

Luismar Leão Souto

# **PRODUÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Janeiro, 2019

Luismar Leão Souto

# **PRODUÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA**

Dissertação submetida por LUISMAR LEÃO SOUTO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. Rafael Cavalheiro

Coorientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

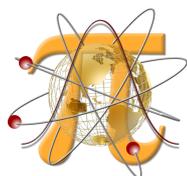
Janeiro, 2019

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmatsbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

---

## Ficha catalográfica

S728p Souto, Luismar Leão.  
Produção de conteúdo digital para o ensino de Matemática /  
Luismar Leão Souto. – 2019.  
66 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande –  
FURG, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Rio Grande/RS,  
2019.

Orientador: Dr. Rafael Cavalheiro.

Coorientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

1. Matemática 2. *B-learning* 3. Vídeosaulas I. Cavalheiro, Rafael  
II. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral III. Título.

CDU 51:37

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Luismar Leão Souto

# PRODUÇÃO DE CONTEÚDO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação submetida por LUISMAR LEÃO SOUTO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande

Trabalho aprovado. Rio Grande, 30 de janeiro de 2019

---

**Dr. Rafael Cavalheiro**  
(Orientador - FURG)

---

**Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez**  
(Coorientadora - FURG)

---

**Dra. Daiane Silva de Freitas**  
(Avaliador - FURG)

---

**Samuel Volkweis Leite**  
(Avaliador - UFRGS)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil  
Janeiro, 2019

*Este trabalho é dedicado ao meu filho Mathias e meus alunos. Que eles sejam curiosos e incansáveis na busca por conhecimento, que sejam sempre questionadores e nunca desistam dos seus sonhos.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha amada esposa Vanise Neufeld Kroker e meu filho Mathias Kroker Souto por terem compreendido minhas ausências, não medido esforços para que eu chegasse ao final desta longa jornada. Acreditando e me incentivando, principalmente nas horas mais difíceis. Meu amado filho, quando iniciei o mestrado tu tinhas apenas 1 ano de idade, muitas foram as vezes que senta-se do meu lado e “estudasse” comigo, a você e sua mãe, obrigado por existirem em minha vida!

Aos meus pais Luiz Edson Costa Souto e Adécia de Fátima Leão Souto, por minha educação, meus valores e princípios, os quais me permitiram chegar até aqui e com certeza me farão continuar.

Aos meus sogros Evald e Elfride por terem compreendido minha ausência em reuniões familiares, sei que vocês dão um grande valor a elas e também por terem cuidado do Mathias quando eu estava ausente.

As minhas irmãs Ana Paula e Juliane, pelo carinho e motivação que me dão. Juliane obrigado pelas diversas vezes que ficaste com o Mathias depois do trabalho, pois eu estava ausente.

Ao meu cunhado Jonas pelos meses que me hospedou em pelotas em seu apartamento para que eu pudesse estudar.

Aos amigos Richarlhes e Letícia por ficarem com o Mathias inúmeras vezes, cuidando do Mathias para que eu pudesse frequentar as aulas.

A professora Nara Maestri Carvalho pela revisão ortográfica, que como sempre foi impecável.

Ao orientador deste projeto, Dr. Rafael Cavalheiro e a co-orientadora Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez pelo profissionalismo que me trataram e pela troca de informação e experiência. Agradeço, principalmente, pela confiança em me aceitar como seu orientando.

Aos colegas de curso, os quais vou levar para a vida como grandes amigos e colegas de profissão, o meu muito obrigado.

Aos professores do PROFMAT que durante o curso não exitaram em sanar minhas dúvidas e aflições, pelos momentos de reflexão, formação e troca de experiências, obrigado.

Ao professor Maurício Zahn pelos conselhos em 2016, que me incentivou ao ingresso neste programa de mestrado

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo mesclar ferramentas da educação a distância com aulas tradicionais (*b-learning*), através do uso de uma plataforma virtual de aprendizagem. É apresentado ao professor como desenvolver a sua própria plataforma virtual de aprendizagem e criar conteúdos digitais para seus alunos, como por exemplo, a gravação de videoaulas, trabalhos online e utilização do aplicativo Zappar. A dissertação apresenta os resultados obtidos com o trabalho desenvolvido em sala de aula em algumas turmas do oitavo ano do ensino fundamental de uma escola privada na região da Campanha no Rio Grande do Sul.

**Palavras-chaves:** matemática, *b-learning*, videoaulas

# Abstract

This work has as objective to mix tools of distance education with traditional classes (*b-learning*), through the use of a virtual learning platform. It's presented to a teacher how to develop his own virtual learning platform and create digital contents for his pupils, for example, the video recording of the lessons, online works and the use of Zappar App. The dissertation presents the results obtained with the work developed in classroom in some groups of the eighth year of the Basic education from a private school in the region of the Campanha Gaucha.

**Key-words:** mathematics, b-learning, video lessons

# Lista de ilustrações

Figura 1	– PISA - Indicadores de Desempenho . . . . .	12
Figura 2	– PISA - Mapa de Desempenho . . . . .	12
Figura 3	– TALIS 2013 . . . . .	19
Figura 4	– Criar Sites no Google Sites . . . . .	20
Figura 5	– Escolhendo nome e modelo do site . . . . .	21
Figura 6	– PA - Página Inicial . . . . .	22
Figura 7	– PA - Seção de Matemática do oitavo ano . . . . .	22
Figura 8	– PA - Subseção de Resolução de Exercícios . . . . .	23
Figura 9	– PA - Subseção de Trabalhos Online . . . . .	23
Figura 10	– PA - Subseção de Videoaulas . . . . .	24
Figura 11	– PA - Subseção do Aplicativo Zappar . . . . .	24
Figura 12	– Tela do Google Inicial do Drive . . . . .	25
Figura 13	– Google Drive - Criando Formulários . . . . .	25
Figura 14	– Google Drive - Editando Formulários . . . . .	26
Figura 15	– Google Drive - Finalizando Formulários . . . . .	27
Figura 16	– Google Drive - Formulários para Testes . . . . .	27
Figura 17	– Zappar - Página Inicial . . . . .	28
Figura 18	– Zappar - Escolhendo o estilo do código . . . . .	29
Figura 19	– Zappar - Editando e Publicando . . . . .	29
Figura 20	– Zappar - Baixando o seu zapcode . . . . .	29
Figura 21	– Zappar - Aplicativo . . . . .	30
Figura 22	– Mesa Digitalizadora . . . . .	31
Figura 23	– Exemplo de monômios . . . . .	38
Figura 24	– Videoaula de definição de monômio . . . . .	39
Figura 25	– Videoaula de adição de monômio . . . . .	40
Figura 26	– Trabalho 03 - Monômios . . . . .	41
Figura 27	– Números de Acertos do Trabalho 03 . . . . .	41
Figura 28	– Atividade do livro didático . . . . .	42
Figura 29	– Videoaula: Multiplicação de monômio . . . . .	43
Figura 30	– Videoaula: Divisão de monômio . . . . .	43
Figura 31	– Volume total: $4x^3 + 9x^2 + 12x$ . . . . .	44
Figura 32	– Videoaula: Polinômios - Definição . . . . .	46
Figura 33	– Videoaula: Polinômios - Classificação e Aplicação . . . . .	46
Figura 34	– Videoaula: Polinômios de um variável e Grau de Polinômios . . . . .	47
Figura 35	– Videoaula: MathNews - Telejornal de Matemática . . . . .	47
Figura 36	– Exemplo de Adição de Polinômios . . . . .	48
Figura 37	– Polinômios - Subtração . . . . .	48
Figura 38	– Videoaula: Adição de Polinômios . . . . .	49
Figura 39	– Videoaula: Subtração de Polinômios . . . . .	49
Figura 40	– Polinômios - Trabalho Online 06 . . . . .	50
Figura 41	– Números de Acertos do Trabalho 06 . . . . .	50
Figura 42	– Polinômios - Multiplicação - Refrigerador . . . . .	51
Figura 43	– Polinômios - Multiplicação . . . . .	51

Figura 44 – Videoaula: Polinômios - Multiplicação . . . . .	52
Figura 45 – Videoaula: Polinômios - Divisão . . . . .	53
Figura 46 – Quadrado da Soma . . . . .	54
Figura 47 – Quadrado da Diferença . . . . .	55
Figura 48 – Produto da Soma pela Diferença . . . . .	56
Figura 49 – Videoaula: Polinômios - Produtos Notáveis . . . . .	56
Figura 50 – Link dos Exercícios na Plataforma . . . . .	57
Figura 51 – Lista 15 de Exercícios . . . . .	58
Figura 52 – Lista 15 de Exercícios - Resolução em vídeo . . . . .	58
Figura 53 – Questionário: Respostas Questão 1 . . . . .	59
Figura 54 – Questionário: Respostas Questão 2 . . . . .	60
Figura 55 – Questionário: Respostas Questão 3 . . . . .	60
Figura 56 – Questionário: Respostas Questão 4 . . . . .	61
Figura 57 – Questionário: Respostas Questão 5 . . . . .	61
Figura 58 – Questionário: Respostas Questão 6 . . . . .	61
Figura 59 – Questionário: Respostas Questão 7 . . . . .	62
Figura 60 – Questionário: Respostas Questão 8 . . . . .	62
Figura 61 – Questionário: Respostas Questão 9 . . . . .	62
Figura 62 – Médias dos alunos em 2017 - Sétimo Ano . . . . .	63
Figura 63 – Notas do Segundo Trimestre de 2018 - Oitavo Ano . . . . .	64
Figura 64 – Notas acima e abaixo de 7,0 - Sétimo Ano . . . . .	64
Figura 65 – Notas acima e abaixo de 7,0 - Oitavo Ano . . . . .	64

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>14</b>
1.1	<b>Educação a distância - EaD</b> . . . . .	<b>14</b>
1.1.1	<i>e-learning</i> e <i>b-learning</i> . . . . .	16
1.1.2	Ambientes virtuais de aprendizagem . . . . .	16
1.2	<b>Formação continuada de professores</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>CRIAÇÃO DE UMA PLATAFORMA VIRTUAL DE APRENDIZAGEM (PVA)</b> . . . . .	<b>20</b>
2.1	<b>Criação da Plataforma</b> . . . . .	<b>20</b>
2.2	<b>Apresentação da Plataforma do Autor (PA)</b> . . . . .	<b>21</b>
2.3	<b>Criação de Exercícios Online com o Google Formulários</b> . . . . .	<b>25</b>
2.4	<b>Realidade Aumentada (RA) - Zappar</b> . . . . .	<b>28</b>
2.5	<b>Criação de videoaulas</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO DA PLATAFORMA VIRTUAL DE APRENDIZAGEM</b> . . . . .	<b>32</b>
3.1	<b>Polinômios sobre <math>\mathbb{R}</math></b> . . . . .	<b>32</b>
3.2	<b>Atividades Realizadas</b> . . . . .	<b>38</b>
3.2.1	Aula 01 - Monômios . . . . .	38
3.2.2	Aula 02 - Adição e Subtração de monômios . . . . .	39
3.2.3	Aula 03 - Multiplicação e Divisão de Monômios . . . . .	42
3.2.4	Aula 04 - Polinômios . . . . .	44
3.2.5	Aula 05 - Adição e Subtração de Polinômios . . . . .	48
3.2.6	Aula 06 - Multiplicação de Polinômios . . . . .	51
3.2.7	Aula 07 - Divisão de Polinômios . . . . .	52
3.2.8	Aula 08 - Produtos Notáveis . . . . .	53
3.2.9	Exercícios . . . . .	57
<b>4</b>	<b>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA PVA</b> . . . . .	<b>59</b>
4.1	<b>Relato de alguns alunos e professores</b> . . . . .	<b>59</b>
4.2	<b>Desempenho resultante da aplicação da PVA</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>66</b>

# Introdução

O Brasil vive um momento delicado em vários sentidos, um deles, em particular, é a educação. Considerada o alicerce do desenvolvimento de qualquer sociedade, a educação brasileira, no que tange à matemática, apresenta uma qualidade distante da ideal, como mostra o *Programme for International Student Assessment - PISA* (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), conforme Figura 1. A aplicação desta avaliação é feita de três em três anos durante o mês de maio.

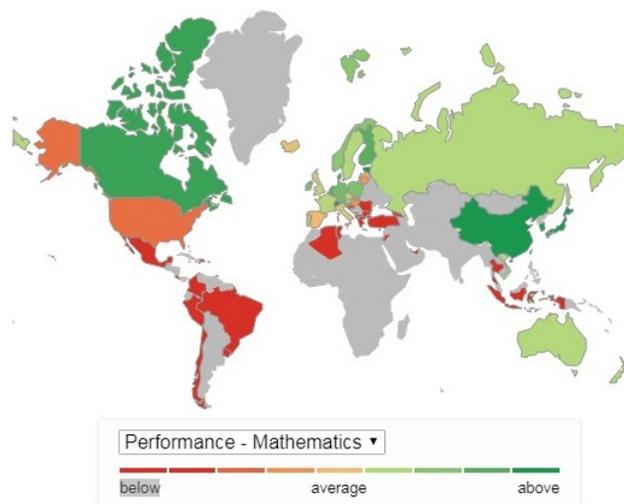
Figura 1 – PISA - Indicadores de Desempenho



Fonte: <http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/bra?lg=en>

É evidente o baixo desempenho em matemática de nossos estudantes. Conforme visto na Figura 1, mesmo havendo uma ligeira melhora entre os anos 2003 e 2012, houve uma queda entre 2012 e 2015. O desempenho dos alunos não é bom comparado com a média da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), como visualizado no mapa da Figura 2. Como podemos ver, o Brasil está abaixo (*below*, em vermelho) da média (*average*, em laranja). Os países em verde estão acima (*above*) da média e os países em cinza não realizaram a última avaliação.

Figura 2 – PISA - Mapa de Desempenho



Fonte: <https://www.compareyourcountry.org/pisa>

O baixo desempenho brasileiro observado na Figura 2 é sentido por nós, professores, todos os dias em sala de aula. Entre os vários motivos deste desempenho, destacamos o baixo interesse dos alunos pela matemática e, também, a formação dos professores, que podem estar desatualizados em relação às práticas pedagógicas, em particular, com relação ao uso de tecnologia da informação no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo (ROCHA, 2014),

Na percepção dos alunos, o insucesso em Matemática se explica pela falta de empenho, estudo e interesse deles próprios, mas também concordam com a ideia de que a Matemática é fácil, quando os conteúdos são bem compreendidos, e que gostar de Matemática depende do estímulo do professor. (...) Dentre os vários fatores que podem justificar a dificuldade de os alunos compreenderem os conteúdos matemáticos e, com isso, construírem uma representação sobre a disciplina, aqui foram contemplados o fator pedagógico e a forma como o ensino tem sido organizado e as maneiras de se conduzir a aprendizagem

Segundo relatório elaborado pelo Centro de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da Comunicação (CETIC.BR, 2017), 77% dos professores não realizaram curso de formação continuada sobre o uso de tecnologias em atividades de ensino. Os resultados apontam, ainda, que a formação inicial de professores não apresenta suficiente foco no letramento digital, entendido como a habilidade necessária para integrar as tecnologias de informação e da comunicação (TIC) na prática pedagógica. Devemos quebrar esse paradigma, o professor do século XXI precisar ter um perfil inovador, a aula tradicional (quadro e giz) não deve ser a única metodologia empregada pelo professor.

Fazer uso de metodologias que estimulem o estudante a construir novos saberes, aproveitando a curiosidade e facilidade dos nativos digitais frente aos recursos tecnológicos, pode ser uma excelente estratégia para o engajamento dos estudantes nas atividades realizadas dentro e fora da sala de aula, auxiliando assim na compreensão dos conceitos matemáticos. Neste trabalho optamos pelo uso de tecnologias da modalidade EaD como auxílio em cursos presenciais, também conhecido como *b-learning*, em que o autor cria um ambiente próprio de ensino, onde é possível a customização do mesmo durante o processo de ensino, diferentemente de plataformas já disponíveis na internet (CORRÊA, 2016) e (MOGNHOL, 2015). Evidentemente, tal ambiente pode ser aplicado indiferentemente do conteúdo a ser trabalhado. Porém, foi a dificuldade na aprendizagem de polinômios por turmas do oitavo ano do ensino fundamental de em uma escola privada da região da Campanha Gaúcha, que motivou a aplicação deste trabalho nessas turmas. São apresentadas ferramentas para gravação de videoaulas, exercícios online, bem como formas de publicá-los na internet. Tais ferramentas foram utilizadas na aplicação desta dissertação como forma de aproximar aluno, conteúdo e professor durante o processo de aprendizagem. O uso de tecnologias aliado a educação tradicional no ensino de matemática é recorrente na Base Nacional Comum Curricular, BNCC, (BRASIL, 2018), “Resolver e elaborar problemas, com e sem uso de tecnologias”. Tais ações envolvem, além da preparação dos alunos, a preparação e capacitação dos professores. Vale destacar que este trabalho é pioneiro neste programa de mestrado.

A dissertação foi organizada em cinco capítulos. No Capítulo 1 há uma descrição e histórico do ensino a distância no Brasil e no Mundo. Comentamos também os conceitos de *e-learning*, *b-learning* e ambientes virtuais de aprendizagem, bem como a formação dos professores acerca de novas tecnologias aplicadas ao ensino. No Capítulo 2 apresentamos os recursos tecnológicos envolvidos no trabalho descrito nesta dissertação em um formato que o leitor possa utilizá-los, personalizando-os de acordo com a realidade de seus alunos.

Apresentada a fundamentação teórica (Capítulo 1) e as ferramentas tecnológicas utilizadas no trabalho (Capítulo 2), no Capítulo 3 descrevemos as atividades aplicadas em sala de aula pelo autor. Neste mesmo capítulo apresentamos um pequeno texto que expõe alguns conceitos básicos sobre o assunto de polinômios. No Capítulo 4 apresentamos relatos de alunos e professores sobre as ferramentas utilizadas e um questionário, respondido de forma voluntária pelos alunos, sobre o ensino de matemática e as ferramentas utilizadas nessa dissertação. Por fim, no Capítulo 5 comentamos os resultados obtidos com este trabalho.

# 1 Fundamentação Teórica

Neste capítulo são apresentados os ambientes virtuais de aprendizagem (AVA), os quais são hoje a principal ferramenta utilizada na educação a distância (EaD), mas que também podem ser de grande auxílio como complemento em cursos presenciais. Apresentamos ainda os conceitos de *e-learning* e *b-learning*. O primeiro tem a internet como principal meio de comunicação, enquanto o segundo faz uso de atividades tanto presenciais quanto online. Além disso, apresentamos neste capítulo informações sobre a formação dos professores acerca das tecnologias de informação utilizadas no ensino.

## 1.1 Educação a distância - EaD

A educação a distância (EaD) teve o primeiro registro em 1728, quando o jornal *Gazeta de Boston* ofereceu material para tutoria por meio de correspondência. Mais de um século depois, em 1829, a educação a distância chegou à Suécia com o Instituto *Liber Hermondes*. A expansão continuou e, em 1840, a primeira escola por correspondência da Europa foi inaugurada no Reino Unido.

Em 1904, o *Jornal do Brasil* oferecia o curso de datilógrafo. Alguns anos depois surgiu o Instituto *Monitor*, primeiro a oferecer sistematicamente cursos profissionalizantes a distância por correspondência. Já a EaD pelo sistema radiofônico brasileiro teve início em 1923, na *Rádio Sociedade do Rio de Janeiro*.

Em 1935, o *Japanese National Public Broadcasting Service* investiu nesse meio de comunicação como complemento da escola oficial, utilizando o rádio como meio de comunicação.

Já em 1956, iniciou-se a veiculação de programas educativos pela televisão na *Chicago TV College*, nos Estados Unidos. Depois dessas datas, os acontecimentos que marcam a difusão da EaD passaram a ser mais frequentes em diferentes locais do mundo.

Em 1996 (BRASIL, 1996), a *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)* reconheceu a educação a distância, EaD, como modalidade válida e equivalente para todos os níveis de ensino. A difusão aconteceu em todos os níveis de ensino, marcada especialmente pela criação, em 2005, da *Universidade Aberta do Brasil (UAB)*, que integrou cursos, pesquisas e programas de educação superior à distância.

A educação a distância teve grande impulso com o surgimento e evolução do rádio, do telégrafo e do telefone. Estes equipamentos caracterizaram o início da era dos meios modernos de comunicação. O desenvolvimento das telecomunicações com meios interativos e a relativa popularização do computador e da internet proporcionaram novas perspectivas, se constituindo em ferramentas importantes para a contínua evolução do EaD, sobretudo após a segunda metade do século XX. Vivenciamos nos últimos anos um crescente interesse dos alunos por essa modalidade de ensino, o que conseqüentemente despertou interesse de professores e pesquisadores, que procuraram conceituar a EaD e descrever com segurança as suas metodologias. Entre estes podemos citar *Desmond Keegan (KEEGAN, 1996)*, que identifica alguns elementos-chave dos processos educacionais a distância, tais como:

- distância física entre professores e alunos;
- influência de uma organização educacional;
- uso da mídia para interligar professores e alunos;
- troca de comunicação bidirecional;
- aprendizes vistos como indivíduos, ao invés de grupos de alunos.

Podemos citar também o pesquisador brasileiro, Marcelo Borba (MALHEIROS; AMARAL; BORBA, 2011), doutor em educação matemática pela Cornell University, EUA, 2011:

EaD online pode ser entendida como a modalidade de educação que acontece primordialmente mediada por interações via internet e tecnologias associadas. Cursos e disciplinas cuja interação aconteça utilizando interfaces como salas de bate-papo, videoconferências, fóruns, etc. se encaixam nessa modalidade.

As interfaces citadas por (MALHEIROS; AMARAL; BORBA, 2011) são denominadas ambientes virtuais de aprendizagens (AVA), os quais serão tratadas algumas vezes neste trabalho como plataformas virtuais de aprendizagem (PVA).

Existem duas abordagens pedagógicas na educação a distância: o auto-instrucional e o colaborativo. O primeiro se fundamenta na ideia de que a transmissão de informação é a base da educação, neste caso o aluno aprende aquilo que lhe é ensinado a partir de um foco de transmissão, entrando em contato com o professor para sanar eventuais dúvidas. O modelo colaborativo segue o princípio de que a interação entre alunos e professores é essencial para o processo educativo, ou seja, o aprendizado ocorre através da construção coletiva, a partir do questionamento, problematização, discussão, apresentação de dúvidas e troca de informações.

O uso de tecnologias da informação no ensino da matemática não é novidade e mostra-se um grande aliado no processo de aprendizagem, pois torna o aluno protagonista no processo de ensino. Em (BONA; FAGUNDES; BASSO., 2011), os autores destacam a necessidade de o professor despertar a curiosidade do estudante em aprender a aprender determinados conteúdos e o uso de recursos tecnológicos auxilia nesse processo. No entanto, neste mesmo trabalho os autores também destacam a importância do planejamento do professor correlacionado com o estudante, pois a ferramenta em si não é capaz de estimular o aluno. A concepção de educação ainda é o que o professor tem a ensinar, seja na modalidade presencial ou a distância.

A educação tradicional não está conseguindo nutrir as novas necessidades do aluno nativo digital. Para (CASTELLS, 2007), a avalanche de informações disponível torna necessário encontrar novas formas de ultrapassar os métodos tradicionais de ensino, assim como outras maneiras de encantar e motivar os alunos da nova geração nas atividades educacionais. Não se pode ignorar que há uma demanda educacional por novas ferramentas de ensino.

Em (GONÇALVES, 2009), o autor faz um comparativo entre o ensino tradicional e o ensino a distância:

Tabela 1 – Principais diferenças entre o ensino tradicional e o ensino a distância.

	Ensino Tradicional	Ensino a distância
Acesso	Limitado	24 horas / 7 dias
Qualidade	Variável	Consistente
Medição dos resultados	Manual	Automática
Atualização da informação	Difícil	Fácil
Custos	Grandes	Baixos

Fonte: elaboração própria.

### 1.1.1 *e-learning* e *b-learning*

O termo *e-learning*, ou *electronic learning* pode ser traduzido como e-aprendizagem ou e-ensino. É uma modalidade de EaD que pode utilizar a internet como meio de comunicação. Foi desenvolvida inicialmente por empresas para treinamento de seus funcionários, mas com o tempo ganhou a área acadêmica, envolvendo profissionais de diversas áreas. Para (BRAS; FIGUEIRA; PAIVA, 2006), *e-learning* é uma situação de ensino-aprendizagem em que o instrutor e o aluno estão separados no tempo, ou no local, ou em ambos. Os materiais de aprendizagem são fornecidos de forma remota, síncrona ou assíncrona, por correio, e-mail, vídeo ou audioconferência, TV, etc.

Já não é possível entender o ensino-aprendizagem sem o recurso mais ou menos intensivo do *e-learning*. A nível das escolas do ensino básico, secundário e universidades é utilizado como complemento ao ensino tradicional, através da disponibilização de materiais didático-pedagógicos. Também é aplicado em outras instituições públicas e privadas, tais como bancos, hospitais, empresas, que usam o *e-learning* como meio de formação dos seus funcionários; e utilizado por algumas empresas como a Editora Moderna, que em seu site, vende às escolas, professores e alunos o acesso a materiais didático-pedagógicos.

O *e-learning* já é utilizado em escolas públicas ou privadas há algum tempo, seja na sala de aula ou como material complementar dos livros didáticos. Porém o *e-learning*, assim como o modelo tradicional de ensino (quadro e giz) não pode ser encarado como uma única solução. Uma boa proposta é unir o modelo tradicional de ensino com o *e-learning*, o que é chamado de *b-learning*. O *b-learning*, ou *blended learning* (ensino misturado), consiste de atividades presenciais e online. Segundo (GOMES, 2005), *b-learning* implica na disponibilização de materiais (referentes aos conteúdos de ensino, frequentemente referidos por e-conteúdos) especificamente construídos para estes ambientes de aprendizagem, tais como as atividades descritas neste trabalho.

### 1.1.2 Ambientes virtuais de aprendizagem

Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) são softwares educacionais via internet, destinados a apoiar atividades de educação a distância. Estes softwares oferecem um conjunto de tecnologias de informação e comunicação, que permitem desenvolver as atividades no tempo, espaço e ritmo de cada participante, conforme (MENDONÇA; RIBEIRO, 2007).

Os ambientes virtuais de aprendizagem podem ser utilizados em: atividades presenciais, onde possibilitam aumento nas interações para além da sala de aula; ou em atividades semi-presenciais, onde, nos encontros presenciais e nas atividades à distância, oferecem suporte para a comunicação e interação entre os participantes. Conforme (MORAIS, 2002), em qualquer situação de aprendizagem, a interação entre os participantes é de extrema importância. É por meio das interações que se torna possível a troca de experiências, o estabelecimento de parcerias e a cooperação. O uso de um AVA oferece as seguintes vantagens:

- a interação entre o computador e o aluno;
- a possibilidade de se dar atenção individual ao aluno;
- a possibilidade do aluno controlar seu próprio ritmo de aprendizagem, assim como a sequência e o tempo;
- a apresentação dos materiais de estudo de modo criativo, atrativo e integrado, estimulando e motivando a aprendizagem;
- a possibilidade de ser usada para avaliar o aluno.

Os ambientes virtuais de aprendizagem agregam várias tecnologias encontradas na Web para prover a comunicação, disponibilização de materiais e administração do curso. O conjunto de funcionalidades que cada ambiente possui é estabelecido pelos requisitos definidos em cada um deles. Conforme (GONZALES, 2015), as funcionalidades dos ambientes virtuais de aprendizagem podem ser organizadas em quatro grupos de ferramentas: de Coordenação, de Comunicação, de Produção dos Alunos ou de Cooperação e de Administração.

- As Ferramentas de Coordenação servem de suporte para a organização de um curso. São utilizadas pelo professor para disponibilizar informações aos alunos, tanto informações das metodologias do curso (procedimento, duração, objetivos, expectativa, avaliação) e estrutura do ambiente (descrição dos recursos, dinâmica do curso, agenda, etc), quanto informações pedagógicas: material de apoio (guias, tutoriais), material de leitura (textos de referência, links interessantes, bibliografia, etc) e recurso de perguntas frequentes (reúne as perguntas mais comuns dos alunos e as respostas correspondentes do professor).
- As Ferramentas de Comunicação englobam fóruns de discussão, bate-papo, correio eletrônico e conferência entre os participantes do ambiente. Têm o objetivo de facilitar o processo de ensino-aprendizagem e estimular a colaboração e interação entre os participantes e o aprendizado contínuo.
- As Ferramentas de Produção dos Alunos ou de Cooperação oferecem o espaço de publicação e organização do trabalho dos alunos ou grupos de alunos, através do portfólio, diário, mural e perfil (de alunos e/ou grupos de alunos).
- As Ferramentas de Administração oferecem recursos de gerenciamento do curso (cronograma, ferramentas disponibilizadas, inscrições, etc), de alunos (relatórios de acesso, frequência no ambiente, utilização de ferramentas, etc) e de apoio à tutoria (inserir material didático, atualizar agenda, habilitar ferramentas do ambiente, etc).

Atualmente existem várias ferramentas online que podem ser utilizadas em complemento ao ensino presencial, entre elas:

- Youtube: rede social de compartilhamento de vídeos, os quais são postados pelos usuários em seus respectivos canais. Entre estes, há uma variedade imensa de canais dedicados a matemática, onde alunos de todo o mundo podem reforçar os conhecimentos escolares, ou até mesmo aprofundá-los. Fonte: [www.youtube.com](http://www.youtube.com)
- Portal da Matemática — OBMEP: o portal oferece, gratuitamente, uma variedade de materiais relacionados à grade curricular do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais que não costumam ser abordados no Ensino Fundamental ou Médio. Buscando complementar o aprendizado da matemática, o portal disponibiliza videoaulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, material teórico e aplicativos iterativos.

Os materiais do portal estão organizados em módulos que tratam de assuntos específicos. Cada módulo está associado a algum ano escolar, dependendo do assunto abordado, mas sempre pode haver diferenças com a grade curricular da escola.

Há uma grande quantidade de testes com perguntas dissertativas e de múltipla escolha, para que o aluno exerça seu conhecimento quantas vezes desejar. Além disso, é possível fazer uma avaliação geral do módulo e obter o certificado online.

Professores podem formar turmas, trocar mensagens e acompanhar o andamento de seus alunos dentro do Portal. Basta gerar um Código de Orientador e divulgar a seus alunos.

Fonte: <http://matematica.obmep.org.br/>

- Khan Academy: A plataforma oferece exercícios, vídeos de instrução e um painel de aprendizado personalizado que habilita os estudantes a aprender no seu próprio ritmo, dentro e fora da sala de aula. São abordados assuntos de matemática, ciência, programação de computadores, história, história da arte, economia e muito mais. As missões de matemática guiam os estudantes do jardim de infância até o cálculo, usando tecnologias adaptativas de ponta que identificam os pontos fortes e as lacunas no aprendizado. A Khan academy possui várias parcerias como a NASA, o Museu de Arte Moderna, a Academia de Ciências da Califórnia e o MIT para oferecer conteúdo especializado.

Fonte: <https://pt.khanacademy.org>

O professor precisa entender que a utilização das diferentes modalidades de EaD e/ou tecnologias de informação e comunicação não implica abolir completamente métodos tradicionais de ensino (como quadro e giz). As escolas devem integrar essas ferramentas no currículo escolar. O professor pode fazer uso delas para lecionar aulas mais atrativas, tornando o processo de ensino um ambiente propício à construção do conhecimento. Reconhecemos a importância do uso de novos recursos e metodologias no ensino atual, porém acreditamos que muitos professores ainda não utilizam tais recursos porque não se sentem capacitados. Esperamos que este trabalho desperte o interesse dos professores para o uso de novas metodologias de ensino.

## 1.2 Formação continuada de professores

Alguns professores ainda têm dificuldade no que tange ao uso da tecnologia em sala de aula. A formação continuada vem atualizando estes profissionais ao longo dos anos, porém ainda há uma certa resistência por parte dos docentes. Segundo (FUGIOMO; ALTOÉ, 2009):

percebe-se que muitas professoras persistem em adotar o método tradicional no desenvolvimento de suas práticas pedagógicas. Com isso, a introdução de novos recursos tecnológicos na escola sempre vem acompanhada da resistência de algumas professoras para a ideia de experimentar o novo e, por isso, às vezes negam a sua existência e em outras as afirmam.

Outro fator que prejudica a formação dos professores é a falta de tempo para aperfeiçoamento do profissional. Conforme a Pesquisa Internacional sobre Ensino e Aprendizagem (TALIS) da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o professor brasileiro está sobrecarregado. O baixo número de contratos de tempo integral preocupa especialistas, por forçar o professor a buscar outras fontes de renda e interferir no regime de dedicação exclusiva. Quase que inexistente na educação básica, o regime de dedicação exclusiva é apontado como benéfico para a qualidade do ensino pela OCDE. Segundo (CONZI, 2014), se o educador procurar o segundo emprego, precisará se desdobrar nos horários de trabalho, o que compromete o tempo que deveria dispor para planejar as aulas, corrigir temas, analisar as especificidades de cada aluno e cuidar de atividades fundamentais.

Na mesma reportagem a pesquisadora Tania Beatriz Iwaszko Marques, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), salienta que educadores necessitam do tempo fora da sala de aula para a preparação de aulas. Segundo (MEC, 2014), o percentual de professores que participaram de atividades de formação continuada em 2012 está acima da média. Porém, o mesmo estudo atesta que apenas dois terços dos professores brasileiros participaram de cursos e oficinas nos doze meses que antecederam a pesquisa, portanto abaixo da média TALIS, conforme Figura 3. A mesma observação se aplica à visitas de observação a outras escolas e seminários sobre educação.

Figura 3 – TALIS 2013



Fonte: (MEC, 2014, p.24)

Sobre a capacitação dos professores, segundo o Centro de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da Comunicação (CETIC.BR, 2017), 57% dos professores não cursaram, durante a graduação, disciplina específica sobre como usar computador e internet em atividades com alunos e 77% não participaram de curso de formação continuada sobre o uso de computador e internet em atividades de ensino.

Faz-se necessário motivar não só o aluno, mas também o professor na busca de novas ferramentas de ensino. O caminho é árduo, dadas as dificuldades mencionadas anteriormente. Daí a importância de trabalhos como este, que visam fornecer ao professor alternativas no uso de tecnologias como recurso na aprendizagem. No próximo capítulo mostraremos como criar e utilizar alguns recursos tecnológicos no processo de ensino.

## 2 Criação de uma Plataforma Virtual de Aprendizagem (PVA)

Existem atualmente na internet várias plataformas virtuais de aprendizagem prontas para serem utilizadas, tais como, Youtube, Khan Academy e Portal da Matemática, porém elas possuem certa limitação no que tange a personalização das mesmas para atender professores e alunos. Por este motivo, optamos por criar um ambiente próprio, onde o professor pudesse adequá-lo durante o processo de aprendizagem.

### 2.1 Criação da Plataforma

Entre as ferramentas disponíveis para a criação de sites gratuitos, para este trabalho optamos pelo Google Sites, o qual conta com duas versões, a antiga <<https://sites.google.com/site/>> e a nova <<https://sites.google.com/new>>. Como o site foi criado em 2009, utilizamos a versão antiga da ferramenta.

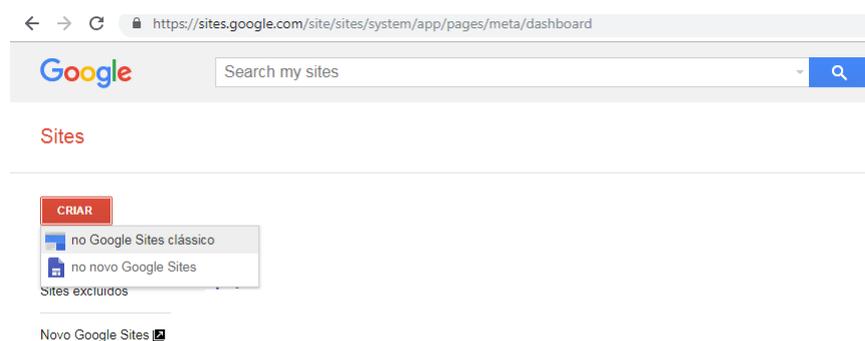
**Link para a PVA criada pelo autor:** <https://sites.google.com/site/leaosouto>

O tutorial a seguir foi dividido em passos.

Passo 1 Acessar o link: <<https://sites.google.com/site/>>

Passo 2 Escolher o tipo de serviço que deve ser utilizado. No caso optamos por criar um site semelhante ao já existente, para isto basta clicar em **Criar** e em seguida **no Google Sites Clássico**.

Figura 4 – Criar Sites no Google Sites



Fonte: elaboração própria

Passo 3 Na tela seguinte você deve escolher:

- um modelo: você pode escolher um modelo em branco ou outro determinado pelo google;
- um nome para o site: escolha um nome de fácil compreensão para o aluno (usuário), isso irá facilitar o acesso;
- um local: é basicamente o domínio do site (endereço), que no caso deste trabalho é [sites.google.com/site/leaosouto](https://sites.google.com/site/leaosouto), ou do exemplo que estamos criando neste tutorial <https://sites.google.com/site/avaluismar/>;

- um tema: o tema é a aparência do site, escolha temas com cores simples e com um bom contraste;
- a descrição do site: escreva uma frase que descreva o conteúdo do site de forma sucinta.

Por fim clique em **Criar**, no topo da página.

Figura 5 – Escolhendo nome e modelo do site

Sites

**CRIAR** Cancelar

Selecione um modelo para usar:

Modelo em branco

Navegue na galeria para ver outros modelos

Atribua um nome a seu site:

**AVA - Professor Luismar**

Local do site - os URLs podem usar somente os seguintes caracteres: A-Z, a-z, 0-9

https://sites.google.com/site/ avaprofessorluismar

▶ Selecionar um tema

▼ Mais opções

Descrição do site

Ensino de Matemática

Fonte: elaboração própria

Passo 4 O site foi criado, agora devemos editar a página inicial e criar as sub páginas. Para mais detalhes segue abaixo o link de uma videoaula criada pelo autor para criação e personalização de sites no Google Sites, bem como a inserção de vídeos do youtube e arquivos para download dos alunos.

Link: <https://youtu.be/Qed9yKggN3o>.

## 2.2 Apresentação da Plataforma do Autor (PA)

A organização e os conteúdos do site podem variar de acordo com a necessidade e gosto de cada professor. A seguir é apresentada a plataforma de aprendizagem criada pelo autor (PA), a qual pode ser acessada no endereço [sites.google.com/site/leaosouto](https://sites.google.com/site/leaosouto).

Na Figura 6, podemos visualizar a página inicial da PA, que é composta por:

- Home: página com uma introdução ao site;
- Finanças: dicas de finanças pessoais;
- Humor Nerd: área lúdica do site;
- Pessoal: aqui são disponibilizadas para os usuários, as informações pessoais do autor e arquivos diversos;

- Ensino: onde são disponibilizados conteúdos de Informática, Lógica e Matemática.
  - Informática: seção dedicada a materiais e aulas de informática;
  - Lógica: onde encontram-se materiais de raciocínio lógico para concursos;
  - Matemática: seção com materiais relacionados a Matemática (tema deste trabalho).

Figura 6 – PA - Página Inicial

The screenshot shows the initial page of the PVA platform. The header includes the name 'Prof. Luísmar Leão Souto' and the subjects 'Concursos: Informática - Matemática - Raciocínio Lógico'. The left sidebar contains a navigation menu with categories: Home, Pessoal, Faculdade, and Ensino. The main content area is titled 'Home' and includes a welcome message 'Seja Bem vindo!', a biography of the professor, and links to social media and a Facebook page.

Fonte: elaboração própria

Dentro da Seção Matemática foi criada a Subseção Matemática 8º Ano CFES, para aplicação da PVA. Ela conta com arquivos para downloads, listas de exercícios, dicas de matemática para os alunos, entre outros.

Figura 7 – PA - Seção de Matemática do oitavo ano

The screenshot shows the 'Matemática 8º Ano CFES' section of the PVA platform. The page displays a list of activities and exercises with download links and durations.

Atividade	Duração
01 - Atividade de Revisão_v_Aluno.pdf	37'
01 - Resposta do Exercício do Gato e Rato.pdf	30'
02 - Atividade em Casa.pdf	48'
03 - Atividade em Casa.pdf	26'
05 - Atividade de Revisão - Conjuntos.pdf	20'

Fonte: elaboração própria

Esta subseção foi dividida em:

- Resolução de Exercícios: onde o aluno tem acesso a videoaulas com resoluções de exercícios corrigidos em aula, assim ele pode rever o conteúdo quando achar necessário;

Figura 8 – PA - Subseção de Resolução de Exercícios

The screenshot shows a website for Prof. Luismar Leão Souto, specializing in Informatics, Mathematics, and Logical Reasoning. The page is titled 'Resolução de Exercícios' (Exercise Resolution) and is part of the 'Matemática 8º Ano CFES' section. The navigation menu on the left includes links for Home, Finanças \$\$\$, Humor Nerd, PESSOAL (Contato, Currículo, Planilhas Prontas), Faculdade (Trabalhos e Relatórios), and Ensino (Informática, Lógica, Matemática). The main content area lists various exercises and solutions, such as 'Página 21 - Parte 1' through 'Página 24 - Parte 2', 'Resolução Lista 5', 'Resolução Lista 6', 'Página 36 - Parte 1', 'Página 36 - Parte 2', and 'Lista 07 - PDF'. The page also includes a brief description: 'Abaixo resoluções de exercícios do livro do 8º ano do Colégio Franciscano Espírito Santo.'

Fonte: elaboração própria

- Trabalhos Online: são disponibilizados os trabalhos online, que consistem em formulários feitos no Google Drive. Tal recurso é explorado na Seção 2.3 deste capítulo.

Figura 9 – PA - Subseção de Trabalhos Online

The screenshot shows a website for Prof. Luismar Leão Souto, specializing in Informatics, Mathematics, and Logical Reasoning. The page is titled 'Trabalhos Online' (Online Assignments) and is part of the 'Matemática 8º Ano CFES' section. The navigation menu on the left includes links for Home, Finanças \$\$\$, Humor Nerd, FIQUE POR DENTRO (Links), Lógica, and Matemática. The main content area lists various online assignments with deadlines, such as 'Trabalho 01 - enviar até 05/04/18', 'Trabalho 02 - enviar até 11/04/18', 'Trabalho 03 - enviar até 18/04/18', 'Trabalho 04 - enviar até 06/05/18 - Quem quiser pode baixar o modelo do trabalho no link abaixo ou clicando aqui.', 'Trabalho 05 - entregar até 15/05/18', 'Trabalho 06 - enviar até 05/06/18', 'Trabalho 07 - enviar até o dia 26/06 (Prazo prorrogado ate terça-feira-dia 26/6)', 'Trabalho 08 - enviar até 07/09/18 - Lista 18', and 'Trabalho em Grupo - Inscrição'. The page also includes a brief description: 'Escolha o trabalho e bons estudos.'

Fonte: elaboração própria

Ainda dentro da Seção Matemática podemos destacar as subseções:

- Videoaulas: onde encontram-se todas as videoaulas de matemática criadas durante a aplicação deste trabalho, entre outras;

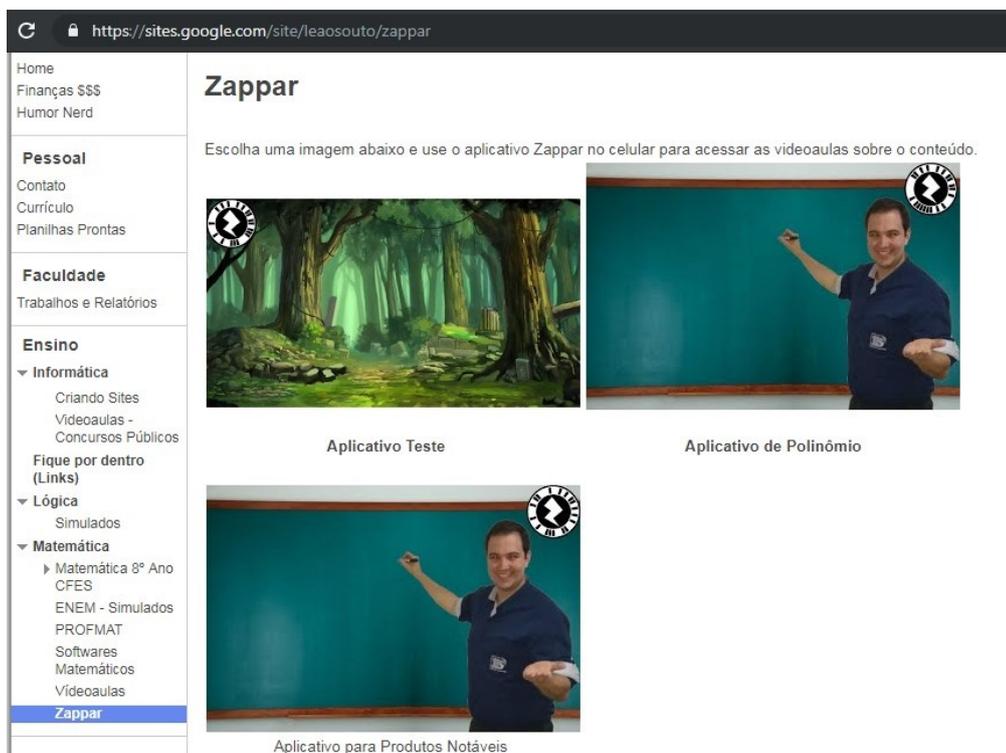
Figura 10 – PA - Subseção de Videoaulas



Fonte: elaboração própria

- Zappar: que foi criada especificamente para a aplicação do aplicativo para celular que possui o mesmo nome. Este assunto é tratado na Seção 2.4.

Figura 11 – PA - Subseção do Aplicativo Zappar



Fonte: elaboração própria

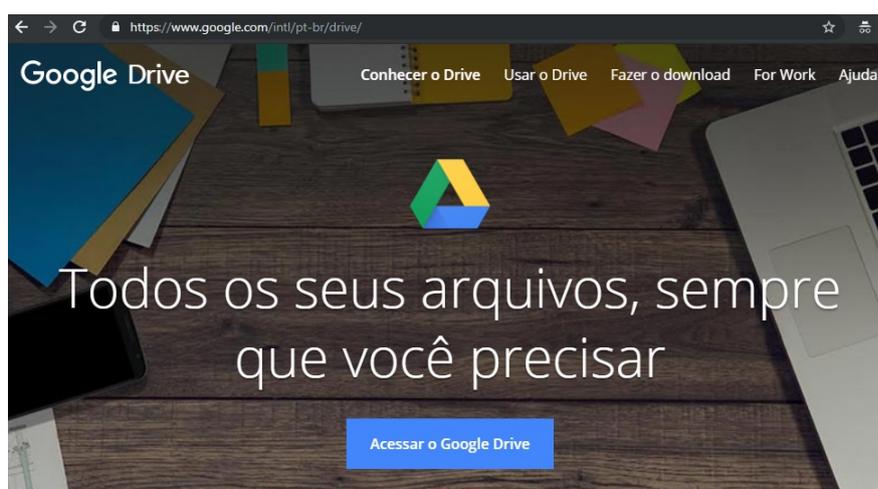
## 2.3 Criação de Exercícios Online com o Google Formulários

O Google tem, entre os seus serviços, o Google Drive. Nele há vários recursos que o professor pode utilizar para tornar a aula mais dinâmica, por exemplo, a realização de trabalhos ou até mesmo avaliações online.

A seguir é apresentada a ferramenta e como utilizá-la.

Passo 1 Acesse o Google Drive e faça o login com uma conta Google em <https://drive.google.com>.

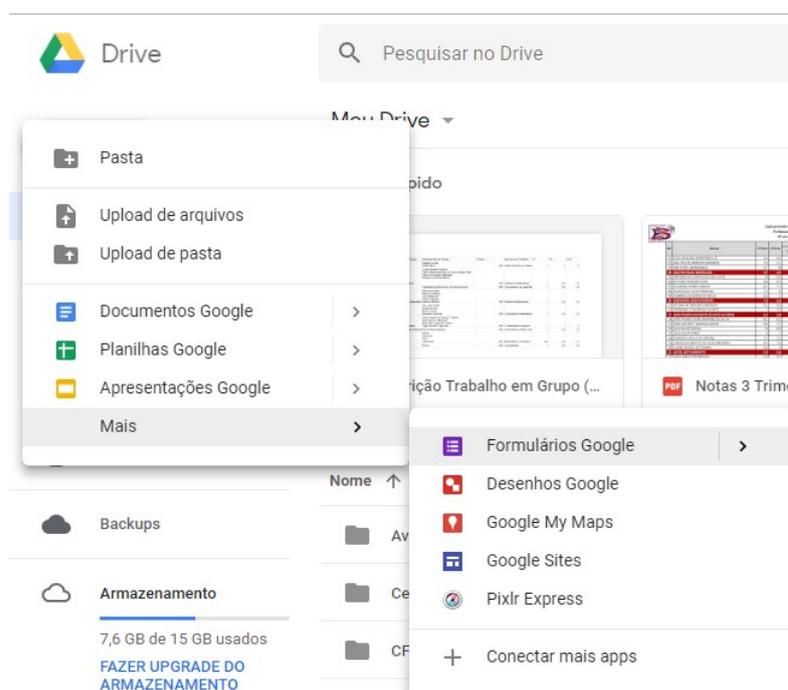
Figura 12 – Tela do Google Inicial do Drive



Fonte: elaboração própria

Passo 2 Clique em Novo ⇒ Mais ⇒ Formulários Google.

Figura 13 – Google Drive - Criando Formulários



Fonte: elaboração própria

Passo 3 Para editar um formulário você deve estar familiarizado com as ferramentas deste recurso (Figura 14):

- 1- Adicionar pergunta;
- 2- Adicionar título e descrição;
- 3- Adicionar imagem;
- 4- Adicionar vídeo;
- 5- Adicionar seção.

Figura 14 – Google Drive - Editando Formulários



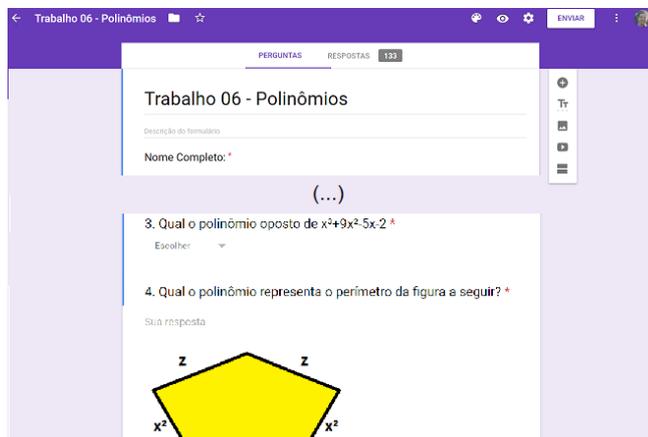
Fonte: elaboração própria

Também há os tipos de respostas (Figura 14):

- Resposta curta: o usuário pode escrever frases curtas em um único parágrafo;
- Parágrafo: o usuário pode escrever um texto com vários parágrafos;
- Múltipla escolha: o usuário pode escolher apenas uma opção dentre um conjunto de opções.
- Caixas de seleção: o usuário pode escolher uma ou mais opções entre um conjunto de opções.
- Lista suspensa: também conhecida como *dropdown*, o usuário pode escolher apenas uma opção entre um conjunto de opções, clicando em uma seta e selecionando um item em uma lista pré-determinada;
- Upload de arquivos: o usuário pode enviar um arquivo, como por exemplo, uma foto, um arquivo PDF, uma planilha, etc;
- Escala linear: o usuário pode escolher um valor arrastando uma bolinha entre o valor mais baixo e o valor mais alto. É utilizada, por exemplo, em pesquisas de satisfação;
- Grade de múltipla escolha ou seleção: o usuário pode selecionar um ou mais itens em uma grade de opções, como na Figura 40;
- Data: o usuário pode escolher uma data clicando nela, sem a necessidade de digitá-la.

Na Figura 15 podemos ver um formulário já finalizado, que está disponível no link <https://goo.gl/forms/yT9H4C09ZzXKTe5N2>.

Figura 15 – Google Drive - Finalizando Formulários



Trabalho 06 - Polinômios

PERGUNTAS RESPOSTAS 133

Nome Completo: \*

(...)

3. Qual o polinômio oposto de  $x^2+9x^2-5x-2$  \*

Escolher

4. Qual o polinômio representa o perímetro da figura a seguir? \*

Sua resposta

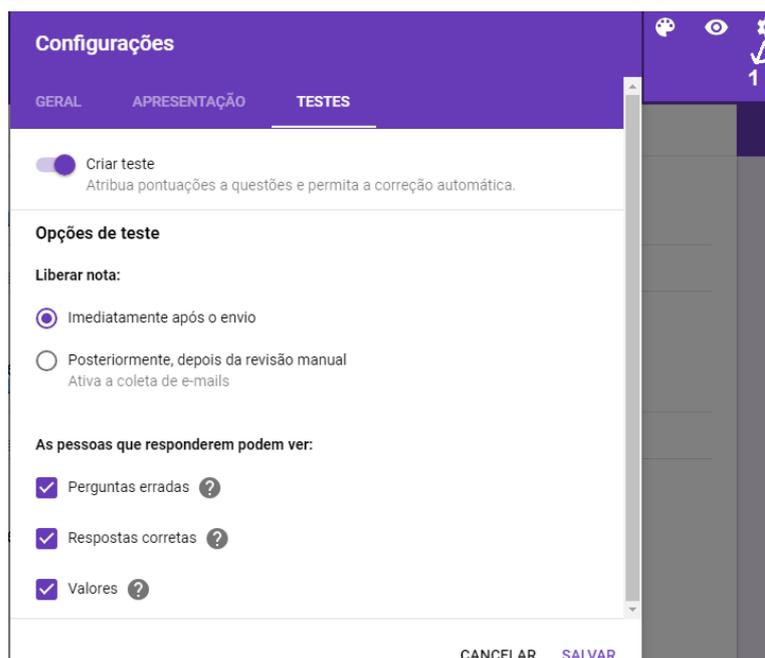
Diagrama de um polígono amarelo com cinco lados. Os lados são rotulados como  $x^2$ ,  $z$ ,  $z$ ,  $x^2$  e  $z$ .

Fonte: elaboração própria

Uma grande vantagem da utilização dos formulários do Google é o *feedback*. Em forma de planilha eletrônica ou gráficos, o Google mostra os resultados obtidos das respostas dadas pelos alunos, os quais podem ser utilizados para nortear as ações do professor, corrigindo assim algum conceito matemático que foi mal compreendido pelo aluno. Tal fato é exemplificado nas Observações 3.6 e 3.10.

Também é possível utilizar o formulário online como um teste, pois ao finalizar o preenchimento do formulário, o próprio sistema avalia as respostas e calcula a nota do aluno, indicando os acertos e os erros. O criador do formulário pode acrescentar textos com explicações acerca das respostas do usuário ou até mesmo videoaulas. Para isso, basta clicar em Configurações (item 1 da Figura 16) e depois configurar conforme sua necessidade.

Figura 16 – Google Drive - Formulários para Testes



Configurações

GERAL APRESENTAÇÃO TESTES

Criar teste  
Atribua pontuações a questões e permita a correção automática.

Opções de teste

Liberar nota:

Imediatamente após o envio

Posteriormente, depois da revisão manual  
Ativa a coleta de e-mails

As pessoas que responderem podem ver:

Perguntas erradas ?

Respostas corretas ?

Valores ?

CANCELAR SALVAR

Fonte: elaboração própria

## 2.4 Realidade Aumentada (RA) - Zappar

O aplicativo Zappar é um recurso de realidade aumentada que, segundo (FORTE; KIRNER, 2009)

(...) trata do mundo real como ponto de partida para uma experiência que leva o usuário a experimentar o mundo virtual. Enquanto a Realidade Virtual (RV) tem por premissa a necessidade de levar o usuário ao ambiente virtual e fazer com que ali ele interaja com os objetos programados e passe a perceber este mundo virtual como seu próprio mundo, a RA prevê que não seja retirada do usuário a consciência de que ele está em seu ambiente real, mas traz para ali (o ambiente real) os objetos tridimensionais necessários para que a interação ocorra. As características da tecnologia de RA permitem a construção de sistemas que utilizam dispositivos mais comuns, como uma webcam e marcadores impressos em papel, mais baratos e, conseqüentemente, mais acessíveis quando comparados aos sistemas de RV.

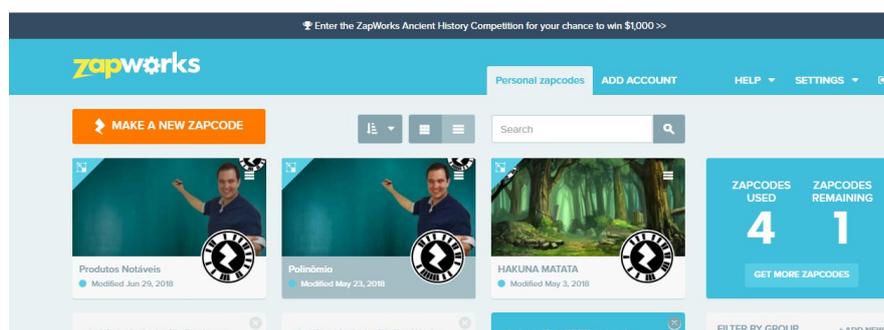
A seguir é apresentado um tutorial passo a passo de como utilizar o aplicativo Zappar em sala de aula. Este recurso funciona da seguinte forma: após o professor criar o seu *ZAPCODE*, ou seja, a sua própria realidade aumentada, ele deve disponibilizar ao aluno o código, este pode ser colocado em listas de exercícios ou quaisquer outro material impresso ou digital. O aluno, de posse de um tablet ou smartphone, irá, através do aplicativo Zappar, baixado através do Play Store ou Apple Store, fotografar o código e utilizar o recurso criado pelo professor.

Passo 1 Acessar o site <https://zap.works/>;

Passo 2 Criar uma conta ou utilizar uma conta do Facebook ou Google+;

Passo 3 Na página inicial clicar em “*Make a New Zapcode*”;

Figura 17 – Zappar - Página Inicial



Fonte: elaboração própria

Passo 4 Escolher um nome para o seu zapcode e o estilo do código que aparecerá para o aluno, conforme Figura 18;

Passo 5 Escolher o tipo de ferramenta (*tool*) e clicar em *Create Zapcode* (no caso desta dissertação foi utilizado o *Designer*);

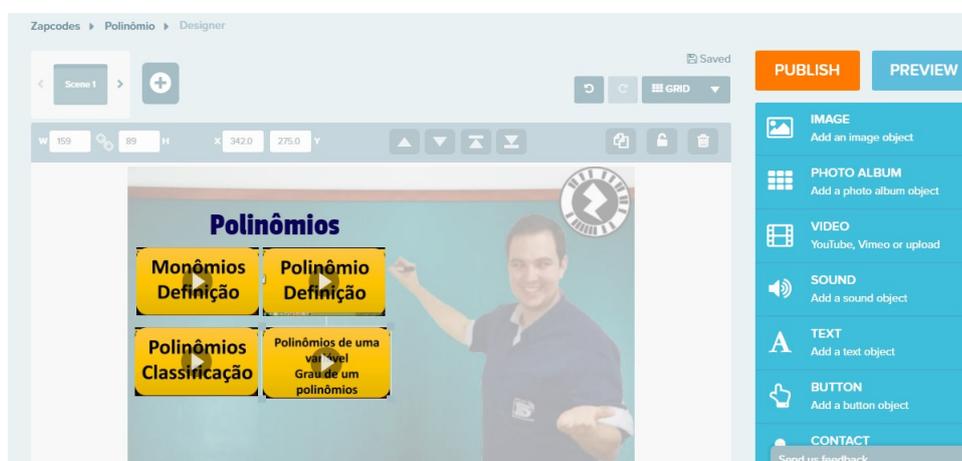
Passo 6 Na tela inicial novamente, clicar no seu *Zapcode*;

Figura 18 – Zappar - Escolhendo o estilo do código



Fonte: elaboração própria

Figura 19 – Zappar - Editando e Publicando



Fonte: elaboração própria

Passo 7 Clicar em *edit zapcode content* (editar conteúdo do zapcode);

Passo 8 Utilizar o painel de ferramentas lateral para adicionar imagens, vídeos, textos, link, etc (Figura 19);

Passo 9 Ao finalizar, clicar em *Publish*.

Após finalizado você pode colocar o zapcode criado no material que será entregue aos alunos. O zapcode pode ser baixado no link Download, conforme Figura 20.

Figura 20 – Zappar - Baixando o seu zapcode



Fonte: elaboração própria

A seguir é apresentado como o aluno deve proceder:

Passo 1 Baixar o aplicativo Zappar no Play Store ou Apple Store no celular ou tablet;

Passo 2 Abrir o aplicativo e escanear, com o aparelho, o material entregue pelo professor que contenha o *zapcode*;

Figura 21 – Zappar - Aplicativo



Fonte: elaboração própria

Feito isso o aluno poderá utilizar o recurso sempre que achar conveniente.

No caso deste trabalho, o *zapcode* foi utilizado para videoaulas, onde o aluno poderia assisti-las sempre que tivesse dúvidas sobre o conteúdo ao realizar os exercícios (Figura 50).

## 2.5 Criação de videoaulas

Há alguns anos a gravação de videoaulas exigiria vários equipamentos para filmagem, espaço físico, iluminação e um alto custo para a reprodução das mídias. Porém, atualmente, a produção de videoaulas está simplificada. Com o uso de softwares específicos e equipamentos como *smartphones*, câmeras digitais e mesas digitalizadoras, este processo se torna barato e de fácil reprodução. Além disso, segundo (PEREIRA; MAGALINI, 2017), nas produções amadoras de videoaulas há personalidade e proximidade geradas na relação professor-aluno quando o vídeo é elaborado pelo próprio docente.

Os vídeos podem ser gravados em primeira pessoa (o usuário não vê o autor, somente suas ações) ou em terceira pessoa (o usuário vê o autor), no entanto, é importante ter alguns cuidados. Por exemplo, as aulas devem ser planejadas, assim como é feito no ensino tradicional. Além disso, segundo (KHAN, 2013), os vídeos devem ter entre dez e dezoito minutos.

Para este trabalho foram criadas videoaulas com as seguintes ferramentas:

### Hardwares e Internet

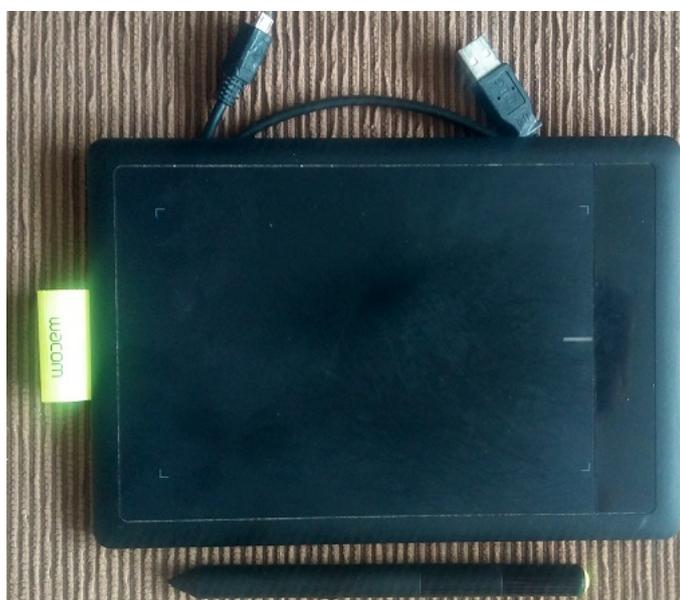
- Mesa digitalizadora, Figura 22
- Notebook com 6 GB de RAM, HD de 1TB e Processador Intel i3;
- Conexão de 10 Mbps.

## Softwares

- aTube Catcher: programa de captura de tela;
- Paint: programa de desenho não vetorial;
- Microsoft Power Point: criação de slides com animações;
- VideoPad Video Editor: edição dos vídeos;
- Youtube: Plataforma de compartilhamento de vídeos.

O link abaixo contém uma videoaula sobre a gravação de videoaulas:  
<https://youtu.be/IS2Nni9xtDg>

Figura 22 – Mesa Digitalizadora



Fonte: elaboração própria

Os vídeos criados para este trabalho foram postados em duas plataformas digitais:

- Canal no Youtube: Professor Luismar ([www.youtube.com/leaosouto](http://www.youtube.com/leaosouto)), o qual foi criado para este trabalho;
- Funpage no Facebook: Professor Luismar ([www.facebook.com/professorluismar](http://www.facebook.com/professorluismar)), a qual contava em 26 de novembro de 2018 com 1523 curtidas em 10 países diferentes:

Brasil	1467
Uruguai	20
Canadá	12
Austrália	2
Alemanha	2
França	2
Portugal	2
Angola	2
Republica Democrática do Congo	1
China	1

## 3 Aplicação da Plataforma Virtual de Aprendizagem

Neste capítulo apresentamos as atividades realizadas no segundo trimestre do oitavo ano do ensino fundamental utilizando a plataforma criada pelo autor. O assunto abordado foi polinômios. Começamos com uma breve fundamentação matemática e depois apresentamos as atividades realizadas.

### 3.1 Polinômios sobre $\mathbb{R}$

Esta seção apresenta os principais conteúdos matemáticos abordados nas atividades propostas. O conteúdo é baseado em (NETO, 2016).

Uma sequência  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  de números reais é dita quase toda nula se existir  $n \geq 0$  tal que

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \dots = 0$$

Em outras palavras, uma sequência  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  é quase toda nula se todos os seus termos, de uma certa posição em diante, forem iguais a zero, ou, equivalentemente, se ela possui apenas um número finito de termos não nulos. Por exemplo,

$$(0, 0, 0, \dots) \quad \text{e} \quad (1, 2, 3, \dots, n, 0, 0, \dots)$$

são exemplos de sequência quase toda nula; por outro lado, a sequência  $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ , com 1's e 0's se alternando indefinidamente, não é quase toda nula.

**Definição 3.1.** Um polinômio sobre (ou com coeficientes em)  $\mathbb{R}$  é uma soma formal  $f = f(x)$  do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k x^k \quad (3.1)$$

onde  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  é uma sequência quase toda nula de números reais (no somatório acima convencionamos que  $x^0 = 1$  e  $x^1 = x$ ).

Dois polinômios  $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  e  $g(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$  sobre  $\mathbb{R}$  são iguais se, e só se,  $a_k = b_k$ , para todo  $k \geq 0$ .

O conjunto de todos os polinômios sobre  $\mathbb{R}$  é denotado por  $\mathbb{R}[x]$ .

Dado um polinômio  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  sobre  $\mathbb{R}$ , adotamos as seguintes convenções:

- Os elementos  $a_i \in \mathbb{R}$  são denominados os coeficientes de  $f$ .
- Quando  $a_i = 0$  omitiremos, sempre que for conveniente, o termo  $a_i x^i$ . Em particular, como a sequência  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  é quase toda nula, existe um inteiro  $n \geq 0$  para o qual podemos escrever

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

- Quando  $a_i = \pm 1$  escrevemos  $\pm x^i$  em vez de  $\pm 1x^i$ , para o termo correspondente de  $f$ .

- O polinômio  $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$  é denominado o polinômio identicamente nulo sobre  $\mathbb{R}$ . Sempre que não houver perigo de confusão com  $0 \in \mathbb{R}$ , denotaremos o polinômio identicamente nulo sobre  $\mathbb{R}$  simplesmente por  $0$ . Mais geralmente, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  denotaremos o polinômio  $\alpha + 0x + 0x^2 + \dots$  simplesmente por  $\alpha$  e denominaremos o polinômio constante  $\alpha$ ; em cada caso, o contexto deixará claro se estamos nos referindo ao polinômio constante e igual a  $\alpha$  ou ao elemento  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Em particular, de posse do último item acima, convencionamos também que

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x].$$

**Exemplo 3.1.**  $f(x) = 1 + x - x^3 + \sqrt{2}x^7 \in \mathbb{R}[x]$ .

**Exemplo 3.2.** Se  $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ , então  $g(x)$  não é um polinômio, uma vez que a sequência  $(1, 1, 1, \dots)$  não é quase toda nula.

**Observação 3.1.** Em algumas situações é costume nomear certos casos particulares de polinômios de acordo com o número de termos:

- Monômio - um termo;
- Binômio - dois termos;
- Trinômios - três termos;

Quatro termos ou mais não levam nomes particulares.

No que segue, vamos definir em  $\mathbb{R}[x]$  operações

$$\oplus : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$\odot : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x],$$

respectivamente denominadas **adição** e **multiplicação**, que estendem, de maneira natural, as operações de adição e multiplicação usuais de  $\mathbb{R}$ . Para tanto, precisamos inicialmente do seguinte resultado auxiliar.

**Lema 3.1.** Se  $(a_k)_{k \geq 0}$  e  $(b_k)_{k \geq 0}$  são sequências quase todas nulas de números reais, então também são quase todas nulas as sequências  $(a_k \pm b_k)_{k \geq 0}$  e  $(c_k)_{k \geq 0}$ , onde

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} a_i b_j = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0.$$

*Demonstração.* Mostraremos somente que a sequência  $(c_k)_{k \geq 0}$  é quase toda nula, ficando o outro caso como exercício para o leitor. Sejam  $m, n$  inteiros não nulos tais que  $a_i = 0$  para todo  $i > n$  e  $b_j = 0$  para todo  $j > m$ . Se  $k > m + n$  e  $i + j = k$ , com  $i, j \geq 0$ , então  $i > n$  ou  $j > m$ , pois, do contrário, teríamos  $k = i + j \leq n + m$ , o que não é o caso. Mas, como  $i > n \Rightarrow a_i = 0$  e  $j > m \Rightarrow b_j = 0$ , em qualquer caso temos  $a_i b_j = 0$ , o que implica

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} a_i b_j = 0.$$

Isso mostra que  $c_k = 0$  para todo  $k > m + n$ , portanto  $(c_k)_{k \geq 0}$  é uma sequência quase toda nula.  $\square$

De posse do lema anterior, podemos finalmente formular as definições das operações de adição e multiplicação de polinômios.

**Definição 3.2.** Dados dois polinômios

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k \quad e \quad g(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k,$$

a soma e o produto de  $f$  e  $g$ , denotados respectivamente por  $f \oplus g$  e  $f \odot g$ , são os polinômios

$$(f \oplus g)(x) = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k$$

e

$$(f \odot g)(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$$

onde  $c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} a_i b_j$ .

Ainda que, em princípio, possa não parecer, a definição do produto de dois polinômios é bastante natural: a fórmula para o coeficiente  $c_k$  de  $f \odot g$  é necessária se quisermos que valham a distributividade da operação  $\odot$  em relação à operação  $\oplus$ , bem como a regra usual de potenciação  $x^m \odot x^n = x^{m+n}$ . De fato, se tais propriedades forem válidas, então, calculando o produto

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \odot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$$

distributivamente, obtemos

$$a_0 b_0 = \sum_{\substack{i+j=0 \\ i,j \geq 0}} a_i b_j$$

para o coeficiente de  $x^0$ ,

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = \sum_{\substack{i+j=1 \\ i,j \geq 0}} a_i b_j$$

para o coeficiente de  $x$ ,

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = \sum_{\substack{i+j=2 \\ i,j \geq 0}} a_i b_j$$

para o coeficiente de  $x^2$ , e assim por diante.

De fato, não é difícil nos convenceremos de que, conforme foram definidas, as operações de adição e multiplicação de polinômios sobre  $\mathbb{R}$  gozam das seguintes propriedades:

- i. Comutatividade:  $f \oplus g = g \oplus f$  e  $f \odot g = g \odot f$ ;
- ii. Associatividade:  $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$  e  $(f \odot g) \odot h = f \odot (g \odot h)$ ;
- iii. Distributividade:  $f \odot (g \oplus h) = (f \odot g) \oplus (f \odot h)$

para quaisquer  $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ .

**Exemplo 3.3.** Considere os polinômios de coeficientes reais  $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2 - 4x^3$  e  $g(x) = x + x^2$  (onde, como anteriormente convencionado, omitimos os coeficientes nulos). Então

$$(f \oplus g)(x) = 1 + 2x + (1 - \sqrt{2})x^2 - 4x^3$$

e

$$\begin{aligned} (f \odot g)(x) &= (1 + x - \sqrt{2}x^2 - 4x^3) \odot (x + x^2) \\ &= [1 \odot (x + x^2)] \oplus [x \odot (x + x^2)] \oplus [-\sqrt{2}x^2 \odot (x + x^2)] \oplus [-4x^3 \odot (x + x^2)] \\ &= (x + x^2) \oplus (x^2 + x^3) \oplus (-\sqrt{2}x^3 - \sqrt{2}x^4) \oplus (-4x^4 - 4x^5) \\ &= x + 2x^2 + (1 - \sqrt{2})x^3 - (\sqrt{2} + 4)x^4 - 4x^5. \end{aligned}$$

A discussão acima deixa claro que podemos relaxar nossas notações, denotando, a partir de agora, as operações de adição e multiplicação de polinômios simplesmente por  $+$  e  $\cdot$ . Assim, sempre que adicionarmos dois polinômios, os sinais  $+$  representarão duas operações diferentes: a adição de elementos de  $\mathbb{R}$ , efetuada sobre os coeficientes dos polinômios em questão, e a adição de elementos de  $\mathbb{R}[x]$ . No entanto, isto não deve causar confusão, uma vez que o contexto sempre deixará claro a qual operação o sinal  $+$  se refere. Um comentário análogo é válido para a multiplicação.

Sendo  $0$  o polinômio identicamente nulo, temos  $f + 0 = 0 + f = f$  para todo  $f \in \mathbb{R}[x]$ , i.e., o polinômio identicamente nulo é o elemento neutro da adição de polinômios. Por outro lado, dado um polinômio qualquer  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ , é imediato que

$$h(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots$$

é o único polinômio tal que  $f + h = h + f = 0$ , o qual será denotado por  $-f$  e chamado oposto de  $f$ . Assim

$$(-f)(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots$$

e, para  $f, g \in \mathbb{R}[x]$ , podemos definir a diferença  $f - g$  entre  $f$  e  $g$  por  $f - g = f + (-g)$ . Além disso, para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \in \mathbb{R}[x]$ , é imediato verificar que

$$\alpha \cdot g = \alpha b_0 + \alpha b_1x + \alpha b_2x^2 + \dots;$$

em particular, temos  $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$  para todo  $g \in \mathbb{R}[x]$ , de maneira que o polinômio constante  $1$  é o elemento neutro da multiplicação de polinômios.

Doravante, sempre que não houver perigo de confusão, escrevemos simplesmente  $fg$  para denotar o produto  $f \cdot g$ , de  $f, g \in \mathbb{R}[x]$ . Em particular, se  $\alpha \in \mathbb{R}[x]$ , então  $\alpha f$  denotará o produto de  $\alpha$ , visto como polinômio constante, e  $f$ .

A definição a seguir desempenhará papel central ao longo do texto.

**Definição 3.3.** *Se  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$  com  $a_n \neq 0$ , dizemos que o inteiro não negativo  $n$  é o grau de  $f$ , e denotamos  $\text{gr}(f) = n$  (lê-se “o grau de  $f$  é igual a  $n$ ”). Veja que definimos o grau apenas para polinômios não identicamente nulos; por outro lado,  $\text{gr}(f) = 0$  para todo o polinômio constante  $f(x) = \alpha$ , com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Doravante, sempre que nos referirmos a  $f \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$  escrevendo*

$$f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$$

*suporemos, salvo menção em contrário, que  $a_n \neq 0$ . Nesse caso,  $a_n$  será denominado o coeficiente líder de  $f$ . Finalmente,  $f$  será dito mônico quando tiver coeficiente líder  $1$ .*

**Exemplo 3.4.**  $P(x) = 2x^4 - x^3 + x - 1$ , logo o grau de  $P$  é dado por:

$$\text{gr}(P) = 4$$

A proposição a seguir estabelece duas propriedades muito importantes da noção de grau de polinômios.

**Proposição 3.1.** *Para  $f, g \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ , temos:*

- (a)  $\text{gr}(f + g) \leq \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$  se  $f + g \neq 0$ ;
- (b)  $fg \neq 0$  e  $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ .

*Demonstração.* Sejam  $\text{gr}(f) = n$  e  $\text{gr}(g) = m$ , com  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ .

(a) Se  $m \neq n$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que  $m > n$ . Então  $(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_mx^m$ , de forma que  $\text{gr}(f + g) = m = \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$ . Se  $m = n$  mas  $f + g \neq 0$ , então

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

e há duas possibilidades  $a_n + b_n = 0$  ou  $a_n + b_n \neq 0$ . No primeiro caso,  $\text{gr}(f + g) < n = \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$ . No segundo,  $\text{gr}(f + g) = n = \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$ . Em qualquer caso, ainda teremos  $\text{gr}(f + g) \leq \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$ .

(b) Seja  $fg(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ . Se  $k > m + n$ , vimos, na prova do Lema 3.1, que  $c_k = 0$ . Portanto, se mostrarmos que  $c_{m+n} \neq 0$ , seguirá que  $fg \neq 0$  e  $\text{gr}(fg) = m + n = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$ . Mas, como  $a_i = 0$  para  $i > n$  e  $b_j = 0$  para  $j > m$ , é imediato que

$$c_{m+n} = \sum_{\substack{i+j=m+n \\ i,j \geq 0}} a_ib_j = a_nb_m \neq 0.$$

□

**Teorema 3.1.** *Se  $f, g \in \mathbb{R}[x]$ , com  $g \neq 0$ , então existem únicos  $q, r \in \mathbb{R}[x]$  tais que*

$$f = gq + r, \text{ com } r = 0 \text{ ou } 0 \leq \text{gr}(r) < \text{gr}(g).$$

*Demonstração.* Mostremos, inicialmente, que há no máximo um par de polinômios  $q$  e  $r$  satisfazendo as condições do enunciado. Para tanto, sejam  $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}[x]$  tais que

$$f = gq_1 + r_1 = gq_2 + r_2$$

com  $r_i = 0$  ou  $0 \leq \text{gr}(r_i) < \text{gr}(g)$ , para  $i = 1, 2$ . Então,  $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$  e, se  $q_1 \neq q_2$ , pela Proposição 3.1, temos

$$\text{gr}(g) \leq \text{gr}(g) + \text{gr}(q_1 - q_2) = \text{gr}(g(q_1 - q_2)) = \text{gr}(r_2 - r_1) \leq \max\{\text{gr}(r_1), \text{gr}(r_2)\} < \text{gr}(g)$$

o que é um absurdo. Portanto  $q_1 = q_2$  e daí,  $r_1 = r_2$ .

Façamos agora, a prova da existência de polinômios  $q$  e  $r$  satisfazendo as condições do enunciado. Escrevamos

$$g(x) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$$

onde  $m \geq 0$  e  $b_m \neq 0$ . Se  $\text{gr}(f) < \text{gr}(g)$  então não há nada que calcular: basta tomar  $q = 0$  e  $r = f$ .

Caso seja  $\text{gr}(f) \geq \text{gr}(g)$ , então

$$f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$$

com  $n \geq m$  e  $a_n \neq 0$ . Note que  $b_m^{-1}a_nx^{n-m}$  é exatamente o polinômio pelo qual se precisa multiplicar o termo de maior grau de  $g$  para obter o termo de maior grau de  $f$ . Sendo assim o polinômio

$$f_1(x) = f(x) - (b_m^{-1}a_nx^{n-m})g(x)$$

é tal que

$$\text{gr}(f_1) < n = \text{gr}(f)$$

e

$$f(x) = (b_m^{-1}a_nx^{n-m})g(x) + f_1(x).$$

Se  $\text{gr}(f_1) < \text{gr}(g)$  então acabou: basta tomar  $q(x) = b_m^{-1}a_n x^{n-m}$  e  $r = f_1$ .

Caso  $\text{gr}(f_1) \geq \text{gr}(g)$ , então

$$f_1(x) = c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0$$

com  $k \geq m$  e  $c_k \neq 0$ . Análogo ao passo anterior, se multiplicarmos por  $b_m^{-1}c_k x^{k-m}$  o termo de maior grau de  $g$  obteremos o termo de maior grau de  $f_1$ . Daí

$$f_2(x) = f_1(x) - (b_m^{-1}c_k x^{k-m})g(x)$$

é tal que

$$\text{gr}(f_2) < k = \text{gr}(f_1) < \text{gr}(f)$$

e

$$f_1(x) = (b_m^{-1}c_k x^{k-m})g(x) + f_2(x),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= (b_m^{-1}a_n x^{n-m})g(x) + f_1(x) \\ &= (b_m^{-1}a_n x^{n-m} + b_m^{-1}c_k x^{k-m})g(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

Se  $\text{gr}(f_2) < \text{gr}(g)$  então acabou: basta tomar  $q = b_m^{-1}a_n x^{n-m} + b_m^{-1}c_k x^{k-m}$  e  $r = f_2$ .

Caso ainda seja  $\text{gr}(f_2) \geq \text{gr}(g)$  continuamos o processo. Como

$$\text{gr}(f) > \text{gr}(f_1) > \text{gr}(f_2) > \dots,$$

após um número finito  $j$  de passos obteremos polinômios  $q$  e  $r = f_j$  tais que  $f = qg + r$  com  $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$ .  $\square$

## Polinômios em várias indeterminadas

Podemos generalizar a construção feita acima. Fixado  $n \in \mathbb{N}$ , um polinômio  $f$  a  $n$  indeterminadas sobre  $\mathbb{R}$  é uma soma finita de monômios do tipo

$$a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

onde  $a_{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{R}$  e  $i_1, \dots, i_n$  são inteiros não negativos. Nesse caso, escrevemos

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

O grau de um polinômio  $f$  como acima é o maior valor possível para a soma  $i_1 + \dots + i_n$ , tal que  $a_{i_1 \dots i_n} \neq 0$ .

**Observação 3.2.** Note que aqui não temos, em geral, um coeficiente líder, pois é possível que haja mais de um termo com grau máximo, por exemplo,  $x^3 - y^3 + 2x^2y \in \mathbb{R}[x, y]$ .

Denotamos por  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  o conjunto dos polinômios a  $n$  indeterminadas sobre  $\mathbb{R}$ . Sobre tal conjunto definimos, de maneira óbvia, operações

$$+ : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \times \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

e

$$\cdot : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \times \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],$$

respectivamente denominadas adição e multiplicação, as quais se reduzem às operações de adição e multiplicação sobre  $\mathbb{R}[x]$  quando  $n = 1$  e continuam gozando das mesmas propriedades dessas operações.

## 3.2 Atividades Realizadas

Todas as definições apresentadas neste capítulo foram retiradas de (GARCIA, 2014), livro texto utilizado na escola onde foi aplicado este trabalho.

### Conhecimentos prévios necessários:

- Conjuntos numéricos e suas operações aritméticas;
- Definição de expressões algébricas;
- Perímetro e área de retângulos;
- Volume de paralelepípedo.

### Observação 3.3.

- *A partir da aula 02 são pré-requisitos as aulas anteriores.*
- *Ao final de cada atividade são apresentados os recursos EaD utilizados como complemento e/ou revisão das atividades desenvolvidas em sala de aula.*
- *Todos os recursos EaD utilizados foram extraclasse, em complemento às aulas tradicionais.*
- *Os exercícios mencionados nas aulas a seguir foram corrigidos em sala de aula. Aqueles em que os alunos tiveram mais dificuldades foram também feitos em videoaulas conforme descrito.*

### 3.2.1 Aula 01 - Monômios

Duração: 1 hora e 40 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.4.** *Monômio é um número ou uma expressão algébrica inteira na qual há apenas multiplicação entre números e letras. Essas letras devem sempre ser expressas na forma de potência com expoentes naturais.*

Em geral podemos identificar duas partes nos monômios: o coeficiente e a parte literal. O coeficiente corresponde à parte numérica, e a parte literal correspondente às variáveis, incluindo seus expoentes.

### Exemplo 3.5.

Figura 23 – Exemplo de monômios



Fonte: elaboração própria

### Observação 3.4.

- *Todo número real não nulo é um monômio sem parte literal;*
- *O número zero chama-se monômio nulo;*
- *Costumam-se omitir os coeficientes 1 e  $-1$  dos monômios, por exemplo:  $1x = x$  e  $-1a^2b = -a^2b$ .*

**Definição 3.5.** *Monômios semelhantes são monômios com a mesma parte literal.*

**Exemplo 3.6.**

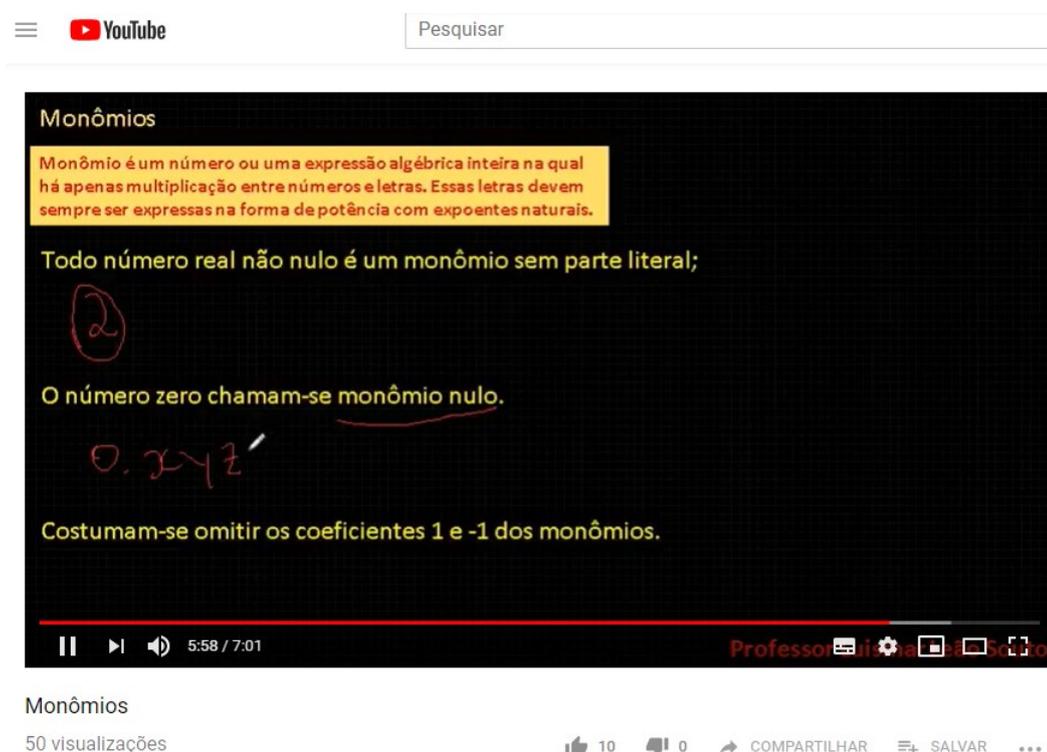
a.  $2x^3yz$  e  $-x^3yz$ , pois a parte literal de ambos é  $x^3yz$

b.  $\frac{xy^2}{3}$  e  $12xy^2$ , pois a parte literal de ambos é  $xy^2$

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.59-60), na aula subsequente.

**Recurso EaD utilizado:** Videoaula criada pelo autor.

Figura 24 – Videoaula de definição de monômio



Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 24: <https://youtu.be/WEGTzohdIXk>

### 3.2.2 Aula 02 - Adição e Subtração de monômios

Duração: 1 hora e 40 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.6.** *A adição algébrica de monômios semelhantes é efetuada adicionando-se algebricamente os coeficientes e mantendo-se a parte literal.*

**Exemplo 3.7.**

$$2x^2 + 4x^2 - 3x^2 = (2 + 4 - 3)x^2 = 3x^2$$

**Observação 3.5.**

- Podemos adicionar algebricamente apenas monômios semelhantes (como visto acima);
- A soma de monômios pode ser o monômio nulo:  $5ab - 5ab = 0ab = 0$ .

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.62), na aula subsequente.

**Recursos EaD utilizados:**

- Videoaula criada pelo autor.

Figura 25 – Videoaula de adição de monômio

Operações com monômios

Adição e Subtração

$$2x^2 + 4x^2 - 3x^2 = 3x^2$$
$$3x^2y + 7x^2y - 4x^2y + x^2y =$$

Monômios Adição e Subtração

118 visualizações

7 0 COMPARTILHAR SALVAR ...

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 25 <https://youtu.be/NmFpm2zGvyA>

- Trabalho Online  
<https://sites.google.com/site/leaosouto/matematica/matematica-8o-ano-cfes/trabalhos-online/trabalho-03>  
Prazo de envio: uma semana a contar da data de solicitação.

Figura 26 – Trabalho 03 - Monômios

### Monômio

\*Obrigatório

Nome: \*

Sua resposta

Turma \*

- 802
- 803
- 804
- 805

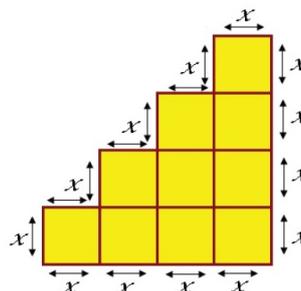
1. Marque todas as opções que apresentam monômios: \*

- $3x^2y$
- 5
- $x+x^2+1$
- $5x$
- $3x^2yz^2$
- $5x+3$

2. Marque os monômios semelhantes: \*

	$-3xyz$	$4x^2y$	$71yz^2$	$-x^2y^2$	7
$-3yz^2$	<input type="radio"/>				
4	<input type="radio"/>				
$10x^2y$	<input type="radio"/>				
$x^2y^2$	<input type="radio"/>				
$4xyz$	<input type="radio"/>				

Observe a imagem a seguir e responda as questões 3 e 4



3. Qual monômio representa o perímetro da imagem a seguir? \*

Escolher ▾

4. Qual monômio representa a área da imagem? \*

- $10x$
- $16x$
- $10x^2$
- $16x^2$
- 10

Vídeo aula sobre adição e subtração de monômio, irá auxiliar na questão 5.



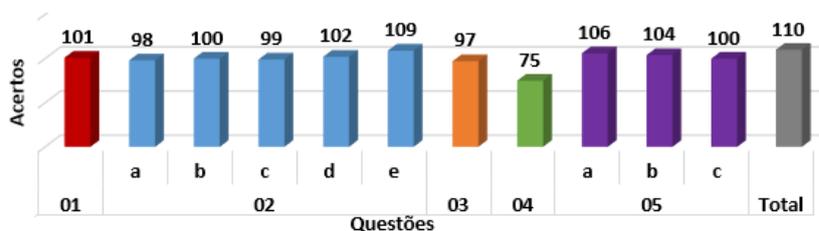
5. Efetue a adição de monômio: \*

	$11x$	$-2xy^2$	$-2x^2y$
$7x^2y+2x^2y-11x^2y$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$5x+8x-2x$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$3xy^2-6xy^2+xy^2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fonte: elaboração própria

### Resultados do Trabalho 03

Figura 27 – Números de Acertos do Trabalho 03



Fonte: elaboração própria

**Observação 3.6.** Conforme visto na Figura 27 a questão 04 teve o menor número de acertos, indicando uma deficiência na aprendizagem de polinômios como forma de representar áreas de polígonos genéricos. Para sanar este problema foram resolvidos exercícios semelhantes em sala de aula, bem como exercícios que envolviam o conceito de perímetro, dada a semelhança entre os conteúdos.

### 3.2.3 Aula 03 - Multiplicação e Divisão de Monômios

Duração: 2 horas e 30 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.7.** A Multiplicação de monômios é efetuada multiplicando-se coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

**Exemplo 3.8.**

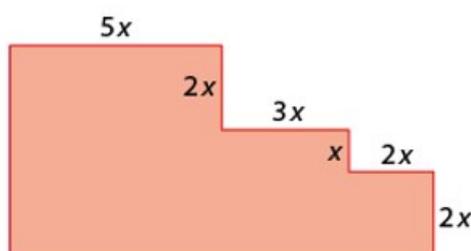
$$2xy \cdot 7x^2y = (2 \cdot 7) \cdot (x \cdot x^2) \cdot (y \cdot y) = 14x^3y^2$$

Nesta aula foram realizadas atividades que relacionam o conceito de perímetro e área com operações entre monômios, (GARCIA, 2014, p.63).

Figura 28 – Atividade do livro didático

#### PRATIQUE

1. Observe a figura e responda.



- Qual monômio representa o perímetro da figura?
- Qual monômio representa a área dessa figura?
- Os monômios que você encontrou nos itens **a** e **b** são semelhantes?

Fonte: elaboração própria

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.63), na aula subsequente.

**Definição 3.8.** A Divisão de monômios, com divisor diferente de zero, é efetuada dividindo-se coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

**Observação 3.7.**

- O quociente de dois monômios nem sempre é um monômio:

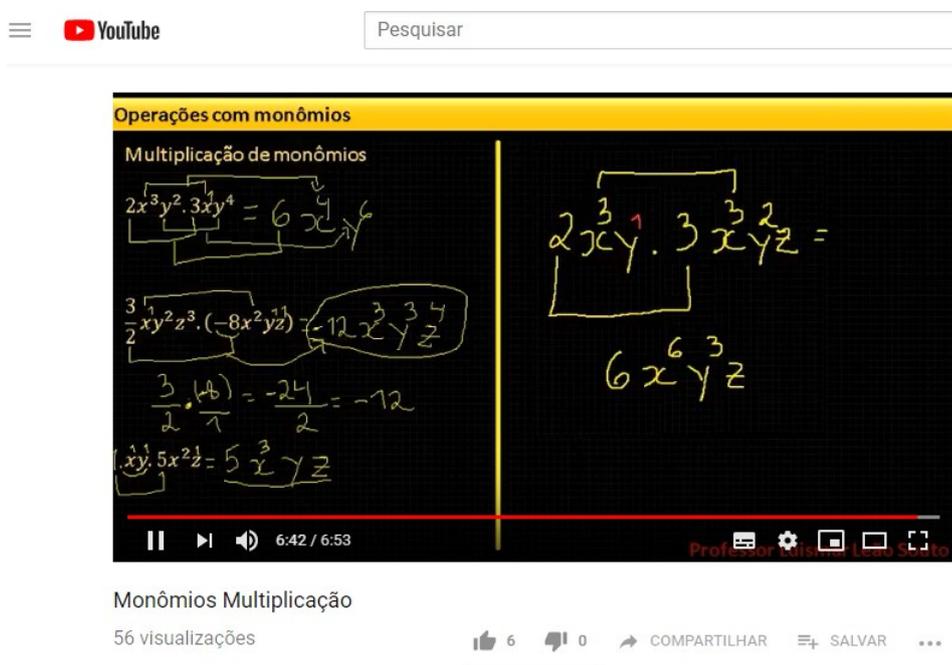
$$(-20x^5b^6) : (-4x^6b^4) = \frac{-20x^5b^6}{-4x^6b^4} = \frac{-20}{-4} \cdot \frac{x^5b^6}{x^6b^4} = \frac{5b^2}{x}$$

- Podemos verificar o resultado de uma divisão de monômios efetuando a operação inversa, ou seja, a multiplicação.

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.64), na aula subsequente.

Recurso EaD utilizado: Videoaulas criadas pelo autor.

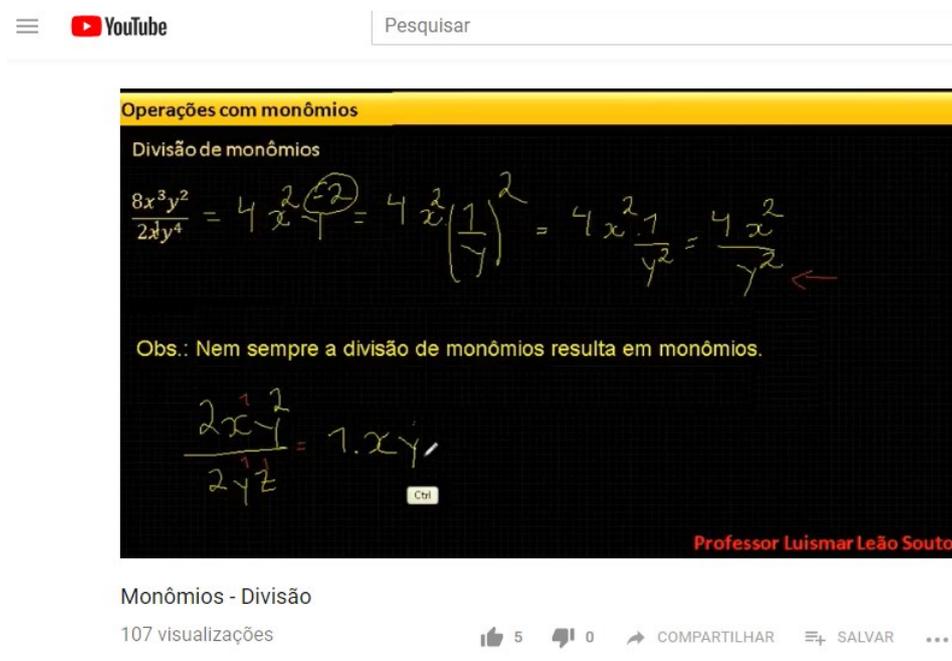
Figura 29 – Videoaula: Multiplicação de monômio



Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 29: <https://youtu.be/vXE0m3w142Q>

Figura 30 – Videoaula: Divisão de monômio



Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 30: <https://youtu.be/kjNgpyPZ8vk>

### 3.2.4 Aula 04 - Polinômios

Duração: 1 hora 40 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.9.** *Polinômio é uma soma finita de monômios.*

**Observação 3.8.** *O termo do polinômio que não apresenta variáveis (letras) é chamado de termo independente.*

**Exemplo 3.9.**

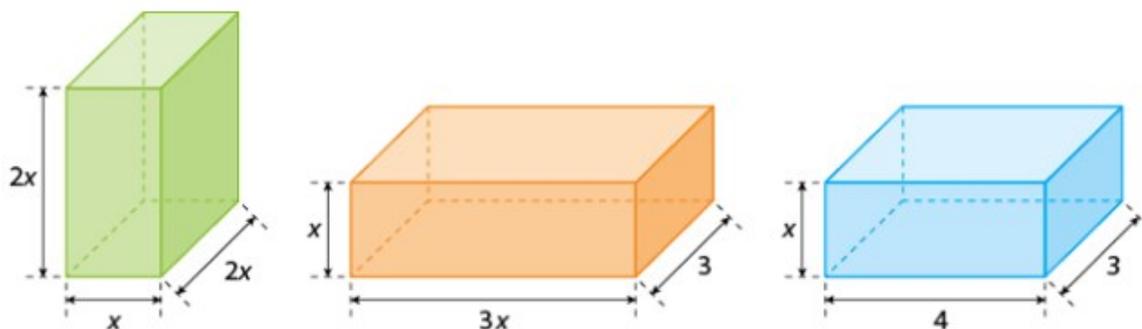
- $2x + 1$  tem 2 termos, e o termo independente é 1;
- $7x^4 + 3x^3 - 3x - 8$  tem 4 termos, e o termo independente é -8;
- $5x$  tem 1 termo, e o termo independente é nulo.

Na atividade a seguir será trabalhado o polinômio como uma forma de modelagem matemática de uma situação problema.

#### Atividade

Observe a Figura 31 e escreva o polinômio que melhor representa o volume total dos sólidos, ou seja, a soma dos volumes dos três sólidos.

Figura 31 – Volume total:  $4x^3 + 9x^2 + 12x$



Fonte: elaboração própria

#### Redução de termos semelhantes

Alguns termos de um polinômio podem ser semelhantes. Quando isso ocorre convém adicioná-los em um único termo, obtendo assim o polinômio reduzido.

$$4x^2y + 9x^4 - ab + 2x^2y - 3x^4 + a - 1 + 6ab + 8 =$$

$$6x^2y + 6x^4 + 5ab + a + 7 \quad \leftarrow \quad \text{polinômio reduzido}$$

#### Classificação de Polinômios

Classificamos os polinômios de acordo com o número de termos.

Nome	Exemplo		
Nulo	0		
Monômio	$2xy$	$5x^3$	$-mn$
Binômio	$2x + 1$	$x - y^2$	$2a^2 - b$
Trinômio	$x^4 + x - 1$	$x + y + z$	$x^3 + x^2 + x$
Polinômios com mais de três termos não recebem nomes especiais.			
Fonte: elaboração própria			

### Polinômio de uma variável

São polinômios que possuem apenas um símbolo para a variável, como nos exemplos a seguir, onde usaremos a variável  $x$ :

$$2x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 3;$$

$$x^2 + 5x + 6;$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

### Grau de um polinômio de uma variável

Em um polinômio de uma variável, o maior expoente em que o coeficiente não é zero é chamado de grau do polinômio.

#### Exemplo 3.10.

$$A : 2x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 3 \quad \text{Grau: } 4 \text{ ou } \text{gr}(A) = 4$$

$$B : x^2 + 5x + 6 \quad \text{Grau: } 2 \text{ ou } \text{gr}(B) = 2$$

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.69), na aula subsequente.

**Observação 3.9.** Um polinômio de grau  $n$  é dito completo quando aparecem todos os termos de grau menor que  $n$ , caso falte algum termo dizemos que o polinômio é incompleto.

Polinômio Incompleto	Polinômio Completo
$x^4 + 2x^2 - 2$	$x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x - 2$
$3x^5 - 1$	$3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 + x^1 - 1$
$-x^6 + x^4 - x$	$-x^6 + 0x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0$
Fonte: elaboração própria	

Note que no último exemplo não aparecia o termo independente, neste a parte literal tem expoente igual a zero, logo este deve ser

$$0x^0 = 0.1 = 0$$

**Oposto de um polinômio:** Dado um polinômio  $P$ , chamamos o polinômio  $-P$  de polinômio oposto.

#### Exemplo 3.11.

$$P = x^2 - 4x + 3$$

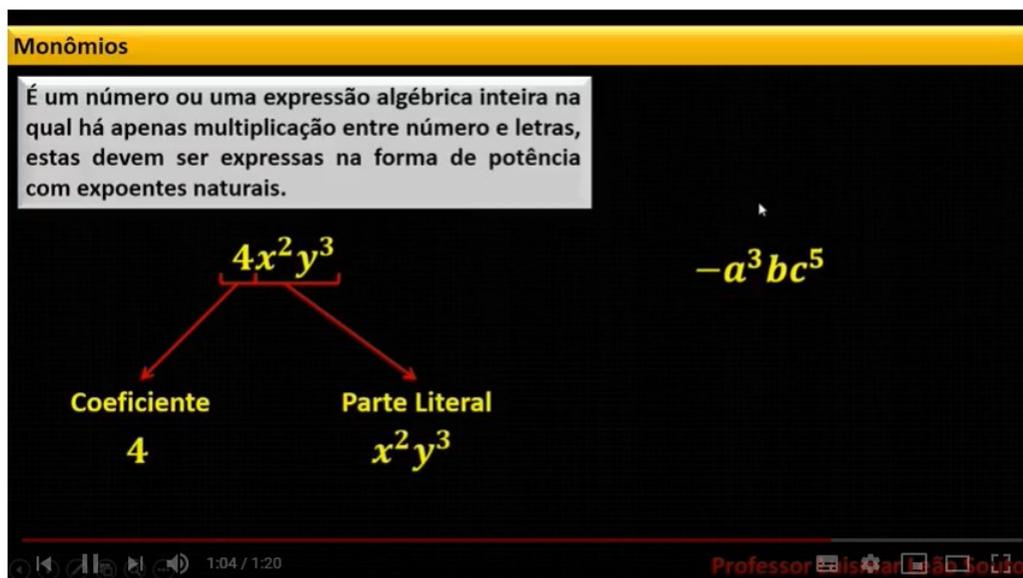
$$-P = -x^2 + 4x - 3$$

$$A = -4x^2 + 5x + 1$$

$$-A = +4x^2 - 5x - 1$$

Recurso EaD utilizado: Videoaulas criada pelo autor.

Figura 32 – Videoaula: Polinômios - Definição



Monômios - Definição

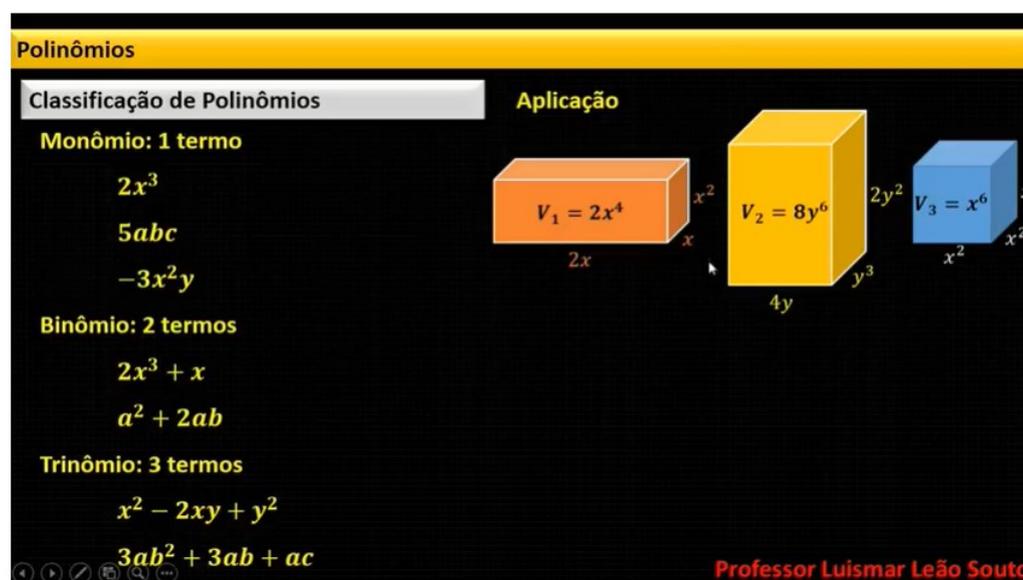
57 visualizações

👍 2 🗨️ 0 ➦ COMPARTILHAR 📌 SALVAR ...

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 32: [https://youtu.be/jH5mX\\_Zmr5Q](https://youtu.be/jH5mX_Zmr5Q)

Figura 33 – Videoaula: Polinômios - Classificação e Aplicação



Polinômios - Classificação e Aplicação

119 visualizações

👍 6 🗨️ 0 ➦ COMPARTILHAR 📌 SALVAR ...

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 33: <https://youtu.be/HeLyFvr2cl8>

Figura 34 – Videoaula: Polinômios de um variável e Grau de Polinômios

The screenshot shows a video player interface with a yellow header 'Polinômios'. Below it, there are two sections:

**Polinômio de uma variável**

Polinômio	Variável
$2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7$	$x$
$a^2 + 4a + 4$	$a$
$-y^3 + 2y$	$y$

**Grau de um polinômio**

$P: 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 7$	$Gr(P) = 4$
$Q: a^2 + 4a + 4$	$Gr(Q) = 2$
$R: -y^3 + 2y$	$Gr(R) = 3$

The video player controls at the bottom show a progress bar at 1:55 / 2:03 and the name 'Professor'.

Polinômios de uma variável e grau de polinômio

175 visualizações

👍 9 🗨️ 0 ➔ COMPARTILHAR 📌 SALVAR ⋮

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 34: <https://youtu.be/m-MOWL2jZrg>

Como as aulas ocorreram no mesmo período da Copa do Mundo de Futebol, foi criada uma videoaula com definições e propriedades de polinômios intitulada MathNews, Jornal da Matemática em tradução livre.

Figura 35 – Videoaula: MathNews - Telejornal de Matemática

The screenshot shows a video player interface with a dark background. In the center, there is a globe with a red 'M' logo and the text 'MathNews' in yellow. The video player controls at the bottom show a progress bar at 0:16 / 5:40 and the name 'MathNews - Polinômios'.

MathNews - Polinômios

201 visualizações

👍 21 🗨️ 0 ➔ COMPARTILHAR 📌 SALVAR ⋮

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 35: <https://youtu.be/FIMDVaOdjjA>

### 3.2.5 Aula 05 - Adição e Subtração de Polinômios

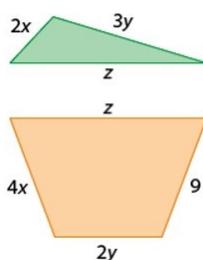
Duração: 50 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.10.** A adição algébrica de polinômios é obtida somando-se os termos semelhantes.

**Exemplo 3.12.** Qual o perímetro total das Figuras 36?

Figura 36 – Exemplo de Adição de Polinômios



Fonte: Elaboração própria.

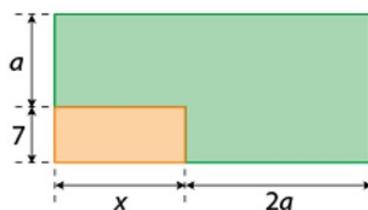
$$\begin{array}{r}
 P_1 = 2x + 3y + z \\
 P_2 = 4x + 2y + z + 9 \\
 \hline
 P_1 + P_2 = 6x + 5y + 2z + 9
 \end{array}$$

**Definição 3.11.** A subtração de um polinômio B de um polinômio A é obtida adicionando ao polinômio A o oposto de B, ou seja

$$A - B = A + (-B)$$

**Exemplo 3.13.** Qual a diferença entre o perímetro do retângulo maior e o perímetro do retângulo menor?

Figura 37 – Polinômios - Subtração



Fonte: elaboração própria

Resposta: Note que o perímetro do retângulo maior é dado pelo polinômio

$$A = 2a + x + 7 + a + 2a + x + 7 + a = 2x + 6a + 14$$

e o perímetro do retângulo menor é dado pelo polinômio

$$B = 7 + x + 7 + x = 2x + 14,$$

logo, fazendo  $A - B$  obtemos o resultado:

$$\begin{array}{r}
 A = 2x + 6a + 14 \\
 -B = -2x - 14 \\
 \hline
 A - B = A + (-B) = 2x - 2x + 6a + 14 - 14 = 6a
 \end{array}$$

Portanto a diferença entre o perímetro do retângulo maior e o perímetro do retângulo menor é dada por:

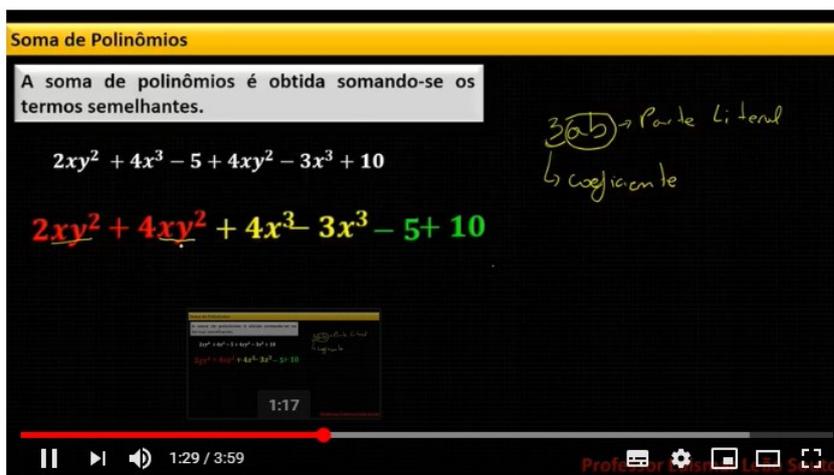
$$A - B = 6a$$

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.72), na aula subsequente.

**Recursos EaD utilizados:**

- Videoaulas criada pelo autor.

Figura 38 – Videoaula: Adição de Polinômios



Polinômios - Adição

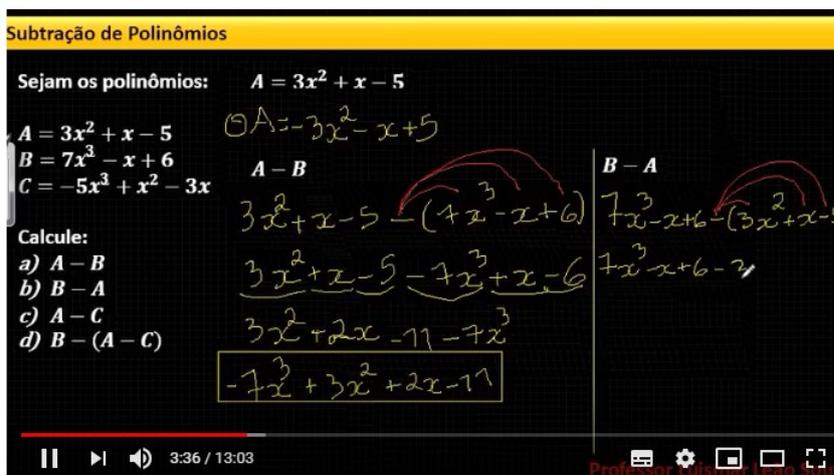
84 visualizações

4 likes 0 comentários COMPARTILHAR SALVAR

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 38: <https://youtu.be/EKR7c9xhMPQ>

Figura 39 – Videoaula: Subtração de Polinômios



Polinômios - Subtração

121 visualizações

8 likes 0 comentários COMPARTILHAR SALVAR

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 39: [https://youtu.be/SfFTR1h\\_Q7g](https://youtu.be/SfFTR1h_Q7g)

- Trabalho Online:  
<https://sites.google.com/site/leaosouto/matematica/matematica-8o-ano-cfes/trabalhos-online/trabalho-06>  
 Prazo de envio: uma semana a contar da data de solicitação.

Figura 40 – Polinômios - Trabalho Online 06

### Trabalho 06 - Polinômios

\*Obrigatório

Nome Completo: \*

Sua resposta

Turma \*

802

803

804

805

1. Classifique os polinômios a seguir: \*

	Monômio	Binômio	Trinômio	Polinômio
$3x^2+y^3+xy$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$2x^3$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$a+b^2+c^3+16$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$5x^2-5xy+y^2+5-y$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$-2x^2+5x+6$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$-xy+4$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$x^3+5x^2-x+2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2. Qual o grau dos polinômios a seguir? \*

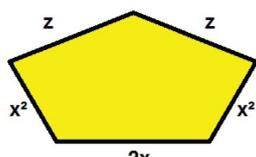
	0	1	2	3	4	5	6
$2x^3+5x-10$	<input type="radio"/>						
$-3x^4+5x^2+x^2-x+1$	<input type="radio"/>						
$-x^2+4x^2+4$	<input type="radio"/>						
$a^4+3a^3-a^2-a$	<input type="radio"/>						
4	<input type="radio"/>						

3. Qual o polinômio oposto de  $x^3+9x^2-5x-2$  \*

Escolher

4. Qual o polinômio representa o perímetro da figura a seguir? \*

Sua resposta



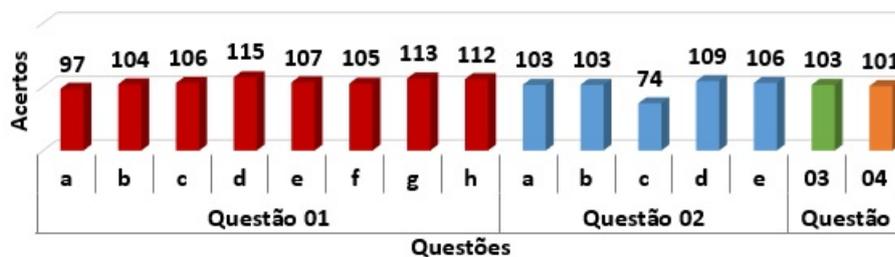
ENVIAR

Nunca envie senhas pelo Formulários Google.

Fonte: elaboração própria

### Resultados do Trabalho 06

Figura 41 – Números de Acertos do Trabalho 06



Fonte: elaboração própria

**Observação 3.10.** Conforme visto na Figura 41 houve um resultado não satisfatório na questão 02, item c, da Figura 40, que consistia em verificar o grau de um polinômio dado. O fato de o monômio de maior grau de um dos polinômios deste exercício aparecer no segundo termo confundiu alguns alunos. Tal situação foi revista em sala de aula, onde os alunos foram instigados a encontrar o erro, obtendo, após breve discussão sobre o assunto, um resultado satisfatório.

### 3.2.6 Aula 06 - Multiplicação de Polinômios

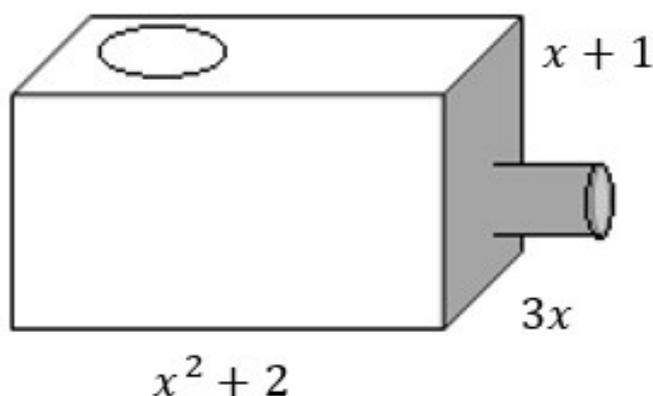
Duração 50 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.12.** A multiplicação de polinômios é obtida multiplicando-se cada termo do primeiro polinômio por cada termo do segundo, utilizando a propriedade distributiva.

**Exemplo 3.14.** Em um tanque de leite há um refrigerador com as dimensões da Figura 42. Qual é o polinômio que representa o volume desse equipamento?

Figura 42 – Polinômios - Multiplicação - Refrigerador



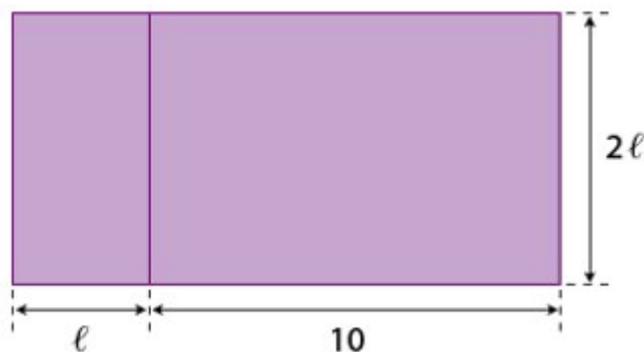
Fonte: elaboração própria

**Resultado:** Note que o volume do equipamento corresponde ao volume  $V$  de um paralelepípedo, isto é, o produto do comprimento  $c$ , largura  $l$  e altura  $h$ .

$$\begin{aligned} c &= x^2 + 2 & V &= c.l.h \\ l &= 3x & \Rightarrow V &= (x^2 + 2)(3x)(x + 1) \\ h &= x + 1 & V &= 3x^3 + 9x^2 + 6x \end{aligned}$$

**Exemplo 3.15.** Na Figura 43, considere três retângulos de mesma altura e responda:

Figura 43 – Polinômios - Multiplicação



Fonte: elaboração própria

a. Qual é o polinômio que representa a área do retângulo maior?

Resposta:  $A = 2l^2 + 20l$

b. Qual é o polinômio que representa a área do retângulo menor?

Resposta:  $2l^2$

c. Qual a diferença entre as áreas dos retângulos maior e menor? O que isso significa?

Resposta:  $20l$

Significa que a diferença da área maior para a menor é a área do retângulo direito da Figura 43 com largura de 10 e altura de  $2l$ .

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.74), na aula subsequente.

**Recurso EaD utilizado:** Videoaulas criada pelo autor.

Figura 44 – Videoaula: Polinômios - Multiplicação

**Multiplicação de Polinômios**

É obtida multiplicando-se cada termo de um polinômio por cada termo de outro polinômio.

a)  $4x^2 \cdot (2x^3 + x - 2)$   
 $8x^5 + 4x^3 - 8x^2$

b)  $(2x + 3) \cdot (x^2 - x + 7)$   
 $2x^3 - 2x^2 + 14x + 3x^2 - 3x + 21$   
 $2x^3 + x^2 + 11x + 21$

c)  $(a + b) \cdot (-3a + b^2)$

d)  $(xy + x + 3) \cdot (x^2 + y^3)$

Professor Luismar Leão Souto

Polinômios - Multiplicação de Polinômios

99 visualizações

👍 5 🗨️ 0 ➦ COMPARTILHAR ⚙️ SALVAR ...

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 44: <https://youtu.be/eRi704wyyh4>

### 3.2.7 Aula 07 - Divisão de Polinômios

Duração: 1 hora e 40 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

**Definição 3.13.** Dividir um polinômio  $A$  (dividendo) por outro  $B$  (divisor) significa encontrar um polinômio  $Q$ , chamado quociente, e um polinômio  $R$ , chamado resto, de grau menor que o grau do divisor ou nulo, de forma que:

$$A = B \cdot Q + R.$$

**Exemplo 3.16.** Calcule  $(2x^2 + 10x + 12) \div (x + 2)$ :

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 10x + 12 \quad |x + 2 \\
 \underline{-2x^2 - 4x} \phantom{+ 12} \quad 2x + 6 \\
 0 \phantom{+ 6x} + 12 \\
 \underline{-6x - 12} \\
 0 \phantom{+ 0}
 \end{array}$$

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.77), na aula subsequente.

**Recurso EaD utilizado:** Videoaulas criada pelo autor.

Figura 45 – Videoaula: Polinômios - Divisão

**Divisão de Polinômios**

Por monômio: É obtida dividindo-se cada termo do polinômio pelo monômio.

*Aplicação*

$2x^4 + 7x^2 + 3$  P

$2x^2 + 1$

$\cdot gr(A) \cdot, gr(B)$

$\cdot Pd. \text{ completo}$

$A = b \cdot h$

$A = b \cdot p$

$P = \frac{A}{b}$

$2x^4 + 0x^3 + 7x^2 + 0x + 3 \quad | \quad 2x^2 + 0x + 1$

Professor Luismar Leão Souto

Divisão de Polinômio por Polinômio

121 visualizações

7 1 COMPARTILHAR SALVAR ...

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 45: <https://youtu.be/chezI-jB1Z8>

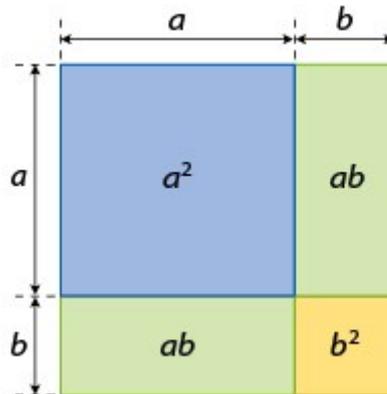
### 3.2.8 Aula 08 - Produtos Notáveis

Duração: 2 horas e 30 minutos.

Metodologia: aula expositiva dialogada.

### Quadrado da Soma

Figura 46 – Quadrado da Soma



Fonte: elaboração própria

Observe a Figura 46 e escreva o polinômio que representa a área:

- Azul:  $a^2$
- Verde:  $ab$ , como são dois retângulos,  $2ab$
- Laranja:  $b^2$
- Qual a área total? Espera-se que os alunos somem as áreas já conhecidas.

É possível encontrar a área total sem calcular cada uma das áreas coloridas? Resposta: Sim, utilizando as dimensões da imagem:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Definição 3.14.** *O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo. Ou seja, temos:*

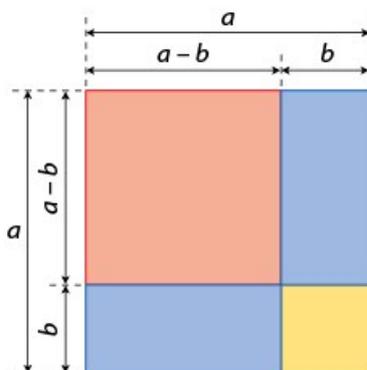
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

#### Exemplo 3.17.

- $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
- $(3 + 2y)^2 = 9 + 12y + 4y^2$
- $(x^2 + 3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2$

### Quadrado da diferença

Figura 47 – Quadrado da Diferença



Fonte: elaboração própria

Observe a Figura 47 e escreva o polinômio que representa a área:

- Todo o quadrado:  $a^2$
- Azul:  $b(a - b) = ab - b^2$  como são dois termos  $2ab - 2b^2$
- Laranja:  $b^2$
- Qual a área total do quadrado vermelho?  $a^2 - 2ab + b^2$

É possível encontrar a área total sem calcular cada uma das área coloridas? Resposta: Sim, utilizando as dimensões da imagem:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Definição 3.15.** O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo. Ou seja, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### Exemplo 3.18.

a.  $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b.  $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

c.  $(3 - 2y)^2 = 9 - 12y + 4y^2$

d.  $(x^2 - 3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$

### Produto da Soma pela Diferença

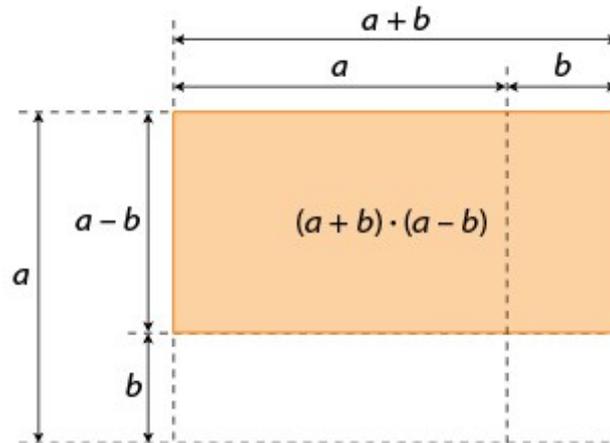
Observe a Figura 48 e escreva o polinômio que representa a área pintada:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

**Exemplo 3.19.** O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadro do segundo. Ou seja temos:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Figura 48 – Produto da Soma pela Diferença



Fonte: elaborado própria

**Exemplo 3.20.**

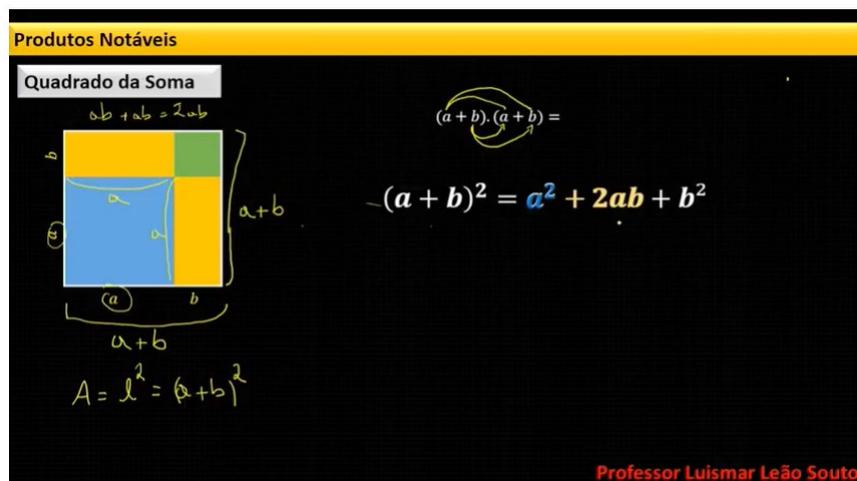
- a.  $(x + 3) \cdot (x - 3)^2 = x^2 - 9$
- b.  $(2x + 5) \cdot (2x - 5)^2 = 4x^2 - 25$
- c.  $(3 + 2y)(3 - 2y)^2 = 9 - 4y^2$

Ao final da aula o professor poderá solicitar a resolução de exercícios. Nesta aplicação foram resolvidos exercícios do livro didático utilizado na escola, (GARCIA, 2014, p.84-89), na aula subsequente.

**Recursos EaD utilizados:**

- Videoaula criada pelo autor.

Figura 49 – Videoaula: Polinômios - Produtos Notáveis



Produtos Notáveis  
131 visualizações

9 2 COMPARTILHAR SALVAR ...

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 49: <https://youtu.be/f6LN-NAy8bU>

- Lista de exercícios disponibilizada no site do professor e pelo aplicativo Zappar.

### 3.2.9 Exercícios

Como exercício será entregue a “Lista 15”, conforme ilustrado Figura 50:

Figura 50 – Link dos Exercícios na Plataforma



**Colégio Franciscano Espírito Santo**  
**Professor: Luismar Leão Souto**  
**Disciplina: Matemática**  
**Ano: 8º ano**

Página 1 de 2

**Lista 15 – Produtos Notáveis**

**Observação: Baixe o aplicativo Zappar e utilize a imagem ao lado para visualizar a videoaula deste conteúdo.**

**Vimos em aula três produtos notáveis:**

Quadrado da Soma $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado da Diferença $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Produto da Soma e da Diferença $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$
---	--	---



1. Substitua  $a$  e  $b$  por alguns números e verifique as igualdades a seguir:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	d) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	e) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$	f) $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$

2. Usando produto notável calcule as expressões a seguir:

a) $(x + 3)^2 =$	g) $(5x - 3)^2 =$
b) $(2x + 5)^2 =$	h) $(2a - 3b)^2 =$

3. Qual o polinômio que elevado ao quadrado é igual a:

a) $x^2 + 12x + 36$	
b) $y^2 - 10y + 25$	
c) $4a^2 - 4a + 1$	



Fonte: elaboração própria

Link para a lista de exercícios da Figura 50:

<https://sites.google.com/site/leaosouto/matematica/matematica-8o-ano-cfes>

**Observação 3.11.** Os alunos poderão utilizar o aplicativo Zappar, para acessar a videoaula criada pelo autor, para sanar alguma dúvida.

Figura 51 – Lista 15 de Exercícios

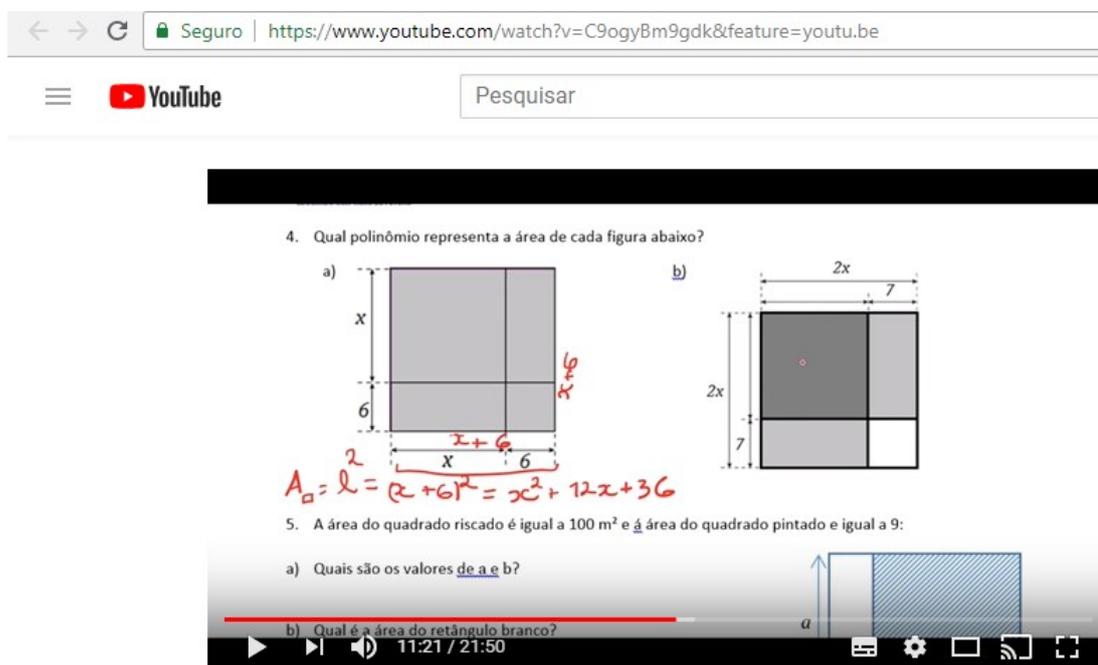


Fonte: elaboração própria

Link para o Zappar: <http://www.zappar.com/>

**Observação 3.12.** Os alunos, ao término dos exercícios, poderão verificar os resultado no vídeo postado no youtube criado pelo autor no link abaixo:

Figura 52 – Lista 15 de Exercícios - Resolução em vídeo



Correção da Lista 15 - Produtos Notáveis

123 visualizações

11 likes, 0 comentários, COMPARTILHAR

Fonte: elaboração própria

Link para a videoaula da Figura 52: <https://youtu.be/C9ogyBm9gdk>

**Observação 3.13.** Os exercícios da lista 15 (Figura 51) serão resolvidos na próxima aula.

## 4 Discussão dos Resultados da Aplicação da PVA

Neste capítulo são discutidos os resultados obtidos com a aplicação da PVA. Apresentamos relatos de alunos e colegas professores sobre as vantagens dos recursos que foram utilizados (Seção 4.1). Também apresentamos um comparativo entre o desempenho de turmas onde o trabalho foi aplicado e turmas onde o trabalho não foi aplicado (Seção 4.2).

### 4.1 Relato de alguns alunos e professores

Durante a aplicação da PVA houve vários relatos positivos a respeito do uso deste recurso, tanto de colegas professores quanto de alunos, Alguns professores, inclusive, solicitaram treinamento ao autor acerca do uso de algumas ferramentas apresentas neste trabalho. Em particular, uma professora do quarto ano da mesma escola, que verificou uma mudança no hábito de estudo dos alunos do oitavo ano, solicitou auxílio para gravar suas próprias videoaulas. A seguir é apresentado o relato desta profissional sobre a sua experiência com o uso desta ferramenta em sala de aula:

“Minha experiência em usar a mesa digitalizadora como recurso pedagógico foi super positiva. A aula se torna mais atrativa para o aluno, principalmente porque ela “prende” a atenção do aluno por mais tempo. Ela serve como um suporte ao professor, um instrumento a mais em sala de aula que auxilia para a construção do conhecimento de nossos alunos.”

Houve também comentários de alunos durante as aulas sobre suas experiências ao utilizar a plataforma, os mais frequentes foram referentes a vantagem da disponibilidade de acesso independente de horário ou local. Os alunos relataram a possibilidade de assistir aos vídeos várias vezes, até que o conteúdo fosse compreendido em sua totalidade. Vários alunos relataram que compreendiam o conteúdo melhor através das videoaulas do que em sala de aula.

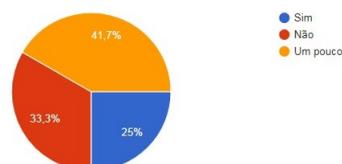
A seguir é apresentamos um relato de um aluno sobre o uso do aplicativo Zappar:

“Foi bem legal resolver os exercícios. Usei o aplicativo do professor antes de começar e depois conferi as resposta no canal do youtube”.

Afim de obter um *feedback* dos alunos sobre a utilização da plataforma virtual de aprendizagem, foi aplicado um questionário online com os alunos, com preenchimento não obrigatório. Os resultados são apresentados nas Figuras 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60 e 61:

1. Você gosta de estudar matemática?

Figura 53 – Questionário: Respostas Questão 1



Fonte: elaboração própria

2. Justifique sua resposta do item 1:

Figura 54 – Questionário: Respostas Questão 2

muito ruim
Tenho facilidade
Por que muitas coisas se aplicam no dia a dia mas muitas coisas nunca iremos ver na vida adulta...
Acho interessante o estudo e quando realmente entendemos o conteúdo fica muito mais fácil e tranquilo
Não sou muito fã de matemática mas é uma das matérias mais importantes no colégio e na vida, para o nosso futuro.
Porque eu acho algumas matérias estressantes
é chato
É meio confuso às vezes
Eu gosto de estudar e é bastante necessário
Gosto de calcular
Eu não gosto de estudar matemática porque não é uma matéria que me chama muito a atenção
Nunca gostei muito, achava chata, mas o tio Luismar deixou ela mais divertida

Fonte: elaboração própria

3. Por que se aprende Matemática? É importante? É útil?

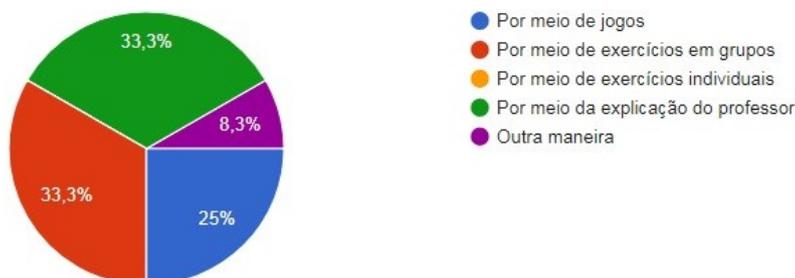
Figura 55 – Questionário: Respostas Questão 3

Ela é importante para a vida, muitas coisas que acontecem no nosso dia-dia estão relacionados a matemática.
Para facilitar a vida no futuro. Sim. Sim.
Acho essencial para ingressar na vida profissional, e auxilia muito no dia a dia. realmente é útil
É importante para o nosso dia dia, para conseguirmos um emprego bom em breve.
Para poder ser alguém na vida, sim é muito importante e muito útil.
tudo é movido a matemática, ou eu aprendo ou eu me atraso no tempo como a minha vó
Pq hj em dia para fazer a maioria das coisas a gente usa matemática
A matemática está em tudo e é bastante importante
sim, pois a matemática se é utilizada em varias situações do cotidiano
Se aprende matemática porque é importante para o aprendizado e útil para o conhecimento, para não termos excesso de trabalho manual e para a vida, poupar tempo.
Útil é né, porque usamos ela em tudo.

Fonte: elaboração própria

4. Qual é a melhor maneira de aprender matemática?

Figura 56 – Questionário: Respostas Questão 4



Fonte: elaboração própria

5. Você se dedica ao estudo da matemática?

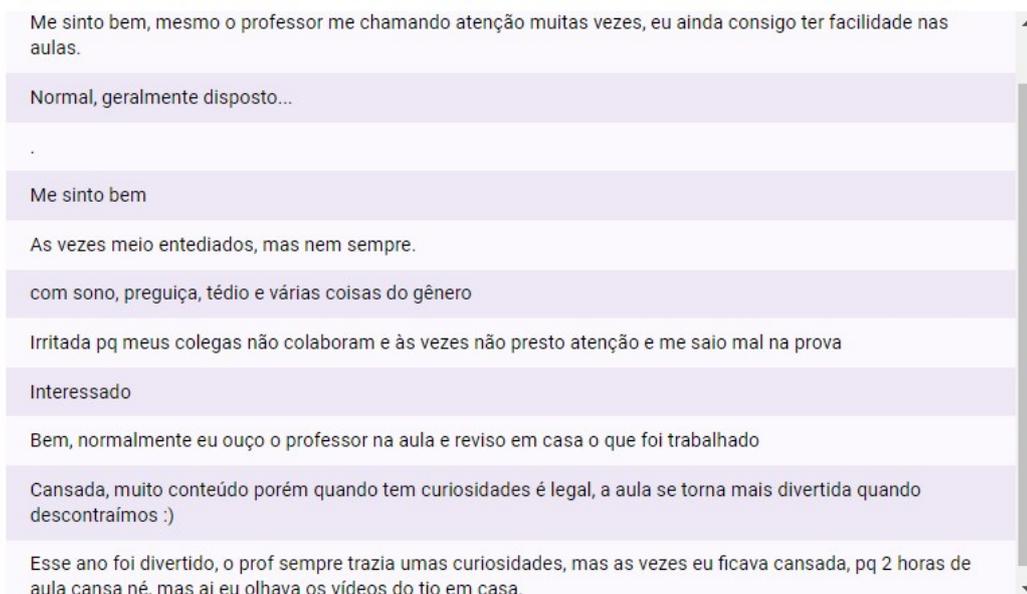
Figura 57 – Questionário: Respostas Questão 5



Fonte: elaboração própria

6. Como você se sente na aula de matemática? Justifique sua resposta:

Figura 58 – Questionário: Respostas Questão 6



Fonte: elaboração própria

7. Qual sua opinião sobre as videoaulas utilizadas pelo professor?

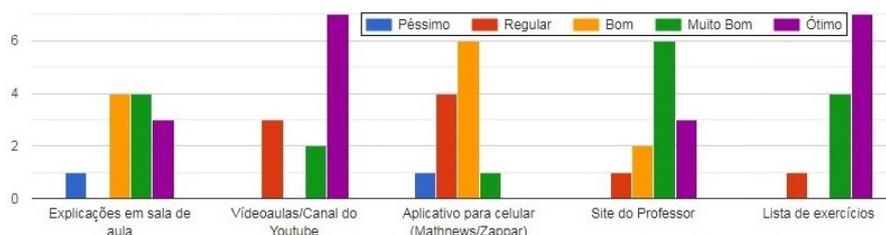
Figura 59 – Questionário: Respostas Questão 7

quero live no youtube para fazer perguntas
Eu acho uma ideia muito boa, se a pessoa tem uma duvida e esta em casa é só abrir o site do professor e acessar a vídeo aula que fala do assunto que a pessoa está em duvida.
Uma boa forma para os alunos revisarem os conteúdos...
São bem úteis, me ajudaram muito quando eu não entendia em sala de aula. Aliás pois tenho uma certa vergonha de perguntar
Acho as vídeo aulas muito boas e bem efetivas
São ótimas
útil
Nunca olhei
Muito boas, me ajudam muito
PERFEITASS
Gosto das videoaulas pois me ajudam a estudar antes da prova, são melhores e aprendo mais pois posso voltar quantas vezes forem necessárias e não temos conversa dos alunos.

Fonte: elaboração própria

8. Marque sua opinião sobre os recursos utilizados pelo professor:

Figura 60 – Questionário: Respostas Questão 8



Fonte: elaboração própria

9. O que você MAIS gostou nas aulas de matemática este ano?

Figura 61 – Questionário: Respostas Questão 9

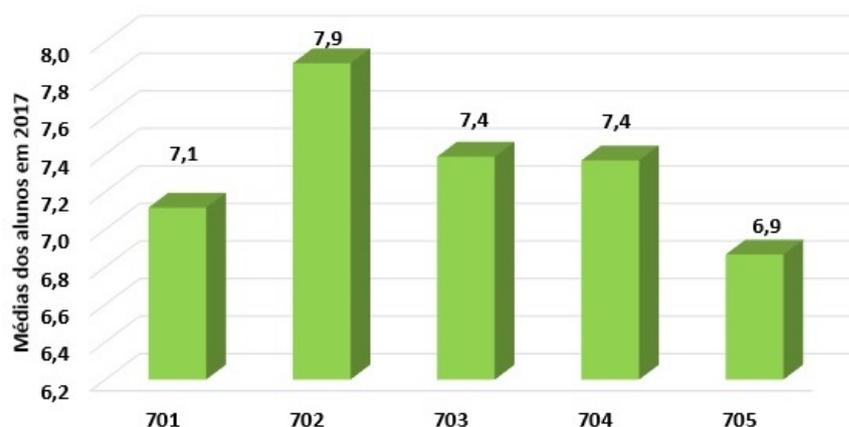
Quando o professor usou os tablets com a turma.
O professor ser engraçado e divertido com isso as aulas n ficaram tão cansativas
A maneira que o professor explica e as listas de exercício
Os conteúdos
Triângulos
de fazer o site
As listas Cpa *
A aula que nós aprendemos a fazer um site na informática
As explicações do professor e, como cada vez que dava a materia, trazia sempre consigo uma observação sobre esta
Das curiosidades e das listas, das histórias motivacionais(tipo a da vaca) e piadas :)
As curiosidades e os vídeos

Fonte: elaboração própria

## 4.2 Desempenho resultante da aplicação da PVA

Nesta seção fazemos um comparativo entre o desempenho de turmas onde o trabalho desta dissertação foi aplicado e turmas onde o trabalho não foi aplicado, todas turmas do oitavo ano. Para uma melhor análise destes dados, apresentamos a seguir as médias em matemática dos mesmos alunos no final do sétimo ano, isto é, no ano anterior por eles cursados. Aqui é importante ressaltar que a escola adota o seguinte critério na formação das turmas: todos os alunos do sétimo ano que estavam na turma 701 (e foram aprovados), no oitavo ano estarão na turma 801; os que estavam na turma 702 estarão na turma 802; e assim por diante.

Figura 62 – Médias dos alunos em 2017 - Sétimo Ano



Fonte: elaboração própria

Como mostra no gráfico na Figura 62, as turmas 701 e 705 obtiveram médias semelhantes, assim pode-se afirmar que essas turmas são semelhantes no que tange ao conhecimento matemático e podemos comparar seus desempenhos frente a aplicação da plataforma de aprendizagem aqui apresentada.

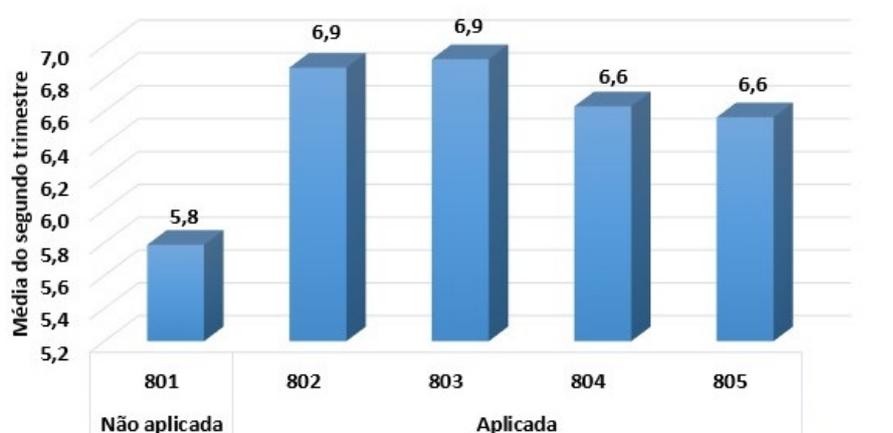
Na Figura 63, temos as médias das notas obtidas no trimestre em que a aplicação do trabalho foi feita. A plataforma foi aplicada em quatro das cinco turmas de oitavo ano: 802, 803, 804 e 805. Aqui observa-se que as turmas onde a plataforma de aprendizagem foi aplicada tiveram um melhor desempenho quando comparadas à turma onde não foi aplicada (turma 801), com destaque especial às turmas que no ano anterior tinham desempenhos semelhantes (801 e 805).

**Observação 4.1.** Destacamos que no período em que aplicamos a plataforma estudou-se polinômios, assunto este que é tido, pelos alunos, como um dos mais complicados do oitavo ano. Por este motivo nota-se que as médias dos alunos (de todas as turmas) neste período (Figura 63) foram mais baixas que as médias observadas no ano anterior (Figura 62).

A seguir também apresentamos gráficos que mostram o percentual de alunos de cada turma com notas acima e a baixo de sete, tanto do sétimo ano (Figura 64) quanto do segundo trimestre do oitavo ano (Figura 65).

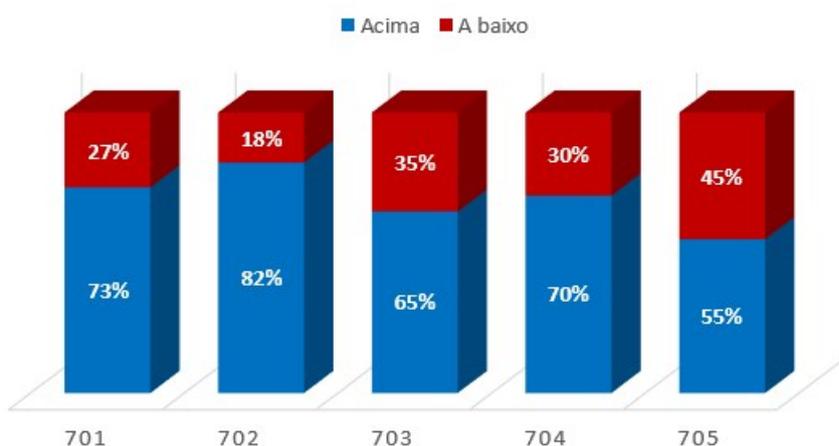
Como mostra a Figura 65, houve uma porcentagem maior de alunos com notas acima de sete nas turmas onde a ferramenta foi aplicada. Em particular houve uma inversão de percentuais nas turmas 801 e 805 em relação ao ano anterior, 701 e 705.

Figura 63 – Notas do Segundo Trimestre de 2018 - Oitavo Ano



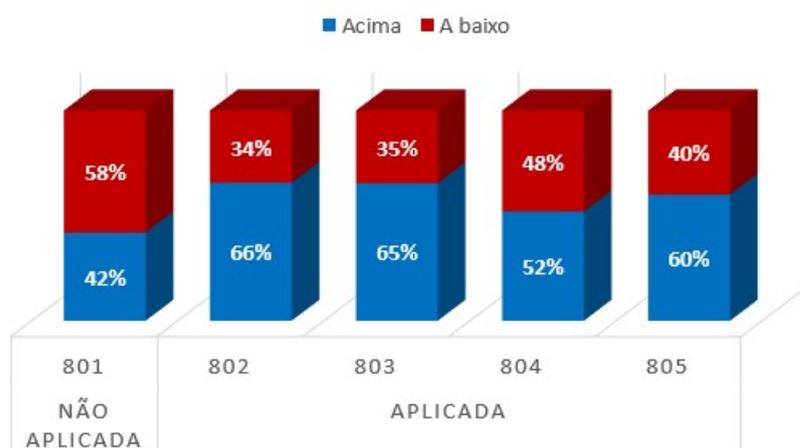
Fonte: elaboração própria

Figura 64 – Notas acima e abaixo de 7,0 - Sétimo Ano



Fonte: elaboração própria

Figura 65 – Notas acima e abaixo de 7,0 - Oitavo Ano



Fonte: elaboração própria

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi proposta a criação de uma plataforma virtual de aprendizagem como complemento às aulas presenciais acerca do conteúdo de polinômios. No decorrer deste trabalho notou-se uma melhora significativa no desempenho dos alunos que fizeram uso da plataforma quando comparados com alunos que não a utilizaram.

Vale salientar que o sucesso deste trabalho não esteve somente nos recursos tecnológicos aplicados, mas sim na união do professor, como agente transformador, e da tecnologia. Para o sucesso da plataforma é importante o professor saber direcionar suas atividades a partir dos resultados obtidos até o momento, como por exemplo o que foi feito com os trabalhos online 03 e 06, descritos nas atividades das aulas 02 e 05, respectivamente. Por este motivo, acreditamos que o fato de não termos utilizado uma ferramenta pronta mas sim criado uma, nos permitiu adaptá-la a realidade dos alunos.

Não houve dificuldades na aplicação deste trabalho, visto que as ferramentas utilizadas são familiares aos alunos, público alvo. Além disso, a utilização da plataforma virtual de aprendizagem teve boa aceitação na escola, tanto que outros professores solicitaram um treinamento para o uso das ferramentas utilizadas no processo, o qual está em desenvolvimento.

A aplicação da plataforma virtual de aprendizagem trouxe resultados, tanto no desempenho quanto na dedicação dos alunos aos estudos. Segundo os estudantes e alguns pais, o tempo de estudo teve um aumento considerável e, como consequência, houve um melhor resultado nas avaliações.

A utilização de tecnologias computacionais no ensino da matemática só tem a somar no processo de ensino-aprendizagem, tanto pela familiaridade com as ferramentas por parte dos alunos quanto pela continuidade da formação do professor, que, ao se deparar com novas ferramentas de aprendizagem, para as quais grande parte dos docentes não teve formação durante a graduação, tende a sair da zona de conforto e buscar novos conhecimentos, quebrando paradigmas.

O trabalho não termina aqui, essa plataforma continuará sendo atualizada, alimentada, modificada e readaptada para as novas demandas que irão surgir. Novas ferramentas serão incorporadas a ela, enquanto outras, com o tempo, poderão se tornar obsoletas. O professor que utiliza este tipo de tecnologia deve estar atento às novas tendências tecnológicas e não deve exitar em abandonar ferramentas que fiquem ultrapassadas. Este é o ponto onde paradigmas são quebrados, já que acomodação é uma palavra que não existe no mundo tecnológico.

# Referências

- BONA, A. S. D.; FAGUNDES, L. da C.; BASSO., M. V. de A. *Reflexões sobre a educação a distância na educação matemática*. 2011. Disponível em: <[http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic\\_literatura/artigos/ead/12714.pdf](http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/ead/12714.pdf)>. Acesso em: 26.11.2018. Citado na página 15.
- BRAS, R. S. C.; FIGUEIRA, C.; PAIVA, J. *E-learning: o estado da arte*. 1. ed. Coimbra: Sociedade Portuguesa de Física, 2006. Citado na página 16.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 1996. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm)>. Citado na página 14.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Matemática*. Brasília, 2018. 472 p. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf)>. Citado na página 13.
- CASTELLS, M. *A sociedade em rede*. 1. ed. SÃO Paulo: Paz e Terra, 2007. Citado na página 15.
- CETIC.BR. *Pesquisa Sobre o Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Escolas Brasileiras*. 2017. Disponível em: <[https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic\\_edu\\_2017\\_livro\\_eletronico.pdf](https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic_edu_2017_livro_eletronico.pdf)>. Acesso em: 15.12.2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 19.
- CONZI, D. *Pesquisa internacional mostra sobrecarga do professor brasileiro*. 2014. Disponível em: <<https://gauchazh.clicrbs.com.br/geral/noticia/2014/06/Pesquisa-internacional-mostra-sobrecarga-do-professor-brasileiro-4536184.html>>. Acesso em: 14.12.2018. Citado na página 18.
- CORRÊA, P. M. H. *A plataforma Khan Academy como auxílio ao ensino híbrido em Matemática: um relato de experiência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande - FURG, 2016. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=95160](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95160)>. Acesso em: 01.12.2017. Citado na página 13.
- FORTE, C. E.; KIRNER, C. Usando realidade aumentada no desenvolvimento de ferramenta para aprendizagem de física e matemática. *6º Workshop de Realidade Virtual e Aumentada — Educação*, <http://sites.unisanta.br/wrva/st/62200.pdf>, n. 1, p. 6, 2009. Disponível em: <<http://sites.unisanta.br/wrva>>. Citado na página 28.
- FUGIOMO, S. M. A.; ALTOÉ, A. A resistência das professoras da educação básica em relação ao uso do computador em sala de aula. *Programa de Pós-Graduação em Educação — Educação*, Maringá, n. 1, p. 11, 2009. Disponível em: <[http://www.ppe.uem.br/publicacoes/seminario\\_ppe\\_2008/pdf/c020.pdf](http://www.ppe.uem.br/publicacoes/seminario_ppe_2008/pdf/c020.pdf)>. Citado na página 18.
- GARCIA, M. R. *Matemática Ensino Fundamental*. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 38, 39, 40, 42, 45, 49, 52, 53 e 56.
- GOMES, M. J. *E-LEARNING: Reflexões em torno do conceito*. 2005. Disponível em: <<https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/2896/1/06MariaGomes.pdf>>. Acesso em: 16.12.2018. Citado na página 16.
- GONZALES, M. *Fundamentos da Tutoria em Educação a Distância*. 2. ed. São Paulo: Avercamp, 2015. Citado na página 17.
- GONÇALVES, O. A. N. A utilização da plataforma de e-learning moodle no ensino/aprendizagem da matemática do 10.º ano. *Departamento de Engenharia Física da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto — Educação*, Porto, Portugal, n. 1, p. 110, 2009. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/59608/1/000136323.pdf>>. Citado na página 15.
- KEEGAN, D. *Foundations of distance education*. 3. ed. Londres: Routledge, 1996. Citado na página 14.
- KHAN, S. *Um mundo, uma escola*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Intrínseca Ltda, 2013. Citado na página 30.

MALHEIROS, A. P. dos S.; AMARAL, R. B.; BORBA, M. de C. *Educação a distância online*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Citado na página 15.

MEC. *Pesquisa internacinal sobre Ensino e Aprendizagem*. Brasília, 2014. 40 p. Disponível em: <[http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pesquisa\\_talis/2013/talis2013\\_relatorio\\_brasil.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pesquisa_talis/2013/talis2013_relatorio_brasil.pdf)>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

MENDONÇA, A. F. de; RIBEIRO, G. A. de A. M. E. N. *A importância dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem na busca de novos domínios da EaD*. 2007. Disponível em: <<http://www.abed.org.br/congresso2007/tc/4162007104526AM.pdf>>. Acesso em: 03.09.2018. Citado na página 16.

MOGNHOL, T. D. *O uso da plataforma adaptativa Khan Academy no ensino de Matemática e o impacto nas avaliações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, 2015. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=92281](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=92281)>. Citado na página 13.

MORAIS, M. C. *Educação a distância: fundamentos e práticas*. 1. ed. Campinas: Unicamp/Nied, 2002. Citado na página 16.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 32.

PEREIRA, G. de C.; MAGALINI, L. M. *Videoaulas em Primeira Pessoa: suas Características e sua Contribuição para a EaD*. 2017. Disponível em: <<http://eademfoco.cecierj.edu.br/index.php/Revista/article/view/475/256>>. Acesso em: 22.12.2018. Citado na página 30.

ROCHA, C. C. da S. Análise do baixo desempenho em matemática dos alunos do 6º ano do ensino fundamental da escola estadual getúlio vargas. *Mestrado Profissional CAEd/FACED/UFJF — Educação*, Belo Horizonte-MG, n. 1, p. 135, 2014. Disponível em: <<http://www.mestrado.caedufjf.net/wp-content/uploads/2014/11/CREUSA-COELHO-DA-SILVA-ROCHA.pdf>>. Citado na página 12.