Tiago Pereira Armão

Uma aplicação da Robótica Educacional no estudo do número irracional π utilizando LEGO MINDSTORM EV3

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2018

Tiago Pereira Armão

Uma aplicação da Robótica Educacional no estudo do número irracional π utilizando LEGO MINDSTORM EV3

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Tiago Pereira Armão junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Luciele Rodrigues Nunes

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2018

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande

http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática

http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

A727a Armão, Tiago Pereira.

Uma aplicação da robótica educacional no estudo do número irracional π utilizando LEGO Mindstorm EV3 / Tiago Pereira Armão. – 2018.

110f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio Grande/RS, 2018.

Orientadora: Dra. Luciele Rodrigues Nunes.

Coorientadora: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Matemática 2. Robótica educacional 3. Mindstorm EV3 4. Número π 5. Circunferência I. Nunes, Luciele Rodrigues II. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider III.Título.

CDU 004.896:51

Catalogação na Fonte: Bibliotecária Vanessa Ceiglinski Nunes CRB 10/2174

Tiago Pereira Armão

Uma aplicação da Robótica Educacional no estudo do número irracional π utilizando LEGO MINDSTORM EV3

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Tiago Pereira Armão junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 21 de Dezembro de 2018.

Luciele Nunes

Dra. Luciele Rodrigues Nunes
(Orientadora - FURG)

Cinthya M. S. Meneghetti

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Coorientadora - FURG)

Daiane Freitas

Dra. Daiane Silva de Freitas
(Avaliador - FURG)

André Alvarenga

Dr. André Martins Alvarenga
(Avaliador - UNIPAMPA)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Dezembro, 2018

Ao meu companheiro Felipe, dedico este trabalho.

“Todas as coisas são números.”
(Pitágoras)

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de propor a utilização da Robótica Educacional como ferramenta metodológica para o estudo do número irracional π dentro da aula de matemática, alinhada às habilidades e competências propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Para isso, foram desenvolvidos quatro planos de aula sequenciais, que foram aplicados a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental da rede privada. Assim, primeiramente, descreve-se a teoria matemática dos conjuntos numéricos, bem como um estudo sobre o número π e seu desenvolvimento perante a história. Na sequência, situa-se a matemática dentro do contexto da educação e da tecnologia, descrevendo sua relação com a robótica educacional. Apresentam-se então os planos de aula desenvolvidos, bem como os relatos de aplicação e resultados das atividades propostas. Ao final do trabalho, na forma de apêndice, disponibilizam-se os materiais para reaplicação das atividades.

Palavras-chaves: Matemática, Robótica Educacional, MINDSTORM EV3, Número π, circunferência.

Abstract

This dissertation aims to propose the use of Educational Robotics as a methodological tool for the study of the irrational number π within the mathematics class, aligned with the skills and competences proposed by the National Curricular Common Base (NCCB). For that, four sequential lesson plans were developed, which were applied to students of the 7th year of Elementary School of the private school network. Thus, first, the mathematical theory of numerical sets is described, as well as a study of the number pi and its hitorical development. Next, mathematics is situated within the context of education and technology, describing its relationship with educational robotics. The lesson plans are presented, as well as the application reports and results of the proposed activities. At the end of the work, in the form of an appendix, materials are available for reapplication of activities.

Key-words: Mathematics, Educational Robotics, MINDSTORM EV3, Number π, circumference.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Dentre as disciplinas curriculares do ensino fundamental e médio, pode-se verificar que a matemática figura como uma das mais temidas pelos alunos. Grande parte disso deve-se às dificuldades encontradas antes mesmo deles entrarem na sala de aula. Elas provêm de casa, das rodas de conversa, dos meios de comunicação. Vêm da noção de que a matemática é "complicada", "impossível" ou "chata", e tal ideia, passada de geração em geração, compromete o ambiente de aprendizagem.

Como resultado, professores desta componente curricular veem-se cercados de reprovações, alunos desmotivados e aulas muitos vezes sem nenhum atrativo pedagógico. Seguem por vezes uma rotina engessada e distante da realidade do aluno, que está cada vez mais exigente.

Em paralelo, a sociedade transforma-se diariamente com o impacto gerado pelo desenvolvimento tecnológico, em todas as escalas sociais. A facilidade de acesso às tecnologias revoluciona constantemente as necessidades do ser humano, que exige de forma intensa um preparo elaborado dos profissionais para lidarem com os novos recursos disponíveis. A tecnologia, uma vez inserida na escola, permite ao professor agregar novos métodos de ensino, e ao aluno possibilita o contato com os meios tecnológicos desde as idades iniciais.

A nova demanda tecnológica invade inclusive o campo formal da educação. No Brasil, começou em 2013 um trabalho colaborativo entre alunos, pais, professores, coordenadores, diretores e demais profissionais da educação para a reestruturação das competências de ensino nacional, chamada de Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Neste documento, aprovado em 2017 após quatro anos de estudo, ficam detalhados os novos parâmetros e diretrizes que devem ser seguidos por todas as escolas da rede pública e da rede privada, focados em novas metas de desenvolvimento social, emocional, científico e tecnológico.

Com um novo perfil de objetivos a serem alcançados, a BNCC, no campo específico da Matemática, busca aproximar a disciplina do contexto do aluno, ampliando as habilidades centradas nos estudantes e inserindo a tecnologia como meio natural de aprendizagem. Segundo o documento, as tecnologias digitais são importantes ferramentas na modelagem e na resolução de problemas matemáticos.

Sendo assim, percebe-se uma demanda para que as instituições de ensino e o professor adotem novas posturas frente ao processo de aprendizagem, inserindo os meios tecnológicos em suas práticas pedagógicas, levando à transformação do professor a mediador do conhecimento; da escola à ambiente de formação de cidadãos capazes de lidar com a tecnologia; e dos alunos, à protagonistas do seu próprio aprendizado, sendo desafiados constantemente com experiências de aprendizagem significativas.

O desafio atual dos professores está em encontrar metodologias inovadoras que possibilitem a ampliação dos conceitos matemáticos e suas aplicações em contextos cotidianos dos alunos. Conforme descreve a BNCC, a principal mudança no ensino da matemática deve basear-se no reconhecimento de que a tecnologia não é um elemento separado da Matemática. É neste viés que a Base reconhece que campos como a programação e a robótica são cada vez mais presentes no convívio social e na vida profissional, e por isso busca aproximá-los da disciplina.

De tal forma, a robótica quando aplicada em sala de aula, pode tornar-se uma ampla ferramenta de ensino, devido a sua proximidade da tecnologia e sua relação direta com a matemática, desde sua forma mais simples. A dificuldade está em encontrar na literatura novas abordagens de conteúdos matemáticos que utilizem a robótica educacional como meio investigativo.

Sendo assim, o presente trabalho tem por objetivo propor a utilização da Robótica Educacional como ferramenta metodológica para o estudo do número irracional π dentro da aula de matemática, alinhada às habilidades e competências propostas pela BNCC sobre o assunto, e aplicada à turmas de Ensino Fundamental do 7º ano.

São objetivos específicos da sequência didática proposta:

1. Propor sugestão do estudo da circunferência, por meio da elaboração de planos de aula baseados na nova Base Nacional Comum Curricular;

2. Propor atividades que aproximem o aluno do estudo da matemática, buscando a melhora no aproveitamento da disciplina;

3. Estimular o raciocínio lógico, o trabalho em equipe e a cooperação para desenvolvimento das habilidades do aluno, transformando o ambiente da sala de aula em um lugar de compartilhamento de conhecimento;

4. Inserir na sala de aula o estudo da tecnologia, aplicando-a em situações contextualizadas à vivência do aluno.

5. Fazer com que o aluno torne-se protagonista do seu próprio aprendizado; e o professor, mediador do ensino.

Para alcançar tais objetivos, o presente trabalho subdivide-se em capítulos, assim distribuídos:

O Capítulo 1 apresenta os principais conceitos matemáticos necessários para a fundamentação do trabalho, bem como um estudo sobre o número π e seu desenvolvimento perante a história.

O Capítulo 2 busca situar a matemática dentro do contexto da educação e da tecnologia, descrevendo sua relação com a robótica educacional.

O Capítulo 3 descreve os planos de aula elaborados para guiar o professor durante a aplicação do conteúdo estudado, detalhando-se observações quanto as possíveis intervenções a serem feitas em sala.

No Capítulo 4 são descritos os relatos, resultados e análises do que foi aplicado nas aulas bases do Capítulo 3.

Por fim, disponível em forma de apêndices, encontra-se todo material desenvolvido para as práticas de sala, com o objetivo de possibilitar a reaplicação do trabalho por qualquer professor de matemática, em qualquer parte do país.

1 Fundamentação Matemática

Neste capítulo apresentam-se definições importantes para o embasamento matemático do trabalho. Para um aprofundamento dos conceitos aqui expostos, sugere-se ao leitor o estudo dos trabalhos desenvolvidos por Figueiredo (2002), Lima (2013), Carvalho e Morgado (2013), Oliveira (2013), Lima (2017) e Silva (2018).

1.1 Conjuntos Numéricos

Segundo Lima (2017), um *conjunto* (ou *coleção*) é formado de objetos, chamados de *elementos*. A relação básica entre um objeto e um conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, diz-se que x *pertence* a A e escreve-se

$$x \in A.$$

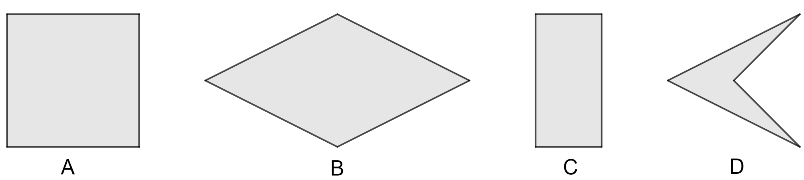
Se porém, x não é um dos elementos do conjunto A, diz-se que x *não pertence* a A e escreve-se

$$x \notin A.$$

Um conjunto A fica *definido* (ou *determinado*, ou *caracterizado*) quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a A.

Exemplo 1.1.1. Seja Q o conjunto dos quadriláteros que possuem os quatro lados congruentes. O conjunto Q está bem definido: um objeto x qualquer pertence ao conjunto Q quando é um quadrilátero e, além disso, possui os quatro lados com a mesma medida. Em contrapartida, se x não for um quadrilátero, ou se x for um quadrilátero que não possua os quatro lados congruentes, então x não pertence a Q. A Figura 1 exemplifica a situação: os quadriláteros A e B pertencem ao conjunto Q, porém C e D não pertencem a Q.

Figura 1 – Quadriláteros objetos ou não do conjunto Q.



Fonte: Próprio Autor

Usa-se a notação

$$X = \{a, b, c, \ldots\}$$

para representar o conjunto X cujos elementos são os objetos a, b, c, etc. Dessa forma, por exemplo, $\{1, 2\}$ é o conjunto cujos elementos são os números 1 e 2. De forma análoga, dado o objeto a, pode-se considerar o conjunto cujo o único elemento é o objeto a. Esse conjunto é representado por $\{a\}$.

A matemática se ocupa, em sua essência, de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos de que derivam destes, como os conjuntos de funções e matrizes, por exemplo. Serão definidos a seguir os conjuntos numéricos abordados ao longo do trabalho..

1.1.1 Conjunto dos Números Naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, de natureza histórica, surgiu da necessidade básica do homem em contar. Com uma evolução demorada desenvolvida através das civilizações, o princípio básico da contagem aperfeiçoou-se com o tempo, e hoje, pode-se definir precisamente o conjunto cujos elementos são chamamos de *números naturais*.

Segundo Lima (2013), o conjunto $\mathbb{N}$, em essência, consiste na caracterização da palavra "sucessor". Intuitivamente, quando $n, n' \in \mathbb{N}$, dizer que n' é o *sucessor* de n significa dizer que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. O uso e as propriedades da palavra "sucessor" são regidos pelos axiomas abaixo:

a) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais (ou seja, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

As afirmações acima são conhecidas como os *axiomas de Peano*, e o último axioma, como Princípio da Indução. Tais axiomas são utilizados como base para demonstrar tudo que se sabe sobre os números naturais. É intuitivo, ao observar os axiomas acima, questionar-se a respeito do zero, eventualmente também objeto do conjunto $\mathbb{N}$. Destaca-se a citação de Carvalho e Morgado (2013):

> O quarto axioma estabelece 1 como sendo o único número natural que não é o sucessor de nenhum outro e que, portanto, representa o "ponto

de partida" no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais. É comum, também, adotar-se 0 como ponto de partida, levando a $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. A opção por uma ou por outra alternativa é uma questão de gosto ou conveniência.

Para este trabalho, denota-se formalmente o conjunto dos números naturais sem o elemento 0, representando-o explicitamente como o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

O conjunto dos números naturais é munido de duas operações binárias: a adição e a multiplicação. A adição associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{N}$ a soma $x + y \in \mathbb{N}$ e a multiplicação, por sua vez, associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{N}$ o produto $x \cdot y \in \mathbb{N}$. Denomina-se o *simétrico de* x, com $x \in \mathbb{N}$, o elemento y denotado por $y = -x$.

1.1.2 Conjunto dos Números Inteiros

Definição 1.1.1. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é definido como a união de três subconjuntos: o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto cujo único elemento é o 0, e o conjunto dos simétricos dos elementos de $\mathbb{N}$ (aqui chamado de $-\mathbb{N}$). Em notação matemática,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}).$$

De forma análoga ao conjunto dos números naturais, no conjunto dos números inteiros estão definidas a adição e a multiplicação. A adição, que associa dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ a soma $x + y \in \mathbb{Z}$ e a multiplicação, que associa dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ ao produto $x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

A caracterização do conjunto $\mathbb{Z}$ é regida por nove propriedades básicas aqui definidas.

Axioma 1. A adição e a multiplicação são *bem definidas*:

Para todos $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$, se $x = x'$ e $y = y'$, então $x + y = x' + y'$ e $x \cdot y = x' \cdot y'$.

Axioma 2. A adição e a multiplicação são *comutativas*:

Para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

Axioma 3. A adição e a multiplicação são *associativas*:

Para todos $x, y, w \in \mathbb{Z}$, $(x + y) + w = x + (y + w)$ e $(x \cdot y) \cdot w = x \cdot (y \cdot w)$.

Axioma 4. A adição e a multiplicação possuem *elementos neutros*:

Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$.

Axioma 5. A adição possui *elementos simétricos*:

Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existe y denotado por $-x$ tal que $x + y = 0$.

Axioma 6. A multiplicação é *distributiva* com relação à adição:

Para todos $x, y, w \in \mathbb{Z}$, tem-se $x \cdot (y + w) = x \cdot y + x \cdot w$.

Axioma 7. O conjunto $\mathbb{N}$ é *fechado* para a adição e para a multiplicação, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{N}$, tem-se que $x + y \in \mathbb{N}$ e $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

A operação de adição permite a definição de uma nova operação, chamada de *subtração*, necessária para definição do próximo axioma.

Definição 1.1.2. Dados dois números inteiros x e y, define-se o número x *menos* y, denotado por $x - y$, como sendo

$$x - y = x + (-y)\,.$$

Diz-se que $x - y$ é o resultado da *subtração* do valor y de x.

Axioma 8. *Tricotomia*: Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

i) $x = y$; ii) $y - x \in \mathbb{N}$; iii) $x - y \in \mathbb{N}$.

Observação 1.1.1. Diz-se que x é *menor do que* y toda vez que a propriedade (ii) acima for verificada, simbolizado neste caso por $x < y$. De forma análoga, tem-se que a propriedade (iii) equivale a afirmar que $y < x$. Assim, a tricotomia permite dizer que uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

i) $x = y$; ii) $x < y$; iii) $y < x$.

Utiliza-se a notação $y > x$, que se lê y *é maior do que* x, para representar $x < y$.

Axioma 9. *Princípio da Boa Ordenação*: Um subconjunto S de $\mathbb{Z}$ é *limitado inferiormente*, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq x$ para todo $x \in S$. Diz-se que $a \in \mathbb{Z}$ é *um menor elemento* de S se $a \leq x$ para todo $x \in S$. Além disso, se existir o menor elemento, pela tricotomia, ele é único. Sendo assim, se S é um subconjunto não vazio se $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

A partir dos nove axiomas descritos anteriormente, pode-se então representar explicitamente o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros como:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Dentre todas as implicações resultantes dos nove axiomas que caracterizam o conjunto $\mathbb{Z}$, deixam-se explícitas aqui as quatro definições e proposições descritas na sequência, necessárias para a fundamentação do trabalho.

Definição 1.1.3. Dados dois números inteiros a e b, diz-se que *a divide b*, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Nesse caso, diz-se também que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou, ainda, que b é um *múltiplo* de a ou que b é *divisível* por a. A negação desta sentença é representada por $a \not| b$, significando que não existe nenhum inteiro c tal que $b = ca$.

Exemplo 1.1.2. Considere os números inteiros $a = 6$ e $b = 12$. Pode-se dizer que $6|12$ (lê-se *seis divide doze*) pois $c = 2$ é inteiro tal que $12 = 2 \cdot 6$. Assim, 12 é um múltiplo de 6 ou, equivalentemente, 12 é divisível por 6.

Definição 1.1.4. Suponha que $a|b$ e que $a \neq 0$. Seja $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. O número inteiro c, univocamente determinado, é chamado *quociente* de b por a e denotado por $c = \dfrac{b}{a}$.

Exemplo 1.1.3. São exemplos de quocientes:

$$\frac{0}{1} = 0; \qquad \frac{5}{1} = 5; \qquad \frac{6}{3} = 2; \qquad \frac{14}{-2} = -7.$$

Observação 1.1.2. É importante perceber que, dentro do conjunto dos números inteiros, a operação $\dfrac{b}{a}$ só está definida quando $a \neq 0$ e $a|b$, de tal forma que o quociente será sempre um número inteiro. Na próxima seção será definido o conjunto onde este quociente está quando $a \not| b$. Salienta-se também que b é o *numerador* e a o *denominador* da representação $\dfrac{b}{a}$.

Definição 1.1.5. Um número $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n \neq \pm 1$ é *primo* se, e somente se, os únicos números naturais que o dividem são $|n|$ e 1. Quando um número n não é primo, existem inteiros não nulos b e c tais que $n = bc$. Neste caso, n é um número *composto*.

Exemplo 1.1.4. Pode-se verificar que 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são números primos. Basta observar que, além de 1, não existe nenhum outro número além deles mesmos pelos quais são divisíveis.

Exemplo 1.1.5. Os números 9 e 15 são números compostos. De fato, $3|9$ já que $9 = 3 \cdot 3$ e $5|15$, pois $15 = 3 \cdot 5$.

Definição 1.1.6. Sejam dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um *divisor comum* de a e b se $d|a$ e $d|b$. Além disto, $d \geq 0$ é dito um *máximo divisor comum* (mdc) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

(i) d é um divisor comum de a e b, e

(ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Neste caso, pode-se utilizar a notação $(a, b) = d$ para simbolizar que d é o máximo divisor comum de a e b.

Exemplo 1.1.6. Os números ± 1, ± 2, ± 4 e ± 8 são os divisores comuns de 16 e 24. Destes divisores, 8 é o mdc de 16 e 24. Assim, $(16, 24) = (24, 16) = 8$.

São alguns casos particulares do mdc:

$$(0, a) = |a|; \qquad (1, a) = 1; \qquad (a, a) = |a|; \qquad (a, b) = (b, a).$$

1.1.3 Conjunto dos Números Racionais

Definição 1.1.7. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é definido como o conjunto dos números que podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, ou seja:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Exemplo 1.1.7. O número $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ é racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{2}{3}$, apesar de $2\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$ não serem números inteiros.

No conjunto dos números racionais estão definidas duas operações binárias: a adição e a multiplicação. A adição associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{Q}$ a soma $x+y \in \mathbb{Q}$ e a multiplicação, por sua vez, associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{Q}$ o produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$. Sendo $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $c, d \neq 0$:

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad x \cdot y = \frac{ac}{bd}.$$

Definição 1.1.8. Dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais, ou *equivalentes*, se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$. Em outras palavras,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Exemplo 1.1.8. O número racional $\frac{2}{3}$ é equivalente ao número racional $\frac{6}{9}$, ou seja, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ pois $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. Mais do que isso, $\frac{2}{3} = \frac{2k}{3k}$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, pois $2 \cdot (3k) = 6k = 3 \cdot (2k)$.

Definição 1.1.9. Na representação de um número racional $\frac{a}{b}$, b deve ser interpretado como um divisor. A notação $\frac{a}{b}$ é, portanto, o número obtido pela divisão de a por b.

Observação 1.1.3. Geralmente, para cada $n \in \mathbb{Z}$, atribui-se a igualdade $\frac{n}{1} = n$. Esta igualdade permite a identificação de $\mathbb{Z}$ com $\left\{\frac{n}{1} = n; n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}$, e com isso, considera-se o conjunto $\mathbb{Z}$ como subconjunto dos números racionais, resultando em $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemplo 1.1.9. Sendo $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$, possui representação advinda da interpretação de $\frac{1}{5}$ como a divisão de 1 por 5.

De fato, fazendo a divisão mencionada, temos que $1 \div 5 = 0,2$. Disto, tem-se que as notações $\frac{1}{5}$ e 0,2 representam o mesmo número racional, implicando que $\frac{1}{5} = 0,2$. Assim, 0,2 será chamado de *representação decimal* de $\frac{1}{5}$.

Existem números racionais com representação decimal finita. Também existem números racionais com representação decimal infinita.

Exemplo 1.1.10. São racionais com representação decimal finita:

$$\frac{2}{1} = 2; \qquad \frac{1}{2} = 0,5; \qquad \frac{10}{8} = 1,25.$$

Exemplo 1.1.11. São racionais com representação decimal infinita:

$$\frac{1}{6} = 0,1666\ldots; \qquad \frac{5}{9} = 0,555\ldots; \qquad \frac{17}{11} = 1,5454\ldots$$

O exposto anteriormente conduz à seguinte definição:

Definição 1.1.10. Uma fração $\frac{p}{q}$ se diz *irredutível* se o maior divisor comum de p e q for 1. Neste caso, diz-se que p e q são *primos entre si*.

Proposição 1.1.1. Um número racional escrito na forma irredutível $\frac{p}{q}$ tem uma representação decimal finita, se, e somente se, $q = 1$ ou se não tiver outros fatores primos além de 2 e 5, não havendo necessidade de apresentar os dois fatores simultaneamente. Se q for divisível por algum primo diferente de 2 e de 5, então o número racional $\frac{p}{q}$, p e q primos entre si, não terá representação decimal finita.

Demonstração. Dado o racional $\dfrac{p}{q}$ supõe-se q da forma $2^x \cdot 5^y$, com x e y inteiros positivos ou nulos.

Considere, num primeiro momento, que $y \leq x$. É possível reescrever o número racional $\dfrac{p}{q}$ por um equivalente, adicionando o fator 5^{x-y} a p e q. Assim, tem-se

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^x \cdot 5^y} = \frac{p \cdot 5^{x-y}}{2^x \cdot 5^y \cdot 5^{x-y}} = \frac{p \cdot 5^{x-y}}{2^x \cdot 5^x} = \frac{p \cdot 5^{x-y}}{10^x}$$

e sendo $x - y$ positivo ou nulo, 5^{x-y} será um inteiro e, portanto, $p \cdot 5^{x-y}$ também será um inteiro, digamos j. Assim,

$$\frac{p}{q} = \frac{j}{10^x}.$$

A divisão do inteiro j por 10^x requer apenas que se coloque a vírgula no lugar correto.

Por outro lado, considere agora que $y > x$. É possível agora reescrever o número racional $\dfrac{p}{q}$ por um equivalente, adicionando o fator 2^{y-x} a p e q. Assim, tem-se

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^x \cdot 5^y} = \frac{p \cdot 2^{y-x}}{2^x \cdot 5^y \cdot 2^{y-x}} = \frac{p \cdot 2^{y-x}}{2^y \cdot 5^y} = \frac{p \cdot 2^{y-x}}{10^y}$$

e sendo, de forma análoga ao caso anterior, $p \cdot 2^{y-x}$ um inteiro k, tem-se que

$$\frac{p}{q} = \frac{k}{10^x}.$$

Assim, obtém-se novamente $\dfrac{p}{q}$ com representação decimal finita. ■

Exemplo 1.1.12. O número racional $\dfrac{123456}{400}$ é decimal finito.

De fato, basta observar que

$$\frac{p}{q} = \frac{123456}{400} = \frac{123456}{2^4 \cdot 5^2}$$

e que, do racional representado na última parte da igualdade, pode-se encontrar um equivalente cujo valor de q seja uma potência de base 10 adicionando o fator 5^2 aos números 123456 e $2^4 \cdot 5^2$. Assim,

$$\frac{p}{q} = \frac{123456}{400} = \frac{123456}{2^4 \cdot 5^2} = \frac{123456 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \frac{123456 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3086400}{10^4} = 308,64.$$

Definição 1.1.11. Os números racionais escritos na forma irredutível $\frac{p}{q}$ que não possuem representação decimal finita e que, a partir de um certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição, serão chamados de *dízimas periódicas*. O grupo de algarismos que se repete será chamado de *período*.

Para obter a representação decimal de $\frac{p}{q}$, deve-se fazer a divisão continuada de p por q, acrescentando-se zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não-nulo. Como nas divisões sucessivas só podem ocorrer os restos $0, 1, 2, 3, \ldots, q-1$, após no máximo q divisões um resto vai repetir-se e, a partir daí, os dígitos no quociente irão reaparecer na mesma ordem, gerando assim uma expressão periódica.

Exemplo 1.1.13. Os números racionais $\frac{102}{9}$ e $\frac{23}{90}$ são dízimas periódicas de períodos 03 e 5, respectivamente, pois

$$\frac{102}{9} = 1,030303\ldots \qquad \text{e} \qquad \frac{23}{90} = 0,25555\ldots$$

É possível representar também as dízimas periódicas anteriores com um traço acima do período resultando nas notações $1,\overline{03}$ e $0,2\overline{5}$ para os respectivos números racionais.

Como visto anteriormente, todo número racional em sua forma irredutível $\frac{p}{q}$ possui representação decimal finita ou infinita e periódica. A explicação da recíproca, ou seja, que toda representação decimal infinita e periódica representa um número racional será feita a seguir.

Considere a dízima periódica N escrita na forma $N = X, a_1a_2a_3\ldots a_s\overline{b_1b_2b_3\ldots b_t}$, onde X representa a parte inteira da dízima periódica, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ os dígitos que não se repetem em N e $b_1, b_2, b_3, \ldots b_t$ os dígitos do período da dízima em questão.

Multiplicando N por 10^{s+t} e também por 10^s, encontram-se as relações

$$N \cdot 10^{s+t} = X \cdot 10^{s+t} + a_1a_2a_3\ldots a_sb_1b_2b_3\ldots b_t + 0,\overline{b_1b_2b_3\ldots b_t}$$

e

$$N \cdot 10^{s} = X \cdot 10^{s} + a_1a_2a_3\ldots a_s + 0,\overline{b_1b_2b_3\ldots b_t}.$$

Subtraindo uma relação da outra, tem-se

$$N \cdot \left(10^{s+t} - 10^s\right) = X \cdot \left(10^{s+t} - 10^s\right) + a_1a_2a_3\ldots a_sb_1b_2b_3\ldots b_t - a_1a_2a_3\ldots a_s,$$

e, disto,

$$N = \frac{X \cdot (10^{s+t} - 10^s) + a_1a_2a_3\ldots a_sb_1b_2b_3\ldots b_t - a_1a_2a_3\ldots a_s}{(10^{s+t} - 10^s)}$$

onde $X \cdot (10^{s+t} - 10^s) + a_1a_2a_3 \dots a_sb_1b_2b_3 \dots b_t - a_1a_2a_3 \dots a_s$ e $(10^{s+t} - 10^s)$ são inteiros, e portanto, N é racional.

Dado tudo que foi exposto anteriormente, conclui-se da Definição 1.1.11 que: "todo número cuja representação decimal seja infinita e não periódica não pode ser um número racional". Disto decorre de imediato a definição do conjunto apresentada na próxima seção.

1.1.4 Conjunto dos Números Irracionais

Definição 1.1.12. O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é formado pelos números decimais infinitos e não periódicos, denominados *irracionais*. Em outras palavras, um número será irracional quando não puder ser escrito como uma fração $\dfrac{p}{q}$, em que p e q são inteiros, e $q \neq 0$.

Antes de serem enunciadas as propriedades básicas dos números irracionais, será demonstrada a irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Para isto, é necessário o próximo resultado:

Lema 1.1.1. Se p^2 é par, então p também é par.

Demonstração. De fato, supondo que p fosse ímpar, teria-se p da forma $p = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Em consequência disto,

$$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2k' + 1, \text{ onde } k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}.$$

Percebe-se então que $p^2 = 2k' + 1$ e que p^2 é ímpar, o que é um absurdo, já que por hipótese p^2 é par. Sendo assim, se p^2 for par, p não pode ser ímpar, e portanto, p também é par. ∎

A partir do lema enunciado anteriormente, pode-se então provar o seguinte teorema:

Teorema 1.1.1. O número $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$, deve-se mostrar que este número não é racional. Então, suponha por absurdo que $\sqrt{2}$ é um número racional na forma $\dfrac{p}{q}$, $q \neq 0$, p e q primos entre si. Assim, tem-se

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Elevando ao quadrado ambos membros da equação anterior, e em seguida, multiplicando por q^2, resulta que

$$2q^2 = p^2$$

de tal forma que se observa que p^2 é par e, por consequência do Lema 1.1.1, p também o é. Assim, sendo p par, pode ser escrito na forma $p = 2k$, para algum k inteiro. Logo, obtém-se

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e disto, dividindo ambos membros por 2,

$$q^2 = 2k^2,$$

resultando que q^2 é par, e por consequência do Lema 1.1.1, q também o é, podendo ser escrito na forma $2t$, para algum t inteiro.

Contudo, deve-se observar que se p e q são inteiros pares, então ambos possuem o fator 2 em comum, e desta forma, $(p, q) \neq 1$, resultando que p e q não são primos entre si, o que contraria a hipótese. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional. ∎

No conjunto dos números irracionais, operações de adição e multiplicação são definidas, embora não sejam fechadas, conforme mostra o exemplo.

Exemplo 1.1.14. Considere o número irracional $\sqrt{2}$ e seu simétrico, também irracional, $-\sqrt{2}$ e observe as operações:

$$\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

O fato acima conduz à seguinte proposição, a qual define as operações entre um racional e um irracional.

Proposição 1.1.2. Seja $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{I}$. Então são válidas as relações:

(i) $x - y$ é irracional;

(ii) $y - x$ é irracional;

(iii) $x + y$ é irracional;

(iv) $x \cdot y$ é irracional, se $x \neq 0$;

(v) $\dfrac{y}{x}$ é irracional, se $x \neq 0$;

(vi) $\dfrac{x}{y}$ é irracional.

Demonstração. Se existem racionais r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, tais que:

$$x - y = r_1, \qquad y - x = r_2, \qquad x + y = r_3, \qquad x \cdot y = r_4, \qquad \frac{y}{x} = r_5, \qquad \frac{x}{y} = r_6,$$

resolvendo essas equações em y, teria-se que:

$$y = x - r_1, \quad y = r_2 + x, \quad y = r_3 - x, \quad y = \frac{r_4}{x}, \quad y = r_5 \cdot x, \quad y = \frac{x}{r_6},$$

e y seria racional, pois $\mathbb{Q}$ é fechado com relação às operações de adição e multiplicação, o que contraria a definição. ■

Dito o exposto até aqui, pode-se definir o conjunto resultado da união dos números racionais com os números irracionais, chamado Conjunto dos Números *Reais*, isto é:

Definição 1.1.13. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é o conjunto de todos os números cujas representações decimais são finitas, infinitas, periódicas ou não. Ou seja, é a união dos números racionais com os irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

1.1.5 Conjuntos Enumeráveis

Definição 1.1.14. Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando seus elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais, isto é, existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to X$.

Ressalta-se que, no segundo caso, X diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, ..., $x_n = f(n)$, ..., tem-se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Cada bijeção $f : \mathbb{N} \to X$ chama-se uma *enumeração* dos elementos de X.

A seguir, destacam-se alguns exemplos de conjuntos enumeráveis importantes.

Exemplo 1.1.15. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é enumerável.

Neste caso, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$, é evidentemente uma bijeção. Logo, $\mathbb{N}$ é enumerável.

Exemplo 1.1.16. Seja A o conjunto dos números naturais pares. A bijeção $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = 2n$, mostra que o conjunto A é infinito enumerável.

Exemplo 1.1.17. Seja B o conjunto dos números naturais ímpares. A bijeção $f : \mathbb{N} \to B$, $f(n) = 2n - 1$, mostra que o conjunto B é infinito enumerável.

Exemplo 1.1.18. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.

Definindo a função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, dada por $h(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n > 0 \\ -2n + 1 & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$, tem-se uma bijeção. Basta observar os elementos da correspondência de acordo com a função h.

$$\begin{array}{cccccccc}
\ldots. & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, \ \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\ldots. & 7, & 5, & 3, & 1, & 2, & 4, & 6, \ \ldots
\end{array}$$

Desta forma, considerando a inversa de h, denotada por h^{-1}, tem-se que $h^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é uma enumeração de $\mathbb{Z}$.

Exemplo 1.1.19. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Deve-se mostrar primeiramente que é enumerável o conjunto dos números racionais positivos $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$. Para isto, observe a diagramação a seguir, descrita por Figueiredo (2002).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \ldots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Observe que todos os números da forma $\dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$ aparecem no diagrama anterior. Desta forma, percorrendo as flechas, tem-se uma boa ordenação de $\mathbb{Q}^+$. Se então, for definida uma função f

$$\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Q}^+ \\
 & n & \longmapsto & f(n)
\end{array}$$

definida como $f(n) = n$-ésimo elemento encontrado seguindo as flechas, mostra-se que o conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ é enumerável.

De forma análoga ao exposto anteriormente, pode-se afirmar que o conjunto $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\}$ é enumerável, considerando os opostos dos números indicados no diagrama das frações $\dfrac{p}{q}$. Para poder concluir que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável, é preciso utilizar o teorema a seguir.

Teorema 1.1.2. Dados conjuntos enumeráveis e conjuntos infinitos, tem-se que:

(i) A união de um conjunto finito e um conjunto enumerável é um conjunto enumerável;

(ii) A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável;

(iii) A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável;

(iv) A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável;

(v) A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: A demonstração do Teorema 1.1.2 é feita detalhadamente por Oliveira (2013). Daqui, interessa-nos os itens (i) e (ii).

(i) Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ conjunto finito e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ o conjunto enumerável. O conjunto $A \cup B$ é enumerável, visto que a correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ pode ser arranjada da forma

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & \ldots, & a_n, & b_1, & b_2, & \ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & & n & n+1 & n+2 & \end{array}$$

(ii) Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ dois conjuntos enumeráveis. O conjunto $A \cup B$ é enumerável, visto que a correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ pode ser arranjada da forma

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

■

Dito o exposto anteriormente, e lembrando que o conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser representado como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, segue do item (ii) do Teorema 1.1.2, que o conjunto $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ é enumerável, e disto, do item (i) do mesmo Teorema, que $(\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+) \cup \{0\}$ é também enumerável.

Logo, como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, fica provado então que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Observação 1.1.4. Se A é enumerável, e $B \subset A$ é um conjunto infinito, então B também é enumerável, pois como A é enumerável existe uma correspondência biunívoca f entre $\mathbb{N}$ e A, então basta considerar a restrição $f\mid_B\colon B \to \mathbb{N}$.

Devido a força do resultado imediato do exemplo a seguir, será enunciado então na forma de proposição.

Proposição 1.1.3. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.

Demonstração. Pela observação 1.1.4, é suficiente mostrar que o subconjunto $[0,1)$ de $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Suponha então que $[0,1)$ é um conjunto enumerável, e que

$$[0,1) = A = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\}.$$

Ao escrever os números r_i $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ na sua forma decimal, e evitando representações decimais finitas pelo uso da forma infinita periódica em tais casos[1], tem-se:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots, \\ r_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots, \\ r_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots, \\ &\vdots \\ r_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots \end{aligned}$$

De tal forma, é possível definir um número $\beta = 0, b_1b_2b_3b_4\ldots$ da seguinte maneira:

b_1 representa qualquer algarismo entre 0 e 9, porém diferente de a_{11}, b_2 é qualquer algarismo não nulo diferente de a_{22} e assim sucessivamente, b_n é qualquer algarismo não nulo diferente de a_{nn}.

Disto, decorre que o número β é diferente de r_1, pois eles diferem na primeira casa decimal, é diferente de r_2 pois eles diferem na segunda casa decimal e, em geral, é diferente de r_n, pois eles diferem na $n-$ésima casa decimal. Portanto, β é diferente de cada um dos $r'n$. Contudo, observe que β é um número real entre 0 e 1 que não pertence ao conjunto A, obtendo-se assim, uma contradição.

Logo, o conjunto $A = [0,1)$ não é enumerável e a partir disto, segue que o conjunto $\mathbb{R}$ também não é enumerável. ■

Como resultado imediato da proposição demonstrada acima chega-se ao seguinte resultado.

Corolário 1.1.1. O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é não enumerável.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que o conjunto $\mathbb{I}$ é enumerável.

De acordo com o exemplo 1.1.19, sabe-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável, e que, por hipótese, $\mathbb{I}$ também é. Do item (ii) do Teorema 1.1.2 tem-se que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável, resultando que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ é enumerável. Contudo, como descrito

[1] Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ será escrito como $0,499999\ldots$ e não como $0,5$

anteriormente, a definição 1.1.13 garante que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser representado como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, resultando que $\mathbb{R}$ é enumerável, o que pela proposição 1.1.3 torna-se uma contradição.

De tal forma, concluí-se então que $\mathbb{I}$ é não enumerável. ■

Observação 1.1.5. A proposição acima leva a concluir que, pelo conjunto $\mathbb{Q}$ ser enumerável e pelo conjunto $\mathbb{I}$ não ser, então existem muito mais números irracionais do que números racionais.

1.1.6 Números Algébricos e Transcendentes

Um aprofundamento dos conceitos aqui expostos podem ser consultados em Figueiredo (2002).

Definição 1.1.15. Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros, é chamada um *inteiro algébrico.*

Exemplo 1.1.20. Qualquer número inteiro b é inteiro algébrico. De fato, a equação

$$x - b = 0$$

possui b como solução.

Exemplo 1.1.21. Os números irracionais $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são inteiros algébricos. Para demonstrar a veracidade da afirmação, basta observar que ambos números são soluções da equação

$$x^2 - 2 = 0.$$

Exemplo 1.1.22. O número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é um inteiro algébrico. Observe que este número é solução da equação

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

De fato, tome $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Assim, substituindo na igualdade anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^4 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 - 1 &= \\
\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 - 1 &= \\
\left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) - 2\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 - 1 &= \\
\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2\left(1+\sqrt{2}\right) - 1 &= \\
3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Portanto, o número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é um inteiro algébrico.

Exemplo 1.1.23. O número $\sqrt{-1}$ é inteiro algébrico. Observe que ele é solução da equação

$$x^2 + 1 = 0.$$

Observação 1.1.6. Note que o número $\sqrt{-1}$ não é um número real, mas ainda sim é um inteiro algébrico. O número $\sqrt{-1}$, denotado matematicamente por i, pertence a um outro conjunto no qual é possível extrair-se a raiz quadrada de números negativos. Este conjunto é chamado de *Conjunto* $\mathbb{C}$ *dos Números Complexos.*

A partir dos exemplos anteriores, pode-se perceber a existência de inteiros algébricos Inteiros, Irracionais e Complexos, o que leva ao questionamento quanto a existência de inteiros algébricos Racionais. Para isto então, enuncia-se o seguinte teorema, que caracteriza os *Inteiros Algébricos Reais.*

Teorema 1.1.3. Todo número inteiro algébrico real é um número inteiro ou irracional.

Demonstração. Para esta prova, deve-se mostrar que um inteiro algébrico não pode ser um número racional. Supondo então, por absurdo, que o número racional $x = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}, q > 1$ e p e q primos entre si, satisfaça a equação da Definição 1.1.15. Ou seja,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 && \Rightarrow\\
&\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 && \Rightarrow\\
&\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - \ldots - a_1\frac{p}{q} - a_0 && \Rightarrow\\
&p^n = q^n\left(-a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - \ldots - a_1\frac{p}{q} - a_0\right) && \Rightarrow\\
&p^n = \left(-a_{n-1}p^{n-1}q - \ldots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n\right) && \Rightarrow\\
&p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Considere então

$$k = -a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}.$$

Note que $k \in \mathbb{Z}$, dado que o conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado na adição e multiplicação de inteiros. Além disso, note que $p^n = qk$, ou seja, $q | p^n$.

Agora, considere r um fator primo de q (se q for primo, tome $r = q$). Então, $r|p^n$ e, em consequência, $r|p$.

Observe que $r|q$ já que r é fator primo de q, e como mostrado acima, $r|p$, o que mostra que p e q possuem um fator comum r, o que contradiz a hipótese de que p e q são primos entre si. Assim, o número racional $\frac{p}{q}$ definido não pode ser um inteiro algébrico real. ∎

Dada o exposto acima, é possível citar uma nova definição, mais ampla, para o contexto estudado. Seja ela:

Definição 1.1.16. Um número será chamado de *algébrico* quando for solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \ a_i \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

ou seja, um número α é *algébrico* quando é possível encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual α seja raiz. Um número que não é algébrico é denominado *transcendente*.

Exemplo 1.1.24. Qualquer inteiro algébrico é um número algébrico. De fato, basta tomar a Definição 1.1.16 para os caso onde $a_n = 1$, resultando na equação da forma exposta pela Definição 1.1.15.

Exemplo 1.1.25. Qualquer número racional $\alpha = \frac{p}{q}$ é algébrico. Basta perceber que α é solução da equação polinomial $qx - p = 0$, onde $n = 1$, $a_1 = q$ e $a_0 = -p$.

Dada a definição anterior, torna-se alvo de estudo a existência ou não de números transcendentais. Sendo assim, enuncia-se o seguinte Teorema:

Teorema 1.1.4. Existem números transcendentes.

Demonstração. Dado um polinômio com coeficientes inteiros,

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

define-se sua altura como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + \ldots + |a_1| + |a_0| + n.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra diz que $P(x) = 0$ tem exatamente n raízes complexas. Todas, algumas ou nenhuma delas podem ser números reais. O número de polinômios da forma $P(x)$ com uma dada altura é apenas um número finito. Logo, as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito. Mais ainda: o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável de conjuntos finitos. Desta forma, é possível concluir que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável.

Considere agora o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como sendo a união do conjunto dos números algébricos reais com o conjunto dos números não-algébricos reais (ou seja, números transcendentes reais).

Ora, pela Proposição 1.1.3, afirma-se que o conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável, e, como descrito acima, o conjunto dos números algébricos reais é enumerável. Assim, pode-se afirmar com base no exposto pelo item (ii) do Teorema 1.1.2, que o conjunto dos números transcendentes é não enumerável, caso contrário, $\mathbb{R}$ seria enumerável.

Sendo assim, existe um conjunto infinito, não enumerável, de números reais transcendentes. ∎

Os números algébricos possuem algumas propriedades de fechamento, listadas nos itens da proposição abaixo, e demonstradas por Figueiredo (2002) em seu livro.

Proposição 1.1.4. Dados números algébricos, temos válido:

(i) A soma de dois números algébricos é algébrico.

(ii) O produto de dois números algébricos é algébrico.

(iii) O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico α é algébrico.

(iv) O inverso α^{-1} de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é algébrico.

De forma semelhante, pode-se definir algumas propriedades operatórias entre números algébricos e transcendentes, detalhadas na próxima proposição.

Proposição 1.1.5. Seja α um número algébrico diferente de zero e β um número transcendente. Então, são válidas:

(i) $\alpha - \beta$ é transcendente.

(ii) $\alpha + \beta$ é transcendente.

(iii) $\alpha \cdot \beta$ é transcendente.

(iv) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ é transcendente.

Demonstração. Se existem algébricos α_1, α_2, α_3 e α_4, tais que:

$$\alpha - \beta = \alpha_1; \qquad \alpha + \beta = \alpha_2; \qquad \alpha \cdot \beta = \alpha_3; \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \alpha_4,$$

resolvendo essas equações em β, teria-se que:

$$\beta = \alpha - \alpha_1; \qquad \beta = \alpha_2 - \alpha; \qquad \beta = \frac{\alpha_3}{\alpha}; \qquad \beta = \alpha \cdot \alpha_4.$$

e, de acordo com a Proposição 1.1.4, β seria algébrico, contrariando nossos argumentos iniciais. ∎

1.2 O número π

Um dos objetos matemáticos mais estudados da história, o número π motiva pesquisas desde a antiguidade no Egito até a atualidade. Em geometria, sua relação com a circunferência é a mais conhecida, como será exposto na Seção 1.2.2. Porém, para dar fundamentação as notações matemáticas utilizadas, serão necessárias definições feitas na seção subsequente.

1.2.1 O estudo da circunferência

Para definir formalmente a circunferência é necessária a definição abaixo:

Definição 1.2.1. Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o *Lugar Geométrico* dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

(i) Todo ponto de L possui a propriedade P.

(ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.

Proposição 1.2.1. Sejam $P(a, b)$ e $Q(c, d)$ dois pontos do plano dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. A distância entre os pontos P e Q pode ser calculada pela relação $d(P, Q) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$.

Exemplo 1.2.1. A distância d do ponto $A(-1, 1)$ ao ponto $B(2, 5)$ é

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Exemplo 1.2.2. A distância d do ponto $F(3, 5)$ ao ponto $H(6, 5)$ é igual a distância do ponto $G(9, 5)$ ao ponto $H(6, 5)$. De fato,

$$d(F, H) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

e,

$$d(G, H) = \sqrt{(9 - 6)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

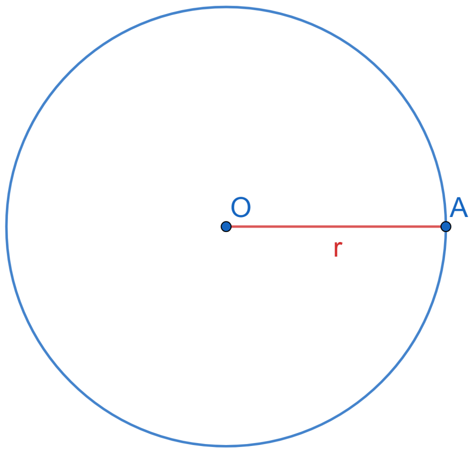
Assim, diz-se que H é *equidistante* aos pontos F e G.

Pode-se agora prosseguir com a definição:

Definição 1.2.2. Dados um número real $r > 0$ e um ponto O do plano, denomina-se *circunferência* o lugar geométrico dos pontos que estão à distância r do ponto O. A distância r é chamada de *raio* e o ponto O, *centro* da circunferência.

A Figura 2 mostra a representação geométrica da Definição 1.2.2.

Figura 2 – Circunferência de raio r e centro O.



Fonte: Próprio Autor

A Definição 1.2.2 da circunferência permite, com o auxílio da Proposição 1.2.1 escrever o seguinte corolário.

Corolário 1.2.1. Uma circunferência C de raio r e centro $A(a, b)$ representada num sistema de eixos ortogonais OXY pode ser definida pela equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Demonstração. De fato, pela definição 1.2.2, dado um ponto $P(x, y) \in C$, sua distância ao centro A será igual a r. Ou seja,

$$P(x,y) \in C \iff d(P,A) = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

■

A relação demonstrada acima, embora não seja objeto de estudo do presente trabalho, é amplamente estudada nas séries finais do Ensino Médio e no Ensino Superior e pode ser resolvida completando quadrados, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.3. Dada a circunferência de equação $C_1 : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$, reorganizando os termos e completando quadrados, pode-se reescrevê-la da forma descrita no Colorário 1.2.1, como segue:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 6y &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= 0 + 4 + 9 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 13 \end{aligned}$$

Observe que neste caso o centro A e o raio r da circunferência C_1 ficam claramente determinados e são dados por $A(2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

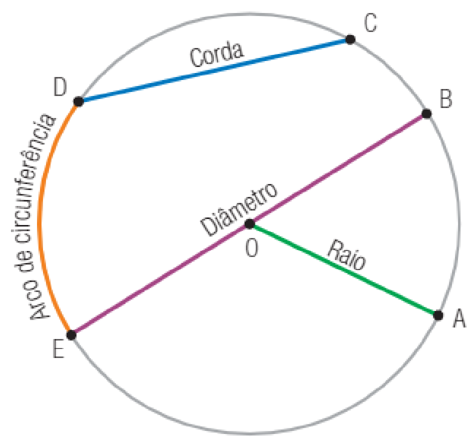
Definição 1.2.3. Seja C uma circunferência qualquer de centro A. Dados dois pontos P e Q quaisquer pertencentes à C, chama-se o segmento de reta PQ de *corda*. Se $A \in PQ$ então classifica-se a corda PQ como *diâmetro*. A reunião de todos os pontos da circunferência compreendidos entre P e Q é chamada de *arco de circunferência*.

Observação 1.2.1. É imediato, da definição anterior, que a medida d do diâmetro é equivalente a soma de duas medidas r do raio, isto é, $d = 2 \cdot r$.

Definição 1.2.4. Centro, raio, corda, diâmetro e o arco de circunferência são chamados de *elementos da circunferência*.

É possível visualizar os elementos da circunferência na Figura 3 detalhada abaixo.

Figura 3 – Os elementos da circunferência.



Fonte: Positivo (2018)

1.2.2 π através da história

Há mais de 4000 anos o número π intriga as gerações de matemáticos devido a sua complexidade. Sendo assim, a presente subseção busca destacar algumas partes consideradas importantes para a construção de sua história. Para maiores informações, sugere-se a leitura do trabalho de Bortoletto (2008), no qual faz-se um estudo aprofundado e detalhado da evolução do número π perante à história das civilizações.

Quando fala-se em Geometria Euclidiana, pode-se interpretar o π como sendo a razão entre o comprimento C da circunferência e o seu diâmetro d, o que permite escrever diretamente a relação $\pi = \dfrac{C}{d}$. A primeira menção deste fato aconteceu por volta do ano 2000 a.C, conforme foi revelado no papiro Rhind, documento egípcio descoberto em 1855. Difícil é saber como, na antiguidade, se chegou a esta conclusão.

Bortoletto (2008) afirma que provavelmente a relação tenha sua origem na constatação empírica de que, duplicando ou triplicando o diâmetro de uma circunferência, duplica-se ou triplica-se o seu comprimento. Em outras palavras, permanece constante a razão entre C e d, qualquer que seja o seu raio r.

Nesta época (e durante muitos séculos) acreditava-se que π nada mais era do que um número racional, ainda que o conceito de números racionais não existisse. Numericamente falando, os egípcios acreditavam que $\pi = 4\left(\dfrac{8}{9}\right)^2$ e os babilônios, que $\pi = 3\dfrac{1}{8}$. Em representação decimal, $3,160$ e $3,125$, respectivamente.

A primeira consideração científica veio de Arquimedes por volta de 240 a.C. Motivado por Euclides[2], Arquimedes recorreu a um processo que consistia em inscrever e circunscrever uma circunferência em polígonos regulares de 3, 6, 12, 24, 48 e 96 lados.

A ideia de Arquimedes era utilizar os referidos polígonos como limitantes inferiores e superiores cada vez mais próximos de π. As Figuras 4 e 5 mostram o detalhamento da ideia proposta pelo matemático em questão. A primeira, com polígonos inscritos e a segunda, com polígonos circunscritos.

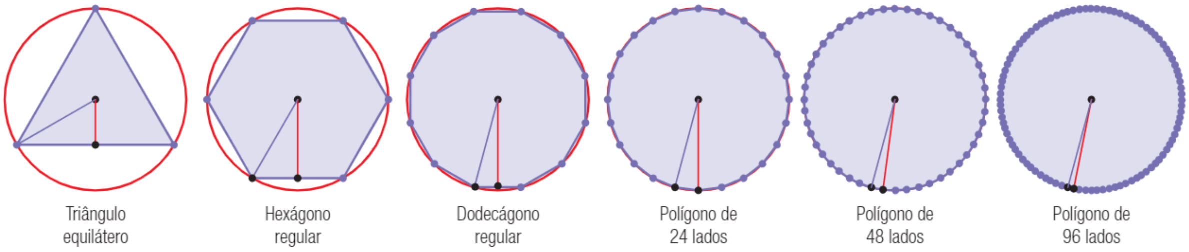
Foi dessa forma que então obteve $3\dfrac{10}{71} < \pi < 3\dfrac{1}{7}$, que pode ser escrito de forma equivalente como $3,140845 < \pi < 3,142857$, uma aproximação bastante razoável para a época.

Foi durante cinco séculos que o método proposto por Arquimedes – conhecido como o Método Clássico do Cálculo de π – foi a melhor determinação do valor de π. Somente no século III d.C que o matemático chinês Liu Hui, também utilizando um polígono regular de 96 lados, obteve a aproximação $3,14$ que ele mesmo melhorou para $3,14159$ quando, desta vez, utilizou um polígono de 3072 lados.

---

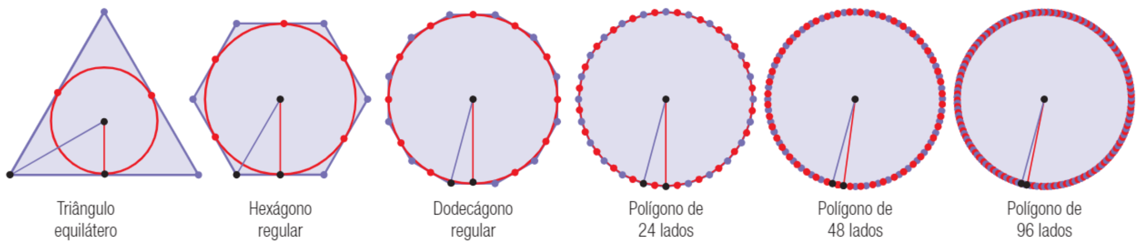
[2] Euclides foi um renomado matemático conhecido pelo seu rigor teórico. Com a publicação de seus treze livros (Elementos), foi o primeiro a demonstrar formalmente a existência de π.

Figura 4 – Polígonos inscritos para aproximação do comprimento da circunferência.



Fonte: Positivo (2018)

Figura 5 – Polígonos circunscritos para aproximação do comprimento da circunferência.



Fonte: Positivo (2018)

No século V, o chinês Tsu Ch'ung-Chih chegou a uma aproximação mais exata, obtendo π no intervalo compreendido entre os números $3,1415926$ e $3,1415927$, que diferem entre si apenas na sétima casa decimal.

No século XII, o matemático hindu Bháskara utilizou um polígono regular de 384 lados e assumiu que $\frac{3927}{1250} = 3,1416$ seria o valor exato de π, enquanto que no século XVI, Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, publicou um livro de álgebra onde atribui a π o valor $\frac{964}{275}$, representando π como $3,141818$.

Em 1707, Willian Jones designou pela primeira vez a letra grega π para representação do número "pi", porém só foi amplamente aceita quando usada por Euler em 1737. Ainda assim, é comum utilizar π mesmo para suas citações em datas mais antigas, como feito neste trabalho.

A busca pelas casas decimais de π significava admitir que este era um número racional, e qualquer um que conseguisse encontrar uma representação fracionária para esse número levaria grandes méritos pela sua descoberta. Contudo, segundo Peres (2003) foi em 1761 que Johann Heinrich Lambert conseguiu demonstrar que π era irracional (provaremos a irracionalidade de π na próxima seção). A partir dai, buscava-se então encontrar relações matemáticas que possibilitassem escrever π com o maior número de casas decimais.

Com o tempo, o método de Arquimedes acabou dando lugar aos algoritmos infinitos, principalmente depois da descoberta do cálculo diferencial e integral. Viète, no final do século XVI, utilizou o método dos limites, caracterizado pela utilização de processos infinitos de cálculo. Partindo de um quadrado, concluiu que

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots}.$$

Pouco depois de Viète, no século XVII o escocês John Wallis chegou à série de multiplicações

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$$

e Lord William Brouncker à representação

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ldots}}}}}.$$

No mesmo século, a representação de $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$ constituiu a primeira série infinita que converge para π, contudo sua convergência era muito lenta, sendo necessário cerca de 5 bilhões de termos da série para que se obtenha π com dez casas decimais exatas.

A partir do cálculo computacional, a obtenção das casas decimais de π tornou-se muito mais fácil, cômoda e rápida. Deixaram-se de lado os cálculos manuais e passou-se a obter a precisão de π em laboratórios computacionais. Foram necessárias 70 horas, em 1949, para o primeiro computador obter as 2037 primeiras casas decimais. Nove anos depois, em apenas 100 minutos, obteve-se π com 10000 casas decimais.

Atualmente já foram descobertos mais de 4000 trilhões de dígitos de π, em 2013, na Califórnia, sendo esta a representação mais precisa de π, bem distante da precisão obtida por Arquimedes, com apenas três casas decimais.

Historicamente falando, π tem sido constantemente associado a relação $\frac{C}{d}$ em uma circunferência. Em outras palavras, significa dizer que o número π é a constante de proporcionalidade na relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. É desta relação que surge a famosa fórmula matemática $C = 2\pi r$ que permite calcular o comprimento da circunferência. De fato, se $\pi = \dfrac{C}{d}$ e $d = 2r$, temos, por manipulação algébrica que

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r}$$
$$C = 2\pi r.$$

Salienta-se, por curiosidade, que π pode ser interpretado de outras formas. Uma delas é a interpretação feita quando estuda-se a área de um círculo: π pode ser facilmente relacionado à constante de proporcionalidade entre a área A do círculo e o quadrado do seu raio, ou seja, $\pi = \dfrac{A}{r^2}$, que resulta na relação $A = \pi r^2$.

De forma análoga, π pode ser interpretado como sendo a constante de proporcionalidade entre a área S da esfera e o quadrado do seu diâmetro $\left(\pi = \dfrac{S}{d^2}\right)$, equivalente a expressão $S = 4\pi r^2$. Fica como sugestão ao leitor curioso, relacionar π ao volume da esfera.

Juntamente com o desafio proposto durante gerações históricas para obtenção das casas decimais de π e da prova, ou não, de que π tratava-se de um número irracional, tentava-se provar o problema milenar da *Quadratura do Círculo*. A questão que permeava o desafio era obter, utilizando apenas régua e compasso, um quadrado de lado l cuja área fosse igual a área do círculo, obtida pela relação πr^2. O desafio então era mostrar que $l^2 = \pi r^2$, ou seja, $l = r\sqrt{\pi}$.

Contudo, conforme cita Figueiredo (2002), dados dois segmentos de comprimentos x e y, é fácil proceder as construções apenas com régua e compasso de outros segmentos de comprimento $x + y$, $x - y$, xy, $\dfrac{x}{y}$ e $\sqrt{x}$. É a partir delas que podemos construir todos os números racionais, todas as raízes quadradas e todas as combinações de números racionais ou de raízes quadradas. Em outras palavras, todos os segmentos passíveis de serem construídos com régua e compasso têm comprimento igual a um número algébrico.

Em 1882 o matemático Lindemann provou a transcendência do número π, mostrando que ele não poderia ser algébrico. Tal fato prova que a quadratura do círculo tem resposta negativa, justificando o porquê de nunca se ter provado que é possível, apenas com régua e compasso, construir um quadrado de área igual à área de um círculo. Ora, se π não é algébrico, $\sqrt{\pi}$ também não é e de fato, não é possível construí-lo nas condições dadas pelo problema.

A prova da transcendência de π é recente se comparada com o tempo ao qual o desafio percorre a história de π. Em seu livro, Figueiredo (2002) prova a transcendência do número π utilizando a análise complexa. Sugere-se então ao leitor interessado o estudo do material, uma vez que demonstrá-la aqui fugiria do escopo deste trabalho.

1.2.3 A irracionalidade de π

O objetivo dessa seção é provar a irracionalidade do número π, e para isso, é necessário assumir alguns Lemas importantes. Para maiores detalhes, sugere-se a leitura de Figueiredo (2002).

Inicialmente, considere a função

$$f(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!},$$

onde n é um número inteiro positivo.

Lema 1.2.1. $D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, onde $D^k f$ representa a k-ésima derivada de f, e $D^0 f = f$.

Demonstração. Para provar o Lema, será utilizada a Fórmula de Leibnitz para derivadas do produto de duas funções g e h, explicitada abaixo.

$$D^k(g \cdot h) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g D^{(k-j)} h,$$

onde $\binom{k}{j}$ são os coeficientes do Binômio de Newton $\binom{k}{j} = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pode-se reescrever a função f de forma conveniente como

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} \cdot (1-x)^n$$

e assumir $g(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ e $h(x) = (1-x)^n$ para aplicar a Fórmula de Leibnitz para o cálculo da derivada de f. Assim,

$$D^k f = D^k(g \cdot h) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j x^n D^{(k-j)} (1-x)^n.$$

Observe que

$$D^j x^n \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{se } j < n \\ n! & \text{se } j = n \\ 0 & \text{se } j > n \end{cases}$$

onde $D^j x^n \Big|_{x=0}$ representa a derivada calculada no ponto $x = 0$. Assim, pode-se concluir que:

(1) Caso $k < n$:

$$D^k f(0) = 0$$

(2) Caso $k \geq n$:

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!}\binom{k}{n} n! D^{(k-n)}(1-x)^n\Big|_{x=0}$$

$$D^k f(0) = \binom{k}{n} D^{(k-n)}(1-0)^n$$

$$D^k f(0) = \binom{k}{n}.$$

Como os coeficientes binomiais são inteiros, segue que a expressão $\binom{k}{n}$ é um número inteiro. De tal forma, para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tem-se que $D^k f(0)$ é inteiro. ∎

Lema 1.2.2. $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Demonstração. A demonstração é imediata, observando que $f(1-x) = f(x)$. De fato,

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = f(x).$$

Assim, como $D^k f(1-x) = D^k f(x)$, tem-se para $x = 0$ que

$$D^k(1) = D^k f(0).$$

Como $D^k f(0)$ é um número inteiro, segue que $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. ∎

Lema 1.2.3 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em seu domínio e derivável em $(0,1)$, então

$$\int_0^1 f'(x)\, dx = f(1) - f(0).$$

Demonstração: Ver estudo de Figueiredo (2002).

De posse dos Lemas anteriores, enuncia-se o Teorema:

Teorema 1.2.1. π é um número irracional.

Demonstração. Suponha que π^2 é racional, e que assim pode ser escrito como $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$, onde $\dfrac{p}{q}$ é uma fração irredutível, $q \neq 0$. O objetivo é mostrar o absurdo da suposição, isto é, que π^2 não é racional, e que devido as propriedades de fechamento mostradas na Seção 1.1.3, que π também não pode ser racional, pois o quadrado de um número racional é necessariamente racional.

Para isso, seja definida a função

$$F(x) = q^n\{(\pi^2)^n D^0 f(x) - (\pi^2)^{n-1} D^2 f(x) + \ldots + (-1)^n D^{2n} f(x)\},$$

onde $f(x) = \dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n!}$, definida no início desta seção.

A partir da hipótese de que $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$, pode-se reescrever F como

$$F(x) = q^n \left\{ \left(\frac{p}{q}\right)^n D^0 f(x) - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} D^2 f(x) + \ldots + (-1)^n D^{2n} f(x) \right\}$$

e por manipulação algébrica,

$$F(x) = p^n D^0 f(x) - q p^{n-1} D^2 f(x) + \ldots + (-1)^n q^n D^{2n} f(x).$$

Agora, considere a relação

$$S(x) = F'(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x),$$

na qual $F'(x)$ representa a derivada de $F(x)$. Calculando a derivada $S'(x)$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
S'(x) = {} & \{F'(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\}' \\
= {} & F''(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) + \pi F'(x)\cos(\pi x) - \pi\left[F'(x)\cos(\pi x) - \pi F(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\right] \\
= {} & F''(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) + \pi F'(x)\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) \\
= {} & F''(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x)\,\mathrm{sen}(\pi x).
\end{aligned}$$

Calculando a derivada segunda, F'', de F resulta que

$$S'(x) = \{F'(x)\,\mathrm{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\}' = p^n \pi^2 f(x)\,\mathrm{sen}(\pi x),$$

e neste momento, aplicando o Teorema 1.2.3 para a função $S(x)$, obtém-se

$$p^n \pi^2 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\,dx = \pi F(1) - \pi F(0),$$

ou seja,

$$p^n \pi \int_0^1 f(x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\,dx = F(1) - F(0).$$

Ora, calculando $F(0)$,

$$F(0) = p^n D^0 f(0) - q p^{n-1} D^2 f(0) + \ldots + (-1)^n q^n D^{2n} f(0),$$

e, a partir dos Lemas 1.2.1 e 1.2.2, é possível afirmar que $F(0)$ é inteiro.

De forma análoga, calculando $F(1)$,

$$F(1) = p^n D^0 f(1) - qp^{n-1} D^2 f(1) + \ldots + (-1)^n q^n D^{2n} f(1),$$

e, a partir dos Lemas 1.2.1 e 1.2.2, afirma-se que $F(1)$ é inteiro.

Assim, se for possível mostrar para algum $n \in \mathbb{N}$, $p^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$ sendo um número estritamente menor que 1, teremos o absurdo procurado.

Observe então que para a função $f(x)$, adotando $0 < x < 1$, tem-se

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}.$$

Assim,

$$0 < p^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx < p^n \pi \int_0^1 \frac{1}{n!} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx.$$

Mas,

$$p^n \pi \int_0^1 \frac{1}{n!} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \frac{\pi p^n}{n!} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\, dx,$$

e calculando a integral no segundo membro,

$$p^n \pi \int_0^1 \frac{1}{n!} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \frac{2p^n}{n!}.$$

Portanto,

$$0 < p^n \pi \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx < \frac{2p^n}{n!}.$$

Da desigualdade anterior, observe que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{2p^n}{n!} = 0$. Logo, é possível encontrar um $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $\dfrac{2p^n}{n!} < 1$. Assim, encontra-se um absurdo. Ou seja, π é um número irracional. ■

2 Fundamentação Teórica

Este capítulo tem como objetivo situar a matemática dentro do contexto da Educação e da BNCC, relacionando-a com a tecnologia e com a robótica educacional. Além disto, faz-se um estudo detalhado da robótica no Brasil, descrevendo também a metodologia LEGO *Education*, base para a estruturação dos Planos de Aula desenvolvidos no Capítulo 3.

2.1 Educação Matemática

D'Ambrosio (2012) afirma que a matemática é uma estratégia desenvolvida pela espécie humana, ao longo de sua história, para explicar, entender e manejar o imaginário e a realidade sensível e perceptível. De forma análoga, Schwengber e Pfaffenseller (2011) mostram que o conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contraexemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos.

Nesse contexto, Saiani (2002) define a Educação Matemática como o estudo das relações e processos de ensino e aprendizagem de matemática, criando uma interface entre a Matemática, a Pedagogia e a Psicologia. Afirma ainda que em consequência disto surgem diversas correntes filosóficas e metodológicas para o ensino deste componente curricular, como por exemplo a contextualização, a etnomatemática, a modelagem e a resolução de problemas.

A motivação no aprendizado em matemática, segundo Daher e Morais (2007), consiste num processo de ensino que requer interesse em se criar estratégias na abordagem dos conteúdos. Desse modo está lançado o grande desafio da maioria dos professores: "provocar" no educando o interesse pelo conteúdo proposto. Experiências reais demonstram a veracidade dessa vertente do ensino. Essa relação interfere diretamente nos resultados que são esperados para tal propósito de aprendizagem, uma vez que se tenha empenho na busca constante por novas perspectivas de ensino; consequentemente, acredita-se que existirá um aluno capaz de compreender o real significado da busca por resultados coerentes com a necessidade de cada aplicação matemática.

A Educação Matemática tem buscado a compreensão do processo de ensino- aprendizagem da Matemática e aprimorar a aprendizagem por parte dos alunos. Entre os seus principais objetivos, destaca-se a busca pela melhoria do trabalho docente, mediante um processo de mudança de atitudes e de concepções de educação baseadas na aprendizagem da Matemática (ROSEIRA, 2005).

Esse fato pode-ser justificado devido à uma grande falha na educação, em especial na Educação Matemática: separar esta disciplina das atividades humanas (D'AMBROSIO, 1999). Nessa linha de análise, Micotti (1999) afirma que existe uma dificuldade muito grande em mudar a estrutura das aulas de matemática em comparação com as outras disciplinas, como por exemplo, àquelas que se dedicam aos fenômenos naturais. Nestas, o professor pode recorrer a elementos do ambiente para enriquecer as aulas. Na matemática, as ideias são desenvolvidas a partir de raciocínios lógicos e mais abstratos, dificultando possíveis inovações.

Conforme Micotti (1999), as reflexões sobre mudanças pedagógicas com referência à Matemática indicam a necessidade de repensar alguns pontos, como por exemplo: relação do estudante com a disciplina, a sua participação em sala de aula e o enfoque dado à Matemática para que ela se torne objeto de conhecimento.

As mudanças necessárias vão além do âmbito da sala de aula. Elas devem atingir não só as instituições educacionais, mas também a estrutura curricular, uma vez que esta está intimamente ligada às diretrizes básicas do ensino. No Brasil, estas mudanças já estão ocorrendo, como detalhado na seção seguinte.

2.1.1 A Base Nacional Comum Curricular

A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica. Anteriormente à BNCC, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) serviam de referência para todas as escolas do país, uma vez que seu objetivo era estabelecer um currículo padronizado nacionalmente em todas as áreas de conhecimento.

A BNCC vem sendo discutida desde 2013, porém foi só no final de 2017 que foi aprovada, estipulando-se o início do ano letivo de 2020 para todas as escolas, públicas e privadas, adequarem-se aos novos parâmetros estabelecidos. Salienta-se que a BNCC traz uma complementação aos PCNs e não deve ser interpretada como uma ruptura.

Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais[1]. Na BNCC, *competência* é definida como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018). As competências gerais pretendem assegurar, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral que visa à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

[1] As dez competências gerais podem ser encontradas facilmente nos documentos de consulta pública disponibilizado pelo Governo Federal. O link para acesso está disponível na referência BRASIL (2018)

Na BNCC o ensino fundamental está organizado em cinco *áreas de conhecimento*. São elas: Matemática, Ciências da Natureza, Ensino Religioso, Linguagens e Ciências Humanas. Cada uma destas subdividem-se em diferentes componentes curriculares. A Figura 6 mostrada abaixo facilita a visualização desta divisão.

Figura 6 – Divisão das componentes curriculares conforme a BNCC.

	COMPONENTES CURRICULARES	
	Anos Iniciais (1º ao 5º ano)	Anos Finais (6º ao 9º ano)
Linguagens	Língua Portuguesa	
	Arte	
	Educação Física	
		Língua Inglesa
Matemática	Matemática	
Ciências da Natureza	Ciências	
Ciências Humanas	Geografia	
	História	
Ensino Religioso	Ensino Religioso	

Fonte: BRASIL (2018)

As áreas de conhecimento estabelecem competências específicas, cujo desenvolvimento deve ser realizado durante os nove anos do Ensino Fundamental. Estas competências articulam-se horizontalmente entre as áreas, atingindo todos os componentes curriculares, e verticalmente, por meio da continuidade das experiências dos alunos a partir de suas particularidades.

A BNCC destaca que para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de *habilidades*, relacionadas a diferentes objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos), que por sua vez, organizam-se em *unidades temáticas*. No caso da Matemática, são definidas na BNCC as seguintes unidades temáticas:

A) **Números:** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, desenvolvendo maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.

B) **Álgebra:** tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

C) **Geometria:** Envolve o estudo de um conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.

D) **Grandezas e Medidas:** As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, tem como finalidade contribuir para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico.

E) **Probabilidade e estatística:** Busca desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas, incluindo raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.

As unidades temáticas acima citadas percorrem todo o ensino fundamental e devem servir como norteadoras dos processos de ensino e do desenvolvimento das habilidades de cada competência. Aqui detalham-se (convenientemente alinhadas aos objetivos do trabalho) duas importantes competências e habilidades extraídas da BNCC, conforme mostram as Figura 7 e 8.

Figura 7 – Objeto de conhecimento e habilidade para o 7º Ano – Geometria

A circunferência como lugar geométrico	**(EF07MA22)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

Fonte: BRASIL (2018)

Figura 8 – Objeto de conhecimento e habilidade para o 7º Ano – Grandezas e Medidas

Medida do comprimento da circunferência	**(EF07MA33)** Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

Fonte: BRASIL (2018)

Ressalta-se que, embora os objetos estejam organizados em unidades temáticas, a intenção da BNCC é que o ensino não seja realizado de forma linear. O ideal é que as aulas sejam planejadas em sequências didáticas que conversem com outras áreas de conhecimento ou com outras unidades temáticas, permitindo ao aluno conectar e explicar os fatos que acontecem entre diversas áreas.

Contudo, realizar tal feito é um desafio. Exige do profissional o domínio das diferentes unidades temáticas e suas possíveis relações entre as áreas de conhecimento. Segundo Escola (2018), o primeiro passo deve ser partir de uma mudança no planejamento das aulas, para que esses aspectos possam ser equacionados. Dentre as possibilidades figura a aprendizagem baseada em problemas – ou STEAM – que prevê aulas que integram ciências, tecnologia, engenharia, arte e matemática. A robótica é um exemplo disso. Sendo assim, utilizaremos a próxima seção para apresentar a ligação entre a Matemática, a Tecnologia e a Robótica.

2.2 Matemática, Tecnologia e Robótica

A matemática, como ciência, apresenta uma relação muito especial com as tecnologias, desde as calculadoras e os computadores, aos sistemas multimídia e à internet (RODARTE, 2014). Ponte, Oliveira e Varandas (2003) corroboram com essa ideia quando falam que a internet é uma "metaferramenta", na qual é possível encontrar vários desenvolvimentos na disciplina de Matemática e na educação matemática, como por exemplo, softwares, exemplos de exercícios para os estudantes, exemplos de aulas, etc.

Tajra (2011) corrobora o que escreveram Ponte, Oliveira e Varandas (2003) quando afirma que as novas tecnologias oferecem novas possibilidades de aprendizagem aos alunos e inovam o ensino da matemática, reforçando o papel da linguagem gráfica e de outras formas de representação, ideias para a sala de aula, etc. Sendo assim, as novas tecnologias favorecem o desenvolvimento de importantes competências.

Roseira (2005) afirma em seu trabalho que a tecnologia atinge de forma diferente os cidadãos. Alguns tem o contato com ela desde que nasceram e, por isso, podem formar seus hábitos e sua visão do mundo em função dela. Outros têm apenas acesso às tecnologias mais comuns de comunicação.

Segundo Pereira, Pereira e Carrão (2004), o contato com a tecnologia desde os anos iniciais proporciona um melhor desempenho no aprendizado, com atividades mais práticas e visuais, sendo vantajosas em aspectos como a maior facilidade no desempenho de raciocínio; respostas mais convictas; organização do raciocínio lógico e alta motivação.

A matemática tem uma forte presença na sociedade contemporânea. Cada vez que a humanidade avança em seu desenvolvimento tecnológico, mais conhecimentos matemáticos são requeridos. Disto resulta a necessidade de que as pessoas sejam capazes de avaliar e questionar a forma de utilização destes conhecimentos, para que possam entender o papel do conhecimento matemático nos diversos campos de atuação (ROSEIRA, 2005).

A robótica aplicada à educação é uma tecnologia que pode levar à reformulação da maneira de pensar e trabalhar com os conteúdos, pois é uma ferramenta capaz de motivar o aluno, que a todo momento é desafiado a observar e inventar. Por esse motivo, e pela proximidade na vida cotidiana, a robótica pode ser uma forte aliada no processo de construção do conhecimento, pois possibilita uma aprendizagem ativa e participativa, sendo o aluno sujeito do seu próprio processo de construção do conhecimento (RODARTE, 2014).

Por meio da robótica, o professor pode explorar novas ideias e descobrir novos caminhos na aplicação de conceitos em sala de aula; e na aplicação de resolução de problemas de matemática, pode desenvolver a capacidade de elaborar hipóteses, investigar soluções, estabelecer relações e tirar conclusões.

A utilização dos conceitos relacionados a robótica está diretamente vinculada ao uso de equipamentos que favoreçam o contato dos alunos com o planejamento, construção e controle dos robôs. Seguindo esta linha, encontram-se na literatura diversos kits educacionais adequados a diferentes faixas etárias e metodologias de aprendizado.

Segundo Silva (2009), o mercado é composto por brinquedos pedagógicos com eletrônica de controle; kits educacionais com foco em alunos do Ensino Fundamental e Médio; conteúdo didático e competições utilizando kits de montagem robótica; e até robôs de pequeno porte para o nível técnico e de graduação. Para demonstrar o quanto esta área está em constante desenvolvimento, serão apresentados na sequência alguns dos kits educacionais encontrados no Brasil.

2.2.1 Kit de Robótica: Arduino

Com o objetivo de oferecer ferramentas acessíveis, com baixo custo, flexíveis e fáceis de usar, o Arduino é uma plataforma de prototipagem eletrônica de hardware livre e de placa única. Pode ser usado para o desenvolvimento de objetos interativos independentes, ou ainda para ser conectado a um computador (FORNAZA; WEBBER; VILLAS-BOAS, 2015). Segundo o autor, foi criado na Itália, em 2005, e enquadra-se como um projeto de hardware *open source*, cuja documentação para a confecção da placa eletrônica é livremente disponibilizada, facilitando a sua produção e permitindo que os usuários possam desenvolver novos projetos a partir do original.

Embora não tenha sido concebido para a robótica educacional, existem diversos kits comercializados com este propósito, permitindo o desenvolvimento de atividades com robótica. Por não possuir material didático específico, a sua utilização depende de conhecimento básico de eletrônica, sendo bastante utilizada por estudantes de graduação na área de computação. (SILVA; SCHERER, 2012)

Para a construção de robôs com Arduino, há três elementos principais (SILVA; SCHERER, 2012):

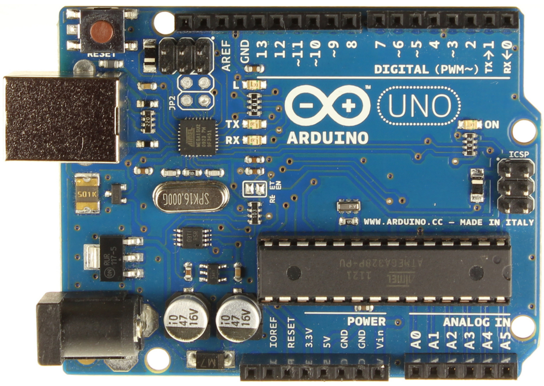
1. **Placa Arduino:** É a placa em si. Dependendo do modelo, consiste em um microcontrolador, regulador de voltagem, conector de energia, botão reset, LEDs, interfaces USB e conectores para montagem de pequenos circuitos elétricos.

2. **Hardware externo:** Inclui os circuitos à mão, o chassi e peças construídas por terceiros (como display, rodas, motores, dentre outros).

3. **Arduino IDE:** É o ambiente de desenvolvimento integrado, compatível com o Windows e Linux. A linguagem de programação é baseada na linguagem C/C_{++}.

A Figura 9 mostra a placa Arduino utilizada para montagem de diversos kits.

Figura 9 – Placa Arduino, utilizada para montagem de alguns kit educacionais brasileiros.



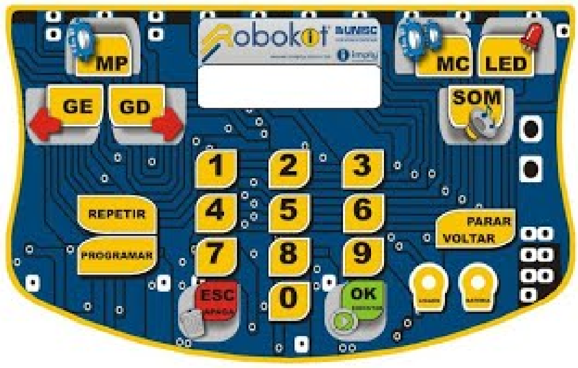
Fonte: Fornaza, Webber e Villas-Boas (2015)

2.2.2 Kit de Robótica: ROBOKIT

O ROBOKIT (3.8) foi desenvolvido pela IMPLY - empresa brasileira no ramo de tecnologia, fundada em 2003 - e o curso de Licenciatura em Computação da Universidade de Santa Cruz do Sul. De acordo com Silva (2009), o kit é de fácil operação e desenvolve conhecimentos em programação, raciocínio lógico e criatividade.

Conforme instrui o site do fabricante, um diferencial do ROBOKIT (ilustrado pela Figura 10) “é a possibilidade de trabalho com materiais alternativos, enquanto os kits importados oferecem peças prontas para encaixe e montagem de modelos pré-elaborados.” É por meio deste ambiente o aluno comanda o funcionamento de motores, LEDs, sons, sensor de toque e determina o tempo de funcionamento de cada um deles. Para isso, o estudante emprega habilidades como: tomada de decisão, ordenação de atividades, conferência de resultados e estimativas de modificação de ações (ROBOKIT, 2008).

Figura 10 – ROBOKIT 3.8, kit de robótica educacional.



Fonte: ROBOKIT (2008)

2.2.3 Kit de Robótica: Modelix Robotics

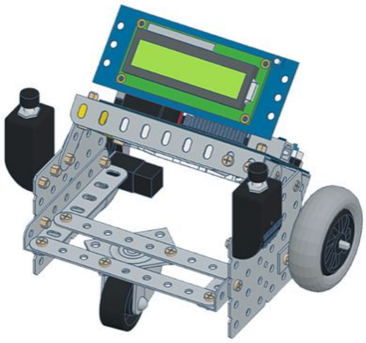
De criação brasileira, a Modelix Robotics é uma empresa que fabrica, desenvolve e comercializa kits de robótica educacional há mais de dez anos. Segundo a fabricante, possui cursos implementados em escolas públicas e privadas, e seu objetivo "é promover o ensino da robótica através do avanço da educação, por meio de aulas práticas e em grupo, estimulando a criatividade e a interdisciplinaridade" (MODELIX, 2018).

Possui kits adaptados para diferentes níveis de ensino. Sua abrangência vai desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, dividindo seu material em cinco kits diferenciados. Além do descrito, possui também:

1. Opção de implantação curricular e extracurricular;
2. Material didático completo;
3. Software dedicado ao ensino de programação;
4. Atualização constante e reposição garantida de peças.

A programação é feita pelo software *Modelix System*, desenvolvido especialmente para o ensino de programação de robótica. A programação é intuitiva e é feita através de fluxogramas, dessa maneira é possível atingir crianças de 7 anos até o nível universitário. A Figura 11 mostra um exemplo de montagem com o Kit para alunos do Ensino Médio.

Figura 11 – Exemplo de robô montado com o kit de Ensino Médio da Modelix Robotics.



Fonte: MODELIX (2018)

2.2.4 Kit de Robótica: UNO Robótica

Com sede em Porto Alegre, a UNO Robótica intitula-se como a primeira empresa brasileira a possuir uma plataforma completa e definitiva para o ensino da robótica educacional. Os kits de robótica e seus acessórios são projetados e fabricados pela própria empresa, que desenvolve todo o material didático. Há 10 anos no mercado, a empresa já atingiu mais de 8 mil estudantes em mais de 35 mil horas de atividades (UNO, 2018).

De acordo com o site da fabricante, alguns dos diferenciais deste kit são:

1. Cada aluno tem o seu próprio robô, denominado Robô NEO;
2. O ambiente de programação é livre, com interface multilíngue;
3. Metodologia própria, que respeita o desenvolvimento do aluno;
4. Material didático exclusivo e específico para cada faixa etária;
5. UNObox[2], para compartilhamento de programas.

A metodologia desenvolvida consiste em um curso com carga horária mínima de 30 horas, flexíveis de acordo com a grade do colégio parceiro. O curso possui material didático digital, e cada aluno adquire seu próprio robô NEO.

O objetivo do projeto, é “levar ao aluno a compreensão do mundo tecnológico que permeia nosso cotidiano, sendo indispensável para o uso adequado, eficiente e seguro de

[2] UNOBox é uma rede de compartilhamento na internet, desenvolvida pelos criadores da UNO Robótica que permite guardar, compartilhar e publicar programas criados pelos estudantes. Nesta plataforma as programações ficam disponíveis para todos, que então têm a possibilidade de experimentá-las e modificá-las, buscando a melhoria da programação original.

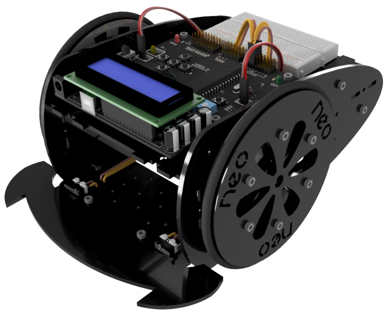
aparelhos e equipamentos, e o fornecimento de condições para analisar, fazer escolhas e otimizar essa utilização." (UNO, 2018)

O robô NEO possui chassi em acrílico, dois motores com redução interna, pneus de borracha, *buzzer*[3], cinco teclas programáveis, controle remoto sem fio e um *bumper*[4] dianteiro com dois sensores de toque independentes acoplados.

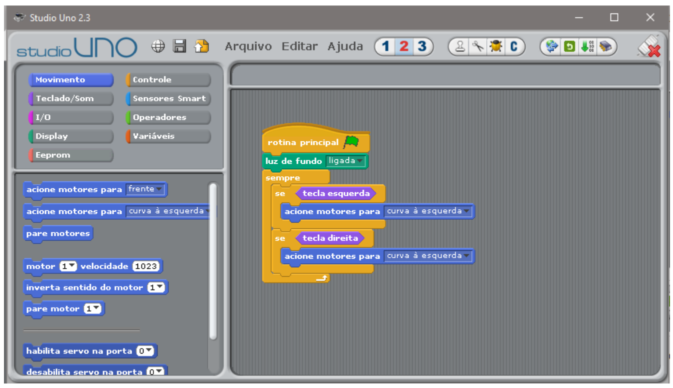
A programação é feita através do StudioUNO, ambiente de programação desenvolvido pela empresa a partir da linguagem de programação *Scratch*, do *Media Lab* do *Massachussetts Institute of Technology* (MIT). Baseia-se no modelo de programação por blocos, onde o usuário elabora os programas ao arrastar comandos para a área de programa, criando sua lógica ao encaixar diferentes blocos entre si. Sendo assim, o desenvolvedor recomenda a aplicação para alunos a partir dos oito anos de idade. A Figura 12 mostra (a) o Robô NEO e (b) o ambiente de programação StudioUNO.

Figura 12 – UNO Robótica: (a) Robô NEO; (b) StudioUNO, plataforma de programação

(a)



(b)



Fonte: UNO (2018)

2.2.5 Kit de Robótica: FischerTechnik

A FischerTechnik é uma empresa alemã fundada em 1965 com o propósito de desenvolver produtos para crianças que tinham afinidades em construção de objetos. Durante os anos, aperfeiçoou-se no ramo de robótica educacional e atualmente possui kits possíveis de serem usados por crianças a partir dos 5 anos de idade (FISCHER, 2018). Seus materiais incluem sistemas eletromecânicos, que podem ser motorizados, automatizados e controlados pelo computador. As peças são de plástico e alumínio, com um sistema de encaixe de guias e pinos, permitindo ao operador implementar praticamente qualquer sistema mecânico e também dar movimento a estrutura (SILVA, 2009). A Figura 13 mostra um dos kits educacionais disponíveis.

[3] Pequeno dispositivo de saída de som.
[4] Barra horizontal de acrílico que protege a estrutura do robô.

Figura 13 – Kit de robótica FischerTechnik.

Fonte: FISCHER (2018)

Com material de aplicação à sala de aula, as soluções desenvolvidas pela empresa são adequadas ao nível escolar e adaptadas as disciplinas trabalhadas em aula. Segundo Fornaza, Webber e Villas-Boas (2015), os projetos são divididos da seguinte maneira:

1. **Ensino Infantil:** Projetos constituídos somente da parte mecânica (construção);
2. **Ensino Fundamental I:** Projetos que trabalham a parte mecânica, ligações elétricas e projetos de iniciação à programação no software ROBO PRO;
3. **Ensino Fundamental II e Ensino Médio:** Projetos que envolvem montagem, ligações elétricas e programação, com a existência de microcontrolador.

2.2.6 Kit de Robótica: LEGO

Amplamente conhecida no território nacional, a LEGO® possui ramo específico de suas peças voltadas para a robótica educacional. Seus diversos kits são destinados à crianças a partir dos 2 anos de idade, divididos em quatro segmentos (LEGO, 2018):

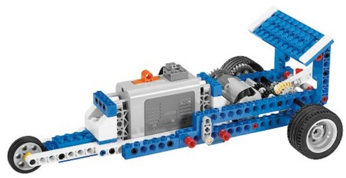
1. Early Learning;
2. Machines and Mechanisms;
3. WeDo 2.0;
4. MINDSTORMS EV3.

Sua metodologia inclui programação a partir dos 7 anos de idade, introduzindo o raciocínio lógico em plataforma de programação própria. A grande vantagem deste material é a versatilidade de montagens, destacando-se dos demais kits citados anteriormente.

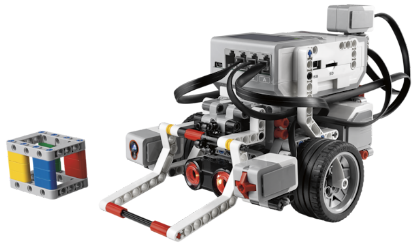
A Figura 14 mostra (a) um robô montado com o kit *Machines and Mechanisms* e (b) um robô montado com o kit *MINDSTORMS EV3*.

Figura 14 – Montagens com kits LEGO®: (a) robô montado com o kit *Machines and Mechanisms*; (b) robô montado com o kit *MINDSTORMS EV3*

(a)



(b)



Fonte: LEGO (2018)

Por ser a linha de robótica educacional utilizada neste trabalho, a robótica LEGO® será melhor abordada na seção subsequente.

2.3 Robótica LEGO

A presente seção busca descrever a robótica proposta pela LEGO® Group, sua metodologia de aplicação em sala de aula e plataforma de programação. Além disto, tem por objetivo situar a robótica LEGO® no contexto nacional, bem como sua aplicabilidade nas aulas de matemática.

2.3.1 Metodologia LEGO Education

Batizada oficialmente em 1934, a LEGO® surgiu em 1932 em um pequeno negócio na Dinamarca, cujo objetivo era a produção de brinquedos de madeira, e em poucos anos expandiu sua produção, fabricando também brinquedos em plástico. Sob o nome de *Automatic Binding Brick* (em tradução livre, Bloco Conector Automático), criou-se em 1949 a versão mais antiga do bloco LEGO, com o seu lançamento oficial em 1955. (LEGO, 2018)

Em 1980, por meio de uma parceria entre o Grupo LEGO® e o *Media Lab* do MIT, surgiu o ramo de atividade especialmente voltado à educação: a LEGO® *Education*. De acordo com ZOOM (2013), a partir dos estudos de Seymour Papert[5], a LEGO *Education*

[5] Seymour M. Papert (1928-2016) foi um dos fundadores do laboratório de inteligência artificial do MIT e responsável, no final dos anos sessenta, pelo desenvolvimento da linguagem *LOGO*, que futuramente evoluiria para o sistema *LEGO-LOGO*. Papert, em suas obras *The Children's Machine* (1993) e *Mindstorms: Children, Computer and Powerful Ideas* (1980), aborda de forma inovadora o Construcionismo, tornando-se referência na área de tecnologia educacional. (CYSNEIROS, 1999)

desenvolveu uma metodologia inovadora, que contempla:

- Utilização de jogos educativos;
- O trabalho em equipe;
- Quatro momentos: Contextualizar, Construir, Analisar e Continuar.

De acordo com ZOOM (2013), a contextualização é essencial para situar o aluno diante de um sujeito, uma situação, um contexto, podendo ser uma situação-problema relacionada com o mundo real. Ainda cita que na fase **Contextualizar**:

> Estabelece-se uma conexão dos conhecimentos prévios, que o aluno possui, com os novos. Nesse momento, o aluno entra em contato com o tema com o qual irá trabalhar na fase seguinte. Aqui, o educador convida o aluno a participar da atividade prática.

Definida a situação, os alunos partem para a etapa da construção, sendo toda a atividade de construção relacionada à contextualização. O propósito é diminuir o distanciamento entre a situação presente (considerada insatisfatória) e uma situação desejada (finalidade a ser alcançada). Na etapa **Construir**:

> O aprendizado ativo envolve dois tipos de construção: a construção física e a mental. Ou seja, quando as crianças constroem artefatos no mundo "real", simultaneamente constroem conhecimento na mente. O processo de construção física de modelos proporcionará um ambiente de aprendizagem fértil para o processo de mediação a ser realizado pelo educador, que negociará conflitos, ouvirá diferentes ideias e opiniões para os mesmos problemas propostos e orientará quanto ao uso racional e efetivo da tecnologia e à aquisição de novos conhecimentos.

De posse do objeto físico construído por suas próprias mãos, e feita a mediação da etapa de construção, a aula parte para a fase da análise, na qual os alunos discutem entre si o funcionamento do objeto e como ele resolverá (ou abordará) o problema contextualizado. Por meio do trabalho coletivo, é nesta etapa que os alunos são levados a resolver os problemas cuja resolução não é evidente a priori. Assim, na etapa **Analisar**:

> Nessa fase, os alunos são levados a pensar como funcionam suas montagens, experimentando, observando, analisando, corrigindo possíveis erros e validando assim o projeto. Ao analisar o que foi feito, os alunos têm a oportunidade de aprofundar seu conhecimento. Como resultado, desenvolvem conexões entre o conhecimento anterior e as novas experiências vivenciadas.

Por fim, na etapa da continuação é delimitada uma nova situação-problema (ou ainda um aprofundamento da situação inicial), que exigirá dos alunos a análise do que já foi feito para conseguir resolver o novo problema por meio do raciocínio lógico, da adaptação do que foi construído ou da aplicação de um método desenvolvido anteriormente. Logo, na etapa **Continuar**:

> Nessa fase, os alunos são convidados a resolver uma situação-problema. Com isso, eles se mantêm em um estado de motivação intrínseca, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem se torne cíclico e contínuo.

Sendo assim, as aulas propostas pela metodologia LEGO® não significam apenas construções de alguma montagem de peças LEGO, mas sim um processo que tem um objetivo bem definido e delineado. Nesse processo, o aluno é avaliado pelo que aprendeu na interação com o meio e com os objetos a sua disposição. Ressalta-se então que "o objetivo não é verificar se o aluno consegiu ou não montar, mas avaliar o que foi aprendido no processo de construção" (ZOOM, 2013).

2.3.2 Kits de Robótica LEGO Education

Baseada na dinâmica das quatro etapas descritas anteriormente, os kits de robótica LEGO foram elaborados para diferentes faixas etárias. De acordo com o site oficial da fabricante, a LEGO® *Education* divide-se em quatro segmentos, descritos brevemente a seguir.

2.3.2.1 LEGO *Education* Early Learning

Possui materiais adequados para crianças a partir dos 2 anos, utilizando o kit para introduzir as habilidades iniciais de matemática, ciências e linguagem para crianças pequenas. É composto por peças grandes, desenvolvidas para que as crianças explorarem ilimitadamente suas experiências de aprendizagem, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 – Kits de Robótica LEGO *Education* Early Learning: (a) Kit *Early Learning Bundle*, para crianças de 2 até 5 anos; (b) Kit *Our Town*, com 278 peças, para crianças de 3 até 5 anos.

(a)

(b)

Fonte: LEGO (2018)

Neste segmento, os kits de robótica são divididos em kits menores e com temáticas próprias, e todos eles apresentam um manual para o professor/responsável acompanhar e encaminhar o desenvolvimento do aluno/criança. Devido a faixa etária de abrangência, este material destina-se a fase inicial da criança na escola.

2.3.2.2 LEGO *Education* Machines and Mechanisms

Possui materiais para crianças com idade a partir dos 5 anos. Seus kits contém uma variedade grande de peças, composta por engrenagens, polias, alavancas, rodas e eixos, além de adesivos com olhos, escamas, asas, etc. Neste segmento as crianças podem explorar a engenharia de projetos com mecanismos, estruturas e forças mais avançados do que no kit *Early Learning*.

A Figura 16 mostra dois kits disponíveis no segmento *Machines and Mechanisms*: a Figura 16 (a) mostra o kit aplicado nos anos iniciais do Ensino Fundamental I (1º e 2º ano); a Figura 16 (b) detalha o kit aplicado nos anos subsequentes do Ensino Fundamental I (3º, 4º e 5º ano).

Figura 16 – Kits de Robótica LEGO *Education* Machines and Mechanisms: (a) Kit *Early Simple Machines Set*, com 102 peças, para crianças a partir dos 5 anos; (b) Kit *Simple & Powered Machines Set*, com 396 peças, para crianças a partir dos 8 anos.

(a) (b)

Fonte: LEGO (2018)

2.3.2.3 LEGO *Education* WeDo 2.0

Com material próprio para crianças com 7 anos de idade ou mais, o Kit *WeDo 2.0* foi desenvolvido baseado nos mais recentes padrões científicos com o objetivo de melhorar a curiosidade e as habilidades científicas dos alunos. O conjunto, diferentemente do kit

Machines and Mechanisms possui um *SmartHub*[6], um motor médio, sensor de movimento e um sensor de inclinação. A Figura 17 mostra o kit disponível no segmento *WeDo 2.0*.

Figura 17 – Kit de Robótica LEGO *Education* WeDo 2.0: (a) Kit *WeDo 2.0 Core Set*, com 280 peças, para crianças a partir dos 7 anos; (b) Exemplo de robô montável neste segmento.

(a) (b)

Fonte: LEGO (2018)

Neste kit, o objeto construído poderá ser submetido à uma programação simples, por meio de um ambiente de programação de fácil utilização, próprio à faixa etária do kit. Nas especificações da abrangência do material, destaca-se as aplicações nas áreas de engenharia, física, ciências da terra, da vida e espaciais.

2.3.2.4 LEGO *Education* MINDSTORMS EV3

Sendo considerado o mais avançado dos quatro segmentos, este kit é uma solução prática e interdisciplinar que envolve os alunos a partir dos 10 anos ao fornecer os recursos para projetar, criar e programar suas criações enquanto os ajuda a desenvolver habilidades especiais, como criatividade, pensamento crítico, colaboração e comunicação.

O conjunto depende de um bloco principal, chamado EV3, que consiste em um computador compacto programável e potente que possibilita o controle dos sensores e motores que acompanham o kit. A Figura 18 mostra o kit principal disponível no segmento *Mindstorm EV3*, bem como seu pacote de extensão.

[6] SmartHub é uma peça de encaixe LEGO, composta por um sistema eletrônico parte integrante do LEGO *Power Functions* 2.0 - uma nova plataforma tecnológica para a LEGO *Education*. (LEGO, 2018)

Figura 18 – Kit de Robótica LEGO *Education* MINDSTORMS EV3: (a) Kit *EV3 MINDSTORMS Core Set*, com 541 peças, para crianças a partir dos 10 anos; (b) Kit de expansão *Expansion Set*, com 853 peças.

(a) (b)

Fonte: LEGO (2018)

3 Atividades Propostas

Para analisar a influência da robótica no ensino aprendizagem de matemática por parte dos alunos, foi escolhido dentro da área da geometria plana o conteúdo de Circunferência. No 7º Ano do Ensino Fundamental (Séries Finais), conforme mostrado na Seção 2.1.1, são abordados pela primeira vez os conceitos de circunferência como Lugar Geométrico e o seu comprimento, relacionando-o com o número não racional π.

Para isso, foram construídos quatro planos de aula sequenciais com fundamentação baseada nas diretrizes propostas pela BNCC. Os planos de aula estão descritos nos itens subsequentes.

3.1 Plano de Aula A: Conceitos Preliminares

De forma a introduzir o conteúdo, e baseado nas competências descritas pela BNCC, o primeiro encontro versará sobre os conceitos chave relacionados à circunferência, diferenciando-a do círculo e utilizando instrumentos de desenho para fazer a sua representação geométrica.

Para auxiliar o alcance dos objetivos propostos, disponibiliza-se no Apêndice A exercícios que podem ser aplicados nas etapas da aula.

- **Unidade Temática:** Geometria.
- **Objeto de Conhecimento:** A circunferência como lugar geométrico.
- **Duração da aula:** 100 minutos (2 horas/aula).
- **Objetivos:** Definir a circunferência como lugar geométrico e definir seus principais elementos, diferenciando-a do círculo. Construir circunferências por meio do uso do compasso e utilizá-las para fazer pequenas composições artísticas.
- **Pré-requisitos:** Nenhum.
- **Metodologia da aula:** Seguirá as etapas de 01 a 07.

Etapa 01: Mostrar (utilizando o projetor, fotos ou o próprio objeto) formas circulares distintas e instigar um pequeno debate sobre as diferenças entre as figuras. Nesta etapa alguns questionamentos podem ser feitos. A exemplo: Existem diferenças entre as imagens mostradas? Quais as semelhanças? Que outros exemplos poderiam ser citados de objetos com as mesmas características?

Observação: É importante que nesse passo os alunos interajam com o professor, de forma a chegarem as suas próprias conclusões de forma coletiva.

Duração prevista: 10 minutos.

Etapa 02: Definir formalmente a circunferência como lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto dado. Definir também seus elementos (centro, raio, diâmetro, corda e arco).

Observação: Pode-se fazer um pequeno aprofundamento sobre o assunto, comentando que o círculo representa o lugar geométrico dos pontos que distam do centro valores menores ou iguais do que a medida do raio.

Duração prevista: 10 minutos.

Etapa 03: Demonstrar o uso do compasso para traçado de circunferência de raio pré-definido (Aqui sugere-se: $C_1 : r = 2$ cm); Propor os questionamentos: Qual a medida do diâmetro? Qual a relação entre o diâmetro e o raio? Relacionar o diâmetro como sendo duas vezes a medida do raio $\left(d = 2r \text{ e } r = \dfrac{d}{2}\right)$.

Duração prevista: 15 minutos.

Etapa 04: Utilizar o compasso para traçado de circunferências de raios e diâmetros pré-definidos, buscando o domínio da técnica de construção. Aqui sugerem-se: $C_2 : r = 3$ cm; $C_3 : r = 2,5$ cm; $C_4 : d = 5$ cm; $C_5 : d = 7$ cm. Para cada circunferência, identificar os elementos (raio, diâmetro e centro).

Duração prevista: 15 minutos.

Etapa 05: Construção, por parte dos alunos, de pequenas composições artísticas utilizando apenas circunferências (e arcos de circunferência) em folha de papel A4.

Duração prevista: 25 minutos.

Etapa 06: Resolução individual de exercícios curtos de fixação para avaliar o desenvolvimento do aluno; Correção coletiva.

Duração prevista: 20 minutos.

Etapa 07: Finalização da aula, retomando os conceitos abordados.

Duração prevista: 05 minutos.

- **Avaliação:** Para avaliar o desenvolvimento e a assimilação do aluno, propõe-se:

1. Na Etapa 01 observar se ocorre a participação de todos os alunos e, caso contrário, mediar a participação direcionando as perguntas sugeridas para estes alunos.

2. Na Etapa 03 circular pela sala acompanhando e orientando no correto uso do compasso.

3. Na Etapa 04 verificar a assimilação das Etapas 02 e 03, observando se o traçado das circunferências estão corretos e se foram identificados corretamente os elementos solicitados.

4. Na Etapa 05 deixar os alunos usarem a sua criatividade para montar a composição e instigar questões como: Quantas circunferências de raios diferentes foram traçadas? Você definiu alguma medida de raio antes de traçar a circunferência? Qual o significado da composição?

5. Na Etapa 06 deixar o aluno resolver individualmente para poder avaliar sua compreensão após a correção.

6. Na Etapa 07, propor aos alunos que exponham suas dificuldades e aprendizados.

3.2 Plano de Aula B: Descobrindo o π com a Robótica

Aplicada a Aula A, e abordados os conceitos específicos relacionados a circunferência, dá-se continuidade as atividades. Desta vez, o recurso utilizado será a robótica educacional como ferramenta auxiliar de ensino, com a qual os alunos obterão na prática um valor aproximado para o número π.

Esta aula necessita do passo a passo da construção do robô desenvolvido pelo autor deste trabalho para esta atividade. Este documento, em formato PDF, encontra-se disponível gratuitamente no endereço eletrônico *https://justbeamit.com/mn72i*.

• **Unidades Temáticas:** Geometria; Grandezas e Medidas.

• **Objeto de Conhecimento:** A circunferência como lugar geométrico; Medida do comprimento da circunferência.

• **Duração da aula:** 100 minutos (2 horas/aula).

• **Objetivos:** Utilizar a robótica como ferramenta auxiliar de ensino, aplicando os conceitos de circunferência em uma atividade prática, contextualizada, que coloque o aluno como protagonista do aprendizado.

• **Pré-requisitos:** Circunferência como lugar geométrico; Elementos da circunferência.

• **Metodologia da aula:** Seguirá as etapas de 01 a 04.

Etapa 01: Contextualização: Dividir a turma em grupos de três ou quatro integrantes. Para esta etapa, pode-se utilizar um material que aborde a roda como tema central. O material, disponibilizado no Apêndice B, traz a história da invenção da roda e sua importância para o desenvolvimento da sociedade.

No final da contextualização, o material mostra uma foto de perfil de roda (peça integrante do kit LEGO), mostrando os elementos da circunferência do objeto (contorno, raio, centro). É neste momento da aula que serão relembrados os conceitos dos elementos da circunferência.

Duração prevista: 15 minutos.

Etapa 02: Construção do robô no formato de carro. Durante esta etapa, questionar sobre as etapas de construção. Por exemplo: Este carro consegue fazer curvas? Qual o diâmetro da roda traseira? Qual o diâmetro da roda dianteira? O que fará o robô se movimentar? Você consegue identificar o eixo das rodas? O robô está estável?

Observação: Durante esta etapa, o professor deve montar a pista de testes no chão da sala de aula. A construção pode ser feita de maneira simples com o uso de uma fita isolante.

A pista deve possuir obrigatoriamente uma marcação de início e de fim, além de marcações intermediárias em distâncias aleatoriamente definidas a partir do início da pista (por exemplo, 1, 2, 3, 5, 6 metros).

Duração prevista: 35 minutos.

Etapa 03: Análise de resultados e resolução de exercício prático.

Após a montagem do robô, e respondidos os questionamentos do material-texto, os alunos deverão seguir os passos abaixo relacionados:

1. Medir a pista (com trena, régua, fita métrica) em todas as suas marcações, e anotar os valores de forma a organizar as informações. Abaixo, temos um exemplo de Quadro 1, disponível também no material do aluno.

Quadro 1 – Modelo de quadro a ser preenchido na atividade prática de Robótica

Teste	Comprimento da pista	Número de rotações	Circunferência
1			
2			
3			
4			
5			

Fonte: próprio autor

2. Programar o robô no software *LEGO MINDSTORM*, copiando o modelo de programação fornecido no material do aluno e explicitado na Figura 19 a seguir. A programação fará o robô andar infinitamente para frente e em linha reta.

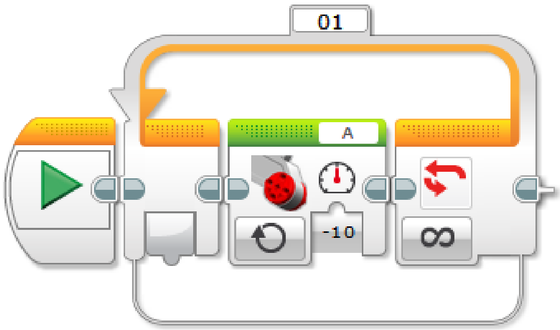


Figura 19 – Programação padrão para desenvolvimento do Plano de Aula B

3. Posicionar o robô na linha de início, com a roda traseira sob a linha de marcação.
4. Acionar o robô e contar quantas rotações a roda dará até atingir cada uma das marcações da pista. Os valores devem ser registrados no Quadro, na coluna "número de rotações".
5. Dividir cada um dos comprimentos pelo número de rotações obtidos até chegar naquela marcação, obtendo o comprimento da circunferência da roda. O registro no Quadro fica na coluna "Circunferência". A aproximação decimal pode ser a maior possível, variando de acordo com o modelo da calculadora utilizada.
6. Calcular a média da coluna "Circunferência", encontrando um valor médio para a medida da circunferência da roda.
7. Dividir o comprimento médio pelo diâmetro da roda. O valor encontrado deve ser próximo ao valor de $\pi = 3,1415\ldots$.

   Duração prevista: 25 minutos.

Etapa 04: Feitas as etapas anteriormente descritas, o professor deve propor a discussão da semelhança dos resultados encontrados pelos grupos. Deve-se deixar os alunos fazerem as suas próprias conclusões sobre as razões encontradas.

Observação: É esperado que neste momento os alunos tenham encontrado valores próximos a π. Não há problemas de grupos terem encontrados valores não tão próximos (por exemplo $\pi \pm 0,4$). Porém, caso a maioria dos valores sejam muito divergentes de π, sugerir que refaçam as medições. Neste ponto, questionar as dificuldades e prováveis imprecisões que levaram à valores não tão próximos a π.

Deve-se então, conduzir a explicação para a relação existente do número π com o comprimento da circunferência e diâmetro, apresentando formalmente a relação $\pi = \dfrac{C}{d}$.

Duração prevista: 20 minutos.

Etapa 05: Finalização da aula, retomando os conceitos abordados.

Duração prevista: 05 minutos.

• **Avaliação:** Para avaliar o desenvolvimento e a assimilação do aluno é necessário que ocorra o acompanhamento dos alunos durante todas as etapas, de forma que na medida que as dúvidas vão surgindo já sejam eliminadas.

3.3 Plano de Aula C: Um desafio de robótica

Com os conceitos construídos na aula anterior, chega o momento de exercitar o conteúdo por meio da realização de um desafio envolvendo a robótica. A proposta da aula, desta vez mais curta, é aplicar o conteúdo aprendido para conseguir resolver o problema proposto. Esta aula caracteriza a etapa **Continuar** da metodologia LEGO, descrita na Seção 2.3.1 do capítulo anterior.

Esta aula requer uma intervenção inicial na pista montada na Aula B. Uma nova marcação deve ser feita na pista, antes da aula começar, à uma distância qualquer a ser definida pelo professor. Esta marcação será essencial para o desenvolvimento correto do desafio.

• **Unidades Temáticas:** Geometria; Grandezas e Medidas.

• **Objeto de Conhecimento:** A circunferência como lugar geométrico; Medida do comprimento da circunferência.

• **Duração da aula:** 50 minutos (1 hora/aula).

• **Objetivos:** Exercitar o conteúdo por meio da realização de um desafio envolvendo a robótica, buscando a aplicação dos conceitos abordados em aula.

• **Pré-requisitos:** Circunferência como lugar geométrico; Elementos da circunferência; Medida do comprimento da circunferência.

• **Metodologia da aula:** Seguirá as etapas de 01 a 04.

Etapa 01: Retomar os conceitos abordados nas aulas anteriores (Aula A e Aula B);

Duração prevista: 05 minutos.

Etapa 02: Expor o desafio (descrito no material-texto do aluno do Apêndice C):

> “Uma grande empresa está procurando uma equipe de engenheiros que trabalhe não só focada no resultado, mas também na precisão das soluções de seus problemas. Para o novo processo de contratação de equipes, esta empresa fez uma nova marcação na pista. Desta vez, em um lugar

ainda não explorado anteriormente. O objetivo das equipes é descobrir o número exato de rotações necessárias para que o robô, partindo do início, pare seu movimento com precisão em cima da nova marcação.

A programação foi desenvolvida pelos programadores da empresa, que deixaram um modelo pronto a ser seguido, bastando inserir o número de rotações encontrado pela sua equipe. Feita a programação, a etapa de teste será realizada com apenas uma tentativa.

Será contratada a equipe que chegar mais próximo do resultado pedido."

A programação modelo, disponível no material do aluno, é idêntica a representada na Figura 20 mostrada na sequência. Os alunos precisam apenas acrescentar na programação o número de rotações previsto pelas equipes de alunos.

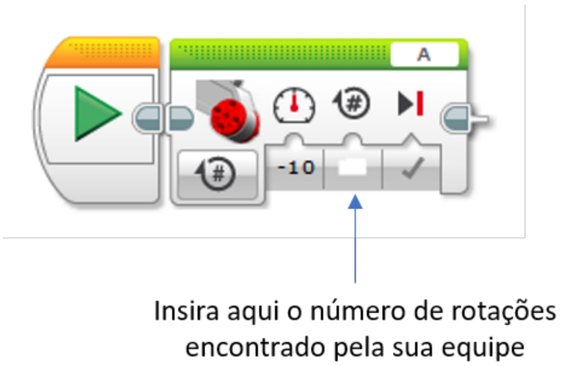


Figura 20 – Programação padrão para desenvolvimento do Desafio da Aula C

Duração prevista: 10 minutos.

Etapa 03: Execução do Desafio. Aqui os alunos irão conversar, debater, calcular e medir todas as ideias e quantidades necessárias para que o desafio seja solucionado.

Observação: Dentro de cada equipe, as opiniões precisarão convergir para um número, que então será programado ainda nesta etapa. A equipe que obter o maior sucesso deverá ser aquela que utilizar a relação $\pi = \dfrac{C}{d}$ *de forma correta e com medições precisas com a trena.*

Duração prevista: 15 minutos.

Etapa 04: Testes na pista. Neste momento as equipes mostrarão que sabem resolver o problema. É aqui que eles testarão, uma única vez, suas soluções. Ganhará a equipe que mais próximo ficar da linha Desafio. Pedir que esta equipe compartilhe a solução vencedora.

Duração prevista: 10 minutos.

Etapa 05: Desmontagem do robô, reorganização da maleta e finalização da aula.

Duração prevista: 10 minutos.

• **Avaliação:** Nesta aula, a avaliação ocorrerá durante o processo de desenvolvimento do desafio, e caberá ao professor mediar as intervenções dos alunos para resolver o problema.

3.4 Plano de Aula D: Formalizando conceitos e praticando

Feitas as atividades das aulas A, B e C, procede-se com a explicação teórica em relação ao tema, abordando nesta aula o comprimento da circunferência e sua relação com o diâmetro, relacionando as novas explicações ao que foi experimentado na aulas envolvendo robótica educacional.

• **Unidades Temáticas:** Geometria; Grandezas e Medidas.

• **Objeto de Conhecimento:** Medida do comprimento da circunferência.

• **Duração da aula:** 100 minutos (2 horas/aula).

• **Objetivos:** Estabelecer o número π como a razão entre a medida do comprimento da circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas.

• **Pré-requisitos:** Circunferência como lugar geométrico; Elementos da circunferência.

• **Metodologia da aula:** Seguirá as etapas de 01 a 06 descritas a seguir.

Etapa 01: Retomar os conceitos abordados nas aulas anteriores (Aula A, B e C) e distribuir o material-texto disponibilizado no Apêndice D;

Duração prevista: 10 minutos.

Etapa 02: Dividir a turma em grupos de três a quatro alunos e distribuir, para cada grupo, três objetos circulares distintos;

Observação: Propor que os alunos meçam, com o auxílio de um barbante e de uma régua, o comprimento da circunferência e do diâmetro de cada um dos objetos. Os alunos podem fazer o preenchimento destes dois itens no Quadro 2, para facilitar a observação dos dados.

Quadro 2 – Modelo de Quadro a ser preenchido para Etapa 02 da Aula D

Objeto	Comprimento (C) da Circunferência	Diâmetro (d)	$\frac{C}{d}$

Fonte: próprio autor

Após o preenchimento, calcular com o auxílio da calculadora a razão $\frac{C}{d}$ para cada objeto, finalizando o preenchimento do Quadro 2. A aproximação decimal pode ser a maior possível, variando de acordo com o modelo da calculadora utilizada.

Duração prevista: 25 minutos.

Etapa 03: Compartilhar com a turma os valores encontrados para a relação $\frac{C}{d}$ de todos os grupos, e propor a discussão sobre os resultados. Deve-se deixar os alunos fazerem as suas próprias conclusões sobre as razões encontradas.

Observação: Semelhantemente a atividade da aula B, espera-se que neste momento os alunos tenham encontrado valores próximos a π. Não há problemas de grupos terem encontrados valores não tão próximos (por exemplo $\pi \pm 0,4$). Porém, caso a maioria dos valores sejam muito divergentes de π, sugerir que refaçam as medições. Espera-se aqui que os alunos percebam que fizeram atividade semelhante na aula B, encontrando resultados parecidos. O professor deve mediar as discussões até que os alunos recordem da relação $\pi = \frac{C}{d}$.

Duração prevista: 15 minutos.

Etapa 04: Definir π como a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro; Apresentar formalmente a relação $\pi = \frac{C}{d}$, válida para toda circunferência; Agora, em sala de aula, o professor deve conduzir à relação $C = 2\pi r$ e apresentar historicamente o número π.

Duração prevista: 20 minutos.

Etapa 05: Resolução individual de exercícios curtos de fixação para avaliar o desenvolvimento do aluno; Correção coletiva.

Duração prevista: 25 minutos.

Etapa 06: Finalização da aula, retomando os conceitos abordados.

Duração prevista: 05 minutos.

- **Avaliação:** Para avaliar o desenvolvimento e a assimilação do aluno, propõe-se o acompanhamento dos alunos durante todas as etapas, de forma que na medida que as dúvidas vão surgindo já sejam eliminadas. Além disso, ressalta-se que o professor deve:

1. Nas Etapas 02 e 03 observar se ocorre a participação de todos os alunos do grupo e como que os alunos resolvem coletivamente a atividade proposta.
2. Ainda nas Etapas 02 e 03, valores obtidos na razão $\frac{C}{d}$ que sejam muito diferentes ($\pi \pm 0,4$) do valor desejado (π) indicam falta de precisão nas medições do grupo e isto pode ser comentado com a turma. Pode-se discutir ainda o que provavelmente

não foi preciso e o que poderia melhorar. Se houver tempo, pode-se sugerir que as medidas sejam refeitas, ou então, simplesmente desconsiderá-las.

3. Ao apresentar o contexto histórico na Etapa 04, avaliar a percepção do aluno para o fato de π ser uma relação estudada por diferentes povos e que independe da circunferência.

4. Na Etapa 05, deixar o aluno resolver individualmente para poder avaliar sua compreensão após a correção.

5. Na Etapa 06, propor aos alunos que exponham suas dificuldades e aprendizados.

4 Relatos, Resultados e Análises

As informações expostas nessa seção foram organizadas de forma a possibilitar ao leitor melhor compreensão dos relatos e resultados do trabalho. Assim, na sequência, descrevem-se os relatos de aplicação de aula, bem como os resultados obtidos e as análises de cada resultado dos planos de aula propostos no Capítulo 3.

4.1 Relatos das Aplicações em sala de aula

As atividades descritas nos planos de Aula de A até D no Capítulo 3 foram aplicadas com os alunos de uma turma do 7º ano da Escola de Ensino Fundamental e Médio Santa Mônica, da rede particular, localizada na cidade de Pelotas, Rio Grande do Sul. A aplicação, que ocorreu dentro do período regular de aula, foi desenvolvida em quatro encontros sequenciais realizados no turno matutino.

4.1.1 Aplicação do Plano de Aula A

A aplicação do Plano de Aula A ocorreu no dia 07 de novembro de 2018 e contou com a participação dos 21 alunos matriculados na turma. O espaço para realização das atividades foi o Laboratório de Matemática da Instituição, equipado com um computador conectado ao um projetor digital com acesso a internet, além de ferramentas de desenho (régua, compasso) suficientes para o trabalho individual de todos os alunos.

No primeiro momento da aula, foi mostrado um conjunto de imagens previamente selecionadas contendo diversas formas circulares distintas, dentre elas: anéis de cebola, metade de uma cebola, um anel, um bambolê, um prato, um óculos de lentes circulares, uma roda de bicicleta, uma lata de leite condensado e os aros olímpicos.

Conforme eram feitos os questionamentos propostos no Plano de Aula (características em comum e diferenças entre as imagens), foi possível perceber que os alunos imediatamente relataram como semelhança o fato de todas as imagens serem elementos circulares. Aos poucos, conforme a discussão ia acontecendo, um aluno relatou que alguns dos objetos representavam apenas um contorno e outros, possuíam preenchimento. Foi neste momento que as palavras círculo e circunferência começaram a surgir.

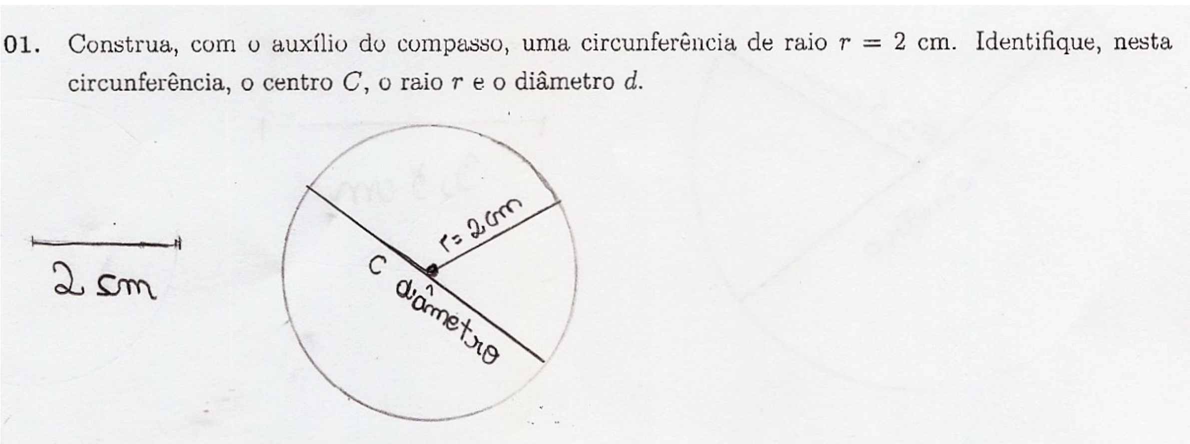
Desta forma, os alunos foram então conduzidos a definir a diferença entre círculo e circunferência informalmente. Uma aluna arriscou a definição de ambos elementos matemáticos, dizendo que o círculo possui preenchimento e que a circunferência é o contorno do círculo. Grande parte da turma concordou com a definição da aluna. Ao questionar os demais alunos, quatro discordaram e afirmaram que a relação correta seria o contrário do que foi definido pela primeira colega. Dois alunos preferiram não se pronunciar.

Após a conversa, foi marcado um ponto no quadro branco e definida coletivamente uma distância de 20 cm. Com o auxílio de uma régua de madeira, alguns alunos foram convidados a marcar pontos que fossem distantes 20 cm do ponto marcado inicialmente. Pouco a pouco, os alunos perceberam que os pontos marcados representaram uma forma circular. Neste momento foi definida a circunferência como Lugar Geométrico dos pontos que equidistam de um ponto dado.

Ao questionar se existiria algum ponto que possuísse a distância de 20 cm do ponto inicial e que não pertencesse a circunferência, todos concordaram que tal fato era impossível, pois se possível fosse, não teria a distância prevista. Na sequência, foram definidos também os elementos (centro, raio, diâmetro, corda e arco). Houve um cuidado na definição de corda e diâmetro, deixando claro que o diâmetro é também uma corda segundo as definições matemáticas descritas na Seção 1.2.1.

O tempo decorrido nestas atividades ficou dentro do previsto no plano de aula, que era 20 minutos. Neste momento, foi entregue (para cada aluno) um compasso, uma régua e o material de atividades, disponível no Apêndice A, e em seguida, procedeu-se com a explicação da utilização do compasso para o traçado de uma circunferência de raio 2 cm. A Figura 21 mostra a solução do exercício proposto, fora de escala.

Figura 21 – Solução do Exercício 01 do Plano de Aula A.



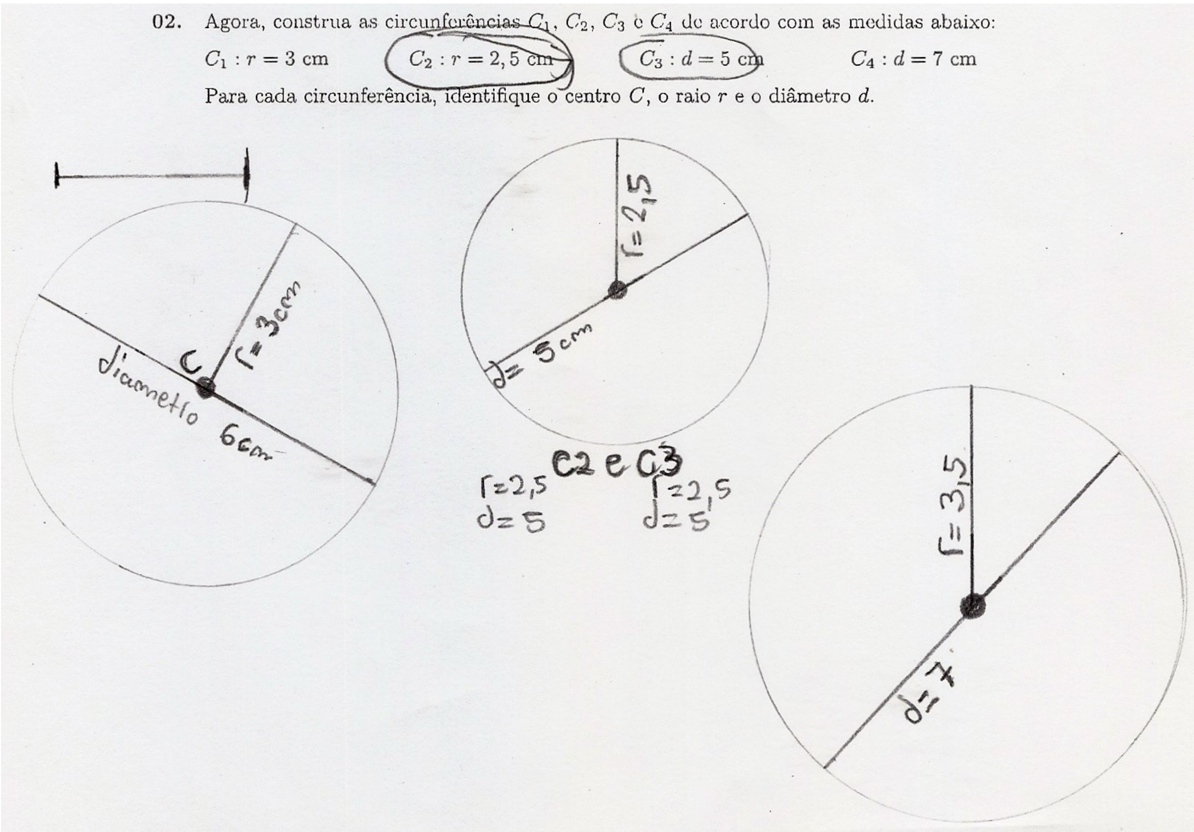
Fonte: aluno participante

Quando foram feitos os questionamentos da relação existente entre o raio e o diâmetro, todos alunos concordaram que o diâmetro equivalia ao dobro da medida do raio, e que para o exemplo construído, o diâmetro media 4 cm.

O acompanhamento desta etapa (citada no plano de aula como Etapa 3) foi realizado de forma individual conforme as dúvidas iam surgindo, entretanto, não foram necessários os 15 minutos previstos originalmente no planejamento. O tempo utilizado ficou na margem de 10 minutos, e os 5 minutos que sobraram, foram destinados a próxima etapa.

A construção das circunferências do Exercício 02 ocorreu de forma tranquila e dentro dos 15 minutos previstos, com atendimentos pontuais nas classes dos alunos que solicitavam ajuda. A Figura 22 mostra uma possível solução para o exercício, na qual a circunferência C_2 e C_3 representam a mesma circunferência, como indicado pelo aluno que o resolveu.

Figura 22 – Solução do Exercício 02 do Plano de Aula A.



Fonte: aluno participante

A etapa da construção artística foi feita em uma folha de papel A4 entregue a todos os alunos, que utilizaram além das ferramentas de desenho, lápis de cor, giz de cera e canetas coloridas. As composições foram montadas em tempo pré-definido e não excederam os 25 minutos.

Conforme acabavam a composição artística, os alunos foram orientados a resolver os exercícios de 03 a 06 do material do aluno, sem que consultassem as anotações feitas no caderno. O objetivo era verificar se o aluno de fato havia assimilado os conceitos explanados na aula.

Ao final da aula, foi realizada oralmente a correção coletiva dos exercícios. Os alunos foram orientados a não alterarem suas respostas, apenas compartilha-las, para que fosse possível realizar a análise das respostas de cada um posteriormente.

Salienta-se aqui que o tempo total da aula não excedeu os 100 minutos previstos no planejamento, e que a aula transcorreu sem maiores complicações, com alunos focados na atividade e persistentes na resolução. A Figura 23 mostra os alunos da turma resolvendo as atividades previstas.

Figura 23 – Alunos do 7º ano resolvendo as atividades da Aula A.

Fonte: próprio autor

4.1.2 Aplicação do Plano de Aula B

O segundo encontro ocorreu no dia 08 de novembro de 2018, quando foi aplicado o Plano de Aula B, e contou com a participação dos 21 alunos da turma. No início da aula os alunos foram conduzidos até o Laboratório de Robótica da Instituição, espaço amplo e equipado com computadores e tablets para realização das atividades.

No primeiro momento, os alunos foram divididos em grupos de quatro alunos. Como o número de alunos não era divisível por 4, um dos grupos foi formado por 5 integrantes.

Foi distribuído então para cada grupo:

a) Um Tablet, com acesso a internet;

b) Um Kit LEGO MINDSTORM EV3;

c) Uma calculadora;

d) Materiais do Aluno, disponíveis no Apêndice B, de acordo com a quantidade de alunos no grupo.

Na sequência foi feita a etapa de *Contextualização* da atividade por meio da leitura coletiva do texto disponibilizado no Material do Aluno, estabelecendo-se uma conversa construtiva a respeito do desenvolvimento da roda perante as gerações da história. A atividade ficou dentro do tempo previsto de 15 minutos, e a Figura 24 mostra os alunos concentrados na atividade.

Figura 24 – Alunos do 7º ano durante a Etapa de Contextualização.

Fonte: próprio autor

Para a etapa *Construir*, foi disponibilizado nos tablets o PDF contendo as instruções de montagem do robô proposto. A montagem aconteceu sem perturbações, com dúvidas pontuais que foram solucionadas na hora. A Figura 25 mostra um dos grupos montando o seu robô.

Figura 25 – Alunos montando o robô na Etapa Construir.

Fonte: próprio autor

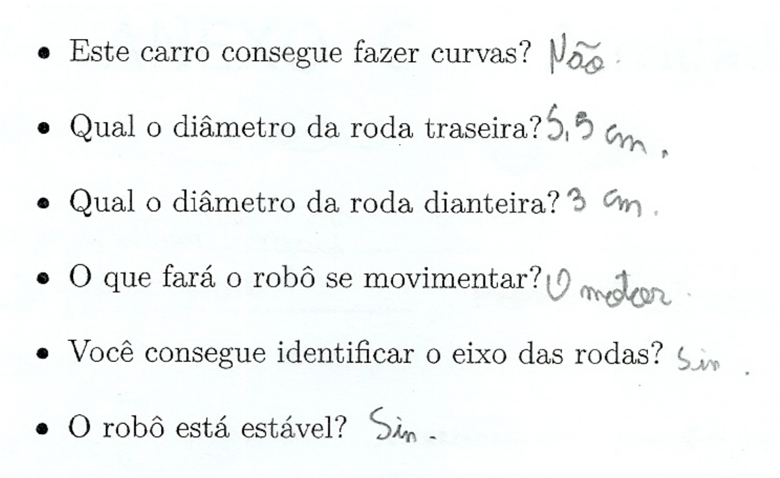
Conforme terminavam, os grupos eram orientados a responder os questionamentos do Material. Primeiro oralmente e discutindo as respostas, e em seguida, registrando-as no papel. Os alunos foram instruídos a debaterem cada uma das respostas no seu grupo, de forma que todos os integrantes participassem da construção das respostas.

Uma das possíveis soluções para as perguntas é representada pela Figura 26, elaborada por uma das integrantes de um dos grupos. A dificuldade encontrada aqui foi conseguir medir o diâmetro das rodas traseira e dianteira, porque neste laboratório não existem réguas e elas não formam fornecidas inicialmente. Ao constatar a falta do instrumento, as réguas foram providenciadas e o resto da atividade transcorreu normalmente.

Paralelamente a construção do robô, a pista de testes foi montada no chão do laboratório utilizando fita isolante. As marcações foram feitas aleatoriamente, sem medidas específicas.

Ao terminarem de responder as perguntas da etapa Construir, os alunos começaram a seguir o passo a passo da etapa Analisar, medindo com uma trena e anotando as distâncias das marcações na pista. Alguns grupos tiveram dificuldades no manuseio da trena, outros ficaram em dúvida no preenchimento do quadro. A Figura 27 mostra a pista pronta e os alunos fazendo as medições.

Figura 26 – Possíveis respostas para as perguntas da Etapa Construir.


- Este carro consegue fazer curvas? Não.
- Qual o diâmetro da roda traseira? 5,5 cm.
- Qual o diâmetro da roda dianteira? 3 cm.
- O que fará o robô se movimentar? O motor.
- Você consegue identificar o eixo das rodas? Sim.
- O robô está estável? Sim.

Fonte: aluno participante

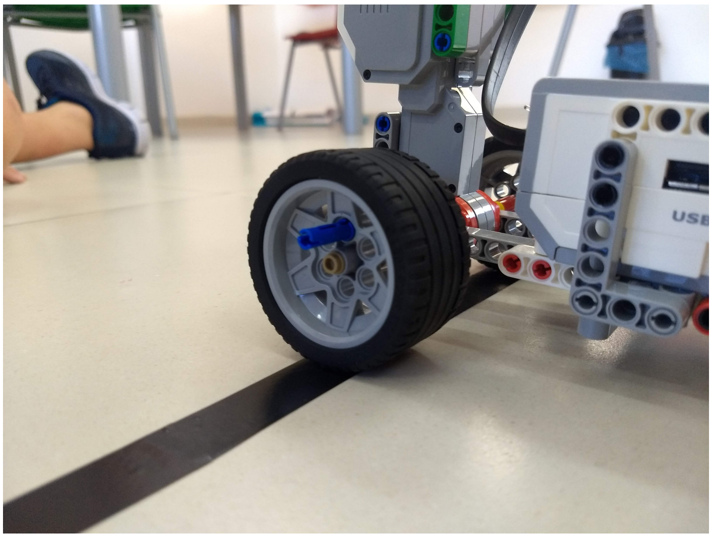
Figura 27 – Alunos medindo as marcações na pista pronta.

Fonte: próprio autor

Destaca-se aqui que um dos grupos questionou se as distâncias a serem medidas deveriam ser do início da pista até a marcação ou entre cada marcação. Após o esclarecimento das dúvidas, a aula prosseguiu com a programação, que em geral não apresentou problemas. Um dos grupos relatou que sua maleta não continha o cabo de transição de dados, mas um outro grupo ofereceu o seu uma vez que terminaram de programar.

O encaminhamento para o experimento na pista foi feito e iniciou então a fase de testes. Ao posicionar o robô com a roda traseira sobre a linha de marcação, um dos grupos percebeu a dificuldade de contar o número de rotações da roda. Neste momento, um aluno sugeriu que colocassem uma marcação na roda, conforme mostra o detalhe na Figura 28, ideia que foi replicada pelos demais grupos.

Figura 28 – Detalhe na roda, acrescentando um pino de marcação.



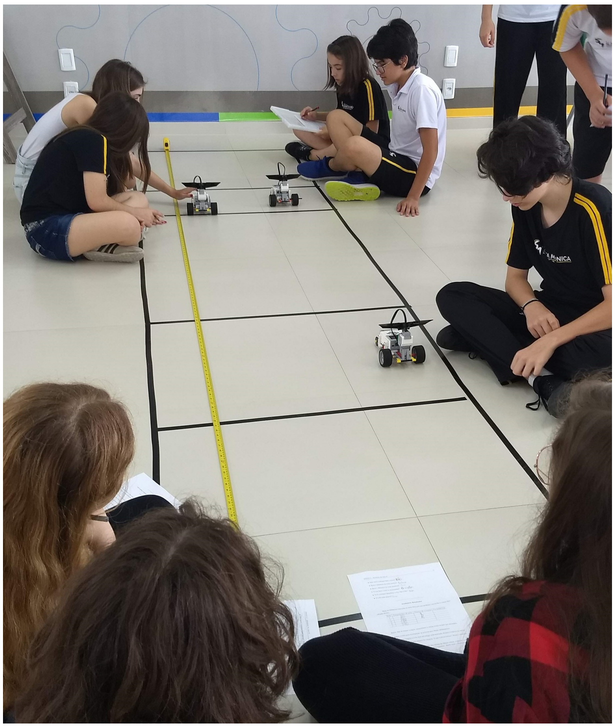
Fonte: próprio autor

Em relação ao tempo desta etapa, previa-se inicialmente 20 minutos, porém foram necessários 30 minutos.

Na sequência da aula, com o auxílio da calculadora, os alunos realizaram o preenchimento das demais colunas do Quadro presente no Material do Aluno. Neste momento os alunos foram orientados a utilizar o maior número de casas decimais possível. Com o fim da atividade, os grupos compartilharam seus resultados e começaram-se as discussões dos valores encontrados e das etapas da atividade, fato que não excedeu 15 minutos.

Após a formalização da relação $\pi = \dfrac{C}{d}$, houve a finalização da aula, retomando os conceitos abordados. O tempo total não excedeu os 100 minutos previstos no planejamento da aula, que, embora movimentada pela densidade de atividades, transcorreu sem maiores complicações. A Figura 29 mostra os alunos concentrados na resolução do experimento.

Figura 29 – Alunos realizando as atividades da Aula B.



Fonte: próprio autor

4.1.3 Aplicação do Plano de Aula C

Anteriormente a aplicação da Aula C, a pista foi adaptada com uma nova marcação, aqui denominada *marcação desafio*, escolhida em uma posição intermediária da pista original, conforme mostra a Figura 30.

Feito isto, a etapa *Continuar* da metodologia LEGO® para a atividade desenvolvida foi aplicada no dia 12 de novembro de 2018 para os mesmos 21 alunos das aulas anteriores. O Plano de Aula C, então, foi aplicado no Laboratório de Robótica da Instituição, local para o qual os alunos foram conduzidos no primeiro momento da aula.

No começo da atividade foram remontados os grupos da aula B e retomados alguns conceitos-chave para o início efetivo da aula, como os elementos e a definição da circunferência, além da relação entre π, C e d. Na sequência o desafio da aula foi exposto, bem como os tempos para que cada etapa fosse realizada. Deixou-se claro que as etapas seriam cronometradas para que o desafio ficasse mais intenso. A partir disto as equipes começaram as discussões internas.

As poucas dúvidas que surgiram durante esta parte da atividade questionavam sobre a possibilidade de se usar a trena para medir a distância da marcação desafio, fato que não foi explicado no início da aula.

Figura 30 – Pista adaptada com a marcação desafio, em linha vermelha.

Fonte: próprio autor

A resposta para a pergunta anterior limitava-se a dizer que se fosse necessário para a equipe utilizar a trena, não haveria problemas. De imediato as equipes passaram a usá-la para conseguir avançar no desafio, conforme mostra a Figura 31.

Figura 31 – Alunos utilizando a trena para resolver o desafio proposto na Aula C.

Fonte: próprio autor

Após as programações, que seguiram o modelo prévio desenvolvido e foram adaptadas com o número de rotações encontrado por cada equipe, procedeu-se a fase de testes na pista e o compartilhamento dos resultados dos experimentos.

Por fim, os alunos desmontaram os robôs e a aula foi finalizada, dentro do tempo previsto de 50 minutos.

É interessante ressaltar que a competição entre equipes estimulada nesta aula fez com que os grupos mantivessem seus tons de voz baixos, evitando que os demais grupos ouvissem suas ideias. Tal fato contribuiu para que a aula se mantivesse silenciosa o suficiente para a concentração das equipes.

4.1.4 Aplicação do Plano de Aula D

A última aula de intervenção foi realizada no dia 13 de novembro de 2018, dentro das dependências do Laboratório de Matemática da Instituição. Desta vez, contou a com participação de 20 alunos, que logo no início da aula foram divididos em grupos com quatro integrantes.

Após retomar as aulas anteriores (A, B e C), fazendo pequenos questionamentos orais sobre o conteúdo abordado, foi entregue a cada aluno uma cópia do material texto, disponível no Apêndice D. Além disto, foram entregues por grupo:

a) Três objetos circulares distintos;

b) Um pedaço de barbante de aproximadamente 1,50 metros;

c) Uma régua;

d) Uma calculadora.

Na sequência foi explicado como seria realizado o exercício prático número 01 do material do aluno, seguindo as instruções do próprio material. Quando foi comentado que eles mediriam o comprimento da circunferência do objeto e dividiriam pelo diâmetro do mesmo objeto, um aluno comentou que o resultado deveria ser π, por causa da relação estudada nas Aulas B e C, de que $\pi = \dfrac{C}{d}$.

Aproveitou-se esse momento para enfatizar o objetivo da atividade, relacionando o que foi executado na roda do robô da aula B com o que seria realizado nos objetos circulares. Entrou em pauta então a discussão sobre a precisão das medições, que deveriam ser as maiores possíveis para resultados mais próximos de π. Dessa forma foi feito um desafio para que os alunos tentassem manter a precisão, de forma a descobrir qual equipe de alunos conseguiria obter o valor mais próximo a $\pi = 3,1415\ldots$.

As equipes mantiveram-se concentradas na atividade, que aconteceu sem maiores problemas, porém uma das equipes relatou a dificuldade em medir o comprimento do diâmetro da esfera. Outras duas equipes comentaram ser difícil manter a precisão com a régua de 30 cm sendo que o comprimento do barbante no contorno do objeto possuía valor maior que 30 cm. Os problemas pontuais foram resolvidos no próprio grupo, e a atividade foi finalizada com 20 minutos – dentro dos 25 minutos propostos no planejamento.

Após o compartilhamento dos resultados, foram feitos alguns comentários sobre a precisão obtida, e então foi redefinida a relação $\pi = \dfrac{C}{d}$ como $C = 2\pi r$ como forma alternativa a se obter o comprimento da circunferência.

Ao dar continuidade as etapas da aula, ocorreu uma conversa sobre como o π se desenvolveu através da história, relacionando-a com os diferentes matemáticos que conseguiram estimar seus dígitos, conforme descrito na Seção 1.2.2. A conversa, juntamente com a definição da relação $C = 2\pi r$, excederam em 10 minutos o tempo previsto.

Posteriormente, os alunos foram orientados a resolver os exercícios de 02 a 07 do material, individualmente, embora ainda estivessem na formação de grupos. As dúvidas pontuais foram esclarecidas não só no atendimento individual nas classes, mas também durante a correção coletiva das atividades no quadro. Devido as ponderações de tempo das etapas anteriores, a correção iniciou-se 5 minutos mais cedo para não prejudicar o fechamento da aula.

Embora os alunos tenham ficado agitados ao manusear os objetos na atividade 01, a aula ocorreu sem perturbações ainda que com adaptações no tempo planejado. O tempo total da aula não excedeu os 100 minutos planejados.

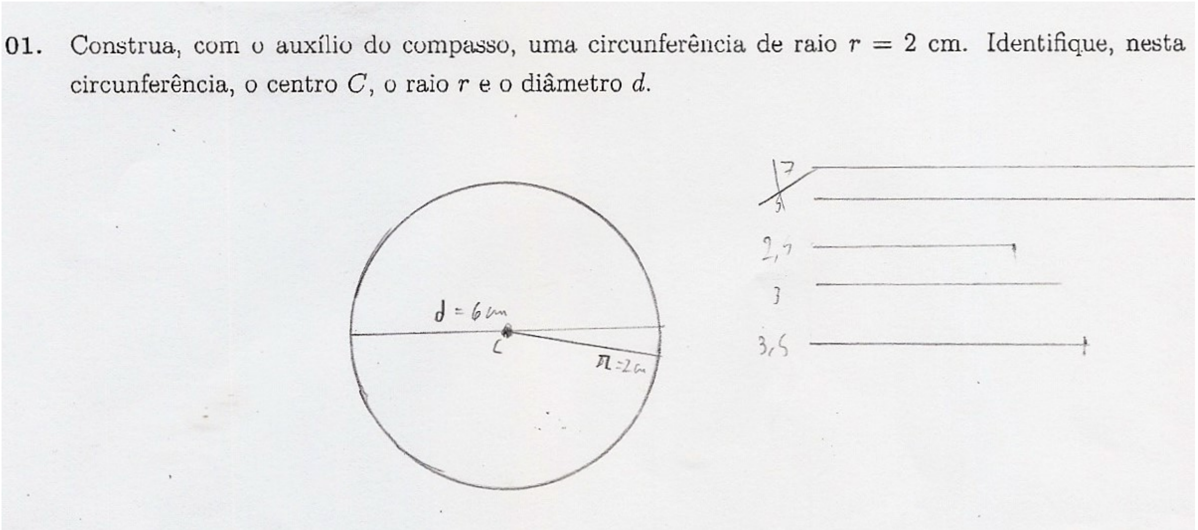
4.2 Resultados e Análises

Descritos os procedimentos realizados nas aulas de A até D, são expostos aqui os resultados, bem como as análises de cada atividade.

No exercício número 01 do material do aluno fornecido na Aula A, a construção da circunferência pedida foi de fácil execução, não gerando muita dificuldade aos alunos. Embora todos alunos tenham concordado que o diâmetro da circunferência em questão era 4 cm, conforme descrito no relato da atividade, um aluno equivocou-se na representação desta medida no desenho, como mostra a Figura 32. Deve-se perceber que sua construção foi realizada com as medidas certas. A confusão, provavelmente, deve-se a falta de atenção na hora do registro.

Em relação ao processo de construção, alguns alunos relataram dificuldade no manuseio do compasso, e preferiram girar a folha de papel ao invés de girar o compasso. Ainda que dessa forma, o traçado ficou correto.

Figura 32 – Equívoco ao registrar o diâmetro no Exercício 01 do Plano de Aula A.



Fonte: aluno participante

A prática no manuseio veio com a realização do exercício 02, na qual tiveram que construir outras quatro circunferências. O espaço fornecido nesta atividade para construção não foi suficiente para que os alunos representassem as quatro circunferências, então os alunos foram instruídos a utilizar o verso quando necessário. Uma das dificuldades percebidas durante a execução foi escolher um lugar na folha para o centro da circunferência de modo que, ao traçá-la, nenhuma ficasse sobreposta a outra.

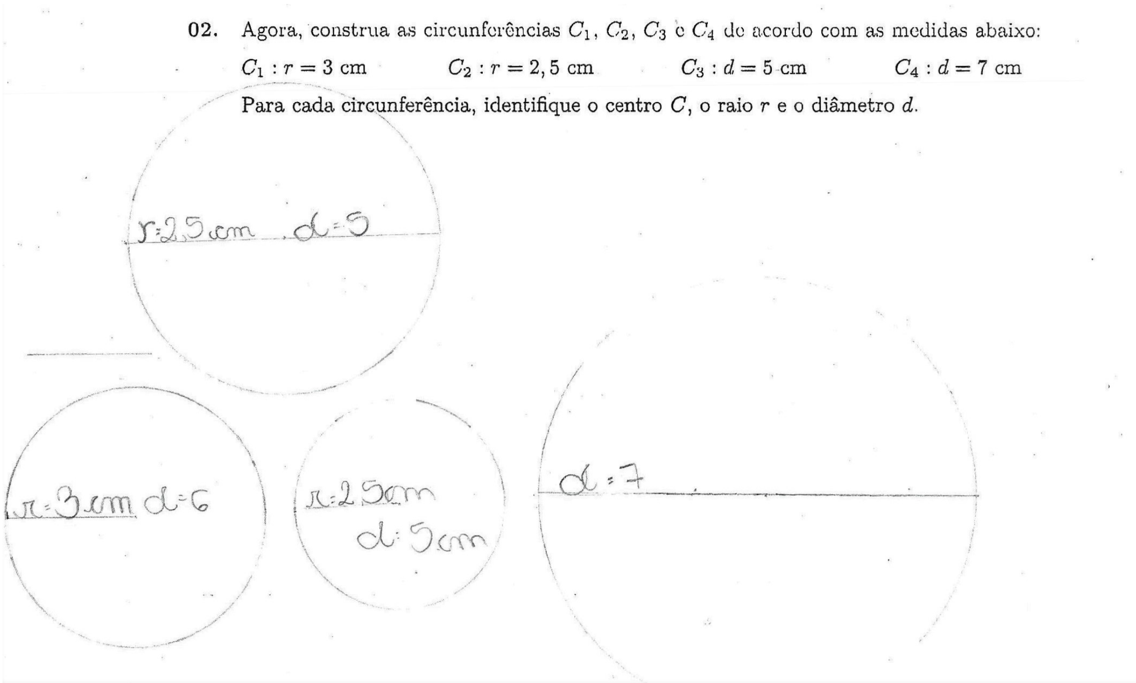
Em relação ao traçado, sete alunos desenharam equivocadamente a circunferência C_3, representando-a por uma circunferência de raio 5 cm e diâmetro 10 cm. Tal fato pode ser justificado pela forma como o exercício foi apresentado: nos dois primeiros é fornecida a medida do raio (igual feito no exercício 01), porém os dois últimos fornecem a medida do diâmetro. Acredita-se que os alunos não tenham percebido que a informação "5 cm" tratava-se do diâmetro e não mais do raio, gerando uma circunferência de raio equivalente ao diâmetro procurado.

O mesmo erro não foi cometido na circunferência C_4: nenhum dos alunos errou o traçado. A justificativa provável é que neste momento os alunos perceberam o erro da questão anterior pois, além de desenharem C_4 corretamente, cinco alunos redesenharam C_3 de forma correta.

Em relação a indicação dos elementos, todos os alunos a fizeram de forma correta. Ressalta-se que grande parte dos alunos (9 alunos) não identificaram, em pelo menos uma delas, o centro da circunferência.

Um aluno em específico apresentou domínio do compasso para construção, porém não utilizou as medidas certas na abertura do compasso, resultando em circunferências com as medidas diferentes das solicitadas. Percebe-se na solução do aluno, mostrada na Figura 33, que o aluno indica as medidas certas, porém seus traçados são inconsistentes visualmente, onde uma circunferência de raio $2,5$ cm é maior que uma de raio 3 cm.

Figura 33 – Solução inconsistente para o exercício 02 da Aula A



Fonte: aluno participante

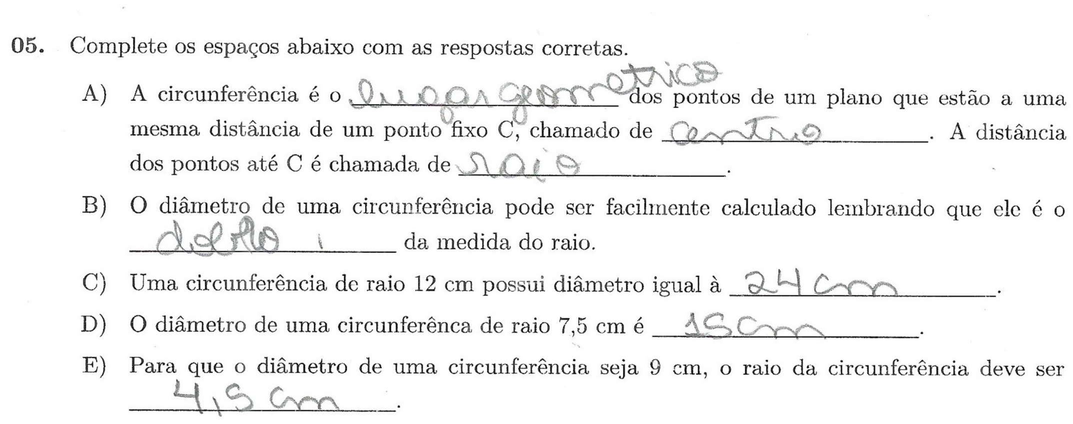
No exercício 03 da mesma aula, destaca-se o conceito de corda definido pelos alunos: para 8 alunos, *corda* é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência e que não passa pelo centro. *Diâmetro*, por sua vez, é o segmento de reta que passa pelo centro. Parafraseando o que foi definido pelos oito alunos, pode-se dizer que "um segmento de reta que une dois pontos da circunferência e que contém o centro dela, não pode ser uma corda". Tal definição contraria a definição matemática, exposta neste trabalho e explicada na sala de aula.

Fazendo uma análise deste resultado, pode-se perceber que estes oito alunos se preocuparam em deixar claro que uma corda é um segmento de reta, e que une dois pontos da circunferência (ambas afirmações estão corretas). Contudo, ao afirmar com exatidão que uma corda não pode conter o ponto central da circunferência, confundem-se com a definição de diâmetro, imaginando que um segmento ser classificado como tal impede sua classificação como corda.

Nas definições de centro, um aluno definiu com precisão que "centro é o ponto em que a distância é a mesma para todos os lados". Outro escreveu que "é o ponto que tem a mesma distância a qualquer parte da circunferência." Os demais, relacionaram o centro como sendo o "meio da circunferência". Em relação ao exercício número 04, destaca-se o aproveitamento de 100% dos alunos, indicando que a representação geométrica dos elementos foi dominada.

Ao analisar o exercício 05, a maioria dos alunos (16 alunos) não conseguiu recordar que a circunferência é um Lugar Geométrico. Apenas quatro citaram a palavra corretamente e um usou a palavra *conjunto* para definição, mostrando entendimento do conceito de Lugar Geométrico, como é possível observar na Figura 34, que representa uma solução ideal para o exercício.

Figura 34 – Solução para o exercício 05 da Aula A



05. Complete os espaços abaixo com as respostas corretas.

A) A circunferência é o lugar geometrico dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo C, chamado de centro. A distância dos pontos até C é chamada de raio.

B) O diâmetro de uma circunferência pode ser facilmente calculado lembrando que ele é o dobro da medida do raio.

C) Uma circunferência de raio 12 cm possui diâmetro igual à 24 cm.

D) O diâmetro de uma circunferênca de raio 7,5 cm é 15 cm.

E) Para que o diâmetro de uma circunferência seja 9 cm, o raio da circunferência deve ser 4,5 cm.

Fonte: aluno participante

O resultado mostra que, embora dominassem a técnica de construção e as definições dos elementos, a maioria dos alunos não conseguiu absorver a definição formal de circunferência. Durante a correção oral do exercício, os alunos foram questionados do porquê desta dificuldade. Segundo os próprios alunos, muitos estão acostumados a apenas repetir cálculos para resolver exercícios, deixando de lado o próprio conceito do que se está estudando, uma vez que as avaliações não exigem domínio conceitual, mas sim a técnica para solução de exercícios.

Destaca-se aqui que o relato acima deve ser visto como um potencial obstáculo na aplicabilidade da nova BNCC para a área da matemática. O novo documento, conforme descrito na Seção 2.1.1, passou a priorizar a busca pelo letramento matemático, que envolve não só o domínio da técnica de resolução, mas também o domínio conceitual. Percebe-se então que o profissional deverá dar ênfase em sala aos conceitos e demonstrações, e o aluno, assumir o perfil de investigador destes conceitos, para de fato, possuir o letramento desejado.

Alinhado ao exposto anteriormente, destaca-se a alta receptividade dos alunos com as atividades que envolveram o uso do compasso, indicando que a matemática prática possui uma grande aceitação, uma vez que foge do formato tradicional de apenas serem resolvidos exercícios, com o professor ensinando e o aluno, repetindo. Como resultado imediato, na etapa de construção de composições apenas com circunferências e círculos, os alunos mostraram suas habilidades não só matemáticas como também artísticas, gerando interdisciplinaridade entre unidades temáticas. A Figura 35 mostra duas das composições criadas por alunos da atividade.

Figura 35 – Composições artísticas criadas por alunos participantes.

(a) (b)

Fonte: alunos participantes

Outra atividade interdisciplinar desenvolvida foi a Etapa Contextualizar da Aula B. Ao expor a história da roda, a concentração dos alunos aos fatos e a participação ativa na discussão sobre o assunto mostra a necessidade de abordar a matemática ligada às diferentes situações do aluno. Questionamentos que partiam dos próprios aprendizes, sobre como seria a dificuldade de se transportar objetos antes do desenvolvimento da roda ou sobre quão difícil é imaginar uma sociedade sem a roda, foram norteando a conversa construtiva, até a discussão sobre a importância dos elementos circulares (como engrenagens, discos, aros) no cotidiano dos alunos.

A discussão introduziu o objetivo da aula em questão, que procedeu com a construção do robô. Na Etapa Construir o contato inicial com a tecnologia, utilizando os tablets para acessar o passo a passo da construção, possibilitou o dinamismo da execução, uma vez que permitiu a execução desta etapa de forma rápida e prática. Caso o aluno errasse, poderia retornar e observar o passo novamente.

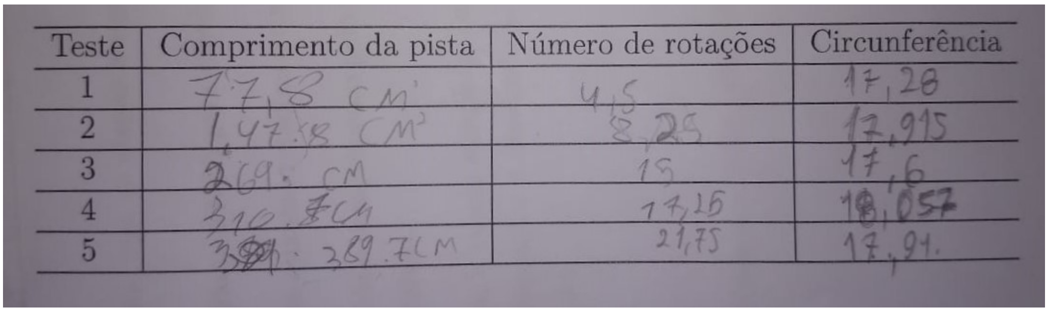
Os alunos não tiveram dificuldade em realizar a etapa construtiva. A escola onde aconteceu a aplicação introduziu a robótica LEGO no início do ano letivo, fazendo com que os alunos já estivessem habituados a manusear os elementos do kit, bem como montar a programação modelo disponibilizada no material. Contudo, a facilidade encontrada na construção não foi repetida na Etapa Analisar. Durante esta etapa, dificuldades foram enfrentadas.

Dois dos cinco grupos montados tiveram problemas no manuseio da trena. Outro grupo, se deveria anotar as medidas acumuladas ou relativas. Entretanto, a dúvida mais comum foi o preenchimento do quadro da atividade. O fato se justifica na ansiedade das equipes, que queriam começar a prática na pista sem antes ler o que o próprio material instruía. Depois de se organizarem, o desenvolvimento fluiu com mais facilidade.

Uma das equipes ficou em dúvida no processo de medição dos comprimentos da pista. A dúvida pautava-se na posição para leitura da trena, quando encontrassem a medida marcada na pista. Em outras palavras, como a fita isolante possui uma largura de 1 cm, os estudantes queriam saber se eles anotavam a distância no início, no meio ou no final da fita de marcação. Sem que o professor decidisse, a equipe priorizou anotar sempre o valor central.

Esta precisão na leitura das marcações da pista levou os grupos a encontrarem diferentes distâncias, entretanto, as diferenças não superaram a amplitude de 2 cm. Um exemplo preenchido por um dos grupos está detalhado na Figura 36 abaixo.

Figura 36 – Preenchimento do Quadro de atividades na Etapa Analisar da Aula B



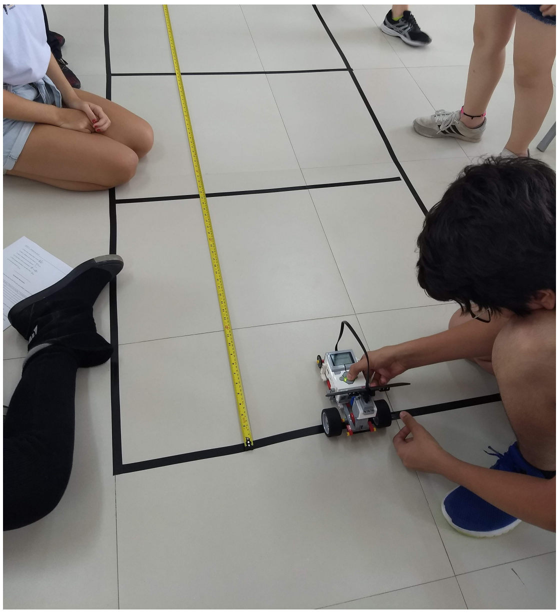
Teste	Comprimento da pista	Número de rotações	Circunferência
1	77,8 CM	4,5	17,28
2	1,47.58 CM	8,25	17,915
3	269. CM	15	17,6
4	310.7CM	17,25	18,057
5	~~389~~ 389.7CM	21,75	17,91.

Fonte: alunos participantes

A contagem do número de rotações foi diferente para cada equipe. Umas contavam a rotação quando o pino de identificação alcançava a parte superior. Outras, contavam na parte inferior. As diferenças encontradas nos registros dos alunos não excedem em 1 rotação, o que indica a contagem correta aproximada de todas as equipes. A Figura 37 mostra um aluno posicionando o robô da equipe para início dos testes.

Embora a instrução fosse utilizar o maior número de casa decimais no preenchimento da última coluna do Quadro, apenas uma equipe utilizou mais de cinco casas decimais. As demais, registraram os valores com duas, três ou quatro casas de precisão. A média dos comprimentos de circunferência encontrados ficaram entre $17,7529$ e $18,452$. Ao dividirem o comprimento médio pelo diâmetro, os resultados encontrados estavam entre $3,22$ e $3,606072$.

Figura 37 – Aluno posicionando o robô para início dos testes na Aula B



Fonte: próprio autor

Considera-se que os resultados foram satisfatórios, uma vez que figuram próximos aos valores de π. Assim, foi feita a explicação da relação entre π, o comprimento C e o diâmetro d da circunferência. Os alunos, então, mostraram-se interessados na relação. Alguns, inclusive, comentaram que já conheciam o número, porém não sabiam seu significado. Foi nesse momento que o professor pediu a turma para refletirem o porquê do resultado do grupo não ter sido exatamente o valor de π. Assim, deu-se continuidade na discussão, porém agora focada na precisão das medições.

Esperava-se que a equipe que obtivesse o maior valor aproximado para π fosse a equipe que encontrasse o maior valor de comprimento médio de circunferência, sendo justificado pelas imprecisões nas medições da pista (ou do número de rotações, ou do comprimento das marcações). Contudo, isto não ocorreu. Ao analisar os dados dos alunos, percebeu-se que a diferença maior estava na medida do diâmetro da roda respondida na Etapa Construir. Duas equipes colocaram que o diâmetro era 5 cm, duas que o diâmetro era $5,5$ cm e uma, $5,1$ cm. Esta diferença, embora pequena, interfere significativamente no quociente final da atividade.

A contar, salienta-se que a medida correta do diâmetro é $5,6$ cm. Se os cálculos das equipes tivessem considerado o diâmetro correto da roda, encontrariam-se resultados entre $3,17$ e $3,28$, uma precisão muito mais alta. Ainda assim, pode-se considerar que o objetivo da aula foi alcançado.

Na Aula C, durante a execução do desafio proposto, as equipes mostraram-se ativamente participativas com a aula. Os alunos, por meio da competição saudável, buscaram obter ao máximo a precisão não encontrada na aula anterior para resolver o desafio. O sigilo no compartilhamento das informações entre os próprios integrantes do grupo é um exemplo disto. Nesta aula os alunos dominavam a técnica necessária nas medições da pista e tentavam, a partir da relação $\pi = \dfrac{C}{d}$ encontrar o número de rotações esperado.

A parte mais emocionante da aula ficou evidenciada na hora dos testes. Como era permitido apenas um teste por equipe, o momento era de apreensão para descobrir se os cálculos de cada um estavam corretos. Surpreendentemente para todos, duas equipes conseguiram a exatidão no resultado, conforme mostra a Figura 38. As demais equipes ficaram próximas, porém não obtiveram a precisão requisitada. Assim, foi declarado empate entre as duas mais precisas e, desta forma, foi atingido o objetivo esperado.

Figura 38 – Resultado do desafio proposto na Aula C

Fonte: próprio autor

Na Aula D, o resultado de um dos grupos para as razões entre o comprimento da circunferência dos objetos e o seu diâmetro, proposta pelo exercício 01 do material do aluno, é detalhado na Figura 39. Conforme é possível observar, a equipe encontrou para essa razão valores entre $3,18$ e $3,55$. As demais equipes mantiveram o mesmo padrão: dentre todos os resultados, o menor valor encontrado para a relação foi $3,14184397\ldots$ e o maior valor, $4,89$. O resultado em questão é de fato esperado, uma vez que o objetivo da atividade é que a razão resulte, conforme o embasamento matemático, em um valor próximo ao número π.

Figura 39 – Valores encontrados por uma das equipes no preenchimento da atividade da aula D

Objeto	Comprimento (C) da Circunferência	Diâmetro (d)	$\frac{C}{d}$
Bola	8,5	2,4	3,541666...
Hemisfério	48,5	15,2	3,19078947...
Perfume	42,4	13,3	3,18796992...

Fonte: aluno participante

Pode-se perceber que os resultados encontrados pelos grupos figuram muito próximos da margem de erro de 4 décimos prevista pelo plano de aula. Tal fato pode ser justificado pela atenção especial dada na descrição da atividade para a importância da precisão das medidas. Esta mesma precisão levou um dos grupos a obter o valor $\pi = 3,14184397\ldots$ que é correto até a terceira casa decimal. Isto mostra que o fato da régua utilizada ser de 30 cm não atrapalhou a obtenção do resultado desejado na atividade.

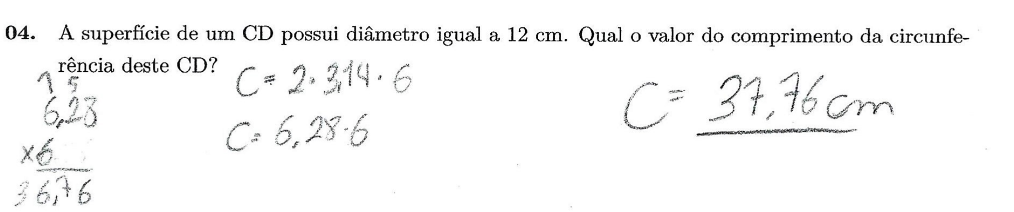
É interessante notar que nenhum dos resultados obtidos gerou valores menores que π. Além disso, o maior valor encontrado ($\pi = 4,89$) foi obtido na relação calculada para a esfera fornecida a um dos grupos. A imprecisão deste fato é justificada pela dificuldade relatada pelos integrantes ao medir o diâmetro da circunferência da esfera. Quando os resultados de cada grupo foram compartilhados oralmente ficou evidente a diferença deste resultado, uma vez que foi o único valor acima de 4. Os alunos então, intrigados com o erro, buscaram medir novamente as informações, corrigindo o valor para $3,1753246\ldots$.

Na continuidade da Aula D, os exercícios 02 e 03 tiveram 100% de aproveitamento. Tratavam-se de questões diretas, que não exigiam interpretação aprofundada, mas apenas aplicação da relação básica entre diâmetro e raio. Na resolução do exercício 04, o aproveitamento foi bem próximo aos dois exercícios anteriores. Neste, duas alunas equivocaram-se na realização das multiplicações, conforme mostra a Figura 40. Deve-se notar que ambas mostraram domínio da relação $C = 2\pi r$, porém não encontraram o resultado esperado apenas por um erro de cálculo.

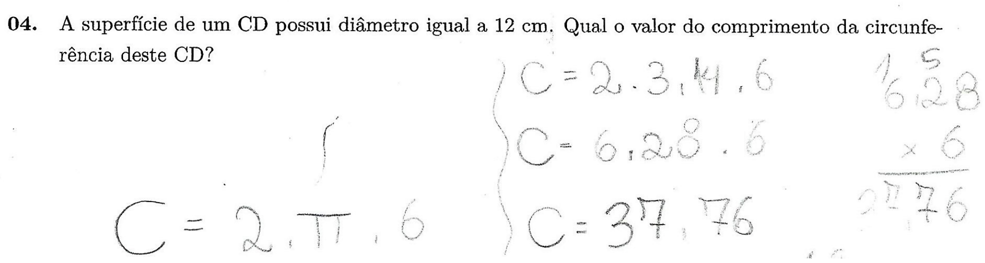
A utilização da relação $C = 2\pi r$ muitas vezes não aparece de forma explícita na solução dos alunos. Em alguns casos, suas resoluções sequer montam uma equação para resolver o exercício, como mostra a Figura 41. Basta uma análise mais detalhada para que se perceba que a estrutura do raciocínio deste aluno segue a relação $C = 2\pi r$, uma vez que o aluno realizou primeiramente o cálculo $2 \cdot r$ e, com o resultado, determinou o produto com π. Este tipo de raciocínio é justamente o que a BNCC prevê dentro dos seus objetivos: que os alunos articulem suas próprias soluções utilizando o pensamento algébrico como linha de raciocínio, e não necessariamente manipulando símbolos.

Figura 40 – Erro de multiplicação da participante no exercício 04 da Aula D

(a)

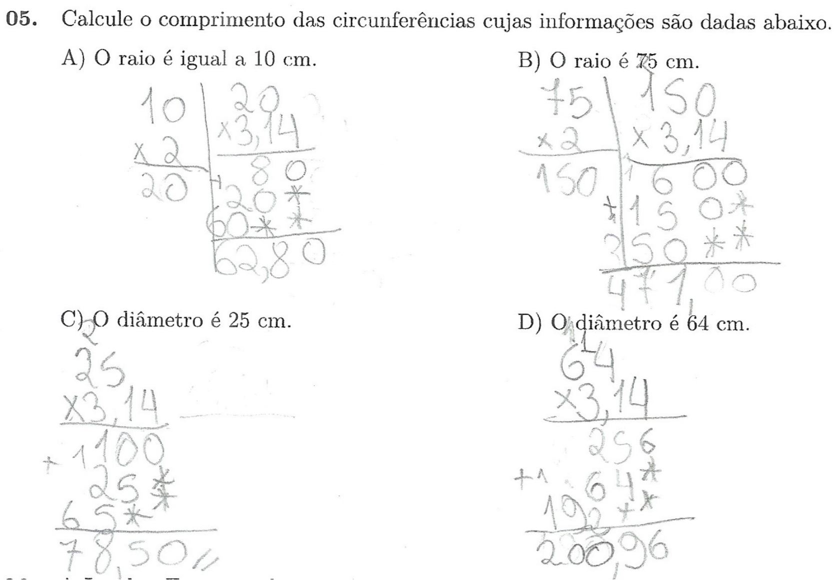


(b)



Fonte: alunos participantes

Figura 41 – Articulação do raciocínio de um participante no exercício 05 - Aula D



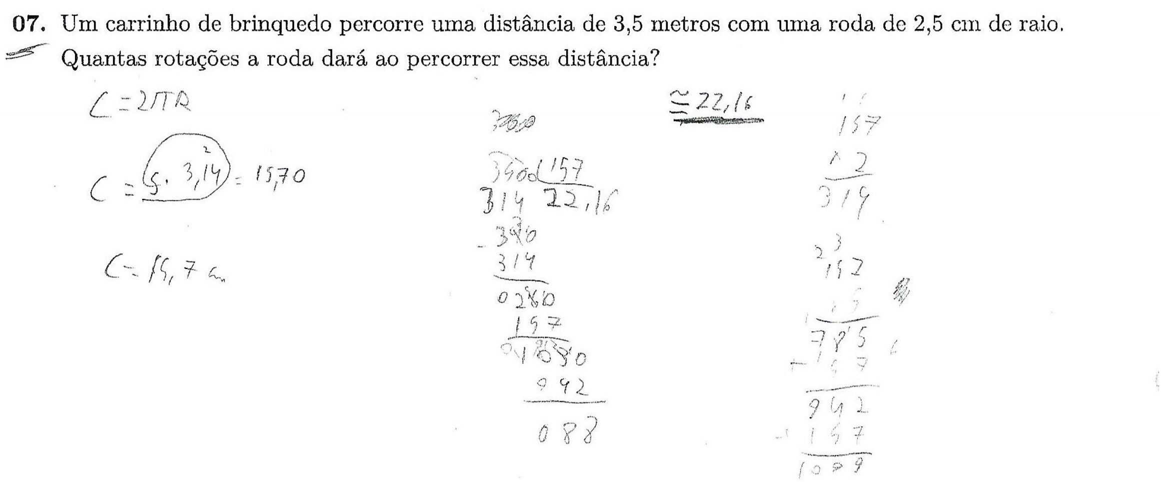
Fonte: aluno participante

Quatro alunos deixaram de realizar os exercícios 06 e 07. Durante a correção coletiva foi dada uma atenção maior a eles, explicando o exercício oralmente. Após a explicação, os alunos (integrantes do mesmo grupo) relataram que sentiram dificuldade na interpretação destes problemas, mas após a explicação oral, conseguiram entender facilmente o que deveria ser realizado.

Tal situação emite ao professor um alerta à respeito das possíveis defasagens de seus alunos: muitas vezes, o aluno pode dominar a técnica de resolução de problemas, mas não é capaz de interpretar os dados da situação para conseguir resolvê-lo, mesmo que o problema relacione questões não tão distantes à realidade do aluno. É o caso, por exemplo, do exercício 07: a situação descrita pelo exercício é semelhante a atividade prática desenvolvida nas Aulas B e C, nas quais os alunos obtiveram êxito. Contudo, quando a situação aparece na forma de problema, existe ainda uma lacuna entre o desejável e o perceptível.

Para registro, 10 alunos acertaram a questão, 5 apenas calcularam o comprimento da circunferência da roda, um equivocou-se na conversão entre metros e centímetros (medidas da pista), somado aos quatro alunos que não solucionaram a atividade. A Figura 42 mostra uma solução desejada para o exercício 07.

Figura 42 – Articulação do raciocínio de um participante no exercício 07 - Aula D



Fonte: aluno participante

Em relação à inserção da história do π na aula, destaca-se o resultado principal notado pelo professor: o interesse coletivo dos alunos quanto às descobertas feitas pelos antigos matemáticos em épocas em que a tecnologia digital não existia. Não à toa, excedeu-se em 10 minutos o tempo previsto nesta conversa. Perguntas do tipo "[...] como que conseguiram perceber isso (referindo-se à relação de π com a circunferência e o diâmetro)?" ou "Mas para que tantas casas decimais?" foram conduzindo o debate.

Da mediação, destaca-se que ao comentar em sala sobre o procedimento proposto por Arquimedes para obter o valor aproximado de π, um aluno comparou o resultado do matemático com os resultados encontrados pelo grupo na atividade 01 e constatou que eles, mesmo com a calculadora e com a régua, ficaram fora do intervalo proposto por Arquimedes. Acredita-se que mostrar para o aluno que os conceitos matemáticos não são obtidos de estudos rápidos, mas sim com longos anos de estudo, colaboração, erros e acertos, contribua com a desmistificação de que a matemática é intangível, uma vez que é construída de forma colaborativa.

5 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentada uma proposta de utilização da Robótica Educacional como ferramenta de ensino para o estudo do número irracional π. O tema do trabalho foi escolhido baseado na necessidade de se transformar o ambiente de aprendizagem em um lugar atrativo para o aluno, inserindo a tecnologia como principal objeto de ensino.

Pautada no que descreve a BNCC, foram desenvolvidos quatro planos de aulas sequenciais e aplicados à uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental da rede privada. Os planos de aula buscaram o protagonismo do aluno, levando-o a assumir papel de investigador de conceitos e habilidades matemáticas essenciais para que possua o letramento matemático necessário e exigido pelas novas diretrizes básicas da educação.

O estudo realizado, necessário para fundamentar e elaborar as atividades, foi de grande importância para que os objetivos do trabalho fossem traçados. Uma vez alinhados aos novos parâmetros nacionais e embasados ao vivenciado atualmente no ensino da matemática, permitiram a reflexão sobre as novas tendências educacionais e suas potencialidades, bem como a reflexão do papel do professor em relação ao papel do aluno.

Quanto à aplicação das atividades, destaca-se a postura dos alunos perante a realização das tarefas. A concentração, o empenho e o comprometimento observado indica a alta receptividade da inserção da tecnologia e da robótica na aula de matemática. Indo mais adiante, o simples uso do compasso, por vezes ignorado em sala de aula, foi de grande importância para deixar a aula mais atrativa.

Embora nem todos os estudantes tenham atingido os resultados esperados na realização dos exercícios, considera-se que o trabalho tenha atingido um aproveitamento satisfatório quanto as atividades elaboradas, uma vez que o objetivo do trabalho não se limitava a finalização correta do exercício, mas também ao desenvolvimento do raciocínio lógico e do trabalho em equipe.

A troca de ideias e opiniões, estimulada durante a inserção de elementos históricos durante as aulas e durante a realização das atividades práticas, levou a transformação do ambiente de aprendizado em um ambiente de compartilhamento de conhecimento. A cooperação e o trabalho coletivo deixaram a aula dinâmica e desafiadora, que por meio de uma competição amigável, estimulou a aplicação dos conceitos estudados de forma simples e prática.

No que se refere aos conceitos abordados em aula, chama atenção o fato dos alunos conseguirem dominar a técnica de resolução de exercícios mas não conseguirem dominar o conceito matemático básico que o exercício abrange. Este domínio pode ser um potencial obstáculo na aplicabilidade da BNCC, uma vez que é comum em uma avaliação deixar-se de lado a cobrança do conceito e priorizar a técnica. As novas exigências da BNCC demandarão dos professores uma ênfase maior para as demonstrações e conceitos, e dos alunos, o perfil de investigadores destes mesmos conceitos.

Como continuidade do trabalho propõe-se, de forma semelhante ao feito para o número π e utilizando o mesmo robô desenvolvido, o estudo do número ϕ e da *razão dourada* devido a sua vasta aplicabilidade na matemática, além do poder interdisciplinar que possui, uma vez que pode ser relacionado com a arte (obras artísticas), com a história (construções antigas) e com as ciências da natureza (em plantas ou conchas, por exemplo).

Outro possível desdobramento é sugerir adaptações à estrutura do robô, adicionando sensores ou outros componentes que deixem a montagem mais complexa. Para esta situação, o foco das aulas pode incluir a programação como forma complementar de desenvolvimento do raciocínio lógico.

Espera-se ainda que as atividades propostas neste trabalho tornem as aulas de matemática mais dinâmicas, e que sirvam de incentivo a outros profissionais da área para que desenvolvam novas práticas docentes baseadas na utilização da Robótica Educacional. Espera-se também que os alunos participantes das atividades sintam-se motivados a buscarem o conhecimento matemático por meio de experiências significativas que fujam do ambiente da sala de aula, levando a matemática à sua forma mais simples: uma ciência viva.

Referências

BORTOLETTO, A. R. S. *Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de Matemática do ensino fundamental.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Metodista de Piracicaba, 2008. Citado na página 38.

BRASIL. *A Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, 2018. Sítio Ministério da Educação. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 05.12.2018. Citado 3 vezes nas páginas 47, 48 e 49.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. d. O. Matemática discreta. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

CYSNEIROS, P. G. *Resenha Crítica - A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática*. Porto Alegre: Revista Brasileira de Informática na Educação, 1999. Citado na página 57.

DAHER, Á.; MORAIS, G. d. Os desafios da aprendizagem em matemática. *Monografia (graduação)–Unilavras*, 2007. Citado na página 46.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp*, p. 97–115, 1999. Citado na página 47.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. 23. ed. Campinas, SP: Papirus Editora, 2012. Citado na página 46.

ESCOLA, N. *Mudanças ressaltam a importancia do componente para a vida em sociedade*. Nova Escola, 2018. Sítio Nova Escola. Disponível em: <https://novaescola.org.br/bncc/disciplina/9/matematica>. Acesso em: 05.12.2018. Citado na página 50.

FIGUEIREDO, D. G. d. *Números irracionais e transcendentes*. 3. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 16, 28, 31, 34, 41, 42 e 43.

FISCHER. *History: Grupo FISCHER*. FISCHER Group, 2018. Sítio FISCHER Group. Disponível em: <https://www.fischertechnik.de/en/about-us/history>. Acesso em: 15.10.2018. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.

FORNAZA, R.; WEBBER, C. G.; VILLAS-BOAS, V. Kits educacionais de robótica: opções para o ensino de ciências. *Scientia cum Industria*, v. 3, n. 3, p. 142–147, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 56.

LEGO, G. *A História do Grupo LEGO*. LEGO Group, 2018. Sítio LEGO Official. Disponível em: <https://www.lego.com/pt-br/aboutus/lego-group/the_lego_history>. Acesso em: 13.10.2018. Citado 6 vezes nas páginas 56, 57, 59, 60, 61 e 62.

LIMA, E. L. Números e funções reais. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017. v. 1. Citado na página 16.

MICOTTI, M. C. d. O. O ensino e as propostas pedagógicas. *Ln: BICUDO, Maria Aparecida*, 1999. Citado na página 47.

MODELIX, S. *Modelix Robotics*. Modelix System, 2018. Sítio Modelix robotics. Disponível em: <https://www.modelix.com.br/>. Acesso em: 15.10.2018. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

OLIVEIRA, J. M. d. *A Irracionalidade e Transcendência do Número Pi*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Brasil., 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.

PEREIRA, R. C. B.; PEREIRA, R. de O.; CARRÃO, E. V. M. A informática educativa: Professor, aluno e os problemas escolares no ensino-aprendizagem. 2004. Citado na página 50.

PERES, G. R. O número pi. *Monografia (graduação)–Universidade Federal de Santa Catarina*, 2003. Citado na página 39.

PONTE, J. P. d.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*, Mercado de Letras Campinas, p. 159–192, 2003. Citado na página 50.

POSITIVO, E. *Livro Didático do sétimo ano do Ensino Fundamental*. Curitiba: Editora Positivo, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.

ROBOKIT. *Conheça o ROBOKIT*. ROBOKIT Online, 2008. Sítio ROBOKIT OnLine. Disponível em: <http://robokitonline.blogspot.com/2008/10/conhea-o-robkit.html>. Acesso em: 15.10.2018. Citado na página 53.

RODARTE, A. P. M. *A robótica como auxílio a aprendizagem da matemática: percepções de uma professora do ensino fundamental público*. 74 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

ROSEIRA, N. A. F. Educação matemática e valores: das concepções dos professores à construção da autonomia. *Revista Formadores*, v. 1, n. 2, p. 243, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 46, 50 e 51.

SAIANI, C. *Jung e a educação: uma análise da relação professor/aluno*. [S.l.]: Escrituras Editora, 2002. v. 4. Citado na página 46.

SCHWENGBER, L.; PFAFFENSELLER, F. Matemática e arte: uma conexão através do olhar. *Anais do XVI Seminário Internacional de Educação: Docência nos seus múltiplos espaços*, p. 777–788, 2011. Citado na página 46.

SILVA, A. F. d. Roboeduc: Uma metodologia de aprendizado com robótica educacional. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 55.

SILVA, F. I. da; SCHERER, D. Praxedes: Protótipo de um kit educacional de robótica baseado na plataforma arduino. *Revista EaD e Tecnologias Digitais na Educação*, v. 1, n. 1, p. 44–56, 2012. Citado na página 52.

SILVA, G. V. d. *Irracionalidade e transcendência: aspectos elementares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Tocantins, 2018. Citado na página 16.

TAJRA, S. F. *Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade*. [S.l.]: Érica, 2011. Citado na página 50.

UNO, R. *Conheça o robô NEO*. UNO Robótica, 2018. Sítio UNORobótica. Disponível em: <https://www.unorobotica.com.br/site/roboneo>. Acesso em: 15.10.2018. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

ZOOM, E. E. *Manual Didático Pedagógico*. Curitiba, 2013. 124 p. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 59.

Apêndices

APÊNDICE A – Atividades da Aula A

Nome do aluno: ____

Data: ____________________ **Professor:** ___________________________

Construção das Circunferências

01. Construa, com o auxílio do compasso, uma circunferência de raio $r = 2$ cm. Identifique, nesta circunferência, o centro C, o raio r e o diâmetro d.

02. Agora, construa as circunferências C_1, C_2, C_3 e C_4 de acordo com as medidas abaixo:

$C_1 : r = 3$ cm $C_2 : r = 2,5$ cm $C_3 : d = 5$ cm $C_4 : d = 7$ cm

Para cada circunferência, identifique o centro C, o raio r e o diâmetro d.

03. Defina, com suas palavras, os seguintes elementos da circunferência:

A) Centro: ____

____

B) Corda: ____

____

C) Diâmetro: ____

____

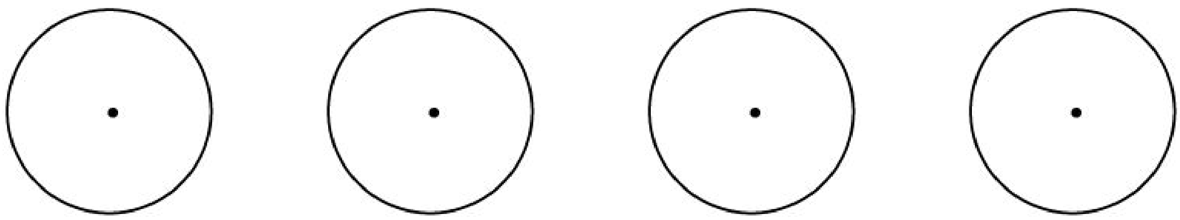
D) Raio: ____

____

E) Arco: ____

____

04. Identifique os elementos das circunferências pedidos nos itens abaixo:



(a) Raio (b) Diâmetro (c) Corda (d) Arco

05. Complete os espaços abaixo com as respostas corretas.

A) A circunferência é o ____________________ dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo C, chamado de ____________________. A distância dos pontos até C é chamada de ____________________.

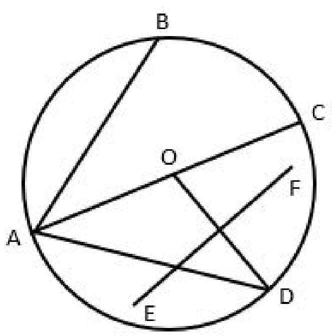
B) O diâmetro de uma circunferência pode ser facilmente calculado lembrando que ele é o ____________________ da medida do raio.

C) Uma circunferência de raio 12 cm possui diâmetro igual à ____________________.

D) O diâmetro de uma circunferênca de raio 7,5 cm é ____________________.

E) Para que o diâmetro de uma circunferência seja 9 cm, o raio da circunferência deve ser ____________________.

06. Observe a circunferência de centro O e indique:



A) Os segmentos que representam o diâmetro da circunferência.

____

B) Os segmentos que representam o raio da circunferência.

____

C) As cordas da circunferência.

____

D) Os segmentos que não são cordas da circunferência.

____

APÊNDICE B – Atividades da Aula B

Nome do aluno: ______________________________

Data: ____________ **Professor:** ____________________

CONTEXTUALIZAR

Anatomia das grandes invenções

Quando vemos uma grande invenção como a roda ou a lâmpada elétrica, é comum pensarmos que ela é resultado de um momento mágico, uma inspiração divina ou um simples estalo da mente.

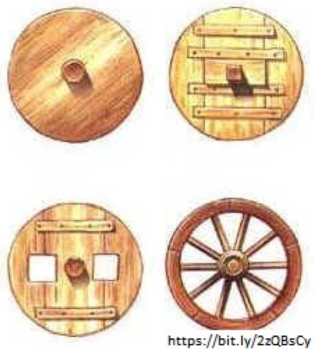
É claro que a inspiração existe, e que existe também um processo final de criação, onde os elementos se combinam e a ideia de solidifica. No entanto, normalmente este momento é precedido de um demorado e árduo trabalho de pesquisas, tentativas, fracassos e acertos.

Algumas invenções resultam de muita persistência por parte de uma pessoa ou de uma equipe. Outras resultam de sucessivas contribuições isoladas de muitas pessoas, ou seja, da acumulação de pequenos avanços ao longo de muitos anos, ou mesmo séculos.

A invenção da roda

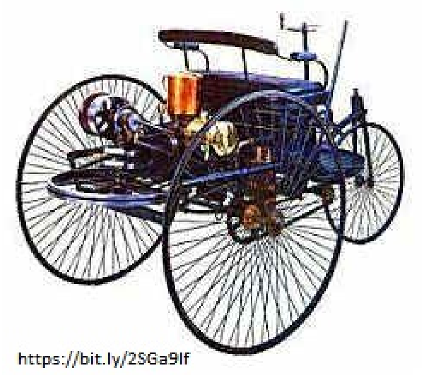
A roda é provavelmente a mais importante invenção mecânica de todos os tempos. Quase todas as máquinas contêm a aplicação do princípio de um componente simétrico girando em torno de um eixo. Das pequenas engrenagens de um relógio, às rodas de automóveis, hélices dos aviões e discos rígidos de computadores, o princípio é o mesmo.

A roda mais antiga conhecida foi encontrada na Mesopotâmia e, provavelmente, data de 3.500 AC. No início a roda era feita de uma peça de madeira inteiriça, compacta e pesada. Para que ela se tornasse veloz e de mais fácil manejo, fizeram-se inúmeras aberturas, originando-se, pouco a pouco, a roda com raios.



As rodas com raios apareceram na Mesopotâmia e na Pérsia, no ano 2.000 AC. Nessa mesma época, a coroa, ou seja, a parte externa da roda que mantém contato com o solo, foi protegida com inúmeros pregos de cobre, muito próximos uns dos outros, para que não se estragasse. Os assírios e os persas colocaram-lhe depois um círculo metálico.

(a)



(b)

Os veículos com rodas, puxados nos primeiros tempos por bois, depois por asnos e finalmente por cavalos, pouparam muito trabalho e muito cansaço ao homem. Os automóveis mais antigos possuíam rodas com raios de madeira ou arame, ou rodas de artilharia, fabricadas em uma única peça de ferro fundido. Na década de 1930 essas rodas foram substituídas pelas de aço estampado, mais leves, mais resistentes e de menor preço.

Com tudo isso podemos perceber que a invenção da roda revolucionou os transportes na pré-história e iniciou uma seqüência de notáveis aperfeiçoamentos, como por exemplo um grande salto para a tecnologia: o movimento controlado por rotação.

CONSTRUIR

Vamos relembrar alguns conceitos? Observe a roda abaixo. Você consegue identificar o raio, o diâmetro e o centro da circunferência?

Para estudar o movimento de rotação e alguns movimentos em automóveis, você e sua equipe irão construir um carro LEGO e o colocarão para se movimentar! Para isso, siga as instruções de montagens do Material Virtual.

Discuta com sua equipe os seguintes questionamentos:

- Este carro consegue fazer curvas?
- Qual o diâmetro da roda traseira?
- Qual o diâmetro da roda dianteira?
- O que fará o robô se movimentar?
- Você consegue identificar o eixo das rodas?
- O robô está estável?

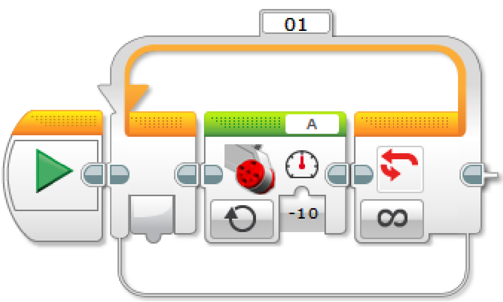
ANALISAR

Meça as distâncias marcadas na pista feita pelo seu professor e preencha a coluna especificada abaixo.

Teste	Comprimento da pista	Número de rotações	Circunferência
1			
2			
3			
4			
5			

Agora, siga as etapas a seguir, preenchendo o quadro acima sempre que necessário.

- Programe o robô para movimentar os motores para frente infinitamente, de acordo com o modelo abaixo.



- Conte quantas rotações a roda dará até atingir cada marcação da pista e registre no quadro.

- Divida o comprimento pelo número de rotações. O que você encontrou? Anote o resultado no quadro.

- Com o quadro completo, calcule a média dos valores da última coluna, somando todas as informações e dividindo pelo total de números somados.

  Anote aqui o resultado encontrado: ______________________________

- Divida este valor pelo diâmetro da roda. Qual foi o resultado?

  Registre aqui: ______________________________

APÊNDICE C – Atividades da Aula C

Nome do aluno: ____

Data: ________________ **Professor:** ________________________

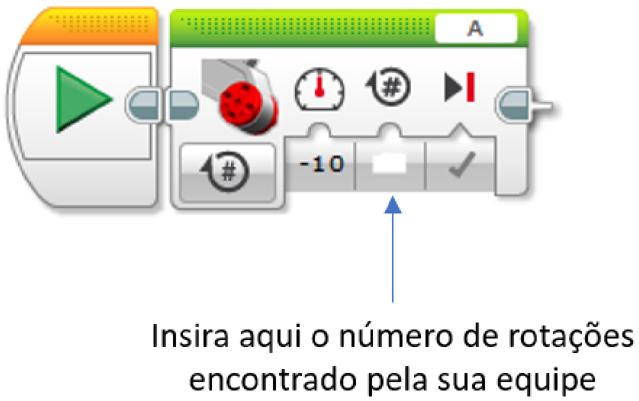
CONTINUAR: Um Desafio Prático

"Uma grande empresa está procurando uma equipe de engenheiros que trabalhe não só focada no resultado, mas também na precisão das soluções de seus problemas. Para o novo processo de contratação de equipes, esta empresa fez uma nova marcação na pista: desta vez, em um lugar ainda não explorado anteriormente. O objetivo das equipes é descobrir o número exato de rotações necessárias para que o robô, partindo do início, pare seu movimento com precisão em cima da nova marcação.

A programação foi desenvolvida pelos programadores da empresa, que deixaram um modelo pronto a ser seguido, bastando inserir o número de rotações encontrado pela sua equipe. Feita a programação, a etapa de teste será realizada com apenas uma tentativa.

Será contratada a equipe que chegar mais próximo do resultado pedido."

Modelo de Programação a ser utilizada:



Boa sorte!

APÊNDICE D – Atividades da Aula D

Nome do aluno: ____

Data: ____________________ **Professor:** ______________________________

O comprimento da Circunferência

01. Reúna-se com mais três colegas para uma atividade em grupo. Para esta atividade vocês precisarão de régua, calculadora e um pedaço de barbante, além dos objetos circulares fornecidos pelo seu professor.

Vamos investigar como podemos obter o comprimento de uma circunferência experimentalmente.

Como fazer:

- Utilize o barbante bem esticado para contornar a parte circular do objeto. Depois coloque o barbante sobre a régua e meça-o.
- Utilize a régua para medir o diâmetro da circunferência do objeto.
- Registre no quadro abaixo as informações obtidas de cada um dos objetos circulares.
- Calcule a razão $\frac{C}{d}$ de cada objeto. Utilize todas as casas decimais possíveis da sua calculadora.

Objeto	Comprimento (C) da Circunferência	Diâmetro (d)	$\frac{C}{d}$

Para os exercícios que seguem, utilize a aproximação racional de $\pi = 3,14$.

02. Calcule o raio de uma circunferência que possui diâmetro igual a 18 cm.

03. Qual o diâmetro de uma circunferência de raio 11,3cm?

04. A superfície de um CD possui diâmetro igual a 12 cm. Qual o valor do comprimento da circunferência deste CD?

05. Calcule o comprimento das circunferências cujas informações são dadas abaixo.

A) O raio é igual a 10 cm.

B) O raio é 75 cm.

C) O diâmetro é 25 cm.

D) O diâmetro é 64 cm.

06. A London Eye, situada na cidade de Londres, é um tipo de roda-gigante de observação. Ela foi inaugurada no ano de 1999 e é um dos pontos turísticos mais disputados da cidade. A estrutura circular tem 135 metros de diâmetro. Atualmente, recebe o título de segunda maior roda-gigante do mundo, ficando atrás apenas da Estrela de Nanchang.

Qual o comprimento da circunferência da London Eye?

07. Um carrinho de brinquedo percorre uma distância de 3,5 metros com uma roda de 2,5 cm de raio. Quantas rotações a roda dará ao percorrer essa distância?