UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NEHEMIAS MONTEIRO BRITO JÚNIOR

DESMISTIFICANDO E DINAMIZANDO O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

BELÉM-PA
2019

NEHEMIAS MONTEIRO BRITO JÚNIOR

DESMISTIFICANDO E DINAMIZANDO O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação da Profª. Drª. Joelma Morbach.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BELÉM-PA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B862d Brito Júnior, Nehemias Monteiro.
DESMISTIFICANDO E DINAMIZANDO O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA/ NEHEMIAS MONTEIRO BRITO JÚNIOR,. — 2019.
125 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Joelma Morbach
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Pensamento algébrico. Álgebra básica. Generalizações de padrões. Ensino de Álgebra. História da Álgebra.. I. Título

CDD 512.9

NEHEMIAS MONTEIRO BRITO JÚNIOR

DESMISTIFICANDO E DINAMIZANDO O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação da Profª. Drª. Joelma Morbach.

Trabalho aprovado. BELÉM-PA, 15 de Março de 2019:

Profª. Drª. Joelma Morbach
Orientadora

Profª. Drª. Cristiane Ruiz Gomes
Membro interno

Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento
Membro externo

BELÉM-PA
2019

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria José Monteiro Brito.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde, sabedoria e por mais esta conquista em minha vida.

Agradeço aos meus pais, Nehemais Antônio Loureiro de Brito (em memória) e Maria José Monteiro Brito por estarem sempre ao meu lado, ensinando bons valores, a respeitar a todos, sempre me incentivando a estudar, trabalhar, batalhar de forma honesta e, tudo isso, com muito amor.

Agradeço aos meus filhos Henzo Raiol Brito e Ludmylla Vitória Marques Brito por, simplesmente, existirem na minha vida. Vocês são dois presentes que Deus me deu e se hoje eu penso em conquistar alguma coisa é para deixar algo de bom pra vocês.

Agradeço aos meus queridos irmãos, Guilherme José Monteiro Brito e Leonardo Monteiro Brito por sempre estarmos juntos e ajudando, uns aos outros, em qualquer situação. Sei que sempre posso contar com vocês.

Agradeço à minha saudosa avó, Amália Bezerra da Silva Monteiro (em memória) que foi minha mãe também, fez muito por mim e devo demais a ela por ter chegado aqui.

Agradeço à minha namorada, Jordane Falcão, por todo apoio nessa caminhada.

Agradeço a todos os professores que dispuseram do seu precioso tempo para nos passar um pouco de seu conhecimento, em especial, a Professora Drª Joelma Morbach, minha orientadora, por toda paciência, apoio, incentivo e orientações.

Agradeço à Universidade Federal do Pará e ao PROFMAT/IMPA pela preciosa oportunidade de me tornar Mestre.

Agradeço a todos os colegas de turma, por toda ajuda e companheirismo durante essa caminhada, sabemos que não foi nada fácil, mas também tivemos muitos momentos de descontração e risadas.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a realização deste momento.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

(Lobachevsky)

Resumo

Nesta dissertação, o objetivo é desenvolver, aplicar e analisar uma sequência de tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica. Destacamos nossa preocupação com o ensino e aprendizagem da Álgebra básica com os alunos da educação básica da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Profº. Temístocles Araújo, localizada no Município de Belém, onde o autor atua como Professor de Matemática desde 2008. Buscaremos, através de atividades, com o software Geogebra, generalizar padrões, desmistificar e dinamizar o ensino de Álgebra básica para o desenvolvimento de um ensino que promova a compreensão deste ramo da Matemática. Faremos uma análise comparativa de como o ensino da Álgebra deveria ser abordado de acordo com os PCN, e de como será, a partir de agora, com a nova BNCC, e assim desenvolver uma proposta que contemple a produção de significados para as atividades algébricas apresentadas em sala de aula, tendo por base essa nova legislação. Por fim, mostraremos como a Álgebra está relacionada, diretamente, com outros ramos da Matemática tais como a Aritmética e a Geometria, fazendo uso da tecnologia, materiais manipulativos e resolução de situações problema.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Álgebra básica. Generalizações de padrões. Ensino de Álgebra. História da Álgebra.

Abstract

This research aims to develop, apply and analyze a sequence of tasks for developing the algebraic thinking in basic education. We highlight our concerning to the teaching and learning elementary algebra to Primary students at Temístocles Araújo School, a State Public Institution of Primary and Secondary School, located in Belém City, where the researcher of this current work has acted out as a Mathematics teacher since 2008. Through these tasks and The Geogebra Software, we intend to seek patterns generalizations, demystify and boost the learning of elementary algebra for a learning which promotes the better understanding of this mathematics field. We will carry out a comparative analysis of how Algebra learning should be approached according to The National Curriculum Parameters (NCP), and how it will be dealt from now on at the Common Curriculum National Basis (CCNB) and, therefore, develop a draft integrating meaningful production of algebraic tasks carried out in class, based on this new regulation. Lastly, we will show how algebra is straightly related to other fields of mathematics such as arithmetic and geometry, making use of technology, handling materials and problem-solving situations.

Keywords: Algebraic thinking. Basic Algebra. patterns Generalizations. Algebra Learning. History of Algebra.

Lista de ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, independentemente de sua profissão ou classe social, ou seja, você não precisa ser um estudante, professor de Matemática ou, simplesmente, gostar dela para se deparar com situações em que você precisará conhecê-la e, até mesmo, usá-la. Algumas vezes ela aparece de uma forma bem explícita e outras vezes nem tanto, um pouco mais sutil, como por exemplo: No momento em que recebemos, de troco, uma certa quantia em dinheiro referente ao pagamento de uma conta, quando olhamos para nosso relógio e procuramos saber que horas ele está marcando, ao ler a bula de um remédio para saber que dosagem devemos ingerir, em uma receita culinária a quantidade de ingrediente de um certo produto que iremos utilizar em um determinado prato que estamos preparando, nas medidas utilizadas na construção de uma casa, na confecção de um bordado ou de um modelo de roupa ou até mesmo quando abrimos um jornal e nos deparamos com gráficos ou tabelas, porcentagens, cuja compreensão requeira um certo conhecimento matemático entre muitas outras situações.

O Ensino da Matemática é justificado, em larga medida, pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exibe, proporcionando ao educando excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas habilidades intelectuais.

> Mas a razão mais importante para justificar o ensino da Matemática é o relevante papel que esta disciplina desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano. Desde os primórdios da civilização, o homem, como "ser pensante", sempre quis entender o mundo em que vive. Será que a terra é plana? Como se suporta? Como são seus limites últimos? A abóbada celeste é uma fronteira última, com as estrelas nela incrustadas? E o que são essas estrelas? Por que e como alguns corpos celestes – os planetas – se deslocam erraticamente? O que existe para além dessa abóbada? Como explicar o movimento do Sol e da Lua? A matéria é indefinidamente divisível ou constituída de "átomos" indivisíveis? Ou cada tipo de matéria é formada de alguns elementos básicos, como terra, água, fogo e ar? (ÁVILA, 2010, p.6). [1]

Na sociedade atual e moderna, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor deve realizar a tarefa de motivar e instigar o aluno, relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, em seu cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula. Inserir o conteúdo em contexto mais amplo, provocando a curiosidade do aluno, ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através da real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. No entanto, é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões "do seu jeito". O espaço para tentativa e erro é importante para desenvolver familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem. E nesse processo é muito importante a utilização do software Geogebra, pois nele o aluno terá a facilidade de reproduzir várias vezes, caso erre, sua atividade, sem ser necessário estar apagando ou rasurando, tornando o processo de aprendizagem bem mais rápido, dinâmico e, com certeza, mais atrativo e interessante.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) [3], uma das principais finalidades do ensino da Matemática é a construção da cidadania.

Para que isso seja possível, de acordo com tais parâmetros, deve-se proporcionar ao aluno meios para que o mesmo possa:

- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa e utilizar os conceitos e procedimentos matemáticos bem como os instrumentos tecnológicos disponíveis.

Uma das grandes dificuldades no ensino da Matemática é a linguagem que precisa ser utilizada. Muitas vezes, percebemos que os alunos compreendem a "ideia" mas não são capazes de manipular a linguagem. Outras vezes, o que é pior, manipulam a linguagem de forma automática sem aprender seu significado, ou seja, muitas vezes eles decoram as fórmulas sem compreender seu significado. O que o autor percebeu, no dia-a-dia com alguns de seus alunos é que, em muitos casos, eles sabiam as fórmulas necessárias para resolver um exercício, mas não sabiam quando iriam usá-la ao se depararem com questões um pouco mais complexas e contextualizadas.

O conhecimento matemático tem seu significado estabelecido quando, ao enfrentar situações desafiadoras, os alunos conseguem desenvolver estratégias de resolução. Tais estratégias podem ser desenvolvidas através de atividades em sala de aula, utilizando ferramentas ou explorando situações do cotidiano em que a Matemática está presente, já que ela é, direta ou indiretamente, instrumento do qual dependem, para sua organização, as demais ciências, como a Física, a Química, a Biologia, a Astronomia etc.

> O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade. (ÁVILA, 2010, p.8). [1]

A aprendizagem da Matemática depende de vários fatores o que torna o seu ensino bastante complexo. É necessário desenvolver o raciocínio algébrico e estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Desta forma, os professores de Matemática devem concentrar-se em aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, organização, concentração, atenção e raciocínio, aumentando a socialização e as interações pessoais. Tendo em conta tais aspectos e atendendo também a que um número muito considerável de alunos não apresenta muito interesse pela Matemática, torna-se de grande importância a utilização, por parte do professor, de outras ferramentas de ensino, além do quadro e do livro didático, como: software, jogos, trabalhos em grupos, trabalhos aplicados em situações reais da vida do aluno, trabalhos interdisciplinares, trabalhos utilizando temas transversais para complementar o estudo e a obtenção de melhores resultados no aprendizado dos conteúdos. Através dessas ferramentas é possível proporcionar experiências novas e promover o trabalho em equipe. O papel do professor é de extrema importância pois é ele quem vai orientar a aula de tal modo que os objetivos, a que se propôs atingir sejam alcançados.

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (BRASIL, 1998, p.36). [3]

Nós, professores de Matemática, devemos mostrar aos nossos alunos que a Matemática pode ser divertida, desenvolver o raciocínio lógico para a resolução de problemas, coordenação motora, habilidades, estimular a participação do aluno em atividades conjuntas para desenvolver a capacidade de ouvir e respeitar a criatividade dos colegas. Trabalhar o raciocínio espacial, a análise e síntese, a introdução das letras (incógnitas) como forma de padronizar uma situação, familiarizar o aluno com as figuras básicas da geometria e vários outros conteúdos, promovendo o intercâmbio de ideias como fonte de aprendizagem para um mesmo fim.

Neste trabalho, tivemos como objetivo geral mostrar a importância do ensino da Álgebra Elementar[1], destacando algumas mudanças de como era cobrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e como será exigida pela nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e desmistificar a concepção de que ela está distante dos outros ramos da Matemática, e com isso, procurar uma forma de dinamizar o seu ensino utilizando o software de Matemática dinâmica Geogebra, contribuindo, assim, com o processo da aprendizagem, pois um dos principais fatores que impedem a obtenção de melhores resultados neste ramo da Matemática é a fraca motivação dos alunos pela mesma.

Para alcançarmos esse objetivo geral, vamos seguir por alguns objetivos mais específicos como: Investigar as principais dificuldades que os alunos apresentam no ensino de Álgebra, avaliando sua capacidade de raciocínio algébrico, a utilização da letra como variável, mostrar a importância e a relação da Álgebra com outros ramos da Matemática como Aritmética e Geometria e trabalhá-la de uma forma mais dinâmica, utilizando a informática, os softwares, a

[1] Álgebra Elementar é uma forma básica e fundamental da Álgebra, ensinada e estudada na Escola Básica.

tecnologia, algo que nós sabemos que faz parte da vida desses jovens e que eles dominam muito bem. Para isso, procederemos da seguinte forma: primeiramente, resolveremos exercícios diretos, sem contextos, para que eles consigam generalizar padrões, montar equações, se familiarizar com as incógnitas, para depois aplicarmos em questões contextualizadas, como por exemplo, questões de provas de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), fazer aplicações em situações reais do seu dia-a-dia para que eles possam ver que os assuntos estudados em sala de aula podem ser aplicados em situações reais, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dessas crianças e desses jovens, promovendo, na sala de aula, um espaço de produção do conhecimento algébrico, como recomenda a nova BNCC.

Deste modo, o uso da informática dentro e fora da sala de aula pode possibilitar uma maior predisposição para a aprendizagem. Percebemos que, utilizando desses artifícios para trabalhar alguns conteúdos, o rendimento e entendimento dos alunos podem ser maiores. Notamos que o pensamento fica mais rápido, a criança ou o jovem tem maior desenvoltura e consegue assimilar os conteúdos com maior facilidade.

O que motivou a realizar essa pesquisa foi a grande dificuldade percebida pelo autor em muitos de seus alunos, tanto da escola pública como na privada em que ele atua, principalmente, no que se refere ao aprendizado de Álgebra básica e, até mesmo, como relacioná-la com outros ramos da Matemática como, por exemplo, a Aritmética e a Geometria. E para isso, procurei responder a seguinte pergunta: É possível desenvolver, aplicar, analisar e relacionar os conteúdos de Álgebra, na educação básica, com outros ramos da Matemática; como por exemplo, a Aritmética ou a Geometria para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos nossos alunos com o objetivo de contribuir para a melhoria do aprendizado?

A metodologia usada nessa pesquisa foi a seguinte: Faremos uma abordagem histórica desse ramo da Matemática para mostrar um pouco de como ela se desenvolveu ao longo do tempo, procurando manter uma linguagem acessível para o leitor. Em seguida, uma pesquisa bibliográfica com a finalidade de compreender o posicionamento de alguns autores (fundamentação teórica) da área a respeito do ensino de Álgebra básica e analisar os resultados dessas pesquisas e, principalmente, fazer uma comparação entre o que orientava os PCN e o de como passou a ser a orientação da nova BNCC, com relação ao ensino da Álgebra na educação básica. Analisaremos, através de resolução de exercícios, quais as principais dificuldades que os alunos têm para introduzir o pensamento algébrico e vamos propor uma sequência didática de atividades aplicando tópicos de Álgebra elementar. Mostraremos como a Álgebra pode ser relacionada com outros ramos da Matemática e trabalhá-la de uma forma dinâmica, utilizando o software Geogebra e aplicações em situações reais do dia-a-dia, como em nossa horta escolar.

Como os PCN indicam a "História da Matemática" como um caminho que ajuda o professor no processo de ensino da Matemática, o capítulo a seguir vem fazendo uma abordagem sobre a História da Álgebra.

1 HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

A **Álgebra** é o ramo da Matemática que estuda as estruturas, as relações e as quantidades. A álgebra elementar é aquela que diz respeito às operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação, divisão) mas que, ao contrário da aritmética, utiliza **símbolos (a, x, y)** em vez de números (3, 5, 9). Deste modo, pode-se formular leis gerais e fazer referência a números desconhecidos/**variáveis (incógnitas)**, o que possibilita desenvolver equações e análises correspondentes à sua resolução.

Neste capítulo falemos um pouco sobre a História da Álgebra. Como ela se desenvolveu ao longo do tempo, sua evolução e dos grandes gênios da Matemática que deixaram suas contribuições para o desenvolvimento desse belíssimo ramo da Matemática. Dentre vários nomes importantes, daremos ênfase aos trabalhos de **Tales, Pitágoras, Euclides, Bhaskara, Fibonacci, Cardano, Tartaglia, Ferrari, Bombelli, Viète, Diofanto, Fermat, Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Gauss, Abel e Galois**.

E para começar, poderíamos tentar responder a seguinte pergunta: Quando teria o homem começado a fazer Matemática?

Algumas pesquisas demonstram que a presença do homem na Terra é muito mais antiga do que se imaginava. Os primeiros hominídios a andar apenas com duas pernas (bípede) surgiram na África há pelo menos 4.000.000 de anos. O homem moderno, denominado **Homo Sapiens Sapiens**, que fala, pensa, inventa e interfere na natureza, parece ter surgido entre 300.000 e 200.000 anos atrás, novamente na África.

> Há a cerca de 20.000 anos a arte já atingira grande qualidade, como demonstram as belíssimas pinturas de animais em cavernas na França e Espanha, numa prova de que formas e distribuições espaciais haviam se tornado familiares ao homem. A prática de contagem, em especial de pessoas e de animais, é muito antiga: um osso com cerca de 10.000 anos de idade, encontrado na África, exibe marcas de contagem semelhantes às que os cow-boys faziam em seus Colt-45 cada vez que despachavam mais um. (GARBI, 2010, p.7). [9]

Os mais antigos documentos contendo registros numéricos são tabletes de barro sumérios, de 2.200 a.C., dentro de um sistema de numeração posicional com base 60 e grafia cuneiforme

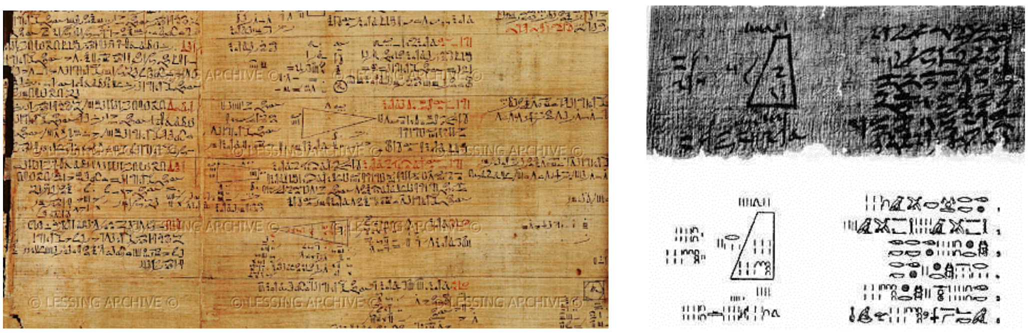
No II milênio a.C., os matemáticos babilônios realizaram grandes feitos: eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos (o hoje chamado teorema de Pitágoras, também já conhecido pelos chineses no século XII a.C.), resolviam equações do primeiro e do segundo graus, calculavam áreas e volumes de algumas figuras geométricas, determinaram a raiz de 2 com grande precisão, etc.

O mais importante a respeito dos matemáticos babilônios é que foram eles que começaram a entender como resolver equações.

> Equações são a forma como os matemáticos processam o valor de uma quantidade desconhecida a partir de evidências circunstanciais, "Eis aqui alguns fatos conhecidos sobre um número desconhecido: deduza esse número". Assim, uma equação é uma espécie de quebra-cabeças centrado num número. Não sabemos qual ele é, mas temos algumas informações úteis a seu respeito. Nossa tarefa é resolver o quebra-cabeças encontrando a incógnita. Esse jogo pode parecer um pouco diferente do conceito geométrico de simetria, mas, na Matemática, a descoberta de ideias num contexto às vezes acaba iluminando contextos muito diferentes. É essa interconectividade que confere à Matemática a sua potência intelectual. (STEWART, 2012, p.20). [12]

Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias atuais, talvez os mais famosos sejam os chamados ***Papiro de Ahmes*** (ou de Rhind), onde um escriba ensina as soluções de 85 problemas de Aritmética e Geometria. Ele foi encontrado pelo egiptólogo inglês Rhind no final do século XIX, e o ***Papiro de Moscou***, com 25 problemas de Aritmética e Geometria, é de cerca de 1850 a.C. e contém uma descrição verbal (pois não se conhecia conceito de fórmulas) de como fazer-se o cálculo correto do volume de um tronco de pirâmide.

Figura 1 – Papiro de Ahmes e Papiro de Moscou



Fonte: encurtador.com.br/lpW56 e encurtador.com.br/cvJLP

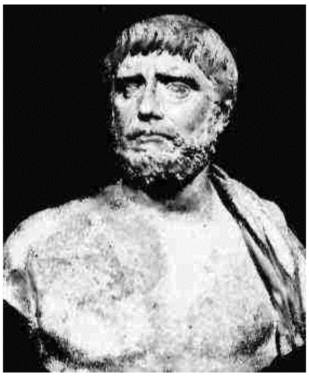
É importante ressaltar que os documentos matemáticos daquela época não usavam a alta dose de simbologia à qual estamos acostumados.

O Egito e a Mesopotâmia foram as fontes onde a Europa começou a obter seus conhecimentos matemáticos. Os gregos desempenharam um importante papel pois foram eles os primeiros europeus que, em contato com o Oriente Médio, interessaram-se pelas técnicas e reconheceram a utilidade da Geometria.

Passaremos a falar, agora, um pouco dos grandes matemáticos que contribuíram para o surgimento, desenvolvimento e evolução do estudo da Álgebra. O primeiro grande matemático que citaremos é **Tales**, um rico comerciante da cidade Jônia de Mileto, que estudava Astronomia, Filosofia e Matemática por puro prazer, isto é, Tales não era matemático profissional, até porque esta profissão não existia na época. Um conhecido episódio da vida dele foi sua esperteza comercial, em um determinado ano, ele conseguiu prever uma grande safra de azeitonas e, antecipando-se a ela, alugou para si todas as prensas existentes para a fabricação de azeite e próximo da colheita realugou-as com grandes lucros.

Tales deu o pontapé inicial para começarem as demonstrações dos teoremas provando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, que qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, que um ângulo inscrito em um semi-círculo é sempre reto, que feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionas, etc.

Figura 2 – Tales de Mileto

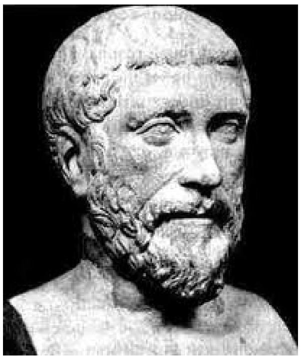


Fonte: encurtador.com.br/ouVY8

Alguma décadas depois nasce **Pitágoras**, a 50 quilômetros de Mileto, na ilha de Samos e demonstrou o teorema dos triângulos retângulos, considerado o mais famoso e popular de toda a Matemática.

Mas, é importante ressaltar que os chineses e babilônios já sabiam dessa propriedade geral e que os egípcios conheciam-na para o caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5, mas foi Pitágoras quem apresentou primeiro uma prova para tal relação entre hipotenusa e catetos.

Figura 3 – Pitágoras de Samos



Fonte: encurtador.com.br/bfitQ

Quando Pitágoras demonstrou que em um triângulo retângulo vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$ produziu-se, pela primeira vez na Europa, uma equação do 2º grau.

Após Tales e Pitágoras, as descobertas geométricas tiveram um rápido avanço. **Teodoro**, de Cirene (cerca 470 a.C.), **Hipas**, de Elis (cerca 460 a.C.), **Zenão**, de Eleia (cerca 450 a.C.) e **Hipócrates**, de Quios (460-380 a.C.) deram importantes contribuições.

Por volta de 300 a.C., surge, na Universidade de Alexandria, um gênio, **Euclides**, autor dos **Elementos**, considerado por muitos o mais influente livro-texto de Matemática de todos os tempos. Não se sabe onde Euclides nasceu, nem mesmo se isto ocorreu em território grego.

Figura 4 – Euclides

Fonte:encurtador.com.br/vzPW1

Os elementos, escritos em 13 livros, sistematizam os conhecimentos da Geometria elementar, de forma rigorosa e dedutiva, partindo de um número mínimo de definições e de verdades aceitas sem provas.

> Por que Euclides se tornou tão conhecido? Houve outros matemáticos ainda mais importantes e mais significativos. Mas, ao longo de quase 2 mil anos, o nome de Euclides era conhecido por todos os estudantes de Matemática da Europa Ocidental e também do mundo árabe, num sentido mais restrito. Euclides foi autor de um dos textos matemáticos mais famosos já escritos: *Elementos de geometria* (em geral, abreviado para *Elementos*). Quando a imprensa foi inventada, esse trabalho foi um dos primeiros livros publicados, e já teve mais de mil diferentes edições, número só superado pela Bíblia. (STEWART, 2012, p.35). [12]

Apesar de que a Grécia não ter sido forte em Aritmética, Euclides demonstrou alguns importantes Teoremas da **Teoria dos Números**. No início dos *Elementos* ele explicou algumas verdades evidentes por si mesmas, agrupando-as em postulados de natureza geométrica (cinco) e em noções comuns (cinco). As noções comuns de Euclides foram:

a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

b) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

c) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

d) Coisas coincidentes são iguais entre si.

e) O todo é maior do que a parte.

f) Iguais multiplicativos ou divididos por iguais continuam iguais.

Com base nessas noções, estava a solução das equações do 1º grau.

Por exemplo, a seguinte equação:

$$4x + 5 = 17$$

Pela noção comum c), se subtrairmos dos dois lados o número 5, a igualdade se preserva. Então:

$$4x + 5 - 5 = 17 - 5 \qquad \text{ou} \qquad 4x = 12$$

Pela verdade f), se dividirmos os dois lados pelo número 4, a igualdade se preserva. Então:

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \qquad \text{ou} \qquad x = 3$$

E assim foi encontrado um método geral de resolução das equações do 1º grau. É importante ressaltar que qualquer estudante que tenha um conhecimento básico de Matemática sabe que, ao se passar um número de um lado para outro de uma equação, ele muda de sinal. Por exemplo:

$$5x^2 + 7 = 10$$

É a mesma coisa que

$$5x^2 = 10 - 7 \text{ (o 7 passou para a direita e mudou de sinal)}$$

Mas na realidade, não é que o 7 tenha passado para o outro lado e mudado de sinal. Isto é apenas aparente. O que aconteceu foi que subtrairmos o 7 dos dois lados conforme permite a noção comum. É preciso nunca se esquecer dos raciocínios que existem por trás dos procedimentos que se tornam mecânicos.

Depois de Euclides, ainda passaram pela universidade de Alexandria outros grandes matemáticos, como: **Aristarco** (310 a.C.-230 a.C.); **Arquimedes** (287 a.C.), o maior gênio da

Antiguidade e um dos três maiores de todos os tempos; **Erastótenes** (274 a.C. - 194 a.C.); **Apolônio** (262 a.C. - 190 a.C.) e **Hiparco** (180 a.C. - 125 a.C.), o criador da Trigonometria.

Em 641 ocorreu a queda do Egito e os 600.000 manuscritos da Biblioteca de Alexandria, acumulados com tanto sacrifício ao longo de séculos, são perdidos em caldeiras ardentes dos banhos públicos da cidade. Tal feito foi ordenado pelo califa Omar que entendia que os livros, ou repetiam os ensinamentos do Corão e eram supérfluos, ou os contrariavam e eram nocivos.

Al-Mamun, filho do califa al-Mansur, reinou entre 813 e 833 continuou a obra do pai e determinou a pesquisa e a tradução para a língua Árabe de todos os antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados. Al-mamun convidou para sua corte muitos dos melhores cientistas do mundo e entre eles estava o famoso astrônomo e matemático Abu-Abdullah Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi (783-850), de quem herdamos as palavras **algarismo** e **algoritmo**, corruptelas de seu nome.

A palavra **Álgebra**, presente em todos os idiomas do planeta, nasceu da palavra **Al-jarb** que era usada por al-Khwarizmi para designar operações em que, por exemplo, a equação $x - 7 = 12$ passa a $x = 19$, o que significava uma "restauração" de $x - 7$ de modo a torna-se a incógnita completa x. A obra de al-Khwarizmi exerceu grande influência na Matemática europeia durante os últimos séculos da Idade Média.

No primeiro milênio da era cristã, a Índia produziu grandes matemáticos e astrônomos, como **Varahamihira** (cerca 505) e **Brahmagupta** (cerca 630) mas foi **Bhaskara** (1,114-1.185) o mais famoso por estar ligado à fórmula da solução das equações do segundo grau. O mais engraçado é que a fórmula de Bhaskara foi não descoberta por ele. Esta fórmula foi encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara (991-?) e publicada em uma obra que não chegou até nós.

Figura 5 – Bhaskara

Fonte: encurtador.com.br/rtxAO

Faremos aqui a demonstração da fórmula geral para a solução das equações do 2º grau. Seja a equação geral

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{com} \qquad a \neq 0$$

Portanto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}\ .$$

Na equação acima, foi somado aos dois lados da igualdade alguma coisa que tornasse o lado esquerdo um quadrado perfeito, exatamente o mesmo raciocínio seguido pelos Babilônios 3.000 anos antes. Assim, tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\ .$$

O que é permitido pela noção comum de Euclides, já mencionada por nós.

Como o primeiro membro da equação acima é quadrado perfeito, tem-se:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \text{ou} \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\ .$$

Agora iremos extrair raízes quadradas, mas teremos que ter um cuidado que os Babilônios não tiveram: números positivos ou negativos elevados ao quadrado são sempre positivos. Portanto, extrações de raízes quadradas geram sempre duas alternativas, uma com sinal $+$ e outra com sinal $-$.

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Eis a demonstração da famosa fórmula de Bhaskara, na qual nossos alunos estão habituados a decorá-la sem saber sua origem.

É impostante chamar a atenção para o fato de que a simbologia mostrada acima não existia na época de Bhaskara e que a utilizada por ele não seria compreendida por nós.

As equações do 2º grau são a chave para a solução de um problema clássico: encontrar dois números, x e y, conhecendo-se sua soma S e seu produto P. Este enunciado corresponde a um dos sistemas:

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \qquad ou \qquad \begin{cases} y=S-x \\ xy=P \end{cases}$$

Logo, $x(S-x)=P$ ou $x^2-Sx+P=0$ e, portanto,

$$x=\frac{S\pm\sqrt{S^2-4P}}{2} \qquad \text{e} \qquad y=S-x=\frac{S\mp\sqrt{S^2-4P}}{2}\ .$$

Continuando essa nossa viagem pela história da Álgebra, os séculos 12 e 13 foram um período de marcantes acontecimentos na Europa. O comércio liderado por Veneza e outras cidades italianas floresceu, começaram as construções das grandes catedrais e surgiram as primeiras universidades: a de Bolonha em 1088, a de Paris em 1200, a de Oxford em 1214, a de Pádua em 1222, a de Nápoles em 1224 e a de Cambridge em 1231.

Nesta época viveu o maior matemático europeu da Idade Média: **Leonardo de Pisa** (1175 - 1250), também conhecido como **Leonardo Fibonacci** (filho de Bonacci) ou **Leonardo Pisano**, nasceu em Pisa no ano de 1175.

Figura 6 – Leonardo Fibonacci

Fonte: encurtador.com.br/mpEHK

Leonardo de Pisa dedicou-se aos estudos de vários dos sistemas aritméticos então existentes e ficou convencido que o indo-arábico era o melhor de todos. Passou, então, a dedicar-se a transmiti-los a seus compatriotas italianos. Em 1202 publicou sua primeira obra, o **Liber Abaci**, onde descreveu o sistema numérico dos árabes, dando um profundo tratamento às questões aritméticas e onde, pela primeira vez um cristão discorreu sobre Álgebra. As palavras iniciais do Liber Abaci são: “Estes são os nove símbolos dos hindus: **9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1**. Com eles, mais o símbolo **0**, que em árabe é chamado **zéfiro**, qualquer número pode ser escrito.”

Leonardo deu algumas contribuições na simbologia algébrica. As equações eram escritas utilizando muitas palavras pois não existiam símbolos mesmo para coisas elementares como a incógnita e suas potências. Ele introduziu as palavras “res” (“coisa”, em latim) e “radix” (raiz) para representar a incógnita, e os termos “census” e “cubus” para, respectivamente, seu quadrado e seu cubo. A igualdade era representada pela palavra aequlis.

Falaremos agora um pouco de uma disputa, ocorrida no início do século XVI que houve entre **Cardano**[1], autor do maior compêndio algébrico até então existente: a *Ars Magna*[2], e **Tartaglia**[3], autor de várias obras, realizou cálculos na técnica da artilharia. Mas o que o colocou em estaque na Matemática foram suas longas disputas com Cardano sobre as equações do 3º grau.

Figura 7 – Girolano Cardano

Fonte: encurtador.com.br/coAL6

Tartaglia, em 1535, além de resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, também achou a fórmula geral para as do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Cardano, ao saber que ele conseguiu resolver esse problema, pediu-lhe que mostrasse a resolução para que pudesse publicar no seu livro: **A Prática Arithmeticae Geoneralis.** Tartaglia não concordou no início. Algum tempo depois, com juramentos falsos sobre a Bíblia e muita conversação, finalmente, Tartaglia revelou tudo. Mas como ja era esperado, quebrou todas as promessas e juramentos e, em 1545, publicou na Ars Magna, a fórmula revelada por Tartaglia. Este, furioso, publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um sagrado juramento sobre a Bíblia. Com isso, o círculo de ódio, rivalidade e intriga só aumentava. No final, o sofrido Tartaglia foi injustiçado e a fórmula que ele tanto batalhou para demonstrar, hoje leva o nome de Fórmula de Cardano.

[1] Girolano Cardano, nascido em Paiva em 1501 e falescido em Roma, levou uma vida marcada por contrastes. Em um documento por ele mesmo redigido, definiu-se como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obsceno, desonesto, incomparavelmente vicioso e portador de total desprezo pela religião

[2] O Ars Magna é a primeira obra a conter métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau. O livro foi publicado em 1545 e o título original era *Artis Magnæ Sive de Regulis Algebraicis*. Este livro é também o texto onde os números complexos surgem pela primeira vez.

[3] Nicolò Fontana, apelidado Tartaglia, nascido em Bréscia, em 1501, em 1512, aos 12 anos de idade, Nicolò foi ferido por golpes de sabre. Desse acidente, ele levou para o resto da vida uma cicatriz na boca, ficando assim, com defeito na fala, daí o apelido Tartaglia, que quer dizer gago.

Figura 8 – Nicolò Fontana (Tartaglia)

Fonte: encurtador.com.br/avBT3

Vamos mostrar a fantástica demonstração realizada por Tartaglia. Seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ .$$

Se $x = y + m$, então:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

ou

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0 \ .$$

Fazendo

$$b + 3am = 0$$

tem-se

$$m = -\frac{b}{3a} \ .$$

Desta forma, a nova equação do 3º grau em y será do tipo $y^3 + py + q = 0$, e resolvendo-a encontra-se o valor de x que é $y + m$, isto é, Tartaglia não só encontrou a solução para equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, como deu uma solução geral para as equações de 3º grau, aumentando seu mérito.

Tartaglia usou a seguinte ideia: supos que a solução procurada era composta de 2 parcelas. Assim, escreveu:

$$x = A + B \ .$$

Logo

$$x^3 = (A+B)^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

e como

$$x = A + B$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

ou seja,

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0\ .$$

Mas, ao mesmo tempo

$$x^3 + px + q = 0\ .$$

Portanto

$$p = -3AB \qquad \text{e} \qquad q = -(A^3 + B^3)$$

ou

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \qquad \text{e} \qquad A^3 + B^3 = -q\ .$$

Assim, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto e este é um problema clássico que se resolve com equações do segundo grau.

Logo

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{e} \qquad B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\ .$$

Como $x = A + B$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ .$$

Esta é a chamada fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele como já foi comentado, e sim por Tartaglia. Não podemos esquecer que a simbologia usada na época era totalmente diferente da de hoje e muito difícil de compreendermos. “Uma equação que hoje escreveríamos $2x^3 + 5x = 17$, foi escrita por Cardano como $2cub'p : 5reb'ae\overline{q}lis17$”. (GARBI, 2010, p. 40). [9]

A mais elementar dúvida que surgiu ao observar a fórmula de Cardano (ou Tartaglia?!) foi a seguinte: como a fórmula de Bhaskara exibe as duas raízes das equações do 2^o graus e a de Cardano só apresenta uma? É muito fácil achar exemplos de equações do 3^o grau com 3 soluções, mas como fica isto diante de uma fórmula que só fornece uma? Onde estariam as outras duas? Logo começaram a surgir dúvidas, perguntas e problemas na aplicação do método de Tartaglia. Esses problemas foram solucionados posteriormente por outros matemáticos.

Em 1522, nasce em Bolonha, **Ludovico Ferrari**, o mais famoso discípulo de Cardano. O grande mérito de Ferrari foi haver demonstrado que a solução das equações do 4^o grau era possível apenas com operações algébricas.

Figura 9 – Ludovico Ferrari

Fonte: encurtador.com.br/ghH46

Este método, deduzido por Ferrari, foi publicado também por Cardano na Ars Magna e será demonstrado abaixo.

Vamos relembrar que a equação geral do 4^o grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

sempre pode ser transformada em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \ .$$

fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3^o grau.

Assim, como ocorreu com as equações do 3^o grau, quem sabe resolver a equação incompleta

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

consegue resolver qualquer tipo de equações do 4º grau.

Ferrari pegou a equação

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

e reagrupou os termos de modo que nos dois lados da igualdade houvesse quadrados perfeitos. Desta forma, a equação foi escrita assim:

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta\ .$$

Onde α e β são números a ser determinados de forma que os dois lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Para isso, é necessário e suficiente que os discriminantes daqueles dois trinômios sejam iguais a zero, ou seja,

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0$$

e

$$\begin{gathered} q^2 - 4\alpha\beta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = q^2/4\alpha \\ (p + \alpha)^2 - 4(r + q^2/4\alpha) = 0 \\ (p + \alpha)^2 - 4r - q^2/\alpha = 0 \end{gathered}$$

ou seja

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

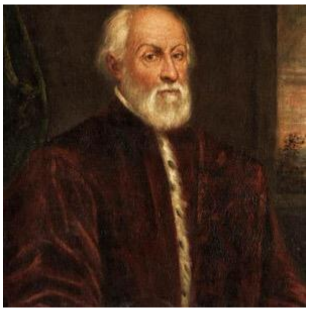
o que é uma equação de 3º grau em α. Como as equações de 3º grau podem ser resolvidas, acha-se α, em seguida, β e extraem-se as raízes quadradas.

$$\sqrt{x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta)} = \pm\sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}\ .$$

Então, este foi o grande feito matemático de Ludovico Ferrari.

Em 1530 nasce, em Bolonha, Itália, **Rafael Bombelli**, que se tornou engenheiro hidráulico. Bombelli era corajoso, pertinaz e sempre buscando coisas novas. Foi ele que deu origem ao estudo de um gigantesco ramo da Matemática, com infindáveis aplicações práticas, principalmente na Eletrônica: **A Teoria dos Números Complexos**.

Figura 10 – Rafael Bombelli



Fonte:encurtador.com.br/qBMY8

Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) = -1$$
$$(-\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) = 1$$
$$(-\sqrt{-1}).(-\sqrt{-1}) = -1$$
$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$
$$(\pm 1)(-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}\ .$$

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}\ .$$

Depois de ter feito esse estudo, podemos concluir que o que originou o estudo dos números complexos foram as equações de 3º grau e não as de 2º como, de forma equivocada, muitos professores e, até livros didáticos, apontam.

Falaremos agora sobre um admirável matemático Francês, **François Viète**, nascido em 1540 em Fontenay. Viète decifrou códigos secretos que o exército espanhol utilizava durante a guerra contra a França, deixando os inimigos completamente atônitos, pois tinham certeza de que dispunham de um segredo impossível de ser quebrado.

> O uso esporádico de letras para representar números era prática muito antiga mas até o surgimento de Viéte não se costumava fazer manipulações algébricas de símbolos nem eram empregados coeficientes literais para representar classes genéricas de equações. Viète fez uma importante inovação no simbolismo algébrico: em seu livro **In artem analyticam isagoge** (Introdução à arte analítica), ele utilizou sistematicamente as letras para representar não só as quantidades desconhecidas (incógnitas) mas, também, os coeficientes das equações. As letras eram sempre maiúsculas, ficando reservadas as vogais para as quantidades desconhecidas e as consoantes para as conhecidas. Isso foi um progresso em relação à simbologia de Pacioli, Cardano e Tartaglia mas ainda estava longe daquilo que usamos modernamente. Por exemplo, uma equação que hoje escreveríamos $3BA^2 - DA + A^3 = Z$ era escrita por viète como: B3 in A quad − D plano in A + A cubo aequator Z solido. (GARBI, 2010, p.57). [9]

A grande contribuição de Viète para a Álgebra foi conseguir, com o uso de letras, distinguir grandezas, supostamente conhecidas, de quantidades desconhecidas que precisavam ser achadas. Fez isto utilizando uma convenção que permitiu distinguir, pela primeira vez, na Álgebra, o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida.

Figura 11 – François Viète

Fonte:encurtador.com.br/pORT3

Ele foi um grande algebrista e um profundo conhecedor de Trigonometria. Muitas fórmulas atualmente conhecidas foram deduzidas por ele como, por exemplo:

$$senA + senB = 2.sen\frac{A+B}{2}.cos\frac{A-B}{2}$$

$$sen2\theta = 2.sen\theta.cos\theta$$

$$sen3\theta = 3.sen\theta - 4sen^3\theta$$

$$cos3\theta = 4.cos^3\theta - 3cos\theta\ .$$

Viète inventou uma fórmula interessantíssima de se calcular o valor de π, demonstrando a grande intimidade com quem era capaz de abordar questões trigonométricas. A fórmula foi a seguinte:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots}\ .$$

No século III da era cristã, viveu o mais brilhantes teórico dos números da antiguidade, **Diofanto** (cerca 250 d.C.), autor do livro chamado **Aritmética.**

Figura 12 – Diofanto

Fonte: encurtador.com.br/imnH4

As regras dos sinais na multiplicação de números relativos foi uma das várias contribuições de Diofanto à Matemática. Esse jogo de sinais é sabido por quase todos os estudantes mas poucos, quando perguntados, conseguem justificar essas regras.

Sabemos que os sinais comportam-se da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccc} + & \times & + & = & + \\ + & \times & - & = & - \\ - & \times & + & = & - \\ - & \times & - & = & +\,. \end{array}$$

Ele fez essas demonstrações com base na chamada propriedade distributiva do produto em relação à soma e à subtração. E por essa propriedade que justifica escrever-se:

$$a(b+c) = ab + ac$$

ou

$$a(b-c) = ab - ac$$

ou

$$a - b(c+d) = a - bc - bd$$

de onde decorrem as generalizações

$$\begin{array}{ccccc} + & \times & + & = & + \end{array}$$

$$+ \quad \times \quad - \quad = \quad -$$

$$- \quad \times \quad + \quad = \quad -.$$

E para demonstrar que a multiplicação de dois números negativos dá um número positivo, Diofanto partiu da seguinte operação:

$$a - b = c.$$

Sabemos que se o subtraendo for diminuído de d, o resultado será aumentado de d, o que permite escrever:

$$a - b = c$$

então

$$a - (b - d) = c + d$$

ou

$$a - b - (-d) = c + d$$

como

$$a - b = c$$

tem-se

$$c - (-d) = c + d$$

e, subtraindo c dos dois lados, tem-se

$$-(-d) = +d.$$

e está demonstrado que

$$- \quad \times \quad - \quad = \quad +.$$

A outra contribuição de Diofanto foi ainda mais especial e refere-se à simbologia. Na sua época, questões que hoje seriam algébricas eram tratadas apenas com raciocínios expressos apenas por palavras e não símbolos.

> Um exemplo ilustra melhor o que foi dito. Seja o clássico problema: "em um terreiro existem cabras e galinhas, sendo 32 cabeças e 88 pés. Quantos animais de cada tipo existem em tal terreiro?" Hoje chamaríamos de x e y, respectivamente, os números de cabras e galinhas, montaríamos um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas e encontraríamos as respostas. Como o recurso aos símbolos não estavam ainda disponível, o problema era resolvido da seguinte maneira:"Se todos os animais existentes no terreiro fossem galinhas, haveria um total de 2 vezes 32 pernas, ou seja, 64 pernas. Como o total de pernas é 88, a diferença 88 menos 64, ou seja, 24 pernas, deve vir das cabras. Como cada cabra contribui com duas pernas para tal diferença, existem 24 dividido por 2, ou seja, 12 cabras no terreiro. Como há 32 animais, o número de galinhas é 32 menos 12, ou seja, 20". (GARBI, 2010, p.67). [9]

Ele introduziu vários símbolos no estudo do que hoje chamamos de Álgebra. Com isso foi o início da simbolização da Álgebra, mas como ainda eram empregadas abreviações de palavras junto com alguns símbolos, essa notação ficou conhecida como " Álgebra Sincopada".

Agora, falaremos um pouco sobre a obra de dois gênios franceses, oa matemáticos **Pierre de Fermat** e **René Descartes**, criadores do estudo da Geometria por meio das equações, o que conhecemos com o nome de **Geometria Analítica**.

Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne, versado em línguas clássicas, jurista por formação acadêmica e magistrado por profissão. Dedicou longos anos ao estudo da Matemática e realizou descobertas notáveis, em especial no campo da **Teoria dos Números** mas também teve estudos ligado à **Teoria das Probabilidades.**

Com os instrumentos da Geometria Analítica, Fermat encontrou rigorosos métodos de se traçar tangentes a curvas e de se determinar máximos e mínimos, temas do Cálculo Diferencial, que seria inventado algumas décadas depois por Newton e Leibniz.

O livro Aritmética, de Diofanto, caiu na mão de Fermat 13 séculos depois de sua publicação, e nele, Fermat costumava escrever breves comentários sobre o que lia. Fez grandes descobertas sobre números primos. Mas, o principal e mais famoso problema levantado por Fermat, escrito à margem do livro de Diofanto, e que só foi resolvido três séculos e meio mais tarde pelo brilhante matemático inglês Andrew Wiles, diz que a equação

$$x^n + y^n = z^n \qquad (x, y, z \text{ e } n \text{ inteiros positivos})$$

não tem solução quando $n > 2$. Para o caso de $n = 2$ existem infinitas trincas de inteiros que satisfazem a relação $x^n + y^n = z^n$. Este problema ficou conhecido como **"O Último Teorema de Fermat**''.

Figura 13 – Pierre de Fermat

Fonte: encurtador.com.br/rsZ48

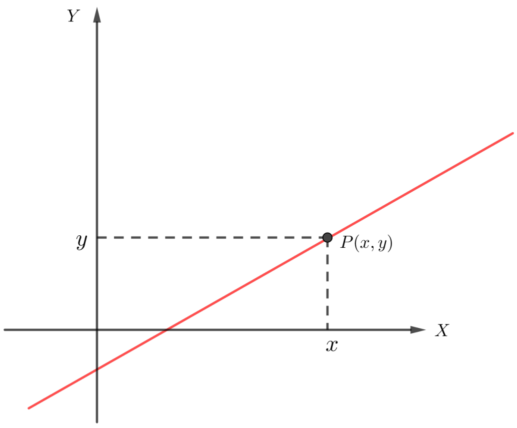
René Descartes, nascido em La Haye, em 1596, foi co-inventor da Geometria Analítica e realizou vários trabalhos notáveis em campos diversos como: Óptica, Filosofia, Psicologia e Matemática. Era vaidoso, irrequieto e polêmico, adorava a fama e o contato com a nobreza. No seu livro **La Géométrie** Descartes mostra, através da solução de vários problemas geométricos, que a Álgebra já havia alcançado tal nível de desenvolvimento que poderia ser empregada no estudo da Geometria.

A ideia básica da Geometria Analítica é relacionar Álgebra e Geometria. Por exemplo, quando um ponto P de coordenadas x e y encontram-se sobre uma reta, pode-se demonstrar que x e y estão relacionadas pelo equação

$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C são constantes características de cada reta em particular.

Figura 14 – Gráfico de uma reta



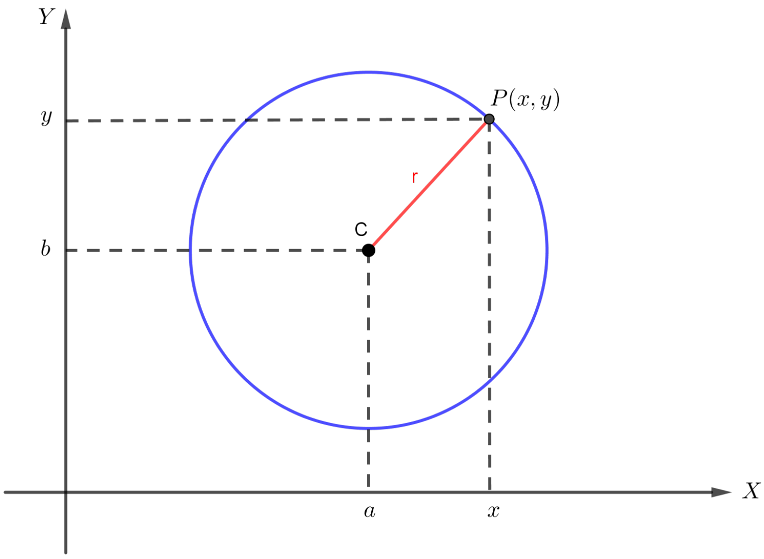
Fonte: Elaborado pelo autor

Quando um ponto P(x, y) se situa sobre uma circunferência, a equação que relaciona x e y é:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

onde a e b são as coordenadas do centro e r o raio da circunferência.

Figura 15 – Gráfico de uma circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

E assim, elipses, parábolas, hipérboles, enfim, curvas das mais variadas formas passaram a ser tratadas através de equações, relacionando Geometria e Álgebra, o que abriu um vasto horizonte para as pesquisas matemáticas e para o próprio conhecimento e solução de equações algébricas.

Figura 16 – René Descartes

Fonte: encurtador.com.br/bDLS5

Outra contribuição de Descartes foi ter empregado na *Géométrie* uma simbologia algébrica e que chegou até nós com poucas mudanças. Foi ele quem começou a utilizar letras minúsculas para representar números (as últimas do alfabeto, **x**, **y** e **z**, para as incógnitas e **a**, **b**, **c**, **d**, etc. para os parâmetros) e representar as potências da incógnita sob a forma x^n.

A obra de Descartes é considerada um marco na história do pensamento científico e filosófico mundial pelo influência que teve em grandes matemáticos que o sucederam.

Em 1642, nasce, em Woolsthorpe, Inglaterra, o admirado, glorificado e endeusado, **Isaac Newton**. Ele desfruta de um conceito excepcional no mundo científico em razão de seus feitos extraordinários nas seguintes áreas:

- Matemática, pura e aplicada;
- Sistematização das leis da dinâmica;
- Concepção da Lei da Gravitação Universal;
- Teoria das Cores e óptica em geral;
- Concepção e fabricação de instrumentos científicos, em especial telescópios e lentes.

Em 1665 inventou o Cálculo Diferencial e em 1666 formulou a Teoria das cores, após profundas experiências com a luz. Neste mesmo ano, após ver uma maça desprender-se de um ramo, que ele começou a imaginar o que se tornaria a lei da Gravitação Universal, segundo a qual "matéria atrai matéria na razão direta do produto das massas e na razão inversa do quadrado das distâncias".

Figura 17 – Isaac Newton

Fonte: encurtador.com.br/uwBG3

Newton produzia demais, mas publicava pouco. Sua maior obra, **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, considerado por muitos o mais importante livro científico de todos os tempos, só foi publicado em 1687, após 20 anos das descobertas nela contidas.

Não podemos deixar de comentar a polêmica “briga” com **Gottfried Wilhel Leibniz**, um dos maiores gênios de todos os tempos, pela autoria da invenção do Cálculo Diferencial e Integral. Na verdade o que ocorreu foi que Newton, indiscutivelmente, inventou o Cálculo Diferencial (chamado por ele de Fluxões) em 1665 e o Integral (chamado por ele de Método Inverso das Fluxões), mas não chegou a divulgar nada sobre eles. E, em 1672, Leibniz aprendeu Matemática muito rapidamente e seus progressos foram tão surpreendentes que no final de 1675 ela já havia desenvolvido ideias básicas dos Cálculos Diferencial e Integral, sem ter nenhum acesso aos trabalhos de Newton, e usando caminhos distintos usados pelo nobre matemático inglês. Em 1684, Leibniz publica seu trabalho e com isso dá origem a uma férrea disputa pela prioridade na invenção que, hoje sabemos, pertence a ambos.

Figura 18 – Gottfried Wilhel Leibniz

Fonte: encurtador.com.br/pwV08

Agora, conheceremos um pouco de **Leonhard Euler**, o qual nasceu em Basileia, Suíça. Foi considerado um dos matemáticos que mais obras produziu e publicou em todos os tempos e de quem foi dito que “calculava com a facilidade com que os outros respiram”.

Figura 19 – Leonhard Euler

Fonte: encurtador.com.br/FRV16

Euler era dotado de uma memória prodigiosa, falava várias línguas e sabia de cor as tábuas logarítmicas e trigonométricas. Estima-se que sua obra ultrapasse 800 trabalhos sobre Cálculo, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica, Óptica, Teoria das Probabilidades, Topologia[4], Cálculo das Variações, Música, Números Complexos, etc.

Ele foi o consolidador da simbologia moderna, tendo não apenas consagrado o que de melhor se dispunha à época mas, também, inventado muito do que conhecemos hoje. Foi dele a criação do símbolo $\sum$ para a somatória, a notação $f(x)$ para as funções, a representação $\binom{m}{n}$ para as combinações, o famoso "i", significando a $\sqrt{-1}$. Foi ele que utilizou a letra e para representar a base dos logaritmos naturais (o célebre número de Euler) cujo valor aproximado é 2,7182818284... e que aparece com muita frequência em equações que representam fenômenos do mundo físico.

Outra grande descoberta de Euler ocorreu quando Jacques Bernoulli, matemático suíço, no século XVIII, propôs a seguinte questão: "Como cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempo cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instantâneos e sobre eles, imediatamente, também incidissem proporcionalmente as mesmas taxas de juros?".

A pergunta de Jacques Bernoulli era se o crescimento teria algum limite caso os créditos dos juros fossem sendo feitos em períodos cada vez mais curtos: anualmente, semestralmente, semanalmente, diariamente, a cada hora, minuto, segundo, etc. E Euler encontrou esse limite e foi representado por e, assim definido:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Euler deu uma grande contribuição no estudo dos Números Complexos e é considerado o matemático que dominou esse tópico da Matemática. Ele demonstrou como extrair raízes de números complexos, ou seja, desvendou aquele mistério que intrigou Bombelli e tantos outros que haviam tentado aplicar a fórmula de Cardano nos casos que $\Delta < 0$.

Euler fez outras descobertas ainda mais fascinantes sobre números complexos, ele produziu o que muitos consideram uma das mais belas equações de toda a Matemática:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 .$$

Esta equação une em uma só fórmula os 5 mais famosos números de toda a Matemática: zero, 1, π, e e $\sqrt{-1}$.

Vamos falar de outro gênio que surgiu e que deu inúmeras contribuições para a evolução da Matemática, **Carl Friedrich Gauss**, nasceu em Brunswick, Alemanha, considerado como o

[4] Ramo da Matemática que estuda as propriedades das posições e onde as figuras não têm formas rígidas

Mozart da Matemática. Aos 3 anos de idade corrigia os erros em contas feitas por seu pai. Aos 9, resolveu, de forma extraordinária, uma atividade em que seu professor ordenou que a classe somasse os números de 1 a 100. Ele observou que $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, etc, totalizavam sempre 101. Como o número de tais pares era 50, a soma procurada era 101 $\times$ 50 = 5050.

Em 29/05/1795, Gauss fez uma demonstração, que é considerada hoje um marco histórico, de como construir, com régua e compasso, um polígono regular de 17 lados, e foi mais além, provou que aquelas construções eram possíveis quando os números dos lados dos polígonos são primos da forma $2^{2^n} + 1$.

Figura 20 – Carl Friedrich Gauss

Fonte: encurtador.com.br/GNQX9

Podemos dizer que dentre todos os seus trabalhos ligados à Matemática, a tese de doutorado ficou marcado na história pela importância que teve e é considerado por muitos a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos, o conhecido **Teorema Fundamental da Álgebra**. Este teorema afirma que **toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz.** Seja o polinômio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Pelo mencionado teorema existe pelo menos um número complexo k_1 para o qual $P(x) = 0$.

Na verdade, ao demonstrar que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, Gauss demonstrou que elas têm exatamente n raízes, sendo n o grau do respectivo polinômio.

Outro teorema muito importante demonstrado por ele foi: “Se o número complexo $(a+bi)$ é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o complexo $(a - bi)$ também o é”.

Esses foram alguns dos trabalhos desenvolvidos por esse gênio da Matemática.

Daremos início agora a história de duas belas mentes, **Niels Henrik Abel** [5] e **Évariste Galois**[6]. Esses dois amaram, de forma intensa, a Matemática, viveram na mesma época mas não se conheceram, fizeram descobertas semelhantes no campo das equações algébricas.

Abel, aos 16 anos, já havia lido as obras de Euler, Gauss, Poisson, Lacroix, Garnier, Francoeur, Lagrange, Newton e D'Alembert. Dos 17 aos 19 anos, desenvolveu pesquisas no campo das equações e chegou a acreditar que houvesse encontrado uma fórmula geral para as do 5º grau, só que, após rever seus cálculos, a pedido do matemático escandinavo Ferdinand Degen, descobriu que sua solução era incorreta. Após esse episódio, vencer as equações de 5º grau passou a ser uma obsessão para Abel e, além disso, passou a estudar, de forma intensa, as Funções Elípticas.

Figura 21 – Niels Henrik Abel

Fonte: encurtador.com.br/uyUXY

Niels Henrik Abel teve uma vida bastante difícil, seu irmão teve problemas mentais, seu pai, traído pela esposa e, em decadência financeira, entregou-se à bebida até morrer.

Em 1823, pela primeira vez, Abel publicou um trabalho, na revista científica **Magazine for Naturvidenskaben.** Aprofundou-se nos estudos das funções elípticas e fez descobertas surpreendentes sobre elas. no Natal deste mesmo ano, voltando às equações de 5º grau, demonstrou que, **exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolvê-las utilizando-se apenas as operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação).** Com grande sacrifício financeiro em que sempre viveu, conseguiu economizar dinheiro e pagou a impressão de seu trabalho sobre essas equações de 5º grau, sob o título **"Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la resolution de l'équation genérale du cinquième dégré".**

Na França, Abel divulgou o seu trabalho de maior impacto, o **Teorema Geral sobre as Integrais**, conhecido hoje como **Grande Teorema de Abel.**

---

[5] Matemático Norueguês, nascido em 5 de agosto de 1802, na pequena cidade de Finnöy, Noruega.

[6] Matemático Francês, nascido em 25 de outubro de 1811, na pequena cidade de Bourg-la-Reine, a 10 quilômetros de Paris.

Em 1827, Abel e Carl Gustav Jacob Jacobi, brilhante matemático alemão, protagonizaram uma grande disputa para ver qual dos dois avançariam mais profundamente nos estudos das funções elípticas. Esta batalha foi vencida por Abel. Apesar de todos esse fantásticos trabalhos produzidos por ele, Abel não conseguia arrumar um emprego, sempre acontecia algo errado e sua esperança ia desmoronando a cada tentativa.

No dia 06 de Abril de 1829, faleceu Niels Henrik Abel, tomado pela tuberculose, doença incurável à época e quase sempre contraída por pessoas enfraquecidas pela má nutrição.

Falaremos, agora, sobre o prodígio Évariste Galois, um brilhante matemático que teve a vida tão difícil quanto a do próprio Abel.

Figura 22 – Évariste Galois

Fonte: encurtador.com.br/gzHJV

Em 1825, aos 14 anos, Évariste teve seu contato inicial com a Matemática. Em pouco tempo dominou os Elementos de Geometria, obra de Legendre. E, pelos livros de Lagrange, estudou Análise, Cálculo e tudo o que se sabia à época sobre as equações algébricas.

Em 1828, Galois acreditou ter encontrado a solução geral para as equações de 5º grau mas, assim como Abel, ela continha erros. Em 25 de maio, nem completara ainda 18 anos, ele já tinha escrito um trabalho de grande importância e que foi apresentado à Academia de Ciências de Paris: **"Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo"**. Com este trabalho, já realizara descobertas naquilo que faria sua glória póstuma: a **Teoria de Grupos.** O próprio nome **Grupo**, conforme utilizado em tal contexto, foi criação exclusiva de Galois.

Em 1830, já tendo sido aprovado na École Normale Supérieure, ele publica três artigos no prestigioso Bulletin de Ferrussac: **"Análise de uma memória sobre a resolução algébrica de equações"**, **"Resolução de equações numéricas"** e **"Teoria dos Números"**.

> Depois de Galois a Álgebra nunca mais foi a mesma mas é uma pena não podermos aqui resumir, "em duas palavras", o que é a Teoria dos Grupos. Ao contrário de vários outros ramos da Matemática, onde a intuição é grande auxiliar do aprendizado, a teoria dos Grupos é um campo bastante abstrato e, embora aces-

> sível a qualquer estudante, seu ensino depende de bases preliminares. (GARBI, 2010, p.164). [9]

> A obra de Galois foi importante não só por tornar a noção abstrata de grupo fundamental na teoria das equações, mas também por levar, através das contribuições de Dedekind, Kronecker e Kummer, ao que se pode chamar tratamento aritmético da Álgebra. (BOYER, 1996, p.412). [2]

Na verdade, Galois estava introduzindo conceitos estruturais muito profundos, que alteravam a própria natureza da Álgebra. Ele inventou uma linguagem que descreve a simetria nas estruturas matemáticas e deduz as suas consequências. Hoje, essa linguagem é usada tanto na Matemática pura quanto na aplicada, na qual regula a formação dos padrões do mundo natural. Surge aqui o estudo das simetrias.

> Simetria não é um número nem um formato, é um tipo especial de transformação – uma maneira de mover um objeto. Se o objeto parecer o mesmo depois de movido, a transformação aí presente é uma simetria. Por exemplo, um quadrado continua um quadrado se for rotado em um ângulo reto. (STEWART, 2012, p.9). [12]

O interessante é que quando falamos de simetria em sala de aula com nossos alunos, eles pensam logo em relacionar esse conteúdo com a Geometria, e não com Álgebra, pois eles pensam em figuras, imagens, nos movimentos de translação, rotação e reflexão. Mas através dos estudos de Galois e que podemos mostrar que o belo e indispensável conceito de simetria que os matemáticos e físicos usam hoje chegou pela Álgebra.

> A simetria também tem papel central nas fronteiras da física, no mundo quântico do muito pequeno e no mundo relativístico do muito grande. Pode ate fornecer uma rota para a tão procurada "teoria dos grupos", uma unificação matemática dos principais campos da física moderna. E tudo começou com uma simples questão algébrica, sobre a resolução de equações matemáticas - encontrar uma "incógnita" a partir de algumas indicações matemáticas. (STEWART, 2012, p.9). [12]

Galois partiu de uma antiga tradição matemática, a Álgebra, e reinventou-a como ferramenta para o estudo da simetria.

> Évariste Galois descobriu que a impossibilidade de resolver a quíntica deriva de simetrias da equação. Se essas simetrias passarem pelo teste de Galois, por assim dizer – se elas se encaixem de uma forma muito específica, que por enquanto não vou explicar –, as equações podem ser resolvidas por uma fórmula algébrica. Se as simetrias não passarem pelo teste de Galois, essa fórmula não existe. (STEWART, 2012, p.11). [12]

Segundo Stewart (2012, p.11) [12]: "Uma equação quíntica genérica não pode ser resolvida por uma fórmula *porque ela tem um tipo errado de simetria* ".

Esta insolubilidade das equações quínticas nos diz também que assim como o π, o número 5 é também muito incomum. É o menor número cujo grupo de simetria associado não passa pelo teste de Galois.

Os matemáticos descobriram uma série de extensões do conceito habitual de números "reais", chegando até os números complexos e depois até os quatérnions e octonions. Eles são construídos de duas cópias dos números reais, quatro cópias e oito cópias, respectivamente.

Dando continuidade ao relato sobre a vida difícil de Galois, por questões políticas, ele foi preso e seu encarceramento durou de 14 de julho de 1831 a 16 de março de 1832. O que o incomodava bastante era que ele não conseguia se comunicar com os homens de sua época e com isso seus trabalhos nunca eram reconhecidos, e na própria prisão deu início a um trabalho intitulado **Duas Memórias de Análise Pura**. Ao mesmo tempo, escreveu um artigo denominado **Nota sobre Abel**, onde esclareceu que suas teorias eram independentes das do matemático norueguês. E, tanto Abel como Galois demonstraram que as equações gerais de grau superior ao 4^{o} não podem ser resolvidas algebricamente. A demonstração apresentada por Abel utiliza ao máximo os recursos da Álgebra Clássica, enquanto Galois inventou uma nova teoria dentro da qual aquele fato era apenas um caso particular. Sob este ponto de vista, Galois superou Abel e podemos dizer que o norueguês representou o ápice da Álgebra Clássica enquanto o francês marca o início da Álgebra Moderna.

Em 1832, Paris foi tomada por uma epidemia de cólera. O pânico tomou conta do presídio e os detentos ameaçaram rebelar-se. Devido a essa situação, o tribunal decidiu que os detentos cumprissem suas penas em hospitais. Assim, em 16 de março de 1832, Galois deixa Sainte-Pélagie e vai cumprir o restante de sua pena na casa de saúde do Dr. Faultrier, devendo permanecer até o dia 29 de abril. Foi neste hospital que o grande gênio encontraria a causa de sua prematura morte. Lá, Galois conheceu a jovem Stéphanie Poterin du Motel, e por ela se apaixonou. No começo, a jovem se interessou por ele também retribuindo toda gentileza oferecida por ele, mas por algum motivo ela decidiu cortar o relacionamento. Ao que tudo indica, Duchâtelet, amigo de Galois, também cortejava Stéphanie que, durante certo tempo, pode ter feito jogo duplo com ambos.

Galois e Duchâtelet trocam palavras ásperas por Stéphanie o que acabou ocasionando um duelo de armas. No dia 30 de maio de 1832 ocorre o tão fatídico duelo, Galois é atingido por um tiro certeiro mas não morreu no local do duelo, foi levado a um hospital e ficou aos cuidados de seu irmão mais novo Alfred, de 17 anos. Às dez horas da manhã de 31 de maio de 1832, Galois dá seu último suspiro, e o que é pior, sem ver seus trabalhos serem reconhecidos.

O tempo parecia ter sepultado também a obra de Galois quando, finalmente, depois de 14 anos de sua morte, em outubro de 1846, o matemático Joseph Liouville, decifrou seus papéis e publicou em seu jornal de **Mathématiques Pures et Appliquées**, sob o título **"Obras Matemáticas de Évariste Galois"**. Assim, começa a surgir o merecido reconhecimento que esse gênio sempre mereceu. Mais 25 anos se passaram e, em 1895, o estudo do brilhante norueguês Sophus Lie, **Influência de Galois sobre o Desenvolvimento da Matemática**, trouxe a Galois sua tardia consagração.

Neste trabalho surge os cinco “grupos esporádicos de Lie” cujas dimensões são formadas pelos números 14, 52, 78, 133 e 248. Os matemáticos descobriram quanto esses números são especias com o surgimento da Álgebra abstrata, no final do século XIX. Esses grupos de Lie tem grande influência em toda Matemática e também na Física Matemática.

> O que conta não são os números em si, mas o papel que desempenham nas fundações da Álgebra. Associado a cada um desses números existe um objeto matemático chamado Grupo de Lie, com propriedades únicas e notáveis. Esses grupos têm uma função fundamental na Física Moderna e parecem estar relacionados à estrutura profunda do espaço, do tempo e da matéria. (STEWART, 2012, p.13). [12]

Como podemos ver, o destino de Galois foi mais triste do que o de Abel: enquanto este, ao menos, fora reconhecido pelos grandes ainda em vida, teve um número incontável de amigos e a oprtunidade de ter vivido um amor e ser correspondido, a Évariste Galois a vida tudo negou. Ele estava morto e enterrado há décadas, quando o mundo deu-se conta de que ele fora um dos mais criativos e inovadores matemáticos de todos os tempos.

2 DIRETRIZES NACIONAIS PARA A ÁLGEBRA BÁSICA

Neste capítulo, faremos uma análise sobre os PCN e a BNCC, quais seus objetivos, o que eles apontam para e ensino da Matemática e, principalmente, sobre o ensino de Álgebra, quais suas diferenças e, também, citaremos os trabalhos de alguns estudiosos sobre o tema. Para iniciarmos, partiremos da seguinte pergunta: Por que o ensino de Álgebra?

Ao longo de minha trajetória como professor de Matemática da Educação Básica, tanto em escolas públicas com em escolas particulares, percebi muitas dificuldades que meus alunos tinham em aprender conteúdos relacionados à Álgebra básica, devido a isso, surgiu o interesse, ao cursar o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), de fazer um trabalho de Dissertação voltado ao ensino desse tópico da Matemática.

2.1 A Álgebra pelo olhar dos Parâmetros Curriculares Nacionais

Em meados dos anos 90, O Ministério da Educação dá inicio à elaboração dos PCN, cujo principal objetivo era adequar o trabalho escolar a uma nova realidade.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. (BRASIL, 1998, p.5). [3]

Ao propor a elaboração dos PCN, o Ministério da Educação desejava ampliar o debate nacional sobre o ensino da Matemática, propiciar a socialização das informações e pesquisas para todos os professores brasileiros, orientar a prática escolar por meio de um referencial, bem como dar um direcionamento para a formação inicial e continuada dos professores.

Os PCN, referentes ao Ensino Fundamental, estão organizados em quatro ciclos, cada ciclo corresponde a dois anos do Ensino Fundamental. O documento foi dividido em dois volumes: 1º e 2º ciclos, e 3º e 4º ciclos. O primeiro volume, elaborado em 1997, refere-se ao ensino de 1ª a 4ª série, o segundo de 5ª a 8ª série, de 1998.

No tocante à Álgebra, os PCN sugerem a exploração de situações de aprendizagem para desenvolver o pensamento algébrico a partir do 3º ciclo (5ª e 6ª séries). Neste ciclo convivem alunos de 11 e 12 anos. Os objetivos relacionados ao terceiro ciclo que dizem respeito ao pensamento algébrico é:

– reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;

– traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;

– utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p.64). [3]

Para o 4º ciclo, os PCN indicam a exploração de situações de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, com os seguintes objetivos:

– produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades –, identificando as equações, inequações e sistemas;

– resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;

– observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81). [3]

Ao analisar os objetivos algébricos destacados nos 3º e 4º ciclos, chegamos a conclusão que a Álgebra ocupa um espaço de destaque nas orientações didáticas que abarcam esses dois ciclos, enfatizando, no terceiro, a retomada da Pré-Álgebra (jogos, generalizações e representações matemáticas com gráficos, modelos) consolidando e ampliando noções e conceitos algébricos e, no quarto ciclo, o estudo das técnicas convencionais para resolver equações (procedimentos mecânicos, resolução de expressões e equações).

No que se refere ao ensino da Álgebra, os PCN orientam que "as atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras.[...]" (BRASIL, 1998, p.121-122). [3]

Os PCN colocam, de uma forma explícita, suas propostas para o ensino de Álgebra da seguinte forma: (BRASIL, 1998, p.116). [3]

- Na dimensão Aritmética Generalizada – uso das letras como generalização do modelo aritmético, com ênfase nas propriedades das operações;

- Na dimensão Funcional – o uso de letras como variáveis, expressa relações e funções;
- Na dimensão Equação – as letras entendidas como incógnitas, com ênfase na resolução de equações;
- Na dimensão Estrutural – letras como símbolos abstratos, ênfase nos cálculos algébricos e expressões.

Para Lins e Gimenez (1997) [10], a Álgebra visa à representação de fatos genéricos, ou seja, ela busca a generalização de um determinado problema. Portanto, o principal objetivo de desenvolver o estudo da Álgebra na sala de aula é de explorar e mobilizar o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, "A Álgebra consiste em um conjunto de afirmações para os quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade". (LINS E GIMENES, 1997, p.137). [10]

Segundo Lins e Gimenez (1997) [10] os objetivos centrais da educação algébrica deveriam permitir que os alunos produzissem significados para a Álgebra, possibilitando que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente.

Fiorentini, Miorim e Miguel, escritores bastante atuantes no que se refere ao ensino de Álgebra, escreveram três artigos entre 1992 e 1993 que nos chamam atenção por sua atualidade e reflexão acerca da questão de Educação Algébrica e da construção do currículo, os trabalhos foram os seguintes: **Álgebra ou Geometria: para onde pende o Pêndulo?** (1992), **Ressonâncias e Dissonâncias do Movimento Pendular entre Álgebra e Geometria no Currículo Escolar Brasileiro** (1993a) e **Construções para um Repensar. . . a Educação Algébrica Elementar** (1993b). Esse último me chamou bastante atenção pelo fato de que os autores fazem uma abordagem sobre as três concepções identificadas na Educação Algébrica, fazendo algumas críticas e propondo uma outra concepção para a melhoria no ensino de Álgebra, que é foco principal dessa dissertação.

A primeira concepção identificada na Educação Algébrica é a *linguístico-pragmática*. Essa concepção foi praticamente hegemônica durante todo século XIX e metade do século XX, tanto no Brasil como em outros países. Ela defende que o importante é a aquisição, mesmo que seja de forma mecânica, das técnicas requeridas pelo "transformismo algébrico"; nesta visão não importa a natureza ou relevância do problema, mas sim a forma de como fabricá-lo. Desta forma, o currículo é estruturado por uma sequência que partem das expressões algébricas (cálculo literal), passam pelas operações com as expressões, chegam às equações e, por fim, à resolução dos problemas baseados nessas equações.

A segunda concepção é denominada *fundamentalista-estrutural* e vinha contrapor à primeira. Ele estava presente no Movimento da Matemática Moderna e nela o papel pedagógico desta disciplina passa a ser o de fundamentador dos vários campos da Matemática escolar. Assim, os tópicos algébricos (expressões algébricas, valores numéricos, operações, fatoração) no currículo seriam reorganizados, no sentido de fazer com que eles fossem antecedidos por "tópicos fundamentais" (conjuntos numéricos, propriedades estruturais, sentenças abertas e fechadas, etc) e sucedidos por "novos conteúdos algébricos" (funções, funções de 1º e 2º graus, etc).

A terceira concepção é a chamada *fundamentalista analógica*. Essa concepção tenta efetuar uma síntese entre as duas primeiras. Dessa forma, ela procura usar modelos físicos e geométricos para tornar visíveis certas identidades algébricas. Ele visa recuperar o valor instrumental da Álgebra e preservar a preocupação fundamentalista, só que substituindo a base das propriedades estruturais por modelos geométricos ou físicos.

De acordo com os autores, o problema dessas três concepções, é que o ensino e a aprendizagem ficam reduzidos pois a ênfase é dada à habilidade manipulativa das expressões algébricas, priorizando a linguagem ou o ensino da linguagem algébrica já constituída ao invés da construção do pensamento algébrico.

> Fazendo, enfim, uma síntese comparativa entre essas três concepções de Educação Algébrica, podemos defender aqui a tese de que o ponto comum, e a nosso ver didaticamente negativo, existente entre elas é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. De fato, todas essas concepções da Educação Algébrica tomam como ponto de partida a existência de uma Álgebra simbólica já constituída. Em todos esses casos, o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao "transformismo algébrico". (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993b, p.85). [8]

Com base nesses argumentos, os autores propõem uma outra concepção de educação algébrica, que procura mostrar que entre o pensamento algébrico e a linguagem existe uma relação dialética, e que esse pensamento algébrico é caracterizado pela existência de vários elementos como: percepção de regularidades, de aspectos invariantes contrastando com os variantes, de tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e da presença de um processo de generalização.

Desta forma, estes autores chegam a conclusão que não existe uma única maneira ou forma de expressar o pensamento algébrico.

> Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993b, p.88). [8]

E ainda, que o pensamento algébrico é algo abrangente, ou seja, além dos campos específicos da Matemática, podem ser aplicada em outras áreas do conhecimento humano.

> O modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, portanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993b, p.88). [8]

Baseado na concepção proposta pelos autores, podemos concluir que existem três etapas que podem se interligarem e que visam a construção sólida do pensamento algébrico. A primeira etapa consiste em construir as expressões simbólicas partindo da análise de situações concretas. Desta forma, a aluno constrói uma linguagem que seja significativa para ele, pois partirá da análise de uma situação-problema, visando garantir os exercícios dos elementos que caracterizam o pensamento algébrico.

A segunda etapa é o inverso da primeira, ou seja, o aluno parte das expressões algébricas buscando atribuir sentidos ou significados para elas. A terceira etapa é chamado transformismo algébrico (cálculo) . Nessa etapa a atenção do aluno é dada para o modo como as expressões algébricas podem ser transformadas em expressões equivalentes e os procedimentos que levarão a essa equivalência.

Baseado nas conclusões destes autores supracitados, acreditamos que a Álgebra básica é uma ferramenta no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio, processos e na solução de problemas matemáticos e até de outras áreas, tais como Física, Biologia, Química, dentre outras. De acordo com os PCN, "O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas." (BRASIL, 1998, p.115). [3]

Entretanto, nem sempre o ensino da Álgebra é concretizado a partir de situações-problema, uma vez que, as práticas de ensino predominantes consistem em ensinar o conceito, procedimentos ou técnicas e, em seguida, apresentar um problema como exercício de fixação, visando avaliar se os alunos podem empregar o que foi ensinado.

Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, devemos ter clareza de seu papel dentro do currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático. Assim, é mais adequado propormos situações em que os alunos construam as noções algébricas pela observação de regularidades que podem estar em tabelas, gráficos, situações reais do dia-a-dia pois, desta forma, eles conseguem estabelecer relações, ao invés de apenas desenvolver o estudo da Álgebra enfatizando as "manipulações" com expressões e equações de uma forma meramente mecânica e decorativa, pois dessa forma o aluno não enxerga o verdadeiro significado que as letras possuem dentro de um contexto matemático.

Tradicionalmente, a forma mais frequente de ensinar Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo de forma oral, usando o quadro, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, resolvendo exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e depois de tudo isso, pressupõe que o aluno aprenda através de repetição e reprodução. Assim, considera-se que se o aluno reproduzir de forma correta, ocorreu a aprendizagem. De acordo com os PCN (1998, p.37) [3] "Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos”. Ou seja, nós, professores de Matemática devemos ter a capacidade e o compromisso de buscar caminhos e métodos que inovam e facilitem o aprendizado de nossos alunos.

Os PCN afirmam que

> Além de organizador o professor também é facilitador nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Nessa função, faz explanações, oferece materiais, textos etc. (BRASIL, 1998, p.38). [3]

Os PCN indicam três caminhos que ajudam o professor nesse processo de ensino da Matemática, que são: a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos. Neste trabalho destacaremos apenas dois: A História da Matemática e as tecnologias da comunicação, pois estão relacionadas diretamente com o objetivo dessa pesquisa.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42). [3]

Foi o que fizemos no primeiro capítulo deste trabalho, fazendo uma abordagem histórica de como os grande gênios do passado contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra.

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.(BRASIL, 1998, p.43). [3]

Entretanto, é importante que o professor entenda que esse tipo de abordagem não deve ser algo obrigatório e que deva ser explorado em todos os conteúdos de Matemática. Ele deve encarar como um recurso didático para desenvolver alguns conceitos ou conteúdos, sem que se prenda a fatos, nomes, datas a serem decorados.

Em relação à importância do uso das mídias digitais de informação, da tecnologia e dos computadores, sabemos que a geração atual de alunos possuem mais contatos e acessos a celulares, computadores, tablets, ipods e outros equipamentos, do que as gerações passadas. Os estudantes estão sempre conectados na rede ou em rede, acessando jogos, filmes, vídeos, baixando aplicativos, executando download, ou seja, interagindo com a máquina e suas inovações tecnológicas. Então porque não aproveitamos que nossos alunos já possuem uma familiaridade com esses recursos e usamos essa habilidade no auxílio do ensino da Matemática?

Quanto ao uso dessas tecnologias, os PCN [3] indicam que esses recursos trazem significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática à medida que:

- relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

É o que faremos nesse trabalho, utilizando o software de Matemática dinâmica geogebra. Mostraremos como podemos relacionar a Álgebra com a Geometria e, ao mesmo tempo, dinamizá-la utilizando os recursos computacionais.

De acordo com os PCN, [3] os computadores podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades:

- como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
- como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.

É importante ressaltar que uso do quadro-negro (ou quadro magnético), giz (piloto) e também do livro didático com a função de ferramentas de aprendizagem continuam sendo muito importantes, e devem ser utilizadas em sala de aula, portanto, não estamos defendendo as suas exclusões, mas a inclusão de novas e diferentes tecnologias. Aliar a ferramenta tecnológica com conhecimentos matemáticos despertando no aluno interesse, curiosidade e motivação são os objetivos almejados para a sua utilização.

Em 2000, O Ministério da Educação, num trabalho conjunto com educadores de todo o País, e por intermédio da Secretaria de Educação Média e Tecnológica, organizou, na atual administração, o projeto de reforma do Ensino Médio como parte de uma política mais geral de desenvolvimento social, que prioriza as ações na área da educação, criando, assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, chegando a um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta, buscamos dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender.

> Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias. Ao distribuí-los, temos a certeza de contar com a capacidade de nossos mestres e com o seu empenho no aperfeiçoamento da prática educativa. Por isso, entendemos sua construção como um processo contínuo: não só desejamos que influenciem positivamente a prática do professor, como esperamos poder, com base nessa prática e no processo de aprendizagem dos alunos, revê-los e aperfeiçoá-los. (BRASIL, 2000, p.4). [4]

De acordo com os PCN [4], a reforma curricular do Ensino Médio estabeleceu a divisão do conhecimento escolar em áreas. A organização entre essas áreas do conhecimento foi dividida da seguinte forma:

– Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;

– Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;

– Ciências Humanas e suas Tecnologias.

A estruturação por área de conhecimento justifica-se por assegurar uma educação de base científica e tecnológica, na qual conceito, aplicação e solução de problemas concretos são combinados com uma revisão dos componentes socioculturais orientados por uma visão epistemológica que concilie humanismo e tecnologia ou humanismo numa sociedade tecnológica.

As competências e habilidades que os alunos deverão alcançar ao concluir o Ensino Médio, no que se refere ao aprendizado de Álgebra, dentro da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, de acordo com os PCN, estão assim definidas:

– identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações, e interpretações;

– analisar qualitativamente dados quantitativos, representados gráfica ou algebricamente, relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos;

Desta forma, fizemos uma síntese de como a Matemática, mais precisamente a Álgebra, foi abordada de acordo com os PCN, tanto no Ensino Fundamental, como no Ensino Médio.

2.2 A Álgebra pelo olhar da Base Nacional Comum Curricular

Agora, falaremos sobre a nova Base Nacional Comum Curricular. Em 20 de Dezembro de 2017 é homologada no País a nova BNCC referente ao Ensino Fundamental, e em 2018 o documento é completado com as normas para o Ensino Médio. A BNCC é um documento que serve de Base para toda educação básica brasileira e possui como meta proporcionar uma educação de qualidade para todos.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).(BRASIL, 2018, p.7). [5]

A BNCC está estruturada de modo a explicitar as competências que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica e em cada etapa da escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes.

No que se refere ao ensino de Matemática de um modo geral, a BNCC justifica a importância do aprendizado dessa disciplina da seguinte forma:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2018, p.265). [5]

De acordo com a Base, o letramento matemático[1] deve ser desenvolvido no Ensino Fundamental, pois é através desse letramento que o aluno adquiri competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o

[1] Segundo a Matriz do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - Pisa (2012, p. 18), o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias." [6]

estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p.267) [5], as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental estão divididas de seguinte forma:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções

para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, essas unidades são: **Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística**. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

Dentre essas cinco unidades citadas, vamos dar ênfase ao que nos interessa para o o nosso trabalho de pesquisa que é o ensino de Álgebra. Nessa unidade temática, a Base traz como objetivo principal o desenvolvimento do pensamento algébrico.

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2018, p.270). [5]

O importante na implemetação da BNCC é que ela enfatiza a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico logo no início das séries iniciais do Ensino Fundamental, só que deixa claro que nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. Já nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado nos anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.

A BNCC faz uma relação importante entre a Álgebra e o aprendizado computacional.

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e Estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos

> alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (BRASIL, 2018, p.271). [5]

Essa associação de Álgebra com pensamento computacional ocorre devido ao estudo dos algoritmos[2] e de seus fluxogramas[3], que podem ser objetos de estudos nas aulas de Matemática. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à Álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.

O Estudo da Álgebra no ensino Fundamental está divido, de acordo com a nova BNCC, da seguinte forma:

Tabela 1 – **Matemática - 1º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Padrões figurais e numéricos: in_ vestigação de regularidades ou padrões em sequências	**(EF01MA09)** Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, for_ ma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em se_ riações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	**(EF01MA10)** Descrever, após o reconhe_ cimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

Tabela 2 – **Matemática - 2º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Construção de sequências repeti_ tivas de sequências recursivas.	**(EF02MA09)** Construir sequências de nú_ meros naturais em ordem crescente ou de_ crescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	**(EF02MA10)** Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de pa_ lavras, símbolos ou desenhos. **(EF02MA11)** Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

[2] São sequências finitas de procedimentos que permite resolver um determinado problema.

[3] É um tipo de diagrama, e pode ser entendido como uma representação esquemática de um processo ou algoritmo, muitas vezes feito através de gráficos que ilustram de forma descomplicada a transição de informações entre os elementos que o compõem, ou seja, é a sequência operacional do desenvolvimento de um processo. Os fluxogramas são muito utilizados em projetos de software para representar a lógica interna dos programas.

Tabela 3 – **Matemática - 3º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Identificação e descrição de regu_ laridades em sequências numéricas recursivas.	**(EF03MA10)** Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou sub_ trações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequên_ cia e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade.	**(EF03MA11)** Compreender a ideia de igual_ dade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

Tabela 4 – **Matemática - 4º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Sequência numérica recursiva for_ mada por múltiplos de um número natural.	**(EF04MA11)** Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múlti_ plos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva for_ mada por números que deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número natural di_ ferente de zero.	**(EF04MA12)** Reconhecer, por meio de inves_ tigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identifican_ do regularidades.
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.	**(EF04MA13)** Reconhecer, por meio de inves_ tigações, utilizando a calculadora quando ne_ cessário, as relações inversas entre as opera_ ções de adição e de subtração e de multiplica_ ção e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade.	**(EF04MA14)** Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade exis_ tente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. **(EF04MA15)** Determinar o número desconhe_ cido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com núme_ ros naturais.

Tabela 5 – **Matemática - 5º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Propriedades da igualdade e noção de equivalência.	**(EF05MA10)** Concluir, por meio de investiga_ ções, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. **(EF05MA11)** Resolver e elaborar problemas cu_ ja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	**(EF05MA12)** Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um pro_ duto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. **(EF05MA13)** Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desi_ guais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as par_ tes e delas com o todo.

Tabela 6 – **Matemática - 6º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Propriedades da igualdade.	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adi_ cionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utili_ zar essa noção para determinar valores des_ conhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo rela_ ções aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Tabela 7 – **Matemática - 7º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variá_ vel, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, dife_ renciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em re_ cursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não ape_ nas na matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.	**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regulari_ dade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas dire_ tamente proporcionais e grandezas in_ versamente proporcionais.	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau.	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Tabela 8 – **Matemática - 8º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas.	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial do tipo $ax^2 = b$.	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas.	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Tabela 9 – **Matemática - 9º ano**

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Funções: representações numérica, algé_ brica e gráfica.	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, al_ gébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações fun_ cionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes.	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envol_ vam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes propor_ cionais e taxa de variação, em contextos so_ cioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e pro_ dutos notáveis. Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que pos_ sam ser representados por equações polino_ miais do 2º grau.

Fazendo um comparativo de como a Álgebra era abordada de acordo com as orientações dos PCN e de como deverá ser, de acordo com a nova BNCC, percebemos que houve mudanças e avanços significativos. Pelos PCN, ela estava contemplada no bloco de números e operações, trazendo como principais conteúdos a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em sequências numéricas, a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas e a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. Isso aparecia a partir da 5ª série (atual 6º ano) e não tinha nenhuma construção anterior ou posterior das habilidades do pensamento algébrico.

Com a nova BNCC, a Álgebra já é estudada desde o 1º ano do Ensino Fundamental (antiga alfabetização) e compõe um dos cinco eixos temáticos apresentados pela Base. Há um foco no pensamento algébrico e não nas operações algébricas, especialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os conteúdos se relacionam à percepção e ao estabelecimento de padrões e regularidade, às propriedades das operações e ao sinal de igualdade, às ideias de proporcionalidade e equivalência, entre outros. As equações não são mais trabalhadas de forma exaustiva nos 8º e 9º anos. A ênfase é dada à capacidade de resolver situações-problema utilizando o pensamento algébrico, e isso pode ou não envolver equações e inequações.

No que se refere ao Ensino Médio, a BNCC orienta que seja dada uma continuidade do que foi proposto na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. Ela se organiza centrada no desenvolvimento de competências e é orientada pelo princípio da educação integral.

As aprendizagens essenciais definidas na BNCC do Ensino Médio estão organizadas por áreas do conhecimento da seguinte forma: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

De acordo com a BNCC, Os itinerários formativos são estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes. Eles podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo itinerários integrados, nos seguintes termos:

- Na área de Matemática e suas Tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar

> novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p.471). [5]

De acordo com a nova BNCC [5], as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, para o Ensino Médio, estão distribuídas da seguinte forma:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

No que se refere às habilidades específicas sobre os conteúdos de Números e Álgebra no ensino Médio, a BNCC [5] faz a seguinte distribuição:

- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

- (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de Álgebra e Geometria.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Assim como nos PCN, citados anteriormente, a BNCC também enfatiza a importância dos uso da tecnologia para o desenvolvimento da aprendizagem levando em conta que a transformação ocasionada pelo uso constante dessas tecnologias, bem como sua repercussão na forma como as pessoas se comunicam, impacta diretamente no funcionamento da sociedade e, portanto, no mundo do trabalho.

> É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p.473). [4]

De acordo com a nova Base, diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais são tematizadas, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores da seguinte forma:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

O que a BNCC pretende, nesta etapa, é criar no aluno potencialidades para o uso das tecnologias digitais, para que os mesmos consigam realizar uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento. Com isso, a Base define competências e habilidades, nas diferentes áreas, que permitem aos estudantes:

- buscar dados e informações de forma crítica nas diferentes mídias, inclusive as sociais, analisando as vantagens do uso e da evolução da tecnologia na sociedade atual, como também seus riscos potenciais;
- apropriar-se das linguagens da cultura digital, dos novos letramentos e dos multiletramentos para explorar e produzir conteúdos em diversas mídias, ampliando as possibilidades de acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho;

- usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e

- utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade.

É importante citarmos também que a BNCC estimula que os estudantes usem calculadoras e planilhas eletrônicas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pois desta forma, estimula o desenvolvimento do pensamento computacional ao chegarem nos anos finais.

Portanto, baseado nas recomendações tanto dos PCN, como da nova BNCC, é que usaremos o software Geogebra para o desenvolvimento deste trabalho, para isso, selecionamos alguns tópicos relacionados à Álgebra Elementar e apresentaremos algumas propostas de ensino, como será apresentado no próximo capítulo.

3 DINAMIZANDO A ÁLGEBRA BÁSICA

Neste capítulo faremos a dinamização de alguns conteúdos de Álgebra Elementar utilizando o software de Matemática dinâmica Geogebra para a resolução de problemas e generalização de padrões. Para isso, selecionamos alguns assuntos relacionados a esse ramo da Matemática que são citados nos PCN, na nova BNCC, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio e também na Matriz Referência do Enem.

3.1 Uma breve apresentação do Geogebra.

Então, vamos conhecer um pouco o que é esse programa: A origem da palavra Geogebra é a união das palavras Geometria e Álgebra. Foi criado por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzurg, com o intuito de dinamizar o estudo da Matemática nas escolas.

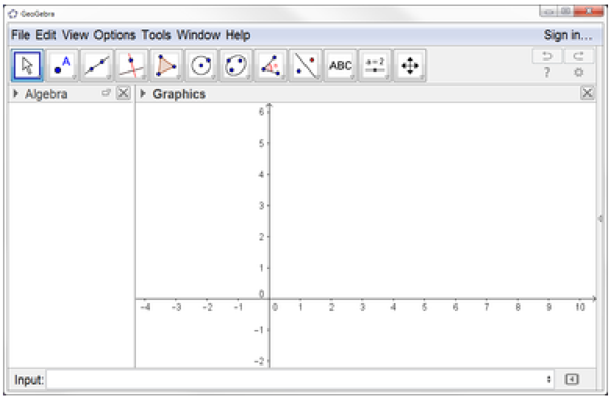
O Geogebra é um software gratuito, de Matemática dinâmica, de fácil acesso, e está disponível para download no site https://www.geogebra.org. Este programa é uma importante ferramenta didática que auxilia o professor no processo do ensino e aprendizagem, pois permite que o aluno possa manipular elementos geométricos, algébricos e de cálculo, na sua representação e visualização, com possibilidades de alterá-los e transformá-los. Desta maneira podemos mostrar, de uma forma mais clara, a relação da Álgebra com outros ramos da Matemática, que é um dos objetivos deste trabalho.

> O bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo. (BRASIL, 1998, p.44). [3]

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Ele também tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto, tanto no plano como no espaço.

Ao acessar o software Geogebra dispomos de uma tela de trabalho, conforme a figura 23, com vários recursos para a construção das representações geométricas e algébricas a partir das propriedades que as definem.

Figura 23 – Tela inicial do Geogebra



Fonte: encurtador.com.br/zKUX2

Conheça um pouco das ferramentas do geogebra:

Os recursos disponíveis encontram-se na barra de ferramentas que é composta por doze caixas de ferramentas ou ícones conforme demonstrado na figura 24.

Figura 24 – Barra de ferramentas do Geogebra

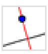
Fonte: encurtador.com.br/dosGX

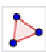
Em cada caixa de ferramenta, de acordo com o interesse, encontram-se disponíveis comandos para a elaboração e construção do que se quer representar, usufruindo-se da tecnologia para abordar os conteúdos matemáticos, criando-se, assim, oportunidades de dinamizar o ensino. O significado de cada ícone está apresentado a baixo:

 Mover;

 Novo ponto;

 Reta definida por dois pontos;

 Reta perpendicular;

 Polígono definido através de seus vértices;

 Circunferência dado o centro e um ponto;

 Elipse;

 Ângulo definido por três pontos;

 Reflexão numa reta;

 Seletor;

Deslocar eixos;
Rotação em torno de um ponto;
Intersecção de dois objetos;
Segmento definido por dois pontos;
Reta paralela;
Ponto médio ou centro;
Segmento definido por um ponto e seu comprimento;
Semirreta definida por dois pontos;
Vetor definido por dois pontos;
Vetor definido por um ponto e paralelo a outro;
Mediatriz;
Bissetriz;
Reta tangente;
Reta Polar;
Reta de regressão;
Lugar geométrico;
Polígono regular;
Compasso;
Circunferência definida por três pontos;
Semi círculo;
Arco de circunferência;
Setor circular (centro e dois pontos);
Setor circular (três pontos);
Hipérbole;
Parábola;
Cônica definida por 5 pontos;
Ângulo com uma dada amplitude;
Distância;
Área;
Declive;
Reflexão num ponto;
Inversão numa circunferência;
Rotação;
Translação;
Homotetia;

Exibir / Esconder;
Texto;
Imagem;
Relação entre objetos;
Ampliar;
Reduzir;
Exibir / Esconder (objetos);
Exibir / Esconder (rótulos);
Copiar estilo visual;
Apagar objetos.

Após essa breve apresentação do software Geogebra, iremos resolver alguns problemas e, para isso, utilizou-se uma metodologia que visou relacionar a Álgebra básica com o cotidiano do aluno de forma atraente e dinâmica. Para tal, foram propostas diversas atividades como forma de integrar os alunos com alguns assuntos estudados, com recursos tecnológicos e com as mídias digitais, foram utilizados os seguintes recursos eletrônicos: computador, data show, câmera fotográfica e calculadora.

Como neste capítulo falaremos sobre resolução de problemas, cabe citar aqui o autor George Polya [11], que em seu livro, **A arte de resolver problemas**, apresenta quatro passos necessários para que haja sucesso na resolução de um problema. O primeiro passo é compreender o problema. Nesta fase o aluno deve fazer as seguintes indagações: Qual a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? O segundo passo é o estabelecimento de um plano, ou seja, é a tradução do problema para a linguagem simbólica da Matemática. Nesta fase, o aluno deve encontrar uma conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar. O terceiro passo é executar o plano que foi elaborado, os cálculos matemáticos. Nesta fase, o aluno deve verificar, claramente, se cada passo está sendo executado corretamente. E, o quarto e último passo é examinar a solução obtida. Nesta fase, o aluno deve analisar e testar a solução para verificar se faz sentido ao problema, aqui ele pode se fazer as seguintes perguntas: É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? ou seja, nessa fase, o aluno vai refletir sobre o trabalho realizado (POLYA, 1986). [11]

Neste capitulo abordaremos os seguintes assuntos:

- Equação do 1º grau com duas variáveis e a Geometria dinâmica;

- Sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e a Geometria dinâmica;
- Sistema de equações do 1º grau com três equações e três variáveis e a Geometria dinâmica;
- Polinômios e a Geometria dinâmica;
- Álgebra e Geometria Plana - Generalizando padrões: Polígonos e a Geometria dinâmica.

3.2 Equação do 1º grau com duas variáveis e a Geometria dinâmica.

Nesta secção, faremos o estudo de uma habilidade exigida pela nova BNCC, no 8º ano do Ensino Fundamental que é: "(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano", e mostraremos como o leitor pode utilizar o software Geogebra para dinamizar a Álgebra e a Geometria contidas neste conteúdo, com o objetivo de facilitar a visualização, a compreensão e, consequentemente, o seu aprendizado.

A escolha de trabalhar equação do 1º grau com duas variáveis deve-se à importância que as equações ocupam na educação matemática, no ensino básico, sendo que as mesmas também estão presentes em situações diárias vivenciadas pelos alunos, assim, trabalhar com esse conteúdo contribuirá para que os educandos possam investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática associado à resolução de problemas, e sua importância no Ensino Fundamental e Médio. Mas, para isso, definiremos alguns conceitos matemáticos fundamentais relacionados com este tópico.

Equação - Uma equação é uma igualdade entre duas expressões algébricas onde aparece pelo menos um valor desconhecido. Aos valores desconhecidos chamamos Incógnitas.

Exemplo: $3x - 4 = 2x + 10$.

Membros de uma equação - A expressão algébrica à esquerda do sinal de "igualdade" designa-se por 1º membro. A expressão algébrica à direita do sinal de "igualdade" designa-se por 2º membro.

Exemplo: $\underbrace{3x - 4}_{\text{1º membro}} = \underbrace{2x + 10}_{\text{2º menbro}}$

Monômio - Um monômio é um número, ou um produto de números em que alguns podem ser representados por letras. Quando estão presentes letras, podemos distinguir duas partes num monômio, uma parte numérica, coeficiente, e a parte literal, constituída essa por letras.

Exemplo: $\underbrace{3x}_{\text{monômio}} - \underbrace{4}_{\text{monômio}} = \underbrace{2x}_{\text{monômio}} + \underbrace{10}_{\text{monômio}}$.

No exemplo acima, temos: $\underbrace{3}_{\text{coeficinte}} \cdot \underbrace{x}_{\text{parte literal}}$

Termos - Cada um dos membros de uma equação pode ser constituído por um ou mais monômios, que se designam por termos da equação. Termos semelhantes são termos que têm a mesma parte literal.

Exemplo: $\underbrace{3x}_{\text{termo}} - \underbrace{4}_{\text{termo}} = \underbrace{2x}_{\text{termo}} + \underbrace{10}_{\text{termo}}$.

Solução: Ao valor da incógnita que transforma a equação numa igualdade numérica verdadeira chama-se solução ou raiz da equação.

No exemplo: $3x - 4 = 2x + 10$ a solução é $x = 14$, pois:

$3 \cdot 14 - 4 = 2 \cdot 14 + 10$

$42 - 4 = 28 + 10$

$38 = 38$

Equações equivalentes - Uma equação diz-se equivalente a outra, quando toda solução da primeira é solução da segunda e reciprocamente, toda solução da segunda é solução da primeira, ou quando são ambas impossíveis.

Para a resolução de equações há que ter em conta diversas transformações, também chamadas de transformações elementares de equivalência, que se baseiam nos seguintes princípios:

1º Princípio de equivalência: Quando somamos ou subtraímos o mesmo número a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente à dada.

2º Princípio de equivalência: Quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à inicial.

No exemplo: $3x - 4 = 2x + 10$ procederemos da seguinte forma:

1º) Subtraímos $2x$ nos dois membros da equação:

$3x - 4 - 2x = 2x + 10 - 2x$

$x - 4 = 10$

2º) Somamos 4 nos dois membros da equação:

$x - 4 + 4 = 10 + 4$

$x = 14$

Plano Cartesiano Ortogonal - É um objeto matemático plano e composto por duas retas numéricas perpendiculares, ou seja, retas que possuem apenas um ponto em comum, formando um ângulo de 90º. Esse ponto comum é conhecido como origem e é nele que é marcado o número zero de ambas as retas. O plano cartesiano recebeu esse nome por ter sido idealizado por René Descartes e é usado fundamentalmente para sistematizar técnicas de localização no plano.

O plano cartesiano é formado por duas retas, uma responsável pela coordenada horizontal e outra responsável pela coordenada vertical. É comum usar as letras x para a primeira e y para a segunda e os termos "coordenada x" e "coordenada y".

No plano cartesiano, a reta vertical responsável pelas coordenadas y é chamada de ordenada, e a reta horizontal, responsável pelas coordenadas x, é chamada de abscissa.

Par ordenado - Um par ordenado é formado por dois números reais que representam uma coordenada. A ordem escolhida é a seguinte: Primeiro vêm as coordenadas x e, depois, as coordenadas y, que são colocadas entre parênteses e separadas por vírgula para representar uma localização qualquer.

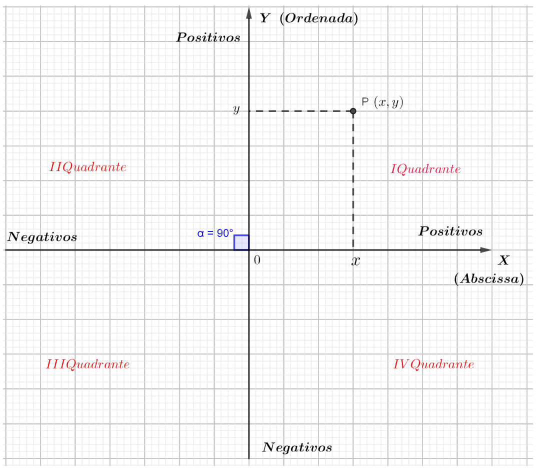
Exemplo: (4, 5).

Quadrantes - Por ser formado por duas retas numéricas, existem algumas particularidades do plano cartesiano. Pontos mais à direita possuem coordenada x maior que pontos mais à esquerda. Pontos mais para cima possuem coordenada y maior que números mais para baixo.

Além disso, a região onde x e y são positivos simultaneamente é chamada de primeiro quadrante. A região onde y é positivo e x é negativo é conhecida como segundo quadrante. Já a região onde x e y são negativos simultaneamente é chamada de terceiro quadrante. Por fim, quando x é positivo e y é negativo, os pontos estão localizados no quarto quadrante.

Esses quadrantes são numerados em sentido anti-horário, partindo do primeiro quadrante, que fica à direta do eixo y e acima do eixo x, como mostra a figura a seguir:

Figura 25 – Sistema Cartesiano Ortogonal - Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora, falaremos sobre as equações do 1º grau com duas variáveis, que é proposto pela habilidade da nova BNCC.

Como o próprio nome já diz, equação do 1º grau com duas variáveis, nada mais é do que uma equação que possui dois termos desconhecidos cujo expoente de cada um é o número 1 (grau da equação). Veja aqui alguns exemplos:

a) $x + y = 3$

b) $5x - 4y = -20$

c) $y = 3x + 10$

d) $\frac{x}{2} + 5 = 7y - 10$

e) $6 = 8t + 11p$

Vamos utilizar o exemplo $y = 3x + 10$ para nossa aplicação. Com isso, procederemos da seguinte forma: atribuiremos valores para x e veremos que valores encontraremos para y.

Para $x = -1$, teremos:

$y = 3 \cdot (-1) + 10 = -3 + 10 = 7$

Logo, o par ordenado $(-1, 7)$ é solução da equação $y = 3x + 10$, pois, observe que se substituirmos $x = -1$ e $y = 7$ na equação linear $y = 3x + 10$, teremos uma igualdade nos dois membros da equação. Observe:

$$\begin{gathered} y = 3x + 10 \\ 7 = 3 \cdot (-1) + 10 \\ 7 = -3 + 10 \\ 7 = 7 \text{ (Verdadeiro)} \end{gathered}$$

Depois disso, faremos a seguinte pergunta ao leitor: "Esta equação possui apenas essa solução?".

Mostramos ao aluno que esta é apenas uma solução para esta equação, isto é, se atribuirmos outro valor para x, encontraremos um valor diferente para y, e assim sucessivamente. Olhe os exemplos a seguir:

Para $x = -3$, teremos:

$y = 3 \cdot (-3) + 10 = -9 + 10 = 1$

Logo, o par ordenado $(-3, 1)$ também é solução da equação $y = 3x + 10$.

Para $x = 0$, teremos:

$y = 3 \cdot 0 + 10 = 0 + 10 = 10$

Logo, o par ordenado $(0, 10)$ também é solução da equação $y = 3x + 10$.

Para $x = 2$, teremos:

$y = 3 \cdot 2 + 10 = 6 + 10 = 16$

Logo, o par ordenado $(2, 16)$ também é solução da equação $y = 3x + 10$.

Para $x = 30$, teremos:

$y = 3 \cdot 30 + 10 = 90 + 10 = 100$

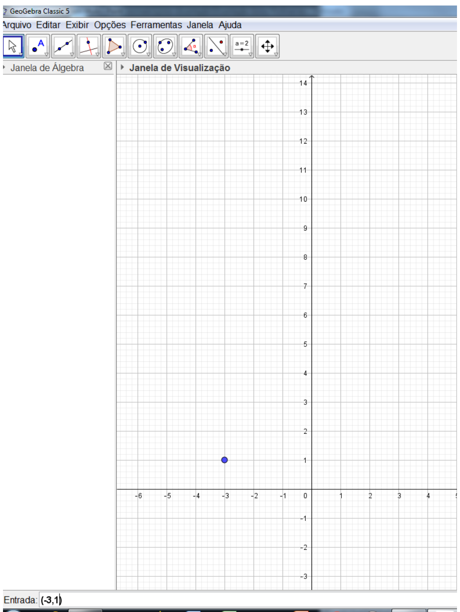
Logo, o par ordenado $(30, 100)$ também é solução da equação $y = 3x + 10$, e assim sucessivamente. Desta forma, o aluno percebe que a equação dada possui infinitos pares ordenados que servem como solução, pois para qualquer valor real que for atribuído ao x, ele encontrará um correspondente em y, ou seja, como já foi dito, cada par ordenado representa um ponto no sistema cartesiano, logo, a equação possui infinitos pontos como solução.

Agora, mostraremos como associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano utilizando o Geogebra. Para isso, procederemos de duas formas distintas:

1º) Encontrando dois pontos e construindo a única reta que passa por eles. Para isso, procederemos da seguinte forma:

1.1) Encontramos o primeiro ponto que corresponde ao par ordenado $(-3, 1)$ abrindo um par de parênteses e colocamos dentro deles os valores -3 e 1, separados por vírgula e depois pressionamos o botar *Ente*r no teclado do computador. Esse procedimento deve ser feito na caixa de entrada, que fica localizada na parte inferior esquerda da tela inicial do Geogebra, como mostrado na figura a seguir.

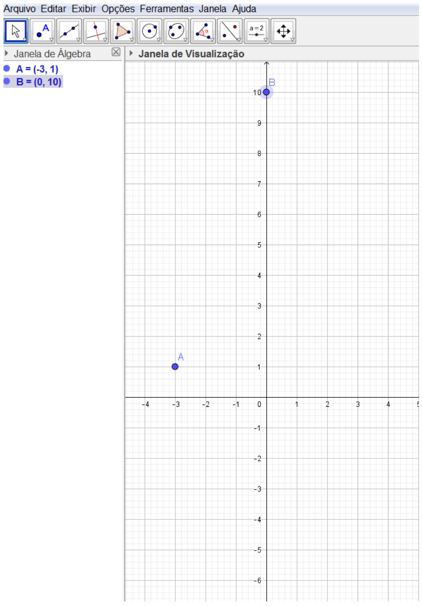
Figura 26 – Construção de um ponto no Sistema Cartesiano / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

1.2) De forma análoga, encontramos o segundo ponto que corresponde ao par ordenado $(0, 10)$.

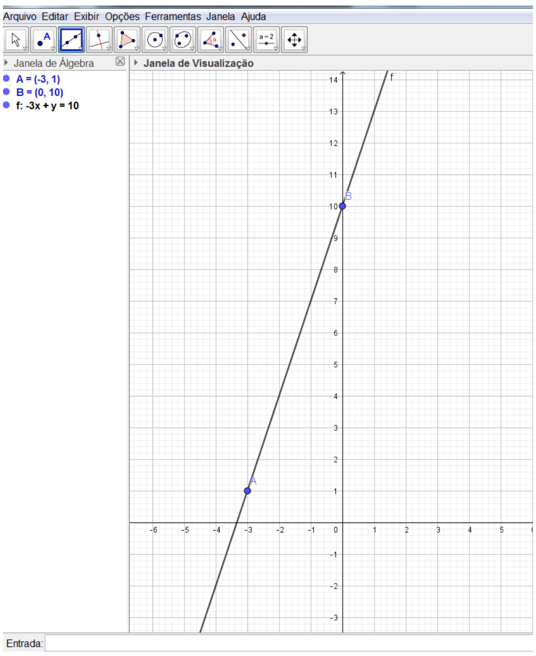
Figura 27 – Construção de um ponto no Sistema Cartesiano / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

1.3) Depois de termos construídos esses dois pontos, iremos construir a única reta que passa por eles clicando no ícone  e, posteriormente, nos dois pontos, não importando a ordem dos pontos.

Figura 28 – Construção de uma reta conhecendo dois de seus pontos / Geogebra



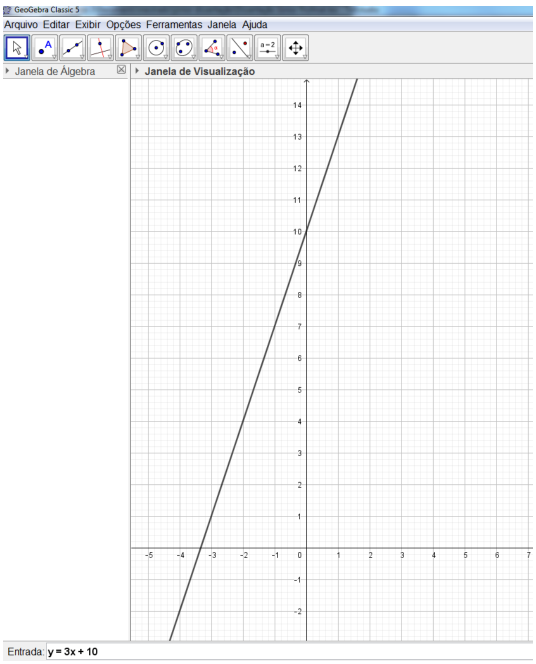
Fonte: Elaborado pelo autor

O interessante de utilizar do software Geogebra é que podemos mostrar ao aluno como a Geometria e a Álgebra então relacionadas, pois toda a parte geométrica que aparece na janela de visualização (à direta da tela) está sendo representada, simultaneamente, na janela de álgebra (à esquerda da tela).

Quando digitamos o primeiro par ordenado $(-3, 1)$, automaticamente, surge na janela de álgebra o ponto $A = (-3, 1)$, e depois o ponto $B = (0, 10)$ e, por último, a equação da reta $f : -3x + y = 10$, que nada mais é do que a equação linear de 1º grau com duas incógnitas $y = 3x + 10$ proposto na questão, ou seja, desta forma o aluno consegue visualizar a Geometria e a Álgebra, simultaneamente, no mesmo espaço.

2º) Digitando, de uma única vez, a equação linear de 1º grau com duas incógnitas $y = 3x + 10$, proposto na questão, na caixa de entrada do Geogebra.

Figura 29 – Construção de uma reta / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma, ao digitar a equação $y = 3x + 10$ surge, automaticamente, o esboço da reta que ela representa no sistema cartesiano, isto é, um processo rápido e dinâmico, satisfazendo a habilidade que a nova BNCC exige que um aluno do 8º ano tenha que é associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Os alunos acharam bastante interessante realizar essa atividade utilizando o Geogebra, inclusive muitos disseram: *"Olha, legal isso!"*. E, a partir daí, percebi que o interesse pra resolver questões sobre o assunto aumentou bastante, pois eles queriam verificar como seria, posteriormente, a resolução utilizando o software dinâmico, pois essa metodologia era algo novo para todos eles.

3.3 Sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e a Geometria dinâmica.

Nesta secção, iremos abordar, com o auxílio do software Geogebra, uma outra habilidade exigida na nova BNCC, também no 8º ano, que é: "(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso".

Como visto na secção anterior que uma equação linear do 1º grau com duas variáveis pode ser representada por uma reta no sistema cartesiano, agora faremos esse estudo com duas equações lineares do 1º grau com duas variáveis, resultando no que conhecemos com o nome de **sistema de equações lineares**.

Resolver um sistema de duas equações com duas variáveis, nada mais é do que encontrar um par ordenado que seja solução das duas equações, simultaneamente. Veja o seguinte exemplo:

Dadas as equações lineares do 1º grau com duas variáveis $x - 2y = -10$ e $5x + 4y = 34$, podemos concluir que o par ordenado $(2, 6)$ é solução de cada uma dessas equações, pois ao substituir x por 2 e y por 6 em cada uma delas teremos:

$x - 2y = -10 \Longrightarrow 2 - 2 \cdot 6 = -10 \Longrightarrow 2 - 12 = -10 \Longrightarrow -10 = -10$ (verdadeiro).

e

$5x + 4y = 34 \Longrightarrow 5 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 34 \Longrightarrow 10 + 24 = 34 \Longrightarrow 34 = 34$ (verdadeiro).

Portanto, como o par é solução das duas equações, dizemos que ele é solução do sistema linear formado por essas equações. Esse sistema é representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 5x + 4y = 34 \end{cases}$$

Mas nesse exemplo a solução foi dada com o objetivo de que o aluno veja que ela é, realmente, solução das duas equações e, portanto, será a solução do sistema formado por elas. Mas, a partir daí surge algumas perguntas que podemos fazer aos nossos alunos como: De que forma encontramos essa solução? será que existe outra solução para esse sistema ou ela é única? todo sistema linear tem solução? É importante aguçar a curiosidade dos alunos fazendo essas perguntas. Provavelmente, no início, aparecerão muitas dúvidas, como apareceram quando o autor questionou seus alunos.

Para resolvermos um sistema linear de duas equações com duas variáveis, podemos apresentar ao nosso aluno três métodos diferentes: método da adição, método da substituição ou método da comparação.

Neste primeiro exemplo, mostrei a resolução utilizando os três métodos. Acho importante fazer isso em sala de aula pois dá, ao aluno, a oportunidade dele conhecer os três métodos e assim ter a possibilidade de fazer a escolha que achar mais fácil, pois os três, resolvido de forma correta, levam ao mesmo resultado. É importante deixar claro para o aluno que ele não precisa saber resolver das três formas, basta uma.

1º) Método da adição: Nesse método, temos que fazer aparecer dois termos simétricos que pode ser na variável x ou na variável y, pois sabemos que ao somarmos dois valores simétricos, o resultado é nulo, fazendo, dessa forma, que uma variável "desapareça", encontrando o valor da outra. Após isso, substituímos essa variável encontrada em qualquer uma das duas equações, encontrando, assim, o valor da primeira que tinha desaparecido.

No exemplo dado, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 5x + 4y = 34 \end{cases}$$

Neste caso, podemos multiplicar a primeira equação por 2, ficando o sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -20 \\ 5x + 4y = 34 \end{cases}$$

Dessa forma, fizemos aparecer dois valores simétricos, $4y$ e $-4y$, que é o objetivo deste método. Após feito isso, somamos as duas equações, membro a membro, resultando em:

$$7x = 14$$

Dividindo ambos os membros da equação por 7, teremos:

$$\frac{7x}{7} = \frac{14}{7}$$

Portanto, chegamos a conclusão que $x = 2$.

Encontrado o valor de x, podemos substituí-lo aonde aparece a variável x, em qualquer uma das duas equações do sistema: $x - 2y = -10$ ou $5x + 4y = 34$. No cálculo abaixo, optei por substituir na primeira equação, isto é, $x - 2y = -10$.

$$x - 2y = -10 \Longrightarrow 2 - 2y = -10 \Longrightarrow -2y = -12 \Longrightarrow y = 6.$$

Portanto, o par ordenado (2, 6) é solução do sistema dado.

2º) Método da substituição: Nesse método, isolamos uma das variáveis x ou y em uma das equações e, em seguida, substituímos, na outra equação, essa variável que foi isolada pela expressão que corresponde ao seu valor. Desta forma, ficaremos com uma equação com apenas uma variável e assim encontramos o valor desta variável. Em seguida, pegamos esse valor encontrado e substituímos em qualquer equação do sistema.

No exemplo dado, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 5x + 4y = 34 \end{cases}$$

Isolando a variável x na primeira equação, teremos:

$$x = 2y - 10.$$

Substituindo a expressão $2y - 10$ no lugar da variável x, na segunda equação, teremos:

$$5 \cdot (2y - 10) + 4y = 34 \Longrightarrow 10y - 50 + 4y = 34 \Longrightarrow 14y = 84 \Longrightarrow y = 6.$$

Substituindo o y por 6 na equação $x = 2y - 10$, teremos:

$$x = 2 \cdot 6 - 10 \Longrightarrow x = 12 - 10 \Longrightarrow x = 2.$$

Portanto, o par ordenado (2, 6) é solução do sistema dado.

3º) Método da comparação: Nesse método, isolamos uma das variáveis x ou y nas duas equações e, em seguida, igualamos as expressões correspondentes. Fazendo isto, aparece uma equação com apenas uma variável, o que é possível resolver. Encontrando o valor dessa variável, substituímos em qualquer equação do sistema para encontrar a outra.

No exemplo dado, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 5x + 4y = 34 \end{cases}$$

Isolando a variável x na primeira equação termos:

$$x = 2y - 10.$$

Isolando a variável x na segunda equação termos:

$$x = \frac{34 - 4y}{5}.$$

Como $x = x$, temos:

$$2y - 10 = \frac{34 - 4y}{5}.$$

Resolvendo a equação acima, temos:

$$10y - 50 = 34 - 4y \Longrightarrow 14y = 84 \Longrightarrow y = 6.$$

Substituindo o y por 6 na equação $x = 2y - 10$, teremos:

$$x = 2 \cdot 6 - 10 \Longrightarrow x = 12 - 10 \Longrightarrow x = 2.$$

Portanto, o par ordenado (2, 6) é solução do sistema dado.

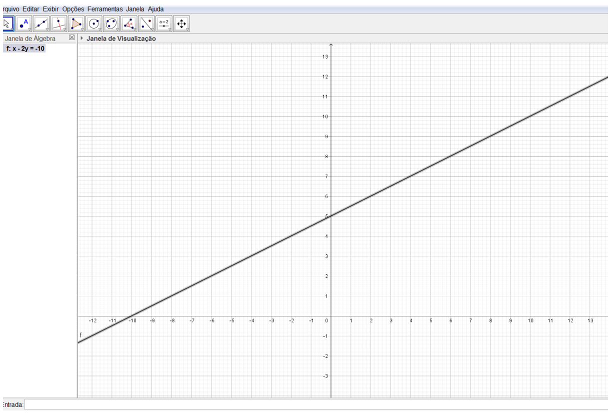
Desta forma, mostramos para o nosso aluno como ele pode resolver um sistema linear com duas equações e duas variáveis. A partir daqui fica por sua opção escolher o método que mais lhe agrada, pois foi visto que os três chagam na mesma solução.

Agora, mostraremos ao aluno como aplicar o software Geogebra para resolver o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 5x + 4y = 34 \end{cases}$$

1º) Digitamos a equação $x - 2y = -10$ na caixa de entrada no Geogebra, aparecendo a seguinte tela:

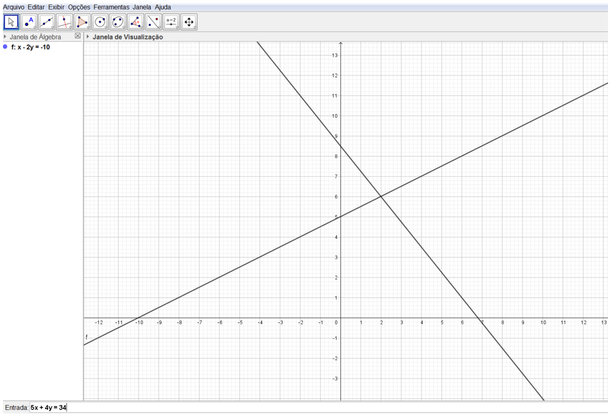
Figura 30 – Construção de uma reta / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

2º) Digitamos a equação $5x + 4y = 34$ na caixa de entrada no Geogebra, aparecendo a seguinte tela:

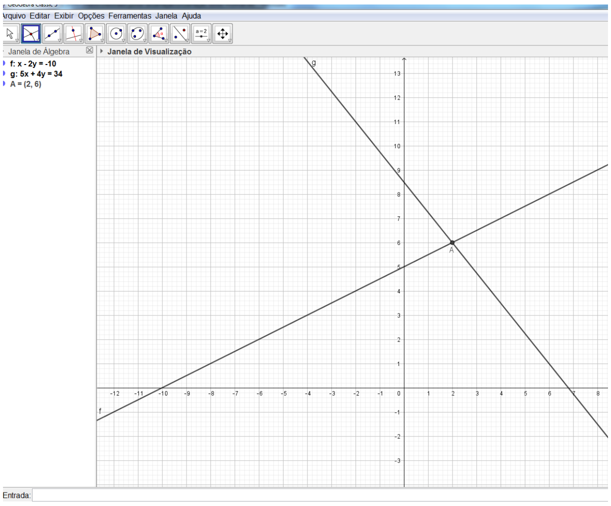
Figura 31 – Construção de uma reta / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

3º) Clicamos no ícone  (Intersecção de dois objetos) na caixa de ferramentas e posteriormente clicamos nas duas retas, surgindo a seguinte tela:

Figura 32 – Intersecção de duas retas / Geogebra



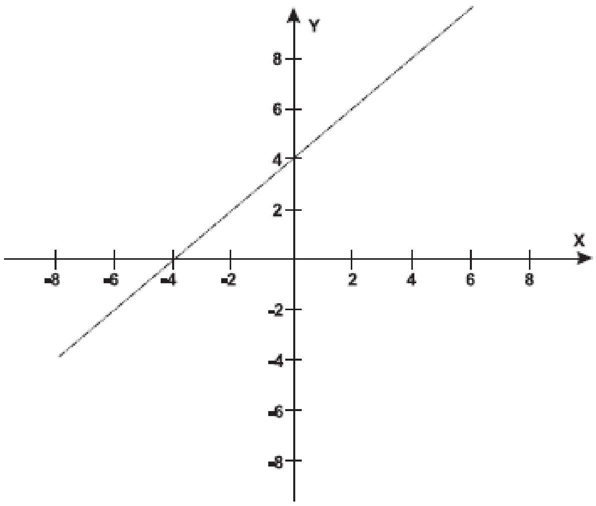
Fonte: Elaborado pelo autor

Após feito todo esse procedimento, aparece, automaticamente, o ponto $A = (2, 6)$ na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização. Esse ponto representa a intersecção entre as retas de equação $x - 2y = -10$ e $5x + 4y = 34$, isto é, o ponto comum entre essas duas retas. Algebricamente, esse ponto representa a solução do sistema formado por essas retas. Desta forma, o aluno consegue enxergar a solução de um sistema linear, geometricamente, ou seja, ele consegue fazer uma relação entre Álgebra e Geometria de uma forma bem mais dinâmica.

Após ter feito esse exercício, podemos propor que o aluno resolva essa questão que foi cobrada na prova do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) em 2011, também utilizando o Geogebra.

01. (Enem 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros. A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

Figura 33 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2011



Fonte: encurtador.com.br/nDJ28

A) $(-5, 0)$

B) $(-3, 1)$

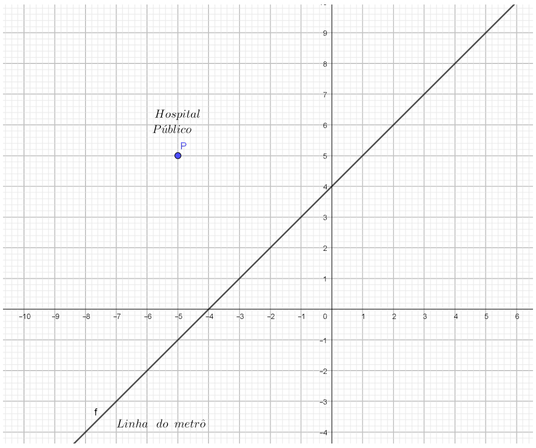
C) $(-2, 1)$

D) $(0, 4)$

E) $(2, 6)$

Solução: Vamos representa, no Geogebra, a situação apresentada na questão.

Figura 34 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2011



Fonte: Elaborado pelo autor

1º passo) Como a estação deve estar na linha do metrô, devemos analisar se os pontos $(-5,0)$, $(-3,1)$, $(-2,1)$, $(0,4)$ e $(2,6)$, que são dados nas alternativas, estão localizadas na reta $y = x+4$. O aluno já sabe como fazer essa verificação, basta substituir as coordenadas dos pontos nas variáveis x e y e verificar se a igualdade é satisfeita.

Substituindo $(-5,0)$ na equação $y = x+4$, teremos:

$$0 = -5+4 \Longrightarrow 0 = -1. \qquad (falso)$$

Substituindo $(-3,1)$ na equação $y = x+4$, teremos:

$$1 = -3+4 \Longrightarrow 1 = 1. \qquad (verdadeiro)$$

Substituindo $(-2,1)$ na equação $y = x+4$, teremos:

$$1 = -2+4 \Longrightarrow 1 = 2. \qquad (falso)$$

Substituindo $(0,4)$ na equação $y = x+4$, teremos:

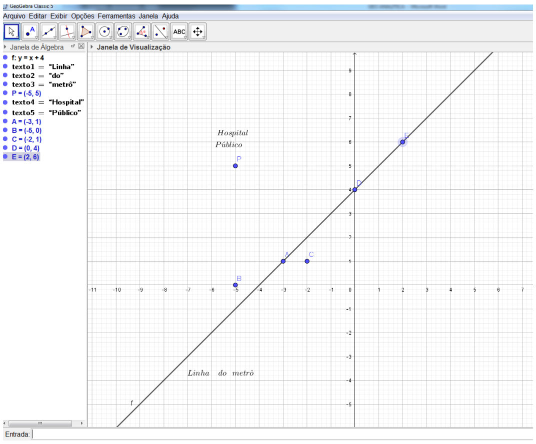
$$4 = -0+4 \Longrightarrow 4 = 4. \qquad (verdadeiro)$$

Substituindo $(2,6)$ na equação $y = x+4$, teremos:

$$6 = 2+4 \Longrightarrow 6 = 6. \qquad (verdadeiro)$$

Ou seja, das cinco possibilidades de resultados, duas já podem ser descartadas pois não pertencem a reta que representa a linha do metrô. Vamos ver como isso seria visto no Geogebra.

Figura 35 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2011



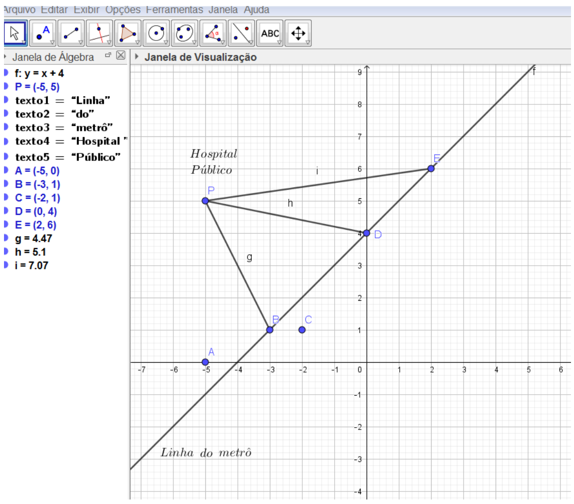
Fonte: Elaborado pelo autor

Não podemos esquecer que, pela condição imposta pelos moradores, a distância da estação do metrô até o hospital público não deve ser maior do que 5 km. Como faremos a verificação desse condição usando o Geogebra?

Para verificar essa distância, clicamos no ícone  (Segmento definido por dois pontos), localizado na caixa de ferramentas e, posteriormente, clicamos em cima dos dois pontos nos quais pretendemos calcular a distância.

A figura abaixo mostra que a distância entre o ponto $B = (-3, 1)$ e o ponto $P = (-5, 5)$ é de $4, 47$ km e está representado, na Janela de Álgebra, pelo segmento g. A distância entre o ponto $D = (0, 4)$ e o ponto $P = (-5, 5)$ é de $5, 1$ km, e está representado pelo segmento h. A distância entre o ponto $E = (2, 6)$ e o ponto $P = (-5, 5)$ é de $7, 07$ km, e está representada pelo segmento i. Portanto, a alternativa correta é a letra B.

Figura 36 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2011



Fonte: Elaborado pelo autor

Deste forma, o aluno consegue associar esse conteúdo com uma situação real do dia-a-dia e a importância que é aprender a trabalhar com o sistema cartesiano, de como esse assunto pode ser explorado com a finalidade de localização no plano. E, com o auxílio do Geogebra, esse aprendizado torna-se bem mais eficiente, pois assim a manipulação é bem mais dinâmica do que apenas o uso da folha de papel. Aqui ele consegue dinamizar o estudo da Álgebra e da Geometria, simultaneamente.

3.4 Sistema de equações do 1º grau com três equações e três variáveis e a Geometria dinâmica.

Nesta secção, iremos abordar, com o auxílio do software Geogebra, uma outra habilidade exigida na nova BNCC do Ensino Médio, que é: "(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais".

Agora, iremos resolver sistemas lineares com três equações e três variáveis, como no exemplo abaixo:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 13 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Iremos resolver esse sistema por **Escalonamento**.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está escalonado se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação. Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

a) Fixamos como 1ª equação uma das que possuem o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

b) Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.

c) Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Logo, para resolvermos o nosso sistema em questão, iremos proceder da seguinte forma:

1º) Multiplicamos a 1ª equação por -2 e somamos com a 2ª equação, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 13 \\ \quad -7y - z = -17 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Que é equivalente ao sistema dado.

2º) Multiplicamos a 1ª equação por -3 e somamos com a 3ª equação, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 13 \\ \quad -7y - z = -17 \\ \quad -7y - 7z = -35 \end{cases}$$

3º) Multiplicamos a 2ª equação por -1 e somamos com a 3ª equação, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 13 \\ \quad -7y - z = -17 \\ \qquad\quad -6z = -18 \end{cases}$$

Da última equação, temos:

$$-6z = -18 \Longrightarrow z = 3.$$

Substituindo o valor de z na 2ª equação, teremos:

$$-7y - z = -17 \Longrightarrow -7y - 3 = -17 \Longrightarrow -7y = -14 \Longrightarrow y = 2.$$

Substituindo os valores de y e z na 1ª equação, teremos:

$$x + 3y + 2z = 13 \Longrightarrow x + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 13 \Longrightarrow x + 6 + 6 = 13 \Longrightarrow x = 1.$$

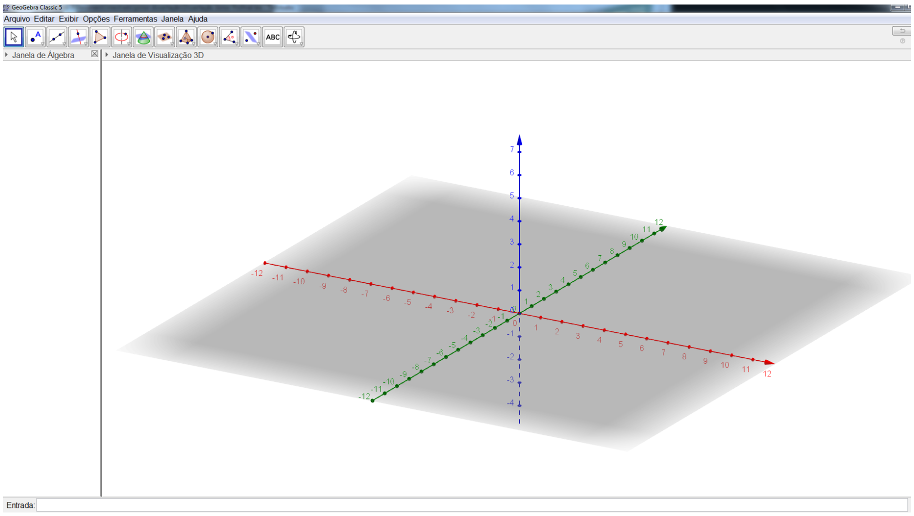
Portanto, a terna $(1, 2, 3)$ é a solução do sistema linear.

É importante ressaltar que alguns alunos tiveram dificuldades em resolver esses sistemas 3×3 pelo método do escalonamento. Mas foi mostrado também como poderia ser resolvido pela regra de Cramer.

Agora, iremos resolver o mesmo sistema utilizando o software Geogebra. Para isso, procederemos da seguinte forma:

1º) Na página inicial do Geogebra, iremos abrir a "Janela de Visualização 3D", pois como se trata de equações com três variáveis, temos que trabalhar no espaço, pois cada equação dessas são representações algébricas de planos. A janela 3D está localizada na opção "Exibir", na parte superior da tela, como mostra a figura abaixo.

Figura 37 – Janela de Visualização 3D / Geogebra

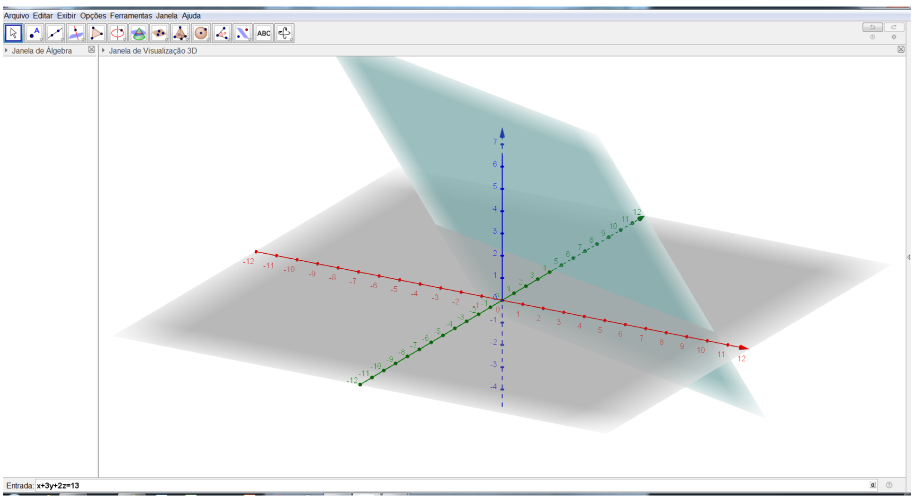


Fonte: Elaborado pelo autor

2º) Em seguida, digitamos, na caixa de entrada, as equações do sistema, uma de cada vez. Cada equação dará origem a um plano, como mostrado nas figuras abaixo.

O plano representado pela equação $x + 3y + 2z = 13$.

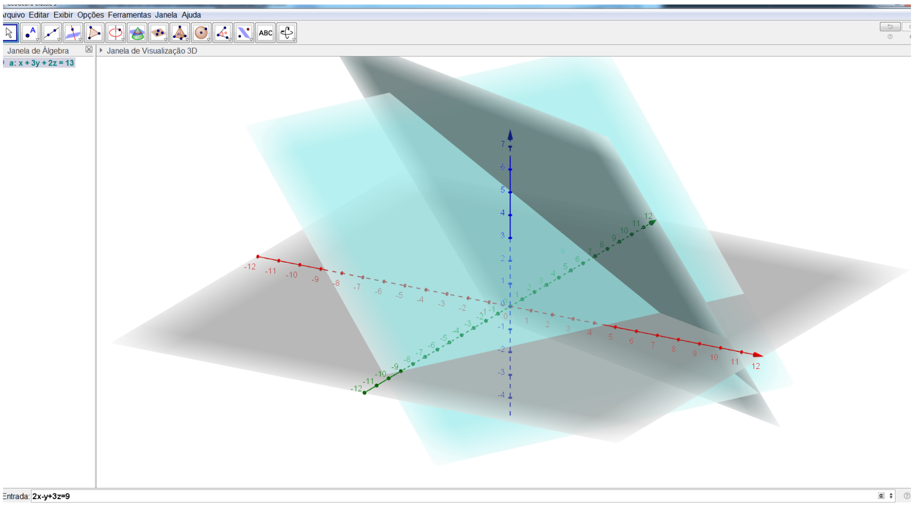
Figura 38 – Construção de um plano / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

O plano representado pela equação $2x - y + 3z = 9$.

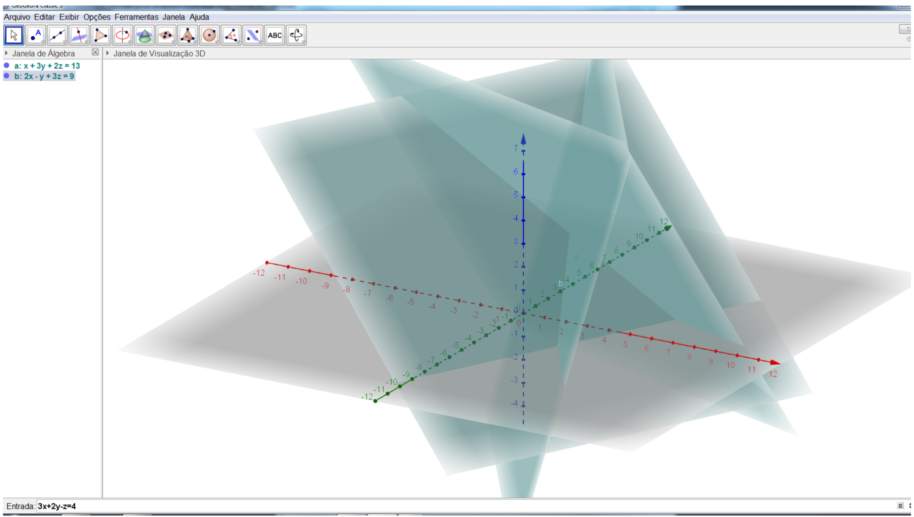
Figura 39 – Construção de um plano / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

O plano representado pela equação $3x + 2y - z = 4$.

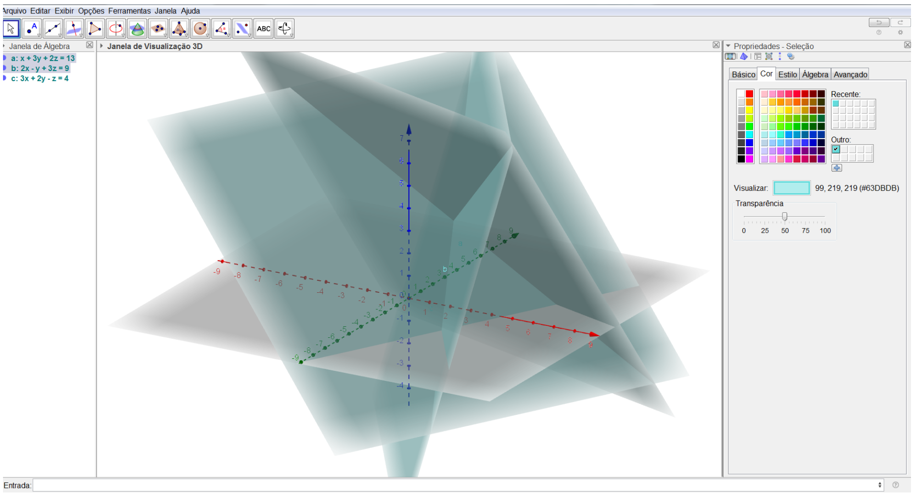
Figura 40 – Construção de um plano / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Como os três planos surgem na mesma cor, a visualização fica um pouco confusa, mas podemos ajustar essas aparências clicando com o botão esquerdo do mouse em cima do plano e selecionando a opção “Propriedades” e escolhendo a cor que quisermos, como mostrado na figura abaixo.

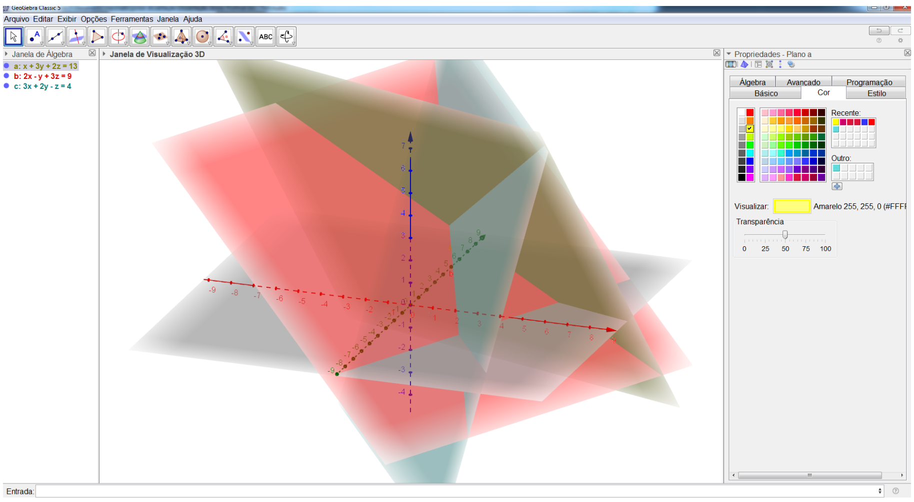
Figura 41 – Construção de um plano / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Selecionado as cores, percebemos que até as equações, na Janela de Álgebra, ficam nas mesmas cores de seus respectivos planos, melhorando e facilitando a visualização dos mesmos.

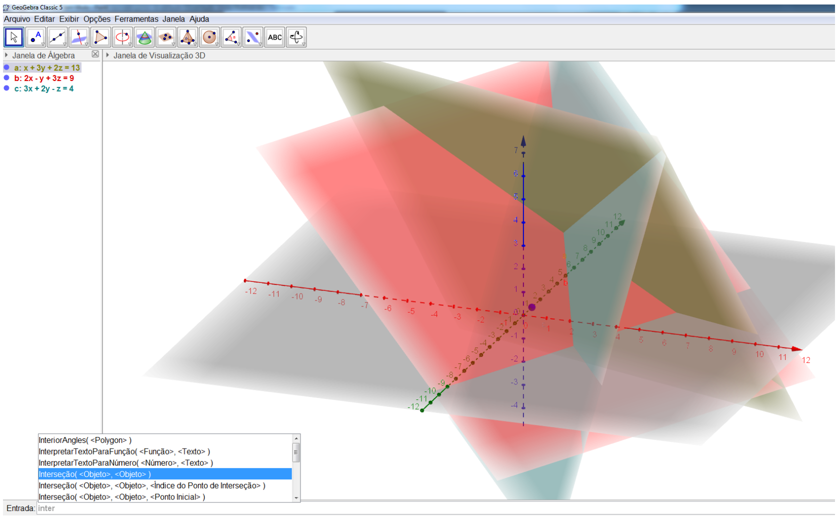
Figura 42 – Intersecção de planos / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

3º) Agora, iremos encontrar as intersecções entre os planos. Para fazer isso, digitamos “Intersecção (< Objeto>,<Objeto>)” na caixa de entrada.

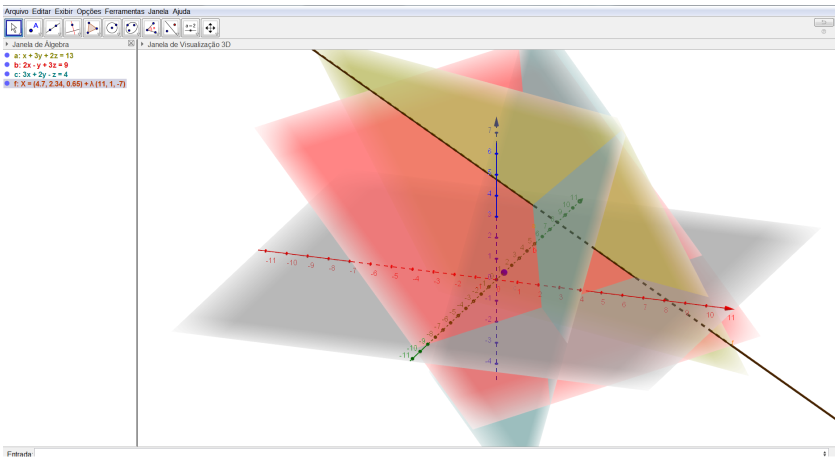
Figura 43 – Intersecção de planos / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Para selecionarmos os planos que serão feitas as intersecções, substituímos "< Objeto >" pelas letras que representam os planos selecionados. Essas letras estão na Janela de Álgebra, antes das equações que representam esses planos. Selecionamos primeiro as letras **a** e **b** que representam, respectivamente, os planos de equação $x + 3y + 2z = 13$ e $2x - y + 3z = 9$, como mostra a figura abaixo.

Figura 44 – Intersecção de dois planos / Geogebra



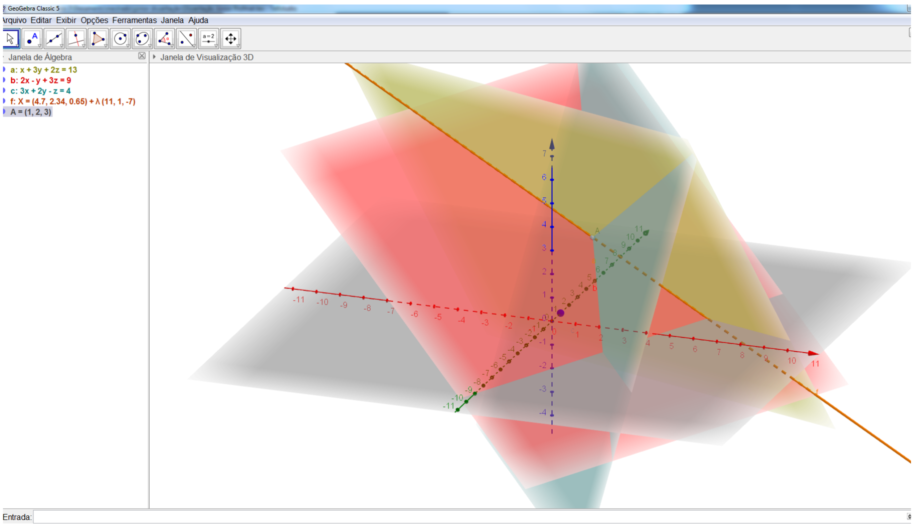
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao fazer a interseção entre dois planos, surge uma reta **f** na Janela de Álgebra. Realmente, pela Geometria Plana, sabemos que a intersecção entre dois planos secantes é uma reta.

4º) Agora faremos a intersecção dessa reta **f** com o plano representado pela letra **c**, pois lembre que a primeira intersecção foi feita somente entre **a** e **b**. Para fazer essa segunda intersecção, procederemos de forma análoga à primeira. Substituiremos "(< Objeto>,<Objeto>)"

pelas letras que representam o plano e a reta selecionados.

Figura 45 – Intersecção de três planos / Geogebra

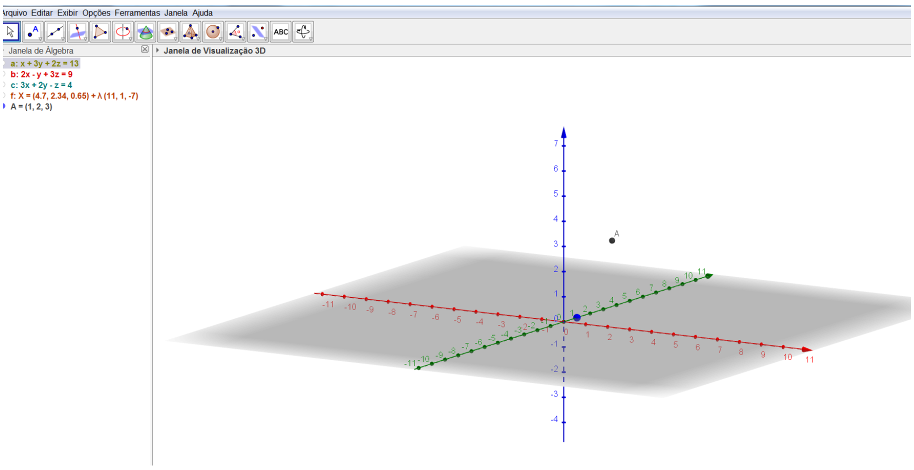


Fonte: Elaborado pelo autor

Perceba que ao fazer isso, surge na Janela de Visualização o ponto $A = (1, 2, 3)$. Esse ponto representa a interseção dos três planos e a solução do nosso sistema. Perceba que foi o mesmo resultado encontrado pelo processo do escalonamento ou pela regra de Cramer, feito anteriormente.

Para visualizar melhor esse ponto, podemos ocultar a imagem dos planos e da reta na Janela de Visualização 3D, clicando em cima de cada "círculo azul" que fica antes das letras que representam esses planos e essa reta, na Janela de Álgebra, como mostra a figura abaixo.

Figura 46 – Solução de um sistema de ordem 3 / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Após essa resolução, utilizando o Geogebra para resolver um sistema 3×3, os alunos se empenharam mais em aprender a resolver esse tipo de exercício, pois foram contagiados pela representação dos planos no espaço 3D do Geogebra, pois muitos falaram a seguinte frase: *"Olha, bacana como fica"*.

Após essas resoluções, propomos que os alunos resolvessem, utilizando o Geogebra, os seguintes exercícios:

1º Exercício) Uma loja de discos classificou seus CDs em três tipos: A, B e C, unificando o preço para cada tipo. Quatro consumidores fizeram compras nessa loja nas seguintes condições: O primeiro comprou 2 CDs do tipo A, 3 do tipo B e 1 do tipo C, gastando R$ 121,00. O segundo comprou 4 CDs do tipo A, 2 do tipo B e 2 CDs do tipo C, gastando R$ 162,00. O terceiro comprou 3 CDs do tipo A, 1 CD do tipo B e 1 do tipo C, gastando R$ 99,00. O quarto comprou 1 CD de cada tipo. Calcule quanto o quarto consumidor pagou à loja.

Solução:

Valor, em reais, de cada CD do tipo A = x.

Valor, em reais, de cada CD do tipo B = y.

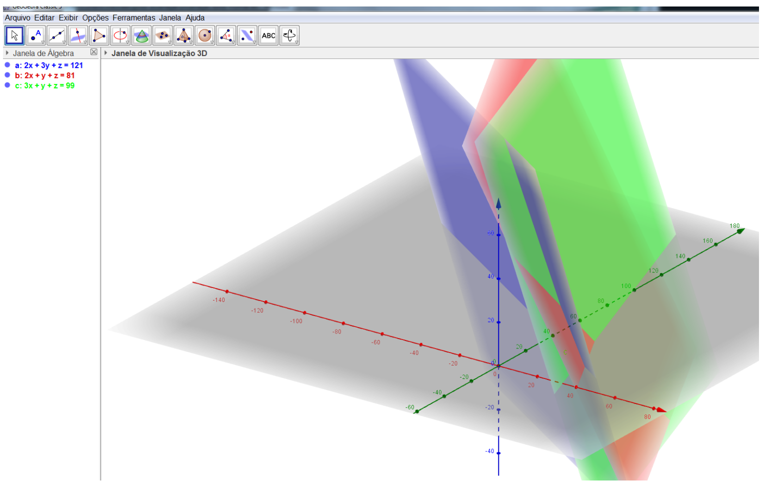
Valor, em reais, de cada CD do tipo C = z.

Pelos dados da questão, teremos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1z = 121 \\ 4x + 2y + 2z = 162 \\ 3x + 1y + 1z = 99 \end{cases}$$

Escrevendo as três equações na caixa de entrada do Geogebra, teremos os seguintes planos na Janela de Visualização 3D.

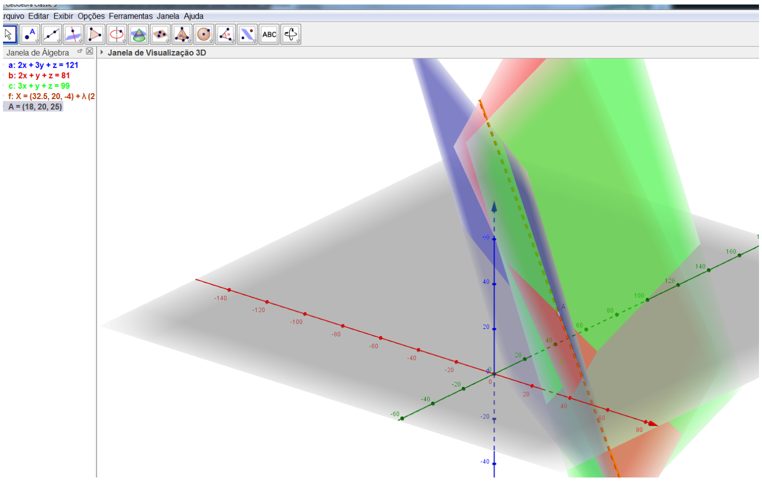
Figura 47 – Solução de um sistema de ordem 3 / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Fazendo as intersecções entre esses três planos, teremos o ponto $A = (18, 20, 25)$ como solução do sistema, isto é, podemos concluir que o preço unitário do CD do tipo A é R$ 18,00, do tipo B é R$ 20,00 e do tipo C é R$ 25,00. Logo, o quarto consumidor, como comprou uma unidade de cada tipo, teve uma despesa de R$ 63,00.

Figura 48 – Solução de um sistema de ordem 3 / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Deste maneira, os alunos conseguiram resolver uma questão algébrica utilizando o software Geogebra e relacionando a Álgebra com a Geometria, que é o principal objetivo desse trabalho. Após feito essa atividade, muitos deles falaram que estavam achando muito interessante essa metodologia pois era uma novidade para eles.

2º Exercício) Num grande acampamento militar há 150 blindados dos tipos BM3, BM4 e BM5, isto é, equipados com 3, 4 e 5 canhões do tipo MX9 respectivamente. O total de canhões disponíveis é igual a 530. A soma dos BM4 com os BM5 corresponde aos $\frac{2}{3}$ dos BM3. Se para o início de uma manobra militar, cada canhão carrega 12 projéteis, quantos projéteis serão necessários para o grupo dos BM4 no início da operação?

Solução:

Quantidade de blindados do tipo BM3 = x.

Quantidade de blindados do tipo BM4 = y.

Quantidade de blindados do tipo BM5 = z.

Como o total de blindados é 150, então temos:

$$x + y + z = 150.$$

Como cada blindado BM3 possui 3 canhões, cada BM4 possui 4 canhões e cada BM5, 5 canhões, e o total de canhões é 530, então podemos formar a seguinte equação:

$$3x + 4y + 5z = 530.$$

Sabendo que a soma dos BM4 com os BM5 corresponde aos $\frac{2}{3}$ dos BM3, podemos formar a terceira equação:

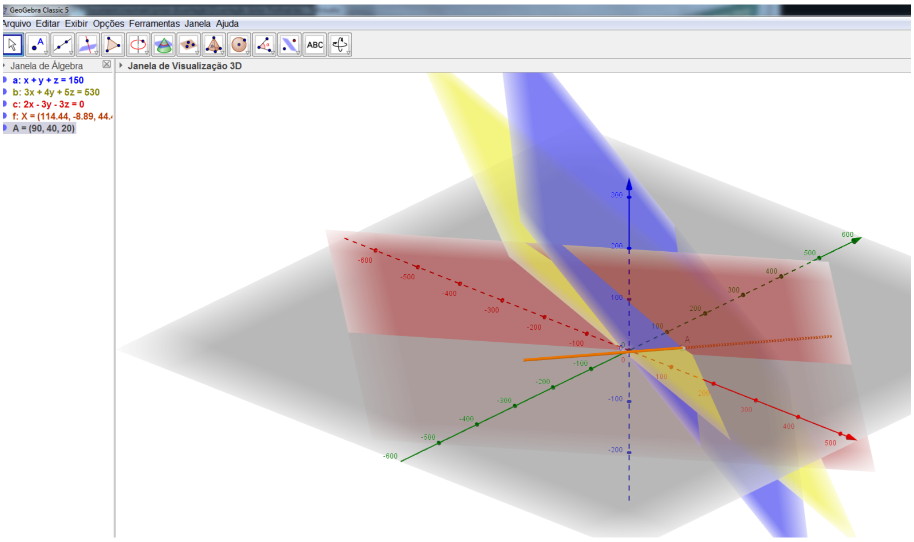
$$y + z = \frac{2}{3}x \Longrightarrow 2x - 3y - 3z = 0.$$

Desta forma, podemos formar o seguinte sistema linear com três equações e três variáveis:

$$\begin{cases} x + y + z = 150 \\ 3x + 4y + 5z = 530 \\ 2x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Usando o Geogebra para resolver o sistema, temos:

Figura 49 – Solução de um sistema de ordem 3 / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma, podemos concluir que existem 90 blindados do tipo BM3, 40 do tipo BM4 e 20 do tipo BM5.

Como cada blindado BM4 possui 4 canhões, cada canhão carrega 12 projéteis e que existem 40 blindados desse modelo, então para o grupo dos BM4 serão necessários $40 \cdot 4 \cdot 12 = 1920$ projéteis.

3.5 Polinômios e a Geometria dinâmica.

Nesta secção, iremos abordar, com o auxílio do software Geogebra, uma outra habilidade exigida na nova BNCC do Ensino Médio, que é: "(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais". Ou seja, Nesta secção, mostraremos como encontrar as raízes de uma função polinomial com o auxílio de Geogebra.

Para iniciarmos, faremos uma breve abordagem sobre o assunto.

Expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x é toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes;
- n é um número inteiro positivo ou nulo;
- o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.

Exemplo: $x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ é uma expressão polinomial do 3º grau (grau 3).

As funções complexas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais são denominadas funções polinomiais. Assim:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ é uma função polinomial de grau 3.

O valor numérico do polinômio $P(x)$ para $x = \alpha$ é o número que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $P(\alpha)$.

Exemplo: O valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ para $x = 2$ é:

$P(2) = 2^3 - 2. \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 7 \Longrightarrow P(2) = 8 - 8 + 6 - 7 \Longrightarrow P(2) = -1.$

Se ocorre que $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é a raiz desse polinômio.

Exemplo: Dado $P(x) = x^2 - 7x + 10$, temos: $P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 \Longrightarrow P(5) = 25 - 35 + 10 \Longrightarrow P(5) = 0$, logo 5 é raiz de $P(x)$.

Denomina-se equação polinomial ou algébrica toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$.

Denomina-se conjunto solução de uma equação algébrica o conjunto das raízes da equação.

Exemplo: Na equação $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ o conjunto solução é $S = \{-2, -1, 2\}$.

Teorema fundamental da Álgebra.

Essa teorema diz que: "Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau $n(n \geq 1)$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não)".

Usando o teorema fundamental da Álgebra, podemos demonstrar que todo polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de n fatores de 1º grau.

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Logo:

$$P(x) = 0 \Longrightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3 \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = 0,$$

ou seja, toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas (reais ou não).

Exemplo: As raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ são $\{-1, 1, 2\}$.

Exemplo: As raízes da equação $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ são $\{-2, -1, 1, 3\}$.

Exemplo: As raízes da equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$ são $\{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

Uma propriedade muito aplicada e importante que auxilia na pesquisa da raízes racionais de uma equação algébrica da coeficientes inteiros é a seguinte: "Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exemplo: Vamos pesquisar as raízes racionais da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

Na equação dada, temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$.

p é divisor de $2 \Longrightarrow$ p $\in \{-1, 1, -2, 2\}$.

q é divisor de $3 \Longrightarrow$ q $\in \{-1, 1, -3, 3\}$.

Pela propriedade, as prováveis raízes racionais são:

$\frac{p}{q} \in \left\{ -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$

Fazendo as verificações, teremos o seguinte conjunto solução:

$S = \left\{ -2, \frac{1}{3}, 1 \right\}$.

Exemplo: Vamos resolver a equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Na equação dada, temos $a_0 = 6$ e $a_n = 1$.

p é divisor de $6 \Longrightarrow$ p $\in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$.

q é divisor de $1 \Longrightarrow$ q $\in \{-1, 1\}$.

Pela propriedade, as prováveis raízes racionais são:

$\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$.

Fazendo as verificações, teremos o seguinte conjunto solução:

$S = \{-1, -3, 1, 2\}$.

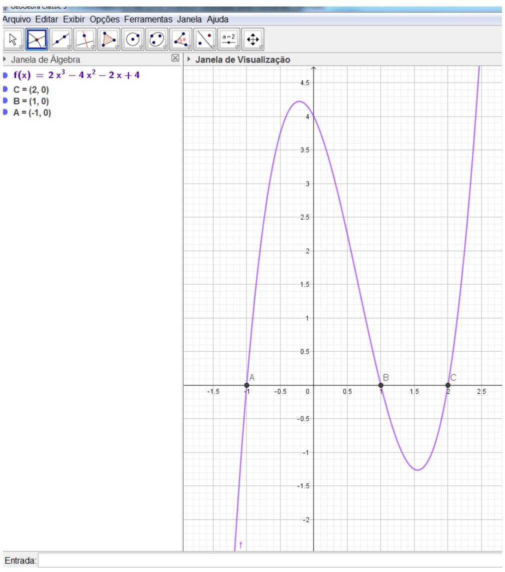
Agora vamos mostrar como encontrar essas raízes utilizando o Geogebra.

Exemplo: Já vimos que as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ são $\{-1, 1, 2\}$. Mas como verificar essa solução utilizando o Geogebra? Para isso procederemos da seguinte forma:

1º) Digitamos o polinômio $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ na caixa de entrada do Geogebra e depois pressionamos a tecla *Enter* no teclado.

2º) Clicamos em  (Intersecção de dois objetos) e, posteriormente, clicamos em cima da curva e em cima do eixo **x**.

Figura 50 – Raiz de polinômio / Geogebra

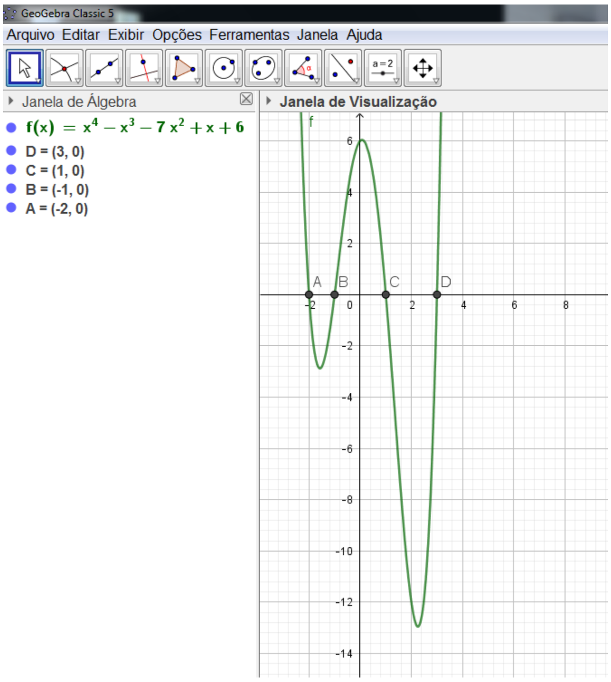


Fonte: Elaborado pelo autor

Ao fazer esse procedimento, percebemos que a intersecção entre o gráfico da função polinomial e o eixo das abscissas são os pontos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (2, 0)$, isto é, podemos mostrar ao aluno que as raízes de uma função polinomial são os pontos aonde o gráfico intersecta o eixo **x**, ou seja, os pontos cujo valor da ordenada é zero, e que esses pontos correspondem ao conjunto solução $\{-1, 1, 2\}$ mostrado anteriormente.

Exemplo: Já vimos que as raízes da equação $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ são $\{-2, -1, 1, 3\}$. De forma análoga, utilizando o Geogebra, teremos:

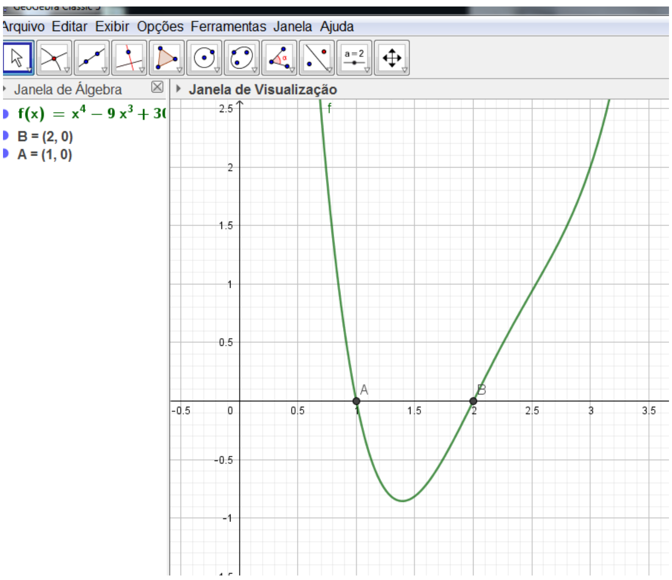
Figura 51 – Raiz de polinômio / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo: Já vimos que as raízes da equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$ são $\{3+i, 3-i, 2, 1\}$. De forma análoga, utilizando o Geogebra, teremos:

Figura 52 – Raiz de polinômio / Geogebra



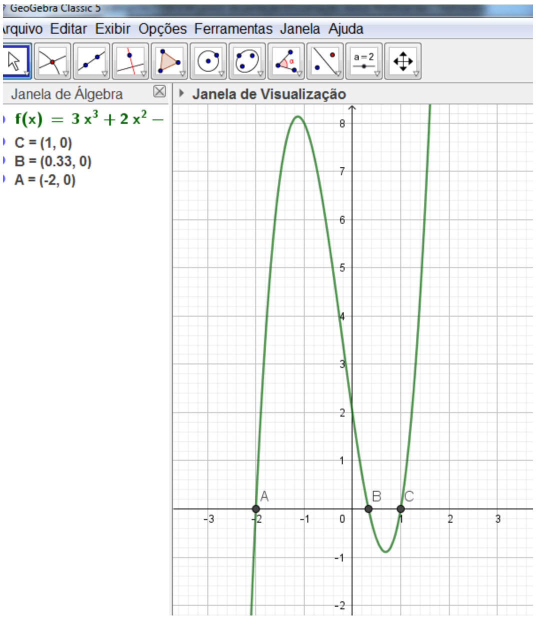
Fonte: Elaborado pelo autor

Perceba que neste caso aparecem apenas dois pontos de intersecção entre o gráfico da função polinomial com o eixo **x**, que correspondem as raízes reais. Isto ocorre porque essa função possui duas raízes reais e duas complexas, como já foi visto anteriormente, e sabemos que os eixos cartesianos são eixos reais.

Exemplo: Já vimos que as raízes da equação $3x^3+2x^2-7x+2=0$ são $S=\left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

De forma análoga, utilizando o Geogebra, teremos:

Figura 53 – Raiz de polinômio / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Após a resolução dessas questões, foi proposto aos alunos que resolvessem os dois exercícios abaixo com o auxílio do Geogebra.

1º Exercício) (UFPR - adaptado) O lucro diário L é a receita gerada R menos o custo de produção C. Supondo que, em certa fábrica, a receita gerada e o custo de produção sejam dados, em reais, pelas funções $R(x) = 60x - x^2$ e $C(x) = 10(x + 40)$, sendo x o número de itens produzidos por dia. Com base nessa informações, responda as seguintes perguntas:

a) Para que valores de x a empresa não terá lucro e nem prejuízo?

b) Qual é o valor de x que fornece o lucro máximo dessa fábrica?

Solução:

Lucro = Receita – Custo

Logo:

$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = 60x - x^2 - [10(x + 40)]$

$L(x) = 60x - x^2 - [10x + 400)]$

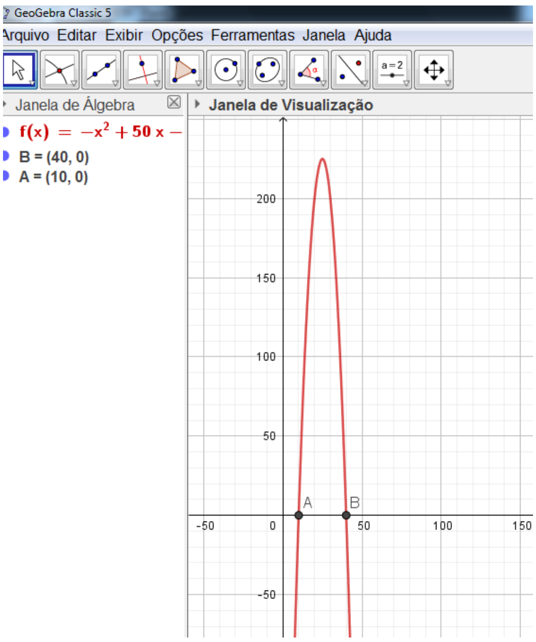
$L(x) = 60x - x^2 - 10x - 400$

$L(x) = -x^2 + 50x - 400$.

Essa função polinomial do 2º grau fornece o lucro $L(x)$ da fábrica em função do número de itens x, produzidos por dia .

Vamos construir o gráfico dessa função utilizando o Geogebra.

Figura 54 – Parábola / Geogebra

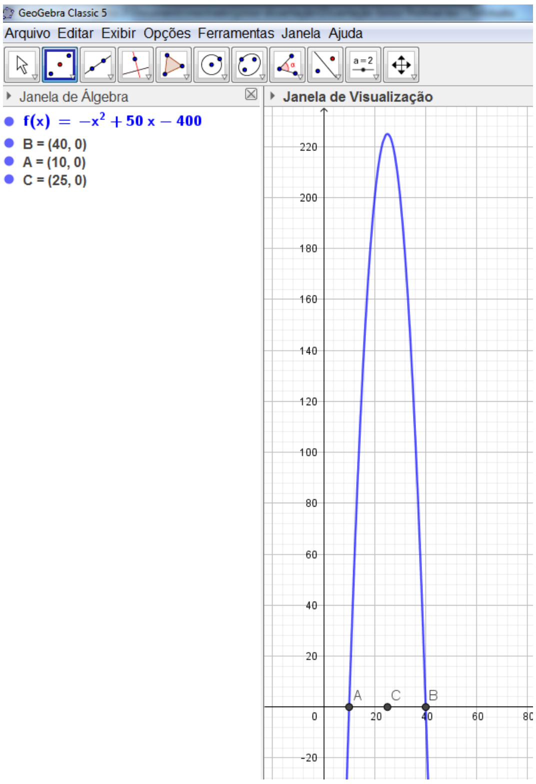


Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando o gráfico acima, percebemos que a sua intersecção com o eixo das abscissa são os pontos $A = (10, 0)$ e $B = (40, 0)$, e, como já foi visto, são as raízes da função polinomial. Esses valores, 10 e 40, representam, na prática, a quantidade de itens produzidos por dia em que a fábrica não tem lucro e nem prejuízo. Portanto, respondendo a letra **a**.

Para respondermos a letra **b**, basta encontramos o ponto médio do segmento AB. Faremos isso da seguinte forma: clicamos em  (Ponto médio de um segmento) e, posteriormente, em cima dos pontos A e B, surgindo, assim, o ponto $C = (25, 0)$.

Figura 55 – Ponto médio de um segmento / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse valor, 25, representa o que denominamos em uma função quadrática de **x do vértice** e representa, na função, o valor de x que atribui o maior valor de $L(x)$. Portanto, respondendo a letra **b**.

2º Exercício) Um micro - ônibus, de uma empresa de excursão, com capacidade para 19 pessoas cobra R$ 10,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 2,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 5 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R$ 20,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?

a) 2

b) 4

c) 6

d) 7

e) 10

Solução:

- Quantidade de lugares desocupados = x.
- Quantidade de lugares ocupados = $19 - x$.
- Valor pago por passageiro = $10 + 2x$.

Faturamento = Quantidade de lugares ocupados $\times$ Valor pago por passageiro

$f(x)$ = faturamento em função do número de lugares desocupados. Logo:

$$f(x) = (19 - x) \cdot (10 + 2x)$$

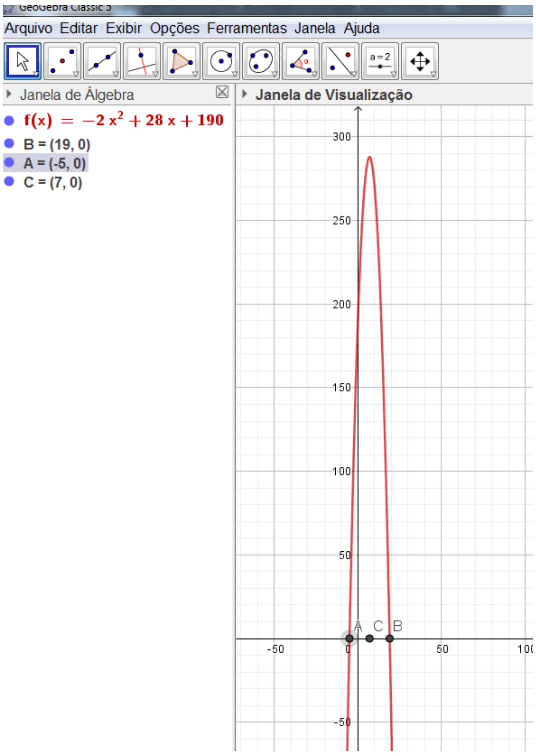
$$f(x) = 190 + 38x - 10x - 2x^2$$

$$f(x) = -2x^2 + 28x + 190 \ .$$

Essa função polinomial do 2º grau fornece o faturamento $f(x)$ da empresa em função do número de lugares desocupados x.

Veremos como ficaria a construção do gráfico dessa função polinomial no Geogebra.

Figura 56 – Ponto médio de um segmento / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Como a questão quer o valor de x para que o faturamento seja máximo, então, ela quer o **x do vértice**. Esse valor será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ que está representado pelo ponto $C = (7, 0)$, ou seja, o **x do vértice** é 7, respondendo a questão com o auxílio do Geogebra.

3.6 Álgebra e Geometria Plana - Generalizando padrões: Polígonos e a Geometria dinâmica.

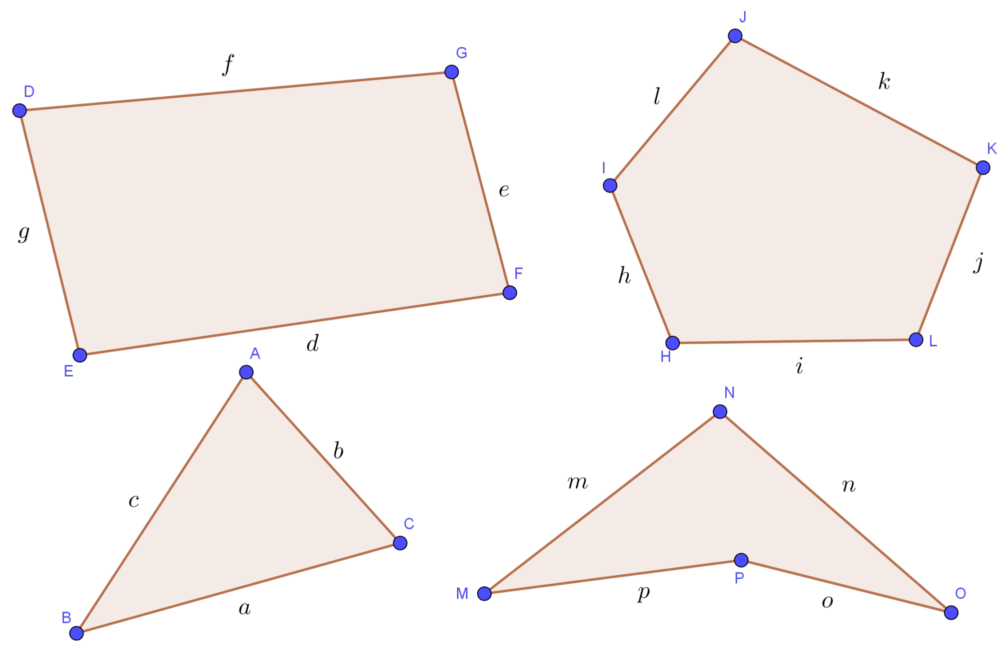
Nesta secção faremos a generalização de padrões que nos forneça a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados, a medida de um ângulo interno de um polígono regular de **n** lados e a altura de um triângulo equilátero de lado **L**.

Polígono - Definição.

Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,. . ., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ (DOLCE; POMPEO, 2001, p.132) [7].

Em outras palavras, para que uma figura seja considerada um polígono, ela não pode conter qualquer lado que faça curva, dois de seus lados não podem cruzar-se e a figura não pode ter aberturas. Veja alguns exemplos.

Figura 57 – Polígonos / Geogebra

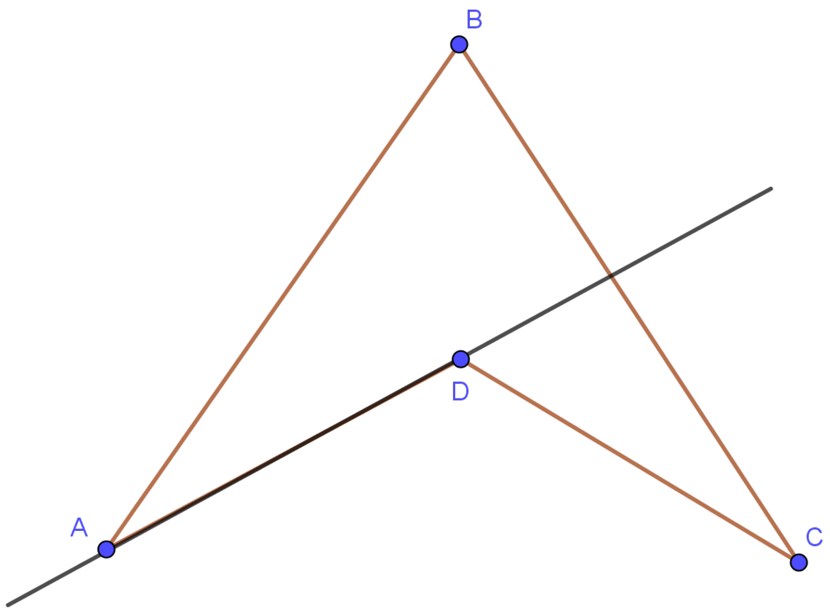


Fonte: Elaborado pelo autor

Polígono convexo e polígono côncavo - Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

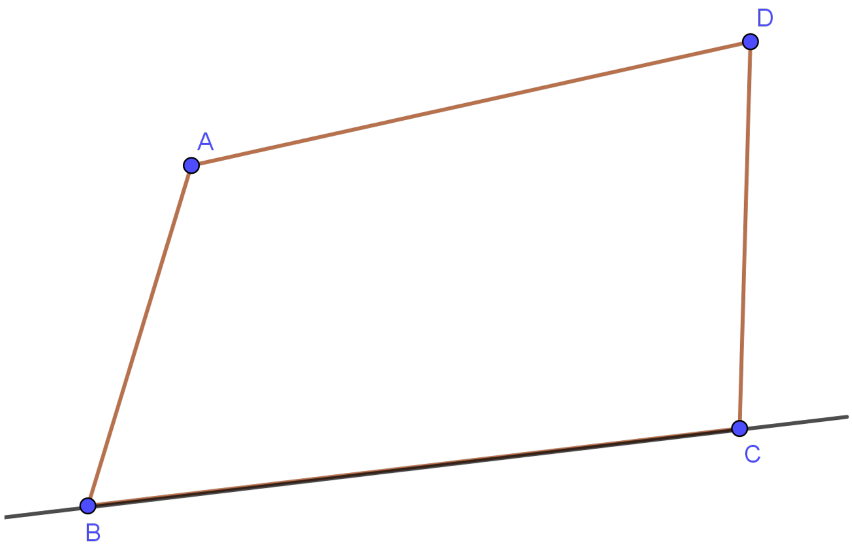
Se um polígono não é convexo, diremos que ele é um polígono côncavo (ou não convexo) (DOLCE; POMPEO, 2001, p.134) [7].

Figura 58 – Polígono Côncavo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 59 – Polígono Convexo / Geogebra

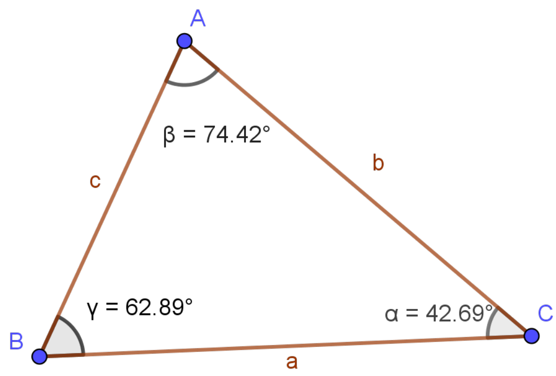


Fonte: Elaborado pelo autor

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo - Vamos demonstrar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados. ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$).

Utilizando o Geogebra, o aluno consegue perceber que a soma dos ângulos internos de um triângulo (polígono de 3 lados) é igual a 180º.

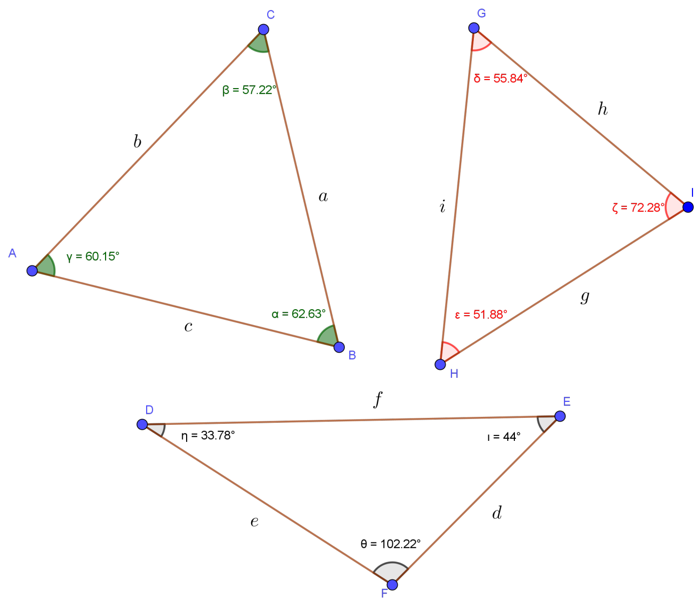
Figura 60 – Triângulo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Ou seja, $74,42^o + 62,89^o + 42,69^o = 180^o$. E o mais interessante no Geogebra, é que o aluno consegue trabalhar isso de uma forma bem dinâmica, clicando em qualquer vértice e arrastando-o, fazendo o triângulo modificar o comprimento de seus lados e a medida dos ângulos internos, mas sempre mantendo a soma igual a 180º, como mostra a figura abaixo.

Figura 61 – Triângulo / Geogebra

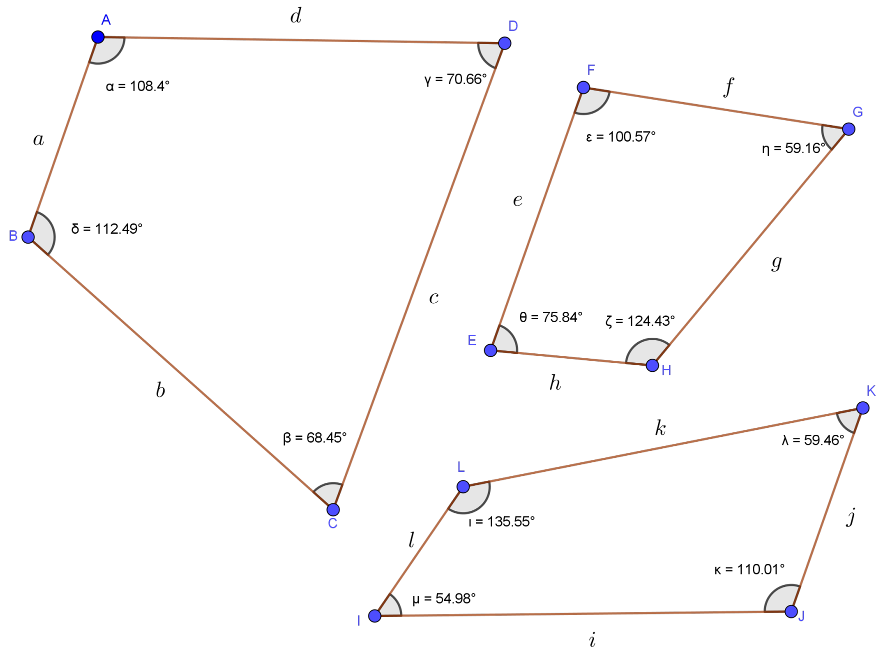


Fonte: Elaborado pelo autor

Em qualquer triângulo da figura acima, a soma dos três ângulos sempre resulta em 180º.

E se o polígono tiver 4 lados (Quadrilátero)?

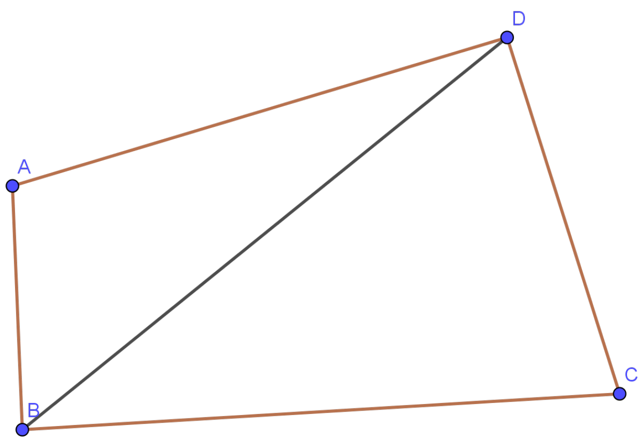
Figura 62 – Quadriláteros / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

O aluno concluirá que, em qualquer figura acima, a soma dos 4 ângulos internos sempre resultará em 360º, isto é, $2 \cdot 180^{o}$, ou seja, dois triângulos. Podemos representar da seguinte forma:

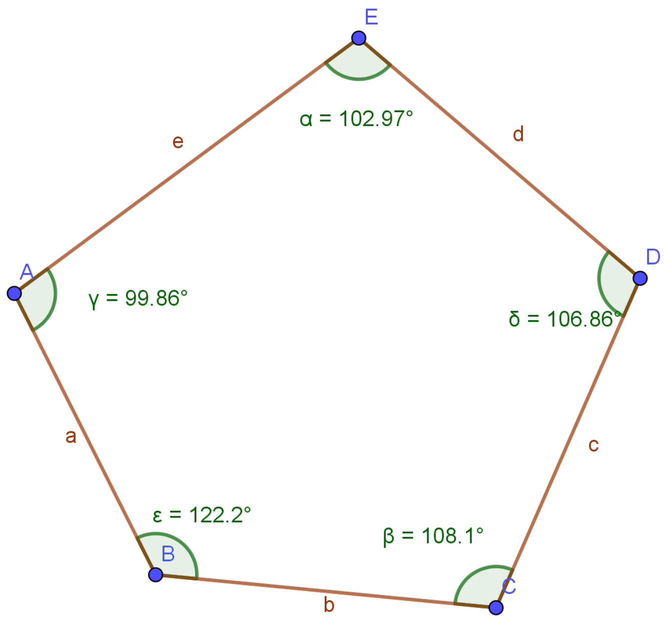
Figura 63 – Quadrilátero convexo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Com polígonos de 5 lados (pentágonos) teremos a seguinte situação:

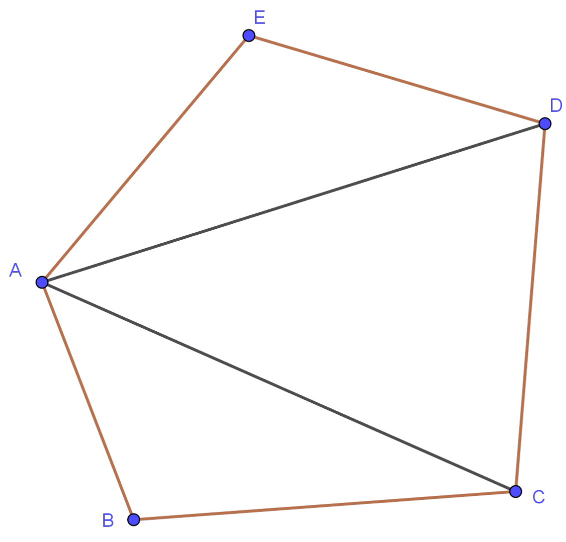
Figura 64 – Pentágono convexo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura acima, a soma dos cinco ângulos é igual a 540º, isto é, $3 \cdot 180^o$, ou seja, três triângulos. Podemos representar da seguinte forma:

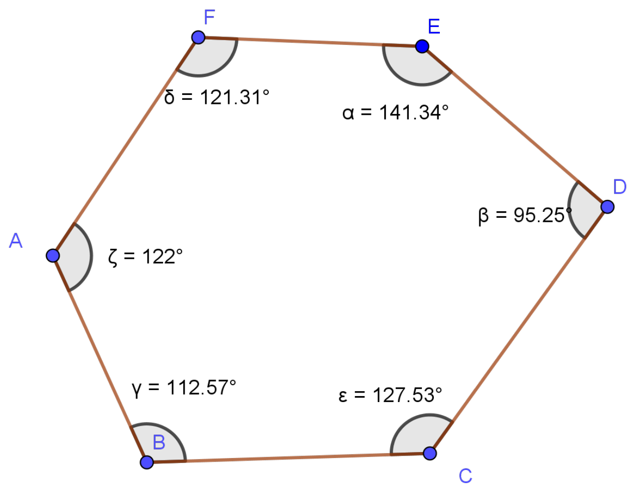
Figura 65 – Pentágono convexo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Com polígonos de 6 lados (hexágonos), teremos:

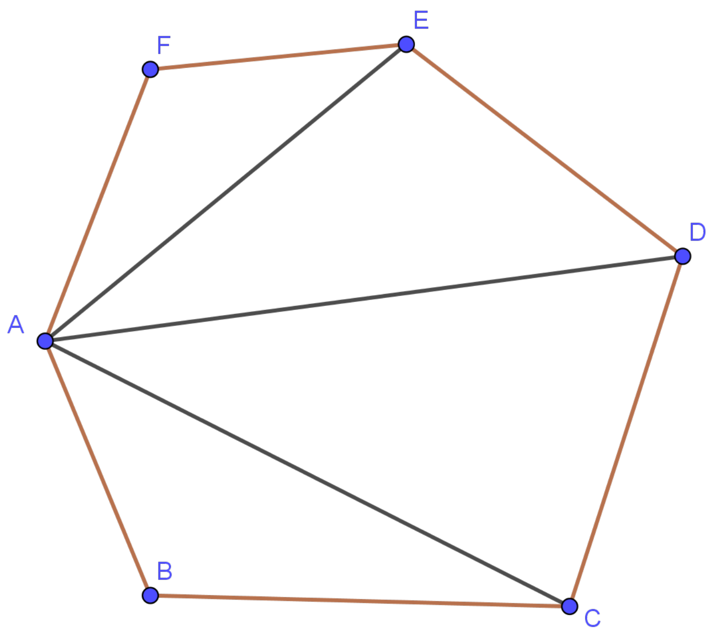
Figura 66 – Hexágono convexo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Nos hexágonos, a soma dos ângulos internos é igual a 720º, ou seja, $4 \cdot 180^{o}$, portanto, quatro triângulos. Podemos representar da seguinte forma:

Figura 67 – Hexágono convexo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebemos que qualquer polígono convexo de n lados ($n \in \mathbb{N}$ e $n > 3$) , pode ser decomposto em uma quantidade mínima de triângulos. E essa quantidade tem uma relação com o número de lados do polígono, é sempre duas unidades a menos do que o número de lados do polígono, formando, assim, um padrão por recorrência. E como já foi visto que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º, podemos formar um padrão para calcular a soma dos ângulos internos (S_i) de qualquer polígono convexo, partindo da soma dos ângulos de um triângulo. Observe o esquema abaixo:

- Para n = **4** $\Longrightarrow S_i = 360^{\circ} = 180^{\circ} \cdot 2 = 180^{\circ} \cdot (\mathbf{4} - 2)$.
- Para n = **5** $\Longrightarrow S_i = 540^{\circ} = 180^{\circ} \cdot 3 = 180^{\circ} \cdot (\mathbf{5} - 2)$.
- Para n = **6** $\Longrightarrow S_i = 720^{\circ} = 180^{\circ} \cdot 4 = 180^{\circ} \cdot (\mathbf{6} - 2)$.
  $\vdots$
- Para n = **n** $\Longrightarrow S_i = 180^{\circ} \cdot (\mathbf{n} - 2)$.

Desta forma, foi usado um raciocínio algébrico para generalizar um padrão para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo em função do seu número de lados n.

Exemplo: calcule a soma dos ângulos internos de um decágono convexo.

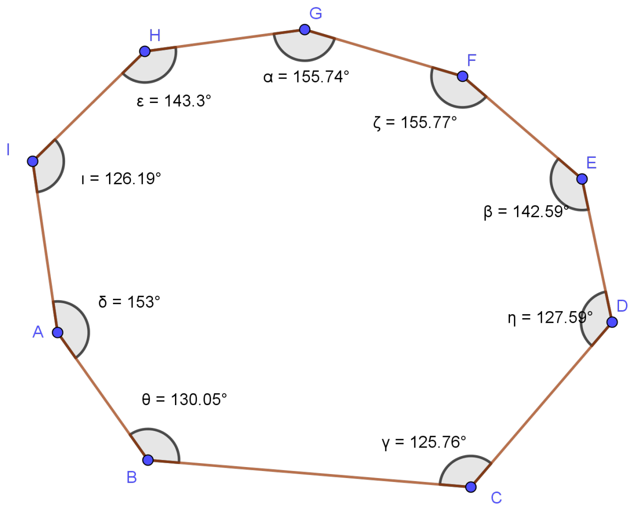
Observação: Decágono é um polígono de 10 lados.

Utilizando a fórmula demonstrada, teremos:

$S_i = 180^{\circ} \cdot (n - 2) = 180^{\circ} \cdot (10 - 2) = 180^{\circ} \cdot 8 = 1440^{\circ}$.

O aluno pode visualizar essa situação no Geogebra da seguinte forma:

Figura 68 – Decágono convexo / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

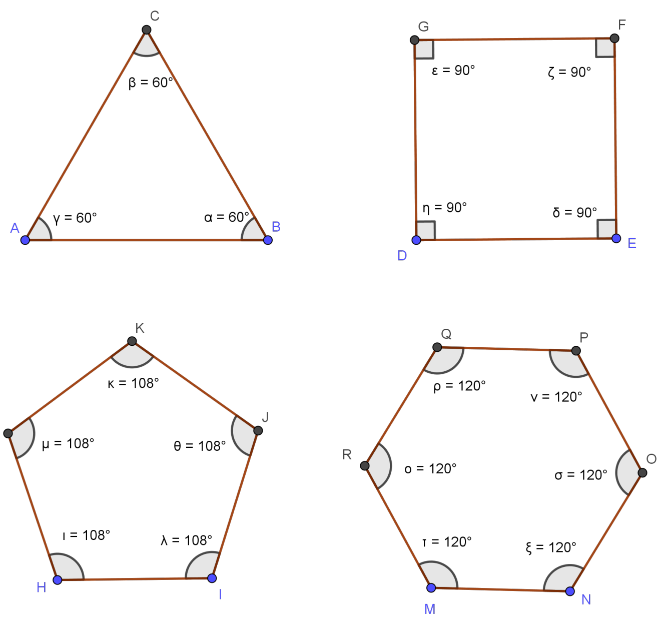
Polígono Regular - É todo polígono que possui os lados iguais e os ângulos congruentes (mesma medida).

Para calcularmos a medida de cada ângulo interno (a_i) de um polígono regular, basta pegarmos a fórmula deduzida anteriormente e dividi-la pelo número n de lados do polígono, pois como $S_i = 180^{\text{o}} \cdot (n-2)$ nos fornece a soma de todos os ângulos internos, e em num polígono regular os ângulos são todos iguais, então basta dividir S_i pelo número de ângulos, que é igual ao números de lados n, chegando na seguinte fórmula:

$$a_i = \frac{180^{\text{o}} \cdot (n-2)}{n}.$$

No Geogebra podemos verificar da seguinte forma:

Figura 69 – Polígonos Regulares / Geogebra

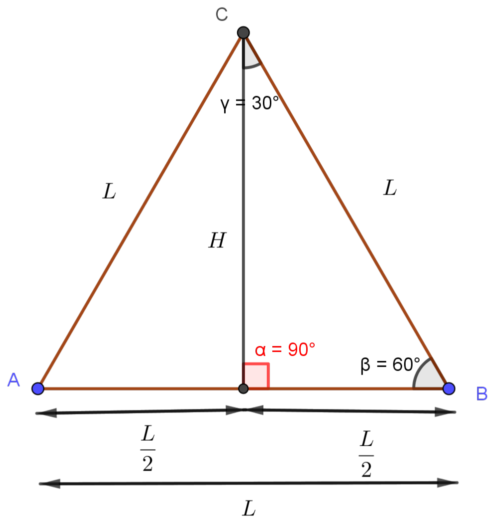


Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma, utilizando o Geogebra, o aluno consegue visualizar que ao construir um polígono regular e encontrar as medidas de cada ângulo interno, esses ângulos serão sempre congruentes.

Como já foi visto, o **triângulo equilátero** (equi = igual, látero = lado) é aquele que possui os três lados iguais e os três ângulos congruentes. Vamos demonstrar, usando o Geogebra, a fórmula que fornece a altura H de um triângulo equilátero em função do comprimento do seu lado L.

Figura 70 – Altura de um triângulo equilátero / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, teremos:

$$L^2 = H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$L^2 = H^2 + \frac{L^2}{4}$$

$$H^2 = L^2 - \frac{L^2}{4}$$

$$H^2 = \frac{3L^2}{4}$$

$$H = \sqrt{\frac{3L^2}{4}}$$

$$H = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, a altura H de um triângulo equilátero de lado L é dada por $H = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$.

Após essa análise, propomos que os alunos resolvessem a seguinte questão:

(Enem - 2014) Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é

a) 4

b) 8

c) 9

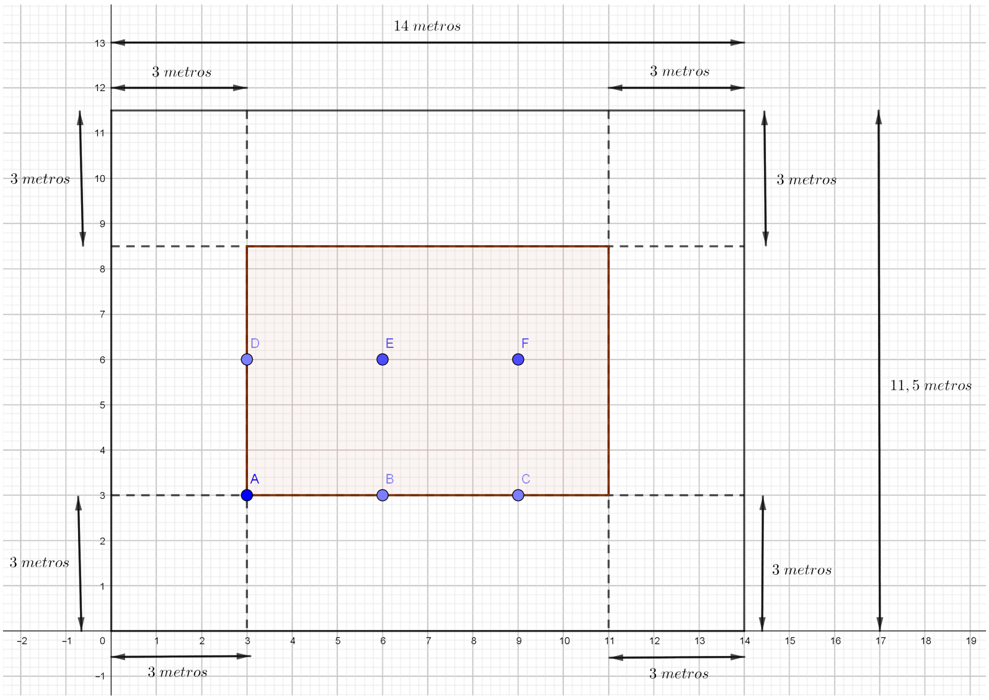
d) 12

e) 20

Solução:

A primeira ideia que os alunos tiveram para resolver essa questão, foi plantar as mudas formando vértices de um quadrado de 3 m de lado, como ilustra a construção abaixo, feita no Geogebra.

Figura 71 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2014



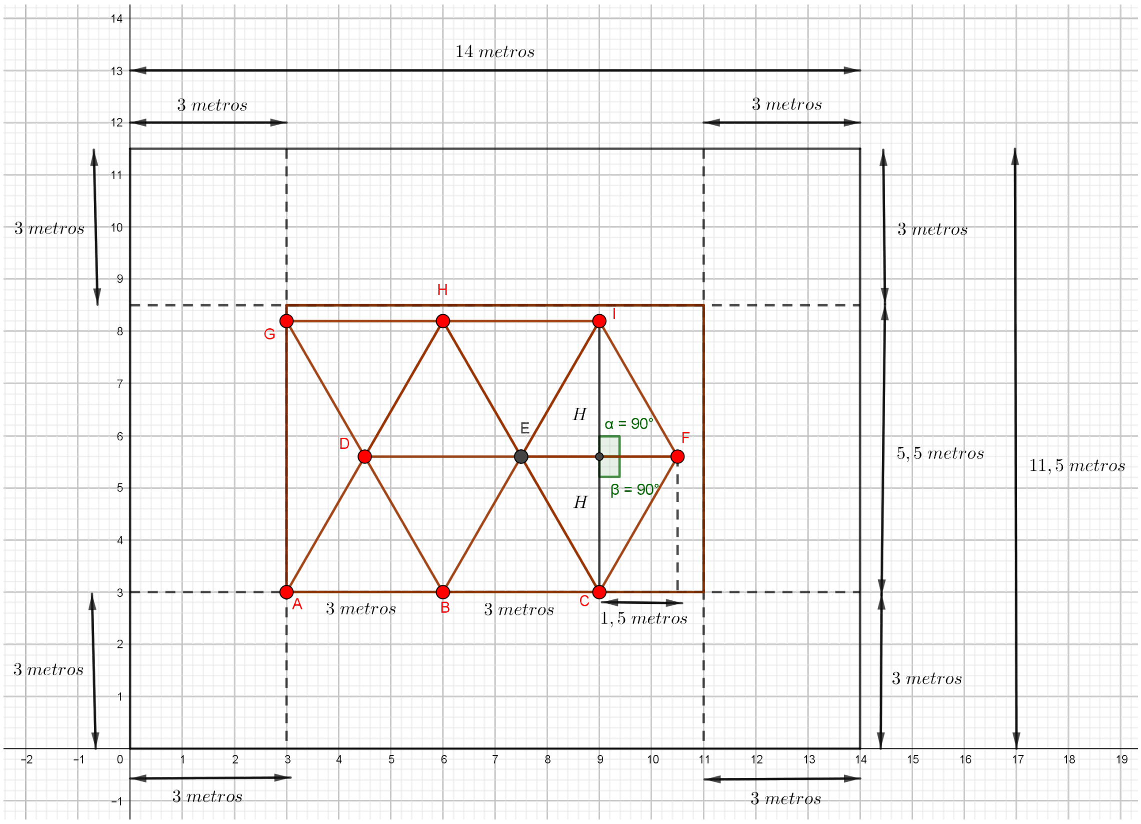
Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura acima, vamos considerar que cada unidade no sistema cartesiano ortogonal corresponda a 1 metro, logo o retângulo maior é o espaço de 14 m por 11,5 m, e que os pontos A, B, C, D, E e F representam as mudas de maças. Lembrando que essas mudas deverão ser plantadas a uma distância de, no mínimo, 3 metros uma da outra e a 3 metros das paredes laterais do terreno, portanto, a área que pode ser utilizada para plantação corresponde ao retângulo menor de dimensões 8 metros e 5,5 metros. E como a questão quer a quantidade máxima de mudas, então devemos aproveitar o maior espaço possível, e, para isso, devemos utilizar a distância mínima entre as mudas.

Mas, ao analisar a figura que representa a situação, os alunos se depararam com a seguinte situação: que se as mudas fosse plantadas dessa forma, só poderiam ser plantadas 6 mudas, que foram representadas pelos pontos A, B, C, D, E, e F, e esse valor não corresponde a nenhuma alternativa da questão.

Após essa análise, foi dada a sugestão de plantar essas mudas formando vértices de triângulos equiláteros de lados 3 metros, como mostrado na ilustração abaixo, construída com o Geogebra.

Figura 72 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2014



Fonte: Elaborado pelo autor

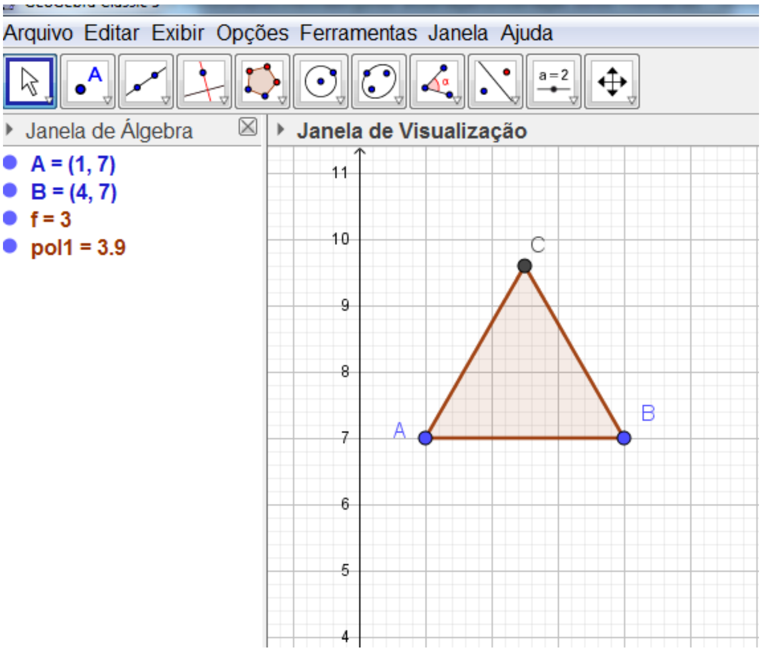
Na figura acima, os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I representam as mudas de maças. Calculando o valor da altura H do triângulo equilátero de lado 3 metros, teremos:

$$H = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cong \frac{3 \cdot 1,73}{2} \cong 2,59m.$$

Foi solicitado que os alunos usassem o Geogebra para encontrar essa altura, como forma de exercício. Para isso, ele procederiam da seguinte forma:

1º) Clicar em  (Polígono regular), na Janela de Ferramentas do Geogebra e criar um triângulo equilátero de lado 3.

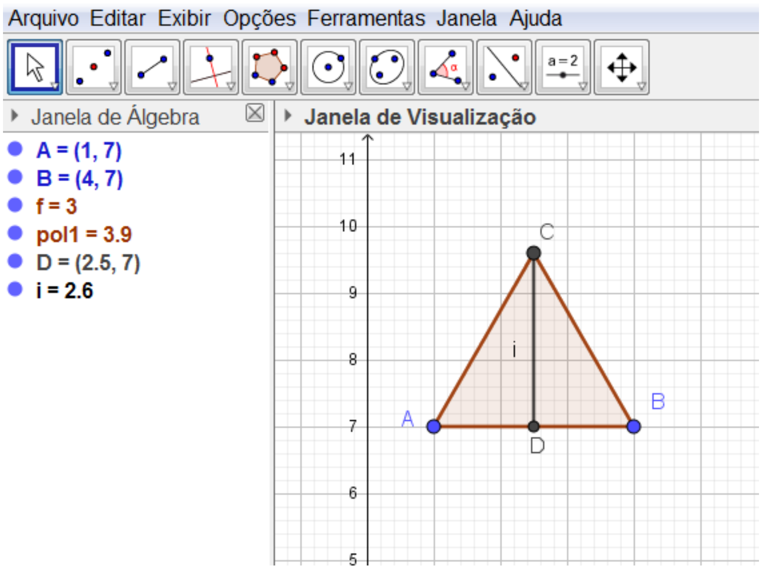
Figura 73 – Triângulo equilátero / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

2º) Encontrar o ponto médio do lado AB, clicando em  (Ponto médio ou centro), e depois construímos um segmento de reta ligando esse ponto médio com o vértice C do triângulo, clicando em  (Segmento definido por dois pontos).

Figura 74 – Triângulo equilátero / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Ao terminar esse procedimento, aparece, automaticamente, na Janela de Álgebra, o valor do comprimento do segmento i = 2,6, que nada mais é do que a altura do triângulo equilátero, ou seja, o mesmo valor encontrado usando a fórmula.

Continuando a questão, se $H \cong 2,59$ metros, então $2H \cong 2 \cdot 2,59 \cong 5,18$ metros, o que ainda estará dentro do limite do terreno que pode ser usado para a plantação, já que suas dimensões são de 8 metros por 5,5 metros.

Desta forma, plantando as mudas em formato de vértices de triângulos equiláteros, a pessoa poderá plantar, em seu terreno, no máximo 9 mudas de maças, respondendo, desta forma, a essa questão.

3.7 A Matemática na horta escolar e a Geometria dinâmica.

Esse trabalho de pesquisa foi idealizado e desenvolvido por mim, Nehemias Monteiro Brito Júnior, professor de Matemática desde 2002, trabalhando na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Prof. Temístocles Araújo desde 2008, e foi aplicada com os alunos que cursavam a 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, de tempo integral, da escola supracitada, em 2018.

Para aplicar o que foi estudado em sala de aula e demonstrado nas secções anteriores, com o auxílio do Geogebra, foi proposto que os alunos resolvessem uma questão que foi cobrada na prova do Enem em 2002, e depois aplicamos em uma situação real, no projeto "Horta Escolar", idealizado pelo professor Jeedir Gomes, diretor da escola e professor de Biologia. Esse projeto conta com a participação de alguns professores e alunos do Ensino Médio Integral.

A questão foi a seguinte: (Enem 2002) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

Figura 75 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2002

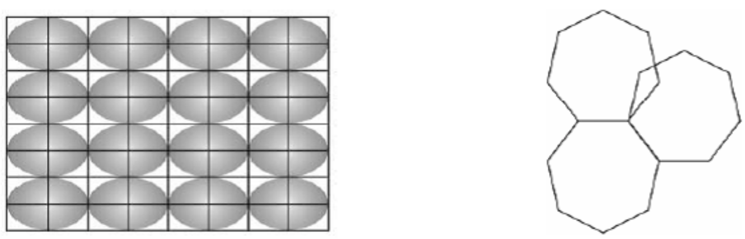


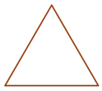
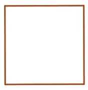
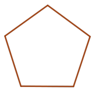
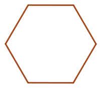
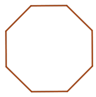
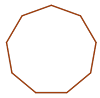
Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

Fonte: encurtador.com.br/fENV1

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Figura 76 – Prova de Matemática e suas Tecnologias / Enem 2002

Nome	*Triângulo*	*Quadrado*	*Pentágono*	*Haxágono*	*Octógono*	*Eneágono*
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140º

Fonte: encurtador.com.br/dGUV6

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

A) triângulo

B) quadrado

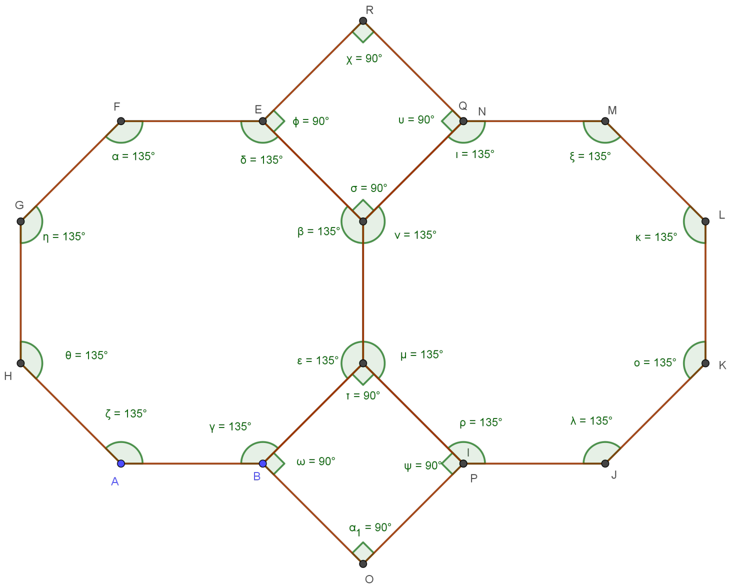
C) pentágono

D) hexágono

E) eneágono

Solução: Para resolver a questão, os alunos criaram, no Geogebra, os octógonos regulares, com seus ângulos internos de 135º e perceberam que $135^{o} + 135^{o} = 270^{o}$ e que faltava 90º para 360º e, assim chegaram na conclusão que o ladrilho que deve completar o piso deve ser em forma de quadrado, como mostrado na figura abaixo.

Figura 77 – Construção de polígonos / Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a resposta correta da questão é a letra B.

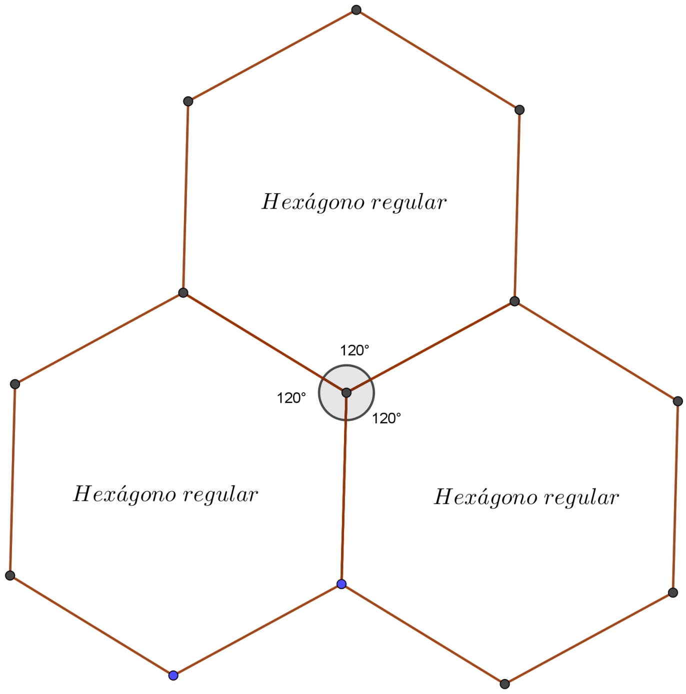
Após feito a análise dessa questão, eu propus uma atividade aos alunos utilizando a horta presente na escola. A atividade foi a seguinte: Eu pedi que eles fossem até à horta e verificassem qual era o formato dos bloquetes de concreto que nós usamos para construir os canteiros que seriam plantadas as hortaliças, dando o nome do polígono, a soma dos ângulos internos, se era, ou não, um polígono regular e, caso fosse, quanto media cada ângulo interno dele, porque eles pavimentavam o plano e usassem o Geogebra para representar essa situação.

Figura 78 – A Matemática na horta escolar

Fonte: Elaborado pelo autor

Os alunos chegaram à conclusão que se tratava de polígono de 6 lados, cujo nome é hexágono, calcularam, usando a fórmula demonstrada em sala, $S_i = 180^o \cdot (n-2)$, a soma dos ângulos internos desse polígono e encontraram o valor de 720º. Verificaram também que os 6 lados tinham a mesma medida, logo se tratava de um polígono regular cujo cada ângulo interno mede 120º. E, posteriormente, concluíram que esse formato pavimenta o plano pois ao unir 3 bloquetes, desse formato, a soma dos três ângulos formado por eles é igual a 360º. E, pra finalizar a atividade, representaram a situação usando o Geogebra, como mostra a figura.

Figura 79 – A Matemática na horta escolar



Fonte: Elaborado pelo autor

Outras questões foram propostas aos alunos. Foi pedido que eles calculassem quantas mudas, no máximo, poderiam ser plantadas numa região retangular de 10 metros de comprimento por 1 metro de largura, sabendo que a distância mínima de uma muda pra outra e de uma muda para as laterais do terreno é de 25 centímetros, e qual é a área total usada para a plantação das hortaliças.

Figura 80 – A Matemática na horta escolar

Fonte: Elaborado pelo autor

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visamos, neste trabalho, realizar a identificação de como a Álgebra Elementar aparece nos currículos do Ensino Fundamental e Médio, tanto de acordo com os PCN, como na nova BNCC, as mudanças que ocorreram ao longo dos anos no que se refere ao ensino, as habilidades e as competências que os alunos devem adquirir, quais os benefícios com o surgimento da nova Base Nacional Comum Curricular e, assim, apresentar uma proposta de ensino que facilite a aprendizagem de alguns conteúdos utilizando o software Geogebra, já com base nessa nova abordagem, com a finalidade de dinamizar o ensino desse ramo da Matemática, e mostrar aplicações desses conteúdos em situações cotidianas, visando auxiliar o professor e, consequentemente, facilitar a aprendizagem dos nossos alunos no que se refere a esses conteúdos para que eles tenham a capacidade de desenvolver o pensamento algébrico.

A realização da comparação entre esses dois documentos oficias, PCN e BNCC, que guiam a composição curricular da Educação Básica em nosso País nos permitiu observar, além das diferenças de abordagem para alguns assuntos de Álgebra, um aspecto histórico evolutivo na construção do currículo, isto é, uma ampliação da composição curricular no que se refere ao ensino de Álgebra. Enquanto nos PCN, por exemplo, o ensino de Álgebra estava contemplada no bloco de números e operações e era concentrada a partir da 5ª série (atual 6º ano), e não tinha nenhuma construção anterior ou posterior das habilidades do pensamento algébrico, na nova BNCC ela compõe um dos cinco eixos temáticos apresentados pela Base e há um foco no pensamento algébrico e não nas operações algébricas, especialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, desde o 1º ano. Fazendo essa análise comparativa, percebemos que o ensino da Álgebra, comumente conhecida como um amontoado de operações entre símbolos e letras, visto dessa forma, vêm sofrendo modificações e, consequentemente, perdendo espaço no Ensino Básico, ou seja, com essa nova perspectiva lançada pela nova BNCC, percebemos que haverá um avanço significativo no que se refere ao ensino da Álgebra no Brasil.

Para o desenvolvimento dessas pesquisa, levantamos diversas hipóteses a respeito do tema “Álgebra”, e buscamos respostas paras as seguintes perguntas: como se deu a evolução da Álgebra ao longo do tempo? Que mudanças tivemos nos currículos com a elaboração da nova Base Nacional Comum Curricular em relação aos antigos PCN? como podemos utilizar o Geobebra como instrumento facilitador para o ensino e aprendizagem de Álgebra? Como relacionar a Álgebra com outros ramos da Matemática? Como relacionar a Álgebra com situações do cotidiano do aluno? E foi tentando responder a essas perguntas, que procuramos elaborar e desenvolver atividades que colocassem nossos alunos como personagens atuantes.

Analisando o desenvolvimento dos estudantes durante a aplicação da proposta didática e os resultados apresentados, avaliamos que a metodologia adotada contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Percebemos que alguns alunos tiveram algumas dificuldades para desenvolver as primeiras atividades mas, com o transcorrer das aulas, e depois de feitas algumas demonstrações com o Geogebra, notamos que houve um significativo desenvolvimento de autonomia por parte de muitos. Isso foi favorecido pelo tipo de atividades que propusemos e pela forma como estas foram conduzidas, isto é, um aspecto muito positivo para o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem foi o uso do computador, sendo que a utilização do software Geogebra foi fundamental no processo do ensino, pois ele possibilitou a visualização dos movimentos, transformações e também a relação da Álgebra com a Geometria.

Acreditamos que, com a utilização do software Geogebra, houve o desenvolvimento de uma aula diferente da aula tradicional, já que ele possibilitou aos alunos a visualização, a manipulação, a criação, a alteração e a experimentação da Álgebra e de suas múltiplas representações. Nós sabemos que, hoje em dia, as tecnologias estão presentes no dia a dia das pessoas, especialmente dos nossos alunos, por isso, é importante destacar que, quando bem utilizadas, podem contribuir no aprendizado, tornando-o muito mais atrativo e interessante, ou seja, os recursos digitais, pelo fato de estarem presentes no nosso cotidiano, precisam estar incorporados no processo do ensino e da aprendizagem acrescentando, assim, novas metodologias. Não há como não refletir sobre a importância da utilização das mídias digitais e não se sentir provocado em repensar a prática pedagógica, a fim de promover uma aula mais dinâmica, atraente e motivadora.

Outro diferencial do nosso trabalho foi a aplicação de alguns conteúdos matemáticos estudados em sala, relacionados à Álgebra, na horta da escola, desta forma, os alunos vivenciaram diferentes situações levando a desenvolver o pensamento algébrico. É importante ressaltarmos que essa horta foi construída com o auxílio, indispensável, de alguns professores, alunos e funcionários da escola e idealizada pelo professor Mestre, Jeedir Gomes, diretor da Escola na ocasião e professor de Biologia. Faço questão de destacar que essa experiência foi muito gratificante para mim, pois me aproximou ainda mais da turma, devido ser algo diferente do que estamos acostumados a fazer. Naquela momento, além de falarmos sobre Matemática, tive a oportunidade de conhecê-los melhor, pois foi um espaço para conversamos um pouco sobre outros assuntos como: família, futuro, sonhos profissionais, dificuldades pessoais que muitos deles tinham e que, somente com o contato em sala de aula, nunca tinha percebido, ou seja, foi um trabalho que só trouxe bons frutos e que a empolgação deles com relação a essa atividade era recíproca.

Figura 81 – Construção da horta escolar

Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos concluir que, estudar Álgebra não significa apenas manipular símbolos, letras e equações. Seu ensino dever ser baseado, principalmente, em desenvolver no estudante o raciocínio, o pensamento algébrico e as construções de noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas, gráficos e situações do seu cotidiano. Os resultados desse trabalho permitem averiguar, de forma preliminar, que o uso de atividades diversificadas, como apresentamos aqui, e que envolveram materiais concretos e o uso da tecnologia, pode ser uma boa forma de apresentar a Álgebra aos alunos como atividade e, consequentemente, favorecer a construção do pensamento algébrico.

Levando-se em consideração os aspectos mencionados, pôde-se exemplificar como a metodologia adotada pelo professor permite que ele torne-se um mediador do ensino, valorizando as competências individuais de cada aluno, tornando-o um agente ativo na construção do seu conhecimento algébrico.

É meu desejo que esse trabalho fomente discussões sobre qual é a Álgebra que estamos ensinando a nossos alunos, e que possa trazer contribuições para uma futura prática docente e também traga reflexões e debates sobre a importância do ensino da Álgebra elementar na Educação Básica.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. **Várias faces da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010. 203 p.

[2] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996, 443 p.

[3] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 2000.

[5] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

[6] BRASIL. **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes**. São Paulo: MEC, 2012.

[7] DOLCE, O. e POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9**. 7 ed. São Paulo: Atual Editora, 2001, 451 p.

[8] FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. e MIGUEL, A. **Contribuição para um Repensar . . . a Educação Algébrica Elementar**, In: Pro - Posições, revista Quadrimestral da Faculdade de Educação - Unicamp. Vol. 4, n, nº 1[10]. Campinas: Cortez Editora, p. 78 - 91. (1993b).

[9] GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010. 240 p.

[10] LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectiva em aritmética e álgebra para o século XXI**. 7. ed. Campinas, SP. Papirus, 1997.

[11] POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

[12] STEWART, Ian. **Uma história da Simetria na Matemática**. Trad. Claudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.