UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MARCO ANTONIO DE ARAUJO DUARTE

CÔNICAS: DA HISTÓRIA ÀS APLICAÇÕES TECNOLÓGICAS

BELÉM – PARÁ

2019

MARCO ANTONIO DE ARAUJO DUARTE

CÔNICAS: DA HISTÓRIA ÀS APLICAÇÕES TECNOLÓGICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

BELÉM - PARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A658c Araujo Duarte, Marco Antonio de.
Cônicas: da História às Aplicações Tecnológicas / Marco Antonio de Araujo Duarte, . — 2019.
80 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. cônicas; elipse; parábola; hipérbole e aplicações tecnológicas.. I. Título.

CDD 510

MARCO ANTONIO DE ARAUJO DUARTE

CÔNICAS: DA HISTÓRIA ÀS APLICAÇÕES TECNOLÓGICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 25/03/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias – PROFMAT/ICEN/UFPA

Orientador

Prof. Dr. João dos Santos Protázio – FAEST/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Anderson David de Souza Câmpelo – PROFMAT/ICEN/UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Senhor dos Exércitos - Yaohushua e aos meus pais Orlando e Alice Duarte, pela vida, atenção e cuidados dedicados a mim.

À Karlla, Heron, Henzzo, Hannah, Mayara, Jade e Mylla (esposa e filhos) pelo amor, inspiração e incentivo;

Aos professores do programa Profmat - UFPA pelo ensino, apoio e compreensão dedicados ao longo do curso.

Ao meu orientador, Professor Valcir João da Cunha Farias, pela dedicação, paciência, humildade e respeito.

Eis que amas a verdade no íntimo, e no oculto me fazes conhecer a sabedoria.

Salmos:51-6

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo disponibilizar um material didático alternativo para o planejamento e execução de aulas de geometria analítica básica, referente ao estudo das cônicas - Elipses, Parábolas e Hipérboles, apresentando-se:

- O histórico dos principais protagonistas do estudo sobre as cônicas;
- A teoria matemática das cônicas para um ensino básico;
- Um conjunto de atividades com suas soluções;
- Um conjunto de atividades propostas e suas respostas;
- Algumas aplicações tecnológicas das Cônicas.

Palavras-chave: cônicas; elipse; parábola; hipérbole e aplicações tecnológicas das cônicas.

ABSTRACT

This work aims to provide an alternative didactic material for the planning and execution of classes of basic analytical geometry, referring to the study of the conics - Ellipses, Parables and Hyperboles, presenting:

- The history of the main protagonists of the study on conics;
- The mathematical theory of conics for basic education;
- A set of activities with their solutions;
- A set of proposed activities and their responses;
- Some technological applications of the conics.

Key words: conics; ellipse; parable; hyperbole and technological applications of the conics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> "A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."
>
> (Descartes)

O mundo em que vivemos está repleto de matemática por todos os lados, e a necessidade de aprimorá-la remonta os primórdios da civilização.

O homem em sua luta diária pela sobrevivência, tem desenvolvido estudos, aprimorado técnicas, criado engenharias e maquinários que costumam gerar melhores condições de vida, graças ao avanço da matemática.

A descoberta das superfícies cônicas possibilitou grandes revoluções na vida do homem, e muitos foram aqueles que contribuíram para isso. Seus estudos revelaram propriedades que geraram várias aplicações tecnológicas, modificando profundamente sua forma de pensar e de agir.

O estudo das cônicas, geralmente se inicia nas aulas de geometria analítica do terceiro ano do ensino médio, estando presente, ainda, na maioria das ementas dos cursos de matemática do ensino superior. A relevância desse estudo é demonstrada pela história de seu desenvolvimento e pelo seu vasto número de aplicações, sendo o seu aprendizado imprescindível ao desenvolvimento da ciência e da tecnologia.

As cônicas costumam ser apresentadas de forma exclusivamente conceitual, priorizando o desenvolvimento da teoria e da álgebra, em detrimento da evolução histórica e de suas diversas aplicações, sejam na astronomia, engenharias, medicina, ou na indústria.

A presente pesquisa se justifica no atual cenário educacional diante das dificuldades no ensino vivenciadas por professores e alunos que, seja pelo número reduzido de aulas em comparação à quantidade de assuntos a serem ministrados, ou pela má formação do professor, ou até mesmo pela falta de infraestrutura escolar, o estudo das cônicas acaba sendo substituído por outros assuntos, ou são simplesmente suprimidos do conteúdo programático.

Em outros casos, a abordagem estritamente teórica e formal, tem transformado aulas que poderiam ser bastante interessantes e produtivas, em exposições desgastantes, enfadonhas e rejeitadas por grande parte dos discentes.

Observa-se nas salas de aula, grande diferença no que tange a atenção, interesse e dedicação dos alunos quando as aulas são ministradas, utilizando-se de uma linguagem mais acessível no que tange às definições, descrições e conceituações matemáticas. Neste sentido, os softwares de geometria dinâmica costumam facilitar sobremaneira a realização das aulas de matemática.

Unindo a teoria à prática e fazendo uso das ferramentas computacionais disponíveis, como por exemplo, o GeoGebra, possibilitamos que as aulas sejam mais agradáveis e produtivas, de forma que as conexões entre definições, conceitos, teoremas, álgebra e construções geométricas possam ser efetivadas pelos alunos com maior facilidade.

Este trabalho tem como objetivo disponibilizar um material didático alternativo para o planejamento e execução de aulas de geometria analítica básica, referente ao estudo das cônicas: Elipses, Parábolas e Hipérboles.

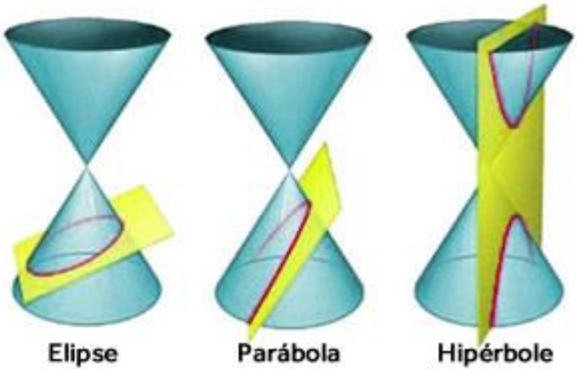
Apresentaremos nos capítulos 2 e 3, respectivamente, um pequeno histórico dos principais protagonistas do assunto e uma sinopse teórica sobre a geometria analítica de pontos e retas no plano. Nos capítulos seguintes (4, 5 e 6), apresentamos a teoria, exercícios resolvidos e propostos sobre elipse, parábola e hipérbole. No capítulo 7 temos a apresentação da principal propriedade das cônicas – a reflexão, encerrando este trabalho no capítulo 8, com aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento.

2 RUDIMENTOS HISTÓRICOS

Muitos foram os estudiosos que contribuíram com os estudos das cônicas ao longo da história. Embora matemáticos, físicos, engenheiros e filósofos tenham dedicado bastante tempo e energia nesses estudos, segundo [1], atribui-se a Menaecmus a descoberta das secções cônicas, durante sua tentativa de encontrar o valor da aresta de um cubo, cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado – Problema da duplicação do cubo. Segundo [2] e [11], Menaecmus teria descoberto essas curvas a partir da secção de cones com planos perpendiculares a uma secção meridiana, na qual o ângulo era agudo, reto ou obtuso.

Somente por volta do ano 225 a.C., segundo [4], é que trabalhos sistemáticos, de reconhecido destaque, sobre as cônicas foram desenvolvidos por Apolônio. Apesar de todo o avanço desenvolvido por Menaecmus foi Apolônio que registrou a maior síntese da geometria das cônicas, obtendo todas as secções a partir de uma superfície cônica dupla (Figura 1), fazendo variar o ângulo segundo o qual o plano cortaria a secção meridiana.

Figura 1: Secções Cônicas

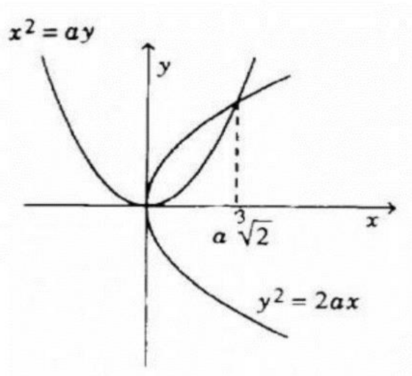


Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/figuras/conicas.jpg

A seguir, apresentamos uma sinopse biográfica, cronológica e suscinta de estudiosos (matemáticos, físicos, engenheiros, arquitetos, advogados, filósofos, e etc.) que contribuíram para o progresso da matemática, referente ao estudo das superfícies cônicas, de forma tal que o leitor possa contemplar, ainda que superficialmente, as suas principais contribuições. São eles:

- **Menaecmus (380 - 320 a.C):** segundo [3] e [11], Menaecmus foi o matemático grego que descobriu as seções cônicas enquanto estava tentando resolver o problema da duplicação do cubo (Figura 2). Menaecmus utilizou duas curvas conhecidas dos geômetras gregos, mas que, até então, não tinham sido de muita utilidade: a hipérbole e a parábola. O motivo pelo qual Menaecmus é considerado o introdutor das Seções Cônicas é que, até ele, as curvas eram meras construções geométricas sem representação algébrica, além disso, na resolução do problema Deliano, ao intersecionar hipérbole e parábola, ele acabou descobrindo uma terceira curva: a elipse, sendo ele o primeiro a mostrar que elipses, parábolas e hipérboles são obtidas da intersecção entre um cone e um plano não paralelo à base.

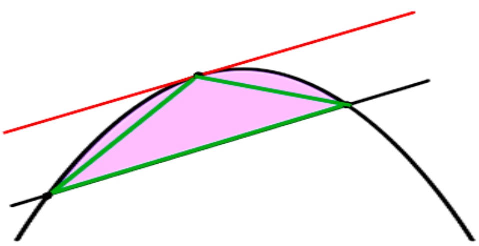
Figura 2: Duplicação do Cubo



Fonte: https://www.mozabc.com/uploads/img/df0731248021c9f3cb2b5e3e5c17a821.jpg

- **Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C):** célebre matemático, físico e inventor grego, inúmeras vezes lembrado pelo de Teorema do Empuxo, segundo [3], [12] e [13], também foi responsável pela notável determinação da área de um segmento parabólico (Figura 3) - Arquimedes provou que a área da figura formada por um arco de parábola e um segmento de reta é igual a 4/3 da área de um triângulo cuja base seja o mesmo segmento e cujo terceiro vértice seja a intersecção de uma tangente à parábola que seja paralela ao segmento dado.

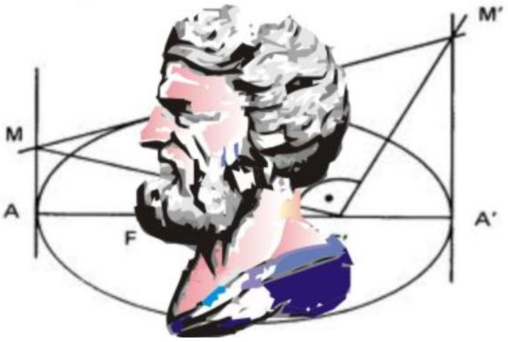
Figura 3 1: Segmento Parabólico



Fonte: Elaborada pelo autor

- **Apolônio de Perga (260 - 200 a.C):** segundo [3], [14] e [15], Apolônio foi o astrônomo e matemático grego responsável pelo primeiro estudo sistemático sobre as cônicas. Nasceu em Perga na Ásia Menor, estudou em Alexandria na escola dos sucessores de Euclides. Pouco é sabido sobre sua vida, no entanto o seu trabalho teve uma grande influência no desenvolvimento da Matemática em particular pela sua mais célebre obra "As Cônicas", composta por oito volumes. Nesta obra, Apolônio (Figura 4) demonstra centenas de teoremas recorrendo apenas aos métodos puramente geométricos de Euclides. Chamado o "Pai das Cônicas", Apolônio foi o criador das designações: elipse, parábola e hipérbole, até hoje utilizadas.

Figura 4: Apolônio de Perga



Fonte: http://www.juanleyva.es/imagenes/Biografias/apolonio-1.jpg

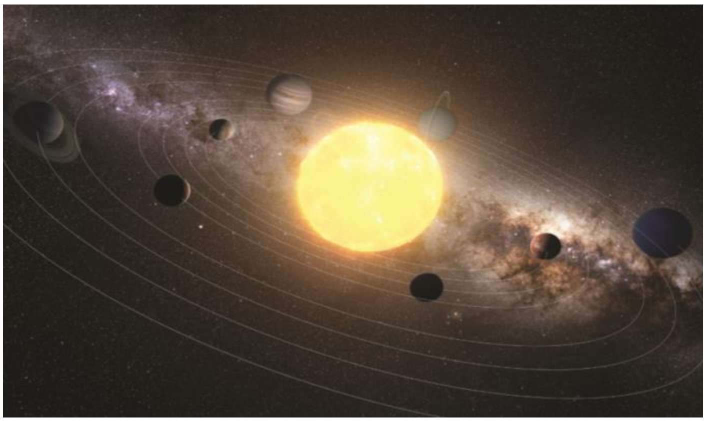
- **Galileu Galilei (1564 - 1642):** físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano, segundo [16], [17], e [18], Galileu Galilei foi personalidade fundamental na revolução científica e precursor das ideias desenvolvidas na mecânica newtoniana. Desenvolveu estudos sobre o movimento de projéteis próximos à superfície terrestre (Figura 5), descrevendo suas trajetórias como arcos de parábola.

Figura 5: Movimento Parabólico de um Foguete

Fonte:http://educativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/1000/1149/html/alcance_maximo_complementario.jpg

- **Johannes Kepler (1571 - 1630):** segundo [19], [20], [21] e [22], foi um brilhante astrônomo e matemático alemão. Notabilizou-se pela criação das três leis que, junto à lei da gravitação universal de Newton, regem a dinâmica dos corpos celestes. A Primeira Lei de Kepler, também conhecida como Lei das Órbitas afirma que os planetas do sistema solar giram em torno do Sol em órbitas elípticas (Figura 6), onde este ocupa um de seus focos. É, também, creditada a Kepler a introdução da palavra foco à geometria elíptica.

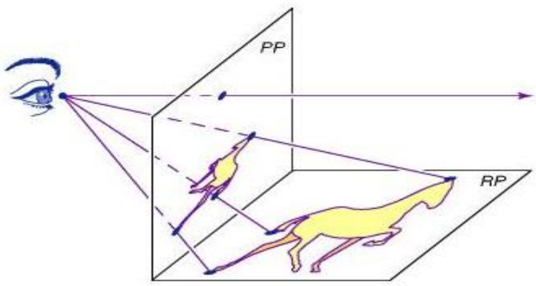
Figura 6: As Órbitas Elípticas



Fonte: https://abrilguiadoestudante.files.wordpress.com/2016/08/rodopio-eliptico.png?w=768&h=511&crop=1

- **Girard Desargues (1591 - 1661):** segundo [23], foi um Engenheiro e Arquiteto francês que ao criar a geometria projetiva (Figura 7), interpretou matematicamente às intuições e processos dos pintores. Desargues publicou um livro no qual explorava o fato de uma circunferência ser vista como uma elipse quando a linha de visada é oblíqua em relação ao plano da circunferência, concluindo que as cônicas podiam ser obtidas umas a partir das outras por projeção. Desargues simplificou bastante algumas das deduções feitas aos resultados de Apolônio, permitindo que novas descobertas sobre as cônicas pudessem ser realizadas.

Figura 7: As Projeções de Desargues



Fonte: https://cdn.britannica.com/s:300x300/99/73399-004-2EF09A78.jpg

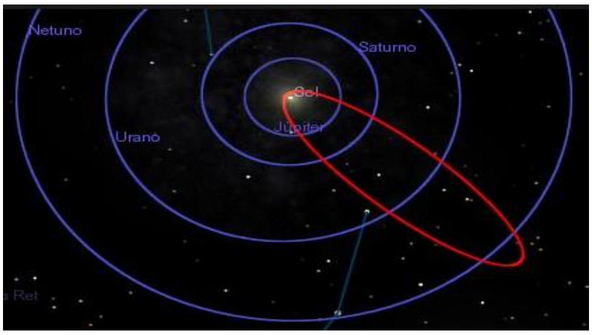
- **Pierre de Fermat (1601 - 1665):** advogado e matemático amador francês, segundo [24], [25] e [26], iniciou-se na matemática em 1629, através de estudos sobre curvas planas, em trabalhos de Apolônio de Perga. Também desenvolveu métodos algébricos, nos quais, a partir de equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, usando técnicas de translações e rotações, deduzia as propriedades geométricas da curva correspondente, e, excetuando-se os casos degenerados, as classificava como uma elipse, uma parábola, uma hipérbole ou uma circunferência. Pierre de Fermat (Figura 8), inspirado nos estudos de Apolônio, estabeleceu o princípio fundamental da Geometria Analítica, segundo o qual, equações do primeiro e segundo graus, no plano, representam, respectivamente, uma reta e uma cônica, mostrando de uma forma bastante sistemática a equação da circunferência e as equações mais simples de uma parábola, elipse e hipérbole.

Figura 8: Pierre de Fermat

Fonte: http://1.bp.blogspot.com/_j5kbeGgXcbo/R6YaneVblZI/AAAAAAAAAzo/gDoXLyQhrQ0/s400/fermat.jpg

- **Edmond Halley (1656 - 1742):** segundo [27] e [28], foi um notável astrônomo inglês. Tornou-se mundialmente conhecido por demonstrar que o cometa Halley se movia em órbita elíptica (Figura 9) em volta do Sol, com um período de translação de 76 anos.

Figura 9: A Trajetória do Cometa Halley



Fonte: http://www.observatorio-phoenix.org/imagem/halley_orbita.jpg

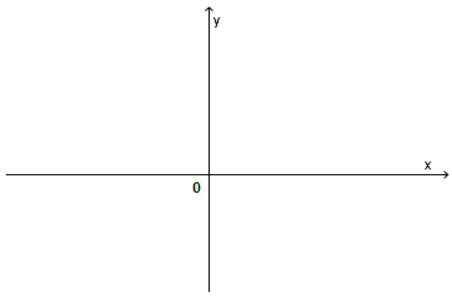
3 NOÇÕES PRELIMINARES DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Apresentamos aqui algumas noções da geometria analítica, segundo [5], [7] e [8], que serão necessárias à boa compreensão da álgebra desenvolvida nas demonstrações das equações das cônicas.

3.1 Plano Cartesiano

O plano cartesiano é constituído de duas retas perpendiculares, uma horizontal chamada Eixo das Abscissas (eixo $\overleftrightarrow{OX}$) e outra vertical chamada Eixo das Ordenadas (eixo $\overleftrightarrow{OY}$). Os eixos concorrem no ponto "O" chamado Origem do plano cartesiano, como mostra a Figura 10.

Figura 10: O Plano Cartesiano

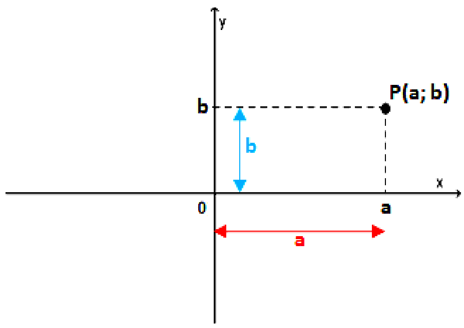


Fonte: Elaborada pelo autor

3.2 Coordenadas de um Ponto no Plano Cartesiano

Seja "P" um ponto do plano cartesiano (Figura 11). Suas coordenadas são representadas por (a; b), onde "a" e "b" representam, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P.

Figura 11: Coordenadas de um Ponto

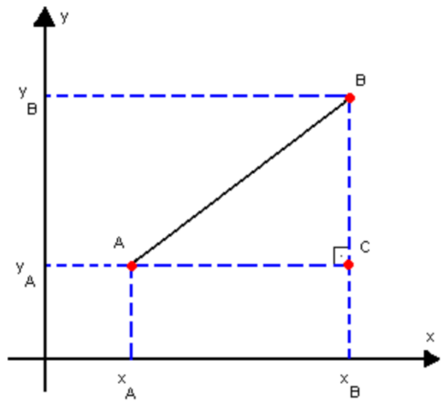


Fonte: Elaborada pelo autor

3.3 Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos A(x_A; y_A) e B(x_B; y_B), denotamos a distância entre eles pontos por d(A, B).

Figura 12: Distância Entre Dois Pontos



Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/retas/Image6.gif

Aplicando o teorema de Pitágoras [8] no triângulo retângulo ABC da Figura 12, temos o seguinte:

$$[d(A,B)]^2 = [d(B,C)]^2 + [d(C,A)]^2$$

$\Rightarrow d(A,B) = \sqrt{[d(B,C)]^2 + [d(C,A)]^2}$

$\Leftrightarrow d(A,B) = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2}$

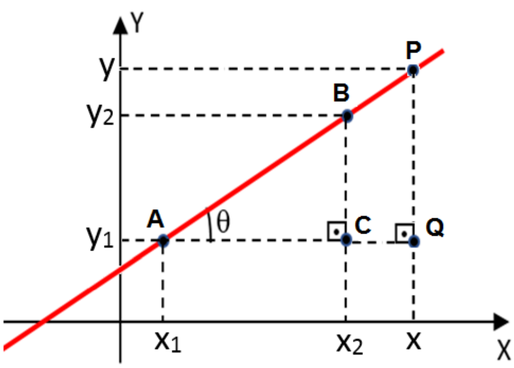
$\Leftrightarrow d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Portanto: $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

3.4 A Reta no Plano

Dados dois pontos distintos A(x_1; y_1) e B(x_2; y_2), existe uma única reta r que passa por estes pontos (ver Figura 13).

Figura 13: A Reta



Fonte: Elaborada pelo autor

3.4.1 Forma Reduzida

Seja P(x, y) um ponto genérico da reta r, então:

$$tg\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$\Leftrightarrow (y - y_1).(x - x_2) = (y - y_2).(x - x_1)$

$\Leftrightarrow yx - yx_2 - y_1x + y_1x_2 = yx - yx_1 - y_2x + y_2x_1$

$\Leftrightarrow yx_1 - yx_2 = y_1x - y_2x + y_2x_1 - y_1x_2$

$\Leftrightarrow y(x_1 - x_2) = (y_1 - y_2)x + (y_2x_1 - y_1x_2)$

Sabemos que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0$. Então, dividindo a equação por $(x_1 - x_2)$, obtemos o seguinte:

$\Leftrightarrow y = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}x + \frac{(y_2x_1 - y_1x_2)}{(x_1 - x_2)}$

$\Leftrightarrow y = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}x + \frac{(y_1x_2 - y_2x_1)}{(x_2 - x_1)}$

Fazendo $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ e $\frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2} = b$, temos então:

$$y = a.x + b;\ \text{com } a, b \in \Re.$$

Chamamos esta última equação de Equação Reduzida da Reta, e as constantes reais a e b, são respectivamente, o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta.

3.4.2 Forma Geral

No item anterior, demonstramos que:

$$y(x_1 - x_2) = (y_1 - y_2)x + (y_2x_1 - y_1x_2)$$

Logo, $(y_1 - y_2)x + y(x_1 - x_2) - (y_2x_1 - y_1x_2) = 0$

Fazendo $y_1 - y_2 = A$, $x_1 - x_2 = B$ e $y_1x_2 - y_2x_1 = C$, temos então:

$$Ax + By + C = 0;\ A, B \text{ e } C \in \Re$$

Chamamos esta última equação de Equação Geral da Reta.

3.4.3 Forma Fundamental

Seja $P_0(x_0; y_0)$ um ponto de uma reta cujo coeficiente angular é m, e seja P(x, y) um ponto genérico dela, então, da figura 13, temos que:

$$m = tg\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$\Leftrightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$.

Esta última equação é chamada de Equação Fundamental da Reta.

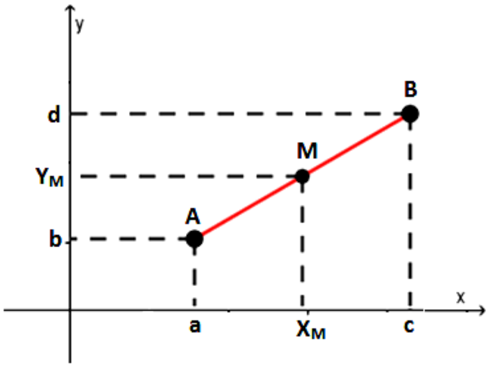
3.4.4 Distância de um Ponto a uma reta

Sejam $P_0(x_0; y_0)$ um ponto qualquer e $r: Ax + By + C = 0$ uma reta de $\Re^2$, então a distância do ponto P_0 a reta r, denotada por $d(P, r)$ é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3.5 Ponto Médio de um Segmento de Reta

Figura 14: Coordenadas do Ponto



Fonte: Elaborada pelo autor

Sejam A(a; b), B(c; d) e $M(X_M; Y_M)$, respectivamente, os pontos extremos do segmento AB (Figura 14), e o ponto médio deste segmento. Aplicando-se o teorema de Tales [8], temos que:

$$AM \equiv MB$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_M - a = c - X_M \\ Y_M - b = d - Y_M \end{cases}$$

$$\text{Portanto: } \begin{cases} X_M = \frac{a+c}{2} \\ Y_M = \frac{b+d}{2} \end{cases}$$

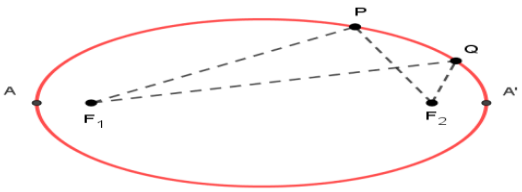
4 A ELIPSE

4.1 Definição

Elipse (Figura 15), segundo [10], é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano é constante. Denotamos essa constante por $2a$, onde este valor é maior que a distância entre os focos.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Figura 15: A Elipse

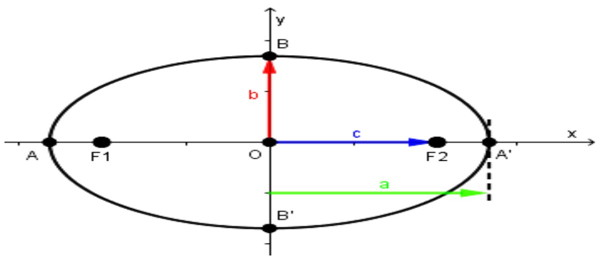


Fonte: Elaborada pelo autor

4.2 Elementos da Elipse

Observemos a elipse centrada na origem de um sistema cartesiano.

Figura 16: Elementos da Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor

Com base na Figura 16, definimos:

Focos da elipse: F_1 e F_2;

Vértices da elipse: A, A', B, B';

Centro da elipse: O;

Distância focal: $d(F_1, F_2) = 2c$;

Eixo maior: $2a = d(A, A')$;

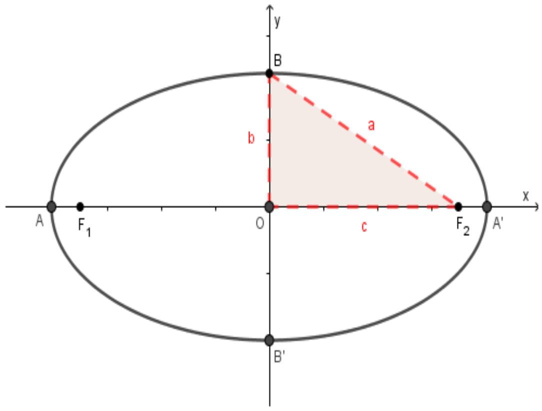
Eixo menor: $2b = d(B, B')$;

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$.

4.3 Relação Fundamental da Elipse

Seja λ a elipse da Figura 17. Sabe-se que B ϵ λ, logo $BF_1 + BF_2 = 2a$. Sabe-se ainda que B é equidistante de F_1 e de F_2, logo $BF_1 = BF_2 = a$.

Figura 17: Relação Fundamental da Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor

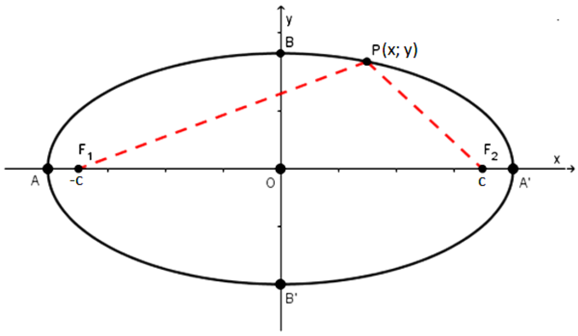
Portanto: $a^2 = b^2 + c^2$

4.4 Equação da Elipse Centrada na Origem

Estudaremos dois casos – elipses com eixo maior horizontais e elipses com eixo maior verticais.

4.4.1 Elipse com Eixo Maior Horizontal

Figura 18: Elipse Centrada na Origem – Eixo Maior Horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja P(x; y) um ponto qualquer da elipse λ (Figura 18), cujos focos são $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$. Impondo-se a definição de elipse sobre P, temos que:

$$P \in \lambda \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow [\sqrt{(x+c)^2+y^2}]^2=[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2$

$\Leftrightarrow x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+y^2$

$\Leftrightarrow \ a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$

$\Rightarrow [a\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2=(a^2-cx)^2$

$\Leftrightarrow a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$

$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$\Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

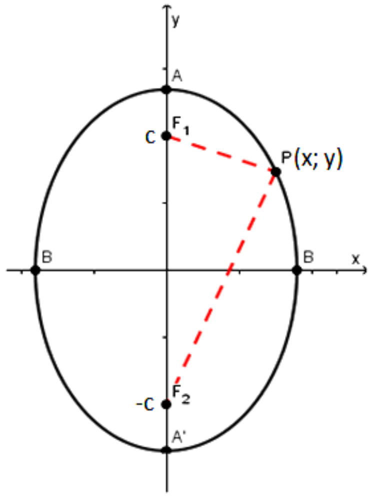
Dividindo-se ambos os membros por a^2b^2, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

4.4.2 Elipse com Eixo Maior Vertical

Nesta configuração os focos de λ, Figura 19, são $F_1(0; c)$ e $F_2(0; -c)$, logo, usando a mesma técnica utilizada no item anterior temos o seguinte:

Figura 19: Elipse Centrada na Origem – Eixo Maior Vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

$$P \in \lambda \Leftrightarrow PF_1+PF_2=2a$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+[y-(-c)]^2}=2a$

Desenvolvendo e simplificando os cálculos, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

4.5 Equação da Elipse Centrada Fora da Origem

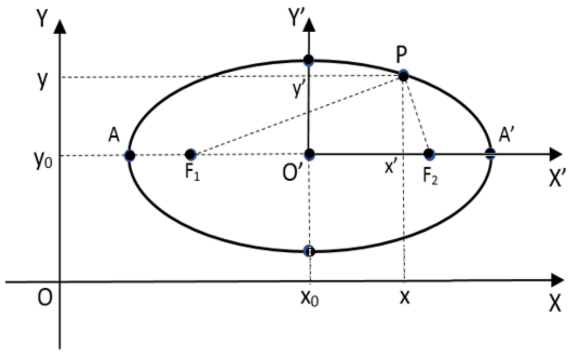
4.5.1 Elipse com Eixo Maior Horizontal

Consideremos uma elipse λ, de centro O'(x_0; y_0), cujo eixo maior é horizontal, e um novo sistema de eixos x'O'y', cujos eixos possuem as mesmas unidades, direção e sentido do sistema xOy.

No sistema x'O'y' (Figura 20), a equação de λ é dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Figura 20: Elipse Centrada da Origem – Eixo Maior Horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor

No sistema xOy, temos que: $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ \quad e \\ y = y_0 + y' \end{cases}$

Logo: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$

Portanto, a equação da elipse com eixo maior horizontal, centrada no ponto (x_0; y_0) é dada por:

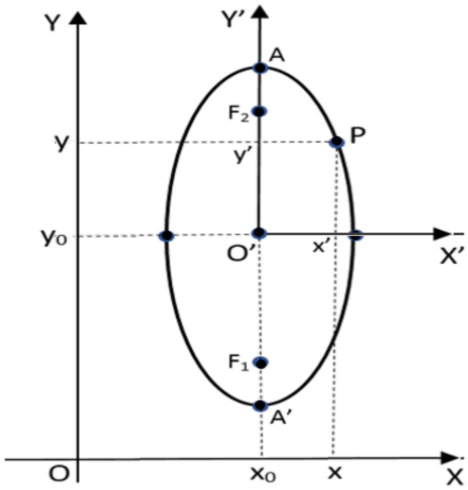
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

4.5.2 Elipse com Eixo Maior Vertical

Neste caso os focos de λ (Figura 21) são os pontos $F_1(x_0; y_0 - c)$ e $F_2(x_0; y_0 + c)$. Logo, sua equação no sistema x'O'y' é dada por $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$. Portanto, procedendo analogamente ao caso anterior, obtemos para a elipse com eixo maior vertical, centrada em $(x_0; y_0)$, a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Figura 21: Elipse Fora da Origem – Eixo Maior Vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

4.6 A Circunferência

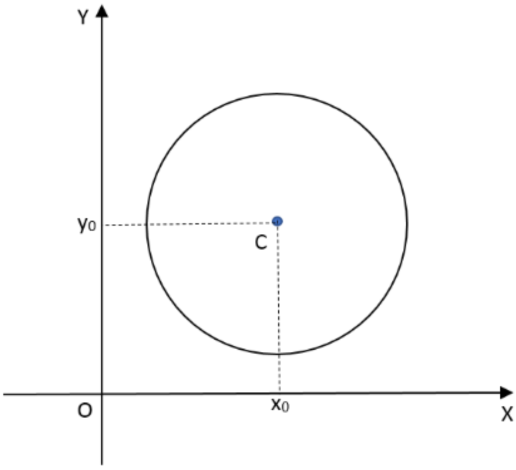
A circunferência é um caso particular da elipse, ou seja, quando a elipse possui os seus dois eixos congruentes (2a = 2b). Neste caso, fazendo a = b = r na equação da elipse, teremos: $\frac{(x-x_0)^2}{r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} = 1$

Portanto, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Essa última expressão, representa a equação reduzida da circunferência centrada no ponto $(x_0; y_0)$, cujo raio é r, como mostra a Figura 22.

Observação: ao desenvolver a última equação, representando-a na forma $f(x, y) = 0$, obtemos uma equação do tipo $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, que chamamos de Equação Geral da Circunferência, onde A, B e C são números reais.

Figura 22: A Circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

4.7 Atividades Resolvidas ([5], [6], [8], [9] e [10])

Nesta seção apresentaremos alguns exercícios resolvidos sobre elipse, usando, em alguns destes o software Geogebra com a finalidade principal de esboçar os gráficos da referida cônica.

01 - Numa elipse, o eixo maior está contido no eixo Ox e seu comprimento é 16. Sabendo-se que a distância entre os focos é 10, determinar a equação da elipse.

Solução:

O eixo maior está contido no eixo Ox, então a forma da equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Das informações do problema temos: 2a = 16 $\Rightarrow$ a = 82 $\Rightarrow$ c = 10 $\Rightarrow$ c = 5

Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, logo: $8^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b^2 = 64 - 25 \therefore b^2 = 39$

Portanto a equação procurada é: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

02 - Obter uma equação da elipse de focos $F_1(-1; 0)$ e $F_2(1; 0)$, cujo eixo maior mede 4 unidades.

Solução:

Os focos da elipse pertencem ao eixo Oy, logo sua equação será do tipo $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

O eixo maior mede 4, logo 2a = 4 $\therefore$ a = 2

$d(F_1; F_2) = |-1-1| = 2$, logo 2c = 2 $\therefore$ c = 1

Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, logo: $2^2 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b^2 = 4 - 1 \therefore b^2 = 3$

Portanto a equação procurada é: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

03 - Dada a equação da elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, determinar:

(a) a distância focal;

(b) a excentricidade.

Solução:

(a) Da equação fornecida temos: $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$

Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$

Logo: $16 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 16 - 9 \Rightarrow c^2 = 7 \Leftrightarrow c = \sqrt{7}$ (pois $c > 0$)

Portanto a distância focal é $2c = 2\sqrt{7}$.

(b) De $a^2 = 16$, temos $a = 4$ (pois $a > 0$)

Sabemos que a excentricidade é definida por $e = \frac{c}{a}$

Portanto $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

04 - Dada a equação da elipse $9x^2+25y^2=225$, determinar:

(a) a medida dos semi-eixos;

(b) os focos;

(c) a excentricidade;

(d) um esboço do gráfico.

Solução:

(a) Dividindo cada termo da equação por 225, temos:

$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, logo $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, então $a = 5$ e $b = 3$

Portanto, as medidas dos semi-eixos são: $2a = 10$ e $2b = 6$.

(b) A elipse tem eixo maior horizontal pertencente ao eixo Ox, logo seus focos têm coordenadas $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$.

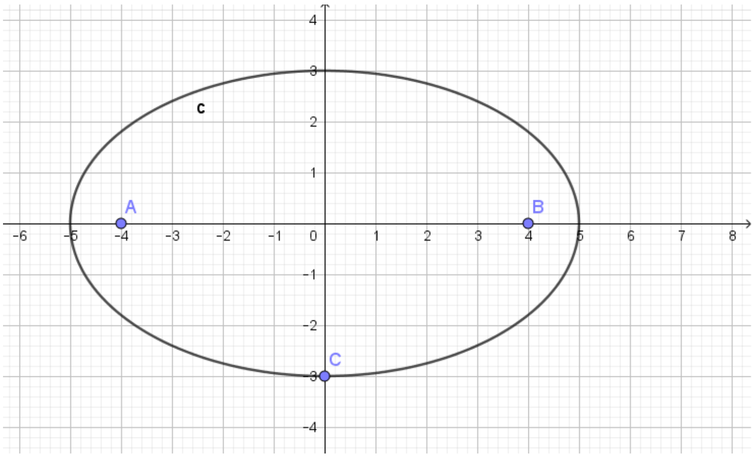
Como sabemos $a^2 = b^2 + c^2$, logo: $25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \therefore c = 4$ (pois $c > 0$)

Portanto os focos da elipse são os pontos de coordenadas (-4; 0) e (4, 0).

(c) A excentricidade é $e = \frac{4}{5}$.

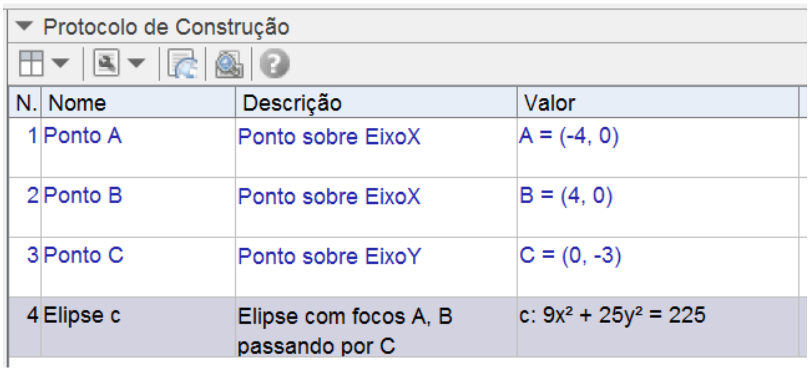
(d) Utilizando o software livre de geometria dinâmica GeoGebra, obtemos o resultado descrito nas Figuras 23 e 24:

Figura 23: Esboço do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24: Construção do Gráfico



N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A	Ponto sobre EixoX	A = (-4, 0)
2	Ponto B	Ponto sobre EixoX	B = (4, 0)
3	Ponto C	Ponto sobre EixoY	C = (0, -3)
4	Elipse c	Elipse com focos A, B passando por C	c: 9x² + 25y² = 225

Fonte: Elaborada pelo autor

5 - Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto (3; 0) e a medida do eixo maior é 8. Determinar sua equação.

Solução:

A elipse está centrada na origem e possui um dos focos no eixo Ox, logo sua equação é do tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sabemos que 2a = 8, logo a = 4, e que $c = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3$, então de $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $b^2 = 16 - 9$, o que resulta $b^2 = 7$.

Portanto a equação procurada é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

6 - Seja a elipse de focos $F_1(16; -2)$ e $F_2(-8; -2)$ e eixo menor de comprimento 10.

(a) Determine o seu centro C;

(b) Obtenha sua equação cartesiana;

(c) Esboce o seu gráfico.

Solução:

(a) O centro da elipse $C(x_C; y_C)$ é o ponto médio do segmento F_1F_2, logo:

$x_C = \frac{16+(-8)}{2} = \frac{8}{2}$ ∴ $x_C = 4$ e $y_C = \frac{(-2)+(-2)}{2} = \frac{-4}{2}$ ∴ $y_C = -2$

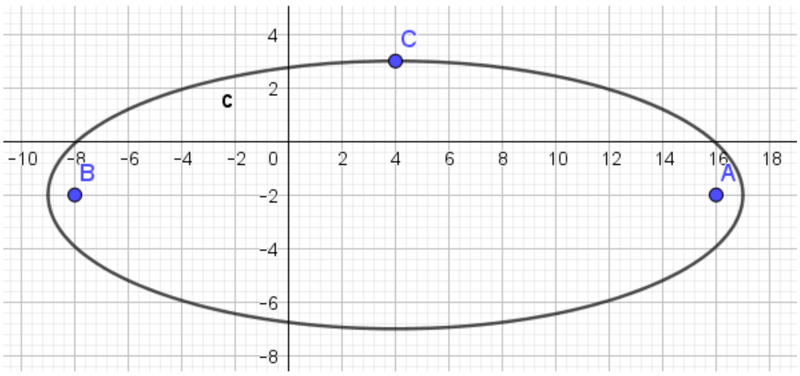
Portanto, o centro da elipse é o ponto C(4; -2).

(b) Como os focos possuem a mesma ordenada e centro fora da origem, temos que a elipse é da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, logo $c = |16-4| = 12$. Como $2b = 10$, temos que $b = 5$ e $b^2 = 25$, então, de $a^2 = 5^2 + 12^2$, temos que $a^2 = 25 + 144$, o que resulta $a^2 = 169$

Portanto a equação da elipse é $\frac{(x-4)^2}{169} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$.

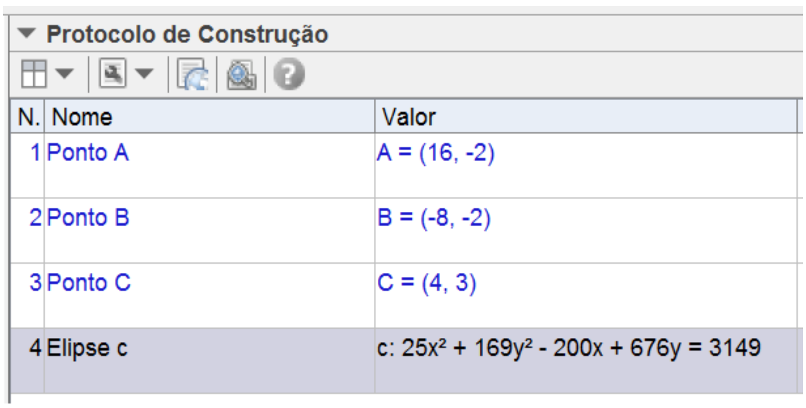
(c) Utilizando o GeoGebra, obtemos o resultado descrito nas Figuras 25 e 26:

Figura 25: Esboço do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 26: Construção do Gráfico



Protocolo de Construção

N.	Nome	Valor
1	Ponto A	A = (16, -2)
2	Ponto B	B = (-8, -2)
3	Ponto C	C = (4, 3)
4	Elipse c	c: 25x² + 169y² - 200x + 676y = 3149

Fonte: Elaborada pelo autor

Observação: as equações apresentadas na solução do exercício 6 são equivalentes, como demonstraremos no exercício 7, a seguir.

7 - Mostre que as equações $\frac{(x-4)^2}{169} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ e $25x^2 + 169y^2 - 200x + 676y = 3149$ representam a mesma elipse.

Solução:

Chamando a equação $\frac{(x-4)^2}{169} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ de (1), e
$25x^2 + 169y^2 - 200x + 676y = 3149$ de (2), temos o seguinte:

1ª parte: (1) → (2)

Multiplicando a equação (1) por 4225 (169 vezes 25), e efetuando as simplificações, temos:

$$4225.\frac{(x-4)^2}{169} + 4225.\frac{(y+2)^2}{25} = 4225.1$$

$\Leftrightarrow\ 25(x-4)^2 + 169(y+2)^2 = 4225$

$\Leftrightarrow\ 25(x^2 - 8x + 16) + 169(y^2 + 4y + 4) = 4225$

$\Leftrightarrow\ 25x^2 - 200x + 400 + 169y^2 + 676y + 676 = 4225$

$\Leftrightarrow\ 25x^2 + 169y^2 - 200x + 676y = 3149$

2ª parte: (2) → (1)

Reagrupando a equação (2), e aplicando a técnica de completar quadrados, temos:

$25x^2 + 169y^2 - 200x + 676y = 3149$

$\Leftrightarrow\ 25(x^2 - 8x + 16) - 25.16 + 169(y^2 + 4y + 4)^2 - 169.4 = 3149$

$\Leftrightarrow\ 25x^2 - 200x + 400 - 400 + 169y^2 + 676y + 676 - 676 = 3149$

$\Leftrightarrow\ 25x^2 - 200x + 169y^2 + 676y = 3149$

Portanto as equações (1) e (2) são equivalentes.

8 - Encontrar uma equação da elipse de focos $F_1(-2; -2)$ e $F_2(2; 2)$, cujo eixo menor mede 2 unidades.

Solução:

Em primeiro lugar, observamos que o segmento F_1F_2 formado pelos focos da elipse λ não é horizontal, nem vertical, logo sua equação não se enquadra nas formas apresentadas neste trabalho, o que nos leva a adotar um outro caminho de solução. Vamos tomar um ponto genérico P(x; y) sobre λ e aplicar a definição de elipse $P \in \lambda \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$.

A distância focal: $2c = d(F_1, F_2) \Leftrightarrow 2c = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{2.16} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow c = 2\sqrt{2}$

Sabemos que: $2b = 2 \Leftrightarrow b = 1$

De $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $a^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2$, logo $a^2 = 1 + 8 = 9$, então $a = 3$, visto que $a > 0$.

Impondo a definição, temos o seguinte:

d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2.3 $\Leftrightarrow$ d(P, F_1) + d(P, F_2) = 6

$$\Rightarrow \sqrt{[x-(-2)]^2+[y-(-2)]^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=6$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}]^2=[6-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}]^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=36-12\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+(x-2)^2+(y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=36+(x-2)^2+(y-2)^2-(x+2)^2-(y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=36-8x-8y$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=9-2x-2y$$

$$\Leftrightarrow [3\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}]^2=(9-2x-2y)^2$$

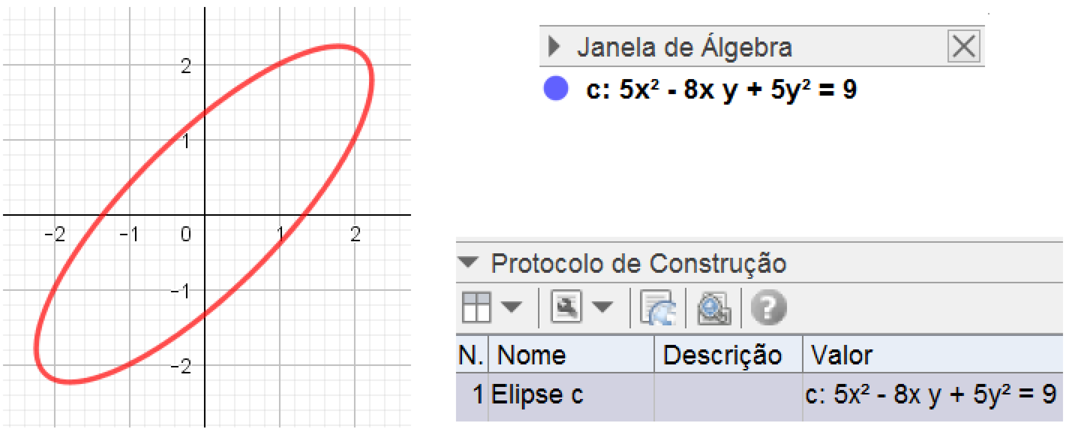
$$\Leftrightarrow 9[(x-2)^2+(y-2)^2]=(9-2x)^2-2.(9-2x).(2y)+(-2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2-4x+4+y^2-4y+4)=81-36x+4x^2-36y+8xy+4y^2$$

Portanto, a equação da elipse é $5x^2+5y^2-8xy-9=0$.

Observação: em estudos mais avançados de geometria analítica, mostra-se que elipses cujas equações apresentam o termo em xy são casos de elipses rotacionadas de um certo ângulo θ, como mostra a Figura 27, construída com o auxílio do GeoGebra.

Figura 27: Esboço do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

4.8 Lista de Exercícios Propostos ([5], [6], [8], [9] e [10])

Nesta seção propomos alguns exercícios sobre elipse, apresentando ainda suas respectivas respostas.

1 - Utilizando a definição, obtenha uma equação da elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede 2a, em cada um dos seguintes casos:

(a) $F_1(0; -1)$ e $F_2(0; 1)$ e $2a = 6$; Resposta: $9x^2 + 8y^2 - 72 = 0$

(b) $F_1(-1; -1)$ e $F_2(0; 0)$ e $2a = 2\sqrt{2}$; Resposta: $7x^2 + 7y^2 - 2xy + 6x + 6y - 9 = 0 = 0$

(c) $F_1(2; 1)$ e $F_2(4; 1)$ e $2a = 4$; Resposta: $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 19 = 0$

(d) $F_1(-1; -1)$ e $F_2(1; 1)$ e $2a = 4$; Resposta: $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$

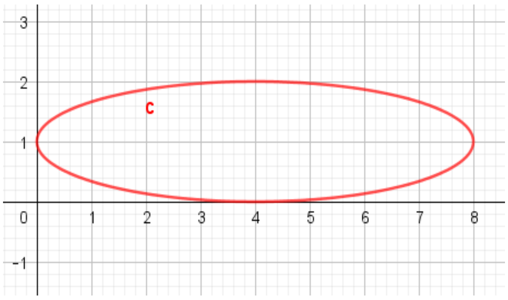
2 - Calcule a distância focal da elipse $4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 1$.

Resposta: $2c = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3 - Esboce o gráfico da elipse $\frac{(x-4)^2}{16} + (y-1)^2 = 1$.

Resposta: Figura 28

Figura 28: Esboço do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Qual a equação da elipse de vértices $V_1(0; 5)$ e $V_2(0; -5)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é 3?

Resposta: $\frac{y^2}{25} + \frac{4x^2}{9} = 1$

5 - O eixo maior de uma elipse de centro na origem está contido no eixo OX. Sabendo que o comprimento do eixo menor é 6 e a distância focal é 10, determine a equação da elipse.

Resposta: $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

6 - A equação de uma elipse é $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$. Sabendo-se que a elipse passa pelos pontos A(2; 1) e B($\sqrt{2}$; 2), determine p e q.

Resposta: $p = \frac{\sqrt{42}}{3}$ e $q = \sqrt{7}$

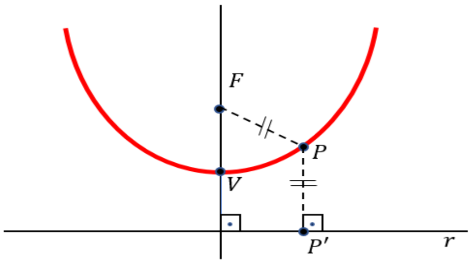
5 A PARÁBOLA

5.1 Definição

De acordo com [10], dados um ponto F e uma reta r de um plano, com $F \notin r$, chamamos de Parábola (Figura 29) ao lugar geométrico dos pontos P, tais que:

$$d(P, F) = d(P, r)$$

Figura 29: A Parábola

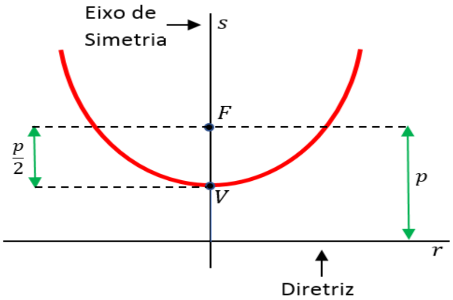


Fonte: Elaborada pelo autor

5.2 Elementos da Parábola

Vamos definir os elementos da parábola, tomando como referência a Figura 30, representada abaixo:

Figura 30: Elementos da Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor

F → é o foco da parábola;

r → é a reta diretriz da parábola;

p → é o parâmetro da parábola;

s → é o eixo de simetria da parábola (s passa pelo foco e é perpendicular à diretriz).

Observação: a distância entre o foco e a diretriz é igual $|p|$.

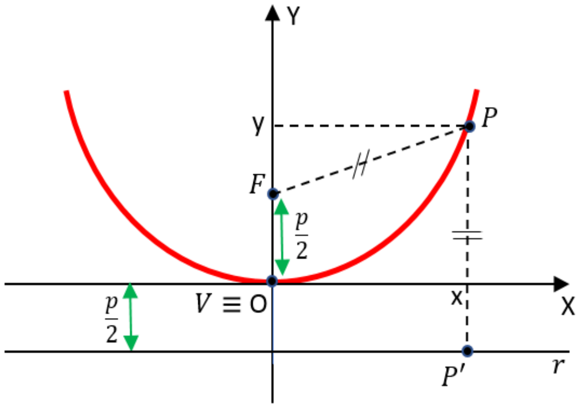
5.3 Equação da Parábola Centrada na Origem

Estudaremos dois casos – parábolas com eixo de simetria verticais e parábolas com eixo de simetria horizontais.

5.3.1 Parábola com Eixo de Simetria Vertical

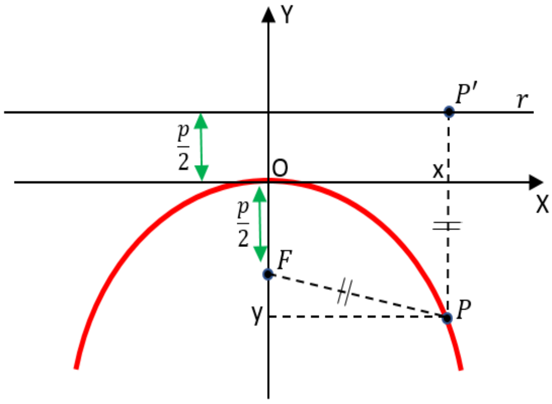
A parábola possui eixo de simetria coincidindo com o eixo Oy (Figuras 31 e 32).

Figura 31: Parábola Centrada na Origem – Concavidade para Cima



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 32: Parábola Centrada na Origem – Concavidade para Baixo



Fonte: Elaborada pelo autor

Com base nas Figuras 31 e 32, acima, concluímos que as coordenadas do foco F e a equação da diretriz r são dados por:

$$\begin{cases} F\left(0;\ \pm\frac{p}{2}\right) \\ \quad e \\ r: y = \mp\frac{p}{2} \end{cases}$$

Para determinarmos a equação da parábola vamos impor a definição, tomando, sem perda de generalidade, a Figura 31 como referência:

$$d(P,F) = d(P,r)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = |y - \left(-\frac{p}{2}\right)|$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2}]^2 = |y + \frac{p}{2}|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4} = y^2 + yp + \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2yp$$

Portanto: $x^2 = 2py$

Como podemos observar nas Figuras 31 e 32, as parábolas com eixo de simetria vertical possuem concavidades voltadas para cima ou para baixo. Essa característica pode ser determinada pela análise de sinal do parâmetro p, que é um número real diferente de zero.

$$x^2 = 2py > 0 \Rightarrow \begin{cases} p > 0 \; e \; y > 0 \\ ou \\ p < 0 \; e \; y < 0 \end{cases}$$

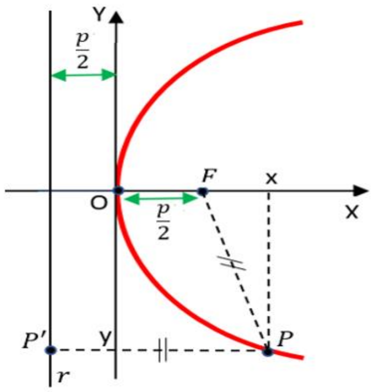
Concluímos que se p é positivo a concavidade da parábola será voltada para cima, e se p é negativo a concavidade será voltada para baixo.

Observação: consideramos $p \neq 0$, pois $p = 0 \Rightarrow x = y = 0$, e curva se resumiria à origem do sistema (0; 0).

5.3.2 Parábola com Eixo de Simetria Horizontal

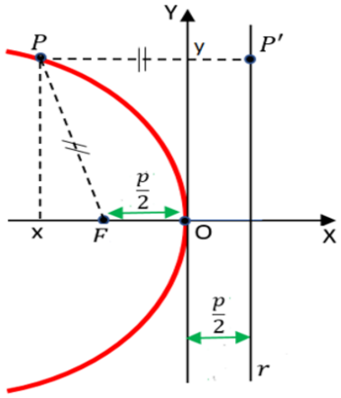
A parábola possui eixo de simetria coincidindo com o eixo Ox.

Figura 33: Parábola com Concavidade para a Direita



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 34: Parábola com Concavidade para Esquerda



Fonte: Elaborada pelo autor

Com base nas Figuras 33 e 34, acima, concluímos que as coordenadas do foco F e a equação da diretriz r são dados por:

$$\begin{cases} F\left(\pm\dfrac{p}{2};0\right) \\ e \\ r: x = \mp\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

Para equacionar a parábola, vamos impor a definição, usando as coordenadas parábola da figura 33, assim:

$$d(P,F) = d(P,r)$$

$\Rightarrow \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + (y-0)^2} = |x - \left(-\frac{p}{2}\right)|$

$\Leftrightarrow [\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + (y-0)^2}]^2 = |x + \frac{p}{2}|^2$

$\Leftrightarrow x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$

$\Leftrightarrow y^2 = 2xp$

Portanto: $y^2 = 2px$

Como podemos observar nas Figuras 33 e 34, as parábolas com eixo de simetria horizontal possuem concavidades voltadas para a direita ou para a esquerda. Essa característica também pode ser determinada pela análise de sinal do parâmetro p.

$$2px \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \; e \; x \geq 0 \\ ou \\ p < 0 \; e \; x \leq 0 \end{cases}$$

Concluímos então, que se p é positivo a concavidade da parábola será voltada para a direita, e se p é negativo a concavidade será voltada para a esquerda.

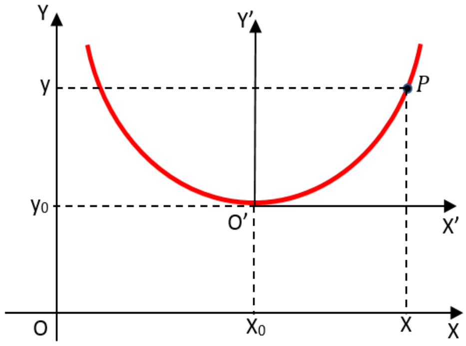
Observação: $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = +\sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$, que são, respectivamente, os ramos positivo e negativo de parábolas horizontais com vértice na origem.

5.4 Equação da Parábola Centrada Fora da Origem

5.4.1 Parábola com Eixo de Simetria Vertical

Sejam (x_0; y_0) e (x'_0; y'_0) as coordenadas do vértice da parábola da Figura 35, nos sistemas xOy e x'O'y', com as características já citadas anteriormente (capítulo 4).

Figura 35: Parábola Centrada Fora da Origem – Eixo Vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

Sabemos que a equação da parábola no sistema x'O'y' é dada por:

$$x'^2 = 2y'p$$

Logo, aplicando as equações de translação dos eixos ($x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$), obtemos a equação desejada.

Portanto: $(x - x_0)^2 = 2(y - y_0)p$

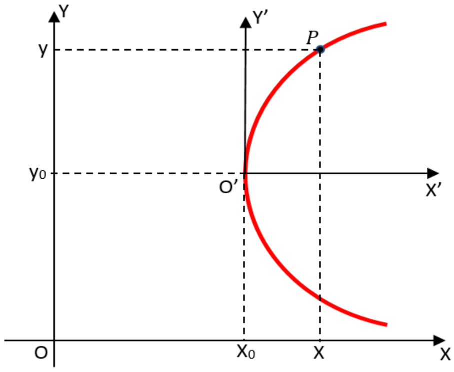
Neste caso, para determinarmos as coordenadas do foco F e a equação da diretriz r, devemos levar em consideração as translações horizontais e verticais sofridas, ao migrarmos do sistema x'O'y' para o xOy, obtendo-se assim:

$$\begin{cases} F\left(x_0; y_0 + \dfrac{p}{2}\right) \\ e \\ r: y = y_0 - \dfrac{p}{2} \end{cases}$$

5.4.2 Parábola com Eixo de Simetria Horizontal

Para obtermos a equação da parábola cujo eixo de simetria é horizontal (Figura 36), procedemos de forma análoga ao item anterior.

Figura 36: Parábola Centrada Fora da Origem – Eixo Horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, substituindo as fórmulas de translação dos eixos em $y^2 = 2xp$, obtemos a equação desejada:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Neste caso, para determinarmos as coordenadas do foco F e a equação da diretriz r, devemos, novamente, considerar a translação dos eixos, obtendo o seguinte:

$$\begin{cases} F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right) \\ e \\ r: x = x_0 - \frac{p}{2} \end{cases}$$

5.5 Lista de Exercícios Resolvidos ([5], [6], [8], [9] e [10])

Nesta seção apresentaremos alguns exercícios resolvidos sobre parábola, usando, em alguns destes o software Geogebra com a finalidade principal de esboçar os gráficos da referida cônica.

1 - Dada a equação da parábola Ψ: $(x-6)^2 = 8(y-3)$, determine:

(a) As coordenadas do vértice;

(b) As coordenadas do foco;

(c); A equação da diretriz;

(d) Esboce gráfico de Ψ.

Solução:

(a) As coordenadas do vértice são:

$x_{Vértice} = x_0 \Rightarrow x_{vértice} = 6$

$y_{Vértice} = y_0 \Rightarrow y_{vértice} = 3$

Portanto, V(6; 3).

(b) As coordenadas do foco são:

$$x_{Foco} = x_0 \Rightarrow x_{Foco} = 6$$

$$y_{Foco} = y_0 + \frac{p}{2} \Rightarrow y_{Foco} = 3 + \frac{4}{2} \Rightarrow y_{Foco} = 3 + 2 \therefore y_{Foco} = 5$$

Portanto, F(6; 5).

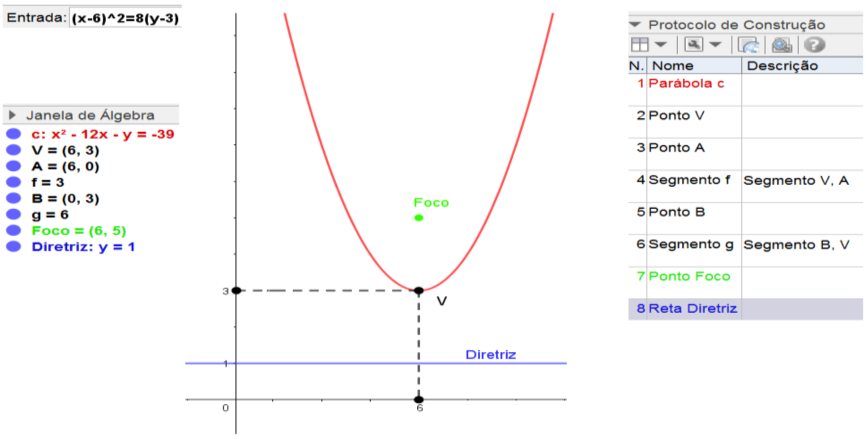
(c) A equação da diretriz é dada por:

$$y = y_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow y = 3 - \frac{4}{2} \Rightarrow y = 3 - 2 \therefore y = 1$$

Portanto, a diretriz é a reta y = 1.

(d) Para esboçar o gráfico, vamos fazer uso do GeoGebra. Neste caso, precisamos inserir no campo entrada, a equação da parábola, como mostra a Figura 37.

Figura 37: Construção do Gráfico



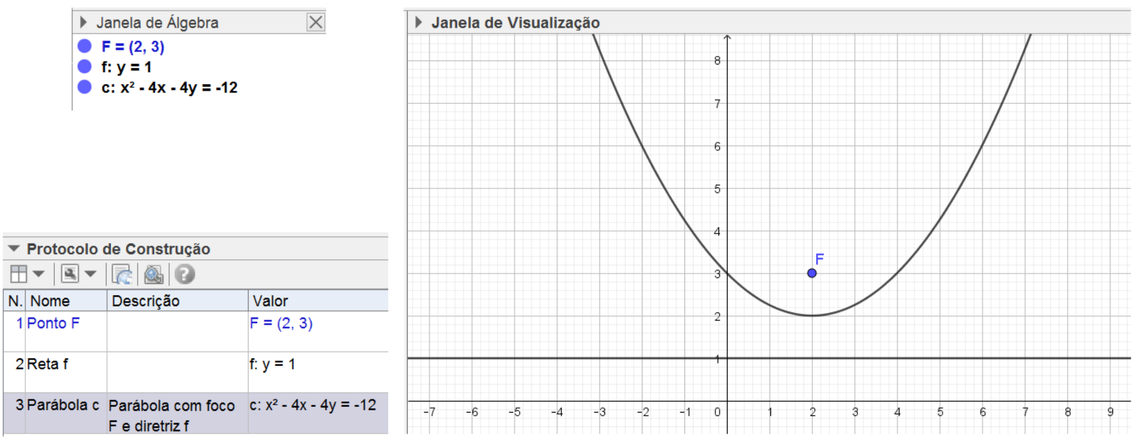
Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Obtenha a equação da parábola de foco F(2; 3) e diretriz d: y = 1.

1ª Solução:

Vamos, primeiramente, esboçar o gráfico dessa parábola (Figura 38) usando o GeoGebra.

Figura 38: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, podemos observar que seu tanto na janela de álgebra, quanto no protocolo de construção que a equação da parábola é dada por: $x^2 - 4x - 4y = -12$

Portanto, a equação desejada é:

$$x^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

2ª Solução:

Aplicando a definição – Seja P(x; y) um ponto qualquer da parábola, então:

$d(P,F) = d(P,\text{d}) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = y - 1$

$\Rightarrow (\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2})^2 = (y-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (y-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-1)^2 - (y-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = [(y-1) + (y-3)].[(y-1) - (y-3)]$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = (2y-4).2$

Portanto a equação da parábola é: $(x-2)^2 = 4(y-3)$

3 - Obter uma equação da parábola $\mathcal{P}$, de foco F(3; 5) e cuja diretriz é r: y – 3 = 0.

1ª Solução:

Uma equação da parábola $\mathcal{P}$, pode ser obtida, impondo a definição a um ponto genérico P(x, y), pertencente a ela, então:

$d(P,F) = d(P,r)$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = |y-3|$

$\Leftrightarrow [\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}]^2 = |y-3|^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = (y-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = (y-3)^2 - (y-5)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = [(y-3) + (y-5)].[(y-3) - (y-5)]$

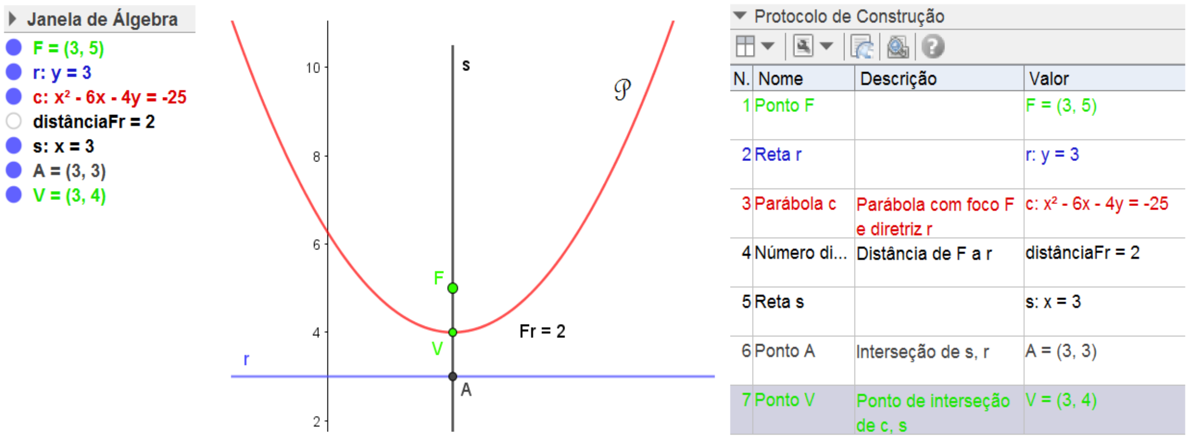
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = (2y-8).2 = 4.(y-4)$

Portanto, a equação da parábola é $(x-3)^2 = 4.(y-4)$.

2ª Solução:

Usando os dados do problema e, com o auxílio do GeoGebra, vamos construir a parábola e obter assim, sua equação, como mostra a Figura 39.

Figura 39: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

Observamos na janela de álgebra da Figura 39, que o GeoGebra retornou a equação "c: $x^2 - 6x - 4y = -25$". Tal equação é equivalente àquela apresentada na 1ª solução, como iremos demonstrar no exercício 4, a seguir.

4 - Mostre que as equações $(x-3)^2 = 4.(y-4)$ e $x^2 - 6x - 4y = -25$ representam a mesma parábola.

Solução:

Chamando a equação $(x-3)^2 = 4.(y-4)$ de (1) e $x^2 - 6x - 4y = -25$ de (2), temos o seguinte: 1ª parte: (1) → (2)

Desenvolvendo ambos os membros da equação (1), temos o seguinte:

$x^2 - 6x + 9 = 4y - 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4y = -25$

2ª parte: (2) → (1)

Na equação (2), isolando os termos dependentes de x e completando o quadrado, temos o seguinte:

$x^2 - 6x - 4y = -25$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4y = -25$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x = 4y - 25$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 4y - 25 + 9$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4y - 16$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4(y-4)$

Portanto as equações (1) e (2) são equivalentes.

5 - Determinar o foco, a equação da diretriz e o gráfico das parábolas:

(a) $x^2 = 8y$

(b) $y^2 = -2x$

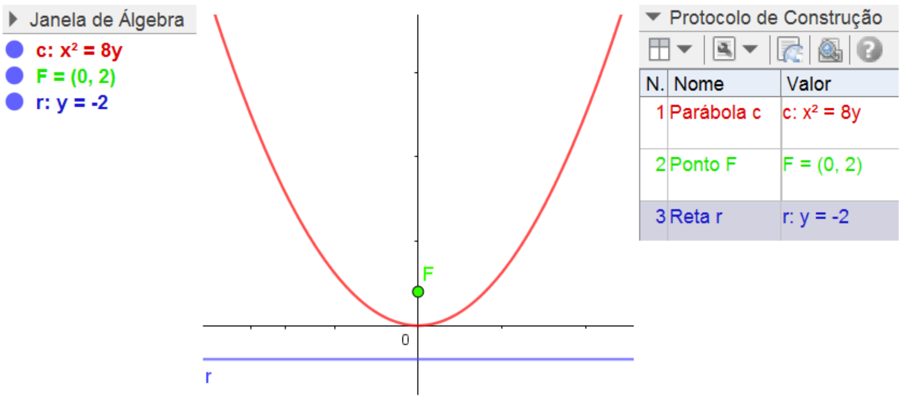
Solução:

(a) A equação é da forma $x^2 = 2py$, logo: $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 2$

Portanto, o foco é F(0, 2) e a diretriz é y = - 2.

Usando o Geogebra, obtemos o gráfico da Figura 40:

Figura 40: Construção do Gráfico



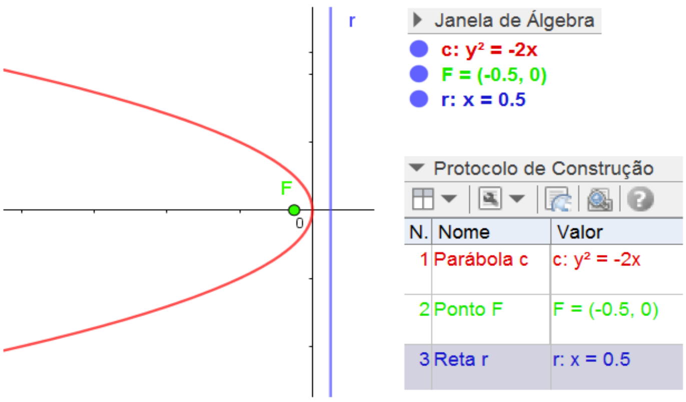
Fonte: Elaborada pelo autor

(b) A equação é da forma $y^2 = 2px$, logo: $2p = -2 \Leftrightarrow p = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$

Portanto, o foco é F($-\frac{1}{2}$, 0) e a diretriz é y = $\frac{1}{2}$.

Usando o Geogebra, obtemos o gráfico da Figura 41:

Figura 41: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

6 - Dada a parábola $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$, determinar:

(a) O vértice;

(b) O foco;

(c) A equação da diretriz;

(d) Um esboço do gráfico.

Solução:

Vamos, inicialmente, isolar os termos em y na equação dada e completar o quadrado:

$y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y = 8x - 1$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 = 8x - 1 + 9$

$\Leftrightarrow (y+3)^2 = 8x + 8$

$\Leftrightarrow (y+3)^2 = 8(x+1)$

Portanto, $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+3)^2 = 8(x+1)$, logo:

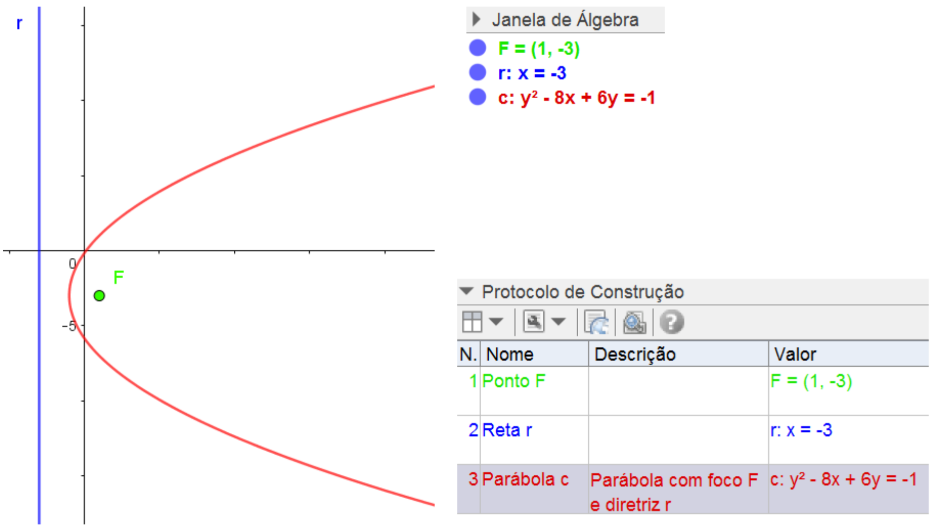
(a) O vértice é V(-1; -3);

(b) O foco é F(1; -3);

(c) A equação da diretriz é x = -3;

(d) Um esboço do gráfico, pode ser obtido usando o GeoGebra, como mostra a Figura 42.

Figura 42: Construção do Gráfico



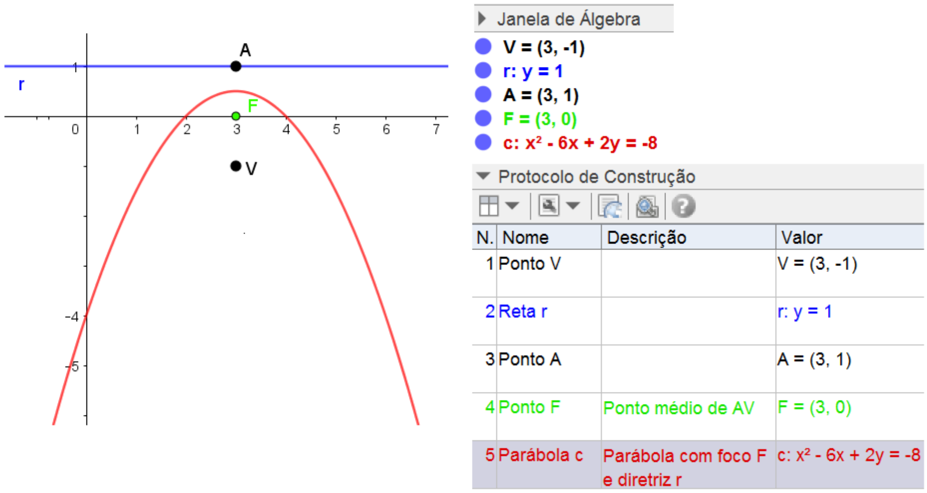
Fonte: Elaborada pelo autor

7 - Determinar a equação da parábola de vértice V(3; -1), sabendo que r: y – 1 = 0 é a equação de sua diretriz.

Solução:

Apresentaremos a solução desse exercício, usando exclusivamente o GeoGebra.

Figura 43: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

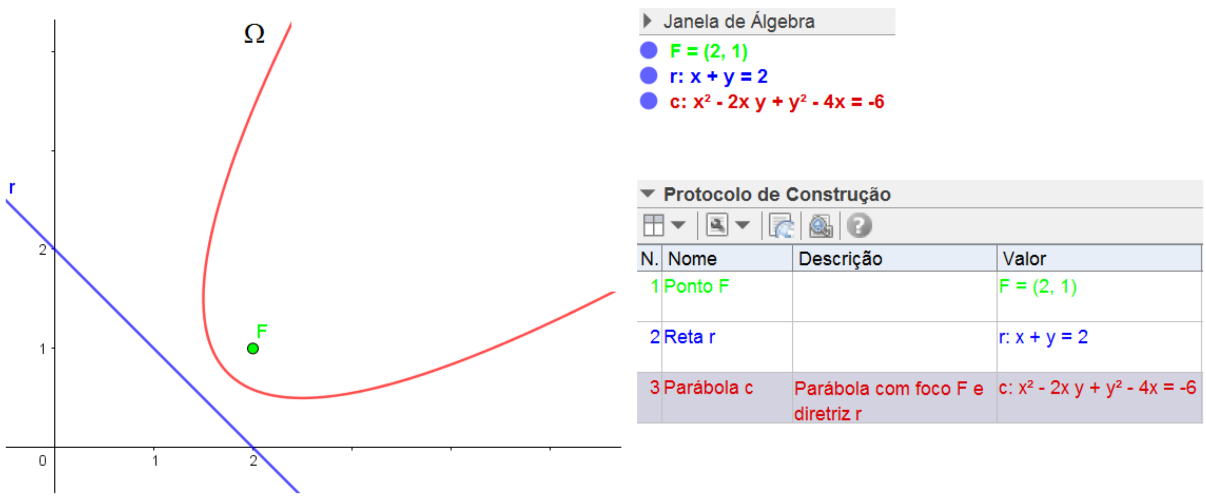
Portanto, a equação da parábola é $x^2 - 6x + 2y = -8$, como mostra a Figura 43.

8 - Obter uma equação da parábola Ω, de foco F(2; 1), cuja diretriz é r: x + y – 2 = 0.

1ª Solução:

Vamos obter o gráfico fazendo uso do GeoGebra.

Figura 44: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

Da janela de álgebra do GeoGebra, na Figura 44, podemos concluir que a equação da parábola é, então, Ω: $x^2 - 2xy + y^2 - 4x = -6$.

Observação: O gráfico acima representado (Figura 44), nos mostra uma parábola, cujo eixo de simetria é oblíquo. Em alguns cursos de graduação, na disciplina geometria analítica, mostra-se que parábolas cujas equações apresentam o termo em xy são casos de parábolas rotacionadas de um certo ângulo θ.

2ª Solução:

Uma equação da parábola Ω, pode ser obtida, impondo a definição a um ponto genérico P(x, y), pertencente a ela, então:

$d(P,F) = d(P,r)$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow [\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}]^2 = (\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}})^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (\frac{x+y-2}{\sqrt{2}})^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2+y^2+4+2xy-4x-4y}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 - 4y + 2 = x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 6 = 0$

Portanto, a equação da parábola é $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 6 = 0$.

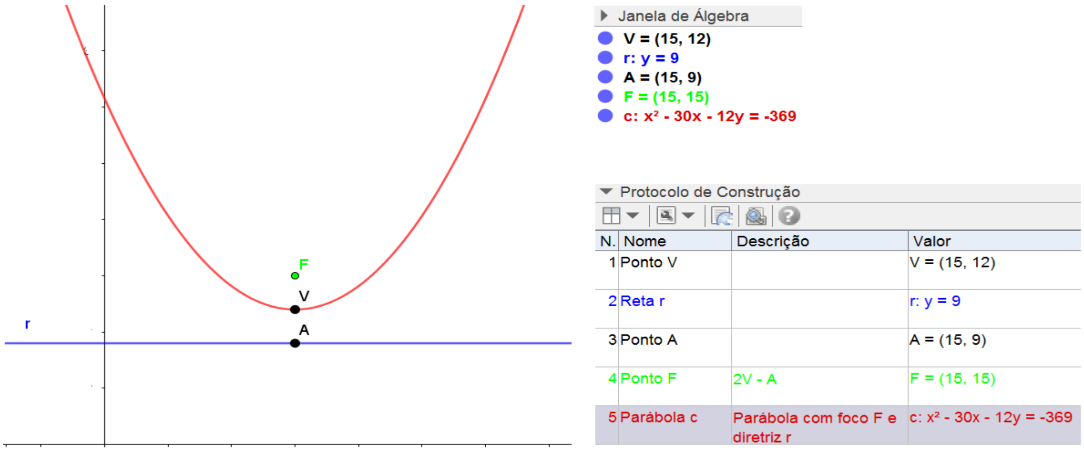
5.6 Lista de Exercícios Propostos ([5], [6], [8], [9] e [10])

Nesta seção propomos alguns exercícios sobre parábola, apresentando ainda suas respectivas respostas.

1 - Utilizando GeoGebra, obtenha uma equação da parábola $\mathcal{P}$, sabendo que seu vértice é V(15,12) e sua diretriz é r: y – 9 = 0.

Resposta: utilizando o GeoGebra, obtemos a resposta da Figura 45.

Figura 45: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Uma parábola Ψ, tem equação $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{5}{2}$, Pede-se:

(a) Escrever a equação de Ψ sob a forma reduzida;

(b) O Foco de Ψ;

(c) O vértice de Ψ;

(d) Um esboço do gráfico de Ψ.

Resposta:

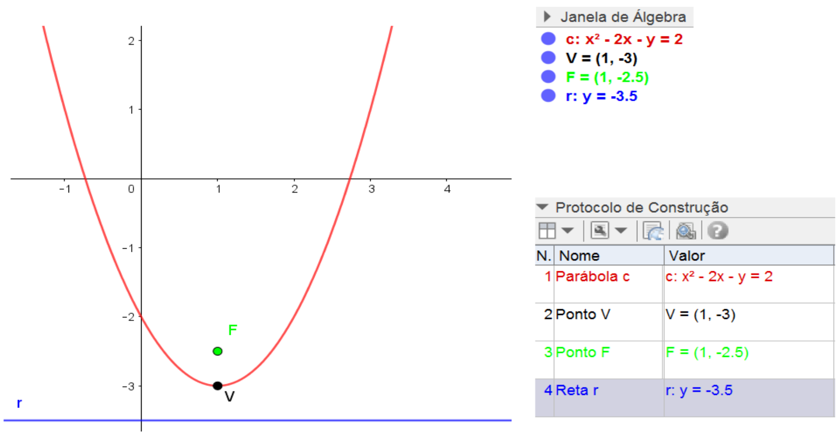
(a) $(x-1)^2 = 2(y+3)$

(b) F$(1; -\frac{5}{2})$

(c) V(1; -3);

(d) Com o auxílio do GeoGebra, o esboço do gráfico (Figura 46) apresenta a seguinte configuração:

Figura 46: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Um arquiteto precisa fazer numa construção um arco parabólico que tenha 3m de altura e 4m de largura na base. O vértice da parábola está no topo do arco.

(a) A que altura, sobre a base, o arco terá 2m de largura?

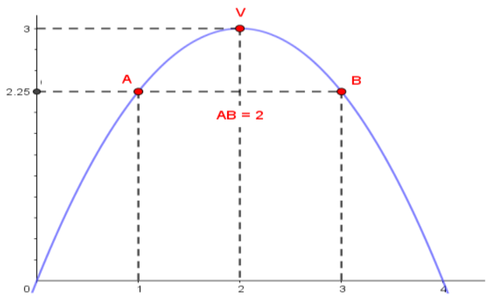
(b) Faça um desenho desse arco.

Resposta:

(a) A 2,25m da base;

(b) Figura 47.

Figura 47: Arco Parabólico



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Determinar a equação da parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox, o foco é F(5; 3) e o vértice é V(2; 3).

Resposta: $(y-3)^2 = 12(x-2)$.

5 - Seja V(h; k) o vértice da parábola de equação $x^2 - 4x - 4y + 12 = 0$. A reta de equação y = 3 intercepta a parábola nos pontos A e B. Determine a área do triângulo VAB.

Resposta: Área = 2.

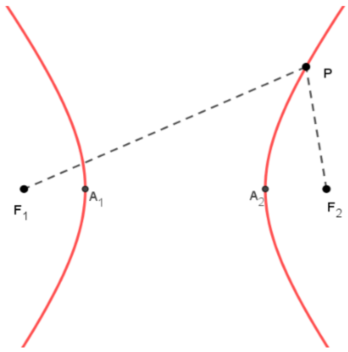
6 A HIPÉRBOLE

6.1 Definição

De acordo com [10], dados dois pontos fixos F_1 e F_2, chamamos de hipérbole (Figura 48) ao lugar geométrico dos pontos P, tais que:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = d(A_1,A_2), \quad \text{onde } d(A_1,A_2) < d(F_1,F_2).$$

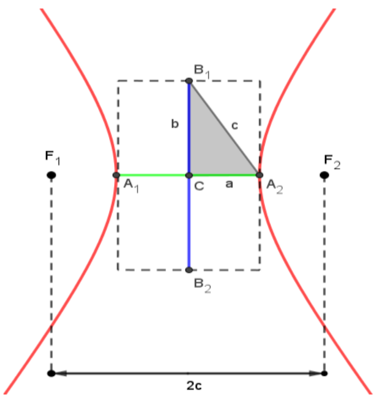
Figura 48: A Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

6.2 Elementos da Hipérbole

Figura 49: Elementos da Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

F_1 e F_2 → são os focos;

A_1 e A_2 → são os vértices;

C → é o centro da hipérbole;

$\overline{A_1A_2}$ → é o eixo real, também chamado eixo transverso;

$\overline{B_1B_2}$ → é o eixo imaginário;

$d(F_1, F_2) = 2c$ → é a distância focal;

$d(A_1\,, A_2) = 2a$;

$d(B_1\,, B_2) = 2b$.

e = $\frac{c}{a}$ → é a excentricidade.

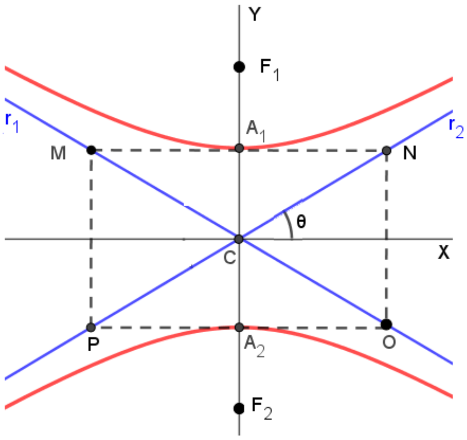
6.3 Relação Fundamental da Hipérbole

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo B_1CA_2 da Figura 49, obtemos a relação fundamental da hipérbole:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

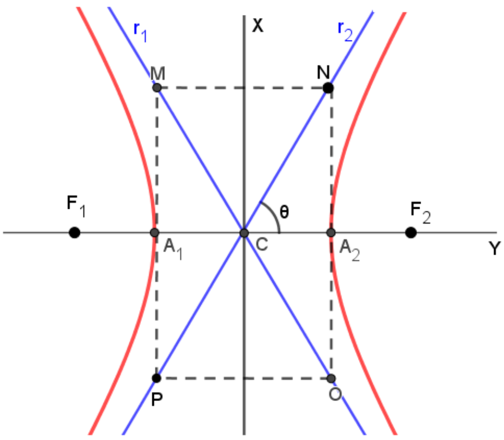
6.4 Assíntotas da Hipérbole

Figura 50: Assíntotas da Hipérbole – Eixo Real Vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 51: Assíntotas da Hipérbole – Eixo Real Horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo [6], chamam-se ***retângulos referência da hipérbole*** os retângulos MNOP das Figuras 50 e 51, cujo o centro é o ponto C. As retas r_1 e r_2 são as assíntotas da hipérbole, que possuem coeficientes angulares iguais à tangente de θ, e coeficientes lineares iguais a zero, portanto, suas equações reduzidas são do tipo $y = \pm(tg\theta).x$, ou seja:

$$\begin{cases} r_1:\ y = -\frac{a}{b} \\ r_2:\ y = +\frac{a}{b} \end{cases} \rightarrow \text{ Para hipérboles do tipo da figura 50;}$$

$$\begin{cases} r_1:\ y = -\frac{b}{a} \\ r_2:\ y = +\frac{b}{a} \end{cases} \rightarrow \text{ Para hipérboles do tipo da figura 51.}$$

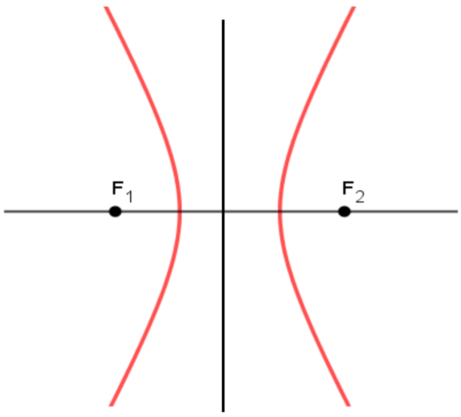
6.5 Equação da Hipérbole Centrada na Origem

Estudaremos dois casos – hipérbole com eixo real horizontal e hipérbole com eixo real vertical.

6.5.1 Hipérbole com Eixo Real Horizontal

A hipérbole cujo eixo real é horizontal, possui a configuração da Figura 52.

Figura 52: Hipérbole com Eixo Real Horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor

A hipérbole está centrada na origem e seu eixo real é horizontal, logo seus vértices pertencem ao eixo x, e tem coordenadas $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico pertencente a hipérbole, então:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d(F_1, F_2) = 2a$$
$$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

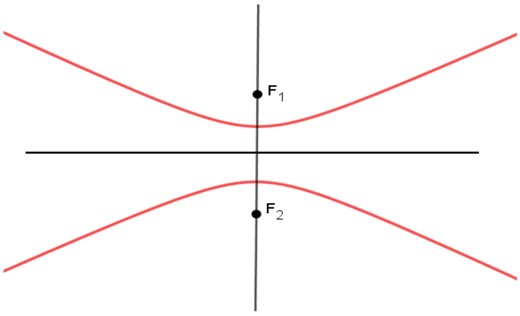
Quadrando ambos os membros e efetuando-se simplificações semelhantes àquelas, já efetuadas anteriormente, obteremos a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6.5.2 Hipérbole com Eixo Real Vertical

A hipérbole cujo eixo real é vertical, possui a configuração da Figura 53.

Figura 53: Hipérbole com Eixo Real Vertical



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesta configuração a hipérbole está centrada na origem e seu eixo real é vertical, logo seus vértices pertencem ao eixo y, e tem coordenadas $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$, portanto, se $P(x, y)$ pertence a hipérbole, então:

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right|=2a$$

Que resulta na seguinte equação:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

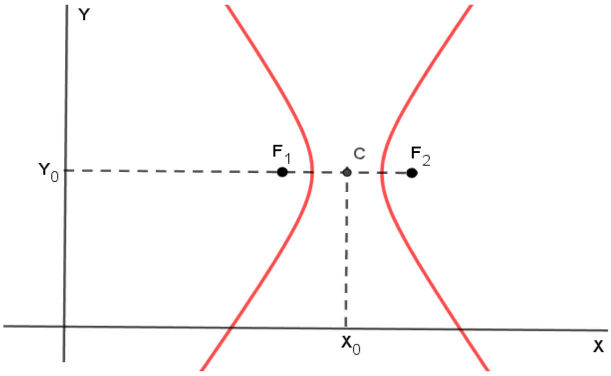
6.6 Equação da Hipérbole Centrada Fora da Origem

Estudaremos dois casos – hipérbole com eixo real horizontal e hipérbole com eixo real vertical.

6.6.1 Hipérbole com Eixo Real Horizontal

A hipérbole cujo eixo real é horizontal, possui a configuração da Figura 54.

Figura 54: Hipérbole com Eixo Real Horizontal – Centro Fora da Origem

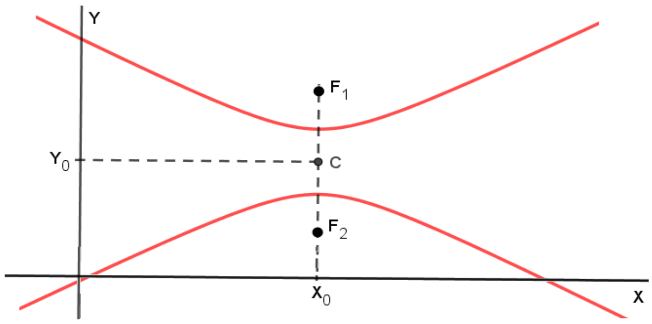


Fonte: Elaborada pelo autor

6.6.2 Hipérbole com Eixo Real Vertical

A hipérbole cujo eixo real é vertical, possui a configuração da Figura 55.

Figura 55: Hipérbole com Eixo Real vertical – Centro Fora da Origem



Fonte: Elaborada pelo autor

Substituindo as equações de translação de eixos nas equações apresentadas nos tópicos anteriores (6.5.1 e 6.5.2), obtemos, respectivamente:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

6.7 Lista de Exercícios Resolvidos ([5], [6], [8], [9] e [10])

Nesta seção apresentaremos alguns exercícios resolvidos sobre hipérbole, usando, em alguns destes o software Geogebra com a finalidade principal de esboçar os gráficos da referida cônica.

1 - Seja a hipérbole de focos $F_1(6; 2)$ e $F_2(-4; 2)$ e eixo real de comprimento 6.

(a) Obtenha a equação dessa hipérbole;

(b) Esboce o gráfico da hipérbole.

Solução:

(a) A hipérbole possui eixo transverso horizontal, logo sua equação é do tipo:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

O centro da hipérbole é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$

Logo C(1, 2), além disso, temos que:

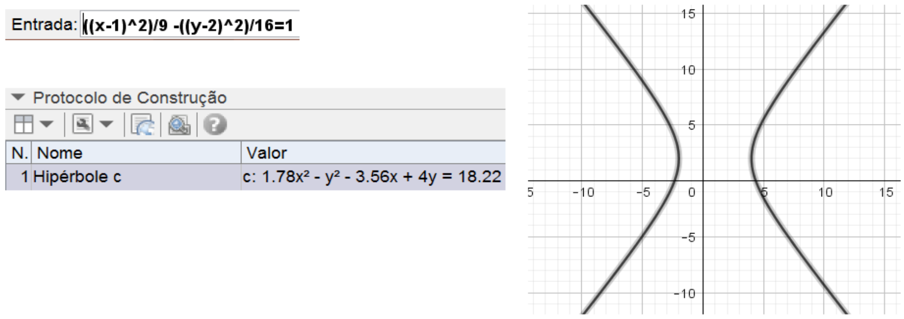
$$2c = d(F_1, F_2) \Rightarrow 2c = |6-(-4)| \Leftrightarrow c = 5 \text{ e } 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$$

Logo pela relação fundamental da hipérbole temos que $5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b = 4$, pois $b > 0$.

Portanto a equação da hipérbole é: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

(b) Esboço da hipérbole via GeoGebra (Figura 56):

Figura 56: construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

2 - Esboçar o gráfico da hipérbole ***C*** em cada um dos seguintes casos:

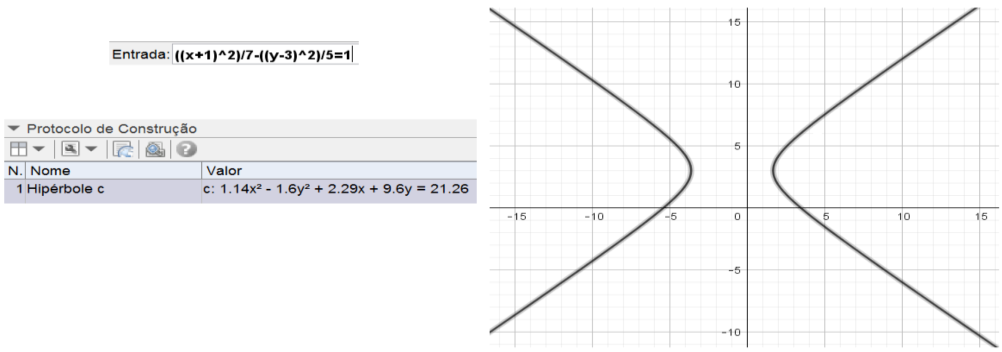
(a) ***C***: $\frac{(x+1)^2}{7} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1;$

(b) ***C***: $\frac{(y-12)^2}{10} - \frac{(x+7)^2}{3} = 1$

Solução:

(a) Figura 57 construída no GeoGebra:

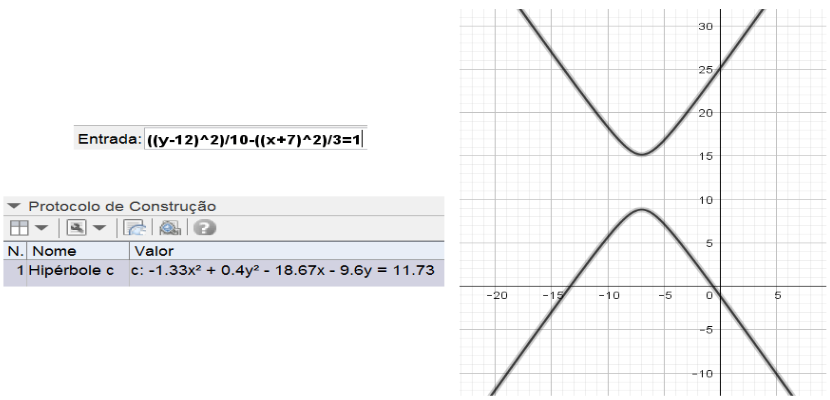
Figura 57: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

(b) Figura 58 construída no GeoGebra:

Figura 58: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

3 - Uma hipérbole $\boldsymbol{H}$ tem equação $x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 39 = 0$. Determinar sua equação sob a forma reduzida.

Solução:

Vamos completar quadrados em $\boldsymbol{H}$:

$x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 39 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x) - 4(y^2 - 6y) - 39 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - 1 - 4(y^2 - 6y + 9) + 36 - 39 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 4$

Portanto, a equação desejada é: $\frac{(x+1)^2}{4} - (y - 3)^2$.

4 - Seja a hipérbole de equação $9y^2 - 16x^2 = 144$. Determine:

(a) Os focos, os extremos dos eixos real e imaginário e a excentricidade;

(b) As intersecções da hipérbole com a reta de equação $2x - y = 0$.

Solução:

Vamos inicialmente expressar a equação da hipérbole na forma reduzida, dividindo todos os seus termos por 144:

$9y^2 - 16x^2 = 144$

$\Leftrightarrow \frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = \frac{144}{144}$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, que é a equação da hipérbole centrada na origem e focos no eixo y.

Logo comparando-a com $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, temos que:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$, pois $a > 0$;

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$, pois $b > 0$.

Usando a relação fundamental da hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, temos que:

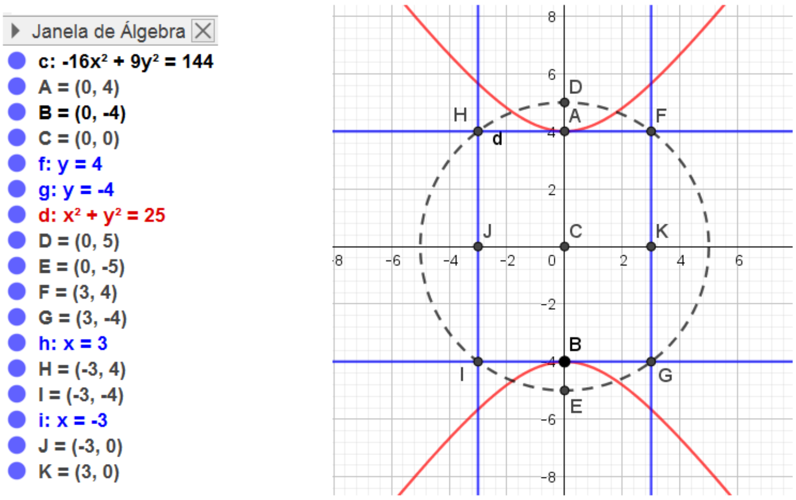
$c^2 = 4^2 + 3^2$

$\Rightarrow c^2 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow c = 5$, pois $(c > 0)$.

Vamos construir o esboço do gráfico com o auxílio do GeoGebra, apresentando nesta construção o retângulo referência da hipérbole e a sua circunferência circunscrita.

Figura 59: Construção do Gráfico: Parte 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 60: Construção do Gráfico: Parte 2

Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor
3	Ponto B	Ponto sobre c	B = (0, -4)
4	Ponto C	Ponto médio de AB	C = (0, 0)
5	Reta f		f: y = 4
6	Reta g		g: y = -4
7	Círculo d	Círculo com centro C e raio 5	d: x² + y² = 25
8	Ponto D	Interseção de d, EixoY	D = (0, 5)
9	Ponto E	Interseção de d, EixoY	E = (0, -5)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 61: Construção do Gráfico: Parte 3

10	Ponto F	Interseção de d, f	F = (3, 4)
11	Ponto G	Interseção de d, g	G = (3, -4)
12	Reta h	Reta F, G	h: x = 3
13	Ponto H	Interseção de d, f	H = (-3, 4)
14	Ponto I	Interseção de d, g	I = (-3, -4)
15	Reta i	Reta H, I	i: x = -3
16	Ponto J	Ponto médio de HI	J = (-3, 0)
17	Ponto K	Ponto médio de FG	K = (3, 0)

Fonte: Elaborada pelo autor

Das construções descritas nas Figuras 59, 60 e 61 concluímos o seguinte:

Focos: pontos D(0; 5) e E(0; -5);

Extremos do eixo real: pontos A(0; 4) e B(0; -4);

Extremos do eixo imaginário: pontos J(3; 0) e K(-3; 0);

Excentricidade: $e = \frac{5}{4}$

(b) As coordenadas dos pontos solicitados são as soluções do sistema de equações simultâneas:

$$\begin{cases} 9y^2 - 16x^2 = 144 & (1) \\ 2x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) obtemos: $y = 2x$ (3)

Substituindo (3) em (1), temos o seguinte:

$9(2x)^2 - 16x^2 = 144 \Leftrightarrow 36x^2 - 16x^2 = 144 \Leftrightarrow 20x^2 = 144$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ x_2 = -\frac{6\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{12\sqrt{5}}{5} \\ y_2 = -\frac{12\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Portanto, os pontos de intersecção entre a hipérbole e a reta são: $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}; \frac{12\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}; -\frac{12\sqrt{5}}{5}\right)$.

5 - Determinar a equação da hipérbole de vértices $A_1(1; -2)$ e $A_2(5; -2)$, sabendo que F(6; -2) é um de seus focos.

Solução:

O centro da hipérbole é ponto médio de $\overline{A_1A}$, logo C(3, -2), e também o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, logo o outro foco é $(0; -2)$.

Além disso, temos que:

$2c = d(F_1, F_2) \Rightarrow 2c = |6 - 0| \Leftrightarrow c = 3.$

$2a = d(A_1, A_2) \Leftrightarrow \Rightarrow 2a = |5 - 1| \Leftrightarrow a = 2.$

Então, pela relação fundamental da hipérbole temos que:

$3^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5}$, pois $b > 0$.

Portanto a equação da hipérbole é: $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$.

6 - Dada a hipérbole: $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$, determine as coordenadas:

(a) Do centro;

(b) Dos vértices;

(c) Dos focos.

Solução:

Vamos inicialmente expressar a equação da hipérbole na forma reduzida.

$y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 + 2y) - (x^2 + 2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 + 2y + 1) - 1 - (x^2 + 2x + 1) + 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 1$

Portanto, a hipérbole possui eixo real vertical, com $a = b = 1$.

Agora vamos calcular c:

$c^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$, pois $c > 0$.

(a) Coordenadas do centro: (-1; -1)

(b) Coordenadas dos vértices: $\begin{cases} (-1;\ -1+1) \\ \text{e} \\ (-1;\ -1-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1;\ 0) \\ \text{e} \\ (-1;\ -2) \end{cases}$

(c) Coordenadas dos focos: $\begin{cases} (-1;\ -1+\sqrt{2}) \\ \text{e} \\ (-1;\ -1-\sqrt{2}) \end{cases}$

7 - Uma hipérbole de centro na origem, eixo real de medida 6, eixo imaginário de medida 8 e focos sobre o eixo Ox. Determine:

(a) a equação da hipérbole;

(b) As coordenadas dos focos;

(c) As equações das assíntotas.

(d) Um esboço do gráfico da hipérbole destacando suas assíntotas.

Solução:

Dos dados do problema, temos o seguinte:

$2a = 6 \Leftrightarrow a = 3;\ \ 2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$

Como a hipérbole tem centro na origem, sua equação é: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(b) Para encontrar as coordenadas dos focos, usamos a relação fundamental da hipérbole:

$c^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow c = 5$, pois ($c > 0$).

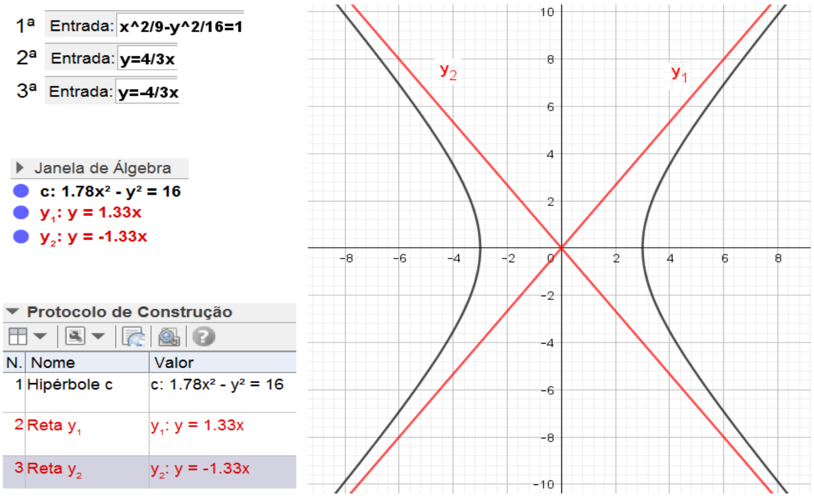
Portanto, os focos são: $F_1(-5; 0)$ e $F_2(5; 0)$.

(c) Sabemos que as assíntotas têm a forma $y = \pm\frac{b}{a}$

$$\text{Portanto: } \begin{cases} y_1 = \frac{4}{3}x \\ e \\ y_2 = -\frac{4}{3}x \end{cases}$$

(d) Vamos fazer o esboço do gráfico (Figura 62) usando o GeoGebra.

Figura 62: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

8 - Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2; 2)$ e $F_2(2; -2)$, cujo eixo imaginário mede $2\sqrt{7}$, e esboçar seu gráfico usando o GeoGebra.

Solução:

Vamos usar o GeoGebra para solucionar este exercício, apresentando, ainda um esboço do seu gráfico (Figuras 63, 64 e 65).

Sabemos que $2c = d(F_1, F_2)$, portanto:

$$2c = \sqrt{(-2-2)^2 + \left(2-(-2)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2c = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2c = \sqrt{2.16}$$

$$\Leftrightarrow\ 2c = 4\sqrt{2}$$

Logo: $c = 2\sqrt{2}$

Sabemos ainda, que $2b = 2\sqrt{7}$, logo $b = \sqrt{7}$.

Então, usando a relação fundamental, temos o seguinte:

$(2\sqrt{2})^2 = a^2 + (\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow 8 = a^2 + 7 \Rightarrow a = 1$, pois $a > 0$.

Figura 63: Construção do Gráfico: Parte 1

Janela de Álgebra

- A = (-2, 2)
- B = (2, -2)
- C = (0, 0)
- f: x + y = 0
- D = (-0.71, 0.71)
- E = (0.71, -0.71)
- c: -48x² + 128x y - 48y² = -112

Fonte: Elaborada pelo autor

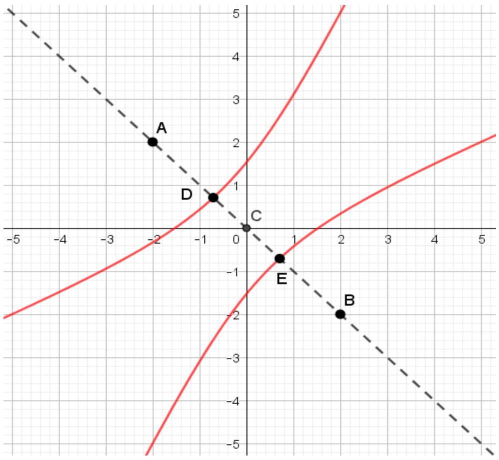
Figura 64: Construção do Gráfico: Parte 2

Protocolo de Construção

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		A = (-2, 2)
2	Ponto B		B = (2, -2)
3	Ponto C	Ponto médio de AB	C = (0, 0)
4	Reta f	Reta A, B	f: x + y = 0
5	Ponto D		D = (-0.71, 0.71)
6	Ponto E		E = (0.71, -0.71)
7	Hipérbole c	Hipérbole com focos A, B passando por D	c: -48x² + 128x y - 48y² = -112

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 65: Construção do Gráfico: Parte 3



Fonte: Elaborada pelo autor

6.8 Lista de Exercícios Propostos ([5], [6], [8], [9] e [10])

Nesta seção propomos alguns exercícios sobre hipérbole, apresentando ainda suas respectivas respostas.

1 - Qual a equação da hipérbole de excentricidade $e = \frac{5}{3}$, cujos focos são (-6; 0) e (14; 4)?

Resposta: $\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

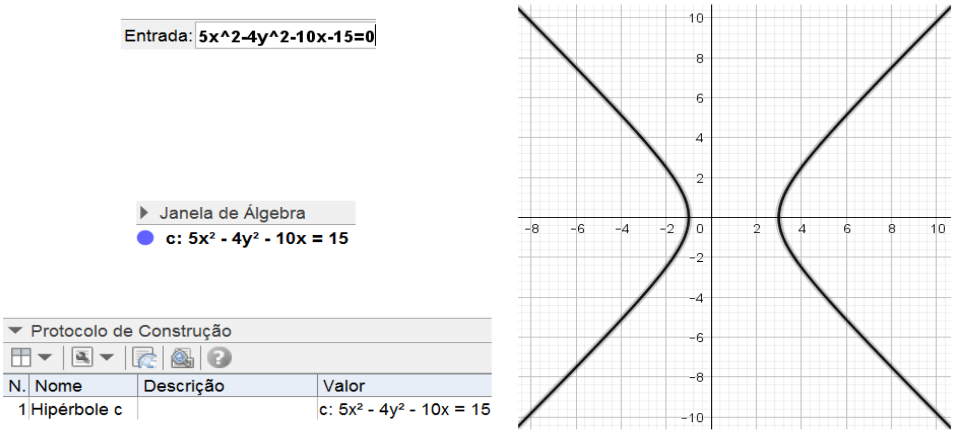
2 - A equação de uma hipérbole $\boldsymbol{H}$ é $x^2 - 2y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$. Escreva essa equação sob a forma reduzida e calcule sua excentricidade.

Resposta: $\frac{(x+1)^2}{2} - (y+1)^2 = 1$; $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3 - Represente graficamente a hipérbole de equação $5x^2 - 4y^2 - 10x - 15 = 0$.

Resposta: Figura 66.

Figura 66: Construção do Gráfico



Fonte: Elaborada pelo autor

4 - Encontre uma equação da hipérbole de focos (3; 2) e (9; 2), cujo eixo imaginário mede 4 unidades.

Resposta: $\frac{(x-6)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

5 - Explique por que, na definição de hipérbole, exige-se que $2a < 2c$.

Resposta:

Se $2a = 2c \Leftrightarrow a = c$, então teríamos uma parábola;

Se $2a > 2c \Leftrightarrow a > c$, então teríamos uma elipse.

6 - Explique o significado da excentricidade $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ na hipérbole.

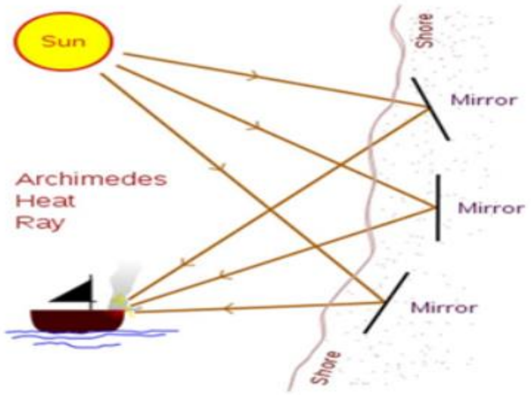
Resposta: Quanto menor a excentricidade da hipérbole, mais "fechada" ela será, ou seja, seus ramos estarão mais próximos do eixo focal.

7 A REFLETIVIDADE DAS CÔNICAS

Arquimedes é frequentemente considerado o maior matemático da antiguidade, tendo também conquistado grande notoriedade no campo da engenharia bélica. O historiador Luciano, em sua obra ***Hippias***, relata o papel fundamental de Arquimedes durante o cerco romano à Siracusa, na Segunda Guerra Púnica. Um episódio especial dessa grande resistência é creditado às incríveis armas construídas por ele, incluindo catapultas, a terrível mão de ferro, o canhão a vapor e, aquilo que ficou conhecido como o "Raio da Morte" ou "Raio de Calor" de Arquimedes, que consistia em um grande espelho parabólico, usado para concentrar os raio luminosos e direcioná-los às embarcações do exército romano (Figura 67), provocando incêndio e destruição das mesmas.

A catapulta e o espelho parabólico revelam o conhecimento e domínio das propriedades da parábola. Uma dessas propriedades é a reflexão – a especial propriedade das cônicas, que apresentaremos neste trabalho, segundo [29] e [30], devido à grandiosa relevância de suas aplicações.

Figura 67: Representação Artística dos Espelhos Parabólicos de Arquimedes



Fonte: adaptada de https://museudinamicointerdisciplinar.files.wordpress.com/2014/04/3.png

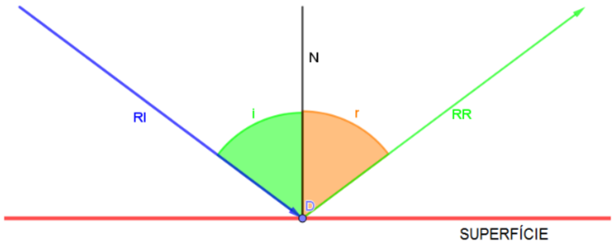
As cônicas são curvas possuidoras de propriedades que as tornam muito especiais, sobretudo na engenharia, onde a propriedade da reflexão, encontra muitas aplicações, como mostraremos no capítulo 8.

Segundo [38], as leis que regem o fenômeno da reflexão (Figura 68), denominas leis de Snell-Descartes são:

1) Primeira Lei: A reta normal (N) à superfície, o raio incidente (RI), e o raio refletido (RR) são coplanares;

2) Segunda Lei: o ângulo i, entre o raio incidente e a reta normal N tem mesma medida que o ângulo r, entre o raio refletido e a reta normal.

Figura 68: Lei de Snell - Descartes



Fonte: Elaborada pelo autor

Nas figuras 69, 70 e 71, temos que:

P é um ponto pertencente à cônica;

N é a reta normal à elipse no ponto P;

t é a reta tangente à elipse no ponto P;

RI é o raio incidente;

RR é o raio refletido;

i é o ângulo de incidência;

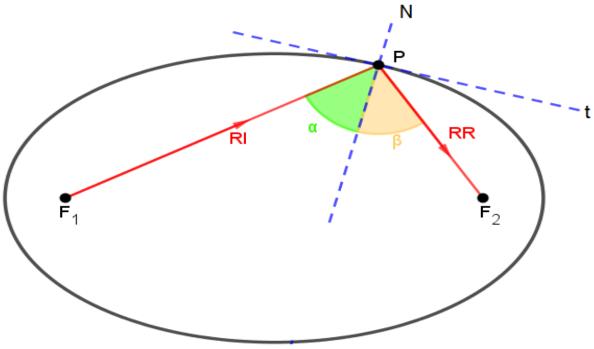
r é o ângulo de reflexão.

Portanto: $i = r$

7.1 A Reflexão em uma Superfície Elíptica

Segundo [35], qualquer raio luminoso ou onda sonora, cuja fonte esteja situada em um dos focos, terá seus raios refletidos pela elipse na direção do outro foco, conforme indicado na Figura 69, portanto $\alpha = \beta$.

Figura 69: Reflexão na Elipse



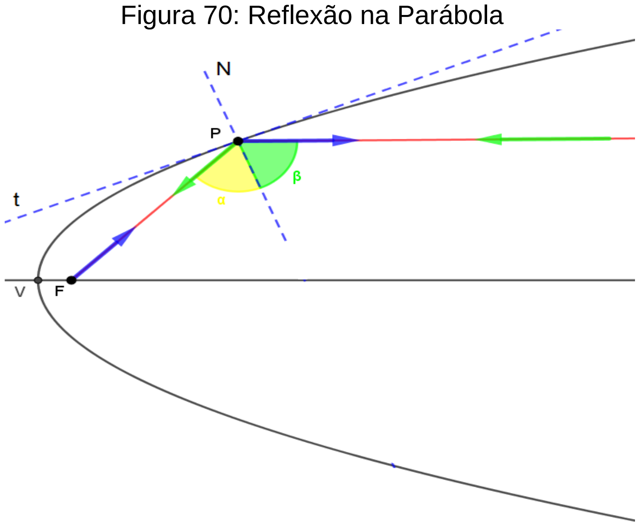
Fonte: Elaborada pelo autor

7.2 A Reflexão em uma Superfície Parabólica

A propriedade de destaque da parábola, segundo [35], é o fato de que todo raio luminoso ou onda sonora que incida sobre ela, paralelamente ao seu eixo, é refletido de modo a passar pelo foco da parábola (ver Figura 70), portanto $\alpha = \beta$.

O caminho dos raios ou onda não se altera quando se inverte o sentido de propagação, ou seja, qualquer raio ou onda que seja emitido do foco da parábola e que incida sobre a superfície parabólica, será refletido na direção segundo as retas paralelas ao eixo da parábola.

Figura 70: Reflexão na Parábola

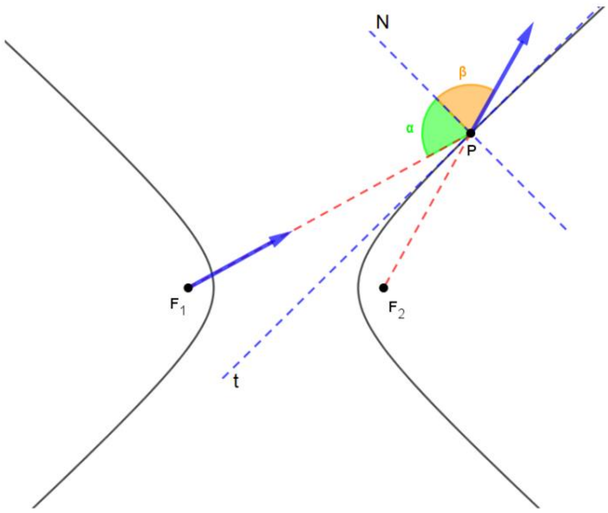


Fonte: Elaborada pelo autor

7.3 A Reflexão em uma Superfície Hiperbólica

Segundo [35], qualquer raio ou onda dirigidos a um dos focos da hipérbole (Figura 71), ao encontrar o ramo correspondente é refletido na direção do outro foco, portanto $\alpha = \beta$.

Figura 71: Reflexão na Hipérbole



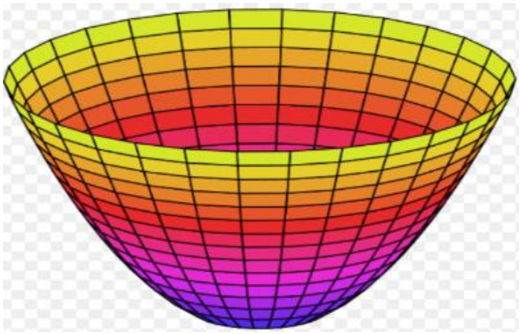
Fonte: Elaborada pelo autor

8 APLICAÇÕES TECNOLÓGICAS

Neste capítulo apresentamos algumas das várias aplicações tecnológicas das superfícies cônicas, as quais são baseadas fundamentalmente nas propriedades de reflexão da elipse, parábola e hipérbole, mostradas no capítulo 7.

Espelhos parabólicos são vastamente utilizados nessas aplicações. Esses espelhos são constituídos por ***paraboloides de revolução*** (Figura 72), que possuem a superfície interna espelhada.

Figura 72: O Parabolóide



Fonte: Adaptado de http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/12/Paraboloid_of_Revolution.svg/500px-Paraboloid_of_Revolution.svg.png

Nos dias atuais, ao ligarmos um aparelho de TV, sintonizando-o em certo canal (frequência), nos é perfeitamente possível ver imagens e ouvir sons transmitidos de todos os lugares do planeta.

Com a invenção da ***Antena Parabólica*** (Figura 73) e dos Satélites Geoestacionários foi possível receber e transmitir sinais de vídeo e áudio.

Essas antenas também possuem a forma de Parabolóide, cujos focos são comuns as parábolas que o formam.

Na instalação dessas antenas, direciona-se a concha refletora para a fonte de sinais e afixa-se o receptor da antena no foco do Parabolóide (concha da antena), para que todo o sinal incidente na concha seja refletido para o receptor, a fim de se otimizar a recepção.

Deve-se observar que as ondas recebidas pela antena parabólica vêm de fontes muito distantes, e por este motivo incidem de forma quase paralela ao eixo de simetria da antena, refletindo-se no foco da mesma, onde está posicionado o receptor da antena.

Figura 73: A Antena Parabólica

Fonte: http://1.bp.blogspot.com/-77x2Fu3p9RM/VjfVAMOAcHI/AAAAAAAAYOA/Q3OdbQTa-XY/s1600/1024px-EuroDishSBP_front.jpg

O princípio das antenas parabólicas também é aplicado à radioastronomia, onde o as ondas eletromagnéticas a serem captadas são provenientes de fenômenos astronômicos, como o colapso da matéria em um buraco negro ou supernovas. Estes fenômenos podem acontecer em regiões tão distantes do espaço que seriam impossíveis de serem captados no espectro visível da luz à olho nu.

Ainda como exemplos de aplicações de espelhos parabólicos, temos as ***Lanternas de uso doméstico*** (Figura 74) e os ***Faróis de Automóveis*** (Figura 75), nos quais, lâmpadas colocadas nos focos tem seus raios de luz refletidos pela superfície espelhada, projetando um feixe cilíndrico de luz.

Figura 74: A Lanterna

Fonte: Adaptada de https://www.rotaextrema.com.br/lanterna-jetbeam-ssr50-3650-lumens-p1606/

Figura 75: O Farol de Automóvel

Fonte: Adaptada de http://blogs.diariodonordeste.com.br/automovel/wp-content/uploads/2015/04/Mercedesswa.jpg

Fogão Solar (Figura 76) são espelhos parabólicos que quando iluminados pela luz do sol, concentram os raios luminosos em uma panela, aquecendo-a para o preparo de alimentos. Este tipo de fogão pode ser facilmente utilizado em áreas rurais ou de extrema pobreza. De maneira análoga, certos geradores de energia utilizam espelhos parabólicos para aquecer água sob pressão a centenas de graus celsius e movimentar turbinas geradoras de energia elétrica. Isto permite maior eficiência na produção energética.

Figura 76: O Fogão Solar

Fonte: https://ae01.alicdn.com/kf/HTB1wm5jLXXXXXbTXVXXq6xXFXXX7/50-cm-de-Largura-PET-Pel-cula-Reflexiva-Adesivos-Espelho-Chamin-Auto-adesivas-Prova-D-gua.jpg

Devido suas propriedades físicas, encontramos na engenharia, muitas aplicações do estudo das cônicas. Um exemplo disso são os cabos que sustentam algumas ***Pontes Suspensas*** (Figura 77). Neles o peso é distribuído com relação ao eixo horizontal formando assim uma parábola.

Figura 77: Os Arcos Parabólicos

Fonte: http://awacomercial.com.br/blog/wp-content/uploads/2016/10/estruturas-de-pontes-pensil.jpg

Na odontologia, além de espelhos côncavos, temos também, os **Refletores Odontológicos** (Figura 78), onde são utilizados espelhos elípticos. Esse tipo de refletor consiste num jogo de espelhos com a forma de um elipsoide, e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo da superfície espelhada. A luz da lâmpada, ao incidir sobre o espelho é refletida na direção do outro foco, concentrando, assim a iluminação em um ponto desejado.

Figura 78: Refletores Odontológicos

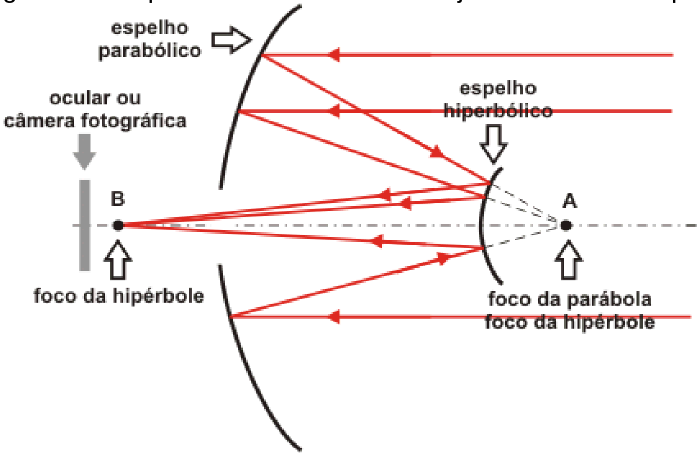
Fonte: https://st4.depositphotos.com/3001967/20334/v/600/depositphotos_203340940-stock-video-dental-assistant-adjusting-light-tool.jpg

Muito do que se desenvolveu no campo da astrofísica, se deve a uma outra aplicação das cônicas – o Telescópio Espacial Hubble (Figura 79) – o mais importante de todos os telescópios que já foram construídos no mundo segundo [37]. Isso porque ele fica no espaço, livre das interferências da atmosfera terrestre, o que lhe permite conseguir imagens precisas de lugares distantes do universo. A objetiva parabólica do telescópio recebe a luz proveniente do objeto e a direciona para seu foco, onde se encontra um espelho hiperbólico, que direciona as ondas luminosas de baixa intensidade para uma ocular ou câmera fotográfica, como mostra o esquema da Figura 80, facilitando a observação de objetos muito distantes, especialmente à distâncias astronômicas.

Figura 79: O Telescópio Hubble

Fonte: http://www.vidrariadelaboratorio.com.br/wp-content/uploads/2015/11/Hubble-em-orbita-1024x768.jpg

Figura 80: Esquema de Reflexão em Objetivas de Telescópios



Fonte: http://alfaconnection.pro.br/images/LUZ030309a.gif

Na arquitetura são várias as aplicações das cônicas como, por exemplo, temos O Grande Teatro Nacional (Figura 81), com sua ***Cobertura Elíptica***, situado em Beijing China.

Figura 81: O Grande Teatro Nacional em Beijing

Fonte: http://4.bp.blogspot.com/--hVwiNq3zZk/ULrv1-PvhdI/AAAAAAAAEHw/IMCv825pLOE/s1600/DSC_1506.JPG

Em Brasília, temos a Catedral Metropolitana de Nossa Senhora de Aparecida (Figura 82), com seus pilares em forma de ***Arcos Hiperbólicos***.

Figura 82: Arcos Parabólicos

Fonte: http://www.riial.org/wp-content/uploads/2016/05/brasiliacatedral-06.jpg

PROPOSTA DE ATIVIDADES

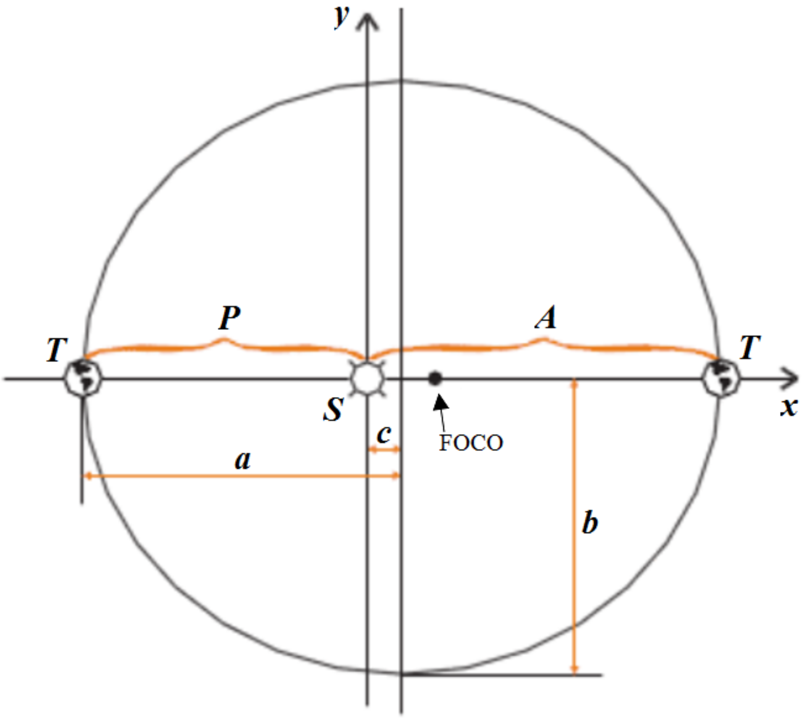
Apresentamos nesta seção, três atividades para uma possível intervenção em sala de aula, referentes à elipse, parábola e hipérbole. Essas atividades têm por objetivo conectar a teoria presente nos capítulos 4, 5 e 6 às propriedades e aplicações concernentes aos capítulos 7 e 8.

Atividade 1 (Elaborada pelo autor)

A figura abaixo (Figura 83) representa a Terra em sua órbita elíptica, em duas posições especiais, com o Sol ocupando um de seus focos. Na figura, ***P*** é a distância mínima (Periélio) da Terra ao Sol, e ***A***, a distância máxima (Afélio). Sabendo que $P = 147{,}1 \times 10^6$ km e que $A = 152{,}1 \times 10^6$ km, determine:

a) A o raio médio da órbita terrestre;
b) A excentricidade da órbita terrestre.

Figura 83: Órbita Terrestre



Fonte: Adaptada de http://rpm.org.br/cdrpm/77/7.html

Atividade 2 (Elaborada pelo autor)

Imagine a seguinte situação: uma antena parabólica foi desmontada e a haste suporte do receptor foi perdida. Para montá-la novamente, seu proprietário teve que mandar fabricar uma outra haste, e para isso, teve que informar seu comprimento (distância do vértice do Parabolóide ao foco), com a finalidade de posicionar o receptor corretamente, então decidiu pesquisar na internet, e encontrou a seguinte informação: “A fórmula para calcular a distância focal é a seguinte: D*D/(16*d), ou seja, Diâmetro multiplicado pelo Diâmetro dividido por 16 vezes a profundidade da parábola (Parabolóide). Fácil não é, mas para calcular, você tem que usar sempre as mesmas unidades de medida, por exemplo, uma antena de 1,2 metros de diâmetro, deve ser colocada na fórmula como 120 centímetros, pois a profundidade da parábola também será informada nesta unidade, por exemplo, 10 centímetros.

Então vamos aos cálculos da distância focal:

D*D/(16*d)

120 X 120/(16*10) = 1440 / 160 = 90.

Ou seja, em uma antena com 120 centímetros de diâmetro e 10 centímetros de profundidade da parábola a distância correta entre o fundo da antena ao receptor é de 90 centímetros.” (Fonte: Adaptado de https://gps.pezquiza.com/satelite/distancia-correta-entre-o-lnbf-e-o-fundo-da-antena-parabolica-focal-point/).

Com base no texto acima e, considerando uma antena parabólica de 2,00 metros de diâmetro, calcule:

a) O comprimento da haste (metade do parâmetro de uma de suas parábolas);
b) A equação da parábola (no plano xOy), considerando seu vértice na origem do plano e sua concavidade voltada para a direita;
c) A equação da diretriz da parábola do item anterior.

Atividade 3 (Elaborada pelo autor)

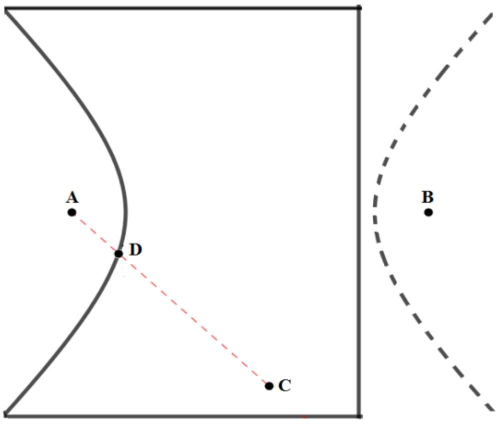
A mesa de sinuca da Figura 84 possui três lados retilíneos e um quarto lado hiperbólico.

Figura 84: Mesa de Sinuca Hiperbólica

Fonte: https://www.atractor.pt/matviva/geral/A/A02/hiperb.jpg

A figura abaixo (Figura 85) representa um esquema simplificado da sinuca hiperbólica, cujos focos estão situados nos pontos A e B.

Figura 85: Mesa de Sinuca Hiperbólica - Esquema



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma bola será tacada na direção CD, de forma a seguir, após o choque, a direção dada pelas propriedades da hipérbole. Desprezando o atrito entre a bola e a superfície da mesa, e quaisquer efeitos impostos pelo tipo de tacada.

a) Esboce a trajetória da bola após o choque;
b) Justifique a resposta do item **a** utilizando seus conhecimentos sobre as propriedades das cônicas.

CONCLUSÃO

O estudo das cônicas, indubitavelmente revolucionou a vida humana, revelando a importante contribuição da obra do “Grande Geômetra” – Apolônio de Perga. Sua relevância é comprovada pela influência nos estudos astronômicos de Ptolomeu, nas órbitas planetárias de Kepler, nas trajetórias dos projéteis de Galileu e mais tarde, mesmo que indiretamente, nos trabalhos de Isaac Newton e Pierre de Fermat.

Neste trabalho, ainda que de modo incipiente, buscamos apresentar um material de apoio para o planejamento e ministração de aulas sobre cônicas, em um nível básico, tomando como referência relatos de alunos e de alguns colegas de profissão.

Apresentamos um trabalho que dispõe de informações históricas, teoria e algumas de tantas aplicações existentes na ciência, engenharia, arquitetura, medicina, e em muitas outras áreas do conhecimento, que visam tornar o ambiente das aulas, mais agradáveis, no tocante à: linguagem simplificada que buscamos utilizar, sem, obviamente, desprezar o rigor conceitual mínimo necessário para uma boa aprendizagem, com o objetivo de conectar o aprendizado à realidade; apresentação de uma alternativa computacional – O GeoGebra – que envolva, inspire, motive e facilite a absorção dos conceitos e propriedades das cônicas e, ao mesmo tempo proporcione uma visualização menos abstrata da matemática concernente a esses conhecimentos.

No tocante ao aprofundamento dos estudos necessários àqueles que ingressarão no ensino superior na área de exatas e naturais, sugerimos a suplementação dos estudos desenvolvidos neste trabalho, como por exemplo: as tangências, o cálculo de comprimentos de arcos, determinação da concavidade, cálculo de áreas, cônicas em coordenadas polares, e etc.

Temos consciência da grande importância do estudo das cônicas, seja no ensino básico ou superior. A diversidade das aplicações desse conteúdo é a inquestionável comprovação dessa afirmação, porém sabemos da precariedade do seu ensino, fato este que nos inspirou à pesquisa, estudo e concretização deste trabalho monográfico.

Ensejamos auxiliar alunos, professores e simpatizantes da “Rainha das ciências” – a matemática, nos primeiros passos de um caminho, rumo a uma aprendizagem mais significativa.

REFERÊNCIAS

[1] ANDERSON, L. Duplicação do Cubo In: EVES, H. História da Geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[2] BOWSHER, L. E. História dos Termos Elipse, Hipérbole e Parábola. In: Eves, H. História da Geometria. São Paulo: Atual, 1992.

[3] BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[4] EVES, H. História da Geometria; tradução Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala. Hist. Geometria São Paulo: Atual Editora, 1992.

[5] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. Matemática. v. 3 São Paulo: FTD, 1992.

[6] PAIVA, M. R. Matemática, v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1ª edição, 1999.

[7] DANTE, L. R. Matemática Contexto & Aplicações, v.3. São Paulo: Editora Ática, 3ª edição, 2017.

[8] KÁTIA, C. S. S.; ROKUSABURO, K. Matemática, v.1 e v.3. São Paulo: Editora Saraiva, 1ª edição, 1998.

[9] BUCCHI, P. Curso prático de MATEMÁTICA, v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1ª edição, 2000.

[10] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. São Paulo, McGraw-Hill, 1987. 2ª ed.

[11] https://matcalc.blogspot.com/2015/06/menaecmus.html

[12] https://www.infoescola.com/biografias/arquimedes/

[13] http://www.matematica.br/historia/arquimedes.html

[14] http://ecalculo.if.usp.br/historia/apolonio_perga.htm

[15] http://www.geometriaanalitica.com.br/artigos/apolonio-de-perga.html

[16] https://www.fisica.interessante.com

[17] https://www.sohistoria.com.br/biografias/galileu/

[18] https://www.ebiografia.com/galileu_galilei/

[19] https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm15.pdf

[20] https://www.infoescola.com/astronomia/johannes-kepler/

[21] https://www.suapesquisa.com/quemfoi/kepler.htm

[22] https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversal/lk.php

[23] https://www.britannica.com/biography/Girard-Desargues

[24] http://clubes.obmep.org.br/blog/b_pierre-de-fermat/

[25] http://ecalculo.if.usp.br/historia/fermat.htm

[26] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Fermat.htm

[27] https://brasilescola.uol.com.br/biografia/edmond-halley.htm

[28] https://medium.com/ciencia-descomplicada/cientistas-halley-befdcb25cd29

[29] https://www.periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/viewFile/1167/1104

[30] https://www.ime.usp.br/~oliveira/conicaspubli.pdf

[31] LOPES, J. F. Cônicas e Aplicações. Dissertação São Paulo: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", dissertação de mestrado, 2011.

[32] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/aplicacoes.htm

[33] http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf

[34] http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/esp/esp.html

[35] http://alfaconnection.net/pag_avsf/luz0303.htm

[36] https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/luz/espelhos/espelhos-parabolicos-elipticos-e-hiperbolicos/

[37] https://www.infoescola.com/telescopios/telescopio-hubble/

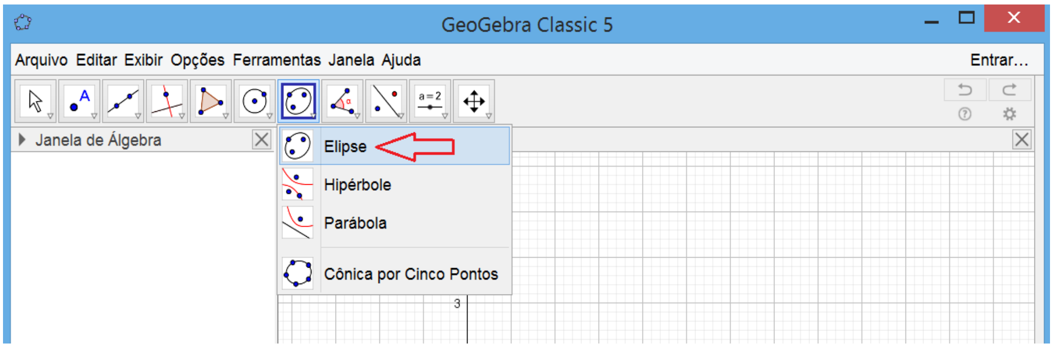
[38] https://brasilescola.uol.com.br/fisica/reflexao-luz.htm

APÊNDICE A – Construção de Elipses com o GeoGebra

1- Abra o Geogebra;

2- Enumerando da esquerda para a direita, click na 7ª ferramenta (cônicas), selecionando Elipse, como mostra a Figura 86;

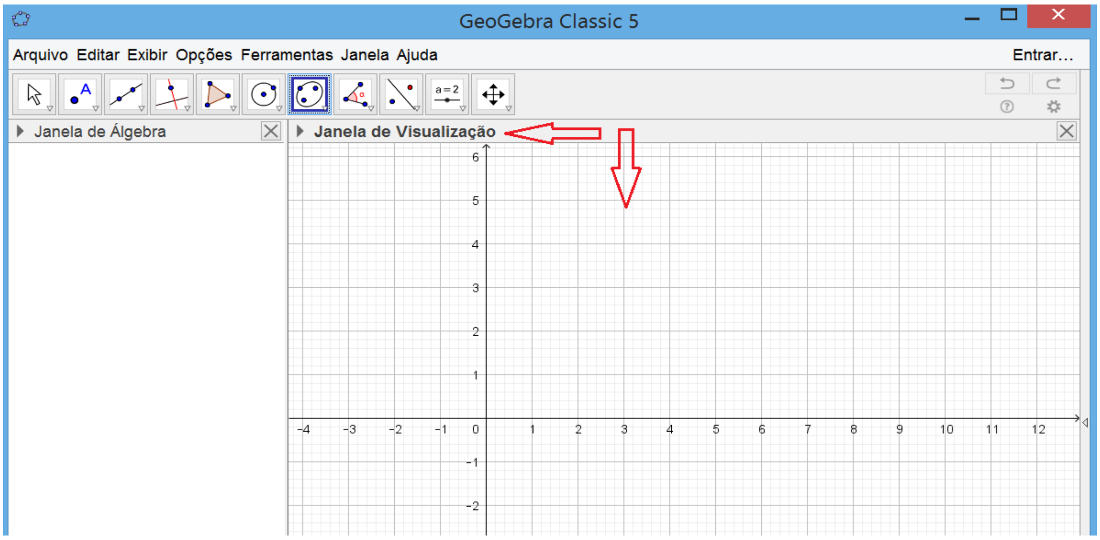
Figura 86: Construção da Elipse – Passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor

3- No campo "janela de visualização" (Figura 87) click em 3 pontos. Os dois primeiros serão os focos da elipse, e o terceiro será um ponto pertencente a ela.

Figura 87: Construção da Elipse – Passo 3



Fonte: Elaborada pelo autor

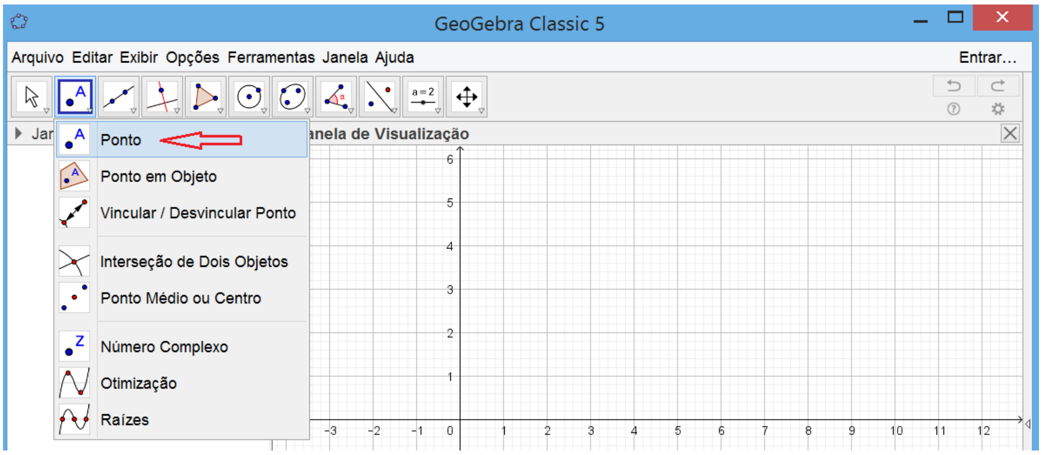
Observação: também é possível construir a elipse, escrevendo sua equação diretamente no campo "Entrada".

APÊNDICE B – Construção de Parábolas com o GeoGebra

1- Abra o Geogebra;

2- Enumerando da esquerda para a direita, click na segunda ferramenta, selecionando Ponto, como mostra a Figura 88;

Figura 88: Construção da Parábola – Passo 2

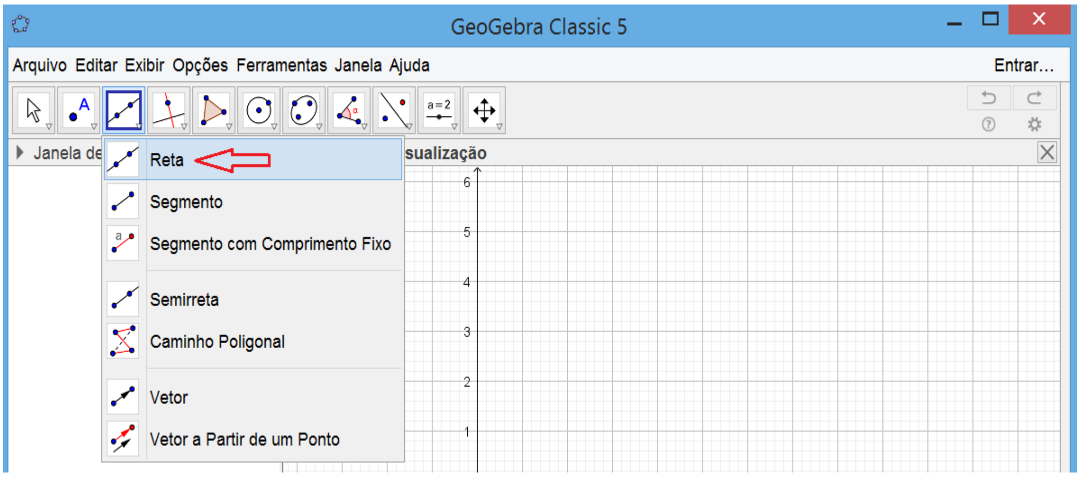


Fonte: Elaborada pelo autor

3- Click em um ponto no campo “Janela de Visualização” para escolher o foco da parábola;

4- Click na 3ª ferramenta (Reta), selecionando Reta, como mostra a Figura 89;

Figura 89: Construção da Parábola – Passo 4

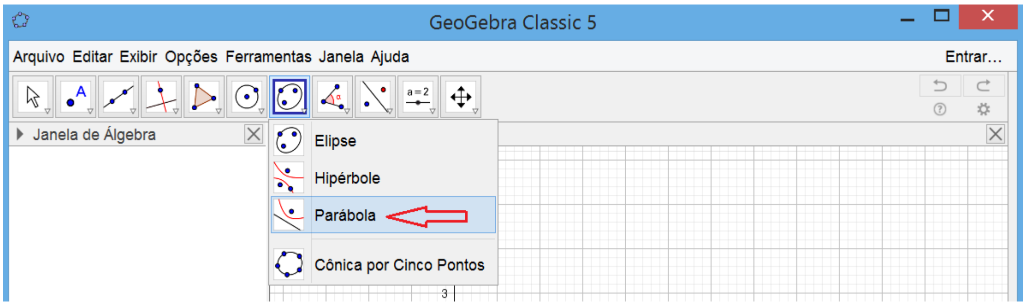


Fonte: Elaborada pelo autor

5- Click em dois pontos no campo “Janela de Visualização” para construir a diretriz da parábola;

6- Enumerando da esquerda para a direita, click na 7ª ferramenta (cônicas), selecionando Parábola, como mostra a Figura 90;

Figura 90: Construção da Parábola – Passo 6



Fonte: Elaborada pelo autor

7- Na “Janela de Visualização”, click no ponto escolhido como foco e na reta escolhida como diretriz.

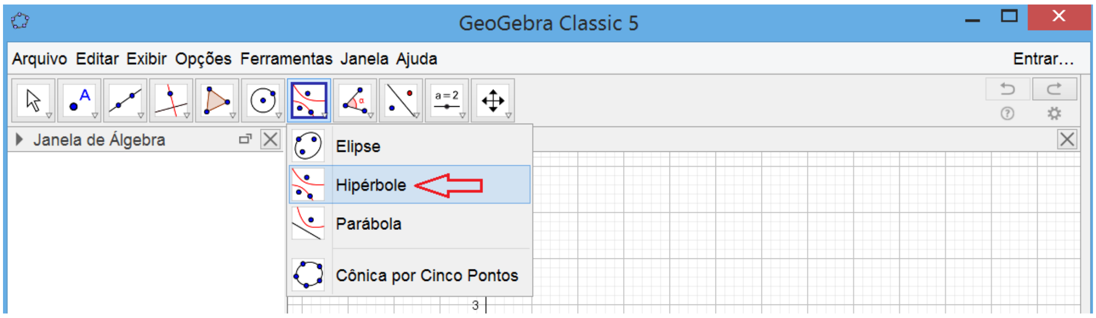
Observação: também é possível construir a parábola, escrevendo sua equação diretamente no campo “Entrada”.

APÊNDICE C – Construção de Hipérboles com o GeoGebra

1- Abra o Geogebra;

2- Enumerando da esquerda para a direita, click na 7ª ferramenta (cônicas), selecionando Elipse, como mostra a Figura 91;

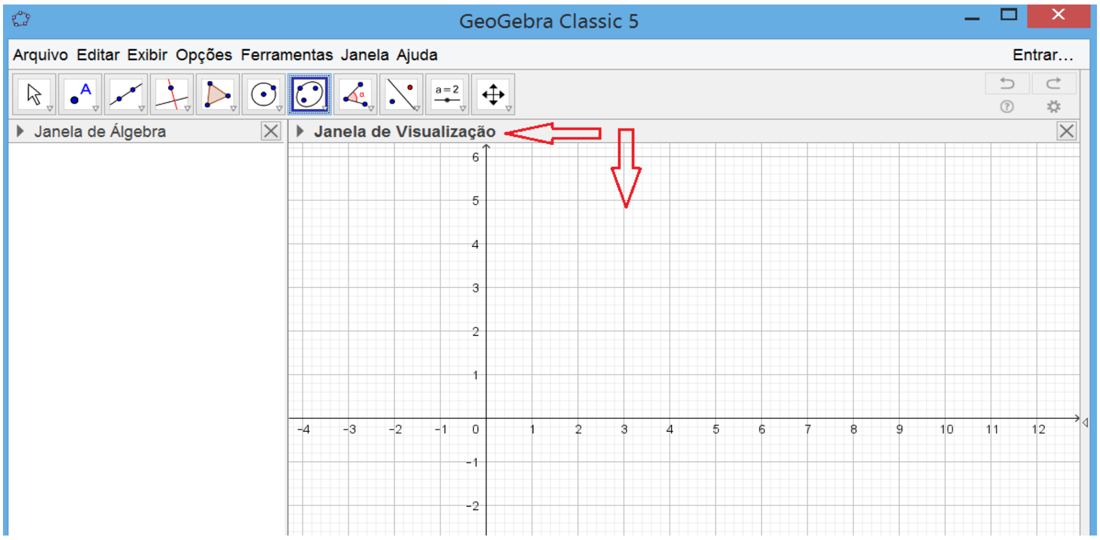
Figura 91: Construção da Hipérbole – Passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor

3- No campo "janela de visualização" (Figura 92) click em 3 pontos. Os dois primeiros serão os focos da hipérbole, e o terceiro será um ponto pertencente a ela.

Figura 92: Construção da Hipérbole – Passo 3



Fonte: Elaborada pelo autor

Observação: também é possível construir a hipérbole, escrevendo sua equação diretamente no campo "Entrada".