbb{N}$, isto é, a propriedade $P(n)$ é válida para todos os números naturais. $\square$

O próximo exemplo de aplicação do Teorema 1.7.1 retiramos de [7].

Exemplo 1.7.2. Demonstrar que $P(n):\ 2+5+8+\cdots+(2+3n) = \dfrac{(n+1)(4+3n)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos que

i) $2+3\cdot 0 = 2$; $\dfrac{(0+1)(4+3\cdot 0)}{2} = \dfrac{1\cdot 4}{2} = 2$. Isto é, $P(0)$ é válida.

ii) Se $P(n)$ é válida para algum natural n, isto é, $2+5+8+\cdots+(2+3n) = \dfrac{(n+1)(4+3n)}{2}$, então adicionando $2+3\cdot(n+1)$ aos dois membros da última igualdade obtemos $2+5+8+\cdots+(2+3n)+[2+3(n+1)] = \dfrac{(n+1)(4+3n)}{2}+[2+$

[2]Uma proposição é uma sentença declarativa em que podemos atribuir apenas um dos valores lógicos: verdadeira ou falsa.

$3(n+1)]$, ou ainda, $2+5+8+\cdots+(2+3n)+[2+3(n+1)] = \dfrac{3n^2+13n+14}{2}$. Como $3n^2+13n+14 = (n+2)(3n+7) = [(n+1)+1][4+3(n+1)]$, então $2+5+8+\cdots+(2+3n)+[2+3(n+1)] = \dfrac{[(n+1)[4+3(n+1)]}{2}$. Isto é, se $P(n)$ é válida, então $P(n+1)$ também é válida.

Portanto, pelo Teorema 1.7.1, temos que $P(n)$ é válida para todo natural.

Vamos demonstrar uma importante variação do princípio de indução matemática, já que uma propriedade pode ser válida a partir de um número natural diferente de zero.

Teorema 1.7.3. Seja a proposição $P(n)$ para cada natural $n \geq n_0$, com n_0 natural, que satisfaz as condições:

i) $P(n_0)$ é válida;

ii) Para todo $n \geq n_0$, se $P(n)$ é válida, então $P(n+1)$ também é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo natural $n \geq n_0$.

Demonstração. Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n_0+n) \text{ é válida}\}$, temos que

i^*) $P(n_0) = P(n_0+0)$ é válida por (i), logo $0 \in A$.

ii^*) Se $n \in A$, com $n \geq n_0$, temos pela definição de A que $P(n_0+n)$ é válida, e de (ii), obtemos que $P((n_0+n)+1) = P(n_0+(n+1))$ também é válida, logo, $(n+1) \in A$.

De (i^*) e (ii^*), temos pelo Axioma 1.1.1 (e) que $A = \mathbb{N}$, isto é, $P(n)$ é válida para todo natural $n \geq n_0$. $\square$

Os dois próximos exemplos de aplicação do Teorema 1.7.3 retiramos de [8].

Exemplo 1.7.4. Seja a propriedade

$$P(n): \ 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

Vamos verificar primeiramente a base de indução (i), isto é, que $P(1)$ é válida. De fato, $2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$. Como i) é válida podemos prosseguir para verificar a validade do passo indutivo (ii), isto é, $P(n)$ implica em $P(n+1)$. Supondo que a propriedade seja válida para algum natural n, isto é, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, queremos provar que vale $P(n+1)$, isto é, $1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2\cdot(n+1)-1]=(n+1)^2$. De fato, adicionando $[2\cdot(n+1)-1]$ aos dois membros da igualdade $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ obtemos que $1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2\cdot(n+1)-1]=n^2+[2\cdot(n+1)-1]$, que é equivalente a $1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2\cdot(n+1)-1]=n^2+(2n+1)$, que é equivalente a $1+3+5+\cdots+(2n-1)+[2\cdot(n+1)-1]=(n+1)^2$, como queríamos.

Como são válidas as duas condições i) e ii), concluímos, pelo Teorema 1.7.3, a validade da propriedade $P(n)$ para todo n natural não nulo.

Foi na obra "Dois livros de aritmética" (traduzido do latim) de Francesco Maurolico (1494 - 1575) que temos o registro do primeiro uso (segundo o autor de [8]) do princípio de indução matemática (abreviamos por PIM) para provar propriedades relacionadas a números naturais. Foi para provar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 .

Assim, o princípio de indução matemática se mostra eficiente pois após se verificar a validade de $P(1)$ por i), podemos garantir, por ii), que $P(2)$ também é válida. A validade de $P(2)$ garante, por ii), a validade de $P(3)$. E assim por diante. Por isso, podemos fazer uma analogia entre o princípio de indução matemática e o efeito dominó, onde se o primeiro dominó cai (base de indução) e que se um dominó caindo garante que o seu sucessor imediato também cairá (passe indutivo), então todos cairão (a proposição vale para todos os naturais).

Exemplo 1.7.5. $n! > 2^n,$ para todo natural $n \geq 4$.

i) $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$.

ii) $(n+1)! = (n+1)\cdot n! \overset{(*)}{>} 2\cdot n! \overset{(H.I.)}{>} 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Assim, pelo Teorema 1.7.3, temos que $n! > 2^n,$ para todo natural $n \geq 4$. Note que na passagem $(*)$ a hipótese $n \geq 4$ garante que $n > 1$, isto é, $n+1 > 1+1$, ou ainda, $n+1 > 2$.

1.8 Princípio da boa ordenação

Como consequência do princípio de indução finita temos o princípio da boa ordenação (abreviamos por PBO). Antes vamos definir elemento mínimo de um conjunto.

Definição 1.8.1. Dado um conjunto L de números naturais, definimos como elemento mínimo de L um elemento m de L tal que $m \leq n$, para todo $n \in L$: $m =$ min L se, e somente se, $m \in L$ e $m \leq n$, para todo $n \in L$.

Exemplo 1.8.2. O conjunto $L = \{n \in \mathbb{N} \,|\, (10 - 3n) \in \mathbb{N}\} = \{10, 7, 4, 1\}$ é tal que min L $= 1$, pois $1 \in L$ e $1 \leq 10$, $1 \leq 7$, $1 \leq 4$ e $1 \leq 1$.

A demonstração a seguir foi levemente adaptada de [4].

Teorema 1.8.3 (Princípio da boa ordenação)**.** Todo subconjunto L não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Demonstração. Tomamos $M = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq n, \text{ para todo } n \in L\}$. Temos que $0 \in M$, pois $0 \leq n$ (conforme Propriedade 1.5.2 (g)), logo, $M \neq \varnothing$. Como $L \neq \varnothing$, então existe $a \in L$ e como $a + 1 \nleq a$, temos que $(a + 1) \notin M$. Assim, M não contém todos os naturais ($M \neq \mathbb{N}$). Devemos ter algum $m^* \in M$ tal que $(m^* + 1) \notin M$, pois caso para todo $m \in M$ tivéssemos $(m + 1) \in M$, como $0 \in M$, teríamos pelo Axioma 1.1.1 (e) que $M = \mathbb{N}$. Como $m^* \in M$, então $m^* \leq n$, para todo $n \in L$ (1). Se $m^* \notin L$, então como $m^* = n$ não pode ocorrer, resta que $m^* < n$, donde pela Propriedade 1.5.2 (j), obtemos que $m^* + 1 \leq n$. Pela definição de M concluímos que $(m^* + 1) \in M$, gerando uma contradição. Resta então que $m^* \in L$ (2). De (1) e (2), segue da definição que $m^* =$ min L. □

Provada a existência, vamos provar a unicidade do elemento mínimo.

Proposição 1.8.4. O elemento mínimo de um conjunto é único.

Demonstração. Suponha que m_1 e m_2 sejam mínimos do conjunto L:

- Se $m_1 =$ min L, então $m_1 \leq l$, para todo $l \in L$. Em particular, temos $m_1 \leq m_2$, já que $m_2 \in L$ (pois, $m_2 =$ min L).
- Se $m_2 =$ min L, então $m_2 \leq l$, para todo $l \in L$. Em particular, temos $m_2 \leq m_1$, já que $m_1 \in L$ (pois, $m_1 =$ min L).

De $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$, temos da Propriedade 1.5.2 (b) que $m_1 = m_2$. □

Na verdade o princípio de indução finita é equivalente ao princípio da boa ordenação, basta tomarmos um como axioma e obtermos o outro como consequência.

Teorema 1.8.5. O princípio de indução matemática é consequência do princípio da boa ordenação.

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e se $n \in X$, então $(n+1) \in X$. Queremos provar que $X = \mathbb{N}$. Se $X \neq \mathbb{N}$, então $(\mathbb{N} - X)$ é não vazio, e, pelo princípio da boa ordenação, existe um menor elemento $k \in (\mathbb{N} - X)$. Como $0 \notin (\mathbb{N} - X)$, então $k \neq 0$, e k é sucessor de algum natural p, isto é, $k = p + 1$. Se $p \in (\mathbb{N} - X)$, como $p < k$, então k não seria o menor elemento de $(\mathbb{N} - X)$. Resta então $p \in X$, logo $p + 1 = k \in X$, e portanto, $k \notin (\mathbb{N} - X)$, gerando uma contradição. Logo, $X = \mathbb{N}$. □

Uma importante consequência do PBO é outra variação do PIM.

Teorema 1.8.6 (Princípio de indução forte/completa)**.** Seja a proposição $P(n)$ para cada natural $n \geq n_0$, com n_0 natural, que satisfaz as condições:

i) $P(n_0)$ é verdadeira;

ii) para todo $k > n_0$, têm-se para cada m natural tal que $n_0 \leq m < k$, se $P(m)$ é verdadeira, então $P(k)$ também é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0 \text{ e } P(n) \text{ é falsa}\}$. Supondo que $A \neq \varnothing$, então pelo PBO temos que existe $a = \min \text{A}$, o que garante $a \in A\,(a \geq n_0$ e $P(a)$ falsa). Como $P(n_0)$ é verdadeira por (i), então $n_0 \notin A$, logo $a \neq n_0$ (caso contrário $n_0 = a \in A$). De $a \geq n_0$ e $a \neq n_0$, concluímos que $a > n_0$ (1). Devemos ter $P(m)$ verdadeira para todo m com $n_0 \leq m < a$ (caso contrário $\min \text{A} \neq a$) (2). De (1) e (2), concluímos por (ii) que $P(a)$ é verdadeira, logo, $a \notin A$, gerando uma contradição. Logo, $A = \varnothing$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$. □

O exemplo a seguir de aplicação do Teorema 1.8.6 retiramos de [9].

Exemplo 1.8.7. Seja (a_n) uma sequência de números reais positivos tal que $a_1 = 1$ e $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$, para todo $n \geq 1$. Prove que $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos que:

i) $a_1 = 1$.

ii) Suponha que $a_n = n$ para todo os naturais de 1 a n, e provemos que $a_{n+1} = n+1$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
a_1^3 + \cdots + a_n^3 + a_{n+1}^3 &= (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 \\
(a_1 + \cdots + a_n)^2 + a_{n+1}^3 &= (a_1 + \cdots + a_n)^2 + 2(a_1 + \cdots + a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\
a_{n+1}^3 &= 2(1 + 2 + \cdots + n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\
a_{n+1}^3 &= 2\frac{(1+n)n}{2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\
a_{n+1}^3 - (1+n)na_{n+1} - a_{n+1}^2 &= 0 \\
a_{n+1} \cdot \big(a_{n+1}^2 - a_{n+1} - (1+n)n\big) &= 0
\end{aligned}
$$

Da última equação na variável a_{n+1} obtemos $a_{n+1} = 0; -n; n+1$. Como os termos da sequência são positivos, temos que $a_{n+1} = n+1$. Pelo princípio de indução forte em n temos que $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O princípio de indução forte é importante em demonstrações onde no passo indutivo é necessário que a validade da propriedade para mais de um natural implique na validade da propriedade para o natural que os sucede imediatamente.

1.9 Observações na demonstração por indução

Vamos em seguida discutir dois exemplos oportunos para melhor compreensão do PIM.

Exemplo 1.9.1. Seja a proposição

$$P(n):\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 \\
1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1)
\end{aligned}
$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)+1$$
$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$$
$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}+1.$$

Isto é, a sentença "se $P(n)$ é válida, então $P(n+1)$ também é válida" é verdadeira, embora $P(n)$ seja falsa. Isso mostra que no passo indutivo não estamos usando o que queremos provar, já que supomos $P(n)$ válida para algum n, e não, para todo. Mostra ainda que se tivéssemos verificado a base de indução teríamos que não vale $P(1)$, pois $\frac{1\cdot(1+1)}{2}+1=\frac{1\cdot 2}{2}+1=\frac{2}{2}+1=1+1=2\neq 1$. Assim, embora valha o passe indutivo, não vale a base de indução. Portanto, embora a base de indução seja geralmente mais simples de se verificar a validade, ela é tão importante quanto o passe indutivo nas demonstrações por indução matemática. Em todas as demonstrações por indução faremos aqui a verificação da base de indução com a devida atenção.

Exemplo 1.9.2. Seja a propriedade $P(n)$: Num conjunto de n bolas, todas possuem a mesma cor.

E leiamos, com atenção, uma demonstração para tal por indução:

i) Se o conjunto tiver uma bola, é claro que $P(1)$ é verdadeira, já que temos uma bola com uma única cor.

ii) Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ um conjunto de $n+1$ bolas, podemos escrever $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \cup \{x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$. Como o conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ possui n bolas então, pela hipótese de indução, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ possuem a mesma cor C, e, em particular, a bola x_n, por exemplo, tem a cor C. Por outro lado, o conjunto $\{x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ possui n bolas e, pela hipótese de indução, todas elas possuem a mesma cor C, já que x_n tem a cor C. Disso, concluímos que x_{n+1} também tem cor C. Portanto, todas as bolas $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ têm a mesma cor C. Mostramos que a sentença é verdadeira para $n+1$ quando também é para n.

Por i) e ii), concluímos, por indução matemática, que a sentença é verdadeira para todo n natural.

Bom, é claro que num conjunto qualquer de bolas não podemos garantir que todas as bolas possuem a mesma cor, mas qual foi então o erro cometido na demonstração por indução? Na verdade, embora esse exemplo pareça um paradoxo em indução, o erro aparece quando escrevemos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ como $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \cup$

$\{x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$. Se tomarmos um conjunto $\{x_1, x_2\}$ com dois elementos não é possível escrevê-lo como a união de dois subconjuntos unitários de modo que possuam pelo menos um elemento em comum. Assim, $P(1)$ não implica em $P(2)$, invalidando a falsa demonstração.

O princípio de indução matemática possui aplicações na Aritmética, Álgebra, Geometria e Teoria dos números, e em outros ramos da matemática. O PIM é útil para provarmos propriedades dos números naturais e para definições envolvendo números naturais. Na Computação, por exemplo, com as propriedades recursivas, o PIM se mostra também muito importante. Vamos dar a ênfase necessária às várias aplicações do PIM no próximo capítulo.

Capítulo 2

Aplicações do princípio de indução matemática

Os exemplos deste capítulo estão separados em cinco grupos de aplicação (aritmética, geometria, teoria dos conjuntos, problemas lúdicos e em problemas de contagem) que nos mostram a versatilidade e abrangência do princípio de indução matemática. Por questão de praticidade fazemos todas as demonstrações pelo princípio de indução matemática verificando a validade de i) (base de indução) e de ii) (passo indutivo), o que finaliza a demonstração. Deixamos claro em que passagem na demonstração usamos a hipótese de indução indicando por (H.I.).

2.1 Aplicações em aritmética

2.1.1 Aplicações nas propriedades de somatório

Definimos que $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$ e $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$. Vamos demonstrar, por indução em n, as principais propriedades do somatório (retiradas de [10]) para a_i, b_i e c reais e n, i naturais.

Propriedade 2.1.1.1. (a) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

(b) $c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i$.

(c) $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$. (Útil em somas telescópicas[1].)

(d) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demonstração. (a) i) $\sum_{i=1}^{1}(a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{i=1}^{1} b_i$.

ii) $\sum_{i=1}^{n+1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \overset{(H.I.)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right) + a_{n+1} + b_{n+1} = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right] + \left[\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + b_{n+1}\right] = \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i$.

(b) i) $c\sum_{i=1}^{1} a_i = ca_1 = \sum_{i=1}^{1} ca_i$.

ii) $c\sum_{i=1}^{n+1} a_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + ca_{n+1} \overset{(H.I.)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} ca_i\right) + ca_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} ca_i$.

(c) i) $\sum_{i=1}^{1}(a_{i+1} - a_i) = a_{1+1} - a_1$.

ii) $\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = \left[\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)\right] + a_{(n+1)+1} - a_{n+1} \overset{(H.I.)}{=} (a_{n+1} - a_1) + a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+2} - a_1 = a_{(n+1)+1} - a_1$.

(d) i) $\sum_{i=1}^{1} c = c = 1 \cdot c$.

ii) $\sum_{i=1}^{n+1} c = \sum_{i=1}^{n} c + c \overset{(H.I.)}{=} nc + c = (n+1)c$.

□

---

[1]Para uma sequência (x_n), com $n \in \mathbb{N}$, definimos $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Chamamos a soma $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_{n+1} - x_1$ de soma telescópica.

2.1.2 Aplicações nos números binomiais e no binômio de Newton

Definimos o número binomial $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$, com n e p naturais, e obtemos da definição que:

- $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{(n-0)!0!} = \dfrac{n!}{n!\cdot 1} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$
- $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{(n-n)!n!} = \dfrac{n!}{0!\cdot n!} = \dfrac{n!}{1\cdot n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$
- $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!\cdot 1} = n.$
- $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{[n-(n-p)]!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$, onde $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ chamamos de números binomiais complementares.
- $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (Relação de Stiffel). De fato,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{[n-(p+1)]!(p+1)!}\\
&= \frac{n!}{(n-p)(n-p-1)!p!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)p!}\\
&= \frac{n!}{(n-p-1)!p!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right)\\
&= \frac{n!}{(n-p-1)!p!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]\\
&= \frac{n!}{(n-p-1)!p!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-p)(p+1)}.
\end{aligned}$$

Assim, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \dfrac{(n+1)n!}{(n-p)(n-p-1)!(p+1)p!} = \dfrac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{[(n+1)-(p+1)]!(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}.$

Convencionamos que quando $n < p$, então $\binom{n}{p} = 0$.

Vejamos agora algumas propriedades (retiradas de [8]) presentes no triângulo de Pascal[2] para m, n e p naturais:

Propriedade 2.1.2.1. (a) $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$. (Soma na coluna)

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}$. (Soma na diagonal)

Demonstração. (a) Indução em n:

i) $\binom{p+0}{p} = \binom{p}{p} = 1$ e $\binom{p+0+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = 1$, logo $\binom{p+0}{p} = \binom{p+0+1}{p+1}$.

ii) $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} + \binom{p+(n+1)}{p} \overset{(H.I.)}{=} \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} \overset{(\text{Rel. Stiffel})}{=} \binom{(p+n+1)+1}{p+1} = \binom{p+(n+1)+1}{p+1}$.

(b) Indução em m:

i) $\binom{n+0}{0} = \binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$, logo, $\binom{n+0}{0} = \binom{n+0+1}{0}$.

ii) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+m}{m} + \binom{n+(m+1)}{m+1} \overset{(H.I.)}{=} \binom{n+m+1}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} \overset{(\text{Rel. Stiffel})}{=} \binom{(n+m+1)+1}{m+1} = \binom{n+(m+1)+1}{m+1}$.

□

No próximo item temos a fórmula (retirada de [11]) do desenvolvimento do binômio de Newton para os reais a e b e os naturais n e p e como consequência dela mais uma propriedade do triângulo de Pascal.

Exemplo 2.1.2.2. (Binômio de Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

[2] É um quadro de formato triangular que organiza os coeficientes do desenvolvimento de cada binômio $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Indução em n:

i) $\displaystyle\sum_{p=0}^{0}\binom{0}{p}a^{0-p}b^p = \binom{0}{0}a^{0-0}b^0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1 = (a+b)^0.$

ii)

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\
&\overset{(H.I.)}{=} \left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p\right]\cdot(a+b)\\
&= \left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right]\cdot(a+b)\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}ab^n\\
&+ \binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Podemos escrever a última expressão como

$$\binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^nb + \cdots + \left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Que, pela relação de Stiffel, é igual a $\binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$, ou, $\binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$, ou ainda, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^{(n+1)-p}b^p$.

Note que usamos $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Note também que tomando $a = b = 1$ em $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$, obtemos $(1+1)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}1^{n-p}1^p$, isto é, $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$, propriedade conhecida como soma na linha do triângulo de Pascal.

2.1.3 Aplicações em igualdades

As aplicações em aritmética nas demonstrações de igualdades/identidades são geralmente mais simples bastando uma manipulação numérica/algébrica a partir de fatorações e simplificações para mostrarmos a validade de $P(n+1)$ a partir da validade de $P(n)$. Os exemplos desta subseção foram retirados respectivamente de [12], [8], [10], [13], [14], [15], [16] e [8].

Exemplo 2.1.3.1. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$.

i) $\dfrac{1^2}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2\cdot(2\cdot 1+1)}$.

ii)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{[2(n+1)-1]\cdot[2(n+1)+1]}\\
&\overset{(H.I.)}{=} \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}\\
&= \frac{n+1}{2n+1}\cdot\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2n+3}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{2n^2+5n+2}{2(2n+3)}\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{(2n+1)\cdot 2\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2[2(n+1)+1]}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3.2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}=n\cdot 2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Indução em n:

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{1} i\binom{1}{i}=0\cdot\binom{1}{0}+1\cdot\binom{1}{1}=0\cdot 1+1\cdot 1=1$ e $1\cdot 2^{1-1}=1\cdot 2^0=1$, logo, $\displaystyle\sum_{i=0}^{1} i\binom{1}{i}=1\cdot 2^{1-1}$.

ii)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i\binom{n+1}{i} &= 0\cdot\binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n+1}{i} \\
&\overset{\text{(Rel. Stiffel)}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} i\left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\left[i\binom{n}{i-1} + i\binom{n}{i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}[(i-1)+1]\binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\left[(i-1)\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i-1}\right] + \sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(i-1)\binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n}{i}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado temos que

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)\binom{n}{i-1} = 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n}.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i\binom{n}{i} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} + (n+1)\binom{n}{n+1}.$

Portanto, pela hipótese de indução e por soma na linha, obtemos que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} i\binom{n+1}{i}$ $= n\cdot 2^{n-1} + 2^n + \left[n2^{n-1} - 0\cdot\binom{n}{0} + (n+1)\cdot 0\right] = 2^n\cdot\left(\frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2}\right) = 2^n(n+1) =$ $(n+1)2^{(n+1)-1}$.

Exemplo 2.1.3.3. Para $m, n \in \mathbb{N}$:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1) + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1) \ldots (n+m).$$

Indução em n:

i) $1 \cdot (1+1) \cdot \ldots \cdot (1+m-1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ e $\frac{1}{m+1} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot \ldots \cdot m \cdot (1+m) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$.

ii) $E = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1) + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m-1) + (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot [(n+1)+m-1]$. Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{m+1} n(n+1) \ldots (n+m) + (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+m) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot \left(\frac{n}{m+1} + 1 \right) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot \frac{n+m+1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot [(n+1)+m]. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3.4. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

i) $1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1$ e $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$, logo $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$.

ii)

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! &\overset{(H.I.)}{=} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! \cdot [1 + (n+1)] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \\ &= [(n+1)+1]! - 1. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3.5. $(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2 \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^4$, $n \in \mathbb{N}$.

i) $1^5 + 1^7 = 1 + 1 = 2 = 2 \cdot 1^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right)^4 = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \right]^4$.

ii)

$$\begin{aligned}
E &= (1^5+2^5+\cdots+n^5+(n+1)^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7+(n+1)^7) \\
&= \left[(1^5+2^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7)\right]+(n+1)^5+(n+1)^7 \\
&\overset{(H.I.)}{=} 2\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^4+(n+1)^5+(n+1)^7 \\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot n^4\cdot(n+1)^4+(n+1)^4\cdot\left[(n+1)+(n+1)^3\right] \\
&= (n+1)^4\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot n^4+(n+1)+(n+1)^3\right] \\
&= (n+1)^4\cdot\left[\frac{n^4+8(n+1)+8(n+1)^3}{8}\right] \\
&= (n+1)^4\cdot\frac{n^4+8n^3+24n^2+32n+16}{8} \\
&= \frac{(n+1)^4\cdot(n+2)^4}{8} \\
&= 2\cdot\frac{(n+1)^4(n+2)^4}{16} \\
&= 2\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(n+1)[(n+1)+1]\right\}^4.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3.6. $S_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i!}{(x+i)^{(i)}}=\frac{x}{x-1}-\frac{(n+1)!}{(x-1)(x+n)^{(n)}}$, para n e i naturais e para o real $x\neq 1$, onde $(x+0)^{(0)}=1$ e $(x+i)^{(i)}=(x+1)(x+2)\cdots(x+i)$.

Indução em n:

i) $S_0(x)=\sum_{i=0}^{0}\frac{i!}{(x+i)^{(i)}}=\frac{0!}{(x+0)^{(0)}}=\frac{1}{1}=1$ e $\frac{x}{x-1}-\frac{(0+1)!}{(x-1)(x+0)^{(0)}}=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{(x-1)\cdot 1}=\frac{x-1}{x-1}=1$, logo, vale para $n=0$;

$S_1(x)=\sum_{i=0}^{1}\frac{i!}{(x+i)^{(i)}}=\frac{0!}{(x+0)^{(0)}}+\frac{1!}{(x+1)^{(1)}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1+1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$ e $\frac{x}{x-1}-\frac{(1+1)!}{(x-1)(x+1)^{(1)}}=\frac{x}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+1)x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}$, logo vale para $n=1$.

ii)

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(x) &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i!}{(x+i)^{(i)}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(x+i)^{(i)}} + \frac{(n+1)!}{[x+(n+1)]^{(n+1)}} \\
&\overset{(H.I.)}{=} \frac{x}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(x+n)^{(n)}} + \frac{(n+1)!}{[x+(n+1)]^{(n+1)}} \\
&= \frac{x}{x-1} - (n+1)!\left[\frac{1}{(x-1)(x+n)^{(n)}} - \frac{1}{[x+(n+1)]^{(n+1)}}\right] \\
&= \frac{x}{x-1} - (n+1)!\left[\frac{(x+(n+1))-(x-1)}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)(x+(n+1))}\right] \\
&= \frac{x}{x-1} - (n+1)!\left[\frac{n+2}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)(x+(n+1))}\right] \\
&= \frac{x}{x-1} - \frac{(n+2)(n+1)!}{(x-1)(x+1)\cdots(x+n)(x+(n+1))} \\
&= \frac{x}{x-1} - \frac{(n+2)!}{(x-1)[x+(n+1)]^{(n+1)}} \\
&= \frac{x}{x-1} - \frac{[(n+1)+1]!}{(x-1)[x+(n+1)]^{(n+1)}}.
\end{aligned}$$

No exemplo a seguir provamos uma identidade trigonométrica por indução onde a verificação da base de indução é interessante por não ser tão imediata, como é de costume.

Exemplo 2.1.3.7. (Identidade trigonométrica)

$$\cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

i)

$$\frac{(1+1)\cos 1\cdot x - 1\cdot\cos(1+1)x - 1}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\cos x - \cos 2x - 1}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1)}{=} \frac{2\cos\, x - (2\cos^2 x - 1) - 1}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{2\cos\, x(1-\cos x)}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&\overset{(2)}{=} \frac{\cos\, x\left(1-\left(1-2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)}{2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\cos\, x\cdot 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \cos\, x = 1\cdot\cos(1\cdot x).
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
E &= \cos\, x + \cdots + n\cos\, nx + (n+1)\cos(n+1)x\\
&\overset{(H.I.)}{=} \frac{(n+1)\cos\, nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} + (n+1)\cos(n+1)x\\
&\overset{(3)}{=} \frac{(n+1)\cos\, nx - n\cos(n+1)x - 1 + (n+1)\cdot\cos(n+1)x\cdot(2-2\cos\, x)}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Logo, $F = E\cdot 4\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = -n\cos(n+1)x + 2(n+1)\cos(n+1)x + (n+1)\cos\, nx - 2(n+1)\cos(n+1)x\cos\, x - 1$.
Portanto,

$$
\begin{aligned}
F &= \cos(n+1)x\cdot[-n+2(n+1)] - (n+1)[2\cos(n+1)x\cos\, x - \cos\, nx] - 1\\
&\overset{(4)}{=} (n+2)\cos(n+1)x - (n+1)[\cos(nx+2x) + \cos\, nx - \cos\, nx] - 1\\
&= (n+2)\cos(n+1)x - (n+1)\cos(n+2)x - 1.
\end{aligned}
$$

Finalmente, $E = \dfrac{((n+1)+1)\cos(n+1)x - (n+1)\cos((n+1)+1)x - 1}{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Na passagem (1) usamos a identidade trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, na (2) a $\cos x = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, na (3) uma equivalente à anterior $2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$ e na (4) tomamos $p = nx + 2x$ e $q = nx$ na fórmula de prostaférese:

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

Além das clássicas progressões aritmética e geométrica, temos também a progressão aritmético-geométrica, onde dados o primeiro termo a_1 e as razões q e r têm-se por recorrência um termo qualquer por $a_{n+1} = q \cdot a_n + r$, com $q, r \in \mathbb{R}$ e $q \neq 1$.

Exemplo 2.1.3.8. (a) $a_n = a_1 q^{n-1} + r\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}$, $n \in \mathbb{N}$. (Fórmula do termo geral na progressão aritmético-geométrica)

(b) $S_n = qr\dfrac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} + a_1\dfrac{q^n-1}{q-1} - r\dfrac{n-1}{q-1}$, $n \in \mathbb{N}$. (Soma dos n primeiros termos na progressão aritmético-geométrica)

Demonstração. (a) i) $a_1 q^{1-1} + r\dfrac{q^{1-1}-1}{q-1} = a_1 q^0 + r\dfrac{q^0-1}{q-1} = a_1 \cdot 1 + r\dfrac{1-1}{q-1} = a_1 + r \cdot 0 = a_1$.

ii)

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} = qa_n + r &\overset{(H.I.)}{=} q \cdot \left(a_1 q^{n-1} + r\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) + r \\
&= a_1 q^{(n-1)+1} + r\frac{q^{(n-1)+1}-q}{q-1} + r \\
&= a_1 q^{(n+1)-1} + \frac{rq^{(n+1)-1} - rq + rq - r}{q-1} \\
&= a_1 q^{(n+1)-1} + r\frac{q^{(n+1)-1}-1}{q-1}.
\end{aligned}
$$

(b) i)

$$
\begin{aligned}
qr\frac{q^{1-1}-1}{(1-q)^2} - a_1\frac{q^1-1}{1-q} + r\frac{1-1}{1-q} &= qr\frac{q^0-1}{(1-q)^2} - a_1 \cdot (-1) + r \cdot 0 \\
&= qr \cdot \frac{1-1}{(1-q)^2} + a_1 + 0 \\
&= qr \cdot 0 + a_1 + 0 \\
&= 0 + a_1 + 0 \\
&= a_1 \\
&= S_1.
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + a_{n+1}\\
&\overset{(H.I.)}{=} \left(qr\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} + a_1\frac{q^n-1}{q-1} - r\frac{n-1}{q-1}\right) + \left(a_1q^n + r\frac{q^n-1}{q-1}\right)\\
&= qr\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} + \frac{a_1q^n - a_1 - rn + r + a_1q^n(q-1) + rq^n - r}{q-1}\\
&= qr\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} + \frac{a_1q^n - a_1 - rn + a_1q^{n+1} - a_1q^n + rq^n}{q-1}\\
&= qr\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} + \frac{rq^n}{q-1} + \frac{a_1q^{n+1}-a_1}{q-1} - \frac{rn}{q-1}\\
&= \frac{rq^n - qr}{(q-1)^2} + \frac{rq^n(q-1)}{(q-1)^2} + a_1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - r\cdot\frac{n}{q-1}\\
&= \frac{rq^n - qr + rq^{n+1} - rq^n}{(q-1)^2} + a_1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - r\cdot\frac{n}{q-1}\\
&= \frac{qr(q^n-1)}{(q-1)^2} + a_1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - r\cdot\frac{n}{q-1}\\
&= qr\cdot\frac{q^{(n+1)-1}-1}{(q-1)^2} + a_1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - r\cdot\frac{(n+1)-1}{q-1}.
\end{aligned}
$$

□

2.1.4 Aplicações em desigualdades

A demonstração de propriedades que envolvem desigualdades não são geralmente obtidas naturalmente pois exigem alguma propriedade auxiliar além da que devemos demonstrar. Os exemplos dessa subseção foram retirados respectivamente de [12], [10], [16], [15], [5], [11], [11] e [17].

Exemplo 2.1.4.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

i) Temos que $(2 \cdot 1)! = 2! = 2$.
E que $2^{2\cdot 1} \cdot (1!)^2 = 2^2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 1 = 4$.
Logo, $(2 \cdot 1)! < 2^{2\cdot 1}(1!)^2$.

ii)

$$\begin{aligned}
[2\cdot(n+1)]! &= (2n+2)!\\
&= (2n+2)(2n+1)(2n)!\\
&\overset{(H.I.)}{<} (2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2\\
&\overset{(*)}{<} (2n+2)(2n+2)2^{2n}(n!)^2\\
&= 2(n+1)2(n+1)2^{2n}n!n!\\
&= 2^{2n}2^2(n+1)n!(n+1)n!\\
&= 2^{2n+2}(n+1)!(n+1)!\\
&= 2^{2\cdot(n+1)}\cdot[(n+1)!]^2.
\end{aligned}$$

Neste exemplo usamos na passagem $(*)$ a propriedade auxiliar $2n+1 < 2n+2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em algumas demonstrações usamos o domínio da validade da propriedade para garantir certas passagens.

O próximo exemplo é interessante pois nele temos que verificar por indução duas propriedades auxiliares para concluir a inicial.

Exemplo 2.1.4.2. $P(n):\ n^2 < 2^n$, para todo natural $n \geq 5$.

i) $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

ii) $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{(H.I.)}{<} 2^n + 2n + 1 \overset{(1)}{\leq} 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Na passagem (1) usamos que $2n+1 \leq 2^n$, vamos provar isso por indução. Primeiramente, ela não é válida para $n = 1; 2$, mas é para $n = 3$ já que $2\cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$ (i_1). Temos que $2(n+1)+1 = 2n+3 = 2n+1+2 \overset{(H.I.)}{\leq} 2^n + 2 \leq 2^n + 4 \overset{(2)}{\leq} 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ (ii_1). Assim, provamos que vale $P_1(n):\ 2n+1 \leq 2^n$, para todo $n \geq 3$. Logo, a passagem (1) é possível pois $n \geq 5$ garante que $n \geq 3$, valendo que $2n+1 \leq 2^n$.

Na passagem (2) usamos que $2^n \geq 4$, vamos provar isso por indução. Primeiramente, ela não é válida para $n = 0; 1$, mas é para $n = 2$ já que $2^2 = 4 \geq 4$ (i_2). Temos que $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{(H.I.)}{\geq} 4\cdot 2 = 8 \geq 4$ (ii_2). Assim, provamos que vale

$P_2(n)$: $2^n \geq 4$, para todo $n \geq 2$. Logo, a passagem (2) é possível pois $n \geq 5$ garante que $n \geq 2$, valendo que $2^n \geq 4$.

Finalmente, temos que $P_2(n)$ válida implica que $P_1(n)$ é válida, e esta implica que $P(n)$ também é válida.

Exemplo 2.1.4.3. $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicais}} < 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) $0 < \sqrt{2} < 2$ equivale a $(\sqrt{2})^2 < 2^2$, que equivale a $2 < 4$. Como a terceira desigualdade é verdadeira, então a primeira também é. Usamos que $a < b$ é equivalente a $a^2 < b^2$, para a e b positivos.

ii)

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicais}} < 2$$

$$0 < 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicais}} < 2+2 \qquad (*)$$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{(n+1) \text{ radicais}} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2.$$

Na passagem $(*)$ usamos que $a < b$ é equivalente a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, para a e b positivos.

Exemplo 2.1.4.4. $2^{\frac{5n}{4}} < \binom{2n}{n}$, para todo natural $n \geq 2$.

i)

$$\begin{aligned} 2^{\frac{5\cdot 2}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6 = \frac{24}{2\cdot 2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} &= \frac{4!}{(4-2)!2!} \\ &= \binom{4}{2} \\ &= \binom{2\cdot 2}{2}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
2^{\frac{5(n+1)}{4}} = 2^{\frac{5n}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5n}{4}} \cdot \sqrt[4]{32} < 2^{\frac{5n}{4}} \cdot \sqrt[4]{81} &= 2^{\frac{5n}{4}} \cdot 3 \\
&\overset{(*)}{<} 2^{\frac{5n}{4}} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \\
&\overset{(H.I.)}{<} \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \\
&= \frac{(2n+1)(2n)!2(n+1)}{(n+1)n!n!(n+1)} \\
&= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)!}{[(2n+2)-(n+1)]!(n+1)!} \\
&= \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \binom{2(n+1)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Na passagem $(*)$, como $n+1>0$, temos $3 < \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ equivalente a $3(n+1) < 2(2n+1)$, equivalente a $3n+3 < 4n+2$, equivalente a $1 < n$, que é garantido pois $n \geq 2$.

No próximo exemplo temos que usar a transitividade de $\leq$ e que sentenças equivalentes têm o mesmo valor lógico para concluirmos a demonstração.

Exemplo 2.1.4.5. $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) $\dfrac{1}{1^2} = 1$ e $2 - \dfrac{1}{1} = 2 - 1 = 1$, logo $\dfrac{1}{1^2} \leq 2 - \dfrac{1}{1}$.

ii) $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Agora basta mostrarmos que $2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n+1}$, e, de fato, esta última desigualdade é equivalente a $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 0$, equivalente a $-\dfrac{1}{n(n+1)^2} \leq 0$, que é verdadeira já que $n > 0$ e $(n+1)^2 > 0$.

Podemos extender a importante desigualdade triangular de dois termos para mais de dois conforme nosso exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.4.6. (Generalização da desigualdade triangular) Quaisquer que sejam os números reais a_1, a_2, $\cdots, a_n$ vale que

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,\ n \in \mathbb{N}.$$

i) Para um número é imediato já que $|a_1| \leq |a_1|$. Vamos verificar para dois números a e b quaisquer:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 \overset{(1)}{=} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &\overset{(2)}{=} |a|^2 + |b|^2 + 2ab \\ &\overset{(3)}{\leq} |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \\ &\overset{(4)}{=} |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\ |a+b|^2 - (|a| + |b|)^2 &\leq 0 \\ \underbrace{(|a+b| + (|a| + |b|))}_{\geq 0}(|a+b| - (|a| + |b|)) &\leq 0 \\ |a+b| - (|a| + |b|) &\leq 0 \\ |a+b| &\leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

Nas passagens (1) e (2) usamos a propriedade de módulo $|x|^2 = x^2$, a $x \leq |x|$ na (3) e a $|ab| = |a||b|$ na (4).

ii)

$$
\begin{aligned}
|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| &= |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}| \\
&\overset{(*)}{\leq} |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \\
&\overset{(H.I.)}{\leq} |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|.
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ usamos a desigualdade triangular para dois números.

Exemplo 2.1.4.7. Para $a \geq 0$, temos pela expansão do binômio de Newton que $(1+a)^n = \binom{n}{0}1^n a^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0 a^n \geq \binom{n}{0}1^n a^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}a^1 = 1 + na$, isto é, $(1+a)^n \geq 1 + na$ para $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Na verdade, podemos ampliar o domínio de validade para $a \geq -1$, conforme a desigualdade de Bernoulli [3]:

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}, a \geq -1.$$

Temos que se $a \geq -1$, então $1 + a \geq 0$.

i) $(1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a \geq 1 + 1 \cdot a$.

ii)

$$
\begin{aligned}
(1+a)^n &\geq 1 + na && (1 + a \geq 0) \\
(1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a) \\
(1+a)^{n+1} &\geq 1 + a + na + na^2 && (na^2 \geq 0) \\
(1+a)^{n+1} &\geq 1 + a + na \\
(1+a)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)a.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.4.8. $(1+a)^n \geq 1 + na + \dfrac{n(n-1)}{2}a^2$, se a é real não negativo e $n \in \mathbb{N}$.

[3]Essa desigualdade leva o nome do suíço que a demonstrou: Jacques Bernoulli (1654 - 1705).

i) $(1+a)^1 = 1+a \geq 1+1\cdot a+0 = 1+1\cdot a+\left[\dfrac{1(1-1)}{2}\right]a^2.$

ii)

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) &\overset{(H.I.)}{\geq} \left[1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2\right]\cdot(1+a)\\
&= 1+na+\frac{n(n-1)a^2}{2}+a+na^2+\underbrace{\frac{n(n-1)a^3}{2}}_{\geq 0}\\
&\geq 1+na+\frac{n(n-1)a^2}{2}+a+na^2\\
&= 1+na+a+a^2\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)\\
&= 1+(n+1)a+a^2\cdot\frac{n^2+n}{2}\\
&= 1+(n+1)a+\frac{(n+1)[(n+1)-1]a^2}{2}.
\end{aligned}$$

2.1.5 Aplicações em divisibilidade

Os exemplos dessa subseção foram retirados respectivamente de [13], [10], [18], [15] e [12].

Exemplo 2.1.5.1. $2^{3^n}+1$ é divisível por 3^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$.

i) $2^{3^1}+1 = 2^3+1 = 9$ e $3^{1+1} = 3^2 = 9$, então $2^{3^1}+1$ é divisível por 3^{1+1}.

ii) Por hipótese de indução, temos que $2^{3^n}+1$ é divisível por 3^{n+1}, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{3^n}+1 = k3^{n+1}$. Daí,

$$\begin{aligned}
2^{3^n} &= k3^{n+1}-1\\
(2^{3^n})^3 &= (k3^{n+1}-1)^3\\
2^{3^n\cdot 3} &= k^3\cdot 3^{3n+3}-3k^23^{2n+2}1+3k3^{n+1}1^2-1^3\\
2^{3^{n+1}}+1 &= k^33^{n+2}3^{2n+1}-3k^23^{n+2}3^n+k3^{n+2}-1+1\\
2^{3^{n+1}}+1 &= 3^{n+2}\underbrace{(k^33^{2n+1}-3^{n+1}k^2+k)}_{\in\mathbb{Z}},
\end{aligned}$$

isto é, $2^{3^{n+1}}+1$ é divisível por $3^{n+2} = 3^{(n+1)+1}$.

Nos próximos dois exemplos usamos artifícios simples, como $8 = 9 - 1$, mas que podem ser importantíssimos nas demonstrações com divisibilidade.

Exemplo 2.1.5.2. $9 \mid [n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

i) $1 \cdot 4^{1+1} - (1+1)4^1 + 1 = 16 - 8 + 1 = 9$, logo $9 \mid [1 \cdot 4^{1+1} - (1+1)4^1 + 1]$.

ii) $9 \mid [n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1]$, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1 = 9k$. Temos que

$$\begin{aligned}
(n+1)4^{(n+1)+1} - ((n+1)+1)4^{n+1} + 1 &= (4n+4)4^{n+1} - (n+2)4^{n+1} + 1 \\
&= 4^{n+1}(4n + 4 - n - 2) + 1 \\
&= 4^{n+1}(3n+2) + 1 \\
&= 4^{n+1}(n + (2n+2)) + 1 \\
&= n4^{n+1} + (2n+2)4^{n+1} + 1 \\
&= n4^{n+1} + 2(n+1)4^n 4 + 1 \\
&= n4^{n+1} + 8(n+1)4^n + 1 \\
&= n4^{n+1} + (9-1)(n+1)4^n + 1 \\
&= n4^{n+1} + 9(n+1)4^n - 1(n+1)4^n + 1 \\
&= n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1 + 9(n+1)4^n \\
&\overset{(H.I.)}{=} 9k + 9(n+1)4^n \\
&= 9\underbrace{(k + (n+1)4^n)}_{\in \mathbb{Z}}.
\end{aligned}$$

Logo, $9 \mid [(n+1)4^{(n+1)+1} - ((n+1)+1)4^{n+1} + 1]$.

Exemplo 2.1.5.3. $2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$ é divisível por 11 , $n \in \mathbb{N}$.

i) $2^{2 \cdot 1 - 1} \cdot 3^{1+2} + 1 = 55$, que é divisível por 11.

ii)

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)-1} \cdot 3^{(n+1)+2} + 1 &= 2^{(2n-1)+2} \cdot 3^{(n+2)+1} + 1 \\
&= 2^{2n-1} \cdot 4 \cdot 3^{n+2} \cdot 3 + 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 12 \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1 \\
&= (11+1) \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1 \\
&= 11 \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + (2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1) \\
&\overset{(H.I.)}{=} 11 \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 11 \cdot \underbrace{k}_{\in \mathbb{Z}} \\
&= 11 \cdot (2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + k),
\end{aligned}
$$

que é divisível por 11.

Exemplo 2.1.5.4. $\left(\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}\right) \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 0$ é imediato. Vamos verificar para $n = 1$: $\dfrac{1^5}{5} + \dfrac{1^4}{2} + \dfrac{1^3}{3} - \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{30} = \dfrac{6+15+10-1}{30} = \dfrac{30}{30} = 1 \in \mathbb{Z}$.

ii) $\dfrac{(n+1)^5}{5} + \dfrac{(n+1)^4}{2} + \dfrac{(n+1)^3}{3} - \dfrac{n+1}{30} = \dfrac{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}{5} + \dfrac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{2} + \dfrac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} - \dfrac{n}{30} - \dfrac{1}{30} = \left(\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}\right) + (n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 2n^3 + 3n^2 + 2n + n^2 + n) + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{30}\right)$. Como $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 2n^3 + 3n^2 + 2n + n^2 + n$ é inteiro (produto e soma de inteiros é inteiro), $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ é inteiro (hipótese de indução) e $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{30}$ é o inteiro 1 (por i)), temos que $\dfrac{(n+1)^5}{5} + \dfrac{(n+1)^4}{2} + \dfrac{(n+1)^3}{3} - \dfrac{n+1}{30}$ é inteiro (por ser soma de inteiros).

Exemplo 2.1.5.5. Para $n \in \mathbb{N}$, se $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, então $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$.

i) $x^1 + \dfrac{1}{x^1} = x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, pela hipótese.

ii)

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} &= x^n \cdot x + \frac{x}{x^n} - \frac{x}{x^n} + \frac{x^n}{x} - \frac{x^n}{x} + \frac{1}{x^n \cdot x^1} \\
&= x^n \cdot x + \frac{x}{x^n} + \frac{x^n}{x} + \frac{1}{x^n \cdot x^1} - \frac{x^n}{x} - \frac{x}{x^n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x \cdot \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \frac{1}{x} \cdot \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - x^{n-1} - x^{1-n} \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + x^{1-n}\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).
\end{aligned}
$$

Como $x + \dfrac{1}{x}$ é inteiro por hipótese, $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)$ e $\left(x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}\right)$ são inteiros pela hipótese de indução e $\mathbb{Z}$ é fechado para a multiplicação e subtração, temos que $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}$ é inteiro. Assim, admitindo a validade da propriedade para todo natural $\leq n$, provamos que ela é válida para $n+1$, logo, pelo princípio de indução forte é válida para todo natural n.

2.1.6 Aplicações nas propriedades de potência.

Definimos por recorrência que $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n a$. Vamos demonstrar por indução em n as seguintes propriedades de potência (retiradas de [14] e [8]) para os naturais m e n.

Propriedade 2.1.6.1. (a) $a^m a^n = a^{m+n}$. (Produto de potências de mesma base)

(b) $1^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. (Potência de base 1)

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$. (Potência de potência)

(d) $(ab)^n = a^n b^n$. (Potência de um produto)

(e) Dados $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, temos que $a < b$ se, e somente se, $a^n < b^n$.

Demonstração. (a) i) $a^m a^1 = a^m a = a^{m+1}$.

ii) $a^m a^{n+1} = a^m(a^n a) = (a^m a^n)a \overset{(H.I.)}{=} a^{m+n} a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}$.

(b) i) $1^1 = 1$.

ii) $1^{n+1} = 1^n \cdot 1 = 1^n \overset{(H.I.)}{=} 1$.

(c) i) $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$.

ii) $(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m \overset{(H.I.)}{=} a^{mn} \cdot a^m \overset{(*)}{=} a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$.

Note que na passagem $(*)$ foi usada a Propriedade 2.1.6.1 (a) .

(d) i) $(ab)^1 = ab = a^1b^1$.

ii) $(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab) \overset{(H.I.)}{=} (a^nb^n)(ab) = a^n(b^n(ab)) = a^n((b^na)b) = a^n((ab^n)b) = a^n(a(b^nb)) = (a^na)(b^nb) = a^{n+1}b^{n+1}$.

(e) Primeiramente vamos provar que se $a < b$, então $a^n < b^n$ $(*)$, por indução:

i) Se $a < b$, então $a^1 < b^1$.

ii) Se $a < b$, então, pela hipótese de indução, $a^n < b^n$, logo, $a^{n+1} = a^na < b^na < b^nb = b^{n+1}$. E a indução está completa.

Vamos provar que se $a^n < b^n$, então $a < b$. Se $a^n < b^n$, temos duas possibilidades: $b \leq a$ ou $b > a$. Se $b \leq a$, então por $(*)$ temos que $b^n \leq a^n$, gerando uma contradição. Resta então $b > a$, quando $a^n < b^n$.

□

No próximo exemplo, retirado de [18], faremos o estudo do sinal de uma potência de expoente natural n.

Exemplo 2.1.6.2. (a) Se $a > 0,$ então $a^n > 0$. (Base positiva)

(b) Se $a < 0,$ então $a^{2n} > 0$. (Base negativa e expoente par)

(c) Se $a < 0,$ então $a^{2n+1} < 0$. (Base negativa e expoente ímpar)

Demonstração. (a) i) $a^1 = a > 0$.

ii) $a^{n+1} = a^n \cdot a > 0$, já que $a^n > 0$ (por hipótese de indução) e $a > 0$.

(b) i) $a^{2\cdot 1} = a^2 = a \cdot a > 0$, já que $a < 0$.

ii) $a^{2\cdot(n+1)} = a^{2n} \cdot a^2 > 0$, já que $a^{2n} > 0$ (hipótese de indução) e $a^2 > 0$ (por i)).

Usamos i) (que foi verificado) na verificação de ii). Algo bem inusitado pois, geralmente, as verificações de i) e de ii) são feitas independentemente.

(c) i) $a^{2\cdot 1+1} = a^3 = a^2 \cdot a < 0$, já que $a^2 > 0$ (Exemplo 2.1.6.2 (b)) e $a < 0$ (por hipótese).

ii) $a^{2(n+1)+1} = a^{2n+3} = a^{2n+1} \cdot a^2 < 0$, já que $a^{2n+1} < 0$ (hipótese de indução) e $a^2 > 0$ (Exemplo 2.1.6.2 (b)).

□

O próximo exemplo foi retirado de [8].

Exemplo 2.1.6.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(a-1)^{2n} = ma + 1$, dado $a \in \mathbb{Z}$.

i) $(a-1)^{2\cdot 1} = (a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 = (a-2)\cdot a + 1$, tomamos $m = (a-2) \in \mathbb{Z}$.

ii) Se supormos, por hipótese de indução, que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(a-1)^{2n} = ma+1$ para $n \in \mathbb{N}$, vamos provar que existe $m^* \in \mathbb{Z}$ tal que $(a-1)^{2(n+1)} = m^*a + 1$, para $(n+1) \in \mathbb{N}$. De fato, $(a-1)^{2(n+1)} = (a-1)^{2n+2} = (a-1)^{2n}(a-1)^2 \overset{(H.I.)}{=} (ma+1)(a^2-2a+1) = ma^3-2ma^2+ma+a^2-2a+1 = (ma^2-2ma+m+a-2)\cdot a+1$, tomamos $m^* = ma^2 - 2ma + m + a - 2$ para termos $(a-1)^{2(n+1)} = m^*a + 1$. Como $a \in \mathbb{Z}$ (hipótese), $m \in \mathbb{Z}$ (hipótese de indução) e $\mathbb{Z}$ é fechado para a adição e multiplicação, então $m^* \in \mathbb{Z}$.

2.1.7 Aplicação em sequência por recorrência

Exemplo 2.1.7.1. Dada a recorrência $a_0 = 2$, $a_1 = 2$ e $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$, para $n \geq 2$, temos que a fórmula do termo geral é $a_n = 4^n + (-2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (Retirado de [8])

i) Vale para $n = 0$, pois $4^0 + (-2)^0 = 1 + 1 = 2 = a_0$. Vale para $n = 1$, pois $4^1 + (-2)^1 = 4 - 2 = 2 = a_1$.

ii)

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_{(n+1)-1} + 8a_{(n+1)-2} \\
&= 2a_n + 8a_{n-1} \\
&\overset{(H.I.)}{=} 2\left[4^n + (-2)^n\right] + 8\left[4^{n-1} + (-2)^{n-1}\right] \\
&= 2\cdot 4^n + 8\cdot 4^{n-1} + 2(-2)^n + 8(-2)^{n-1} \\
&= 2\cdot 4^n + 8\cdot \frac{4^n}{4} + 2(-2)^n + 8\frac{(-2)^n}{(-2)} \\
&= 2\cdot 4^n + 2\cdot 4^n + 2(-2)^n - 4(-2)^n \\
&= 2\cdot 2\cdot 4^n - 2(-2)^n \\
&= 4^1\cdot 4^n + (-2)^1\cdot(-2)^n \\
&= 4^{n+1} + (-2)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Assim, ao admitirmos que valia para todo $0 \leq i \leq n$, provamos que vale para $n+1$, logo, pelo princípio de indução forte vale para todo natural.

2.2 Aplicações em geometria

Nesta seção, o Exemplo 2.2.6 foi retirado de [9], os Exemplos 2.2.1, 2.2.7, 2.2.8 e 2.2.9 foram retirados de [13] e os demais de [16].

Exemplo 2.2.1. Existe sempre um polígono de n lados com exatamente 3 ângulos agudos.

i) Como existe o triângulo acutângulo com exatamente 3 ângulos agudos, a propriedade é válida para $n = 3$.

ii) Se supomos que existe um polígono $A_1A_2\cdots A_n$ de n lados com exatamente 3 ângulos agudos e sendo $A_{j-1}\widehat{A_j}A_{j+1}$ um dos $(n-3)$ ângulos não agudos, ao tomarmos um segmento $\overline{PQ}$ com extremos $P \in \overline{A_{j-1}A_j}$ e $Q \in \overline{A_jA_{j+1}}$ (conforme Figura 2.1[4]), temos que como $A_{j-1}\widehat{P}Q$ e $P\widehat{Q}A_{j+1}$ são ângulos externos do $\triangle PA_jQ$ então $A_{j-1}\widehat{P}Q > P\widehat{A_j}Q$ e $P\widehat{Q}A_{j+1} > P\widehat{A_j}Q$. Como $A_{j-1}\widehat{A_j}A_{j+1} = P\widehat{A_j}Q \geq 90°$, temos que $A_{j-1}\widehat{P}Q > 90°$ e $P\widehat{Q}A_{j+1} > 90°$. Assim, obtemos o polígono $A_1A_2\cdots A_{j-1}PQA_{j+1}\cdots A_n$ de $n-1+2 = n+1$ lados com os mesmos 3 ângulos agudos e $(n-3)-1+2 = n-2$ ângulos não agudos.

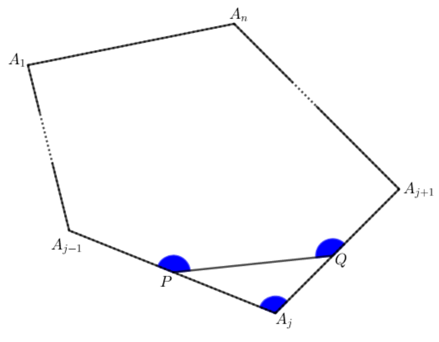

Figura 2.1: Polígono $A_1A_2\cdots A_{j-1}PQA_{j+1}\cdots A_n$

[4]Com exceção da Figura 2.14, todas as outras figuras deste trabalho foram feitas pelo autor através do software Geogebra e estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/wjjjzyvp.

Exemplo 2.2.2. O número de diagonais d_n de um polígono convexo de n lados é

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

i) Como $d_3 = \frac{3 \cdot (3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$ e o triângulo não possui diagonais, então a propriedade é válida para $n = 3$.

ii) Suponhamos, por hipótese de indução, que um polígono convexo $A_1A_2 \cdots A_n$ de n lados possua $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais. Quando adicionamos o vértice A_{n+1} (conforme Figura 2.2) observamos que as $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais do polígono $A_1A_2 \cdots A_n$ continuam sendo diagonais do $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$, o lado $\overline{A_1A_n}$ se torna diagonal de $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$ e do vértice A_{n+1} partem $(n+1) - 3 = n - 2$ novas diagonais. Assim, o total de diagonais do $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$ é $\frac{n(n-3)}{2} + 1 + (n-2) = \frac{n^2 - 3n}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{n^2 + n - n - n - 2}{2} = \frac{n(n+1) - 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2} = d_{n+1}$.

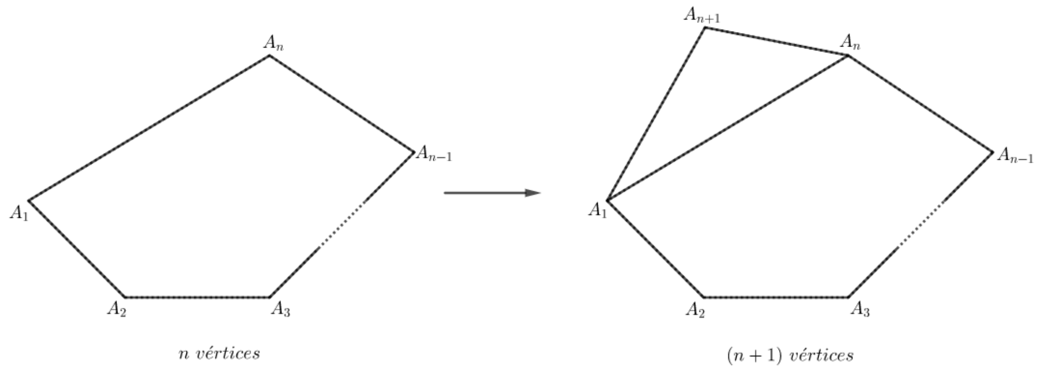

Figura 2.2: Passo indutivo de n lados para (n+1) lados

Exemplo 2.2.3. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados $(n \geq 3)$ é $(n-2) \cdot 180°$.

i) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, e como $(3 - 2) \cdot 180° = 180°$, a fórmula é válida para $n = 3$.

ii) Seja $A_1A_2\cdots A_n$ o polígono convexo com n lados e ângulos internos $x_1, \cdots, x_n$ (conforme Figura 2.3). Ao acrescentarmos um novo vértice A_{n+1} (vide Figura 2.3), obtemos um triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ de ângulos internos y_1, y_n, y_{n+1}. Como a soma dos ângulos internos do polígono $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ com $n+1$ lados é

$$(y_1 + x_1) + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + y_n) + y_{n+1},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n) + (y_1 + y_n + y_{n+1}) &= \underbrace{(n-2)\cdot 180^\circ}_{\text{(H.I.)}} + \underbrace{180^\circ}_{i)} \\ &= [(n-2)+1]\cdot 180^\circ \\ &= [(n+1)-2]\cdot 180^\circ.\end{aligned}$$

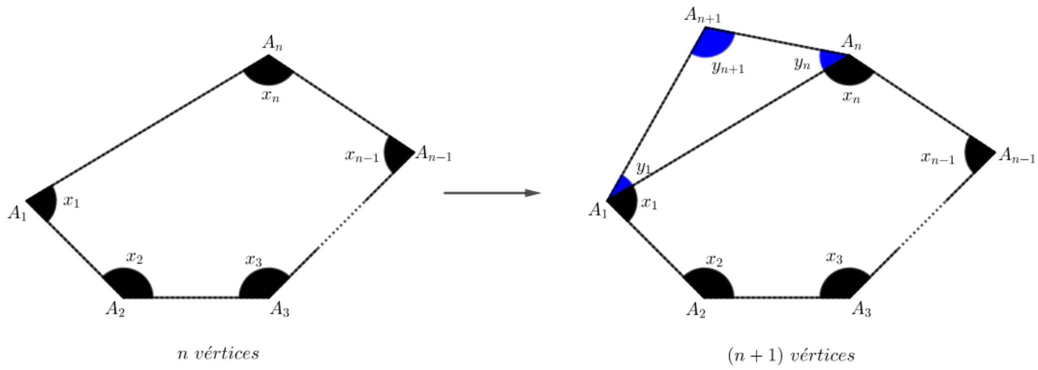

Figura 2.3: Passo indutivo de n vértices para (n+1) vértices

Exemplo 2.2.4. Todo polígono é enquadrável, isto é, existe um quadrado equivalente a ele.

i) Vamos provar que todo triângulo é enquadrável. Dado um triângulo ABC qualquer, traçamos (com o compasso e régua) a reta t perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ por A, e chamamos o pé da perpendicular de H. Marcamos (com o compasso e régua) o ponto médio D de $\overline{BC}$. Traçamos (com a régua) uma reta r e marcamos um ponto P nela. Transportamos (com o compasso) os segmentos $BD = \dfrac{a}{2}$ e $AH = h_a$ para r, de modo que sejam adjacentes, com $MP = BD = \dfrac{a}{2}$ e $PN = AH = h_a$. Marcamos (com o compasso e régua) o ponto médio O de $\overline{MN}$, e traçamos (com o compasso) a circunferência λ centrada em O e raio ON. Traçamos (com o compasso e régua) uma reta s, perpendicular à r por P que intercepta λ em P', sendo $PP' = l$. Traçamos (com a régua) os segmentos MP' e $P'N$. Como $M\widehat{P'}N = 90°$ e PP' é a altura relativa à hipotenusa MN do $\triangle MP'N$, temos pelas relações métricas no triângulo retângulo $MP'N$ que $P'P^2 = MP \cdot PN$, ou, $l^2 = \dfrac{a}{2} \cdot h_a$, isto é, temos um quadrado de lado l equivalente ao $\triangle ABC$. Para desenharmos o quadrado, marcamos um ponto R numa outra reta u. Marcamos o ponto S em u tal que $RS = PP' = l$. Traçamos (com o compasso e régua) uma reta v perpendicular a u por S, marcamos T em v tal que $ST = RS$ com o compasso. Traçamos uma reta w perpendicular a v por T, e marcamos Q em w (de modo que Q pertença ao mesmo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{ST}$ e que contém R) com $TQ = ST$. Por fim, ligamos Q e R, para obtermos o quadrado RSTQ equivalente ao $\triangle ABC$ dado.

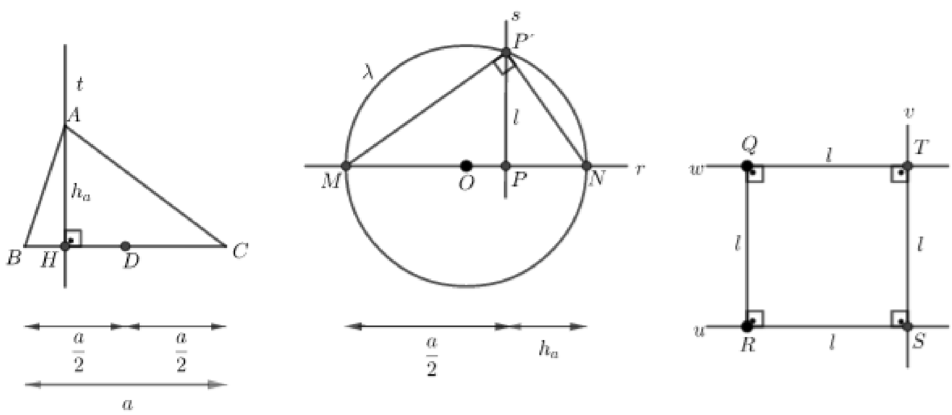

Figura 2.4: Triângulo enquadrável

ii) Para o polígono $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$, conforme Figura 2.5, traçamos a diagonal $\overline{A_1A_n}$ e decompomos ele em um triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ e em um polígono $A_1A_2 \cdots A_n$. O triângulo $A_1A_nA_{n+1}$, por i), é enquadrável, isto é, existe um quadrado de lado L_1 tal que $\text{área}_{A_1A_nA_{n+1}} = L_1^2$. O polígono $A_1A_2 \cdots A_n$, por hipótese de indução, é enquadrável, isto é, existe um quadrado de lado L_2 tal que $\text{área}_{A_1A_2\cdots A_n} = L_2^2$. Construimos um triângulo IJK retângulo em I, com $IJ = L_1$ e $IK = L_2$, donde pelo teorema de Pitágoras temos que $JK^2 = L_1^2 + L_2^2$, isto é, existe um quadrado de lado JK com área igual à soma das áreas de $A_1A_nA_{n+1}$ e $A_1A_2 \cdots A_n$, ou melhor, equivalente a $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$. Assim, $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$ é enquadrável.

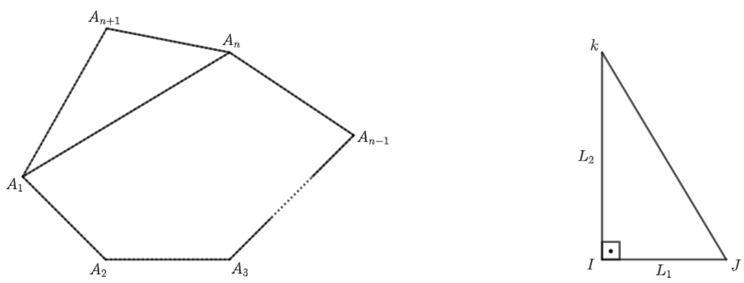

Figura 2.5: Polígono $A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$ e triângulo IJK

Exemplo 2.2.5. Considerando um reticulado com infinitos pontos em que a distância horizontal e vertical entre dois pontos quaisquer é sempre a mesma, vamos mostrar que para cobrir um reticulado de n^2 pontos $(n \geq 3)$ sem tirar o lápis do papel é necessário $2n - 2$ segmentos de reta.

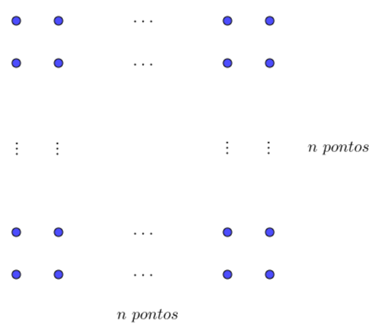

Figura 2.6: Reticulado $n \times n$

i) Para um reticulado de $3^2 = 9$ pontos precisamos de 4 segmentos de reta conforme Figura 2.7 e $2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4$.

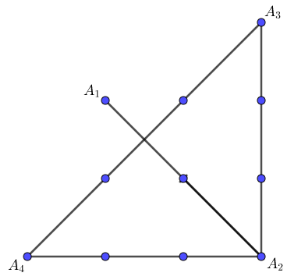

Figura 2.7: Reticulado 3×3

ii) Se supormos que para um reticulado $n \times n$ são necessários $2n-2$ segmentos de reta, basta observarmos que quando vamos do reticulado $n \times n$ para o $(n+1) \times (n+1)$, adicionamos uma linha (com $n+1$ pontos) e uma coluna (com $n+1$ pontos) com um ponto em comum, conforme Figura 2.8. Ao invés de encerrar o $(2n-2)$-ésimo segmento no ponto inferior direito do reticulado $n \times n$, o encerramos no ponto imediatamente à sua direita, traçamos o segmento cobrindo os pontos da coluna adicionada e traçamos o segmento cobrindo os pontos da linha adicionada. Totalizando assim, $(2n-2)+1+1 = 2n+2-2 = 2(n+1)-2$ segmentos de reta.

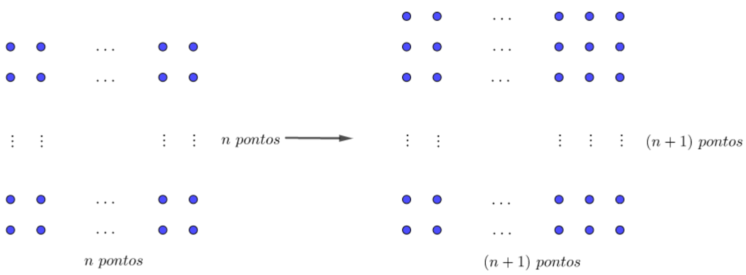

Figura 2.8: Passe indutivo do reticulado $n \times n$ para o $(n+1) \times (n+1)$

Exemplo 2.2.6. Seja n um número inteiro positivo. Todo tabuleiro de damas $2^n \times 2^n$, com um quadrado removido, pode ser ladrilhado por triminós em forma de L, conforme Figura 2.9 a seguir.

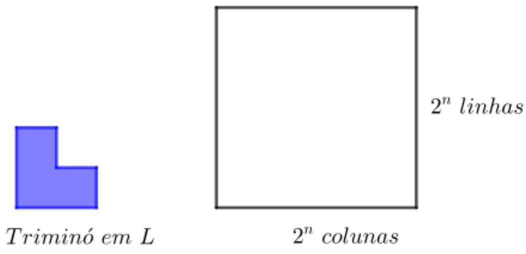

Figura 2.9: Ladrilhando um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com triminós em L

Vamos provar isso por indução:

i) Conseguimos ladrilhar com um triminó em L um tabuleiro $2^1 \times 2^1$, com um quadrado removido, conforme Figura 2.10.

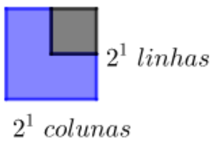

Figura 2.10: Tabuleiro $2^1 \times 2^1$

ii) Para um tabuleiro $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, com um quadrado Q removido, podemos subdividi-lo em quatro subtabuleiros $2^n \times 2^n$ traçando uma linha horizontal e uma linha vertical, conforme Figura 2.11. Basta colocarmos um triminó em L no centro do tabuleiro $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ de modo que cada quadrado do triminó fique em um subtabuleiro $2^n \times 2^n$, conforme Figura 2.11. O subtabuleiro $2^n \times 2^n$ com o quadrado Q removido pode ser ladrilhado pela hipótese de indução. Os outros três subtabuleiros $2^n \times 2^n$ podem ser ladrilhados pela hipótese de indução já que cada quadrado do triminó em L faz o papel do quadrado removido do subtabuleiro a que pertence. Portanto, todo o tabuleiro $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, com um quadrado removido (no caso, o quadrado Q), pode ser ladrilhado com triminós em L.

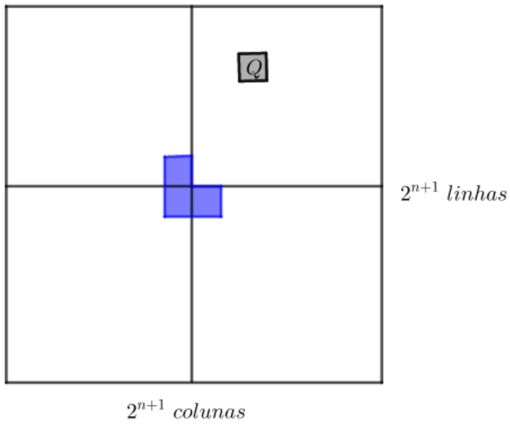

Figura 2.11: Tabuleiro $2^{n+1} \times 2^{n+1}$

Exemplo 2.2.7. Um feixe de retas concorrentes em um ponto dividem um plano que as contém em quantas regiões?

Uma reta divide o plano em 2 regiões. Temos que duas, três ou quatro retas concorrentes em P e distintas dividem o plano em 4, 6 ou 8 regiões, respectivamente, conforme Figura 2.12.

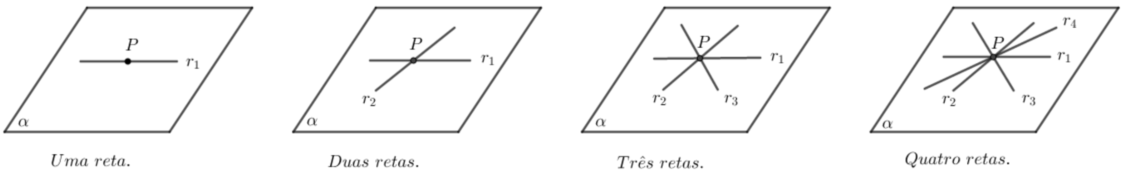

Figura 2.12: Feixe de retas concorrentes em P

Assim, podemos deduzir que n retas distintas e concorrentes num ponto P dividem o plano em $2 \cdot n$ regiões. Vamos provar isso por indução:

i) Para uma reta verificamos que são $2 = 2 \cdot 1$ regiões.

ii) Quando passamos de n retas para $n+1$ retas, basta observarmos que quando adicionamos uma reta (que também passa por P e é distinta das demais) ao feixe de retas concorrentes em P, estamos dividindo cada região de um único par de regiões opostas (ângulos opostos pelo vértice) em duas regiões, ou seja, duas regiões transformam-se em 4 regiões, o que representa um ganho de 2 regiões.

Assim, para $n+1$ retas distintas e concorrentes em P têm-se as $2n$ regiões iniciais (hipótese de indução para n retas) mais 2 novas regiões, totalizando, $2n+2 = 2(n+1)$ regiões.

Exemplo 2.2.8. (Pizza de Steiner) O geômetra Jacob Steiner propôs em 1826, o seguinte problema: Qual o número máximo de regiões que n retas podem dividir um plano?

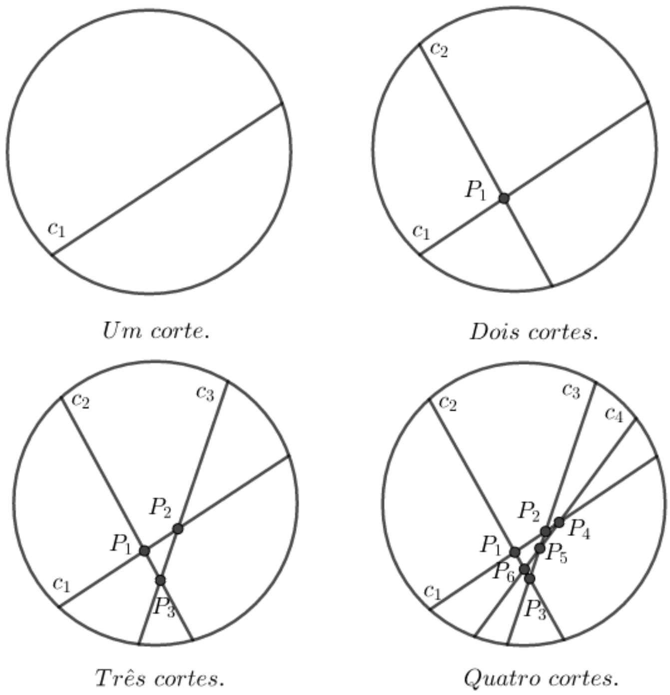

Figura 2.13: Pizza de Steiner

Com um corte obtemos 2 regiões (Figura 2.13). Fazemos o segundo corte de modo que ele intercepte o primeiro em P_1, assim o segundo corte fica dividido em 2 partes, cada uma divide a região a que pertence em duas, ou seja, ganhamos 2 novas regiões, totalizando $2+2=4$ regiões (Figura 2.13). O terceiro corte é feito interceptando os dois anteriores em pontos P_2 e P_3 distintos do ponto de interseção P_1, assim o terceiro corte fica dividido em 3 partes, cada uma divide a região a que pertence em duas, ou seja, ganhamos 3 novas regiões, totalizando $4+3=7$ regiões (Figura 2.13). O quarto corte é feito interceptando os três cortes anteriores em pontos distintos dos pontos de interseção anteriores, assim o quarto corte fica dividido em 4 partes, cada uma divide a região a que pertence em duas, ou seja, ganhamos 4 novas regiões, totalizando

$7+4=11$ regiões (Figura 2.13). Assim, com as 2 regiões iniciais e os ganhos de regiões em cada corte deduzimos que após n cortes temos $2+2+3+4+\cdots+n = 1+1+2+3+4+\cdots+n = 1+\dfrac{(1+n)n}{2}$ regiões.

Vamos provar por indução que n retas dividem o plano, no máximo, em $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ regiões:

i) Temos que $\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}+1=2$ e para uma reta são 2 regiões.

ii) De modo geral, o $(n+1)$-ésimo corte deve ser feito interceptando todos os n cortes anteriores em n pontos distintos dos pontos de interseção obtidos anteriormente (para maximizar o número de regiões). Assim, o $(n+1)$-ésimo corte fica dividido em $(n+1)$ partes, com cada parte dividindo a região a que pertence em duas, representando um ganho de $(n+1)$ novas regiões. Portanto, o total p_{n+1} de regiões é a soma das $p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}+1$ obtidas com os n cortes (hipótese de indução) com as $(n+1)$ novas regiões obtidas com o $(n+1)$-ésimo corte: $p_{n+1} = p_n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}+1+n+1 = \dfrac{n(n+1)}{2}+n+1+1 = (n+1)\left(\dfrac{n}{2}+1\right)+1 = (n+1)\cdot\dfrac{n+2}{2}+1 = \dfrac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}+1$, o que valida a fórmula.

Exemplo 2.2.9. (Queijo de Steiner) Vamos mostrar que n planos podem dividir o espaço no máximo em $q_n = \dfrac{n^3+5n+6}{6}$ regiões.

Provemos por indução:

i) $q_1 = 2$ (um plano divide o espaço em duas regiões) e $\dfrac{1^3+5\cdot1+6}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$, logo $q_1 = \dfrac{1^3+5\cdot1+6}{6}$.

ii) Os n planos já existentes determinam sobre o $(n+1)$-ésimo plano adicionado n retas que determinam sobre o novo plano p_n regiões planas. Cada região no espaço fica dividida em duas por cada região plana, acrescentando assim p_n novas regiões no espaço e totalizando q_n+p_n regiões no espaço. Portanto, $q_{n+1} = q_n+p_n$. Assim, temos que $q_{n+1} = q_n+p_n \overset{(*)}{=} \dfrac{n^3+5n+6}{6}+\dfrac{n^2+n+2}{2} = \dfrac{n^3+5n+6+3n^2+3n+6}{6} = \dfrac{(n^3+3n^2+3n+1)+5n+5+6}{6}$. Portanto, $q_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3+5(n+1)+6}{6}$. Note que na passagem (*) usamos a hipótese de indução e que n retas dividem o plano em no máximo $p_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ regiões, conforme vimos no problema da pizza de Steiner.

2.3 Aplicações em teoria dos conjuntos

Os dois exemplos dessa seção foram retirados de [19].

Exemplo 2.3.1. Se A é um conjunto finito com n elementos, então A possui 2^n subconjuntos.

i) Se A tem zero elementos, então admite um subconjunto (o vazio) e como $2^0 = 1$, então a propriedade é válida para $n = 0$.

ii) Seja A um conjunto com $n+1$ elementos, digamos $A = \{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n,\, x_{n+1}\}$. Com o conjunto A podemos obter subconjuntos que não possuem o elemento x_{n+1} (são 2^n subconjuntos formados a partir dos n elementos $x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n$, pela hipótese de indução) e subconjuntos que possuem o elemento x_{n+1} (são 2^n subconjuntos obtidos unindo o elemento x_{n+1} aos 2^n subconjuntos obtidos anteriormente), totalizando $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos.

Exemplo 2.3.2. Vamos provar que para um conjunto A é possível escrever o conjunto das partes de A ordenando todos os subconjuntos de modo que cada um (com exceção do primeiro) possa ser obtido do anterior retirando ou acrescentando exatamente um elemento.

i) Se $A = \{x_1, x_2\}$, temos que $\mathcal{P}(A) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1\}, \varnothing, \{x_2\}\}$. Se $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, temos que

$$\mathcal{P}(A) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1\}, \varnothing, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3\}, \{x_3, x_1\}, \{x_3, x_1, x_2\}\}.$$

ii) Para ordenarmos os subconjuntos de $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ no conjunto das partes basta ordenarmos primeiramente os subconjuntos de A que não possuem, por exemplo, o elemento x_{n+1}. Pela hipótese de indução é possível ordenarmos os 2^n subconjuntos de modo que cada um (com exceção do primeiro) possa ser obtido do anterior retirando ou acrescentando exatamente um elemento. Após listarmos os 2^n primeiros subconjuntos de A (que não possuem o elemento x_{n+1}), digamos $S_1, S_2, \cdots, S_{2^n-1}$ e S_{2^n}, nessa ordem, começamos então a escrever estes mesmos subconjuntos no sentido inverso (da direita para a esquerda) adicionando a cada um o elemento x_{n+1}, isto é, escrevemos $S_{2^n} \cup \{x_{n+1}\}, S_{2^n-1} \cup \{x_{n+1}\}, \cdots, S_2 \cup \{x_{n+1}\}$ e $S_1 \cup \{x_{n+1}\}$, nessa ordem. Assim, ordenamos os $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos de A na condição pedida.

2.4 Aplicações lúdicas

Nesta seção o Exemplo 2.4.1 foi retirado de [16], o Exemplo 2.4.4 de [8] e os demais de [13].

Exemplo 2.4.1. É possível juntar qualquer quantidade igual ou maior do que 24 litros utilizando apenas baldes de capacidade de 7 litros e 5 litros.

De modo equivalente, queremos mostrar que existem x e y naturais que satisfazem a equação $7x + 5y = n$ para todo natural $n \geq 24$.

i) Como $24 = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$, basta tomarmos $x = 2$ e $y = 2$, logo a propriedade é válida para $n = 24$.

ii) Se supormos por hipótese de indução que existam x e y não negativos tais que $n = 7x + 5y$, como $y \geq 0$, temos dois casos a considerar:

Caso 1 : $y \leq 3$.

Assim, $n + 1 = 7x + 5y + 1 = 7x + 5y - 14 + 15 = 7x - 14 + 5y + 15 = 7(x - 2) + 5(y + 3)$. Como $y \geq 0$, então $y + 3 \geq 0 + 3 \geq 0$, logo $y + 3 \geq 0$. Se $x \leq 1$ e $y \leq 3$, então $7x + 5y \leq 7 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 22$, e $7x + 5y$ nunca seria 24, gerando uma contradição com i) quando $y \leq 3$. Logo, se $y \leq 3$, resta então $x \geq 2$, ou, $x - 2 \geq 0$.

Caso 2 : $y \geq 4$.

Assim, $n + 1 = 7x + 5y + 1 = 7x + 5y + 21 - 20 = 7x + 21 + 5y - 20 = 7(x + 3) + 5(y - 4)$. Se $x \geq 0$, então $x + 3 \geq 3 \geq 0$, e se $y \geq 4$, então $y - 4 \geq 0$.

Em qualquer caso, podemos escrever $n + 1 = 7x' + 5y'$ com x' e y' não negativos.

Exemplo 2.4.2. (Torre de Hanói) A torre de Hanói consiste em três hastes fixadas numa plataforma e de discos com diâmetros diferentes, conforme Figura 2.14. O objetivo do jogo consiste em transferirmos todos os discos de uma haste para outra usando uma terceira haste como suporte, movendo um disco por vez e de modo que um disco maior nunca fique acima de um disco menor.

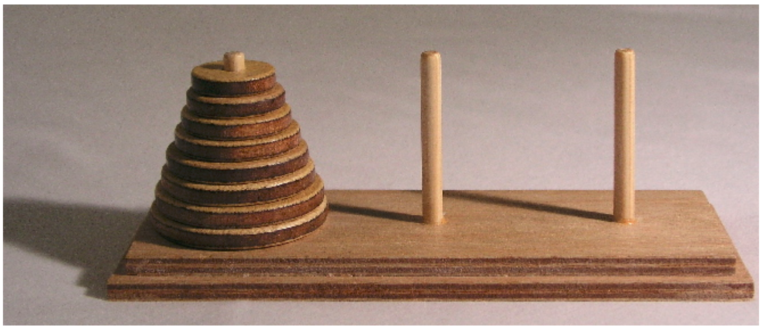

Figura 2.14: Torre de Hanói

Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanói

Para 1, 2, 3 e 4 discos são necessários, no mínimo, 1, 3, 7 e 15 movimentos, respectivamente. O que pode nos levar a conjectura de $2^n - 1$ movimentos, no mínimo, para n discos.

Vamos provar por indução que $h_n = 2^n - 1$ é o número mínimo de movimentos para transferir n discos na torre de Hanói.

i) Se for um disco basta um movimento e $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Se forem dois discos bastam 3 movimentos e $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, conforme Figura 2.15.

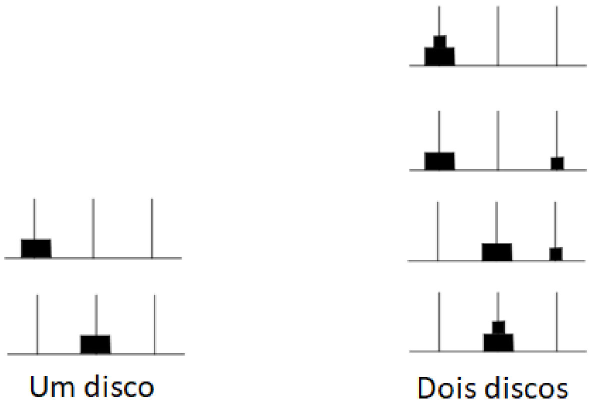

Figura 2.15: Torre de Hanói para 1 ou 2 discos

Seja h_n o número de movimentos para transferir n discos, vamos expressar o número de movimentos para transferir $n+1$ discos, isto é, h_{n+1} em função de

h_n. Transferimos os n discos da haste A para a B realizando h_n movimentos. Transferimos o disco maior de A para C em um movimento. Transferimos os n discos de B para C realizando h_n movimentos. Então foram realizados $h_n + 1 + h_n = 2h_n + 1$ movimentos: $h_{n+1} = 2h_n + 1$. Temos a recorrência $h_1 = 1$ e $h_{n+1} = 2h_n + 1$.

ii)

$$h_{n+1} = 2h_n + 1$$

$$h_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$$

$$h_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1$$

$$h_{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

E a indução está completa.

Exemplo 2.4.3. (Torre de Hanói - Variação)

Nesta variação da torre de Hanói devemos passar todos os discos de uma haste extrema para a outra do outro extremo sempre começando ou terminando na haste central em cada movimento.

Vamos provar por indução que $h_n = 3^n - 1$ é o número mínimo de movimentos para transferirmos n discos na variação da torre de Hanói.

i) Para 1 disco são necessários 2 movimentos e $3^1 - 1 = 2$. Para 2 discos são necessários 8 movimentos e $3^2 - 1 = 8$. Vide Figura 2.16.

ii) Transferimos os n discos da haste A para a C realizando h_n movimentos. Transferimos o maior disco de A para B com 1 movimento. Transferimos os n discos de C para A com h_n movimentos . Transferimos o disco maior de B para C com 1 movimento. Finalmente, transferimos os n discos de A para C com h_n movimentos. Assim, foram realizados $h_n + 1 + h_n + 1 + h_n = 3h_n + 2$ movimentos para transferirmos $n + 1$ discos de um extremo ao outro, isto é, $h_{n+1} = 3h_n + 2$. Portanto, $h_{n+1} = 3h_n + 2 \overset{(H.I.)}{=} 3(3^n - 1) + 2 = 3 \cdot 3^n - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$.

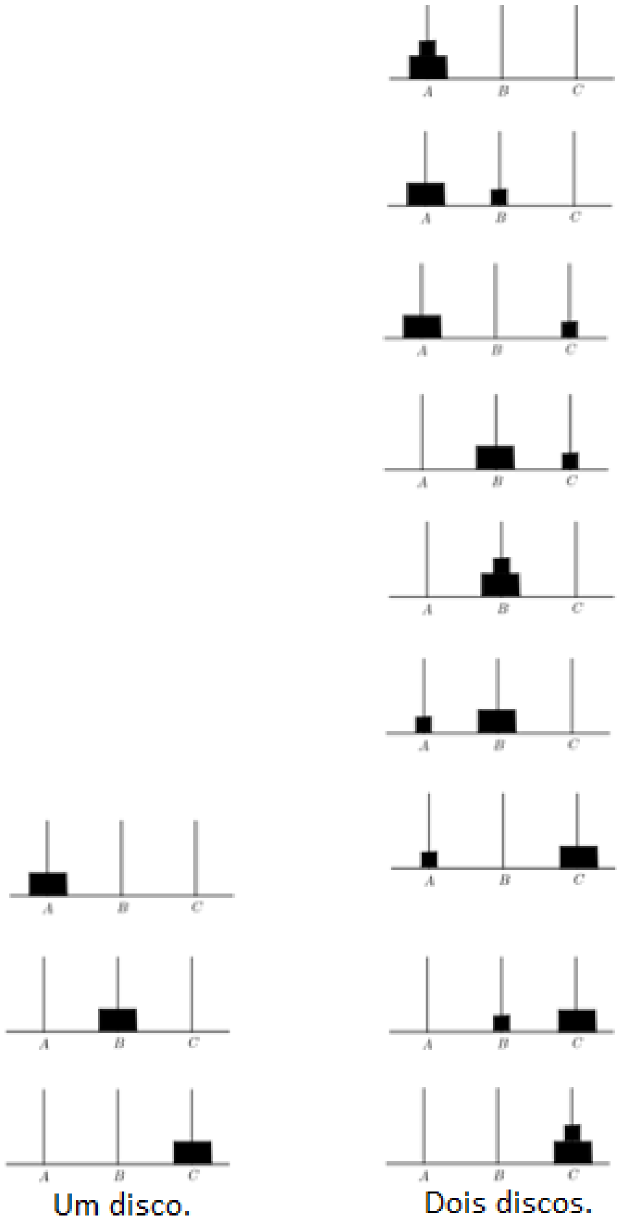

Figura 2.16: Variação da torre de Hanói para 1 ou 2 discos

Exemplo 2.4.4. Num conjunto de 3^n moedas são necessárias n pesagens numa balança comum de dois pratos para encontrar a única moeda mais pesada (falsa) do que as outras.

i) Se forem $3^1 = 3$ moedas, escolhemos duas e pesamos. Temos duas possibilidades:

   a) a balança fica equilibrada, sendo a moeda falsa a que não está na balança.

b) a balança fica desiquilibrada, sendo a moeda falsa a que está no prato que abaixou.

Em qualquer caso, fizemos uma pesagem.

ii) Se forem 3^{n+1} moedas, podemos separá-las em três montes com 3^n moedas cada um já que $3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. Em seguida, escolhemos dois montes para comparar os pesos. Temos duas possibilidades:

a) a balança fica equilibrada, estando a moeda falsa no monte fora da balança. Agora, para descobrir qual é a moeda falsa neste monte de 3^n moedas basta fazermos n pesagens, pela hipótese de indução, totalizando $1 + n$ pesagens.

b) a balança fica desiquilibrada, estando a moeda falsa no monte do prato da balança que abaixou. Em seguida, para descobrir a moeda falsa neste monte de 3^n moedas basta fazermos n pesagens, pela hipótese de indução, totalizando $1 + n$ pesagens.

Em qualquer caso, fizemos $n + 1$ pesagens.

Exemplo 2.4.5. Num conjunto de n objetos são necessárias $2n - 3$ pesagens numa balança comum de dois pratos para encontrar o objeto mais leve e o mais pesado do que os outros.

i) Para dois objetos de pesos distintos, basta uma $(2 \cdot 2 - 3 = 1)$ pesagem já que o mais pesado será o do prato que abaixou e o mais leve o do prato que levantou.

ii) Para $n + 1$ objetos de pesos distintos, podemos separá-los em dois montes, um com n objetos e outro com um objeto S. Em seguida, no monte com n objetos realizamos $2n - 3$ pesagens (hipótese de indução) para saber qual é o mais leve (m) e o mais pesado (M) nesse monte. Selecionamos esses dois objetos (m e M) para comparar com o objeto S. Podemos comparar m e S com uma pesagem e saberemos qual é o mais leve entre os dois (i), com duas possibilidades:

a) m é mais leve que S, e como m é mais leve que os n objetos restantes (hipótese de indução), então m é o mais leve dentre todos os $n + 1$ objetos.

b) S é mais leve que m, e como m é mais leve que os n objetos restantes (hipótese de indução), então S é o mais leve dentre todos os $n + 1$ objetos.

Em qualquer caso, identificamos o objeto mais leve dentre os $n+1$ objetos. De modo análogo, com uma pesagem entre M e S, sabemos quem é o objeto mais pesado dentre os $n+1$ objetos.

Totalizamos então $(2n-3)+1+1 = 2n+2-3 = 2(n+1)-3$ pesagens para saber qual era o objeto mais leve e o mais pesado dentre os $n+1$ objetos.

2.5 Sequência de Fibonacci

Em [8] vemos que Leonardo de Pisa (Fibonacci) em seu livro *Liber Abacci*, de 1202, propôs um problema clássico cujo enunciado pode ser interpretado como: Determinar quantos casais de coelhos teremos após 12 meses se começarmos com 1 casal de recém-nascidos, sabendo que após 2 meses cada casal de recém-nascidos procria e que a cada mês um casal procria.

Vejamos a solução. No mês 1 temos 1 casal (o de recém-nascidos). No mês 2 ainda temos o mesmo (1) casal. No mês 3 temos 2 casais: 1 casal do mês 2 mais 1 casal de recém-nascidos do único casal do mês 1. No mês 4 temos 3 casais: os 2 casais do mês 3 mais 1 casal de recém-nascidos do único casal do mês 2. No mês 5 temos 5 casais: os 3 do mês 4 mais 2 casais de recém-nascidos dos 2 casais do mês 3. No mês 6 temos 8 casais: os 5 casais do mês 5 mais os 3 casais de recém-nascidos dos 3 casais do mês 4. A Figura 2.17 esquematiza o problema até o mês 7.

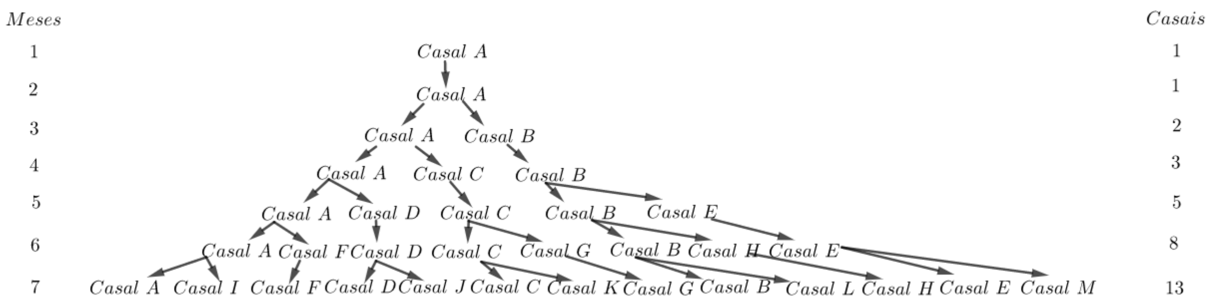

Figura 2.17: Sequência de Fibonacci

E assim por diante, donde concluímos que a quantidade F_n no mês n será os F_{n-1} casais do mês (anterior) $(n-1)$ mais os F_{n-2} casais de recém-nascidos dos F_{n-2} casais do mês (anterior ao anterior) $(n-2)$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Assim, a recorrência $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$, responde parcialmente o nosso problema.

Vamos provar por indução a fórmula (talvez inesperada para muitos) de Binet que fornece o termo geral na sequência de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

i) $F_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \dfrac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1.$

ii)

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&\overset{(H.I.)}{=} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\
&+ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right] \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Vale destacarmos que $1 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = 1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = 1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = 1 + \dfrac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = 1 + \dfrac{2-2\sqrt{5}}{-4} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Analogamente, $1 + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Para os naturais m e n temos as seguintes propriedades demonstradas por indução em n envolvendo os termos da sequência de Fibonacci:

Propriedade 2.5.1. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$.

(d) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

(e) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

(f) $F_{2n}^2 = F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n}$.

(g) $F_{2n+1}^2 - 1 = F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1}$.

(h) $F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n} = \dfrac{F_{3n+2} - 1}{2}$.

(i) $F_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}$.

(j) $F_{n+m} = F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m$, para $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a) i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = F_1 + F_2 - F_2 = F_3 - F_2 = F_3 - 1 = F_{1+2} - 1$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} \overset{(H.I.)}{=} F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = (F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1$.

(b) i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} F_{2i-1} = F_{2\cdot 1-1} = F_1 = 1 = F_2 = F_{2\cdot 1}$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} + F_{2(n+1)-1} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} + F_{2n+1} \overset{(H.I.)}{=} F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} = F_{2(n+1)}$.

(c) i) $\sum_{i=1}^{1} F_{2i} = F_{2\cdot 1} = F_2 = (F_2 + F_1) - F_1 = F_3 - 1 = F_{2\cdot 1+1} - 1.$

ii) $\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i} + F_{2(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i} + F_{2n+2} \overset{(H.I.)}{=} F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = (F_{2n+2} + F_{2n+1}) - 1 = F_{2n+3} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1.$

(d) i) $F_{2-1}F_{2+1} - F_2^2 = F_1F_3 - F_2^2 = F_1(F_1+F_2) - F_2^2 = 1\cdot(1+1) - 1^2 = 1 = (-1)^2.$

ii)

$$
\begin{aligned}
F_{(n+1)-1}F_{(n+1)+1} - F_{n+1}^2 &= F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 \\
&= F_n(F_{n+1} + F_n) - (F_n + F_{n-1})^2 \\
&= F_n((F_n + F_{n-1}) + F_n) - (F_n + F_{n-1})^2 \\
&= 2F_n^2 + F_nF_{n-1} - F_n^2 - 2F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\
&= F_n^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\
&= F_n^2 - F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} \\
&= (-1)\left[F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2\right] \\
&\overset{(H.I.)}{=} (-1)^1(-1)^n \\
&= (-1)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

(e) i) $F_1F_{1+1} = F_1F_2 = 1\cdot 1 = 1^2 = F_1^2.$

ii) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 \overset{(H.I.)}{=} F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2} = F_{n+1}F_{(n+1)+1}.$

(f) i) $F_{2\cdot 1}^2 = F_2^2 = 1^2 = 1\cdot 1 = F_1 \cdot F_2 = F_{2\cdot 1-1}F_{2\cdot 1}.$

ii)

$$
\begin{aligned}
E &= F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} \\
&\overset{(H.I.)}{=} F_{2n}^2 + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} \\
&= F_{2n}(F_{2n} + F_{2n+1}) + F_{2n+1}F_{2n+2} \\
&= F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+2} \\
&= F_{2n+2}(F_{2n} + F_{2n+1}) = F_{2n+2}F_{2n+2} = F_{2n+2}^2 = F_{2(n+1)}^2.
\end{aligned}
$$

(g) i) $F_1F_2 + F_2F_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 = 2^2 - 1 = F_3^2 - 1 = F_{2\cdot 1+1}^2 - 1$.

ii)

$$\begin{aligned}
E &= F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+2}F_{2n+3} \\
&\overset{(H.I.)}{=} (F_{2n+1}^2 - 1) + F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+2}F_{2n+3} \\
&= F_{2n+1}^2 + F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+2}F_{2n+3} - 1 \\
&= F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) + F_{2n+2}F_{2n+3} - 1 \\
&= F_{2n+1}F_{2n+3} + F_{2n+2}F_{2n+3} - 1 \\
&= F_{2n+3}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1 \\
&= F_{2n+3}F_{2n+3} - 1 \\
&= F_{2n+3}^2 - 1 \\
&= F_{2(n+1)+1}^2 - 1.
\end{aligned}$$

(h) i) $F_{3\cdot 1} = F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ e $\dfrac{F_{3\cdot 1+2} - 1}{2} = \dfrac{F_5 - 1}{2} = \dfrac{F_4 + F_3 - 1}{2} = \dfrac{F_3 + F_2 + F_3 - 1}{2} = \dfrac{2 + 1 + 2 - 1}{2} = 2$, logo, $F_{3\cdot 1} = \dfrac{F_{3\cdot 1+2} - 1}{2}$.

ii)

$$\begin{aligned}
F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n} + F_{3(n+1)} &\overset{(H.I.)}{=} \frac{F_{3n+2} - 1}{2} + F_{3n+3} \\
&= \frac{(F_{3n+3} + F_{3n+2}) + F_{3n+3} - 1}{2} \\
&= \frac{(F_{3n+4} + F_{3n+3}) - 1}{2} \\
&= \frac{F_{3n+5} - 1}{2} \\
&= \frac{F_{3(n+1)+2} - 1}{2}.
\end{aligned}$$

(i) i) $F_1 = 1 \geq \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-2}$; $F_2 = 1 \geq 1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{0} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-2}$.

ii) Se supomos válida para n e $n-1$, temos que é válida para $n+1$, pois $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \overset{(H.I.)}{\geq} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{(n-1)-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-3} =$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{5}{3}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2}=$
$\left(\frac{3}{2}\right)^{(n-2)+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{(n+1)-2}.$
Logo, pelo princípio forte de indução vale para todo n natural.

(j) Indução completa em m:

i) $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}=F_n\cdot 1+F_{n-1}\cdot 1=F_nF_2+F_{n-1}F_1=F_nF_{1+1}+F_{n-1}F_1.$

ii)

$$\begin{aligned}
F_{n+(m+1)} &= F_{n+m}+F_{n+(m-1)}\\
&\overset{(*)}{=} F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m+F_nF_{(m-1)+1}+F_{n-1}F_{m-1}\\
&= F_nF_{m+1}+F_nF_m+F_{n-1}F_m+F_{n-1}F_{m-1}\\
&= F_n(F_{m+1}+F_m)+F_{n-1}(F_m+F_{m-1})\\
&= F_nF_{m+2}+F_{n-1}F_{m+1}\\
&= F_nF_{(m+1)+1}+F_{n-1}F_{m+1}.
\end{aligned}$$

Na passagem $(*)$ usamos a hipótese de indução para $m-1$ e m para provarmos a validade para $m+1$.

$\square$

Na Propriedade 2.5.1, o item d) foi retirado de [16], o item i) de [13] e os demais de [8].

2.6 Aplicação num problema de contagem

Exemplo 2.6.1. Utilizando peças de um dominó comum vamos discutir o número de maneiras de ladrilhar por completo um tabuleiro $2\times n$ (2 linhas e n colunas) sem que as peças se sobreponham ou fiquem com partes fora do tabuleiro. (Problema retirado de [16])

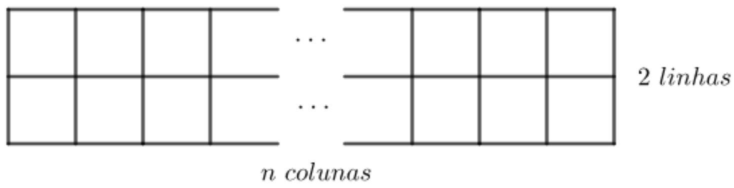

Figura 2.18: Tabuleiro $2 \times n$

Para preenchermos o tabuleiro 2×1 há 1 maneira que é colocando um dominó na vertical. Para preenchermos o tabuleiro 2×2 colocamos dois dominós na vertical ou dois dominós na horizontal, totalizando 2 maneiras. Para o tabuleiro 2×3 podemos começar da esquerda para a direita (sempre começamos nesse sentido) colocando um dominó na vertical com 2 maneiras de preencher o tabuleiro 2×2 restante. Ou, começamos com dois dominós na horizontal com 1 maneira de preencher o tabuleiro 2×1 restante. Totalizando $1 + 2 = 3$ maneiras de preenchermos o tabuleiro 2×3. Até aqui, podemos começar a conjecturar que para um tabuleiro $2\times n$ existem n maneiras de preenchê-lo. É melhor prosseguirmos. Para o tabuleiro 2×4 podemos começar colocando um dominó na vertical com 3 maneiras de preenchermos o tabuleiro 2×3 restante ou começar com dois dominós na horizontal com 2 maneiras de preenchermos o tabuleiro 2×2 restante, totalizando $2+3 = 5$ maneiras de preenchermos o tabuleiro 2×4, invalidando nossa conjectura. Na verdade, de modo geral, para preenchermos um tabuleiro $2 \times n$ podemos começar da esquerda para a direita colocando um dominó na vertical com x_{n-1} maneiras de preenchermos o tabuleiro $2 \times (n-1)$ restante ou começar com dois dominós na horizontal com x_{n-2} maneiras de preenchermos o tabuleiro $2 \times (n-2)$ restante, totalizando $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ maneiras de preenchermos o tabuleiro $2 \times n$. Assim, a sequência $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}\,(n \geq 3)$, que difere da sequência de Fibonacci F_n por um termo, responde nosso problema. Portanto, $x_n = F_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Considerações finais

A indução vulgar a partir da verificação de casos particulares pode nos conduzir a conclusões erradas conforme ocorreu com grandes matemáticos. O mesmo pode ocorrer em qualquer ambiente de aprendizagem onde é natural esperarmos conclusões precipitadas de todos os envolvidos na construção do saber matemático e que exercitam a habilidade de conjecturar, generalizar ou perceber certos padrões. É no momento após a conjectura que o princípio de indução matemática pode se mostrar uma ferramenta muito poderosa para validarmos tais conjecturas, para que não tenhamos surpresas "nas reticências", no "e assim por diante".

Aplicando o PIM podemos provar várias propriedades básicas dos naturais (como a comutativa, muita das vezes não justificada), operações básicas, relação de ordem, princípio da boa ordenação, propriedades em aritmética (envolvendo igualdades, desigualdades e divisibilidade), problemas de geometria plana, de contagem, de teoria dos conjuntos, e outros. Além de que é útil em definições por recorrência e em sequências por recorrência. Assim, o domínio do PIM se mostra imprescindível na solidificação do conhecimento matemático visto a gama de aplicações dele em diversas áreas da matemática.

Destacamos também que embora não se encontre facilmente nos livros didáticos do ensino médio, o PIM é uma boa sugestão de conteúdo para ser exposto em aulas de aprofundamento por se tratar de um assunto que não exige muitos pré-requisitos pra entendê-lo e por permitir demonstrar propriedades/identidades nos naturais que esse público está mais apto a se familiarizar. As aplicações de problemas lúdicos podem também contribuir com um tom diferente para essas aulas, motivando os alunos na construção de conhecimentos mais significativos.

Por fim, vale observarmos que em outros trabalhos o tema abordado pode proporcionar muitas outras aplicações interessantíssimas e complexas, que existem outras variações do PIM e que existe uma generalização conhecida como indução transfinita.

Referências Bibliográficas

[1] Goloviná, l.i. e Yaglóm, i.m. , *Inducción en la geometria*, Traduzido do russo por Carlos Vega, Editora MIR, 2ª edição, Moscou, 1976.

[2] Aguilar Júnior, c.a. , *Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e provas apresentadas por alunos do Ensino Fundamental*, UFRJ/IM, Rio de Janeiro, 2012.

[3] Berthet, l.a. , *Caderno de análise matemática: números naturais e suas extensões*, Faculdade de ciências econômicas e administrativas - Universidade de São Paulo, boletim nº 22 - cadeira 1.

[4] Silva, v.v. , *Números: construções e propriedades*, Editora UFG, Goiânia, 2003.

[5] Alencar Filho, E. , *Teoria elementar dos números*, 3ª edição, São Paulo, 1985.

[6] Lobeiro, a.m. , *Construção dos reais: um enfoque usando cortes de Dedekind*, Disponível em http://www.dma.uem.br/kit_antigo/corpos.pdf, Acesso em 29 de setembro de 2018.

[7] Iezzi, g. , *Fundamentos de matemática elementar*, Editora Atual, 9ª edição, São Paulo, 2013.

[8] Hefez, a. , *Aritmética*, SBM, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2014.

[9] Steffenon, r. e Guarnieri, f. , *Belos problemas de matemática: indução e contagem*, SBM, 1ª edição, Rio Grande, 2016.

[10] Hefez, a. , *Indução matemática*, Disponível em https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/7uly1ostl484c.pdf, Acesso em 29 de setembro de 2018.

[11] Ávila, G. , *Introdução à análise matemática*, Editora Edgard Blücher, 2ª edição, São Paulo, 1999.

[12] Hefez, A. , *Exercícios resolvidos de Aritmética*, SBM, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2016.

[13] Morgado, A.C. e Carvalho, P.C.P , *Matemática Discreta*, SBM, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2015.

[14] Monteiro, L.H.J. , *Elementos de álgebra*, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1969.

[15] Bezerra, A.P. , *Princípio da indução finita (PIF)*, Disponível em http://rumoaoita.com/wp-content/uploads/2017/03/topicos_adicionais_principio_da_inducao_finita_ita.pdf, Acesso em 29 de setembro de 2018.

[16] Oliveira, K.I.M. e Fernández, A.J.C. , *Iniciação em matemática: um curso com problemas e soluções*, SBM, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2010.

[17] Lima, E.L. , *Análise real volume 1. Funções de uma variável*, IMPA, 11ª edição, Rio de Janeiro, 2011.

[18] Domingues, H.H. , *Álgebra moderna*, Editora Atual, 2ª edição, São Paulo, 1982.

[19] Lima, E.L. , *Números e Funções Reais*, SBM, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2014.